

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

# Espalhamento Acústico por Superfícies Ásperas

por

John Raul Inga De La Cruz

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Mark Thompson  
Orientador

Profª. Dra. Manuela Longoni de Castro  
Co-orientadora

Porto Alegre, Maio de 2009.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Inga De La Cruz, John Raul

Espalhamento Acústico por Superfícies Ásperas / John Raul Inga De La Cruz.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2009.

51 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2009.

Orientador: Thompson, Mark; Co-orientadora: Longoni de Castro, Manuela

Dissertação: Física-Matemática

Equação de Helmholtz, Espalhamento de Ondas, Comportamento Assintótico

# Espalhamento Acústico por Superfícies Ásperas

por

John Raul Inga De La Cruz

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Física-Matemática

Orientador: Prof. Dr. Mark Thompson

Co-orientadora: Profa. Dra. Manuela Longoni de Castro

Banca examinadora:

Prof. Dr. Leandro Farina  
PPGMAP-UFRGS

Prof. Dr. Luciano Bedin  
Dep. Mat. UFSC

Prof. Dr. Augusto Vieira Cardona  
Dep. Mat. PUCRS

Dissertação apresentada e aprovada em  
29/05/2009.

Waldir Leite Roque  
Coordenador

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por estar sempre ao meu lado nas minhas quedas, lutas, vitórias e derrotas.

Aos meus pais, Raul Inga e Estela De la Cruz, aos meus irmãos e meus familiares mais próximos a mim, por estarem sempre comigo me apoiando e incentivando para seguir sempre em frente. Esta vitória também é de vocês.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Ao programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), por me oferecer a oportunidade de realizar este mestrado.

Ao meu orientador o professor Dr. Mark Thompson, por direcionar minha pesquisa e auxiliar na execução e nas soluções de dúvidas que surgiram ao longo do trabalho.

À professora Dra. Manuela Longoni de Castro, pela co-orientação e pela dedicação no desenvolvimento da dissertação.

Aos professores do PPGMAP, que de alguma maneira contribuíram nesta minha caminhada, em especial aos professores que ministraram as disciplinas que cursei durante estes dois anos.

Aos meus antigos professores, que me ensinaram com prazer e dedicação parte do que sei e abriram a porta do meu futuro com o estudo.

A todos os meus amigos, pelo incentivo e torcida. Registro aqui as saudades dos momentos inesquecíveis e deixo um abraço imenso a todos eles.

## Sumário

RESUMO . . . . .	vii
ABSTRACT . . . . .	viii
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
1.1 Informação Básica sobre Espalhamento por Superfícies Ásperas	1
1.2 A Natureza das Superfícies Ásperas . . . . .	2
1.3 Ponto de partida do Trabalho . . . . .	2
1.4 Apresentação e Objetivo do Trabalho . . . . .	4
2 A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	5
2.1 O domínio Lipschitz . . . . .	5
2.2 O problema de espalhamento . . . . .	7
2.3 Existência e Unicidade do PEDH . . . . .	8
3 O MÉTODO DO CAMPO NULO . . . . .	13
3.1 Considerações prévias . . . . .	13
3.2 As equações do campo nulo . . . . .	15
4 APROXIMAÇÕES DE BAIXA ORDEM . . . . .	19
4.1 Aproximação assintótica para a função de Hankel . . . . .	19
4.2 Aproximação de baixa ordem para $Q(\theta)$ . . . . .	20
4.3 Aproximação de baixa ordem para $\varphi(\theta)$ . . . . .	22
4.4 Aproximação de baixa ordem para $u_s$ . . . . .	22
4.5 A ordem de aproximação de $u_s^M$ . . . . .	24
5 COMPORTAMENTO FAR-FIELD . . . . .	29
5.1 Comportamento da $u_s^M$ para $r$ muito grande . . . . .	29
5.2 O padrão de campo distante . . . . .	32

5.3	A média da seção transversal de espalhamento . . . . .	32
6	UMA SUPERFÍCIE TIPO III . . . . .	34
6.1	A representação de $R'(\theta)$ . . . . .	36
6.2	A representação de $R(\theta)$ . . . . .	43
7	CONCLUSÕES . . . . .	46
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	48

## RESUMO

O espalhamento acústico por uma superfície continuamente diferenciável mas com tangente fractal, o chamado caso tipo III, primeiramente introduzido por Jakeman em [27] e [26], tem sido tratado computacionalmente para perturbações ásperas de superfícies planas e ilimitadas. O presente trabalho analisa teoricamente o espalhamento acústico de uma perturbação aleatória áspera de tipo III de um círculo, utilizando o método de campo nulo e aproximações assintóticas. Os resultados principais são: uma expressão assintótica de baixa ordem para a onda espalhada e o padrão de campo distante. Pela falta de artigos e livros tratando este tópico, o presente trabalho pretende servir como base para futuros trabalhos.

## ABSTRACT

The acoustic scattering by continuously differentiable surface but with fractal tangent, the so-called type III case, first introduced by Jakeman in [27] and [26], has been treated computationally for rough perturbations of plane unbounded regions. The present work analyses theoretically the acoustic scattering of a random rough perturbation of type III of a circle, using the null field method and asymptotic techniques. The principal results are: an asymptotic expression of low order for the scattered wave and the far field pattern. Due to the lack of papers and books dealing with this topic the present work pretends to serve as a basis for future works.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Informação Básica sobre Espalhamento por Superfícies Ásperas

O livro clássico sobre espalhamento de onda por superfícies ásperas é "The scattering of Electromagnetic waves from rough surfaces" de Beckmann e Spizzichino [6], os resultados obtidos nesse livro são ainda utilizados como base. Beckmann também publicou artigos relacionados a espalhamento de onda por superfícies ásperas [2], [3], [4], [5]. No livro de Bass e Fuks [1], considera-se a teoria de Kirchoff e a teoria de perturbações, incluindo efeitos complicados tais como superfícies "self-shadowing" e escalas múltiplas de rugosidade. O espalhamento múltiplo também é considerado utilizando técnicas de equações integrais. Fortuin [15] fez um estudo sobre espalhamento de onda acústica na superfície do mar, onde estudou superfícies periódicas e aleatórias. As teorias de perturbação e de Kirchoff são utilizadas e modelos de predição são comparados com observações experimentais do espalhamento da superfície do mar. Outros trabalhos podem ser encontrados em Horton [18], Shmelev [38], Valenzuela [42] e Ishimaru [19]. Um trabalho específico para ondas electromagnéticas foi feito por McGinn e Sykes [34]. Trabalhos sobre a teoria são dados em Ogilvy [35], [36]. Os métodos descritivos para as propriedades estatísticas de superfícies ásperas aleatórias foram estudados em Thomas [40].

O espalhamento de onda por superfícies ásperas foi estudado primeiro por Rayleigh em 1877, que considerou o problema de uma onda plana monocromática incidente normalmente numa superfície sinusoidal, [37]. Esse trabalho iniciou o desenvolvimento do assim chamado "critério de Rayleigh", que serve para determinar o grau de aspereza (ou rugosidade) de uma superfície.

## 1.2 A Natureza das Superfícies Ásperas

O que se conhece sobre a natureza das superfícies ásperas aleatórias é que nunca duas superfícies ásperas são idênticas, ainda que sejam formadas por um processo bem controlado. Para superfícies criadas sob condições menos rigorosas (tal como o mar aberto, paisagens ou uma superfície quebrada) não é possível prever a altura (ou forma) de qualquer parte da superfície mesmo que se conheça as alturas das partes adjacentes da superfície e a natureza aleatória é ainda mais notória. Assim, aquela superfície pode ser considerada como um processo aleatório, isto é, "um processo que não tem memória". Para descrever tais superfícies, são necessárias técnicas estatísticas. Uma superfície áspera é usualmente descrita em termos do desvio com respeito a uma "superfície de referência" suave. A forma e localização da superfície de referência são escolhidas com bom senso, de acordo com o comportamento de longo alcance da superfície. Por exemplo, a descrição de um cilindro áspero envolve medições dos desvios da altura com respeito a uma superfície cilíndrica suave, entretanto a altura da superfície de um mar áspero teria que ser calculada com respeito a um plano suave. A natureza de uma superfície áspera é dada principalmente por dois aspectos: primeiro, a propagação das alturas ao redor da superfície de referência e, segundo, a variação dessas alturas ao longo da superfície. Uma variedade de distribuições estatísticas e parâmetros pode ser utilizada para descrever essas propriedades da superfície. A mais conhecida é constituída pelas funções de distribuição da altura da superfície e das funções de autocorrelação da superfície.

## 1.3 Ponto de partida do Trabalho

Espalhamento por objetos fractais têm recebido grande interesse nos recentes anos por pesquisas teóricas e experimentais que envolvem espalhamento acústico, eletromagnético, de nêutrons etc. Pelo menos dois artigos excelentes foram publicados, [20] e [46], e um livro de Ogilvy, [36], que também trata este tópico,

enquanto resultados experimentais são obtidos em Teixeira [39]. Em [20], fez-se uma revisão de uma boa parte dos trabalhos de Jaggard e seus associados, publicados em artigos por Jaggard & Kim [21], [29], [30]; Jaggard and Sun [22], [23], [24], [25] e Kim, Grebel & Jaggard [28]. Mas antes, várias contribuições foram dadas por Berry & Blackwell [8] e Berry [7]. No seus artigos [27] e [26], Jakeman propõe a classificação de superfícies em três tipos:

- (I) Superfície fractal, a qual é contínua mas não é diferenciável e tem espectro de potência (power-law spectrum). Este tipo de superfície gera somente difração e efeitos de interferência.
- (II) Superfícies variando suavemente, as quais são diferenciáveis de todas as ordens e têm propriedades espectrais do tipo gaussiano. Tais superfícies geram efeitos ópticos geométricos associados a raios ou normais à frente da onda espalhada inicial.
- (III) Classe intermediária, formada por superfícies onde a altura é contínua e diferenciável mas a tangente é fractal. O conceito de raio é válido para este modelo, mas na ausência de derivadas de alta ordem da superfície, não ocorrem catástrofes geométricas na propagação das frentes de ondas.

Uma modificação para (I) foi proposta com a noção de superfície "fractal" de banda limitada (ver [20]). A superfície tipo (III) e a superfície fractal de banda limitada podem ser obtidas através de uma formulação de equação integral. O tipo (III) foi analisado por Macaskill em [32] em uma tentativa de estabelecer a existência do "enhanced backscattering", não obstante a análise não seja convincente. O único tratamento razoavelmente rigoroso de tais problemas do qual se tem conhecimento é dado no artigo de Jaggard and Sun [24].

## 1.4 Apresentação e Objetivo do Trabalho

A discussão tratada neste trabalho é a análise do espalhamento de uma onda incidente, com uma frequência muito grande, por uma superfície limitada do tipo (III). Consideramos que essa superfície limitada possui fronteira Lipschitz, mas a sua tangente é um fractal. Este trabalho tem como finalidade obter uma expressão para a aproximação de baixa ordem da onda espalhada, também obter uma expressão para o padrão de campo distante (distante do espalhador, na literatura é chamado far field pattern), a média da seção transversal do espalhamento (mean scattering cross-section) para campos distantes do espalhador (scatterer) e um exemplo de superfície tipo III satisfazendo as condições impostas neste trabalho.

O trabalho é dividido da seguinte forma: no capítulo 2, definimos o domínio (uma superfície tipo III), o problema exterior de Dirichlet para a equação de Helmholtz, também garantimos a existência e unicidade do problema em estudo. No capítulo 3, obtemos as equações de campo nulo, as quais servem para obter uma aproximação de baixa ordem para  $\frac{\partial u_s(y)}{\partial \nu}$ , a derivada normal exterior da onda espalhada na fronteira. No capítulo 4, utilizamos a aproximação assintótica da função de Hankel de primeira espécie para obter uma aproximação de baixa ordem para onda espalhada. No capítulo 5, analisamos o comportamento de campo distante da onda espalhada aproximada,  $u_s^M$ , também obtemos uma expressão para o padrão de campo distante e a média da seção transversal de espalhamento. No capítulo 6, damos um exemplo de superfície tipo III. Por último, no capítulo 7, apresentamos as conclusões.

## 2 A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### 2.1 O domínio Lipschitz

As coordenadas cartesianas em  $\mathbb{R}^2$  serão representados por  $x_1$  e  $x_2$ . As coordenadas polares serão representadas por  $r$  e  $\phi$ , onde o ângulo polar  $\phi$  é medido com respeito ao semi-eixo positivo  $x_1$  e estão relacionadas por  $(x_1, x_2) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ , mas se o ponto  $(x_1, x_2)$  pertence á fronteira do domínio Lipschitz,  $\partial\Omega$  definido posteriormente em (2.4), será representado em coordenadas polares por  $\theta$  e  $R(\theta)$ , (ver Figura 2.1).

Para obter uma perturbação aleatória áspera de tipo III de um círculo, começamos por definir a função:

$$F_{\mathbf{Y}}(\theta); \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (2.1)$$

tendo as seguintes características :

- É uma função de variável aleatória em  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Y}$  denota o espaço amostral da variável ou variáveis aleatórias.
- $F_{\mathbf{Y}}(0) = F_{\mathbf{Y}}(2\pi)$ .
- $F'_{\mathbf{Y}}$  é uma função fractal, da qual  $F''_{\mathbf{Y}}$  não existe.

onde , ' denota a derivada com respeito a  $\theta$  ( $' = \frac{d}{d\theta}$ ) e '' denota a segunda derivada com respeito a  $\theta$  ( $'' = \frac{d^2}{d\theta^2}$ ).

