

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Sobre soluções positivas de problemas  
semipositivos elípticos com dois parâmetros**

Diego Marcon Farias

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre, 13 de Agosto de 2009.

Dissertação submetida por Diego Marcon Farias<sup>1</sup> como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (UFRGS)

Banca Examinadora:

Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPGMat - UFRGS)

Dr. José Afonso Barrionuevo (PPGMAp - UFRGS)

Dr. Leonardo Prange Bonorino (PPGMat - UFRGS)

Data da Apresentação: 13 de Agosto de 2009.

---

<sup>1</sup>Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

## AGRADECIMENTOS

Tenho um monte de pessoas para agradecer. Espero que elas, de alguma maneira, já saibam disso. Até porque ninguém vai chegar algum dia a ler o que agora está aqui impresso. Se tu é uma exceção, eu espero não te decepcionar. Mas vou. Estas páginas acabam sempre iguais.

À minha família. Vocês nunca vão sair do meu coração. Vocês são demais. Tu aí provavelmente não é algum deles. Deixe-me esclarecer: estou agradecendo ao Júlio, à Maria e à Cíntia. Pessoas que vão comigo aonde quer que eu vá.

Claro, também ao resto da família que, de alguma maneira, esteve presente na minha vida. Especialmente à minha vó Zilma, essa pessoa maravilhosa, amiga de qualquer hora, que eu adoro tanto.

Agradeço também a todos os cachorros que tive. Todos os três. O primeiro não era exatamente meu. Era um vira-lata que sempre tava pela frente da minha casa quando eu era pequeno. Nem lembro seu nome. Se algum dia existiu... Os outros são o Rex e o Maradona. Muito amigos meus, companheiros inesquecíveis.

Aos meus amigos todos. Especialmente os que cito abaixo.

Pessoal do pôquer! Com'on!, o pôquer veio bem depois... Somos amigos de anos. Conto com vocês pra qualquer coisa. Pacheco, Gabriel, Josi, Rodrigo e William. Sim!, a ordem é alfabética. Vocês sabem o quanto significam pra mim. Ao menos espero, já que eu nem sei explicar.

Amigos da UFRGS! Nunca imaginava que conseguiria tantos amigos na faculdade. Uns mais próximos. Outros nem tanto. Alguns que nem conversei muito e que, por isso, me deixaram um peso na consciência. Sintam-se todos agradecidos.

Também a algumas amigadas mais distantes e não menores: Raquel Farias, "Lelé", Ju Souza, Thiago "Mau-Mau", Guto. Talvez outros... Nunca vou saber.

Não ficaria essa página completa se deixasse de agradecer à família Pacheco da Silva, Marcus, Lenise, Carol e Débora, que sempre me deu apoio e suporte desde o início dos meus estudos.

Ah!, as pessoas da UFRGS acharam que eu não ia citar nomes. Ou não, nem vão ler... Mas vou! São eles: Nicolau, Diegão, Patropy, Pati, Ju Capaverde, Carol, Lucinéia, Ju Ziebell, João, Di Chaves, Thaisa Tamusiunas, Thaisa Müller, Renê, Raquel, Elisa, Andrea, Adri, Douglas, Kleiton, Samuel, Debbie, Rodrigo... A ordem é completamente aleatória. Verdade, olhem



## RESUMO

Nesta dissertação, estudamos principalmente problemas semipositivos elípticos com dois parâmetros, a saber, problemas de valor de fronteira da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) + \mu f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} .$$

É claro que são feitas algumas hipóteses sobre  $f$  e  $g$ , assim como sobre as constantes  $\lambda$  e  $\mu$ . Começamos apresentando os pré-requisitos necessários ao entendimento de tais problemas. Discutimos também alguns resultados recentes sobre problemas elípticos positivos e semipositivos.

## ABSTRACT

In this master thesis, we mainly study 2-parameter semipositone problems of elliptic type, ie, boundary value problems of the form

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) + \mu f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} .$$

Of course, we made some assumptions over  $f$  and  $g$ , and over the constants  $\lambda$  and  $\mu$  as well. We begin presenting some prerequisites for the study of such problems. We also discuss some recently obtained theorems for positone and semipositone elliptic problems.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>4</b>
2.1	Teorema da Divergência e Desigualdades . . . . .	4
2.2	As Equações de Laplace e Poisson . . . . .	7
2.2.1	Funções de Green . . . . .	10
2.3	Espaços de Sobolev . . . . .	12
2.4	Autovalores do Laplaciano . . . . .	15
2.5	Método de Sub/Supersolução . . . . .	16
2.6	A Geometria do Problema . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Teorema do Passo da Montanha</b>	<b>21</b>
3.1	Ideias do Cálculo de Variações . . . . .	21
3.2	Teorema do Passo da Montanha . . . . .	23
3.3	Aplicação a Equações Diferenciais Parciais . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Problemas Positons e Semipositons</b>	<b>35</b>
4.1	Problemas Positons . . . . .	35
4.2	Problemas Semipositons . . . . .	36
4.3	Problema Principal . . . . .	40
4.3.1	Demonstração do Teorema 4.3.1 . . . . .	43
4.4	Identidade de Derrick-Pohozaev . . . . .	52
4.5	Não Unicidade de Soluções Positivas . . . . .	56
4.6	Não existência de Solução Positiva . . . . .	57

# Capítulo 1

## Introdução

A maioria dos problemas em equações diferenciais parciais são emergentes da Física, Química ou Engenharia. Um exemplo é o problema que envolve processos de difusão, como a Equação do Calor, onde procuramos uma função que nos indique a temperatura de cada ponto de um sólido de acordo com sua posição no espaço e no tempo, conhecendo o “formato” de tal sólido e algumas de suas propriedades no tempo inicial.

Um caso bem geral seria tentar obter a temperatura  $u(x, t)$  em  $\Omega$ , na posição  $x$  e tempo  $t$ , conhecendo a “condutividade de calor”  $k(x)$  e  $f(x, u(x, t), t)$  (que pode ser uma fonte externa). Tentamos determinar  $u$  sabendo que a seguinte relação é válida:

$$u_t = \operatorname{div}(k\nabla u) + f(x, u, t).$$

Um problema de interesse é determinar a temperatura de equilíbrio, independente do tempo, ie, satisfazendo  $u_t = 0$ . Em particular, quando  $k$  é constante e a fonte externa independente de  $x$  e  $t$ , isto é, não varia com o tempo nem com a posição no sólido, obtemos um problema não linear de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $\lambda > 0$ , e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado e conexo com fronteira  $\partial\Omega$  suave.

Alguns resultados foram obtidos no caso em que  $f$  é positiva e monótona. Tais problemas são conhecidos como *Problemas Positons* (terminologia sugerida por Cohen e Keller em [9]). A motivação para o estudo de tais problemas é o fato de a resistência aumentar com a temperatura. No Capítulo 4,



estudaremos apenas um caso simples de tais problemas que foi abordado em [13].

Mais desafiadores são os problemas em que admitimos que  $f$  possa ser negativa. Estes são os chamados *Problemas Semipositivos*. Mais precisamente, procuramos soluções de (1.1) no caso em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado e conexo com fronteira  $\partial\Omega$  suave e  $f$  monótona é tal que  $f(0) < 0$ . Tais problemas surgem em flambagem de sistemas mecânicos, reações químicas, combustão e gerenciamento de recursos naturais.

Estaremos preocupados em encontrar soluções positivas para (1.1), que, segundo Lions [15], é o caso mais interessante do ponto de vista das aplicações.

Nesse sentido, apresentamos um resultado de [13], que ilustra muito bem uma das técnicas utilizadas ao enfrentar tais problemas, a saber, o Método de Sub/supersolução.

O principal objetivo desta dissertação é a análise dos resultados obtidos por Caldwell, Castro, Shivaji e Unsurangsiem em [4]. Estes se referem a soluções positivas do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) + \mu f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1.2)$$

onde  $\lambda, \mu > 0$  e  $f$  e  $g$  são ambas monótonas com  $f(0) < 0$  e  $g(0) > 0$ . É fácil ver que (1.2) é um problema semipositivo quando “ $\mu$  é grande e  $\lambda$  pequeno”, pois assim  $\lambda g(0) + \mu f(0) < 0$ . O resultado principal é o Teorema 4.3.1, que garante a existência, para  $\mu > 0$  fixado, de uma solução positiva (com norma  $L^\infty$  grande) de (1.2), para  $\lambda$  suficientemente pequeno. Este resultado será também importante pois garantirá a existência de duas soluções positivas em alguns casos (Ver Teorema 4.5.1).

Os métodos utilizados para a demonstração destes resultados envolvem ideias do Cálculo das Variações (como o Teorema do Passo da Montanha) e o Método de Sub/supersolução. Tentamos não deixar de lado nenhuma definição, teorema ou proposição importante para o entendimento dos resultados e tornar a apresentação o mais completa possível.

# Capítulo 2

## Considerações Iniciais

Neste capítulo começamos a desenvolver a teoria e os pré-requisitos necessários ao bom entendimento de todos os resultados deste trabalho. Na primeira seção, apresentamos o Teorema da Divergência, de fundamental importância, e as Desigualdade de Hölder. Em seguida, mostramos resultados básicos sobre funções harmônicas e soluções da equação de Poisson, incluindo princípios de máximo e mínimo, funções de Green e uma breve introdução aos espaços de Sobolev. Problemas de autovalores são tratados na Seção 2.4. Outro resultado fundamental é o Teorema 2.5.9, o Método de Sub/Supersolução. Finalmente, na última seção explicamos como entendemos a regularidade de um domínio e apresentamos o Teorema da Vizinhança Tubular.

### 2.1 Teorema da Divergência e Desigualdades

Entre os teoremas mais importantes do Cálculo em Várias Variáveis encontra-se o Teorema da Divergência que apresentamos a seguir. Uma demonstração pode ser encontrada em [20].

**Teorema 2.1.1** (Teorema da Divergência). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$ . Se  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$  em  $\Omega$  e contínua em  $\bar{\Omega}$ , então*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS,$$

onde  $\nu$  é o vetor normal unitário exterior a  $\Omega$  em  $\partial\Omega$ .

Um corolário imediato e muito importante é o

**Corolário 2.1.2** (Identidades de Green). *Sejam  $u$  e  $v \in C^2(\overline{\Omega})$ , onde  $\Omega$  é como no Teorema 2.1.1. Então,*

$$(i) \int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS;$$

$$(ii) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS;$$

$$(iii) \int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS.$$

**Observação 2.1.3.** A fórmula em (ii) acima é conhecida como a Primeira Identidade de Green. A Segunda Identidade de Green é como conhecemos a fórmula em (iii).

*Demonstração.* (i) Basta considerar  $F = \nabla u$  no Teorema 2.1.1.

(ii) Observe que  $\operatorname{div}(u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v$  e aplique o Teorema 2.1.1.

(iii) Basta escrever (ii) trocando  $u$  por  $v$  e subtrair as duas, para obter (iii).  $\square$

**Definição 2.1.4.** O espaço  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$  é o espaço de todas as funções (classes de funções que coincidem em quase todo ponto) mensuráveis  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty.$$

Uma norma em  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , é

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definimos também  $L^\infty(\Omega)$  o espaço de todas as funções (classes de funções que coincidem em quase todo ponto) mensuráveis  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty,$$

onde o símbolo  $\sup |u|$  indica o supremo essencial de  $u$ , ou seja, o ínfimo dos  $M \geq 0$  para os quais o conjunto  $\{x \in \Omega \mid |u(x)| > M\}$  tem medida 0. Uma norma em  $L^\infty(\Omega)$  é

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

**Teorema 2.1.5.** *O espaço  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , é de Banach quando equipado com a norma acima.*

*Demonstração.* Ver qualquer livro de Teoria da Medida. Por exemplo, [19].  $\square$

**Teorema 2.1.6** (Desigualdade de Young). *Suponhamos que  $1 < p, q < \infty$  e que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*Se  $a, b > 0$ , então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

*Demonstração.* Usando que a função  $t \mapsto e^t$  é convexa, obtemos

$$ab = e^{\log ab} = e^{\frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q} \leq \frac{e^{\log a^p}}{p} + \frac{e^{\log b^q}}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

como queríamos.  $\square$

**Teorema 2.1.7** (Desigualdade de Hölder). *Suponhamos que  $1 < p, q < \infty$  e que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*Se  $u \in L^p(\Omega)$  e  $v \in L^q(\Omega)$ , então*

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |v|^q dx \right)^{1/q}.$$

*Demonstração.* Se  $u = 0$  ou  $v = 0$ , a desigualdade é verificada trivialmente. Supondo agora que  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^q(\Omega)} = 1$  e, aplicando a Desigualdade de Young, obtemos

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \int_{\Omega} \left( \frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^q}{q} \right) = 1.$$

Se  $u \in L^p(\Omega)$  e  $v \in L^q(\Omega)$  são arbitrários, basta aplicar o que foi feito acima para  $\frac{u}{\|u\|_{L^p(\Omega)}}$  e  $\frac{v}{\|v\|_{L^q(\Omega)}}$ .  $\square$

**Observação 2.1.8.** No caso  $p = 1$  e  $q = \infty$ , é fácil ver que vale

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|v\|_{\infty} \int_{\Omega} |u| dx,$$

para  $u \in L^1(\Omega)$  e  $v \in L^{\infty}(\Omega)$ .

## 2.2 As Equações de Laplace e Poisson

Entre as equações diferenciais parciais mais importantes certamente se encontram a equação de Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega$$

e a equação de Poisson

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega,$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são dados e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é a incógnita.

**Definição 2.2.1.** Dizemos que uma função  $u \in C^2(\Omega)$  satisfazendo a equação de Laplace é uma *função harmônica*.

**Observação 2.2.2.** Usamos a seguinte notação para a média de  $u$  em  $A$ :

$$\fint_A u(y) dy = \frac{1}{|A|} \int_A u(y) dy,$$

onde  $|A|$  indica a medida do conjunto  $A$ .

**Teorema 2.2.3.** Se  $u \in C^2(\Omega)$  é uma função harmônica, então para todo  $x \in \Omega$  e  $r > 0$  tais que  $B_r(x) \subset\subset \Omega$ , temos

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y) dy \quad (2.1)$$

e

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y) dS. \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Definimos

$$\phi(r) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y) dS.$$

Observe que  $\phi(r) \rightarrow u(x)$  quando  $r \rightarrow 0$ , pois  $u$  é contínua. O teorema estará demonstrado então ao verificarmos que  $\phi$  é constante. De fato, pelo Corolário 2.1.2 do Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{d}{dr} \left( \fint_{\partial B_1(0)} u(x + rz) dS_z \right) \\ &= \fint_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + rz) \cdot z dS_z = \fint_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x + rz) dS_z \\ &= \fint_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS = \fint_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

como queríamos. Note que (2.1) é imediato de (2.2).  $\square$

**Teorema 2.2.4** (Princípio do Máximo). *Seja  $\Omega$  um domínio limitado contido em  $\mathbb{R}^n$ . Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  é tal que*

$$-\Delta u \leq 0.$$

*Então,  $u$  não pode atingir seu máximo no interior de  $\Omega$ , a menos que seja constante. Em particular,*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

*Demonstração.* Suponhamos que exista  $x_0 \in \Omega$  tal que

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u =: M$$

. Definimos  $\mathcal{A} = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$ . É claro que  $\mathcal{A}$  é fechado em  $\Omega$ . Como  $\Omega$  é conexo e estamos supondo  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ , a demonstração estará concluída ao mostrarmos que  $\mathcal{A}$  é também aberto em  $\Omega$ . De fato, seja  $x \in \mathcal{A}$ . Pela Propriedade do Valor Médio, temos

$$M = u(x) = \int_{B_r(x)} u(y) dy \leq M.$$

Assim,

$$\int_{B_r(x)} (M - u) dy = 0$$

e, como  $M - u \geq 0$  em  $B_r(x)$ , temos  $u \equiv M$  em  $B_r(x)$ , mostrando que  $\mathcal{A}$  é aberto em  $\Omega$ , como queríamos.  $\square$

**Definição 2.2.5.** Dizemos que um ponto  $x \in \partial\Omega$  satisfaz a condição da esfera interior se existem  $y \in \Omega$  e  $r > 0$  tais que  $B_r(y) \subset \Omega$  e  $x \in \partial B_r(y)$ . Analogamente, definimos a condição da esfera exterior.

