UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ESTUDO DA NOÇÃO DE TAXA DE VARIAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Por:

LILIANE DUFAU DA SILVA

PORTO ALEGRE/RS

Agosto de 2009.

LILIANE DUFAU DA SILVA

ESTUDO DA NOÇÃO DE TAXA DE VARIAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul para obtenção do título de *Mestre em Ensino de Matemática*.

ORIENTAÇÃO: Prof. Dr. *Jaime Bruck Ripoll*

PORTO ALEGRE/RS

Agosto de 2009.

LILIANE DUFAU DA SILVA

ESTUDO DA NOÇÃO DE TAXA DE VARIAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, para obtenção do título de *Mestre em Ensino de Matemática*.

Aprovada em 13 de agosto de 2009.

Prof. Dr. *Jaime Bruck Ripoll* — Orientador

Prof. Dr. *Rogério Steffenon [UNISINOS]* — Banca Examinadora

Prof. Dr. *Eduardo de Mattos Brietzke [UFRGS]* — Banca Examinadora

Profª. Dra. *Maria Alice Gravina [UFRGS]* — Banca Examinadora

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, *Professor Dr. Jaime Bruck Ripoll*, pelo apoio e permanente dedicação a esse trabalho.

Aos *professores do Mestrado em Ensino da Matemática*, por sua valiosa contribuição a este Programa e ao aprimoramento de minha formação.

Aos *colegas*, companheiros de estudos.

Ao meu marido, *Adalberto Martins do Amaral*, pela paciência, companheirismo e incentivo.

Liliane Dufau da Silva

RESUMO

O conceito de taxa de variação é muito útil no estudo das funções reais de uma variável real e, por ser elementar, pode ser apresentado e discutido no Ensino Médio.

A proposta deste trabalho é fazer um estudo detalhado e criterioso do uso da taxa de variação no estudo das funções afins, quadráticas e cúbicas. Com isso, pretende-se desenvolver resultados e apresentar diversas aplicações deste conceito a estas classes de funções que incluem, por exemplo, novas formas de obtenção dos seus gráficos, a interpretação geométrica de seus coeficientes, bem como resolver problemas simples e interessantes de otimização.

Quanto às funções quadráticas, como aplicação do estudo feito sobre estas funções, apresentamos uma maneira matematicamente rigorosa de conceituar o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV), bem como, obtemos as equações horárias deste movimento. A definição que apresentamos é equivalente a usual, mas não faz uso dos Cálculos Infinitesimal e Integral. Como nosso objetivo é eminentemente matemático, não apresentamos qualquer interpretação Física deste conceito na forma que o introduzimos.

Já o estudo das funções cúbicas pode ser visto como uma interessante aplicação das funções quadráticas, uma vez que, através do uso das taxas de variação, a descrição (traçado do gráfico) de uma função cúbica é reduzida ao estudo do sinal de uma função quadrática associada.

PALAVRAS-CHAVE: funções afins, quadráticas e cúbicas – monotonicidade – taxa de variação.

ABSTRACT

The concept of rate of change is very useful in the study of real functions of one real variable. Since this is a simple concept it can be presented and discussed in high school.

The purpose of this work is to make a comprehensive study use of the rate of change in the study of the affine, quadratic and cubic functions. We prove results and present several applications of this concept to these classes of functions that include, for example, new ways of obtaining their graphs, geometric interpretation of their coefficients, and the solution of simple and interesting optimization problems.

As for the quadratic functions, as an application of our study about these functions, we obtain in a mathematically rigorous definition of Uniformly Varied Rectilinear Motion and obtain the equations of the motion without using the Infinitesimal or Integral Calculus. Since we were essentially concerned with the mathematical aspect of this phenomenon, we did not present a discussion about the physical interpretation of our definition.

The study of cubic functions can be seen as an interesting application of the quadratic functions, since through the use of rate changing, the description of the graph of a cubic function is reduced to the study of the sign of a quadratic function associated to the given cubic.