**Observação 1.** Faremos um abuso de notação, denotando  $F_{\mathbf{Y}}(\theta)$  por  $F(\theta)$ .

A região onde trabalharemos é definida, em coordenadas polares, da seguinte maneira:

$$R(\theta) = 1 + \epsilon F(\theta); \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (2.2)$$

onde:

$$\begin{aligned} \epsilon \quad (0 < \epsilon \ll 1) \text{ é escolhido de tal forma a se verificar } 0 < R_0 \leq R(\theta), \\ \forall 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ onde } R_0 \text{ é uma constante (ver Figura 2.1)}. \end{aligned}$$

**Observação 2.** *Do fato que a função  $F$  é Lipschitz e definida sobre um intervalo compacto, temos que  $F$  é limitada inferiormente e superiormente. Assim escolhendo um  $\epsilon \ll 1$ , ou um  $\epsilon$  adequado como o dado na proposição 6.2.2, podemos obter uma constante  $R_0$  satisfazendo a condição acima, dessa maneira temos uma perturbação aleatória do círculo unitário.*

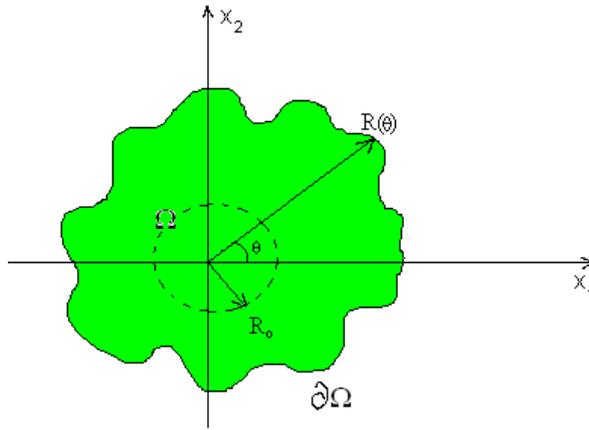


Figura 2.1: Gráfico da região  $\Omega$  e da fronteira  $\partial\Omega$

Definimos a região  $\Omega$  por :

$$\Omega = \{(r \cos\theta, r \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r < R(\theta)\} \quad (2.3)$$

tal que a fronteira  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  é:

$$\partial\Omega = \{(R(\theta) \cos\theta, R(\theta) \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad (2.4)$$

Trabalhamos sob a condição de que a região  $\Omega$  é um domínio Lipschitz limitado, para isso acontecer basta que a função  $F(\theta)$  seja Lipschitz e, como consequência disto, garantimos a existência de  $F'(\theta)$  em quase toda parte. Para mais detalhe sobre a definição de Domínio Lipschitz, veja a definição 2.3.1 ou o artigo de G. Verchota [43].

Perceba que  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  é conexo,  $\overline{\Omega}$  denota o fecho de  $\Omega$ . Da análise, temos que toda função lipschitz definida num intervalo compacto é limitada, ademais a derivada também é limitada quase sempre. Então, define-se  $R_1$  e  $R_2$  por:

$$R(\theta) \leq R_1 \quad ; \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (2.5)$$

$$|R'(\theta)| \leq R_2 \quad ; \forall \theta \in I \quad (2.6)$$

onde,  $I = \{\theta \in [0, 2\pi] : R'(\theta) \text{ existe}\}$ ,  $\mu([0, 2\pi] \setminus I) = 0$  e  $\mu$  é a medida de Lebesgue.

**Observação 3.** *Tendo estabelecido as condições para  $F$  e, conseqüentemente, para  $R$ , segue que  $\partial\Omega$  representa exatamente nossa superfície aleatória áspera tipo III.*

## 2.2 O problema de espalhamento

Da literatura ([11] pg 38, [36] pg 67), temos que a onda total, denotada por  $u$ , na presença de um obstáculo toma a forma  $u = u_{in} + u_s$ ; onde  $u_{in}$  é a onda incidente e  $u_s$  é a onda espalhada. Aqui trabalharemos sob condições acústicas ideais, isto é, sob as condições de Dirichlet. Assim  $u = 0$  na fronteira, que é o mesmo  $u_s = -u_{in}$  na fronteira.

Uma onda plana incidente tem a seguinte forma:

$$u_{in}(x) = e^{i\kappa \cdot x} \quad (2.7)$$

onde  $x, \kappa \in \mathbb{R}^2, i = \sqrt{-1}$ , observe que  $u_{in} \in L^2(\partial\Omega)$ . Em coordenadas polares,  $\kappa = (k \cos\alpha, k \sen\alpha)$  e  $x = (r \cos\phi, r \sen\phi)$ , onde  $k > 0$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) é o número de onda e  $\alpha$  é o ângulo polar de  $\kappa$ .

Como:

$$\begin{aligned} \kappa \cdot x &= (k \cos\alpha, k \sen\alpha) \cdot (r \cos\phi, r \sen\phi) \\ &= kr \cos\phi \cos\alpha + kr \sen\phi \sen\alpha \\ &= kr \cos(\phi - \alpha) \end{aligned}$$

então, a onda plana incidente em coordenadas polares é dada por:

$$u_{in}(r, \phi) = e^{ikr \cos(\phi - \alpha)} \quad (2.8)$$

Por outro lado, a onda espalhada  $u_s$  satisfaz o Problema Exterior de Dirichlet para a equação de Helmholtz, doravante denominado PEDH:

$$\Delta u_s(x) + k^2 u_s(x) = 0; \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}; \quad u_s \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}) \quad (2.9)$$

$$u_s(x) = -u_{in}(x); \quad x \in \partial\Omega; \quad u_{in} \in L^2(\partial\Omega) \quad (2.10)$$

$$u_s^*(x) \in L^2(\partial\Omega) \quad (2.11)$$

$$\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u_s(x) - ik u_s(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right); \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

onde (2.9) é a Equação de Helmholtz, (2.10) é nossa condição de fronteira também chamada condição de Dirichlet, (2.12) é a condição de radiação de Sommerfeld no infinito em  $\mathbb{R}^2$  e  $u_s^*(x) = \sup_{y \in \Gamma^+(x)} |u_s(y)|$ ;  $x \in \partial\Omega$  é a função maximal não tangencial de  $u_s$  onde  $\Gamma^+(x)$  é um cone truncado com vértice em  $x$  e uma componente convexa em  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ . O espaço linear  $\mathcal{R}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$  é definido por todas as funções  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$  tais que  $u \in H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$ ,  $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$  e exista uma função  $g \in L^2(\partial\Omega)$  tal que  $\lim_{y \rightarrow x, y \in \Gamma^+(x)} (\nu(x), \nabla u(y)) = g(x)$  em norma  $L^2(\partial\Omega)$ ,  $\nu(x)$  denota o vetor exterior normal unitário a  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  em  $x \in \partial\Omega$ .

A solução fundamental para a equação de Helmholtz em  $\mathbb{R}^2$  é ([11], pg 106):

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|); \quad x, y \in \mathbb{R}^2 \quad (2.13)$$

onde  $H_0^{(1)}$  é a função de Hankel de primeira espécie de ordem zero.

## 2.3 Existência e Unicidade do PEDH

Os teoremas de existência, unicidade e de representação de Green para o PEDH foram estudados primeiramente para o caso onde  $\Omega$  é um domínio  $C^2$  limitado e pode ser encontrado no livro de Colton e Kress [11] (pg 78-79). O caso, de nosso interesse, onde  $\Omega$  é um domínio Lipschitz limitado pode ser encontrado no artigo de Chagmei Liu [31]. Citaremos, aqui só os teoremas que precisamos tal qual se encontram no artigo:

### Preliminares

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto e limitado, assume-se que  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$  é conexo, onde  $\overline{\Omega}$  denota o fecho de  $\Omega$ . Denota-se a fronteira de  $\Omega$  por  $\partial\Omega$ . Um cilindro  $Z(x, r)$  é definido como um cilindro reto, aberto, duplamente truncado e centrado em  $x \in \mathbb{R}^n$  com raio igual a  $r$ . Uma coordenada cilíndrica,  $Z = Z(P, r)$ ,  $P \in \partial\Omega$ , será definida da seguinte maneira:

- (i) As bases de  $Z$  estão a uma distancia positiva de  $\partial\Omega$ .
- (ii) existe um sistema de coordenadas retangulares para  $\mathbb{R}^n$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}$ , com o  $\mathbf{s}$ -eixo contendo o eixo de  $Z$ .
- (iii) Existe uma função associada  $\psi = \psi_Z : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz, isto é,  $|\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y})| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ,  $C = C_Z < \infty \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$ .
- (iv)  $Z \cap \Omega = Z \cap \{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) : \mathbf{s} > \psi(\mathbf{x})\}$ .
- (v)  $P = (0, \psi(0))$ .

A dupla  $(Z, \psi)$  será chamada um par coordenado. Ademais, definimos  $Z^+ = Z \setminus \overline{\Omega}$  e  $Z^- = Z \cap \Omega$  e serão chamados cilindro exterior e cilindro interior, respectivamente. Para um número positivo  $\tau$ ,  $\tau Z(P, r)$  denota o cilindro  $\{x \in \mathbb{R}^n : P + \frac{x-P}{\tau} \in Z\}$ , isto é, a dilatação de  $Z$  em torno de  $P$  por um fator  $\tau$ .

Um cone é definido como um cone aberto, circular e duplamente truncado com duas componentes convexas não nulas. Se  $P \in \partial\Omega$ ,  $\Gamma(P)$  denota um cone com vértice em  $P$ , uma componente em  $\Omega$  e a outra em  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ . A componente interior a  $\Omega$  é denotado por  $\Gamma^-(P)$  e a componente interior a  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$  é denotado por  $\Gamma^+(P)$ .

Associamos um cone,  $\Gamma(P)$ , para cada  $P \in \partial\Omega$ . A família resultante  $\{\Gamma(P) : P \in \partial\Omega\}$  é chamado de **regular** se existe uma cobertura finita de  $\partial\Omega$  por coordenadas cilíndricas, como definido anteriormente, tal que para cada  $(Z(P, r), \psi)$  existem três cones  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$  cada um com vértice na origem e eixos ao longo dos eixos de  $Z$  tais

que

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\subset \overline{\gamma_2} \setminus \{0\} \subset \gamma_3 \\ \text{para todo } (\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) &= P \in \frac{4}{5}Z \cap \partial\Omega \\ \gamma_1 + P &\subset \Gamma(P) \subset \overline{\Gamma(P)} \setminus \{P\} \subset \gamma_2 + P \\ (\gamma_3 + P)^- &\subset \Omega \cap Z \quad \text{e} \\ (\gamma_3 + P)^+ &\subset Z \setminus \overline{\Omega} \end{aligned}$$

**Definição 2.3.1** (Domínio Lipschitz). *Um subconjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é chamado um **domínio Lipschitz** se para cada  $P \in \partial\Omega$  existem um sistema de coordenadas retangulares,  $(\mathbf{x}, s)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , uma vizinhança  $U(P) \equiv U \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $P$  e uma função  $\psi_P \equiv \psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$(i) \quad |\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y})| \leq C_P |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}, C_P < \infty;$$

$$(ii) \quad U \cap \Omega = \{(\mathbf{x}, s) : s > \psi(\mathbf{x})\} \cap U$$

O sistema de coordenadas  $(\mathbf{x}, s)$  pode ser tomada como uma rotação e translação do sistema de coordenadas padrão (coordenadas retangulares) para  $\mathbb{R}^n$ .

**Observação 4.** *Todas as definições estabelecidas anteriormente, nesta seção, podem ser encontradas no artigo de G. Verchota [43] e as seguintes definições podem ser encontradas no artigo de Chagmei Liu [31].*

Seja  $\Omega$  um domínio Lipschitz, assume-se que  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$  é conexo. Fixe uma família regular de cones  $\{\Gamma\}$  e suas coordenadas associadas e cilindros  $\{Z\}$  como definidos anteriormente. Para uma função  $u$ , a função maximal não tangencial é denotada por  $u^*$ :

$$u^*(P) = \sup_{x \in \Gamma(P)} |u(x)|$$

onde  $\Gamma$  é  $\Gamma^+(P)$  ou  $\Gamma^-(P)$  dependendo de onde a função  $u$  está definida.

Lembremos a solução fundamental

$$G(x - y, k) = \frac{i}{4} \left( \frac{k}{2\pi|x - y|} \right)^{\frac{n-2}{2}} H_{\frac{n-2}{2}}^{(1)}(k|x - y|)$$

da equação de Helmholtz em  $\mathbb{R}^n$  onde  $H_\omega^{(1)}(z)$  denota a função de Hankel de primeira espécie de ordem  $\omega$ .

Seja  $K$  um operador em  $L^2(\partial\Omega)$  definido por:

$$Kf(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \partial\Omega, |y-P| > \epsilon} \frac{\partial G(P-y, k)}{\partial \nu(y)} f(y) dS(y), \quad P \in \partial\Omega \quad (2.14)$$

onde  $\nu(y)$  denota o vetor exterior normal unitário em  $y$ .