**Observação 2.2.6.** Se  $\Omega$  é de classe  $C^2$  (Ver Seção 2.6), todos os pontos de  $\partial\Omega$  satisfazem as condições da esfera interior e exterior.

**Teorema 2.2.7** (Princípio do Máximo de Hopf). *Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Suponhamos também que  $-\Delta u \leq 0$  em  $\Omega$  e que existe  $x_0 \in \partial\Omega$*

tal que  $u(x_0) > u(x)$ , para todo  $x \in \Omega$ . Finalmente, suponhamos que  $\Omega$  satisfaça a condição da bola interior em  $x_0$ . Então,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde  $\nu$  é o vetor unitário normal exterior a  $\Omega$  em  $x_0$ .

*Demonstração.* Por hipótese, existem  $r > 0$  e  $y_0 \in \Omega$  tais que  $B_r(y_0) \subset \Omega$  e  $x_0 \in \partial B_r(y_0)$ . Por simplicidade, vamos supor  $y_0 = 0$ . Definimos  $v : B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$v(x) = e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}.$$

Assim,

$$\nabla v(x) = -2\lambda x e^{-\lambda|x|^2}.$$

Segue então que, para  $\lambda \geq 2n/r^2$  e  $\frac{r}{2} \leq |x| \leq r$ ,

$$\begin{aligned} -\Delta v &= -\operatorname{div}(\nabla v) = 2\lambda n e^{-\lambda|x|^2} - 4\lambda^2|x|^2 e^{-\lambda|x|^2} \leq \\ &2\lambda n e^{-\lambda|x|^2} - \lambda^2 r^2 e^{-\lambda|x|^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $u(x_0) > u(x)$  em  $\Omega$ , temos, por compacidade, que  $u(x_0) \geq u(x) + \varepsilon v(x)$  em  $\partial B_{r/2}(0)$ , para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Como, além disso,  $v \equiv 0$  em  $\partial B_r(0)$ , temos

$$u(x_0) \geq u(x) + \varepsilon v(x) \text{ em } \partial R,$$

onde  $R = \{x \in \Omega; \frac{r}{2} \leq |x| \leq r\}$ . Note que

$$-\Delta(u + \varepsilon v - u(x_0)) \leq 0$$

e, portanto, pelo Princípio do Máximo (Teorema 2.2.4),  $u + \varepsilon v - u(x_0) \leq 0$  em  $R$ . Assim, já que  $u(x_0) + \varepsilon v - u(x_0) = 0$ , obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \geq 0,$$

ou ainda,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = 2\lambda r^2 e^{-\lambda r^2} > 0,$$

como queríamos. □

### 2.2.1 Funções de Green

Vamos fazer alguns cálculos formalmente. Observe que, como a equação de Laplace é invariante por rotações, ao procurarmos por uma função  $u$  que satisfaça tal equação, é natural procurarmos por funções que sejam radialmente simétricas, isto é,  $u(x) = v(|x|)$ , onde  $v$  é uma função de variável real. Desse modo,  $v$  deve satisfazer

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

Usando métodos elementares para resolução de equações diferenciais ordinárias, obtemos, para  $n \geq 3$ ,

$$u(x) = v(|x|) = b|x|^{2-n} + c.$$

Se for  $n = 2$ , obtemos

$$u(x) = v(|x|) = b \log |x| + c.$$

Isso motiva o seguinte:

**Definição 2.2.8.** Definimos a *solução fundamental* para a Equação de Laplace por

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} |x|^{2-n}, & \text{se } n \geq 3 \end{cases} \quad (2.4)$$

**Observação 2.2.9.** Acima,  $\omega_n$  denota o volume da bola unitária do  $\mathbb{R}^n$  e a escolha das constantes  $a$  e  $b$  deve ficar clara em seguida (Proposição 2.2.10).

As proposições seguintes mostram a importância da solução fundamental. Começamos com a fórmula de representação de Green.

**Proposição 2.2.10.** *Suponha que  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , onde  $\Omega$  é limitado com  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$ . Então*

$$u(x) = - \int_{\Omega} \Gamma(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \left( \Gamma(y-x) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) - u(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(y-x) \right) dS.$$



*Demonstração.* Para  $r > 0$  tal que  $B_r(x) \subset\subset \Omega$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_r(x)} \Gamma(x-y) \Delta u \, dy &= \int_{\partial\Omega} \left( \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) - u(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y) \right) dS(y) \\ &+ \int_{\partial B_r(x)} \left( \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) - u(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y) \right) dS(y), \end{aligned}$$

onde, na última integral,  $\eta$  é o vetor normal unitário exterior à bola  $B_r(x)$  em  $\partial B_r(x)$ . Como  $\Gamma$  é integrável e  $\Delta u$  limitado em  $\Omega$ , temos

$$\int_{\Omega \setminus B_r(x)} \Gamma(x-y) \Delta u \, dx \longrightarrow \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u \, dx \text{ quando } r \rightarrow 0.$$

Além disso, é fácil ver que, fazendo  $r \rightarrow 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(x)} \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) \, dx &\longrightarrow 0 \text{ e} \\ \int_{\partial B_r(x)} u(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y) \, dS &\longrightarrow u(x), \end{aligned}$$

concluindo a demonstração da proposição.  $\square$

**Observação 2.2.11.** Se  $u$  for solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.5)$$

então a fórmula acima nos diz que

$$u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(y-x) f(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \left( \Gamma(y-x) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) - g(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(y-x) \right) dS. \quad (2.6)$$

O problema é que normalmente ou temos informações sobre  $u$  em  $\partial\Omega$  ou sobre  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ . Uma maneira de contornar esse problema é, para cada  $x \in \Omega$ , considerar uma função harmônica em  $\Omega$  que coincida com a solução fundamental na fronteira. Mais precisamente, considerar  $h_x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} \Delta h_x = 0 & \text{em } \Omega \\ h_x(y) = \Gamma(x-y) & \text{para } y \in \partial\Omega \end{cases}. \quad (2.7)$$

Assim, pela Segunda Identidade de Green (Corolário 2.1.2(iii)),

$$0 = \int_{\Omega} h_x \Delta u \, dy + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial h_x}{\partial \eta} - h_x \frac{\partial u}{\partial \eta} \, dS. \quad (2.8)$$

Agora, somando (2.6) e (2.8), obtemos

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) \, dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \eta}(x, y) u(y) \, dS, \quad (2.9)$$

onde  $G(x, y) := \Gamma(y - x) - h_x(y)$ .

**Definição 2.2.12.** Definindo  $D = \{(x, x) | x \in \Omega\}$ , a função  $G : (\Omega \times \Omega) \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$  como definida acima é chamada *Função de Green* do problema.

O que fizemos acima, de certa maneira, apenas transfere o problema. Agora precisamos encontrar uma função  $h$  como em (2.7). Isso pode ser extremamente complicado, mas para alguns casos (como a bola ou o semi-espaço) a função de Green é conhecida explicitamente. É importante, para nossos propósitos, o seguinte.

**Teorema 2.2.13.** *Suponhamos que  $\Omega$  satisfaça a condição da esfera interior e exterior. Então, existe a função de Green  $G$  associada a  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Ver [16], onde é apresentada uma prova muito bonita, devida a Peter D. Lax, como consequência do Teorema de Hahn-Banach.  $\square$

## 2.3 Espaços de Sobolev

A referência principal e recomendada é o livro [11] de L. C. Evans.

**Definição 2.3.1.** Sejam  $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$  e  $\alpha$  um multi-índice. Dizemos que  $v$  é a  $\alpha$ -ésima derivada fraca de  $u$  se

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx, \quad (2.10)$$

para qualquer função teste  $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ . Se este for o caso, escrevemos  $D^{\alpha}u := v$ .

**Definição 2.3.2.** O espaço de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  é definido como o espaço de funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  pertencentes a  $L^p(\Omega)$  tais que  $D^{\alpha}u$ , a  $\alpha$ -ésima derivada fraca de  $u$ , existe e pertence a  $L^p(\Omega)$ , para todo multi-índice  $\alpha$  tal que  $|\alpha| \leq k$ .

**Definição 2.3.3.** Podemos definir uma norma em  $W^{k,p}(\Omega)$  por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^p \right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |D^{\alpha}u| & \text{se } p = \infty \end{cases} \quad (2.11)$$

onde indicamos por  $\sup_{\Omega} |f|$  o supremo essencial de  $f$  em  $\Omega$ .

**Teorema 2.3.4.** *O espaço de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach quando equipado com a norma dada por (2.11).*

**Definição 2.3.5.** O espaço  $W_0^{k,p}(\Omega)$  é o fecho de  $C_c^{\infty}(\Omega)$  em  $W^{k,p}(\Omega)$ , em relação à norma definida por (2.11). Intuitivamente, o espaço  $W_0^{k,p}(\Omega)$  é o espaço das funções de  $W^{k,p}(\Omega)$  que se anulam em  $\partial\Omega$ , juntamente com suas derivadas até a ordem  $k - 1$ .

**Teorema 2.3.6** (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). *Supondo que  $1 \leq p < n$ , escrevemos*

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

*Então, existe  $C = C(n, p)$  tal que, para qualquer  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ , temos*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.12)$$

A seguir, vemos dois corolários muito importantes do Teorema 2.3.6.

**Corolário 2.3.7** (Estimativas para  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < n$ ). *Suponhamos que  $\Omega$  é um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$ , com  $\partial\Omega \in C^1$  (Ver Seção 2.6). Suponhamos também que  $1 \leq p < n$  e que  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Então, existe  $C = C(p, n, \Omega)$  tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

*Em particular,  $u \in L^{p^*}(\Omega)$ .*

**Observação 2.3.8.** O Corolário 2.3.7 mostra que, no caso de  $\Omega$  ser um aberto limitado com  $\partial\Omega \in C^1$ ,  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ , para qualquer  $q \in [1, p^*]$ .

**Corolário 2.3.9** (Estimativas para  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < n$ ). *Suponhamos que  $\Omega$  é um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$ . Suponhamos também que  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  para algum  $1 \leq p < n$ . Então, para cada  $q \in [1, p^*]$ , existe  $C = C(p, q, n, \Omega)$  tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Observação 2.3.10.** O Corolário 2.3.9 implica que em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  limitado, as normas  $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$  e  $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$  são equivalentes. Assim, podemos pensar em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  como um espaço equipado com a norma  $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$  e, de fato, é isso que faremos nos capítulos seguintes.

**Teorema 2.3.11** (Desigualdade de Morrey). *Suponhamos que  $n < p < \infty$ . Então existe  $C = C(p, n)$  tal que, para toda  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.13)$$

onde

$$\gamma = 1 - \frac{n}{p}.$$

**Teorema 2.3.12** (Desigualdades de Sobolev). *Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$  com  $\partial\Omega \in C^1$ . Suponhamos que  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ .*

(i) Se

$$k < \frac{n}{p}, \quad (2.14)$$

então  $u \in L^q(\Omega)$ , onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n},$$

e existe  $C = C(k, p, n, \Omega)$  tal que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \quad (2.15)$$

(ii) Se

$$k > \frac{n}{p}, \quad (2.16)$$

então  $u \in C^{k - [\frac{n}{p}] - 1, \gamma}(\Omega)$ , onde

$$\gamma = \begin{cases} \left[ \frac{n}{p} \right] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{se } \frac{n}{p} \text{ não é inteiro} \\ \gamma < 1, & \text{se } \frac{n}{p} \text{ é inteiro} \end{cases},$$

e existe  $C = C(k, p, n, \gamma, \Omega)$  tal que

$$\|u\|_{C^{k - [\frac{n}{p}] - 1, \gamma}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \quad (2.17)$$

**Teorema 2.3.13** (de Compacidade de Rellich-Kondrachov). *Suponhamos que  $\Omega$  é aberto limitado com  $\partial\Omega \in C^1$  e  $1 \leq p < n$ . Então, para qualquer  $q \in [1, p^*)$ ,*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega).$$

**Teorema 2.3.14** (Ver [12], pp. 242). *Seja  $1 < p < \infty$  e suponhamos que  $\Delta u \in L^p(\Omega)$ . Então, para todo  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ , tem-se*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2.18)$$

## 2.4 Autovalores do Laplaciano

**Teorema 2.4.1.** *Considere o problema de autovalores*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.19)$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado do  $\mathbb{R}^n$ . Então:

- (i) Cada autovalor de  $-\Delta$  é real;
- (ii) Se repetirmos cada autovalor de acordo com sua multiplicidade (que é finita), temos

$$\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty},$$

onde

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

e

$$\lambda_k \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

- (iii) Existe uma base ortonormal  $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$  de  $L^2(\Omega)$ , onde  $w_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$  é uma autofunção correspondente ao autovalor  $\lambda_k$ :

$$\begin{cases} -\Delta w_k = \lambda w_k & \text{em } \Omega \\ w_k = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}. \quad (2.20)$$

(iv) O primeiro autovalor de  $-\Delta$ ,  $\lambda_1$ , tem multiplicidade 1. Mais precisamente, existe uma função  $w_1$ , positiva em  $\Omega$ , tal que

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = \lambda_1 w_1 & \text{em } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.21)$$

e qualquer solução fraca de (2.21) em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  é um múltiplo de  $w_1$ .

*Demonstração.* Uma boa referência para a demonstração é [11]. □

## 2.5 Método de Sub/Supersolução

Começamos a seção com um resultado interessante obtido por P. Clément e G. Sweers [7], o Método de Sub/Supersolução para soluções contínuas. Para demonstrá-lo, precisaremos de um teorema de ponto fixo (Corolário 2.5.4).

**Teorema 2.5.1** (Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff). *Sejam  $X$  um espaço vetorial normado,  $K \subset X$  não vazio, convexo e compacto e  $f : K \rightarrow K$  um operador contínuo. Então  $f$  possui um ponto fixo em  $K$ , isto é, existe  $p \in K$  tal que  $f(p) = p$*

**Observação 2.5.2.** O Teorema acima é uma versão simplificada do Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff que, na verdade, prova a existência de pontos fixos quando  $X$  é um espaço mais geral, a saber, um espaço vetorial topológico localmente convexo. Da mesma maneira, o Corolário seguinte é válido quando  $X$  é um espaço de Fréchet. Tal nomenclatura é um tanto “pesada” para os propósitos deste trabalho e este foi o motivo de simplificá-la. Em toda sua generalidade, estes resultados podem ser encontrados em Rudin [18].