KEYWORDS: related functions, quadratic and cubic – monotonicity – rate of change

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EM	–	Ensino Médio
et al	–	Indicação de mais de dois ou três autores em uma obra (latim)
FRVR	–	Função Real de Variável Real
MR	–	Movimento Retilíneo
MRUV	–	Movimento retilíneo Uniforme
nº. / n.	–	número
RS	–	Rio Grande do Sul
UFRGS	–	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muitas propriedades importantes das funções reais (propriedades de crescimento, decrescimento, pontos de mudança, entre outras), ainda que elementares e passíveis de serem abordadas no Ensino Médio (EM), só são estudadas em cursos de graduação. A razão é que, tradicionalmente, estas propriedades são explicadas e justificadas usando conceitos do Cálculo Diferencial, particularmente o conceito de derivada.

Embora a derivada seja uma poderosa ferramenta da Matemática, indispensável para um estudo mais aprofundado da maioria das funções reais, para as funções reais mais simples, como as funções racionais, existe, correspondentemente, uma ferramenta mais simples, elementar, que pode ser utilizada no lugar da derivada. Trata-se da noção de *taxa de variação*.

A diferença fundamental entre taxa de variação e derivada é que a primeira pode ser introduzida apenas usando a álgebra do EM, enquanto que a segunda faz uso de uma noção só aprendida nos cursos de graduação, nas disciplinas de Análise Matemática e Cálculo, que é a noção de limite. Apesar do caráter elementar do conceito de taxa de variação, ainda assim ela tem o mesmo poder de aplicação que a derivada no estudo das funções racionais.

O objetivo fundamental desta dissertação é justificar a afirmação que fizemos no parágrafo anterior, mostrando a aplicabilidade da taxa de variação no estudo do caso particular das funções polinomiais de grau menor ou igual a 3; embora este estudo possa ser feito para qualquer função racional ou mesmo algébrica, não o fazemos aqui, pois isto nos distanciaria muito dos conceitos usualmente vistos no EM.

Achamos bastante interessante a inclusão do estudo da noção de taxa de variação nos conteúdos do Ensino Médio, e queremos no que segue explicar com mais detalhes o porquê desta nossa opinião.

Para começar, com taxa de variação torna-se possível o estudo de uma classe importante de funções não vista no Ensino Médio: a classe das funções cúbicas. O estudo destas funções é interessante, pois, diferentemente do que ocorre com as funções afins e quadráticas, elas apresentam fenômenos muito mais típicos de uma função real.

Através das funções cúbicas o estudante aprende, sem que para isso tenha que desenvolver raciocínios mais sofisticados do que os usualmente desenvolvidos no EM (veja oficina), as noções de ponto de máximo local, ponto de mínimo local, e ponto de inflexão de uma função real. Estes tipos especiais de pontos são chamados de pontos estacionários, pontos onde a variação infinitesimal da função é zero, e são de grande importância, tanto em Matemática quanto nas aplicações da Matemática.

A taxa de variação permite uma abordagem unificada das propriedades acima mencionadas no caso das funções reais mais simples. Usando esta técnica com as funções quadráticas, o aluno consegue deduzir todas as propriedades, usualmente trabalhadas no Ensino Médio, sem ter que memorizar fórmulas e roteiros (como a fórmula das coordenadas do vértice da parábola, gráfico da quadrática) procedimentos particulares que se aplicam somente às funções quadráticas, o que lhe permite uma compreensão ao nosso ver mais profunda destes conteúdos.

Outra aplicação da taxa de variação é na modelagem matemática do MRUV (movimento retilíneo uniformemente variado). No estudo do MRUV no Ensino Médio, existem duas passagens apresentadas sem maiores discussões e menos ainda explicações corretas: a definição matemática da velocidade e a dedução da fórmula da distância em função do tempo.