### O Problema Exterior de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u(x) + k^2 u(x) &= 0 \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} & (2.15) \\ u(x) &= f(x); \quad x \in \partial\Omega; f \in L^2(\partial\Omega) \\ u^* &\in L^2(\partial\Omega) \\ \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) - ik u(x) &= o\left(\frac{1}{|x|}\right); \quad |x| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

onde a ultima equação de (2.15) é a condição de Sommerfeld no infinito em  $\mathbb{R}^3$ . Por outro lado, para qualquer domínio  $U$  com fronteira  $\partial U$  Lipschitz, definimos o espaço linear  $\mathcal{R}(U)$  de todas as funções de variável complexa  $u \in C^2(U)$  tais que  $u \in H^1(U)$ ,  $\Delta u \in L^2(U)$  e exista uma função  $g \in L^2(\partial U)$  tal que  $\lim_{x \rightarrow P, x \in \Gamma(P)} (\nu(P), \nabla u(x)) = g(P)$  em norma  $L^2(\partial U)$  onde  $\Gamma(P)$  pode ser  $\Gamma^+(P)$  ou  $\Gamma^-(P)$  dependendo onde a função  $u$  esta definida. Assim, se  $u, v \in \mathcal{R}(U)$ , isso é suficiente para validar a primeira e segunda identidade de Green:

$$\begin{aligned} \int_U u \Delta v dx &= \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS - \int_U (\nabla u, \nabla v) dx \\ \int_U (u \Delta v - v \Delta u) dx &= \int_{\partial U} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS \end{aligned}$$

**Lema 2.3.1.** *O potencial de camada dupla*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x-y, k)}{\partial \nu(y)} \gamma(y) dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$$

onde  $\gamma \in L^2(\partial\Omega)$ , é uma solução do problema exterior de Dirichlet, (2.15), se

$$\frac{1}{2} \gamma(x) + K\gamma(x) = f(x) \quad \text{para quase todo } x \in \partial\Omega$$

onde o operador  $K$  é dado em (2.14).

**Teorema 2.3.1.** *O Problema Exterior de Dirichlet, (2.15), tem ao menos uma solução.*

**Teorema 2.3.2.** *O Problema Exterior de Dirichlet, (2.15), tem solução única.*

**Observação 5.** *Os Teoremas 2.3.1 e 2.3.2 e o Lema 2.3.1 foram demonstrados para  $\mathbb{R}^3$  em [31], mas ao final do artigo menciona-se que esses resultados também são válidos para  $\mathbb{R}^2$  fazendo algumas considerações. É com essas considerações que nós estamos trabalhando, assim está garantida a existência e unicidade da solução de nosso problema PEDH, (2.9)-(2.12).*

**Teorema 2.3.3.** *Seja  $u \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$  uma solução da equação de Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$$

*satisfazendo a condição de radiação de Sommerfeld*

$$\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) - iku(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right); \quad |x| \rightarrow \infty$$

*uniformemente para todas as direções  $\frac{x}{|x|}$ . Então*

$$\int_{\partial\Omega} \left( u(y) \frac{\partial G(x-y, k)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} G(x-y, k) \right) ds(y) = 0, \quad x \in \Omega$$

$$\int_{\partial\Omega} \left( u(y) \frac{\partial G(x-y, k)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} G(x-y, k) \right) ds(y) = u(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$$

**Observação 6.** *O teorema 2.3.3 também foi demonstrado para  $\mathbb{R}^3$  no livro [11] (pg. 70), mas também menciona que o resultado é válido para  $\mathbb{R}^2$ .*

Finalmente, utilizando a condição de fronteira (2.10) e definindo :

$$\varphi(y) = \frac{\partial u_s(y)}{\partial \nu} \tag{2.16}$$

para nosso problema PEDH o teorema de representação fica:

$$\int_{\partial\Omega} \left( -u_{in}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \varphi(y) \Phi(x, y) \right) ds(y) = 0, \quad x \in \Omega \tag{2.17}$$

$$\int_{\partial\Omega} \left( -u_{in}(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \varphi(y) \Phi(x, y) \right) ds(y) = u_s(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega} \tag{2.18}$$

### 3 O MÉTODO DO CAMPO NULO

O método do campo nulo, primeiramente obtido por Waterman [44] e [45], aproveita o fato de que o campo (acústico ou eletromagnético) se anula na fronteira do espalhador (ou obstáculo) e através de expansões estabelece um conjunto infinito de equações chamadas "equações de campo nulo".

#### 3.1 Considerações prévias

- Trabalhamos com coordenadas polares, e para realizar operações vetoriais nessas coordenadas, consideramos os seguintes vetores ortonormais: radial ( $\vec{r}$ ) e tangencial ( $\vec{t}$ ), definidos por:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta \\ \vec{t} &= -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta\end{aligned}$$

onde,  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  são os vetores unitários das coordenadas cartesianas no  $\mathbb{R}^2$ ,  $x_1$  e  $x_2$  respectivamente, e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

- Nessas coordenadas, o operador gradiente tem a seguinte forma:

$$\nabla = \vec{r}\frac{\partial}{\partial R} + \vec{t}\frac{1}{R(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta} \quad (3.1)$$

- O vetor tangente unitário a  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  em  $\partial\Omega$  é:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}R'(\theta) + \vec{t}R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)}}$$

- Logo, o vetor exterior normal unitário a  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  em  $\partial\Omega$  é:

$$\vec{\nu} = \frac{-\vec{r}R(\theta) + \vec{t}R'(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)}}$$

Definimos:

$$\beta = \beta(\theta) = \sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)} \quad (3.2)$$

- A derivada na direção normal a  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  em  $\partial\Omega$  é:

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = \nabla \cdot \vec{\nu} = \beta^{-1} \left( -R(\theta) \frac{\partial}{\partial R} + \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \quad (3.3)$$

- Para  $x = (r \cos\phi, r \sin\phi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$  e  $y = (R(\theta) \cos\theta, R(\theta) \sin\theta) \in \partial\Omega$ , temos do cálculo:

$$\begin{aligned} |x - y| &= |(r \cos\phi, r \sin\phi) - (R(\theta) \cos\theta, R(\theta) \sin\theta)| \\ &= \sqrt{(r \cos\phi - R(\theta) \cos\theta)^2 + (r \sin\phi - R(\theta) \sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{r^2 + R^2(\theta) - 2rR(\theta) \cos(\theta - \phi)} \end{aligned}$$

Definimos:

$$w = |x - y| = \sqrt{r^2 + R^2(\theta) - 2rR(\theta) \cos(\theta - \phi)} \quad (3.4)$$

- Por outro lado, escolhendo  $x = (r \cos\phi, r \sin\phi) \in \Omega$  qualquer tal que  $0 < r < R_0$  e  $y = (R(\theta) \cos\theta, R(\theta) \sin\theta) \in \partial\Omega$ , lembrando a definição de  $R(\theta)$ , (2.2), temos que  $r < R(\theta) \quad \forall 0 \leq \theta \leq 2\pi$  (ver Figura 3.1). Então utilizando a formula de adição de Gegenbauer ([33], pg 107; [9], pg 196), temos a seguinte expansão:

$$H_0^{(1)}(kw) = J_0(kr)H_0^{(1)}(kR(\theta)) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr)H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m(\theta - \phi))$$

onde  $H_m^{(1)}$  é a função de Hankel de primeira espécie de ordem  $m$  e  $J_m$  é a função de Bessel de primeira espécie de ordem  $m$ . Desta maneira, temos uma expansão para a solução fundamental de Helmholtz, (2.13), e também para sua derivada normal, (3.3) :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{i}{4} J_0(kr)H_0^{(1)}(kR(\theta)) \\ &\quad + \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr)H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m(\theta - \phi)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(y)} &= \frac{i}{4} J_0(kr) \frac{\partial}{\partial\nu} [H_0^{(1)}(kR(\theta))] \\ &\quad + \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) \frac{\partial}{\partial\nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m(\theta - \phi))] \end{aligned} \quad (3.6)$$

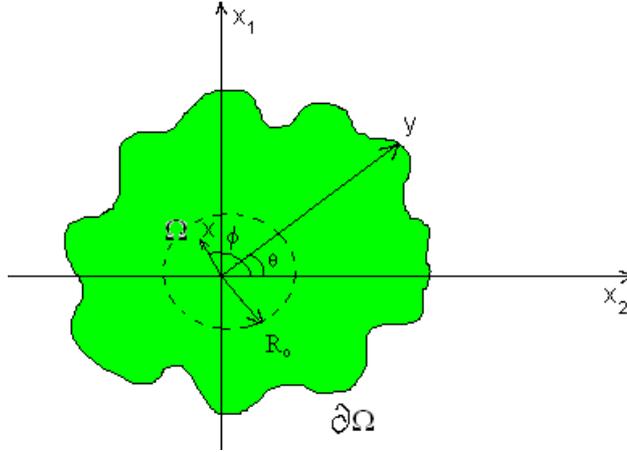


Figura 3.1: Gráfico da variável  $x \in \Omega$  e a variável  $y \in \partial\Omega$

### 3.2 As equações do campo nulo

Observamos que um resultado de Fabes, Kenig e Verchota [13] sobre o problema de Stokes também pode ser estabelecido no caso da equação de Helmholtz, via técnicas similares que não estão discutidas aqui (veja apêndice de [10] e [12]). De fato, se  $u_s$  é a solução do PEDH (2.9)-(2.12), temos que :

$$\left\| \frac{\partial u_s}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C(\partial\Omega) \|u_{in}\|_{W^{1,2}(\partial\Omega)} \quad (3.7)$$

onde,  $C(\partial\Omega)$  é uma constante que depende da fronteira de  $\Omega$ .  $L^2$  e  $W^{1,2}$  são os espaços usuais de Lebesgue e Sobolev respectivamente. Evidentemente, tendo a existência de solução e esta estimativa, temos que as integrais em (2.17) estão bem definidas, assim estão garantidas as equações do campo nulo.

**Observação 7.** Perceber que, da definição de  $u_{in}$ , dada em (2.7), segue  $\|u_{in}\|_{W^{1,2}(\partial\Omega)} \approx O(k)$ . Então utilizando (2.16) em (3.7), temos:

$$\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C(\partial\Omega)O(k) \quad (3.8)$$

Por outro lado, para a obtenção das equações do campo nulo, começamos utilizando (2.17). Assim, temos:

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(y)\Phi(x, y)ds(y) = - \int_{\partial\Omega} u_{in}(y) \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(y)} ds(y); \quad x \in \Omega$$

Utilizamos as equações (3.5) e (3.6), lembramos que o diferencial de arco em coordenadas polares é  $ds(y) = \sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)}d\theta = \beta d\theta$  e definimos

$$u_{in}(\theta) = u_{in}(R(\theta), \theta) = e^{ikR(\theta)\cos(\theta-\alpha)} \quad (3.9)$$

$$\varphi(\theta) = \varphi(R(\theta), \theta) \quad (3.10)$$

onde  $u_{in}(\theta)$  e  $\varphi(\theta)$  são as respectivas transformações em coordenadas polares de  $u_{in}(y)$  e  $\varphi(y)$ , (2.8) e (2.16) respectivamente, para  $y \in \partial\Omega$  ou seja,

$$y = (R(\theta)\cos\theta, R(\theta)\sen\theta).$$

Logo temos:

$$\begin{aligned} & \frac{iJ_0(kr)}{4} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)H_0^{(1)}(kR(\theta))\beta d\theta + \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)H_m^{(1)}(kR(\theta))\cos(m(\theta-\phi))\beta d\theta \\ &= -\frac{iJ_0(kr)}{4} \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial\nu} [H_0^{(1)}(kR(\theta))] \beta d\theta - \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial\nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta))\cos(m(\theta-\phi))] \beta d\theta \end{aligned}$$

Do fato que os  $\{J_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$  são ortogonais, temos:

$$(a) \quad \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)H_0^{(1)}(kR(\theta))\beta d\theta = - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial\nu} [H_0^{(1)}(kR(\theta))] \beta d\theta$$

$$(b) \quad \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)H_m^{(1)}(kR(\theta))\cos(m(\theta-\phi))\beta d\theta = - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial\nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta))\cos(m(\theta-\phi))] \beta d\theta$$

$$\forall m \in \mathbb{N}$$

Logo, utilizando a identidade trigonométrica  $\cos(m(\theta-\phi)) = \cos(m\theta)\cos(m\phi) + \sen(\theta)\sen(m\phi)$  na equação (b), temos:

$$\begin{aligned} & \cos(m\phi) \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)H_m^{(1)}(kR(\theta))\cos(m\theta)\beta d\theta + \sen(m\phi) \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)H_m^{(1)}(kR(\theta))\sen(m\theta)\beta d\theta \\ &= -\cos(m\phi) \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial\nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta))\cos(m\theta)] \beta d\theta - \sen(m\phi) \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial\nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta))\sen(m\theta)] \beta d\theta \end{aligned}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}$$

De maneira análoga, utilizando o fato que  $\{\sin(mz), \cos(mz)\}_{m=1}^{\infty}$  são ortogonais, temos:

$$(b_1) \quad \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m\theta) \beta d\theta = - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) \cos(m\theta)] \beta d\theta$$

$$\forall m \in \mathbb{N}$$

$$(b_2) \quad \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) \sin(m\theta) \beta d\theta = - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) \sin(m\theta)] \beta d\theta$$

$$\forall m \in \mathbb{N}$$

Logo, fazendo  $(b_1) \pm i(b_2)$  para um mesmo  $m$  e utilizando  $e^{\pm im\theta} = \cos(m\theta) \pm i \sin(m\theta)$ , obtemos as assim chamadas "Equações de campo nulo":

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta} \beta d\theta = - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta}] \beta d\theta; \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3.11)$$

tendo em conta a equação (a) para o caso  $m = 0$ .