**Definição 2.5.3.** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $A \subset X$  um subconjunto. Definimos  $co(A)$ , a *envoltória convexa de  $A$* , como sendo o menor subconjunto convexo de  $X$  que contém  $A$ . Equivalentemente,

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid x_i \in A \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \text{ com } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Corolário 2.5.4.** *Se  $X$  é um espaço de Banach,  $K \subset X$  é compacto não vazio e  $f : X \rightarrow K$  é uma aplicação contínua, então  $f$  possui um ponto fixo.*

*Demonstração.* É fácil ver que  $\overline{co(K)}$  é um subconjunto convexo, compacto e não vazio de  $X$ . Considerando a restrição de  $f$  à  $\overline{co(K)}$ , temos um operador contínuo e portanto, pelo Teorema 2.5.1,  $f$  possui um ponto fixo.  $\square$

O Teorema seguinte afirma a existência de uma solução entre uma subsolução e uma supersolução. A demonstração que apresentamos é devida a P. Clément e G. Sweers [7]. Na verdade, uma afirmação mais forte foi demonstrada por E. Dancer e G. Sweers em [10], afirmando a existência de uma solução minimal  $\underline{u}$  e uma maximal  $\bar{u}$  satisfazendo o seguinte:

$$u \text{ solução} \implies \underline{u} \leq u \leq \bar{u}.$$

**Definição 2.5.5.** Dizemos que  $u \in C(\bar{\Omega})$  é uma solução (subsolução, supersolução) contínua de (2.22) (abaixo) quando, para qualquer  $v \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $v \geq 0$  em  $\bar{\Omega}$ , vale

$$\int_{\Omega} u(-\Delta v) dx = (\leq, \geq) 0.$$

**Observação 2.5.6.** A nomenclatura acima é insatisfatória, mas como estamos nos referindo a soluções fracas como soluções nos espaços de Sobolev, devemos diferenciar, de algum modo, estes dois tipos de soluções.

**Teorema 2.5.7** (Método de Sub/Supersolução para soluções contínuas). *Consideramos o problema de valor de fronteira*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.22)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado com  $\partial\Omega$  regular e  $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Suponhamos a existência de  $v_1$  subsolução de (2.22) e  $v_2$  supersolução que satisfazem

$$v_1 \leq v_2 \text{ em } \bar{\Omega}.$$

Então existe uma solução  $u$  de (2.22) satisfazendo  $v_1 \leq u \leq v_2$  em  $\bar{\Omega}$ .

Para demonstrar este Teorema, faremos uso do seguinte resultado:

**Lema 2.5.8.** *Suponhamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  regular. Então, para cada  $f \in C(\bar{\Omega})$ , existe apenas uma solução para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}. \quad (2.23)$$

Além disso, definindo  $K : C(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\overline{\Omega})$  por  $K(f) = u$ , temos que  $K$  é um operador compacto em  $C(\overline{\Omega})$ .

*Demonstração.* Ver [7] ou [12]. □

*Demonstração (do Teorema 2.5.7).* Defina

$$f^*(x, \xi) = \begin{cases} f(x, v_1(x)) & \text{se } \xi < v_1(x) \\ f(x, \xi) & \text{se } v_1(x) \leq \xi \leq v_2(x) \\ f(x, v_2(x)) & \text{se } v_2(x) < \xi, \text{ e } x \in \overline{\Omega} \end{cases} \quad (2.24)$$

Como  $v_1, v_2 \in C(\overline{\Omega})$  e  $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ , temos que  $f^* \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$  e, além disso,  $f^*$  é limitada, pois  $v_1$  e  $v_2$  são limitadas e  $f$  contínua. Seja  $K$  como no Lema 2.5.8. Definimos o operador de Nemytskii para  $f^*$  como sendo  $F : C(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\overline{\Omega})$  dado por

$$F(u)(x) = f^*(x, u(x)).$$

Como  $f^*$  é limitada, existe  $M > 0$  tal que, para todo  $u \in C(\overline{\Omega})$ ,

$$\|F(u)\|_\infty \leq M.$$

Assim  $K \circ F : C(\overline{\Omega}) \rightarrow \overline{K(B_M(0))}$  é uma aplicação contínua e logo, pelo Corolário 2.5.4 (note que  $\overline{K(B_M(0))}$  é compacto pois  $K$  é um operador compacto), existe  $u \in C(\overline{\Omega})$  com

$$u = (K \circ F)(u).$$

Pela definição de  $K$ , tal  $u$  é solução fraca do problema (2.22), com  $f^*$  no lugar de  $f$ .

A demonstração estará concluída ao mostrarmos que  $v_1 \leq u \leq v_2$  em  $\overline{\Omega}$  (veja (2.24)). Para ver isso, suponhamos  $\Omega^+ := \{x \in \Omega; v_2(x) < u(x)\} \neq \emptyset$ . Então, para toda  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ,  $\varphi > 0$ , temos

$$\int_{\Omega^+} (u - v_2)(-\Delta\varphi) dx \leq \int_{\Omega^+} (f^*(x, u(x)) - f(x, v_2(x)))\varphi dx = 0,$$

mostrando que  $u - v_2 \in C(\overline{\Omega}^+)$  é uma subsolução não negativa em  $\overline{\Omega}^+$ . Mas daí o Princípio do Máximo para subsoluções contínuas (Ver [12]) implica  $u = v_2$  em  $\overline{\Omega}^+$ , que é uma contradição. Prova-se analogamente que  $v_1 \leq u$  em  $\overline{\Omega}$  e o teorema está provado. □



O teorema a seguir é uma versão do Teorema 2.5.7 para soluções clássicas e é ferramenta muito utilizada quando procuramos soluções de problemas positonos e semipositonos. Uma demonstração pode ser encontrada em [3].

**Teorema 2.5.9** (Método de Sub/Supersolução). *Consideremos o problema de valor de fronteira*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.25)$$

onde  $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e satisfaz  $f(\cdot, \xi) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ . Suponhamos que existam  $v_1$  e  $v_2$  uma subsolução e supersolução de (2.25), respectivamente, satisfazendo  $v_1(x) \leq v_2(x)$ , para todo  $x \in \Omega$ . Então existe uma solução  $u$  de (2.25) tal que  $v_1(x) \leq u(x) \leq v_2(x)$ , para todo  $x \in \Omega$ .

## 2.6 A Geometria do Problema

**Definição 2.6.1.** Uma superfície de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  que pode ser coberto por uma coleção de abertos  $U \subset \mathbb{R}^n$  tais que cada  $V = U \cap M$  admite uma parametrização (homeomorfismo diferenciável com derivada injetiva)  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , de classe  $C^k$ , definida em um aberto  $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ .

**Definição 2.6.2.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Diremos que  $\partial\Omega$ , a fronteira de  $\Omega$ , é de classe  $C^k$ , e escreveremos  $\partial\Omega \in C^k$ , quando  $\partial\Omega$  for uma superfície de codimensão 1 (ie, dimensão  $n - 1$ ) e classe  $C^k$ . Diremos que  $\partial\Omega$  é suave quando  $\partial\Omega \in C^\infty$ . As vezes, por um abuso de linguagem, diremos também que  $\Omega$  é suave ou  $\Omega \in C^k$ .

**Teorema 2.6.3** (Vizinhança Tubular). *Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma superfície compacta de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ). Definimos  $B_\varepsilon^\perp(x) = \{x + v \mid v \in T_x M^\perp, |v| < \varepsilon\}$ , onde  $T_x M$  é o espaço tangente a  $M$  no ponto  $x$ . Então existe  $\varepsilon > 0$  com as seguintes propriedades:*

- (a) Para quaisquer pontos  $x \neq y$  em  $M$ , os conjuntos  $B_\varepsilon^\perp(x)$  e  $B_\varepsilon^\perp(y)$  são disjuntos;
- (b) A reunião

$$N_\varepsilon(M) = \bigcup_{x \in M} B_\varepsilon^\perp(x)$$

*é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ , chamado de vizinhança tubular de  $M$  com raio  $\varepsilon$ ;*

*(c) A aplicação  $\pi : N_\varepsilon(M) \rightarrow M$  definida por  $\pi(z) = x$  se  $z \in B_\varepsilon(x)$  é de classe  $C^{k-1}$ ;*

*(d) Para todo  $z \in N_\varepsilon(M)$ ,  $\pi(z)$  é o único ponto de  $M$  situado à distância mínima de  $z$ .*

*Demonstração.* Pode ser encontrada em [14].

□

# Capítulo 3

## Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo apresentamos o Teorema do Passo da Montanha, que será fundamental na demonstração do Teorema 4.11, que é o principal objetivo deste trabalho.

### 3.1 Ideias do Cálculo de Variações

A referências principal é o Rabinowitz [17].

**Definição 3.1.1.** Seja  $E$  um espaço de Banach. Chamamos  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  de funcional. Além disso, dizemos que  $I$  é *Fréchet-diferenciável* (ou apenas *diferenciável*) em  $u \in E$  se existe um funcional linear contínuo  $L = L(u) \in E'$  tal que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(u, \varepsilon)$  tal que, para qualquer  $v \in E$  satisfazendo  $\|v\| \leq \delta$ ,

$$|I(u + v) - I(u) - L \cdot v| \leq \varepsilon \|v\|.$$

Escrevemos  $I'(u) := L$

**Observação 3.1.2.** A definição acima é uma generalização natural da de uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ser diferenciável. De fato, se considerarmos  $E = \mathbb{R}^n$ , temos a mesma definição.

**Definição 3.1.3.** Dizemos que  $u \in E$  é um ponto crítico do funcional  $I$  se  $I'(u) = 0 \in E'$ .

A importância de tais definições é muito bem ilustrada pelo seguinte exemplo simples. Consideremos o problema de valor de fronteira para a equação de Poisson em um domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com fronteira suave

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

Consideramos  $E = W_0^{1,2}(\Omega)$  e definimos  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$I(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - fu \right) dx.$$

**Proposição 3.1.4.** *Como definida acima,  $I$  é Fréchet-diferenciável e*

$$I'(u) \cdot \varphi = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi - f\varphi) dx,$$

para toda  $\varphi \in E$ .

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Notemos que, para  $u$  e  $\varphi$  em  $E$ , temos

$$|I(u + \varphi) - I(u)| = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \nabla u \cdot \nabla \varphi - f\varphi \right) dx.$$

Se definirmos  $L = L(u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$L \cdot \varphi = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi - f\varphi) dx,$$

obtemos

$$|I(u + \varphi) - I(u) - L \cdot \varphi| = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx = \frac{1}{2} \|\varphi\|_E^2$$

(ver Observação 2.3.10). Assim, escolhendo  $\delta = \varepsilon/2$ , vale que

$$|I(u + v) - I(u) - L \cdot \varphi| \leq \varepsilon \|\varphi\|,$$

sempre que  $\|\varphi\| \leq \delta$ , mostrando que  $I$  é Fréchet-diferenciável com  $I'(u) = L$ .  $\square$

Segue desse resultado que  $u \in E$  é uma solução fraca de (3.1) se, e somente se,  $u$  é ponto crítico de  $I$ . Um método para encontrar pontos críticos será estudado neste capítulo e será válido para operadores satisfazendo a condição de Palais-Smale (ver Definição abaixo).

**Definição 3.1.5.** Dizemos que  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  satisfaz a *condição de Palais-Smale* se qualquer sequência  $(u_m) \subset E$  tal que  $I(u_m)$  é limitada e  $I'(u_m) \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$  possuir uma subsequência convergente.

## 3.2 Teorema do Passo da Montanha

**Teorema 3.2.1** (Teorema do Passo da Montanha). *Seja  $E$  um espaço de Banach real. Suponha que  $J \in C^1(E, \mathbb{R})$  satisfaz a condição de Palais-Smale. Se*

- (a)  $J(0)=0$ ;
- (b) existem  $\rho, \alpha > 0$  tais que  $J|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$ ;
- (c) existe  $e \in E \setminus \overline{B_\rho(0)}$  tal que  $J(e) \leq 0$ ,

então  $J$  possui um valor crítico  $c_0 \geq \alpha$ . Além disso,  $c_0$  é caracterizado por

$$c_0 = \inf_{\sigma \in \Gamma} \max_{t \in \sigma([0,1])} J(t), \quad (3.2)$$

onde  $\Gamma = \{\sigma \in C([0, 1], E); \sigma(0) = 0 \text{ e } \sigma(1) = e\}$ .

Este teorema se deve a Ambrosetti e Rabinowitz [1] e a demonstração que apresentamos pode ser encontrada em [17].

**Lema 3.2.2** (Teorema de Deformação). *Seja  $E$  um espaço de Banach real. Suponhamos que  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  satisfaça a condição de Palais-Smale. Para  $s, c \in \mathbb{R}$ , definimos  $K_c = \{u \in E \mid I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}$  e  $A_s = \{u \in E \mid I(u) \leq s\}$ . Se  $c$  não é um valor crítico de  $I$ , então, dado  $\bar{\varepsilon} > 0$ , existe  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$  e  $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$  tais que*

- (a)  $\eta(1, u) = u$  se  $I(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$ ;
- (b)  $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$ .

*Demonstração.* Ver [17]. □

*Demonstração (do Teorema do Passo da Montanha).* Se  $g \in \Gamma$  e  $g([0, 1]) \cap \partial B_\rho \neq \emptyset$ , temos

$$\max_{u \in g([0,1])} I(u) \geq \inf_{w \in \partial B_\rho} I(w) \geq \alpha.$$

Logo,  $c_0 \geq \alpha$ . Suponhamos, para obter uma contradição, que  $c_0$  não é um valor crítico de  $I$ . Pelo Lema acima, dado  $\bar{\varepsilon} = \alpha/2$ , existe  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$  e  $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$  satisfazendo (a) e (b). Seja  $g \in \Gamma$  tal que

$$\max_{u \in g([0,1])} I(u) \leq c_0 + \varepsilon$$

e considere  $h(t) \equiv \eta(1, g(t))$ . É fácil ver que  $h \in C([0, 1], E)$ . Além disso, como  $g(0) = 0$  e  $I(0) = 0 < \alpha/2 \leq c_0 - \alpha/2 = c_0 - \bar{\varepsilon}$ , temos  $h(0) = \eta(1, 0) = 0$ . Analogamente,  $g(1) = e$  e  $I(e) \leq 0$  implicam  $h(1) = e$ . Logo,  $h \in \Gamma$  e, pela definição de  $c_0$ , temos

$$c_0 \leq \max_{u \in h([0,1])} I(u).$$

Mas  $g([0, 1]) \subset A_{c_0+\varepsilon}$  e então, pelo item (b) do Lema, obtemos  $h([0, 1]) \subset A_{c_0-\varepsilon}$ , isto é,

$$\max_{u \in h([0,1])} I(u) \leq c_0 - \varepsilon,$$

o que é uma contradição. Portanto,  $c_0$  é um valor crítico de  $I$ .  $\square$

### 3.3 Aplicação a Equações Diferenciais Parciais

Nesta seção, damos um exemplo de como o Teorema 3.2.1 pode ser usado para encontrar soluções de equações diferenciais parciais. Os métodos utilizados serão de grande importância posteriormente.