O conceito de velocidade é indispensável para definir o MRUV como tradicionalmente feito na Física. Contudo, ainda que do ponto de vista físico a noção de velocidade é bastante fácil de ser intuitivamente entendida, tanto que é um conceito que utilizamos no nosso dia a dia, a conceituação matemática rigorosa de velocidade está longe disso. Para melhor entender o porquê, é importante primeiro notar que, quando se fala em velocidade se está, na verdade, falando em velocidade instantânea. Só que, não há como definir velocidade instantânea sem fazer uso da noção de limite, conceito estudado somente em cursos de Cálculo na graduação.

Quanto à obtenção da equação horária d x t no MRUV, as maneiras conhecidas fazem uso também de conteúdos de Matemática Superior, a noção de integral.

E como os livros de Física do Ensino Médio tratam este assunto? Surpreendentemente, todos os livros do EM consultados, adotados em algumas escolas do Estado e aprovados pelo MEC, ou apresentam as fórmulas do MRUV sem nenhuma justificativa, ou, quando apresentam alguma explicação, estas contêm erros de Matemática, muitas vezes bem graves, o que acaba por ser pior.

Nesta dissertação, usando a noção de taxa de variação, apresentamos uma forma elementar, mas matematicamente rigorosa, de definir o MRUV, sem fazer uso do conceito de limite, bem como apresentamos uma dedução da equação horária do movimento sem fazer uso do Cálculo Integral. Esta dedução, embora elementar, faz uso de uma argumentação mais elaborada. Pensamos que ela pode ser vista em oficinas de Matemática, onde poderia ser apresentada e discutida, possibilitando aos alunos se beneficiarem com esta dedução.

Observamos, contudo, que não fizemos um estudo da relevância Física desta forma de apresentação do conceito de MRUV, mas acreditamos que isto possa ser feito.

Muitos dos conteúdos que apresentamos neste texto, estão escritos e reescritos em um sem número de livros, apostilas, notas de aulas de um sem número de professores (e alunos); assim, reapresentá-los, como fizemos, nesta dissertação, pode parecer algo desnecessariamente repetitivo. Contudo, além do eterno argumento de que assim tornamos o trabalho autossuficiente, temos uma outra razão que é mais relevante: a de que muitos destes conceitos e conteúdos, apesar de todo este “curriculum” de ensino/aprendizado, surpreendentemente, ainda são ensinados de forma muitas vezes pouco clara e mesmo equivocada. Tal é o caso, por exemplo, de alguns aspectos relacionados à função, bem como o MRUV, como já comentamos. Aproveitamos então, esta oportunidade, para procurar esclarecer alguns destes aspectos.

Todos os resultados que aqui apresentamos podem facilmente ser demonstrados utilizando técnicas do Cálculo ou Análise. Contudo, por serem estes cursos de Matemática Superior, refizemos todas as provas usando argumentos que utilizam somente os conteúdos estudados no EM. Isto torna estas provas teoricamente passíveis de serem abordadas no EM; dizemos "teoricamente" pois, ao não fazermos o uso de resultados mais avançados de Matemática, as provas se tornaram mais elaborados, sendo, ainda que elementares, mais difíceis de serem acompanhadas por quem não está familiarizado com demonstrações matemáticas. Contudo, acreditamos que os argumentos das provas, por utilizarem, como já foi dito, apenas conteúdos e conceitos do EM, podem ser aplicados em casos particulares, permitindo a justificativa, ainda que não em toda a generalidade, de certas passagens matemáticas. Mas isto tudo está para ser pensado e eventualmente feito, pois não fizemos nenhuma proposta neste sentido.

No cerne desta dissertação está a preocupação de algo que está cada vez mais deficitário no ensino da Matemática: o uso, efetivo e consistente do método dedutivo. Mais importante, para nós, do que aprender conteúdos matemáticos é aprender o método matemático.