Por outro lado, utilizando (3.3) e lembrando a identidade ([33], pg 67):

$$\frac{d}{dz} H_m^{(1)}(z) = \frac{m}{z} H_m^{(1)}(z) - H_{m+1}^{(1)}(z); \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (3.12)$$

temos:

$$\begin{aligned} & - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta}] \beta d\theta \\ & = - \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \left[ -R(\theta) \frac{\partial}{\partial R} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta}] + \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta}] \right] \beta^{-1} \beta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) \left[ R(\theta) \left( \frac{m}{kR(\theta)} H_m^{(1)}(kR(\theta)) - H_{m+1}^{(1)}(kR(\theta)) \right) k e^{im\theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \left( e^{im\theta} \frac{d}{d\theta} [H_m^{(1)}(kR(\theta))] + im e^{im\theta} H_m^{(1)}(kR(\theta)) \right) \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) e^{im\theta} \left[ m H_m^{(1)}(kR(\theta)) - kR(\theta) H_{m+1}^{(1)}(kR(\theta)) - im \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} H_m^{(1)}(kR(\theta)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \left( \frac{m}{kR(\theta)} H_m^{(1)}(kR(\theta)) - H_{m+1}^{(1)}(kR(\theta)) \right) kR'(\theta) \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) e^{im\theta} \left[ m \left( 1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) H_m^{(1)}(kR(\theta)) \right. \\
&\quad \left. + k \left( \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) H_{m+1}^{(1)}(kR(\theta)) \right] d\theta \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Utilizando (3.13) e (3.11), temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta} \beta d\theta &= \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) e^{im\theta} \left[ m \left( 1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) H_m^{(1)}(kR(\theta)) \right. \\
&\quad \left. + k \left( \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) H_{m+1}^{(1)}(kR(\theta)) \right] d\theta \\
&\quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

## 4 APROXIMAÇÕES DE BAIXA ORDEM

O propósito desta seção é obter uma aproximação de baixa ordem para  $u_s$ . Para isso precisamos de outras aproximações.

### 4.1 Aproximação assintótica para a função de Hankel

- A aproximação assintótica para a função de Hankel de primeira espécie é dada por ([33] pg 139; [11] pg 107):

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right)$$

onde  $\nu \in \mathbb{R}$  é fixo e  $z \in \mathbb{R}$  é muito grande (com o qual pode-se supor  $|\nu| \ll |z|$ ).

- Para nossos propósitos precisamos supor que  $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$  e do fato que  $0 < R_0 \leq R(\theta) \leq R_1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , temos :

$$H_m^{(1)}(kR(\theta)) = \sqrt{\frac{2}{\pi k R(\theta)}} e^{i(kR(\theta) - m \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \quad (4.1)$$

$\forall m \in \{0, \pm 1, \dots, \pm M\}$ .

- Por outro lado, para  $x = (r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  e  $y = (R(\theta) \cos \theta, R(\theta) \sin \theta) \in \partial \Omega$ , ademais supondo que  $2R_1 \leq r$  e  $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$ , temos:

$$\frac{M}{k} \ll R_0 \leq R(\theta) \leq R_1 \leq r - R_1 \leq r - R(\theta) \leq w \leq r + R(\theta) \leq r + R_1 \quad (4.2)$$

assim:

$$H_m^{(1)}(kw) = \sqrt{\frac{2}{\pi kw}} e^{i(kw - m \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \quad \forall m \in \{0, \pm 1, \dots, \pm M\} \quad (4.3)$$

## 4.2 Aproximação de baixa ordem para $Q(\theta)$

Definimos :

$$Q(\theta) = \varphi(\theta) \frac{e^{ikR(\theta)\beta}}{\sqrt{R(\theta)}} \quad ; 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.4)$$

procura-se uma aproximação de baixa ordem de  $Q(\theta)$ , para  $M \in \mathbb{N}$  (onde  $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$ ), da forma :

$$Q_M(\theta) = \sum_{m=-M}^M C_m e^{-im\theta} \quad ; 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.5)$$

onde

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\theta) e^{im\theta} d\theta \quad (4.6)$$

também define-se

$$D_m = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \quad (4.7)$$

Logo, substituindo (4.1) para o lado esquerdo de (3.14) e utilizando (4.6) e (4.7), temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta} \beta d\theta &\approx \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \sqrt{\frac{2}{\pi k R(\theta)}} e^{i(kR(\theta) - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} e^{im\theta} \beta d\theta \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \frac{e^{ikR(\theta)} e^{im\theta}}{\sqrt{R(\theta)}} \beta d\theta \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \int_0^{2\pi} Q(\theta) e^{im\theta} d\theta \\ &= 2\pi D_m C_m \end{aligned}$$

$$\text{então} \quad \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta} \beta d\theta \approx 2\pi D_m C_m \quad (4.8)$$

Utilizando (3.14), (4.1) e (4.8), temos:

$$\begin{aligned} 2\pi D_m C_m &\approx \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) H_m^{(1)}(kR(\theta)) e^{im\theta} \beta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) e^{im\theta} \left[ m \left( 1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) H_m^{(1)}(kR(\theta)) \right. \\ &\quad \left. + k \left( \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) H_{m+1}^{(1)}(kR(\theta)) \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) e^{im\theta} \left[ m \left( 1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi k R(\theta)}} e^{i(kR(\theta) - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \right. \\
&\quad \left. + k \left( \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) \sqrt{\frac{2}{\pi k R(\theta)}} e^{i(kR(\theta) - (m+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} u_{in}(\theta) e^{im\theta} \sqrt{\frac{2}{\pi k R(\theta)}} e^{i(kR(\theta) - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[ m \left( 1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) \right. \\
&\quad \left. - ik \left( \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) \right] d\theta \\
&= D_m \int_0^{2\pi} \frac{u_{in}(\theta) e^{i(m\theta + kR(\theta))}}{\sqrt{R(\theta)}} \left[ m \left( 1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) - ik \left( \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) \right] d\theta
\end{aligned}$$

Simplificando e utilizando (3.9), temos:

$$C_m \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(kR(\theta) \cos(\theta-\alpha) + m\theta + kR(\theta))}}{\sqrt{R(\theta)}} \left[ m \left( 1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right) - ik \left( \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) \right] d\theta$$

Utilizando novamente o fato que  $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$ ,  $m \leq M$  e as expressões  $\left| 1 - \frac{R'^2(\theta)}{R^2(\theta)} - i \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \right|$  e  $\left| \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right|$  são limitadas, então a contribuição principal de  $C_m$  é:

$$C_m \approx -\frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR(\theta)[\cos(\theta-\alpha)+1]}}{\sqrt{R(\theta)}} \left( \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) e^{im\theta} d\theta; \quad \forall m \in \{0, \pm 1, \dots, \pm M\} \quad (4.9)$$

Logo, lembrando a definição do núcleo de Dirichlet (ver Titchmarsh [41], pg 402), denotado por  $D_M$ , é dado por:

$$D_M(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^M \cos(l\theta) = \begin{cases} \frac{\text{sen}((M + \frac{1}{2})\theta)}{2 \text{sen}(\frac{\theta}{2})}; & \theta \neq 2\pi k \\ M + \frac{1}{2}; & \theta = 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (4.10)$$

E definindo :

$$P(\theta) = \frac{e^{ikR(\theta)[\cos(\theta-\alpha)+1]}}{\sqrt{R(\theta)}} \left( \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} - R(\theta) \right) \quad (4.11)$$

segue :

$$\begin{aligned}
Q_M(\theta) &= \sum_{m=-M}^M C_m e^{-im\theta} \\
&\approx \sum_{m=-M}^M \left[ -\frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{\theta}) e^{im\hat{\theta}} d\hat{\theta} \right] e^{-im\theta} \\
&= -\frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{\theta}) \sum_{m=-M}^M e^{im(\hat{\theta}-\theta)} d\hat{\theta} \\
&= -\frac{ik}{\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta}-\theta) d\hat{\theta} \tag{4.12}
\end{aligned}$$

### 4.3 Aproximação de baixa ordem para $\varphi(\theta)$

Da definição de  $Q$ , (4.4), temos:

$$\varphi(\theta) = e^{-ikR(\theta)} \sqrt{R(\theta)} Q(\theta) \beta^{-1}; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{4.13}$$

e da aproximação de baixa ordem  $Q_M$ , (4.12), temos uma aproximação de baixa ordem para  $\varphi$ , dada por:

$$\varphi_M(\theta) = e^{-ikR(\theta)} \sqrt{R(\theta)} Q_M(\theta) \beta^{-1}; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{4.14}$$

### 4.4 Aproximação de baixa ordem para $u_s$

#### Cálculos prévios

Nesta subseção  $x = (r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ ,  $y = (R(\theta) \cos \theta, R(\theta) \sin \theta) \in \partial\Omega$ ,  $2R_1 \leq r$  e  $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$ , como em (4.3).

(i) Lembrando (3.3), (3.4) e (3.12), segue-se :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_0^{(1)}(kw)}{\partial \nu(y)} &= -\beta^{-1} \left[ R(\theta) \frac{\partial}{\partial R} H_0^{(1)}(kw) - \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} H_0^{(1)}(kw) \right] \\
&= -\beta^{-1} \left[ R(\theta) [-H_1^{(1)}(kw)] \frac{k}{w} [R(\theta) - r \cos(\theta - \phi)] \right. \\
&\quad \left. - \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} [-H_1^{(1)}(kw)] \frac{k}{w} [R(\theta) R'(\theta) - r(R'(\theta) \cos(\theta - \phi) - R(\theta) \sin(\theta - \phi))] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\beta^{-1}kH_1^{(1)}(kw)}{w} \left[ -R^2(\theta) + rR(\theta)\cos(\theta - \phi) + R'^2(\theta) \right. \\
&\quad \left. - r\left[\frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)}\cos(\theta - \phi) - R'(\theta)\sin(\theta - \phi)\right] \right] \\
&= -\frac{\beta^{-1}kH_1^{(1)}(kw)}{w} \left[ R'^2(\theta) - R^2(\theta) \right. \\
&\quad \left. + r\left[ R(\theta)\cos(\theta - \phi) - \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)}\cos(\theta - \phi) + R'(\theta)\sin(\theta - \phi) \right] \right]
\end{aligned}$$

Definindo:

$$A(r, \phi, \theta) = R'^2(\theta) - R^2(\theta) + r \left[ R(\theta)\cos(\theta - \phi) - \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)}\cos(\theta - \phi) + R'(\theta)\sin(\theta - \phi) \right] \quad (4.15)$$

Tem-se:

$$\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(y)} = -\frac{i\beta^{-1}kH_1^{(1)}(kw)A(r, \phi, \theta)}{4w} \quad (4.16)$$

(ii) Utilizando (4.16), (4.3), (3.9) e definindo

$$d = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = -i \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (4.17)$$

temos :

$$\begin{aligned}
u_{in}(y) \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu} &= -u_{in}(\theta) \frac{i\beta^{-1}kH_1^{(1)}(kw)A(r, \phi, \theta)}{4w} \\
&= -\frac{ik}{4} u_{in}(\theta) H_1^{(1)}(kw) \frac{A(r, \phi, \theta)}{w} \beta^{-1} \\
&\approx -\frac{ik}{4} u_{in}(\theta) \sqrt{\frac{2}{\pi kw}} e^{i(kw - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \frac{A(r, \phi, \theta)}{w} \beta^{-1} \\
&= -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{k} u_{in}(\theta) e^{ikw} A(r, \phi, \theta)}{w\sqrt{w}} \beta^{-1} \\
&= -d \frac{\sqrt{k} e^{ik(R(\theta)\cos(\theta - \alpha) + w)} A(r, \phi, \theta)}{w\sqrt{w}} \beta^{-1}
\end{aligned}$$

$$\text{Assim, } u_{in}(y) \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu} \approx -d \frac{\sqrt{k} e^{ik(R(\theta)\cos(\theta - \alpha) + w)} A(r, \phi, \theta)}{w\sqrt{w}} \beta^{-1} \quad (4.18)$$

(iii) Por outro lado, utilizando (2.13), (4.14) e (4.3), temos:

$$\begin{aligned}
\varphi(y)\Phi(x, y) &= \varphi(y)\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kw) \\
&\approx \sqrt{R(\theta)}e^{-ikR(\theta)}Q_M(\theta)\beta^{-1}\frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi kw}}e^{i(kw-\frac{\pi}{4})} \\
&= i\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{R(\theta)}Q_M(\theta)e^{ik(w-R(\theta))}}{\sqrt{k}\sqrt{w}}\beta^{-1} \\
&= id\frac{\sqrt{R(\theta)}Q_M(\theta)e^{ik(w-R(\theta))}}{\sqrt{k}\sqrt{w}}\beta^{-1} \\
\text{Assim, } \varphi(y)\Phi(x, y) &\approx id\frac{\sqrt{R(\theta)}Q_M(\theta)e^{ik(w-R(\theta))}}{\sqrt{k}\sqrt{w}}\beta^{-1} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

com  $Q_M(\theta)$  definido em (4.12)

### A Aproximação para $u_s$

Lembrando (2.18)

$$u_s(x) = - \int_{\partial\Omega} u_{in}(y) \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(y)} ds(y) - \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$$

e utilizando (4.18) e (4.19), temos uma aproximação de baixa ordem para  $u_s$ , denotada por  $u_s^M$ , dada por:

$$\begin{aligned}
u_s^M(r, \phi) &= d\sqrt{k} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik(R(\theta)\cos(\theta-\alpha)+w)} A(r, \phi, \theta)}{w\sqrt{w}} d\theta \\
&\quad - i\frac{d}{\sqrt{k}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R(\theta)}Q_M(\theta)e^{ik(w-R(\theta))}}{\sqrt{w}} d\theta \tag{4.20}
\end{aligned}$$

para todo  $x = (r \cos\phi, r \sin\phi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  tal que  $r \geq 2R_1$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Ademais,  $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$ .