Consideremos o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ , é um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ . Apresentamos a seguir algumas hipóteses sobre  $p$  que nos permitirão utilizar o Teorema do Passo da Montanha para encontrar pontos críticos do funcional  $I$  (Ver (3.5)). Na Proposição 3.3.1, verificamos que os pontos críticos de  $I$  são de fato soluções fracas de (3.3). O Corolário 3.3.7 nos diz que  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale e finalmente no Teorema 3.3.8 verificamos o restante das hipóteses, concluindo a demonstração da existência de soluções fracas para (3.3). Com algumas hipóteses adicionais, garantimos também a existência de soluções clássicas para (3.3). Fazemos as seguintes hipóteses sobre  $p$  (ver também (3.25) e (3.26) adiante):

- $p \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;
- existem  $a_1, a_2 > 0$  e  $0 \leq s < \frac{n+2}{n-2}$  tais que

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s. \quad (3.4)$$

Escrevemos

$$P(x, \xi) = \int_0^\xi p(x, t) dt,$$

$E = W_0^{1,2}(\Omega)$  e definimos  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega P(x, u) dx. \quad (3.5)$$

Além disso, escrevemos (veja Observação 2.3.10)

$$\|u\| = \|u\|_E = \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Proposição 3.3.1.** *Com as hipóteses acima, temos que  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  e que  $I'(u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por*

$$I'(u) \cdot \varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_\Omega p(x, u) \varphi dx. \quad (3.6)$$

Além disso, definindo

$$J(u) = \int_\Omega P(x, u) dx, \quad (3.7)$$

vale que  $J$  é fracamente contínuo e que  $J'(u)$  é compacto.

**Observação 3.3.2.** Segue diretamente de (3.6) que  $u$  é uma solução fraca do problema (3.3) se, e somente se,  $u$  é um ponto crítico do funcional  $I$ . Isto enfatiza a importância de resultados como o Teorema do Passo da Montanha, que garante a existência de pontos críticos para funcionais definidos em espaços de Banach.

*Demonstração (da Proposição 3.3.1).* Sejam  $u$  e  $\varphi \in E = W_0^{1,2}(\Omega)$  e defina  $L = L(u)$  como no lado direito de (3.6). Observemos que

$$\begin{aligned} & |I(u + \varphi) - I(u) - L \cdot \varphi| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u + \nabla \varphi|^2 - |\nabla u|^2) dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \right| + \\ & \quad + \left| J(u + \varphi) - J(u) - \int_\Omega p(x, u) \varphi dx \right| = \\ & \quad =: A + B \end{aligned} \quad (3.8)$$

Notemos que, dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$A = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx = \frac{1}{2} \|\varphi\|^2 \leq \varepsilon \|\varphi\|,$$

se  $\|\varphi\| \leq 2\varepsilon$ .

Obter uma estimativa para  $B$  será bem mais complicado. Para isso, definimos

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= |P(x, u + \varphi) - P(x, u) - p(x, u)\varphi|, \\ \Omega_1 &= \{x \in \bar{\Omega}; |u(x)| \geq \beta\}, \\ \Omega_2 &= \{x \in \bar{\Omega}; |\varphi(x)| \geq \gamma\} \end{aligned}$$

e

$$\Omega_3 = \{x \in \bar{\Omega}; |u(x)| \leq \beta \text{ e } |\varphi(x)| \leq \gamma\},$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  serão escolhidos convenientemente. Assim,

$$B = \left| \int_{\Omega} (P(x, u + \varphi) - P(x, u) - p(x, u)\varphi) dx \right| \leq \int_{\Omega} \Psi dx \leq \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \Psi dx \quad (3.9)$$

onde usamos na última desigualdade que  $\Omega \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ . Agora, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$$P(x, \xi + \eta) - P(x, \xi) = p(x, \xi + \theta\eta)\eta. \quad (3.10)$$

Logo, por (3.10), (3.4) e pela Desigualdade de Hölder (Teorema 2.1.7),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |P(x, u + \varphi) - P(x, u)| dx &\leq \int_{\Omega_1} [a_1 + a_2(|u| + |\varphi|^s)] |\varphi| dx \\ &\leq \left( \int_{\Omega} a_1^{\frac{2n}{n+2}} dx \right)^{\frac{n+2}{2n}} \left( \int_{\Omega} |\varphi|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} + \\ &\quad + \left( \int_{\Omega} a_2^{\sigma} dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \left( \int_{\Omega} (|u| + |\varphi|)^{s+1} \right)^{\frac{s}{s+1}} \left( \int_{\Omega} |\varphi|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{2n}} = \quad (3.11) \\ &= a_1 |\Omega|^{\frac{n+2}{2n}} \|\varphi\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} + a_2 |\Omega|^{\frac{1}{\sigma}} \| |u| + |\varphi| \|_{L^{s+1}(\Omega)}^s \|\varphi\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \\ &\leq \left[ a_1 |\Omega|^{\frac{n+2}{2n}} + a_3 |\Omega|^{\frac{1}{\sigma}} (\|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s + \|\varphi\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s) \right] \|\varphi\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde usamos

$$\frac{n+2}{2n} + \frac{n-2}{2n} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sigma} + \frac{s}{s+1} + \frac{n-2}{2n} = 1. \quad (3.12)$$



A existência de tal  $\sigma$  se deve à hipótese  $s < \frac{n+2}{n-2}$ , pois assim

$$s + 1 < \frac{n + 2}{n - 2} + 1 = \frac{2n}{n - 2},$$

ou ainda,

$$\frac{n - 2}{2n} < \frac{1}{s + 1} = 1 - \frac{s}{s + 1},$$

o que implica

$$\frac{s}{s + 1} + \frac{n - 2}{2n} < 1.$$

Agora, usando o Corolário 2.3.9, com  $p = 2$ , segue de (3.11) que

$$\int_{\Omega_1} |P(x, u + \varphi) - P(x, u)| dx \leq a_4 \|\varphi\| \left[ |\Omega|^{\frac{n+2}{2n}} + |\Omega|^{\frac{1}{\sigma}} (\|u\|^s + \|\varphi\|^s) \right]. \quad (3.13)$$

De modo análogo,

$$\int_{\Omega_1} |p(x, u)\varphi| dx \leq a_5 \|\varphi\| \left[ |\Omega|^{\frac{n+2}{2n}} + |\Omega|^{\frac{1}{\sigma}} \|u\|^s \right]. \quad (3.14)$$

Agora, usando novamente o Corolário 2.3.9, com  $p = 2$ , e a definição de  $\Omega_1$ , obtemos

$$\|u\| \geq a_6 \|u\|_{L^2(\Omega)} \geq a_6 \|u\|_{L^2(\Omega_1)} \geq a_6 \beta |\Omega_1|^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

ou ainda,

$$|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left( \frac{\|u\|}{a_6 \beta} \right)^{\frac{2}{\sigma}} =: M_1, \quad |\Omega|^{\frac{n+2}{2n}} \leq \left( \frac{\|u\|}{a_6 \beta} \right)^{\frac{n+2}{n}} =: M_2. \quad (3.16)$$

Logo  $M_i \rightarrow 0$  quando  $\beta \rightarrow \infty$ . Segue então de (3.13), (3.14) e (3.16) que

$$\int_{\Omega_1} \Psi dx \leq a_7 \left[ M_2 + M_1 (\|u\|^s + \|\varphi\|^s) \right] \|\varphi\|. \quad (3.17)$$

Podemos assumir  $\delta \leq 1$ . Além disso, escolha  $\beta$  suficientemente grande de modo que  $a_7 [M_2 + M_1 (\|u\|^s + \|\varphi\|^s)] \leq \varepsilon/3$ . Logo

$$\int_{\Omega_1} \Psi dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \|\varphi\|. \quad (3.18)$$

Em seguida, pela Desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \Psi dx &\leq C \int_{\Omega_2} [1 + (|u| + |\varphi|)^s] |\varphi| dx \leq \\ &\leq C \left( \int_{\Omega_2} [1 + (|u| + |\varphi|)^s]^{\frac{s+1}{s}} dx \right)^{\frac{s}{s+1}} \|\varphi\|_{L^{s+1}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Escrevendo  $m = \frac{2n}{n-2} > s + 1$  obtemos  $|\varphi|^{m-(s+1)} \geq \gamma^{m-(s+1)}$  e logo, usando o Corolário 2.3.9,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \Psi dx &\leq C(1 + \|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s + \|\varphi\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s) \left[ \int_{\Omega_2} |\varphi|^{s+1} \left( \frac{|\varphi|}{\gamma} \right)^{m-(s+1)} dx \right]^{\frac{1}{s+1}} \leq \\ &\leq C\gamma^{\frac{(s+1)-m}{s+1}} (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s) \|\varphi\|^{\frac{m}{s+1}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Agora, dados  $\hat{\varepsilon} > 0$  e  $\hat{\beta} > 0$ , existe  $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\hat{\varepsilon}, \hat{\beta})$  tal que

$$|P(x, \xi + h) - P(x, \xi) - p(x, \xi)h| \leq \hat{\varepsilon}|h|,$$

para quaisquer  $|\xi| \leq \hat{\beta}$  e  $|h| \leq \hat{\gamma}$ . Tomando  $\hat{\beta} = \beta$  e escolhendo  $\gamma = \hat{\gamma}$ , obtemos (pela definição de  $\Omega_3$  e novamente pelo Corolário 2.3.9)

$$\int_{\Omega_3} \Psi dx \leq \hat{\varepsilon} \int_{\Omega_3} |\varphi| dx \leq C\hat{\varepsilon} \|\varphi\|. \quad (3.21)$$

Escolhendo  $\hat{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{3C}$ , (3.21) implica

$$\int_{\Omega_3} \Psi dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \|\varphi\|. \quad (3.22)$$

Logo, (3.9), (3.18), (3.20) e (3.22) implicam

$$B \leq \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \Psi dx \leq \frac{2\varepsilon}{3} \|\varphi\| + C\gamma^{\frac{s+1-m}{s+1}} (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s) \|\varphi\|^{\frac{m}{s+1}}. \quad (3.23)$$

Finalmente, se  $\delta \leq 1$  for pequeno de modo que

$$C\gamma^{\frac{s+1-m}{s+1}} (2 + \|u\|^s) \delta^{\frac{m}{s+1}-1} \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

segue de (3.23) que, se  $\|\varphi\| \leq \delta$ ,

$$B \leq \varepsilon \|\varphi\|,$$

que é a estimativa que queríamos para  $B$ , concluindo a demonstração de (3.6).

Resta ainda mostrar que  $J$  é uma aplicação fracamente contínua e  $J'$  uma aplicação linear compacta.

Seja  $u_m \rightarrow u$  em  $E$ . Pelo Corolário 2.3.9,  $u_m \rightarrow u$  em  $L^{s+1}(\Omega)$ . Então

$$\begin{aligned} \|J'(u_m) - J'(u)\| &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \int_{\Omega} (p(x, u_m) - p(x, u)) \varphi \, dx \right| \\ &\leq C \|p(\cdot, u_m) - p(\cdot, u)\|_{L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Agora, por (3.4), para qualquer  $\alpha \geq 1$ ,

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{\frac{\alpha s}{\alpha}}.$$

Então, pelo Lema 3.3.4,  $p \in C(L^{\alpha s}(\Omega), L^{\alpha}(\Omega))$  e portanto  $J'$  é contínua.

Afirmção 1:  $J$  é fracamente contínua.

De fato, suponhamos que  $u_m \rightharpoonup u$  em  $E$ . Pelo Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov (Teorema 2.3.13),  $u_m \rightarrow u$  em  $L^{s+1}(\Omega)$ , pois  $s+1 < 2^*$ . Logo, pelo Lema 3.3.4,  $J(u_m) \rightarrow J(u)$ .

Afirmção 2:  $J'$  é compacto.

De fato, seja  $u_m$  uma sequência limitada em  $E$ . Então, para uma subsequência,  $u_m \rightarrow u$  em  $L^{s+1}(\Omega)$ . Daí como acima

$$\|J'(u_m) - J'(u)\| \leq C \|p(\cdot, u_m) - p(\cdot, u)\|_{L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)}$$

e segue que  $J'(u_m) \rightarrow J'(u)$ . □

**Observação 3.3.3.** A demonstração anterior mostra também que, na verdade,

$$J'(u) \cdot \varphi = \int_{\Omega} p(x, u) \varphi \, dx.$$

**Lema 3.3.4.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado. Se*

- $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  e
- existem  $r, s \geq 1$  e  $a_1, a_2 \geq 0$  tais que, para quaisquer  $x \in \bar{\Omega}$  e  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$|g(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{\frac{r}{s}},$$

então a aplicação  $T : L^r(\Omega) \rightarrow L^s(\Omega)$  definida por  $(T\varphi)(x) = g(x, \varphi(x))$  pertence a  $C(L^r(\Omega), L^s(\Omega))$ .

*Demonstração.* Ver [17]. □

Para mostrar que  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale vamos fazer uso do seguinte resultado, que pode ser encontrado em [17]:

**Proposição 3.3.5.** *Seja  $p$  satisfazendo as hipóteses acima e  $I$  como definido em (3.5). Se  $\{u_m\}$  é uma sequência limitada em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  tal que  $I'(u_m) \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ , então  $\{u_m\}$  possui uma subsequência convergente.*

*Demonstração.* Seja  $D : E \rightarrow E'$  definido por

$$Du \cdot \varphi = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Assim, podemos escrever

$$I'(u) = Du - J'(u),$$

(ver Observação 3.3.3) ou ainda,

$$D^{-1}I'(u) = u - D^{-1}J'(u). \tag{3.24}$$

Como  $J'$  é compacto e  $\{u_m\}$  é limitada em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $\{J'(u_m)\}$  possui uma subsequência  $\{J'(u_{m_k})\}$  convergente. Como estamos supondo que  $\{I'(u_m)\}$  é convergente e, por (3.24), temos

$$u_{m_k} = D^{-1}I'(u_{m_k}) + D^{-1}J'(u_{m_k}),$$

segue que  $\{u_{m_k}\}$  é convergente, já que  $D^{-1}$  é contínua (pois é uma isometria), concluindo a demonstração da proposição. □

Fazendo algumas hipóteses adicionais sobre  $p$ , conseguimos mostrar que  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale, como corolário da Proposição 3.3.5. São elas:

- Quando  $\xi \rightarrow 0$ ,

$$\frac{|p(x, \xi)|}{|\xi|} \rightarrow 0. \tag{3.25}$$

- Existem  $\mu > 2$  e  $r \geq 0$  tais que, para  $|\xi| \geq r$ ,

$$0 < \mu P(x, \xi) \leq \xi p(x, \xi). \quad (3.26)$$

**Observação 3.3.6.** Segue de (3.26) que existem  $a_3, a_4 > 0$  tais que

$$P(x, \xi) \geq a_3 |\xi|^\mu - a_4, \quad (3.27)$$

para quaisquer  $\xi \in \mathbb{R}$  e  $x \in \Omega$ . De fato, para  $|\xi| \geq r$ , temos

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \xi} P(x, \xi)}{P(x, \xi)} \geq \frac{\mu}{\xi},$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \log \frac{P(x, \xi)}{\xi^\mu} \right) \geq 0.$$

Então, para  $\xi \geq r$ , temos

$$\log \frac{P(x, \xi)}{\xi^\mu} \geq \log \frac{P(x, r)}{r^\mu} \equiv \kappa,$$

ou

$$\frac{P(x, \xi)}{\xi^\mu} \geq e^\kappa \equiv a_3.$$

Logo, para  $\xi \geq r$ ,  $P(x, \xi) \geq a_3 \xi^\mu$ . Por continuidade e compacidade, existe  $a_4 > 0$  tal que se  $|\xi| \leq r$ , então  $P(x, \xi) \geq -a_4$ . Portanto, para quaisquer  $\xi \in \mathbb{R}$  e  $x \in \Omega$ , temos  $P(x, \xi) \geq a_3 |\xi|^\mu - a_4$ .

