GIROGRUPOS E ALGUMAS INTERPRETAÇÕES GEOMÉTRICAS

Victória Corrêa Alves

Orientadora: Miriam Telichevesky

Os girogrupos são uma generalização dos grupos e eles representam um elo entre a geometria hiperbólica e a álgebra não associativa.

As transformações de Möbius no disco unitário complexo $D = \{z \in C \ : \ |z| < 1\}$ são estudadas há mais de 150 anos e elas são importantes por diversos motivos, entre eles o uso na geometria euclidiana e o fato de elas serem os únicos automorfismos do disco.
Podemos escrever a transformação de Möbius como:

$$z \to e^{i\theta} \frac{a+z}{1+\bar{a}z} = e^{i\theta}(a \oplus z), \ a, \ z \ \in D, \ \theta \in R$$

E definimos então a adição de Möbius dessa forma:

$$a \oplus z = \frac{a+z}{1+\bar{a}z}$$

A adição de Möbius não é comutativa nem associativa, definimos então as girações:

$$gyr[a, b] \ = \ \frac{a \oplus b}{b \oplus a} = \frac{1+a\bar{b}}{1+\bar{a}b} \ , \ \forall a, b \in D$$

As girações representam rotações do disco pelo seu centro. Note que as girações respeitam a adição de Möbius. Além disso, a inversa da giração gyr[a,b] é gyr[b,a], o que nos permite concluir que as girações são um automorfismo especial do grupóide $(G,\oplus)$

A adição de Möbius respeita a lei da girocomutatividade

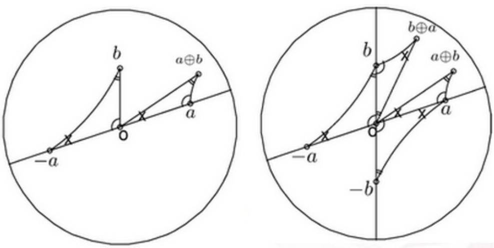
$$a \oplus b = gyr[a, b](b \oplus a) \ , \ \forall a, b \in D$$

E também a lei da giroassociativade à esquerda e à direita

$$a \oplus (b \oplus z) \ = \ (a \oplus b) \oplus gyr[a, b]z \ , \ \forall a, b, z \in D \qquad (a \oplus b) \oplus z = a \oplus (b \oplus gyr[b, a]z) \ , \ \forall a, b, z \in D$$

Descrição geométrica da operação $a \oplus b$

Considerando o plano hiperbólico e as transformações de Möbius podemos definir o mapa $\varphi u(z) = \frac{u+z}{1+\bar{u}z} \ , \ \forall u \in H$ e concluiremos que φu é uma translação hiperbólica.



O ponto $a \oplus b$ é o ponto obtido pela troca do triângulo $\Delta(-a, o, b)$ paralelo à reta que passa pelos pontos -a,a pelo triângulo $\Delta(o, a, a \oplus b)$

Referências:

Vermeer, J.: A geometric interpretation of Ungar's addition and of gyration in the hyperbolic plane. Topol. Appl. 152(3), 226–242 (2005)
A. A. Ungar, A Gyrovector Space Approach to Hyperbolic Geometry. Morgan. & Claypool Pub., San Rafael, California, 2009.
A.-A. UngarFrom Möbius to gyrogroups Amer. Math. Monthly, 115 (2008), pp. 138-144.