### 4.5 A ordem de aproximação de $u_s^M$

Lembrando que  $y \in \partial\Omega$  e  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ , então  $y = (R(\theta)\cos\theta, R(\theta)\sin\theta)$  e  $x = (r \cos\phi, r \sin\phi)$  são suas respectivas transformações em coordenadas polares. Logo utilizando (3.9) e (4.16), segue :

$$u_{in}(y) \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(y)} = -\frac{ik}{4} \frac{e^{ikR(\theta)\cos(\theta-\alpha)} H_1^{(1)}(kw) A(r, \phi, \theta) \beta^{-1}}{w} \tag{4.21}$$

Utilizando (3.10), (2.13) e (4.13), segue :

$$\varphi(y)\Phi(x, y) = \frac{i}{4}\sqrt{R(\theta)}Q(\theta)H_0^{(1)}(kw)e^{-ikR(\theta)}\beta^{-1} \quad (4.22)$$

Lembrando (2.18) e  $ds(y) = \beta d\theta$ , onde  $\beta = \sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)}$ . Temos  $u_s$  em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} u_s(r, \phi) &= \frac{ik}{4} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR(\theta)\cos(\theta-\alpha)} H_1^{(1)}(kw) A(r, \phi, \theta)}{w} d\theta \\ &\quad - \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} Q(\theta) H_0^{(1)}(kw) e^{-ikR(\theta)} d\theta \end{aligned} \quad (4.23)$$

**Lema 4.5.1.** *Se  $\phi \in [0, 2\pi]$ ,  $\theta \in I$  e  $r \geq 2R_1$ . Então  $\left| \frac{A(r, \phi, \theta)}{w} \right| \leq R_3$ . Onde  $R_3$  é uma constante que não depende de  $r, \phi$  nem  $\theta$ .*

*Demonstração.* Lembrando (2.2), (2.5) e (2.6), temos:

$$0 < R_0 \leq R(\theta) \leq R_1, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad |R'(\theta)| \leq R_2, \quad \forall \theta \in I.$$

Utilizando (4.2), segue :

$$R_1 \leq r - R_1 \leq w \quad (4.24)$$

$$\frac{r}{w} \leq 1 + \frac{R_1}{w} \leq 2 \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{w} \leq \frac{1}{R_1} \quad (4.26)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \left| \frac{A(r, \phi, \theta)}{w} \right| &= \left| \frac{R^2(\theta) - R^2(\theta)}{w} + \frac{r}{w} \left[ R(\theta) \cos(\theta - \phi) - \frac{R^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) + R'(\theta) \sin(\theta - \phi) \right] \right| \\ &\leq \frac{|R^2(\theta)| + |R^2(\theta)|}{|w|} + \left| \frac{r}{w} \right| \left[ |R(\theta)| + \frac{|R^2(\theta)|}{|R(\theta)|} + |R'(\theta)| \right] \\ &\leq \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_1} + 2 \left[ R_1 + \frac{R_2^2}{R_0} + R_2 \right] \end{aligned}$$

Então:

$$\left| \frac{A(r, \phi, \theta)}{w} \right| \leq R_3 \quad ; \forall r \geq 2R_1; \forall \phi \in [0, 2\pi]; \forall \theta \in I \quad (4.27)$$

$$\text{onde } R_3 = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_1} + 2 \left[ R_1 + \frac{R_2^2}{R_0} + R_2 \right] \quad \square$$

**Lema 4.5.2.** *Seja  $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k; 2R_1 \leq r$ . Então*

$$\left| \frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kw) - \frac{d\sqrt{k}}{\sqrt{w}} e^{ikw} \right| \approx O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

*Demonstração.* Utilizando (4.3), segue:

$$\begin{aligned} H_1^{(1)}(kw) &= \sqrt{\frac{2}{\pi kw}} e^{i(kw - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= -ie^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikw}}{\sqrt{kw}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= -i4d \frac{e^{ikw} \sqrt{k}}{k\sqrt{w}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Utilizando (4.26), segue:

$$\begin{aligned} \left| \frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kw) - \frac{d\sqrt{k}}{\sqrt{w}} e^{ikw} \right| &= \left| d \frac{e^{ikw} \sqrt{k}}{\sqrt{w}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) - \frac{d\sqrt{k}}{\sqrt{w}} e^{ikw} \right| \\ &= \left| d \frac{e^{ikw} \sqrt{k}}{\sqrt{w}} O\left(\frac{1}{k}\right) \right| \\ &\approx \frac{|d|\sqrt{k}}{\sqrt{R_1}} O\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\approx O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \end{aligned}$$

□

**Lema 4.5.3.** *Se  $\theta \in I$ . Então a função  $Q(\theta)$ , definida em (4.4), é limitada.*

*Demonstração.* Lembrando (2.2), (2.5), (2.6) e (3.2), temos:  $0 < R_0 \leq R(\theta) \leq R_1, \forall \theta \in [0, 2\pi]; |R'(\theta)| \leq R_2, \forall \theta \in I$  e  $\beta = \sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)}$ . Assim, utilizando (3.8), (4.4) e se  $\theta \in I$ , segue:

$$\begin{aligned} \|Q(\theta)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} &= \left\| \varphi(\theta) \frac{e^{ikR(\theta)} \beta}{\sqrt{R(\theta)}} \right\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\ &\leq \|\varphi(\theta)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}}{\|\sqrt{R(\theta)}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}} \\ &\leq C(\partial\Omega) O(k) \frac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}{\sqrt{R_0}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Com o qual temos o resultado. Notamos que, ao utilizar o critério de equivalência de normas entre  $\|\cdot\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$  e  $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\partial\Omega)}$ , a constante  $C(\partial\Omega)$ , utilizada acima, não necessariamente é a mesma que em (3.8).  $\square$

**Lema 4.5.4.** *Seja  $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k; 2R_1 \leq r$ . Então*

$$\left| \frac{1}{4}Q(\theta)H_0^{(1)}(kw) - \frac{d}{\sqrt{k}} \frac{Q_M(\theta)e^{ikw}}{\sqrt{w}} \right| \approx o_M(\sqrt{k})$$

*Demonstração.* Utilizando (4.3)

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(kw) &= \sqrt{\frac{2}{\pi kw}} e^{i(kw - \frac{\pi}{4})} \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) \\ &= e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikw}}{\sqrt{kw}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) \\ &= 4d \frac{e^{ikw}}{\sqrt{kw}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ademais, de (4.29) e da teoria de séries de Fourier temos  $|Q(\theta) - Q_M(\theta)| \approx o_M(k)$  e utilizando o lema 4.5.3, segue:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4}Q(\theta)H_0^{(1)}(kw) - \frac{d}{\sqrt{k}} \frac{Q_M(\theta)e^{ikw}}{\sqrt{w}} \right| &= \left| \frac{d}{\sqrt{k}} \frac{Q(\theta)e^{ikw}}{\sqrt{w}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) - \frac{d}{\sqrt{k}} \frac{Q_M(\theta)e^{ikw}}{\sqrt{w}} \right| \\ &\leq \frac{|d|}{\sqrt{kw}} |Q(\theta) - Q_M(\theta)| + \frac{|d||Q(\theta)|}{\sqrt{kw}} O\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\leq \frac{|d|}{\sqrt{kw}} |Q(\theta) - Q_M(\theta)| + \frac{|d|C(\partial\Omega)O(k)\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}{\sqrt{kw}\sqrt{R_0}} O\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\approx o_M(\sqrt{k}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \\ &\approx o_M(\sqrt{k}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

lembrando que  $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$ .  $\square$

**Proposição 4.5.1.** *Seja  $2R_1 \leq r; \max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$ . Então*

$$|u_s(r, \phi) - u_s^M(r, \phi)| \approx o_M(\sqrt{k})$$

*Demonstração.* Utilizando (4.23), (4.20), Lema 4.5.1, Lema 4.5.2 e Lema 4.5.4, temos :

$$\begin{aligned}
|u_s(r, \phi) - u_s^M(r, \phi)| &= \left| \frac{ik}{4} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR(\theta) \cos(\theta-\alpha)} H_1^{(1)}(kw) A(r, \phi, \theta)}{w} d\theta \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} Q(\theta) H_0^{(1)}(kw) e^{-ikR(\theta)} d\theta \right. \\
&\quad \left. - d\sqrt{k} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik(R(\theta) \cos(\theta-\alpha)+w)} A(r, \phi, \theta)}{w\sqrt{w}} d\theta \right. \\
&\quad \left. + i \frac{d}{\sqrt{k}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R(\theta)} Q_M(\theta) e^{ik(w-R(\theta))}}{\sqrt{w}} d\theta \right| \\
&\leq \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR(\theta) \cos(\theta-\alpha)} A(r, \phi, \theta)}{w} \left[ \frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kw) - \frac{d\sqrt{k}}{\sqrt{w}} e^{ikw} \right] d\theta \right| \\
&\quad + \left| \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} e^{-ikR(\theta)} \left[ \frac{1}{4} Q(\theta) H_0^{(1)}(kw) - \frac{d}{\sqrt{k}} \frac{Q_M(\theta) e^{ikw}}{\sqrt{w}} \right] d\theta \right| \\
&\approx \int_0^{2\pi} R_3 O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) d\theta + \int_0^{2\pi} \sqrt{R_1} o_M(\sqrt{k}) d\theta \\
&\approx O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + o_M(\sqrt{k}) \\
&\approx o_M(\sqrt{k})
\end{aligned}$$

lembrando que  $\max\{M, \frac{M}{R_0}\} \ll k$  e  $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . □

## 5 COMPORTAMENTO FAR-FIELD

Neste capítulo, faremos um análise da onda espalhada aproximada,  $u_s^M$ , para  $r$  muito grande, isto é, um análise para campos muito distantes do espalhador (ou obstáculo), doravante chamado "campo distante".

### 5.1 Comportamento da $u_s^M$ para $r$ muito grande

Lembrando (4.2), temos as seguintes relações:

$$0 \leq \frac{M}{k} \ll R_0 \leq R(\theta) \leq R_1 < 2R_1 \quad (5.1)$$

Mas agora trabalharemos com  $r$  muito grande. Assim  $r \gg r_0$ , onde:

$$r_0 = \max\{2R_1, k, 4R_1^2\} \quad (5.2)$$

lembrando que  $M \ll k$ ;  $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  segue que  $1 \ll r_0$ .

**Lema 5.1.1.** *Seja  $r_0 \ll r$ , então  $w \approx r$ .*

*Demonstração.* Dado que  $r_0 \ll r$  e utilizando (5.1), segue:

$$\frac{R^2(\theta)}{r^2} \ll \frac{R(\theta)}{r} \ll 1 \quad (5.3)$$

$$\left| \frac{2R(\theta)}{r} \cos(\theta - \phi) \right| \leq \frac{2R_1}{r} \ll \frac{1}{\sqrt{r}} \ll 1 \quad (5.4)$$

Por outro lado, lembrando a definição de  $w$ , (3.4), podemos escrever:

$$w = r \sqrt{1 + \frac{R^2(\theta)}{r^2} - \frac{2R(\theta)}{r} \cos(\theta - \phi)}$$

com o qual segue o resultado. □

**Lema 5.1.2.** *Seja  $r_0 \ll r$ , então:*

$$\frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}} \ll \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}} \ll 1 \quad (5.5)$$

$$\frac{R(\theta)}{r} \ll \frac{1}{\sqrt{r}} \ll 1 \quad (5.6)$$

*Demonstração.* A relação (5.5) segue do fato que  $k \ll r$  e  $1 \ll k$ . Por outro lado, dado que  $4R_1^2 \ll r$ ,  $1 \ll r$  e utilizando (5.1), segue:

$$\frac{R(\theta)}{r} < \frac{2R_1}{r} \ll \frac{1}{\sqrt{r}} \ll 1$$

□

Agora analisamos  $u_s^M$ . Seja  $r_0 \ll r$  e utilizando Lema 5.1.1 em (4.20), temos:

$$\begin{aligned} u_s^M(r, \phi) &\approx d\sqrt{k} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik(R(\theta)\cos(\theta-\alpha)+r)}}{r\sqrt{r}} A(r, \phi, \theta) d\theta - i \frac{d}{\sqrt{k}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R(\theta)} e^{ik(r-R(\theta))}}{\sqrt{r}} Q_M(\theta) d\theta \\ &= d \frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}} \int_0^{2\pi} e^{ikr\left(\frac{R(\theta)\cos(\theta-\alpha)}{r}+1\right)} A(r, \phi, \theta) d\theta - i \frac{d}{\sqrt{kr}} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} e^{ikr\left(1-\frac{R(\theta)}{r}\right)} Q_M(\theta) d\theta \end{aligned}$$

utilizando (5.4) e (5.6)

$$\approx d \frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}} \int_0^{2\pi} e^{ikr} A(r, \phi, \theta) d\theta - i \frac{d}{\sqrt{kr}} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} e^{ikr} Q_M(\theta) d\theta$$

utilizando (4.15) e (4.12)

$$\begin{aligned} &= d \frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} [R'^2(\theta) - R^2(\theta)] d\theta \\ &\quad + d \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \left[ \left( R(\theta) - \frac{R^2(\theta)}{R(\theta)} \right) \cos(\theta - \phi) + R'(\theta) \text{sen}(\theta - \phi) \right] d\theta \\ &\quad - i \frac{d}{\sqrt{kr}} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} e^{ikr} \left( -\frac{ik}{\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\hat{\theta} \right) d\theta \end{aligned}$$

Utilizando  $\int_0^{2\pi} R'(\theta) \text{sen}(\theta - \phi) d\theta = - \int_0^{2\pi} R(\theta) \cos(\theta - \phi) d\theta$ , segue :

$$\begin{aligned} u_s^M(r, \phi) &\approx d \frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} [R'^2(\theta) - R^2(\theta)] d\theta - d \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) d\theta \\ &\quad - \frac{d\sqrt{k}}{\pi\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\theta d\hat{\theta} \end{aligned}$$

Definindo:

$$\begin{aligned}
L_1 &= d \frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} [R'^2(\theta) - R^2(\theta)] d\theta \\
L_2 &= -d \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) d\theta \\
L_3 &= -\frac{d\sqrt{k}}{\pi\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\theta d\hat{\theta}
\end{aligned}$$

temos que:

$$\begin{aligned}
L_1 &\approx O\left(\frac{\sqrt{k}}{r\sqrt{r}}\right) \\
L_2 &\approx O\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}}\right) \\
L_3 &\approx O\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}}\right)
\end{aligned}$$

Logo, utilizando o fato que  $L_1 \approx 0$ , por (5.5), em comparação com os outros dois, segue:

$$\begin{aligned}
u_s^M(r, \phi) &\approx -d \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) d\theta \\
&\quad - \frac{d\sqrt{k}}{\pi\sqrt{r}} e^{ikr} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\theta d\hat{\theta}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

para  $r_0 \ll r$ ;  $\forall \phi \in [0, 2\pi]$ .