**Corolário 3.3.7.** *Se  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  definido por (3.5), onde  $p \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  é tal que (3.4), (3.25) e (3.26), então  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale.*

*Demonstração.* Utilizando a Proposição anterior, resta mostrar que  $|I(u_m)| \leq M$  e  $I'(u_m) \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$  implicam  $\{u_m\}$  limitada.

Para provar isso, observe que

$$\begin{aligned} M \geq |I(u_m)| &= \frac{1}{2} \|u_m\|^2 - \int_{\Omega} P(x, u_m) dx = \frac{1}{2} \|u_m\|^2 \\ &- \int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| < r\}} P(x, u_m) dx - \int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| \geq r\}} P(x, u_m) dx. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Observe agora que, por (3.4), temos

$$|P(x, \xi)| \leq \int_0^\xi |p(x, t)| dt \leq \int_0^\xi (a_1 + a_2 t^s) dt = a_1 \xi + \frac{a_2}{s+1} \xi^{s+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| < r\}} P(x, u_m) dx &\leq \int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| < r\}} \left( a_1 |u_m| + \frac{a_2}{s+1} |u_m|^{s+1} \right) dx \\ &\leq \int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| < r\}} \left( a_1 r + \frac{a_2}{s+1} r^{s+1} \right) dx = C(r) = C \end{aligned}$$

Assim, por (3.26) e (3.28),

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{1}{2} \|u_m\|^2 - C - \frac{1}{\mu} \int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| \geq r\}} p(x, u_m) u_m dx \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \|u_m\|^2 - 2C - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} p(x, u_m) u_m dx \\ &= \frac{1}{2} \|u_m\|^2 + \frac{1}{\mu} I'(u_m) u_m - \frac{1}{\mu} \|u_m\|^2 - 2C \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_m\|^2 + \frac{1}{\mu} I'(u_m) u_m - 2C \end{aligned} \tag{3.29}$$

Agora, como  $I'(u_m) \rightarrow 0$ , temos que dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $K > 0$  tal que

$$|I'(u_m) \varphi| \leq \|\varphi\|,$$

para todo  $m \geq K$ . Em particular, temos

$$|I'(u_m) u_m| \leq \|u_m\|,$$

para  $m$  suficientemente grande. Segue de (3.29) que, para  $m$  grande,

$$M \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_m\|^2 - \frac{1}{\mu} \|u_m\| - 2C. \tag{3.30}$$

Como

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} > 0,$$

segue que  $\|u_m\|$  é limitada.  $\square$

**Teorema 3.3.8.** *Se  $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  satisfaz (3.4), (3.25) e (3.26), então (3.3) possui uma solução fraca não trivial.*

*Demonstração.* Pelo visto até agora resta mostrar que  $I$  satisfaz o restante das hipóteses do Teorema 3.2.1. É claro que  $I(0) = 0$ . Além disso, (3.25) implica que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $|\xi| \leq \delta$  e  $x \in \overline{\Omega}$ , então

$$p(x, \xi) \leq \varepsilon|\xi|.$$

Então, se  $|\xi| \leq \delta$  e  $x \in \overline{\Omega}$ ,

$$|P(x, \xi)| \leq \int_0^\xi |p(x, \xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2.$$

Por outro lado, (3.4) implica que existe  $A = A(\delta)$  tal que, se  $|\xi| \geq \delta$ ,  $P(x, \xi) \leq A|\xi|^{s+1}$ . Assim, temos

$$|P(x, \xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2 + A|\xi|^{s+1}.$$

Assim, pelo Corolário 2.3.9,

$$\begin{aligned} |J(u)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + A \int_{\Omega} |u|^{s+1} dx \leq C \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2 + AC \|u\|^{s+1} \leq \\ &\leq C \left( \frac{\varepsilon}{2} + A \|u\|^{s-1} \right) \|u\|^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Escolhendo  $u$  de modo que  $\|u\|^{s-1} \leq \frac{\varepsilon}{2A}$ , obtemos

$$J(u) \leq C\varepsilon \|u\|^2$$

e como  $\varepsilon$  é arbitrário,  $J(u) = o(\|u\|^2)$  quando  $u \rightarrow 0$ . Logo,

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + o(\|u\|^2),$$

quando  $u \rightarrow 0$ .

Observe que existe  $\delta > 0$  tal que, para  $\|u\| \leq \delta$ ,

$$-\frac{1}{4} \|u\|^2 \leq o(\|u\|^2) \leq \frac{1}{4} \|u\|^2$$

e logo, para  $\|u\| \leq \delta$ ,

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|.$$

Observe também que, por (3.27),

$$J(u) \geq a_3 \int_{\Omega} |u|^{\mu} dx - a_4 |\Omega|$$

e portanto

$$I(tu) \leq \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - a_3 t^{\mu} \int_{\Omega} |u|^{\mu} dx + a_4 |\Omega| \rightarrow -\infty,$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , pois  $\mu > 2$ . Logo, existe  $t_0 > 0$  tal que  $I(t_0 u) \leq 0$ .  $\square$

**Teorema 3.3.9.** *No caso particular em que supomos que  $p$  é localmente de Lipschitz em  $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$  e tal que vale (3.4), então toda solução fraca de (3.3) é solução de (3.3) no sentido clássico.*

*Demonstração.* Pelo Corolário 2.3.9, temos que  $u \in L^{2^*}(\Omega)$  e portanto (3.4) implica que

$$\begin{aligned} \|p(\cdot, u(\cdot))\|_{L^{\frac{2^*}{s}}} &\leq C \left( \int_{\Omega} (1 + |u|^s)^{\frac{2^*}{s}} \right)^{\frac{s}{2^*}} \\ &\leq C(|\Omega| + \|u\|_{L^{2^*}}^s) < \infty. \end{aligned}$$

Logo  $f \circ u \in L^{\frac{2^*}{s}}$ . Assim, pelo Teorema 2.3.14,  $u \in W^{2, \frac{2^*}{s}}(\Omega)$ . Repetindo este raciocínio, obtemos que  $u \in W^{2, \varphi(t)}(\Omega)$ , onde  $\varphi(t) = \frac{1}{t} \frac{nt}{n-2t}$ . Como as iterações de  $\varphi(t)$  tendem ao infinito se começarmos com  $t = \frac{2^*}{s}$ , temos que  $u \in C^{\alpha}(\Omega)$  para algum  $\alpha \in (0, 1)$ . Como  $p$  é Lipschitz, temos que  $p \circ u \in C^{\alpha}(\Omega)$  e logo  $u \in C^{2, \alpha}(\Omega)$ , como queríamos.  $\square$



# Capítulo 4

## Problemas Positons e Semipositons

Começamos o capítulo apresentando, como ilustração, alguns problemas simples publicados recentemente por Lee, Shivaji e Ye em [13]. Em seguida, nas seções 4.3, 4.4 e 4.5, demonstramos os resultados obtidos por S. Caldwell, A. Castro, R. Shivaji, S. Unsurangsiem em [4], que motivaram a preparação desta dissertação.

### 4.1 Problemas Positons

Consideremos o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (4.1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado com  $\partial\Omega \in C^2$  e  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua com  $f(0) > 0$  e satisfazendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

**Teorema 4.1.1.** *Com as hipóteses acima, (4.1) tem solução positiva para qualquer  $\mu > 0$ .*

*Demonstração.* Como  $f(0) > 0$ , temos que  $\psi \equiv 0$  é uma subsolução estrita (ie, é subsolução, mas não é solução). Então, pelo Teorema 2.5.9,

basta encontrar uma supersolução de (4.1). Para isso, definimos  $\hat{f}(s) = \max_{t \in [0, s]} f(t)$ . Logo,  $f(s) \leq \hat{f}(s)$ ,  $\hat{f}$  é crescente e  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}(x)}{x} = 0$ . Consideremos agora  $z > 0$  solução de

$$\begin{cases} -\Delta z = 1 & \text{em } \Omega \\ z = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (4.2)$$

e definimos  $w = \kappa z$ , onde  $\kappa > 1$  é escolhido de modo que

$$\frac{\hat{f}(\kappa \|z\|_\infty)}{\kappa \|z\|_\infty} \leq \frac{1}{\mu \|z\|_\infty}.$$

Assim,

$$-\Delta w = \kappa \geq \mu \hat{f}(\kappa \|z\|_\infty) \geq \mu \hat{f}(\kappa z) \geq \mu f(\kappa z) = \mu f(w),$$

como queríamos.  $\square$

**Observação 4.1.2.** Observe que (4.1) pode não ser um problema positivo, pois  $f$  pode não ser monótona. Provamos, nesse sentido, um resultado mais geral.

## 4.2 Problemas Semipositivos

Consideremos o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (4.3)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado com  $\partial\Omega \in C^2$  e  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua com  $f(0) < 0$  e satisfazendo

- Existe  $x_0$  tal que  $f(x_0) \leq f(x)$ , para qualquer  $x \in [0, \infty)$ . Por simplicidade, vamos supor  $x_0 = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ .

**Teorema 4.2.1.** *Com as hipóteses acima, (4.3) tem solução positiva para  $\mu$  suficientemente grande.*

*Demonstração.* Consideremos  $\lambda_1 > 0$  o primeiro autovalor de  $-\Delta$  com condição fronteira de Dirichlet e  $\phi > 0$  a autofunção associada satisfazendo

$$\|\phi\|_\infty = 1$$

(Ver Teorema 2.4.1). É fácil ver que, pelo Princípio do Máximo de Hopf (Teorema 2.2.7),

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu} < 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

onde  $\nu$  é o vetor normal exterior unitário em  $\partial\Omega$ . Sejam  $\delta > 0$ ,  $\zeta > 0$ ,  $m > 0$  tais que

$$|\nabla\phi|^2 - \lambda_1\phi^2 \geq m \text{ em } \overline{\Omega}_\delta$$

e  $\zeta \leq \phi \leq 1$  em  $\Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta$ , onde  $\overline{\Omega}_\delta := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \leq \delta\}$ . Isso é possível pois  $|\nabla\phi| = -\frac{\partial\phi}{\partial\nu} > 0$  em (e conseqüentemente próximo de)  $\partial\Omega$  e logo, sendo  $|\nabla\phi|^2 - \lambda_1\phi^2 > 0$  no compacto  $\overline{\Omega}_\delta$ , assume um mínimo. Definimos

$$\psi := -\frac{\mu f(0)}{2m}\phi^2.$$

Então

$$\nabla\psi = -\frac{\mu f(0)}{m}\phi\nabla\phi$$

e, portanto,

$$-\Delta\psi = -\operatorname{div}(\nabla\psi) = \frac{\mu f(0)}{m}\{\phi\Delta\phi + |\nabla\phi|^2\} = \frac{\mu f(0)}{m}\{|\nabla\phi|^2 - \lambda_1\phi^2\}$$

Então,

$$-\Delta\psi \leq \mu f(0) \leq \mu f(\psi) \text{ em } \overline{\Omega}_\delta. \quad (4.4)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ , segue que existe  $\mu_0 > 0$  tal que

$$-\frac{f(0)\lambda_1}{m} \leq f\left(-\frac{\mu f(0)}{2m}t\zeta^2\right), \forall \mu \geq \mu_0 \text{ e } \forall t \geq 1.$$

Portanto, para todo  $\mu \geq \mu_0$ , temos

$$-\frac{f(0)\lambda_1}{m} \leq f\left(-\frac{\mu f(0)}{2m}\phi^2\right)$$

em  $\Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta$ . Então, em  $\Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta$ ,

$$-\Delta\psi = \frac{\mu f(0)}{m} \{|\nabla\phi|^2 - \lambda_1\phi^2\} \leq -\mu \frac{f(0)\lambda_1}{m} \leq \mu f\left(-\frac{\mu f(0)}{2m}\phi^2\right) = \mu f(\psi)$$
(4.5)

Assim, se  $\mu$  for suficientemente grande, segue de (4.4) e (4.5)

$$-\Delta\psi \leq \mu f(\psi) \text{ em } \Omega,$$

isto é,  $\psi$  é uma subsolução positiva de (4.3).

Consideremos agora  $z > 0$  solução de

$$\begin{cases} -\Delta z = 1 & \text{em } \Omega \\ z = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases},$$
(4.6)

e definimos  $w = \kappa z$ , onde  $\kappa > 0$  é escolhido (usando o Princípio do Máximo) suficientemente grande para que  $\psi \leq w$  em  $\Omega$  e (usando que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ )

$$\frac{f(\kappa \|z\|_\infty)}{\kappa \|z\|_\infty} \leq \frac{1}{\mu \|z\|_\infty}.$$

Assim, temos

$$-\Delta w = \kappa \geq \mu f(\kappa \|z\|_\infty) \geq \mu f(\kappa z) = \mu f(w),$$
(4.7)

mostrando que  $w$  é uma supersolução de (4.3). Logo, pelo Teorema 2.5.9, existe uma solução  $u$  de (4.3) satisfazendo  $\psi \leq u \leq w$ , para  $\mu$  suficientemente grande.  $\square$

**Observação 4.2.2.** Este problema, assim como na seção anterior, pode não ser um problema semipositono. Mas quando  $f$  é crescente, temos  $f(0) \leq f(x)$ , para qualquer  $x \in [0, \infty)$ . Isto significa que tais problemas estão incluídos no Teorema 4.2.1.

**Teorema 4.2.3.** *Suponhamos que  $f$  satisfaça  $f(0) < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  e que existem  $c$  e  $M$  constantes positivas tais que  $f(x) \geq M$ , para todo  $x \geq c > 0$ . Então, existe  $\mu_0 > 0$  tal que, para todo  $\mu \geq \mu_0$ , o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.8)$$

tem uma solução  $u > 0$ , com  $\|u\| \rightarrow \infty$  quando  $\mu \rightarrow \infty$ .

Para demonstrar este teorema, utilizamos (sem demonstração) o seguinte resultado de Clément e Sweers [8].

**Lema 4.2.4.** *Suponhamos que  $\partial\Omega \in C^3$ . Seja  $g \in C^{1,\gamma}(\mathbb{R})$  satisfazendo*

- *existem  $\rho_1 < \rho_2$ ,  $\rho_2 > 0$  tais que  $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$  e  $g > 0$  em  $(\rho_1, \rho_2)$ ;*
- *Para qualquer  $\rho \in [0, \rho_2)$ , tem-se*

$$J(\rho) = \int_{\rho}^{\rho_2} g(s) ds > 0;$$

- *existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $g' \leq 0$  em  $(\rho_2 - \varepsilon, \rho_2)$ .*

Então existe  $\mu_0 > 0$  e  $z_0 \in C_c^\infty(\Omega)$  com  $z_0 \geq 0$ ,  $\max z_0 \in (\rho_1, \rho_2)$  e tal que, para todo  $\mu \geq \mu_0$ , o problema (4.8) possui exatamente uma solução com  $z_0 \leq u_\mu \leq \rho_2$ . Além disso,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \max u_\mu = \rho_2.$$

*Demonstração (do Teorema 4.2.3).* Define, para  $\alpha > 1$  e  $\delta > \alpha c$ ,

$$g(s) = g(s, \alpha, \delta) = \begin{cases} \frac{M}{(\alpha-1)c} s - \frac{M}{\alpha-1} & \text{se } 0 \leq s \leq c \\ -\frac{M(s-c)(s-\alpha c)}{[(\alpha-1)c]^2} & \text{se } c \leq s \leq \frac{\alpha+1}{2} \\ -\frac{M(-s[(\alpha+1)c-\delta])(s-\delta)}{[s\delta - (\alpha+1)c]^2} & \text{se } \frac{\alpha+1}{2} \leq s \end{cases} \quad (4.9)$$

A idéia foi construir uma função de classe  $C^1([0, \infty))$  (por isso a escolha dos coeficientes em (4.9)). A escolha de  $\alpha$  e  $\delta$  ficará clara abaixo. Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu g(w) & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.10)$$

Já observamos que  $g \in C^1([0, \infty))$ . Além disso, é fácil ver que  $\max g = g(\frac{(\alpha+1)c}{2}) = \frac{M}{4}$  e  $g'(c) = \frac{M}{(\alpha-1)c} \rightarrow +\infty$ , quando  $\alpha \rightarrow 1^+$ . Como  $f$  é eventualmente estritamente positiva, temos que existe  $\alpha = \alpha_0$  tal que

$$f(s) \geq g(s), \quad \forall s \geq 0.$$

Para tal  $\alpha$ , existe  $\delta_0$  tal que, para  $\delta \geq \delta_0$ ,

$$\int_0^\delta g(s) ds > 0.$$

Segue do Lema 4.2.4 que (4.10) possui uma solução positiva  $0 \leq w < \delta$ , para  $\mu$  suficientemente grande e tal que  $\|w\| \rightarrow \infty$  quando  $\mu \rightarrow \infty$ . Então  $w$  é uma subsolução de (4.8).

Procedemos exatamente como no teorema anterior para encontrar uma supersolução de (4.8).

Como  $\delta$  de ser tomado arbitrariamente grande, o teorema está demonstrado.  $\square$

### 4.3 Problema Principal

Consideremos o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) + \mu f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.11)$$

onde  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ , é um aberto limitado e conexo com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ .

Vamos supor que  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e crescente, com  $g(0) > 0$  e que existem  $A, B > 0$  e

$$q \in \left(1, \frac{n+2}{n-2}\right) \quad (4.12)$$

tais que, para  $x > 0$  grande,

$$Ax^q \leq g(x) \leq Bx^q. \quad (4.13)$$

Além disso, vamos também supor que existe  $\theta > 2$  tal que para  $x > 0$  grande

$$xg(x) \geq \theta G(x), \quad (4.14)$$

onde  $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ .

E ainda mais, supomos que  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e crescente, com  $f(0) < 0$  e de modo que existe  $\alpha \in (0, 1)$  tal que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u^\alpha} = 0. \quad (4.15)$$

Ao longo do capítulo, vamos escrever  $h_\lambda(u) = \lambda g(u) + \mu f(u)$  (observe que não escrevemos  $h_{\mu, \lambda}$ , pois  $\mu > 0$  será fixo em nosso resultado principal),

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad H_\lambda(x) = \int_0^x h_\lambda(t) dt.$$

Utilizaremos as seguintes propriedades que, como veremos abaixo, podem ser obtidas das hipóteses acima sobre  $f$  e  $g$ .

- Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$G(x) \leq B \frac{|x|^{q+1}}{q+1} + \tilde{B}. \quad (4.16)$$

- Para todo  $x \geq 0$ ,

$$G(x) \geq A \frac{x^{q+1}}{q+1} + \tilde{A}. \quad (4.17)$$

De fato, basta integrar (4.13) de  $d$  a  $x$  para obter, para  $d$  e  $x$  suficientemente grandes,

$$A \frac{x^{q+1}}{q+1} + \tilde{A} = \int_d^x At^q dt \leq G(x) \leq \int_d^x Bt^q dt = B \frac{x^{q+1}}{q+1} + \tilde{B}.$$

Mudando as constantes  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ , se necessário, obtemos a desigualdade para todo  $x \geq 0$ .

- Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$F(x) \leq |x|^{\alpha+1} + \tilde{C}. \quad (4.18)$$

De fato, (4.15) implica que existe  $A > 0$  tal que  $|f(x)| < (\alpha + 1)x^\alpha$  para todo  $x > A$ . Logo, para  $x > A$ ,

$$\int_0^x f(t) dt = \int_A^x f(t) dt + \int_0^A f(t) dt \leq x^{\alpha+1} + \tilde{C}.$$

Para  $x < A$ , aumenta-se a constante  $\tilde{C}$ , se necessário.

- Dado  $\theta_1 \in (2, \theta)$ , existe  $\theta_2$  tal que, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$xh_\lambda(x) \geq \theta_1(H_\lambda(x) - \theta_2). \quad (4.19)$$

Para  $x > 0$  grande (digamos  $x > M$ )

$$\begin{aligned} x(\lambda g(x) + \mu f(x)) &\geq x\lambda g(x) \geq \theta\lambda G(x) = \\ &= \theta_1\lambda G(x) + (\theta - \theta_1)\lambda G(x) \geq \theta_1(\lambda G(x) + \mu F(x)), \end{aligned}$$

pois assim  $f(x) > 0$  e

$$(\theta - \theta_1)\lambda G(x) \geq \theta_1\mu F(x).$$

Para  $x \leq M$  escolhemos  $\theta_2$  de modo que  $x(h_\lambda(x) - \theta_1 H_\lambda(x)) \geq -\theta_1\theta_2$  e então segue (4.19).

- Existe  $\theta_3$  tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \theta_3(|x|^q + 1) \text{ e} \\ |f(x)| &\leq \theta_3(|x| + 1). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para  $x$  grande, temos  $|g(x)| \leq C|x|^q$ . Para  $x$  pequeno, existe  $D$  tal que  $|g(x)| \leq D$ . Assim (por exemplo, tomando  $\theta_3 = \max\{C, D\}$ ), temos  $|g(x)| \leq \theta_3(|x|^q + 1)$ , para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . A justificativa da desigualdade para  $f$  é totalmente análoga usando (4.15) e portanto não faremos.

**Teorema 4.3.1.** *Seja  $\mu > 0$  fixo. Então existe  $\lambda^* > 0$  tal que se  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , então (4.11) tem uma solução positiva  $u_\lambda$  satisfazendo  $\|u_\lambda\|_\infty \geq c^*\lambda^{-\frac{1}{q-1}}$ , onde  $c^* > 0$  é independente de  $\lambda$ .*

Dedicaremos o restante desta seção à demonstração do Teorema 4.3.1. A demonstração que apresentamos é uma versão mais detalhada da apresentada por Caldwell, Castro, Shivaji e Unsurangsie em [4].



### 4.3.1 Demonstração do Teorema 4.3.1

Escreva  $E = W_0^{1,2}(\Omega)$  e seja  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$I(u) := \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{2} dx - \int_{\Omega} H_{\lambda}(u) dx. \quad (4.21)$$

É possível verificar, como no Capítulo 3, que

$$I'(u) \cdot \varphi = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi - h_{\lambda}(u)\varphi) dx,$$

mostrando que  $u$  é solução fraca de (4.11) se, e somente se,  $u$  é um ponto crítico do funcional  $I$ . Vamos verificar que, para  $\lambda > 0$  pequeno,  $I$  satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, obtendo assim uma solução para (4.11).

**Lema 4.3.2.**  *$I$  satisfaz a condição de Palais-Smale.*

*Demonstração.* De fato, é fácil ver que podemos aplicar a Proposição 3.3.5 para  $I$  como definido em (4.21). Assim, precisamos mostrar que se  $I(u_m) \leq M$ , para todo  $m$  e  $I'(u_m) \rightarrow 0$ , então  $(u_m)$  é limitada. O argumento é o mesmo que fizemos no Corolário 3.3.7, mas vamos repetir para que a demonstração fique completa. Notemos que

$$M \geq I(u_m) = \frac{1}{2} \|u_m\|^2 - \int_{\Omega} H_{\lambda}(u_m) dx.$$

Como  $\Omega$  é limitado e, por (4.19), temos

$$\int_{\Omega} H_{\lambda}(u_m) \leq \frac{1}{\theta_1} \int_{\Omega} (u_m h_{\lambda}(u_m) + \theta_1 \theta_2) dx,$$

segue que

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{1}{2} \|u_m\|^2 - \frac{1}{\theta_1} \int_{\Omega} (u_m h_{\lambda}(u_m) + \theta_1 \theta_2) dx \\ &= \frac{1}{2} \|u_m\|^2 + \frac{1}{\theta_1} I'(u_m) u_m - \frac{1}{\theta_1} \|u_m\|^2 - |\Omega| \theta_2. \end{aligned}$$

Como  $I'(u_m) \rightarrow 0$ , temos, para  $m$  suficientemente grande, que

$$-\|u_m\| \leq I'(u_m) u_m \leq \|u_m\|.$$

Logo,

$$M \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_1}\right) \|u_m\|^2 - \frac{1}{\theta_1} \|u_m\| - |\Omega|\theta_2,$$

o que mostra que  $u_m$  é limitada.  $\square$

**Lema 4.3.3.** *Existem constantes  $\bar{\lambda} > 0$  e  $C > 0$  tal que, para  $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$ ,  $I$  satisfaz*

$$I|_{\partial B_\rho} \geq \frac{C^2}{8} \lambda^{-\frac{2}{q-1}},$$

onde  $\rho = C\lambda^{-\frac{1}{q-1}}$ .

*Demonstração.* Para vermos isso, notamos que, como  $q+1 < 2^*$  (ver (4.12)), o Corolário 2.3.9 implica que existem constantes  $K_1$  e  $K_2$  tais que

$$\|u\|_{L^{q+1}(\Omega)} \leq K_1 \|u\| \quad (4.22)$$

e

$$\|u\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)} \leq K_2 \|u\|, \quad (4.23)$$

para qualquer  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Definimos

$$C = \left(\frac{q+1}{4BK_1^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q-1}}$$

e

$$\rho = C\lambda^{-\frac{1}{q-1}}$$

(a escolha de  $C$  e  $\rho$  foi feita de modo que tenhamos

$$\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{\lambda BK_1^{q+1}}{q+1}\rho^{q+1} = \frac{C^2}{4}\lambda^{-\frac{2}{q-1}}$$

em (4.26) abaixo). Então, se  $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \rho$ , temos

$$I(u) = \frac{1}{2}\rho^2 - \int_{\Omega} H_\lambda(u) dx, \quad (4.24)$$

ou ainda, de (4.16) e (4.18),

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{\lambda B}{q+1} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx - \lambda \tilde{B}|\Omega| - \mu \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} dx - \mu \tilde{C}|\Omega|. \quad (4.25)$$

Assim, segue de (4.22) e (4.23) que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{\lambda BK_1^{q+1}}{q+1}\rho^{q+1} - \lambda\tilde{B}|\Omega| - \mu K_2^{\alpha+1}\rho^{\alpha+1} - \mu\tilde{C}|\Omega|. \quad (4.26)$$

Pela definição de  $C$  e de  $\rho$ , obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \lambda^{-\frac{2}{q-1}} \left( \frac{C^2}{4} - \lambda^{\frac{q+1}{q-1}} \tilde{B}|\Omega| - \mu K_2^{\alpha+1} C^{\alpha+1} \lambda^{\frac{1-\alpha}{q-1}} - \mu\tilde{C}|\Omega| \lambda^{\frac{2}{q-1}} \right) \\ &\geq \frac{C^2}{8} \lambda^{-\frac{2}{q-1}}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

para  $\lambda$  suficientemente pequeno (digamos, menor do que um certo  $\bar{\lambda} > 0$ ), como queríamos demonstrar.  $\square$

**Lema 4.3.4.** *Existe  $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \overline{B_\rho(0)}$  tal que  $I(v) \leq 0$ .*

*Demonstração.* De fato, seja  $v_1$  a autofunção correspondente ao autovalor principal  $\lambda_1$  de  $-\Delta$  com condição de fronteira de Dirichlet tal que  $v_1 > 0$  e  $\|v_1\| = 1$  (ver Teorema 2.4.1). Observe que  $F$  atinge seu mínimo (não necessariamente estrito) num ponto  $\beta$  onde  $f(\beta) = 0$  e  $f(x) > 0$ , para  $x > \beta$ . Ou seja

$$F(\beta) = \min \{F(s); s \in [0, \infty)\} \quad (4.28)$$

e temos, para  $s \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} I(sv_1) &= \frac{s^2}{2} \|v_1\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 - \lambda \int_{\Omega} G(sv_1) dx - \mu \int_{\Omega} F(sv_1) dx \\ &\leq \frac{s^2}{2} - \lambda \left( A s^{q+1} \int_{\Omega} \frac{v_1^{q+1}}{q+1} dx + A|\Omega| \right) - \mu F(\beta) |\Omega|. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Logo, como  $q > 1$ , temos que  $I(sv_1) \rightarrow -\infty$ , quando  $s \rightarrow \infty$ . Segue que existe um  $s_1 > \rho$  tal que  $I(s_1 v_1) \leq 0$ , concluindo a demonstração do lema.  $\square$

Segue então do Teorema do Passo da Montanha que existe  $u_\lambda \in W_0^{1,2}(\Omega)$  que é um ponto crítico de  $I$  e, portanto, solução fraca de (4.11). Como  $h_\lambda \in C^1$ ,  $u_\lambda$  é solução clássica. Resta mostrar que tal solução é positiva e que  $\|u_\lambda\|_\infty \geq c^* \lambda^{-\frac{1}{q-1}}$ .

**Lema 4.3.5.** *Existem  $c_1 > 0$  e  $\hat{\lambda} \in (0, \bar{\lambda})$  tais que*

$$\|u_\lambda\|_\infty \leq c_1 \lambda^{-\frac{1}{q-1}}$$

para todo  $\lambda \in (0, \hat{\lambda})$ .