**Observação 8.** Na equação (5.7), a expressão envolvendo o núcleo de Dirichlet  $D_M$  pode ser usada para analisar o fenômeno de "back scattering" na maneira discutida em [32].

## 5.2 O padrão de campo distante

O comportamento de campo distante de  $u_s$  (dado em [11], pg 226), é:

$$u_s(r, \phi) = \frac{1}{4} e^{i(kr + \frac{\pi}{4})} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \mathbf{F}(\phi; k) + O\left(\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\right)$$

onde  $\mathbf{F}(\phi; k)$  é o padrão de campo distante (far field pattern).

Utilizando (4.17), (5.7) e como  $L_1 \approx O\left(\frac{\sqrt{k}}{r^{\frac{3}{2}}}\right)$ , segue:

$$\begin{aligned} u_s^M(r, \phi) &\approx \frac{1}{4} e^{i(kr + \frac{\pi}{4})} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left[ ik \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{ik}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\theta d\hat{\theta} \right] \\ &\quad + O\left(\frac{\sqrt{k}}{r^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

assim, nosso padrão de campo distante é:

$$\mathbf{F}(\phi; k) = ik \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) d\theta + \frac{ik}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\theta d\hat{\theta} \quad (5.9)$$

## 5.3 A média da seção transversal de espalhamento

A média, denotada por  $\langle \rangle$ , da seção transversal de espalhamento para grandes distâncias do espalhador é:

$$\sigma(k, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle 2\pi r \frac{|u_s(r, \phi)|^2}{|u_{in}(r, \phi)|^2} \rangle \quad (5.10)$$

de onde procuramos uma expressão para sua aproximação:

$$\sigma_M(k, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle 2\pi r \frac{|u_s^M(r, \phi)|^2}{|u_{in}(r, \phi)|^2} \rangle \quad (5.11)$$

**Observação 9.** A média,  $\langle \rangle$ , é tomada sobre o espaço amostral  $\mathbf{Y}$  da variável aleatória (ou variáveis aleatórias) das quais dependem as funções  $R$  e  $R'$ .

Da definição de  $u_{in}(r, \phi)$ , (2.8), segue que  $|u_{in}(r, \phi)| = 1; \forall r, \forall \phi$ . Então utilizando (5.8) e (5.9), temos:

$$\begin{aligned}
\langle 2\pi r \frac{|u_s^M|^2}{|u_{in}|^2} \rangle &= \langle 2\pi r |u_s^M|^2 \rangle \\
&\approx \frac{1}{4k} \langle |\mathbf{F}(\phi; k)|^2 \rangle \\
&= \frac{k}{4} \left\langle \left[ \int_0^{2\pi} \frac{R'(\theta_1)}{R(\theta_1)} \cos(\theta_1 - \phi) d\theta_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta_1)} P(\theta_2) D_M(\theta_2 - \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 \right] \right. \\
&\quad \times \left[ \int_0^{2\pi} \frac{R'(\theta_3)}{R(\theta_3)} \cos(\theta_3 - \phi) d\theta_3 \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta_3)} \bar{P}(\theta_4) D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_3 d\theta_4 \right] \right\rangle \\
&= \frac{k}{4} \left\langle \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R'(\theta_1)}{R(\theta_1)} \frac{R'(\theta_3)}{R(\theta_3)} \cos(\theta_1 - \phi) \cos(\theta_3 - \phi) d\theta_1 d\theta_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R'(\theta_3)}{R(\theta_3)} \sqrt{R(\theta_1)} P(\theta_2) \cos(\theta_3 - \phi) D_M(\theta_2 - \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R'(\theta_1)}{R(\theta_1)} \sqrt{R(\theta_3)} \bar{P}(\theta_4) \cos(\theta_1 - \phi) D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_1 d\theta_3 d\theta_4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta_1)R(\theta_3)} P(\theta_2) \bar{P}(\theta_4) D_M(\theta_2 - \theta_1) \times \right. \\
&\quad \quad \left. \times D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 \right\rangle \\
&= \frac{k}{4} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{R'(\theta_1)}{R(\theta_1)} \frac{R'(\theta_3)}{R(\theta_3)} \right\rangle \cos(\theta_1 - \phi) \cos(\theta_3 - \phi) d\theta_1 d\theta_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{R'(\theta_3)}{R(\theta_3)} \sqrt{R(\theta_1)} P(\theta_2) \right\rangle \cos(\theta_3 - \phi) \times \right. \\
&\quad \quad \left. \times D_M(\theta_2 - \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{R'(\theta_1)}{R(\theta_1)} \sqrt{R(\theta_3)} \bar{P}(\theta_4) \right\rangle \cos(\theta_1 - \phi) \times \right. \\
&\quad \quad \left. \times D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_1 d\theta_3 d\theta_4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \sqrt{R(\theta_1)R(\theta_3)} P(\theta_2) \bar{P}(\theta_4) \right\rangle \times \right. \\
&\quad \quad \left. \times D_M(\theta_2 - \theta_1) D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 \right]
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Desta maneira,  $\sigma_M(k, \phi)$  fica definida aproximadamente por (5.12), com  $P$  dado por (4.11).  $\bar{P}$  denota o conjugado de  $P$ . Lembramos que  $P$  é uma variável aleatória pois depende de  $R(\theta)$  e  $R'(\theta)$ .

## 6 UMA SUPERFÍCIE TIPO III

Para obter uma superfície tipo III para o caso estudado aqui, a função  $R(\theta)$  tem que satisfazer as seguintes condições:

- É uma função Lipschitz com respeito à variável  $\theta$ .
- $R(\theta) > 0$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .
- $R(0) = R(2\pi)$

Sua derivada  $R'(\theta)$  têm que cumprir as seguintes condições:

- É um fractal.
- Como conseqüência da fractalidade de  $R'(\theta)$ , segue que  $R''(\theta)$  não existe.

### Uma Função de tipo Weierstrass

Um tipo de função fractal muito bem conhecida é a função de Weierstrass, seguindo Kenneth Falconer ([14] pg 146), definida por:

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m t) \quad (6.1)$$

onde  $1 < D < 2$ ,  $\lambda > 1$  e  $t$  num intervalo compacto, sem perda de generalidade pode se escolher  $t \in [0, 1]$ . Essa função é contínua mas é não diferenciável em todo ponto, sua dimensão Hausdorff-Besicovitch é  $D$ . Para  $h$  muito pequeno, cumpre-se a seguinte estimativa:

$$|f(t+h) - f(t)| \leq ch^{2-D} \quad (6.2)$$

onde  $c$  não depende de  $h$  (demonstrado em [14] pg 148). Perceba que a serie (6.1) é absolutamente convergente, assim  $f(t)$  está bem definida e é limitada:

$$|f(t)| \leq \frac{\lambda^{D-2}}{1 - \lambda^{D-2}} \quad (6.3)$$

Por outro lado, uma função de Weierstrass aleatória pode ser considerada, [14] pg 247, da seguinte forma:

$$X(t) = \sum_{m=1}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m t + \phi_m) \quad (6.4)$$

onde  $\lambda > 1, 1 < D < 2$ . As variáveis aleatórias  $y_m$  são independentes com distribuição Gaussiana padrão, isto é, tem média zero e variância um. As fases  $\phi_m$  são variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme em  $[0, 2\pi)$ .

### Definição da média amostral $\langle \rangle$

Seja cada  $y_m, m \in \mathbb{Z}$  uma variável aleatória com distribuição uniforme em  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  e independentes. Então a respectiva média de  $y_m$ , denotada por  $\langle \rangle_m$ , é definida por:

$$\langle (\dots) \rangle_m = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\dots) \frac{dy_m}{2\sqrt{3}}; \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (6.5)$$

de onde é fácil obter  $\langle y_m \rangle_m = 0, \langle y_m^2 \rangle_m = 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ .

Seja  $\mathbf{Y}$  o espaço amostral das variáveis aleatórias independentes  $y_m$ . Então a média amostral, denotada por  $\langle \rangle$ , em  $\mathbf{Y}$  é dada por:

$$\langle (\dots) \rangle = \prod_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\dots) \frac{dy_p}{2\sqrt{3}} \quad (6.6)$$

onde

$$\prod_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\dots) \frac{dy_p}{2\sqrt{3}} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \dots \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \dots \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\dots) \frac{dy_{-\infty}}{2\sqrt{3}} \dots \frac{dy_0}{2\sqrt{3}} \dots \frac{dy_{\infty}}{2\sqrt{3}} \quad (6.7)$$

Por outro lado, se  $f(y_m)$  e  $g(y_n)$  são funções que só dependem da variável  $y_m$  e  $y_n$  respectivamente, então é fácil obter:

$$\begin{aligned} \langle f(y_m) \rangle &= \langle f(y_m) \rangle_m \quad \forall m \in \mathbb{Z} \\ \langle f(y_m)g(y_n) \rangle &= \langle f(y_m) \rangle_m \langle g(y_n) \rangle_n; \quad m \neq n \end{aligned}$$

assim :

$$\langle y_m \rangle = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (6.8)$$

$$\langle y_m y_n \rangle = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (6.9)$$

## 6.1 A representação de $R'(\theta)$

No presente trabalho, propomos a seguinte forma para  $R'(\theta)$ :

$$R'(\theta) = \epsilon \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right] \quad (6.10)$$

onde:

- (i)  $\lambda > 1, 1 < D < 2$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ .
- (ii)  $\epsilon > 0$ , o valor apropriado para  $\epsilon$  será definido posteriormente na proposição 6.2.2, para que cumpra (2.2).
- (iii) Cada variável aleatória  $y_m$  tem distribuição uniforme em  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ , assim  $\langle y_m \rangle = 0; \langle y_m^2 \rangle = 1; |y_m| \leq \sqrt{3} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ , onde  $\sqrt{3} = \sqrt{3}$ .
- (iv) As variáveis aleatórias são independentes, o qual indica:
 
$$\langle y_m y_n \rangle = \langle y_m \rangle \langle y_n \rangle = 0; \quad \forall m \neq n.$$

A principal razão para assim definir  $R'(\theta)$ , dado em (6.10), é garantir todas as condições impostas no início deste capítulo, como será mostrado posteriormente.

**Observação 10.** Da definição de  $R(\theta)$  em (2.2), temos  $R'(\theta) = \epsilon F'(\theta)$ . Do qual  $F'(\theta)$  é definido por:

$$F'(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \quad (6.11)$$

com as mesmas hipóteses feitas em (6.10).

**Lema 6.1.1.** A série  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)]$  definida em (6.10) é absolutamente convergente e limitada  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ .

*Demonstração.* Existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\lambda^{-N_0} 2\pi < 1$  assim  $\lambda^{-N_0} \theta < 1; \forall \theta \in [0, 2\pi]$ , então  $1 - \cos(\lambda^{-m} 2\pi) \leq \lambda^{-2m} 4\pi^2; \forall m \geq N_0$  e  $|\operatorname{sen}(\lambda^{-m} \theta)| \leq \lambda^{-m} \theta; \forall m \geq N_0$   $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ . Segue:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-N_0+1}^{-1} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{-N_0} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{N_0-1} y_{-m} \lambda^{(3-D)m} [1 - \cos(\lambda^{-m} 2\pi)] \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{m=N_0}^{\infty} y_{-m} \lambda^{(3-D)m} [1 - \cos(\lambda^{-m} 2\pi)] \right| \\
&\leq \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-3)m} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sum_{m=1}^{N_0-1} \lambda^{(3-D)m} \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \sum_{m=N_0}^{\infty} \lambda^{(3-D)m} \lambda^{-2m} 4\pi^2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[ \frac{1}{1 - \lambda^{D-3}} \right] + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[ \frac{\lambda^{(3-D)N_0} - 1}{\lambda^{3-D} - 1} - 1 \right] \\
&\quad + 2\sqrt{3} \pi \sum_{m=N_0}^{\infty} \lambda^{(1-D)m} \\
&= \frac{\sqrt{3} \lambda^{(3-D)N_0}}{\pi(\lambda^{3-D} - 1)} + \frac{2\sqrt{3} \pi \lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \tag{6.12}
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) \right| &= \left| \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) + \sum_{m=-N_0+1}^{-1} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=-\infty}^{-N_0} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) \right| \\
&\leq \left| \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) \right| + \left| \sum_{m=1}^{N_0-1} y_{-m} \lambda^{(2-D)m} \operatorname{sen}(\lambda^{-m} \theta) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{m=N_0}^{\infty} y_{-m} \lambda^{(2-D)m} \operatorname{sen}(\lambda^{-m} \theta) \right| \\
&\leq \sqrt{3} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} + \sqrt{3} \sum_{m=1}^{N_0-1} \lambda^{(2-D)m} + \sqrt{3} \sum_{m=N_0}^{\infty} \lambda^{(2-D)m} \lambda^{-m} |\theta| \\
&\leq \frac{\sqrt{3}}{1 - \lambda^{D-2}} + \frac{\sqrt{3} (\lambda^{(2-D)N_0} - \lambda^{2-D})}{\lambda^{2-D} - 1} + \frac{2\pi \sqrt{3} \lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \\
&= \frac{\sqrt{3} \lambda^{(2-D)N_0}}{\lambda^{2-D} - 1} + \frac{2\pi \sqrt{3} \lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \tag{6.13}
\end{aligned}$$

Logo, utilizando (6.12), (6.13), temos:

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \operatorname{sen}(\lambda^m \theta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| \leq L \tag{6.14}$$

onde:

$$L = \frac{\sqrt{3} \lambda^{(2-D)N_0}}{\lambda^{2-D} - 1} + \frac{\sqrt{3} \lambda^{(3-D)N_0}}{\pi (\lambda^{3-D} - 1)} + \frac{4\pi \sqrt{3} \lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \tag{6.15}$$

□

**Proposição 6.1.1.** *As funções  $F'(\theta)$  e  $R'(\theta)$ , dadas em (6.11) e (6.10) respectivamente, estão bem definidas e são limitadas,  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 6.1.1,  $F'(\theta)$  e  $R'(\theta)$  estão bem definidas. E por (6.14), temos:

$$|F'(\theta)| \leq L, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \tag{6.16}$$

$$|R'(\theta)| \leq \epsilon L, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \tag{6.17}$$

onde  $L$  é definido em (6.15)

□

**Proposição 6.1.2.** *Sejam  $\lambda > 1, 1 < D < 2, y_m$  variável aleatória com distribuição uniforme em  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  e independente. Então  $F'(\theta)$  e  $R'(\theta)$  são não diferenciáveis para todo ponto  $\theta \in [0, 2\pi]$  em quase todo  $\mathbf{Y}$ , onde  $\mathbf{Y}$  é o espaço amostral das variáveis aleatórias  $y_m$ .*

*Demonstração.* Definindo:

$$\begin{aligned} F'_1(\theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) \\ F'_2(\theta) &= \sum_{m=-\infty}^{-1} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} y_{-m} \lambda^{(2-D)m} \text{sen}(\lambda^{-m} \theta) \\ F'_3(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \end{aligned}$$

Temos:  $F'(\theta) = F'_1(\theta) + F'_2(\theta) + F'_3(\theta)$ . Ademais, as funções  $F'_1(\theta), F'_2(\theta)$  e  $F'_3(\theta)$  estão bem definidas e são convergentes, pode ser demonstrado de maneira análoga ao Lema 6.1.1.

Perceba que:

$$\begin{aligned} F''_3(\theta) &= 0 \\ F''_2(\theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} y_{-m} \lambda^{(1-D)m} \cos(\lambda^{-m} \theta) \end{aligned}$$

onde  $|F''_2(\theta)| \leq \sqrt{3} \frac{\lambda^{1-D}}{1 - \lambda^{1-D}}$ .

Por outro lado, G.H. Hardy demonstrou que a função  $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta)$  é não diferenciável para todo ponto  $\theta$ , no seu artigo "Weierstrass's non-differentiable function" [16] e, recentemente Heurteaux demonstrou no seu artigo "Weierstrass functions with random phases" [17] que a função  $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta + \phi_m)$  é não diferenciável para todo  $\theta$  em quase todo  $\Phi$ , onde  $\Phi$  é o espaço amostral das fases  $\phi_m$ , sendo que as variáveis  $\phi_m$  tem distribuição uniforme em  $[0, \pi]$  e são independentes. Logo, fazendo  $y_m = \sqrt{3} \cos(\phi_m)$  e utilizando

$$\text{sen}(a) \cos(b) = \frac{\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)}{2}$$

temos :

$$\begin{aligned}
F'_1(\theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) \\
&= \sqrt{3} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) \cos(\phi_m) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta + \phi_m) - \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta - \phi_m) \right]
\end{aligned}$$

Assim, utilizando o resultado obtido por Heurteaux,  $F'_1(\theta)$  é não diferenciável para todo  $\theta$  em quase todo  $\mathbf{Y}$ . Portanto,  $F'(\theta)$  e  $R'(\theta)$  são não diferenciáveis para todo  $\theta$  em quase todo  $\mathbf{Y}$ .  $\square$

**Proposição 6.1.3.** *Sejam  $F'(\theta)$  e  $R'(\theta)$ , dadas em (6.11) e (6.10) respectivamente. Então para  $|h| < 1$ , cumpre-se:*

$$|F'(\theta + h) - F'(\theta)| < b_0 |h|^\rho \quad (6.18)$$

$$|R'(\theta + h) - R'(\theta)| < b_1 |h|^\rho \quad (6.19)$$

onde  $b_0$  e  $b_1$  são constantes que não dependem de  $h$ . Ademais,  $0 < \rho < 1$  e  $\rho = 2 - D$ .

*Demonstração.* Dado  $|h| < 1$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\lambda^{-(N+1)} \leq |h| < \lambda^{-N}; \quad \text{do qual} \quad (6.20)$$

$$\lambda^{-(N+1+m)} \leq \lambda^{-m} |h| < \lambda^{-(N+m)}; \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (6.21)$$

Logo:

$$\begin{aligned}
|F'(\theta + h) - F'(\theta)| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m(\theta + h)) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| \\
&= \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} [\text{sen}(\lambda^m(\theta + h)) - \text{sen}(\lambda^m \theta)] \right| \\
&\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |y_m| \lambda^{(D-2)m} |\text{sen}(\lambda^m(\theta + h)) - \text{sen}(\lambda^m \theta)|
\end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{3} \left[ \sum_{m=-\infty}^{-1} \lambda^{(D-2)m} |\operatorname{sen}(\lambda^m(\theta + h)) - \operatorname{sen}(\lambda^m\theta)| \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^N \lambda^{(D-2)m} |\operatorname{sen}(\lambda^m(\theta + h)) - \operatorname{sen}(\lambda^m\theta)| \right. \\ \left. + \sum_{m=N+1}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} |\operatorname{sen}(\lambda^m(\theta + h)) - \operatorname{sen}(\lambda^m\theta)| \right]$$

Utilizando (6.20), (6.21) e o Teorema do Valor Médio para os dois primeiros somatórios e uma óbvia estimativa para o outro somatório, temos:

$$\begin{aligned} |F'(\theta + h) - F'(\theta)| &\leq \sqrt{3} \left[ \sum_{m=-\infty}^{-1} \lambda^{(D-2)m} \lambda^m |h| + \sum_{m=0}^N \lambda^{(D-2)m} \lambda^m |h| + 2 \sum_{m=N+1}^{\infty} \lambda^{(D-2)m} \right] \\ &= \sqrt{3} \left[ |h| \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{(1-D)m} + |h| \sum_{m=0}^N \lambda^{(D-1)m} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)(N+1+m)} \right] \\ &= \sqrt{3} \left[ |h| \left( \frac{1}{1 - \lambda^{1-D}} - 1 \right) + |h| \left( \frac{\lambda^{(D-1)(N+1)} - 1}{\lambda^{D-1} - 1} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda^{(D-2)(N+1)} \frac{1}{1 - \lambda^{D-2}} \right] \\ &= \sqrt{3} \left[ |h| \frac{\lambda^{-N(1-D)} \lambda^{D-1}}{\lambda^{D-1} - 1} + \frac{2\lambda^{-(N+1)(2-D)}}{1 - \lambda^{D-2}} \right] \\ &< \sqrt{3} \left[ |h| \frac{|h|^{1-D} \lambda^{D-1}}{\lambda^{D-1} - 1} + \frac{2|h|^{2-D}}{1 - \lambda^{D-2}} \right] \\ &= \sqrt{3} |h|^{2-D} \left[ \frac{\lambda^{D-1}}{\lambda^{D-1} - 1} + \frac{2}{1 - \lambda^{D-2}} \right] \\ &= b_0 |h|^\rho \end{aligned}$$

$$\text{onde } b_0 = \sqrt{3} \left[ \frac{\lambda^{D-1}}{\lambda^{D-1} - 1} + \frac{2}{1 - \lambda^{D-2}} \right].$$

Por outro lado, lembrando que  $R'(\theta) = \epsilon F'(\theta)$ . Para  $|h| < 1$ , segue:

$$\begin{aligned} |R'(\theta + h) - R'(\theta)| &= \epsilon |F'(\theta + h) - F'(\theta)| \\ &< \epsilon b_0 |h|^{2-D} \\ &= b_1 |h|^\rho \end{aligned}$$

onde  $b_1 = \epsilon b_0$ . □

**Observação 11.** *As equações (6.18) e (6.19) dizem que  $F'$  e  $R'$  são uniformemente Hölder de ordem  $\rho = 2 - D$ , com constantes  $b_0$  e  $b_1$  respectivamente.*

**Corolário 6.1.1.** *Sejam  $F'(\theta)$  e  $R'(\theta)$ , dadas em (6.11) e (6.10) respectivamente.*

*Então para  $|h| < 1$*

$$\begin{aligned} \langle |F'(\theta + h) - F'(\theta)|^2 \rangle &\approx c_1 |h|^{2\rho} \\ \langle |R'(\theta + h) - R'(\theta)|^2 \rangle &\approx c_2 |h|^{2\rho} \end{aligned}$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes que não dependem de  $h$  nem de  $\theta$ .

*Demonstração.* Imediatamente da Proposição 6.1.3, integrando com respeito a  $\mathbf{Y}$  em (6.18) e (6.19). Devemos lembrar que  $\mathbf{Y}$  é o espaço amostral das variáveis aleatórias e utilizar (6.6).  $\square$

**Proposição 6.1.4.** *As funções  $F'(\theta)$  e  $R'(\theta)$ , dadas em (6.11) e (6.10) respectivamente, tem média zero.*

*Demonstração.* Utilizando (iii), temos:

$$\begin{aligned} \langle F'(\theta) \rangle &= \left\langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right\rangle \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle y_m \rangle \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \theta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle y_m \rangle \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Com o qual, segue:

$$\begin{aligned} \langle R'(\theta) \rangle &= \langle \epsilon F'(\theta) \rangle \\ &= \epsilon \langle F'(\theta) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conseqüentemente :

$$\langle F'(\theta + h) - F'(\theta) \rangle = 0 \quad \forall \theta, \theta + h \in [0, 2\pi] \quad (6.22)$$

$$\langle R'(\theta + h) - R'(\theta) \rangle = 0 \quad \forall \theta, \theta + h \in [0, 2\pi] \quad (6.23)$$

$\square$

## 6.2 A representação de $R(\theta)$

Utilizando o Teorema Fundamental do Calculo, obtém-se  $R(\theta)$  de  $R'(\theta)$ :

$$R(\theta) = R(0) + \int_0^\theta R'(\hat{\theta})d\hat{\theta}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \int_0^\theta R'(\hat{\theta})d\hat{\theta} &= \int_0^\theta \epsilon \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \text{sen}(\lambda^m \hat{\theta}) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right] d\hat{\theta} \\ &= \epsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \int_0^\theta \text{sen}(\lambda^m \hat{\theta})d\hat{\theta} - \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^\theta d\hat{\theta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \\ &= \epsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-2)m} \left[ \frac{1 - \cos(\lambda^m \theta)}{\lambda^m} \right] - \frac{\epsilon \theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \\ &= \epsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] - \frac{\epsilon \theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \end{aligned}$$

Então, definindo  $R(0) = 1$ , tem-se:

$$R(\theta) = 1 + \epsilon \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] - \frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right] \quad (6.24)$$

$\forall \theta \in [0, 2\pi]$ .