*Demonstração.* Queremos inicialmente mostrar que  $\|u_\lambda\| \leq C\lambda^{-\frac{1}{q-1}}$ . Pela definição de  $I$ , por (4.19) e pelo Corolário 2.1.2(ii), para  $\lambda$  pequeno, temos

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|^2 &= 2I(u_\lambda) + 2 \int_{\Omega} H_\lambda(u_\lambda) dx \\ &\leq 2I(u_\lambda) + \frac{2}{\theta_1} \int_{\Omega} u_\lambda h_\lambda(u_\lambda) dx + 2\theta_2|\Omega| \\ &= 2I(u_\lambda) + \frac{2}{\theta_1} \|u_\lambda\|^2 + 2\theta_2|\Omega|. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Agora, escrevendo  $K_2 = \int_{\Omega} |v_1|^{q+1} dx$  e usando (4.28), segue das desigualdades (4.16), (4.17) e (4.18) que

$$\begin{aligned} I(sv_1) &= \frac{1}{2} s^2 - \int_{\Omega} H_\lambda(sv_1) dx \\ &\leq \frac{1}{2} s^2 - \frac{\lambda A s^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} |v_1|^{q+1} dx - \lambda \tilde{A}|\Omega| - \mu F(\beta)|\Omega| \\ &= \frac{1}{2} s^2 - \frac{\lambda A K_2}{q+1} s^{q+1} - (\mu F(\beta) + \lambda \tilde{A})|\Omega| \end{aligned} \quad (4.31)$$

Definindo

$$p(s) = \frac{1}{2} s^2 - \frac{\lambda A K_2}{q+1} s^{q+1},$$

é fácil ver que  $a = (\lambda A K_2)^{-\frac{1}{q-1}}$  é o único ponto crítico positivo de  $p$  e que  $p''(a) = 1 - q < 0$ . Logo,

$$p(s) \leq p(a) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) (A K_2)^{-\frac{2}{q-1}} \lambda^{-\frac{2}{q-1}}, \quad (4.32)$$

para qualquer  $s \in [0, \infty)$ . Como, para  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno,  $\lambda^{-\frac{2}{q-1}}$  é grande, existe  $C > 0$  tal que,

$$I(sv_1) \leq C\lambda^{-2/(q-1)} \quad \text{para todo } s \in [0, \infty). \quad (4.33)$$

Escrevendo  $s_1$  como no fim da demonstração do Lema 4.3.4 e observando que  $I(u_\lambda) \leq \max\{I(sv_1); s \in [0, s_1]\}$  (Ver (3.2)) obtemos

$$I(u_\lambda) \leq C\lambda^{-2/(q-1)}, \quad (4.34)$$

para  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno. Juntando (4.30) e (4.34), obtemos

$$\|u_\lambda\|^2 \leq 2C\lambda^{-2/(q-1)} + \frac{2}{\theta_1} \|u_\lambda\|^2 + 2\theta_2|\Omega|. \quad (4.35)$$

Como  $\theta_1 > 2$ , temos  $\kappa := 1 - \frac{2}{\theta_1} > 0$  e logo, por (4.35),

$$\|u_\lambda\|^2 \leq \frac{2}{\kappa} C\lambda^{-2/(q-1)} + \frac{2\theta_2}{\kappa} |\Omega|. \quad (4.36)$$

Segue de (4.36) que existe  $C > 0$  tal que, para  $\lambda$  pequeno,

$$\|u_\lambda\| \leq C\lambda^{-\frac{1}{q-1}}, \quad (4.37)$$

como inicialmente havíamos afirmado.

Segue do Corolário 2.3.9 e da desigualdade (4.37), que, para  $\lambda > 0$  pequeno,

$$\|u_\lambda\|_{L^{2^*}} \leq C\lambda^{-\frac{1}{q-1}}.$$

Escrevendo  $a_1 = |\Omega|^{\frac{(q-1)(n-2)}{2n}}$ ,  $a_2 = |\Omega|^{\frac{q(n-2)}{(2n)}}$ , usando (4.20) e a desigualdade de Hölder (Teorema 2.1.7) temos

$$\begin{aligned} \|h_\lambda(u_\lambda)\|_{L^{\frac{2^*}{q}}} &\leq \left( \int_{\Omega} (\lambda|g(u_\lambda)| + \mu|f(u_\lambda)|)^{\frac{2n}{q(n-2)}} dx \right)^{\frac{q(n-2)}{2n}} \\ &\leq \theta_3 \left( \int_{\Omega} (\lambda|u_\lambda|^q + \mu|u_\lambda| + (\lambda + \mu))^{\frac{2n}{q(n-2)}} dx \right)^{\frac{q(n-2)}{(2n)}} \\ &\leq \theta_3 \left( \lambda \|u_\lambda\|_{L^{2^*}}^q + \mu \left[ \int_{\Omega} |u_\lambda|^{\frac{2n}{q(n-2)}} dx \right]^{\frac{q(n-2)}{2n}} + (\lambda + \mu)a_2 \right) \\ &\leq \theta_3 \left( \lambda \|u_\lambda\|_{L^{2^*}}^q + \mu \left[ |\Omega|^{\frac{q-1}{q}} \left( \int_{\Omega} |u_\lambda|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{q(n-2)}{2n}} \right. \\ &\quad \left. + (\lambda + \mu)a_2 \right) \\ &\leq \theta_3 (\lambda \|u_\lambda\|_{L^{2^*}}^q + \mu a_1 \|u_\lambda\|_{L^{2^*}} + (\lambda + \mu)a_2) \\ &\leq \theta_3 (\lambda C \|u_\lambda\|^q + \mu a_1 C \|u_\lambda\| + (\lambda + \mu)a_2), \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como  $\theta_3, C, \mu, a_1, a_2$  em (4.38) não dependem de  $\lambda$ , temos de (4.37) que existe  $C > 0$  tal que para  $\lambda$  suficientemente pequeno

$$\|h_\lambda(u_\lambda)\|_{L^{\frac{2^*}{q}}} \leq C\lambda^{-\frac{1}{q-1}}. \quad (4.39)$$

Pelo Teorema 2.3.14, temos  $\|u_\lambda\|_{W^{2, \frac{2^*}{q}}(\Omega)} \leq C \|h_\lambda(u_\lambda)\|_{L^{\frac{2^*}{q}}} \leq C\lambda^{-1/(q-1)}$ , onde  $C$  é independente de  $\lambda$ . Como  $W^{2, \frac{2^*}{q}}(\Omega)$  pode ser imerso em  $L^{\frac{2n}{q(n-2)-4}}(\Omega)$ , podemos repetir o argumento em (4.38) e (4.39) para ver que

$$\begin{aligned} \|h_\lambda(u_\lambda)\|_{L^{\frac{1}{q} \frac{2n}{q(n-2)-4}}(\Omega)} &\leq C\lambda^{-\frac{1}{q-1}} \text{ e} \\ \|u_\lambda\|_{W^{2, \frac{1}{q} \frac{2n}{q(n-2)-4}}(\Omega)} &\leq C\lambda^{-\frac{1}{q-1}}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Afirmação: Iterando este argumento, conseguimos

$$\|u_\lambda\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C\lambda^{-\frac{1}{q-1}}, \quad (4.41)$$

para algum  $r > \frac{n}{2}$ .

Note que em cada iteração conseguimos mostrar que se  $u_\lambda \in W^{2,t}(\Omega)$ , com  $t < \frac{n}{2}$ , então  $u_\lambda$  está também em  $W^{2,\varphi(t)}(\Omega)$ , onde  $\varphi(t) = \frac{1}{q} \frac{nt}{n-2t}$ . Observamos que

$$\varphi(t) = t \iff t = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

e

$$\frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \leq \frac{2^*}{q},$$

pois  $\varphi'(t) > 1$  para  $t > \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right)$ . Observamos finalmente que se  $\frac{2^*}{q} \geq \frac{n}{2}$ , não há o que provar e que no caso  $\frac{2^*}{q} < \frac{n}{2}$ , os cálculos acima mostram que, para algum  $\iota \geq 2$ ,  $\varphi^\iota\left(\frac{2^*}{q}\right) > \frac{n}{2}$ .

Agora, pelo Teorema 2.3.12,  $W^{2,r}(\Omega)$  pode ser imerso em  $C^{0,\gamma}(\Omega)$ , para algum  $0 < \gamma < 1$  e logo temos

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C\lambda^{-\frac{1}{q-1}},$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

**Lema 4.3.6.** *Seja  $\gamma > 0$  tal que*

$$|\Omega|\theta_3\gamma(\gamma^q + \gamma\mu) = \frac{C^2}{32|\Omega|}.$$

*Definindo  $\Omega_\lambda := \{x; u_\lambda(x) \geq \gamma\lambda^{-\frac{1}{q-1}}\}$ , temos*

$$|\Omega_\lambda| \geq \frac{C^2}{32\theta_3c_1(c_1^q + c_1\mu)} \equiv k_1.$$

*Demonstração.* Da definição de  $g$ , vemos que  $G$  é limitada inferiormente. Escreva  $\hat{G} = \inf \{G(s); s \in \mathbb{R}\}$ . Assim, pelo Corolário 2.1.2, pelo Lema 4.3.3 e por (4.28), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h_\lambda(u_\lambda)u_\lambda dx &= \int_{\Omega} -\Delta u_\lambda u_\lambda dx = \|u_\lambda\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \\ &\geq 2I(u_\lambda) + 2(\hat{G} + F(\beta))|\Omega| \\ &\geq \frac{C^2}{4}\lambda^{-\frac{2}{q-1}} + 2(\hat{G} + F(\beta))|\Omega| \\ &\geq \frac{C^2}{8}\lambda^{-\frac{2}{q-1}}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

para  $\lambda > 0$  pequeno. Seja agora  $\gamma > 0$  tal que  $|\Omega|\theta_3\gamma(\gamma^q + \gamma\mu) = \frac{C^2}{32|\Omega|}$  e  $\Omega_\lambda := \{x; u_\lambda(x) \geq \gamma\lambda^{-\frac{1}{q-1}}\}$ . Segue do Lema 4.3.5, de (4.42) e de (4.20)

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{8}\lambda^{-\frac{2}{q-1}} &\leq \int_{\Omega} h_\lambda(u_\lambda)u_\lambda dx \\ &= \int_{\Omega_\lambda} h_\lambda(u_\lambda)u_\lambda dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_\lambda} h_\lambda(u_\lambda)u_\lambda dx \\ &\leq \int_{\Omega_\lambda} [\theta_3(\lambda|u_\lambda|^q + \mu|u_\lambda| + (\lambda + \mu))] |u_\lambda| dx + \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus \Omega_\lambda} [\theta_3(\lambda|u_\lambda|^q + \mu|u_\lambda| + (\lambda + \mu))] |u_\lambda| dx \\ &\leq |\Omega_\lambda|\theta_3c_1\lambda^{-\frac{1}{q-1}} \left( (c_1^q + \mu c_1)\lambda^{-\frac{1}{q-1}} + (\lambda + \mu) \right) + \\ &\quad + |\Omega|\theta_3\gamma\lambda^{-\frac{1}{q-1}} \left( (\gamma^q + \mu\gamma)\lambda^{-\frac{1}{q-1}} + (\lambda + \mu) \right) \\ &\leq 2\theta_3\lambda^{-\frac{2}{q-1}} \left( |\Omega_\lambda|c_1(c_1^q + c_1\mu) + |\Omega|\gamma(\gamma^q + \gamma\mu) \right), \end{aligned} \tag{4.43}$$

para  $\lambda > 0$  pequeno. Pela definição de  $\gamma$ , obtemos

$$\frac{C^2}{8} \lambda^{-\frac{2}{q-1}} \leq 2\theta_3 \lambda^{-\frac{2}{q-1}} |\Omega_\lambda| c_1 (c_1^q + \mu c_1) + \frac{C^2}{16} \lambda^{-\frac{2}{q-1}},$$

ou ainda,

$$|\Omega_\lambda| \geq \frac{C^2}{32\theta_3 c_1 (c_1^q + c_1 \mu)}.$$

□

**Lema 4.3.7.** *Seja  $z : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  solução de*

$$\begin{cases} -\Delta z = 1 & \text{em } \Omega \\ z = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.44)$$

onde  $\Omega$  tem fronteira de classe  $C^2$ . Então existem constantes  $\sigma_1 > 0$  e  $\sigma_2 > 0$  tais que

$$\sigma_1 d(x, \partial\Omega) \leq z(x) \leq \sigma_2 d(x, \partial\Omega), \quad (4.45)$$

para todo  $x \in \bar{\Omega}$ .

*Demonstração (do Teorema 4.3.1).* Seja  $\mathcal{G}$  a função de Green do Laplaciano,  $-\Delta$ , em  $\Omega$ , com condição de fronteira de Dirichlet. Assim, temos

$$\begin{aligned} u_\lambda(\xi) &= \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, \xi) h_\lambda(u_\lambda) dx = \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, \xi) \lambda g(u_\lambda) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, \xi) \mu f(u_\lambda) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, \xi) \lambda g(u_\lambda) dx + \mu f(0) z(\xi), \end{aligned}$$

onde  $z : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  é solução de (4.44), como no Lema 4.3.7. Definindo  $\Omega_\lambda$  como no Lema 4.3.6, obtemos

$$|\Omega_\lambda| \geq \frac{C^2}{32\theta_3 c_1 (c_1^q + c_1 \mu)} \equiv k_1.$$

Além disso, consideremos

$$N_\varepsilon(\partial\Omega) = \{x + \beta\eta(x) : \beta \in [0, \varepsilon), x \in \partial\Omega\}$$

a interseção de uma vizinhança tubular (como no Teorema 2.6.3) com o fecho de  $\Omega$ . Assim,  $N_\varepsilon(\partial\Omega)$  é uma vizinhança aberta de  $\partial\Omega$  com relação a  $\bar{\Omega}$ . Tal



$\varepsilon$  pode ser escolhido de modo que se  $y = x + \beta\eta(x)$ , então  $d(y, \partial\Omega) = |\beta|$ . Como  $|N_\varepsilon(\partial\Omega)| = O(\varepsilon) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$|N_\varepsilon(\partial\Omega)| \leq \frac{k_1}{2}.$$

Definindo  $K_\lambda = \Omega_\lambda \setminus N_\varepsilon(\partial\Omega)$ , é fácil ver que

$$|K_\lambda| \geq \frac{k_1}{2}.$$

Para  $x \in K_\lambda$  e  $\xi \in \partial\Omega$  temos, pelo Princípio do Máximo de Hopf (Teorema 2.2.7),

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta}(x, \xi) > 0.$$

Como  $K_\lambda \times \partial\Omega$  é compacto existem  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$  e  $b > 0$  tais que, se  $x \in K_\lambda$  e  $\xi \in N_{\varepsilon_1}(\partial\Omega)$  então

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta}(x, \xi) \geq b.$$

Em particular, para  $x \in K_\lambda$  e  $d(\xi, \partial\Omega) < \varepsilon_1$  temos  $\mathcal{G}(x, \xi) \geq bd(\xi, \partial\Omega)$ .

Como  $g(u_\lambda) > 0$  para qualquer  $u_\lambda$ , temos

$$u_\lambda(\xi) \geq \int_{K_\lambda} \mathcal{G}(x, \xi) \lambda g(u_\lambda) dx + \mu f(0)z(\xi).$$

Logo, para  $\lambda$  suficientemente pequeno, (4.13) e (4.45),

$$\begin{aligned} u_\lambda(\xi) &\geq \int_{K_\lambda} bd(\xi, \partial\Omega) \lambda A u_\lambda^q dx + \mu f(0)z(\xi) \\ &\geq bd(\xi, \partial\Omega) A \gamma^q \lambda^{\frac{-1}{q-1}} |K_\lambda| + \mu f(0)\sigma_2 d(\xi, \partial\Omega) \\ &\geq \tilde{c}d(\xi, \partial\Omega) \lambda^{\frac{-1}{q-1}}, \end{aligned} \tag{4.46}$$

onde  $\tilde{c} > 0$  não depende de  $\lambda$ . Isso, em particular mostra que

$$\|u_\lambda\|_\infty \geq C \lambda^{\frac{-1}{q-1}}.$$

Resta mostrar que  $u_\lambda > 0$  em  $\Omega$ . Definimos  $w_\lambda(x)$  e  $z_\lambda(x)$  tais que

$$\begin{cases} -\Delta w_\lambda = \lambda g(w_\lambda) + \mu f^+(w_\lambda) & \text{em } \Omega \\ w_\lambda = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.47}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta z_\lambda = \mu f^-(z_\lambda) & \text{em } \Omega \\ z_\lambda = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.48)$$

onde

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq \beta \\ 0 & x < \beta \end{cases} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq \beta \\ 0 & x > \beta \end{cases}$$

Usando o Princípio do Máximo (Teorema 2.2.4), é fácil ver que  $u_\lambda = w_\lambda + z_\lambda$ . Note também que

$$z_\lambda(x) = \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, y) \mu f^-(u_\lambda(y)) dy$$

e segue então que  $z_\lambda \leq 0$  e como  $f^-(u_\lambda(y)) \geq f(0)$  temos

$$\begin{aligned} z_\lambda(x) &\geq \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, y) \mu f(0) dy = \mu f(0) \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, y) dy \\ &\geq \mu f(0) \max_{x \in \tilde{\Omega}} \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, y) dy \equiv -M_1, \end{aligned}$$

com  $M_1 > 0$ . Para  $\xi$  tal que  $d(\xi, \partial\Omega) = \varepsilon_1$  temos

$$w_\lambda(\xi) = u_\lambda(\xi) - z_\lambda(\xi) \geq u_\lambda(\xi) \geq \varepsilon_1 \tilde{c} \lambda^{-\frac{1}{q-1}},$$

e, pelo Princípio do Máximo, temos  $w_\lambda(\xi) \geq \varepsilon_1 \tilde{c} \lambda^{-\frac{1}{q-1}}$  para qualquer  $\xi \in \Omega \setminus N_{\varepsilon_1}(\partial\Omega)$ . Isso implica  $u_\lambda(x) = w_\lambda(x) + z_\lambda(x) \geq \varepsilon_1 \tilde{c} \lambda^{-\frac{1}{q-1}} - M_1$  e então  $u_\lambda(x) \geq (\varepsilon_1 \tilde{c}/2) \lambda^{-\frac{1}{q-1}}$  para todo  $x \in \Omega \setminus N_{\varepsilon_1}(\partial\Omega)$  para  $\lambda$  pequeno. Assim, (4.46) implica, para  $\lambda$  pequeno, que  $u_\lambda(x) > 0$  em  $\Omega$ , concluindo a prova do Teorema 4.3.1.  $\square$

## 4.4 Identidade de Derrick-Pohozaev

A identidade seguinte é interessante para entendermos que, de certo modo, a restrição sobre a constante  $q$  em (4.12) é natural. Mais precisamente, mostramos nesta seção, como aplicação da Identidade de Derrick-Pohozaev, que existem problemas de valor de fronteira que não possuem solução positiva, quando não impormos aquela restrição a  $q$ . A demonstração que apresentamos é a mesma de [11].

**Teorema 4.4.1** (Identidade de Derrick-Pohozaev). *Suponhamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado com  $\partial\Omega \in C^1$  e que  $q > \frac{n+2}{n-2}$ . Se  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  é solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-1}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.49)$$

obtemos

$$\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \langle \nu, x \rangle dS = \frac{n}{q+1} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx.$$

*Demonstração.* Multiplicando a EDP em (4.49) por  $\langle \nabla u, x \rangle$  e integrando em  $\Omega$ , obtemos

$$A := \int_{\Omega} (-\Delta u) \langle \nabla u, x \rangle dx = \int_{\Omega} |u|^{q-1} u \langle \nabla u, x \rangle dx =: B. \quad (4.50)$$

Observamos agora, integrando por partes, que

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |u|^{q-1} u x_j u_{x_j} dx \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{|u|^{q+1}}{q+1} \right)_{x_j} x_j dx \\ &= - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{|u|^{q+1}}{q+1} dx \\ &= - \frac{n}{q+1} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Por outro lado, usando o Corolário 2.1.2,

$$\begin{aligned} A &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \sum_{j=1}^n x_j u_{x_j} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i} (x_j u_{x_j})_{x_i} dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i} \nu_i x_j u_{x_j} dS \\ &=: A_1 + A_2 \end{aligned} \quad (4.52)$$

e temos, novamente integrando por partes,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (u_{x_i} u_{x_j} \delta_{ij} + u_{x_i} x_j u_{x_j x_i}) dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{u_{x_i}^2}{2} \right)_{x_j} dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{|\nabla u|^2}{2} \right)_{x_j} dx \\
&= \left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \langle \nu(x), x \rangle dS.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Falta ainda calcularmos  $A_2$ . Como  $u = 0$  em  $\partial\Omega$ , temos que  $\nabla u(x)$  é paralelo a  $\nu(x)$ , para qualquer  $x \in \partial\Omega$ , ie,  $\nabla u(x) = \pm |\nabla u(x)| \nu(x)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
A_2 &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial\Omega} (\pm |\nabla u|) \nu_i^2 x_j (\pm |\nabla u|) \nu_j dS \\
&= - \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \langle \nu, x \rangle dS.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Agora, juntando (4.50)–(4.54) obtemos

$$\left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \langle \nu, x \rangle dS = -\frac{n}{q+1} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx. \tag{4.55}$$

Multiplicando (4.55) por  $-1$ , obtemos o que queríamos.  $\square$

**Definição 4.4.2.** Um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é dito estrelado com respeito à origem quando, para todo  $x \in \overline{\Omega}$ , o segmento  $\{tx \mid 0 \leq t \leq 1\}$  está contido em  $\overline{\Omega}$ .

**Lema 4.4.3.** *Suponhamos que  $\Omega$  é estrelado com respeito à origem e  $\partial\Omega \in C^1$ . Então, para todo  $x \in \partial\Omega$ ,*

$$\langle x, \nu(x) \rangle \geq 0,$$

onde  $\nu(x)$  denota o vetor normal unitário exterior a  $\Omega$  em  $x$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \partial\Omega$ . Como  $\partial\Omega \in C^1$ , temos que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $y \in \partial\Omega$  satisfaz  $|y - x| < \delta$ , então

$$\nu(x) \cdot \frac{y - x}{|y - x|} \leq \varepsilon.$$

Em particular,

$$\limsup_{y \rightarrow x, y \in \bar{\Omega}} \nu(x) \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \leq 0.$$

Consideremos  $y = tx$ , para  $0 < t < 1$ . Como  $\Omega$  é estrelado com respeito à origem, segue que  $y \in \bar{\Omega}$ . Portanto,

$$\nu(x) \cdot \frac{x}{|x|} = - \lim_{t \rightarrow 1^-} \nu(x) \cdot \frac{tx-x}{|tx-x|} \geq 0.$$

□

Vamos então ao resultado desejado.

**Teorema 4.4.4.** *Suponhamos que  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  é uma solução de (4.49) e que  $q > \frac{n+2}{n-2}$ . Suponhamos que  $\Omega$  é um domínio estrelado com respeito ao 0 e que  $\partial\Omega \in C^1$ . Então  $u \equiv 0$  em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Pela Identidade de Derrick-Pohozaev e pelo Lema 4.4.3 acima, obtemos

$$\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{n}{q+1} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx.$$

Mas, multiplicando a EDP em (4.49) por  $u$  e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx.$$

Assim, obtemos

$$\left( \frac{n-2}{2} - \frac{n}{q+1} \right) \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx \leq 0.$$

Portanto, se  $u \not\equiv 0$ , obtemos

$$\frac{n-2}{2} - \frac{n}{q+1} \leq 0,$$

ou ainda,

$$q \leq \frac{n+2}{n-2}.$$

□

## 4.5 Não Unicidade de Soluções Positivas

**Teorema 4.5.1.** *Existe um  $\mu_0 > 0$  tal que, para  $\mu \geq \mu_0$  e  $\lambda$  pequeno, (4.11) tem pelo menos duas soluções positivas.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.2.3, existe um  $\mu_0 > 0$  tal que, para  $\mu \geq \mu_0$ , existe um  $w > 0$  em  $\Omega$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu f(w) & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} . \quad (4.56)$$

Como  $\lambda > 0$  e  $g > 0$  segue que

$$\begin{cases} -\Delta w \leq \lambda g(w) + \mu f(w) & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.57)$$

e portanto  $w$  é uma subsolução de (4.11).

Seja  $z$  como em (4.44). Defina  $\phi = \sigma z$ , onde  $\sigma > 0$  é grande suficiente de modo que  $\phi > w$  em  $\Omega$  e

$$\mu \frac{f(\sigma z)}{\sigma} < \frac{1}{2}. \quad (4.58)$$

Isso é possível pois, em  $\bar{\Omega}$ , tanto  $w$  como  $z$  são limitadas (digamos  $|z| \leq M$ ), as derivadas normais são limitadas inferiormente para  $z$  e superiormente para  $w$ , e, sendo  $f$  crescente, segue de (4.15) que existe  $\sigma > 0$  grande de modo que

$$\frac{f(\sigma z)}{\sigma M} \leq \frac{f(\sigma M)}{\sigma M} < \frac{1}{2\mu M}.$$

Fixando tal  $\sigma$ , podemos encontrar  $\lambda > 0$  pequeno de modo que

$$\lambda \frac{g(\sigma z)}{\sigma} \leq \lambda \frac{g(\sigma M)}{\sigma} < \frac{1}{2}, \quad (4.59)$$

pois  $g$  é crescente. Segue, somando as desigualdades em (4.58) e (4.59), que

$$-\Delta \phi = \sigma \geq \lambda g(\sigma z) + \mu f(\sigma z) = \lambda g(\phi) + \mu f(\phi) \text{ em } \Omega,$$

isto é,  $\phi$  é uma supersolução de (4.11).

Segue do Teorema 2.5.9 que existe uma solução  $\tilde{u}_\lambda$  de (4.11) tal que  $w \leq \tilde{u}_\lambda \leq \phi$ , para  $\mu \geq \mu_0$  e  $\lambda > 0$  pequeno. Mas temos que, pelo Teorema 4.3.1, para  $\lambda > 0$  pequeno, existe uma solução positiva  $u_\lambda$  satisfazendo  $\|u_\lambda\|_\infty \geq$

$c^*\lambda^{-\frac{1}{q-1}}$ . Logo, para  $\lambda > 0$  pequeno, a norma  $\|u_\lambda\|_\infty$  é grande, mostrando que  $\tilde{u}_\lambda$  e  $u_\lambda$  não podem coincidir, já que  $\tilde{u}_\lambda \leq \phi$  e  $\phi$  é limitada em  $\bar{\Omega}$ . Portanto, são duas soluções positivas distintas de (4.11).  $\square$

## 4.6 Não existência de Solução Positiva

**Teorema 4.6.1.** *Seja  $\mu > 0$  fixo. Se  $\lambda$  é suficientemente grande, então (4.11) não possui solução positiva.*

*Demonstração.* Suponha que exista uma solução positiva  $u$  de (4.11). Usando (4.13) e que  $g(0) > 0$ , vemos que existem  $\sigma > 0$  e  $\varepsilon > 0$  tais que  $g(x) \geq (\sigma x + \varepsilon)$  para qualquer  $x \geq 0$ . Além disso, como  $f$  é eventualmente estritamente positiva, existe  $\beta$  tal que  $f(\beta) = 0$  e  $f(x) > 0$ , para todo  $x > \beta$ . Então, para  $\lambda > 0$ , temos

$$\lambda g(x) + \mu f(x) \geq \begin{cases} \lambda(\sigma x + \varepsilon) & \text{para } x \geq \beta \\ \lambda(\sigma x + \varepsilon) + \mu f(0) & \text{para } x \leq \beta \end{cases} \quad (4.60)$$

Escolhendo  $\lambda$  grande de modo que  $\lambda\varepsilon + \mu f(0) \geq \frac{\lambda\varepsilon}{2}$ , temos

$$\lambda g(u) + \mu f(u) \geq \lambda\sigma u + \frac{\lambda\varepsilon}{2}$$

para  $u \geq 0$  e  $\lambda$  grande. Seja agora  $\phi > 0$  uma autofunção correspondente ao autovalor principal  $\lambda_1$  de  $-\Delta$  com condição de fronteira de Dirichlet. Multiplicando (4.11) por  $\phi$  e integrando, obtemos

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)\phi dx = \int_{\Omega} (\lambda g(u) + \mu f(u))\phi dx$$

ou ainda, pelo Teorema da Divergência (Teorema 2.1.1),

$$\int_{\Omega} u\lambda_1\phi dx = \int_{\Omega} (\lambda g(u) + \mu f(u))\phi dx,$$

$$\int_{\Omega} u\lambda_1\phi dx \geq \int_{\Omega} (\lambda\sigma u + \frac{\lambda\varepsilon}{2})\phi dx.$$

Podemos reescrever a equação anterior como

$$\int_{\Omega} (\lambda_1 - \lambda\sigma)u\phi dx \geq \int_{\Omega} \frac{\lambda\varepsilon}{2}\phi dx.$$

Observe agora que se  $\lambda \geq \frac{\lambda_1}{\sigma}$ , obteremos

$$\int_{\Omega} \frac{\lambda \varepsilon}{2} \phi dx \leq 0,$$

uma contradição. Portanto, se  $\mu > 0$  é fixo, (4.11) não possui solução positiva para valores grandes de  $\lambda$ .  $\square$



# Bibliografia

- [1] A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz; *Dual variational methods in critical point theory and applications*, Journal Functional Analysis 14 (1973), pp. 349 - 381.
- [2] H. Amman; *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, Siam Review 18 (1976), pp. 620 - 709.
- [3] H. Amman; *Existence and multiplicity theorems for semi-linear elliptic boundary value problems*, Mathematische Zeitschrift 150 (1976), pp. 281 - 295.
- [4] S. Caldwell, A. Castro, R. Shivaji, S. Unsurangsie; *Positive solutions for classes of multiparameter elliptic semipositone problems*, Elect. Journal of Differential Equations, Vol. 2007, no. 96 (2007), pp. 1 - 10.
- [5] A. Castro, J. B. Garner, and R. Shivaji; *Existence results for classes of sublinear semipositone problems*, Results in Mathematics, 23 (1993), pp. 214 - 220.
- [6] A. Castro, C. Maya e R. Shivaji; *Nonlinear eigenvalue problems with semipositone structure*, Elect. Journal of Differential Equations, Conf. 5 (2000), pp. 33 - 49.
- [7] P. Clément e G. Sweers; *Getting a solution between sub- and supersolutions without monotone iteration*, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste 19 (1987), pp. 189 - 194.
- [8] P. Clément e G. Sweers; *Existence and multiplicity results for a semilinear elliptic eigenvalue problem*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 14 (1987), pp. 97 - 121.

- [9] D. S. Cohen e H. B. Keller; *Some positive problems suggested by nonlinear heat generation*, Journal of Mathematical Mechanics 16 (1967), pp. 1361 - 1376.
- [10] E. N. Dancer e G. Sweers; *On the existence of a maximal weak solution for a semilinear elliptic equation*, Differential and Integral Equations 2 (1989), pp. 533 - 540.
- [11] L. C. Evans; *Partial Differential Equations*, Graduated Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society (1998).
- [12] D. Gilbarg e N. Trudinger; *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Berlin, New York: Springer-Verlag (2001).
- [13] E. K. Lee, R. Shivaji, J. Ye; *Subsolutions: A journey from positive to infinite semipositone problems*, Elect. Journal of Differential Equations, Conf. 17 (2009), pp. 123 - 131.
- [14] E. L. Lima; *Análise Real Vol. 3 - Análise Vetorial*, Coleção Matemática Universitária, SBM, (2007).
- [15] P. L. Lions; *On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, Siam Review 24 (1982), pp. 441 - 467.
- [16] A. C. Ponce; *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial*, Publicações Matemáticas, IMPA (2006).
- [17] P. Rabinowitz; *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, American Mathematical Society, CBMS 65 (1986).
- [18] W. Rudin; *Functional Analysis*, Second Edition, Mc Graw-Hill (1991).
- [19] W. Rudin; *Real and Complex Analysis*, Third Edition, Mc Graw-Hill (1986).
- [20] M. Spivak; *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York (1965).