Do qual  $F(\theta)$  fica estabelecido por:

$$F(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] - \frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)], \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (6.25)$$

**Observação 12.** *Notemos que  $R(0) = R(2\pi)$  e  $F(0) = F(2\pi)$ , dessa maneira a definição estabelecida em (2.2) é satisfeita. Além disso,  $F(\theta)$  e  $R(\theta)$  são funções contínuas com respeito a  $\theta$ , pois são somas de funções contínuas.*

**Lema 6.2.1.** *Se  $|y_m| \leq \sqrt{3} \quad \forall m \in \mathbb{Z}; \lambda > 1; 1 < D < 2$ . A série:*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] - \frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)]$$

*é absolutamente convergente e limitada  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ .*

*Demonstração.* Do Lema 6.1.1, existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|\lambda^{-N_0}2\pi| < 1$ . Logo  $|\lambda^{-N_0}\theta| < 1$ ;  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$  e  $1 - \cos(\lambda^{-m}\theta) \leq \lambda^{-2m}\theta^2$ ;  $\forall m \geq N_0$ ;  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ . Segue:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] \right| &\leq \left| \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] \right| \\
&\quad + \left| \sum_{m=-N_0+1}^{-1} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] \right| \\
&\quad + \left| \sum_{m=-\infty}^{-N_0} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] \right| \\
&= \left| \sum_{m=0}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] \right| \\
&\quad + \left| \sum_{m=1}^{N_0-1} y_{-m} \lambda^{(3-D)m} [1 - \cos(\lambda^{-m} \theta)] \right| \\
&\quad + \left| \sum_{m=N_0}^{\infty} y_{-m} \lambda^{(3-D)m} [1 - \cos(\lambda^{-m} \theta)] \right| \\
&\leq 2\sqrt{3} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(D-3)m} + 2\sqrt{3} \sum_{m=1}^{N_0-1} \lambda^{(3-D)m} \\
&\quad + \sqrt{3} \sum_{m=N_0}^{\infty} \lambda^{(3-D)m} \lambda^{-2m} \theta^2 \\
&\leq \frac{2\sqrt{3}}{1 - \lambda^{D-3}} + 2\sqrt{3} \frac{\lambda^{(3-D)N_0} - \lambda^{3-D}}{\lambda^{3-D} - 1} + \sqrt{3} 4\pi^2 \sum_{m=N_0}^{\infty} \lambda^{(1-D)m} \\
&= 2\sqrt{3} \frac{\lambda^{(3-D)N_0}}{\lambda^{3-D} - 1} + 4\pi^2 \sqrt{3} \frac{\lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \tag{6.26}
\end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando o resultado (6.12) do Lema 6.1.1, segue:

$$\left| \frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| \leq 2\pi \left[ \frac{\sqrt{3} \lambda^{(3-D)N_0}}{\pi(\lambda^{3-D} - 1)} + \frac{2\sqrt{3} \pi \lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \right] \tag{6.27}$$

Assim:

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] - \frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right| \leq B \tag{6.28}$$

onde

$$B = \frac{4\sqrt{3} \lambda^{(3-D)N_0}}{\lambda^{3-D} - 1} + \frac{8\pi^2 \sqrt{3} \lambda^{(1-D)N_0}}{1 - \lambda^{1-D}} \tag{6.29}$$

□

**Proposição 6.2.1.** *As funções  $F(\theta)$  e  $R(\theta)$ , dadas em (6.25) e (6.24) respectivamente, estão bem definidas e são limitadas  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ .*

*Demonstração.* Utilizando o Lema 6.2.1, segue que as funções  $F(\theta)$  e  $R(\theta)$  estão bem definidas e ademais:

$$|F(\theta)| \leq B, \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (6.30)$$

$$|R(\theta)| \leq 1 + \epsilon B, \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (6.31)$$

□

**Proposição 6.2.2.** *Seja  $R(\theta)$ , dada em (6.24), onde  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Então para  $0 < \epsilon < \frac{1}{B}$  tem-se  $R(\theta) > 0, \forall \theta \in [0, 2\pi]$ . Onde  $B$  é definido em (6.29).*

*Demonstração.* Utilizando o resultado (6.30) da proposição 6.2.1, segue:

$$0 < 1 - \epsilon B \leq 1 + \epsilon F(\theta) = R(\theta), \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (6.32)$$

□

**Proposição 6.2.3.** *As funções  $F(\theta)$  e  $R(\theta)$ , dadas em (6.25) e (6.24) respectivamente, são lipschitz com respeito a  $\theta$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\theta_1 < \theta_2$ ;  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ . Como  $F(\theta)$  é contínua e diferenciável, então pelo Teorema do Valor Médio, temos:

$$|F(\theta_1) - F(\theta_2)| \leq |F'(\theta^*)| |\theta_1 - \theta_2| \quad \forall \theta^* \in \langle \theta_1, \theta_2 \rangle$$

Logo pela proposição 6.1.1

$$|F(\theta_1) - F(\theta_2)| \leq L |\theta_1 - \theta_2| \quad ; \forall \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$$

com  $L$  definido em (6.15). Da mesma maneira, temos:

$$|R(\theta_1) - R(\theta_2)| \leq \epsilon L |\theta_1 - \theta_2|$$

□

## 7 CONCLUSÕES

Utilizando o critério de domínio Lipschitz, estabelecemos a superfície aleatória áspera tipo III em  $\mathbb{R}^2$ . Representado exatamente por  $\partial\Omega$ , dado por:

$$\partial\Omega = \{(R(\theta)\cos\theta, R(\theta)\sin\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

onde  $R(\theta)$  satisfaz algumas condições, ver (2.2).

Utilizando o método de campo nulo e a aproximação da função de Hankel estabelecemos uma aproximação da onda espalhada:

$$u_s^M(r, \phi) = d\sqrt{k} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik(R(\theta)\cos(\theta-\alpha)+w)} A(r, \phi, \theta)}{w\sqrt{w}} d\theta - i \frac{d}{\sqrt{k}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R(\theta)} Q_M(\theta) e^{ik(w-R(\theta))}}{\sqrt{w}} d\theta$$

ver (4.20).

O padrão de campo distante é:

$$\mathbf{F}(\phi; k) = ik \int_0^{2\pi} \frac{R'^2(\theta)}{R(\theta)} \cos(\theta - \phi) d\theta + \frac{ik}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R(\theta)} P(\hat{\theta}) D_M(\hat{\theta} - \theta) d\theta d\hat{\theta}$$

ver (5.9).

A aproximação da média da seção transversal de espalhamento para grandes distâncias do espalhador é:

$$\begin{aligned} \sigma_M(k, \phi) = & \frac{k}{4} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{R'^2(\theta_1)}{R(\theta_1)} \frac{R'^2(\theta_3)}{R(\theta_3)} \right\rangle \cos(\theta_1 - \phi) \cos(\theta_3 - \phi) d\theta_1 d\theta_3 \right. \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{R'^2(\theta_3)}{R(\theta_3)} \sqrt{R(\theta_1)} P(\theta_2) \right\rangle \cos(\theta_3 - \phi) \times \\ & \quad \times D_M(\theta_2 - \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{R'^2(\theta_1)}{R(\theta_1)} \sqrt{R(\theta_3)} \bar{P}(\theta_4) \right\rangle \cos(\theta_1 - \phi) \times \\ & \quad \times D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_1 d\theta_3 d\theta_4 \\ & \left. + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \sqrt{R(\theta_1)R(\theta_3)} P(\theta_2) \bar{P}(\theta_4) \right\rangle \times \right. \\ & \quad \left. \times D_M(\theta_2 - \theta_1) D_M(\theta_4 - \theta_3) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 \right] \end{aligned}$$

ver (5.12).

Finalmente, um exemplo de superfície aleatória áspera tipo III é obtido pela definição de  $R(\theta)$ , dado por:

$$R(\theta) = 1 + \epsilon \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m \theta)] - \frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \lambda^{(D-3)m} [1 - \cos(\lambda^m 2\pi)] \right]$$

ver (6.24).

## Referências Bibliográficas

- [1] F. Bass e I.M. Fuks. *Wave scattering from statistically rough surfaces*. Oxford: Pergamon, 1979.
- [2] P. Beckmann. A new approach to the problem of reflection from a rough surface. *Acta Techn.*, 2:311–355, 1957.
- [3] P. Beckmann. Scattering by composite rough surfaces. *Proceedings of the IEEE*, 53:1012–1015, 1965.
- [4] P. Beckmann. Shadowing of random rough surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-13(3):384–388, 1965.
- [5] P. Beckmann. Scattering of light by rough surface. *Progress in Optics*, vol VI ed E Wolf (Amsterdam: North Holland), 1967.
- [6] P. Beckmann e A. Spizzichino. The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces. *Oxford: Pergamon. Reprinted 1987 by Artech House Inc., Norwood, Massachusetts, USA*, 1963.
- [7] M.V. Berry. Diffractals. *Journal of Physics A:Mathematical and General*, 12(6):781–797, 1979.
- [8] M.V. Berry e T.M. Blackwell. Diffractional echoes. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 14(11):3101–3110, 1981.
- [9] N. Bleistein. *Mathematical methods for wave phenomena*. Academic Press, New York, 1984.
- [10] R.M. Brown e Z. Shen. Estimates for the Stokes operator in Lipschitz domains. *Indiana University Mathematics Journal*, 44(4):1183–1206, 1995.
- [11] D. Colton e R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. Kriener Publishing Company, Malabar Florida, 1992.

- [12] E. Fabes. Layer potential methods for boundary value problems on Lipschitz domains. *Lecture Notes in Math*, 1344:55–80, 1988.
- [13] E.B. Fabes, C. Kenig, e G. Verchota. The Dirichlet problem for the Stokes system on Lipschitz domains. *Duke Math. J*, 57(3):769–793, 1988.
- [14] Kenneth J. Falconer. *Fractal geometry : mathematical foundations and applications*. Chichester: John Wiley & Sons, 1990.
- [15] L. Fortuin. Survey of literature on reflection and scattering of sound waves at the sea surface. *Journal Ac. Soc. Am.*, 47:1209–1228, 1969.
- [16] G. H. Hardy. Weierstrass’s Non-Differentiable Function. *Transactions of the American Mathematical Society*, 17(3):301–325, 1916.
- [17] Y. Heurteaux. Weierstrass Functions with Random Phases. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355(8):3065–3077, 2003.
- [18] C. W. Horton. A review of reverberation, scattering and eco structure. *Journal Ac. Soc. Am.*, 51:1049–1061, 1972.
- [19] A. Ishimaru. *Wave propagation and scattering in random media*, volume II, ch21. New York: Academic, 1978.
- [20] D.L. Jaggard. On Fractal Electrodynamics. Em H.N. Kritikos e D.L. Jaggard., editores, *Recent Advances in Electromagnetic Theory*, 183–224. New York: Springer Verlag, 1990.
- [21] D.L. Jaggard e Y. Kim. Diffraction by band-limited fractal screens. *Journal of the Optical Society of America A*, 4(6):1055–1062, 1987.
- [22] D.L. Jaggard e X. Sun. Fractal surface scattering: A generalized Rayleigh solution. *Journal of Applied Physics*, 68(11):5456–5462, 1990.
- [23] D.L. Jaggard e X. Sun. Scattering from fractally corrugated surfaces. *Journal of the Optical Society of America A*, 7(6):1131–1139, 1990.

- [24] D.L. Jaggard e X. Sun. Scattering from Fractally Flucted Cylinders. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 4(7):599–611, 1990.
- [25] D.L. Jaggard e X. Sun. Wave scattering from non-random fractal surfaces. *Optics Communications*, 78(1):20–24, 1990.
- [26] E. Jakeman. Fresnel scattering by a corrugated random surface with fractal slope. *Journal of the Optical Society of America*, 72(8):1034–1041, 1982.
- [27] E. Jakeman. Scattering by a corrugated random surface with fractal slope. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15:L55–L59, 1982.
- [28] Y. Kim, H. Grebel, e D.L. Jaggard. Diffraction by fractally serrated apertures. *Journal of the Optical Society of America A: Optics, Image Science and Vision*, 8(1):20–26, 1991.
- [29] Y. Kim e D.L. Jaggard. The fractal random array. *Proceedings of the IEEE*, 74(9):1278–1280, 1986.
- [30] Y. Kim e D.L. Jaggard. Optical beam propagation in a band-limited fractal medium. *Journal of the Optical Society of America A*, 5(9):1419–1426, 1988.
- [31] C. Liu. The Helmholtz equation on Lipschitz domains. *IMA preprint*, 1356, 1995.
- [32] C. Macaskill. Geometric optics and enhanced backscatter from very rough surfaces. *Journal of the Optical Society of America A*, 8(1):88–96, 1991.
- [33] W. Magnus, F. Oberhettinger, e RP Soni. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Springer-Verlag, New York, terceira edição, 1966.
- [34] A. McGinn e J. Sykes. Microwave scattering from natural targets. *United Kingdom atomic energy authority report: AERE-R*, (9768), 1980.

- [35] J.A. Ogilvy. Wave scattering from rough surfaces. *Rep. Prog. Phys.*, 50:1553–1608, 1987.
- [36] J.A. Ogilvy. *Theory of wave scattering from random rough surfaces*. Great Britain, J.W. Arrowsmith Ltd., Brisol, 1991.
- [37] Lord Rayleigh. *The theory of sound*. New York: Dover (first edition 1877, New York: Macmillan), 1945.
- [38] A. B. Shmelev. Wave scattering by statistically uneven surfaces. *Sov. Phys-Usp.*, 15:173–183, 1972.
- [39] J. Teixeira. Experimental methods for studying fractal aggregates. *In: H.E. Stanley and N. Ostrowsky, Editors, On Growth and Form, Fractal and Non-Fractal Patterns in Physics, Nijhoff, Dordrecht, Boston*, 145–162, 1986.
- [40] T. R. Thomas. *Rough surfaces*. New York: Longman, 1982.
- [41] E.C. Titchmarsh. *The theory of functions*. 2ed. London : Oxford University, 1953.
- [42] G. R. Valenzuela. Theories for the interaction of electromagnetic and oceanic waves-a review. *Boundary Layer Meteorology*, 13:427–429, 1978.
- [43] G. Verchota. Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace’s equation in Lipschitz domains. *Journal of Functional Analysis*, 59(3):572–611, 1984.
- [44] P.C. Waterman. Matrix formulation of electromagnetic scattering. *Proceedings of the IEEE*, 53(8):805–812, 1965.
- [45] P.C. Waterman. New formulation of acoustic scattering. *The journal of the acoustical society of America*, 45:1417–1429, 1969.
- [46] B.J. West. Sensing scaled scintillations. *Journal of the Optical Society of America A*, 7(6):1074–1100, 1990.