Com base nestas ideias, procuramos elaborar uma proposta didática, materializada em uma Oficina, na qual elaboramos e implementamos uma seqüência didática com quatro aulas, abordando parte dos conteúdos desta dissertação.

1 CONCEITO DE FUNÇÃO

O aparecimento (explícito) da noção de função é apontado, por vezes, como um marco histórico do pensamento matemático, separando a Matemática dita 'clássica' (originada na Grécia do período clássico, com um conteúdo predominantemente geométrico) da matemática dita 'moderna' (entendida por oposição ao clássico grego, desenvolvida nos últimos 300 anos).

A ideia mais intuitiva e significativa de função é a que surge no estudo do relacionamento entre variáveis ou grandezas. Contudo, não se consegue a partir desta ideia dar uma definição matematicamente rigorosa de função, pois não se dispõe de uma definição matemática precisa de variável (rigorosamente, falando isto não é bem verdade, pois o conceito de variável é visto no ramo de Matemática conhecido como Lógica Matemática. Assim, adotar este ponto de vista requer um aprofundamento no estudo de Lógica Matemática que não é objetivo desta dissertação).

Alternativamente, pode-se dar uma definição de função utilizando a moderna linguagem da Teoria Elementar dos Conjuntos, que é a noção usualmente adotada nos livros de Ensino Médio. Esta definição é bastante abstrata, não deixando transparecer de forma imediata o significado mais verdadeiro de função, o de relacionamento entre duas variáveis, mas tem duas vantagens importantes:

— É matematicamente correta e consistente, se apoiando em uma teoria universalmente consagrada, a Teoria dos Conjuntos;
— Além de incluir todos os casos onde aparece a noção de função como relacionamento entre variáveis, abrange também outros casos onde não ocorre um relacionamento entre variáveis como usualmente concebemos, e que são igualmente importantes, como a noção de operador e de séries temporais.

Nos operadores podemos transformar uma função em outra, por exemplo, o operador T que associa a cada função real de variável real f, a função quadrado de f, $T(f) = f^2$. Outro exemplo, é o operador amplificação, que transforma cada função real de variável real f na função λf onde λ é uma constante maior do que 1.

Já nas séries temporais, não temos a relação de causa e efeito que pressupõe o relacionamento de variáveis. Estas séries registram a evolução de uma grandeza no tempo - como a cotação do dólar ao longo de 2008, a evolução do preço de uma determinada ação na bolsa de valores, fenômenos naturais, como o indicador de precipitação pluviométrica, a variabilidade da temperatura atmosférica superficial no planalto meridional riograndense - e não têm nenhum mérito explicativo sobre fenômeno registrado.

Desta forma, de modo a contemplar as mais variadas situações que envolvem funções, vamos apresentar a seguir, a definição mais *moderna* de função, a saber, como a de um certo subconjunto de pares ordenados.

1.1 FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL

1.1.1 *Definição 1.1: Par ordenado*

Dados dois conjuntos A e B não vazios. Escolhendo um elemento $a \in A$ e um elemento $b \in B$, denotamos por (a,b) o par ordenado formado por a e b tomados na ordem posicional, ou seja, (a,b) representa o conjunto formado pelos elementos *a* e *b* no qual foi imposta a obrigatoriedade de considerar *a* como o primeiro elemento e *b* como segundo.

O conjunto de todos os pares ordenados (a,b), nos quais $a \in A$ e $b \in B$, é denotado por $A \times B$ e é chamado de produto cartesiano de A por B.

Caso particular: Quando $A = B$, costuma-se denotar $A \times A$ por A^2.

1.1.2 *Conceito 1.1: Função*

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma função de A em B é um conjunto f de pares ordenados que é um subconjunto do produto cartesiano de $A \times B$, que satisfaz as seguintes exigências:

i. Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$;

ii. Não existem dois pares ordenados diferentes de f com mesmo primeiro elemento, ou seja, a única maneira de termos $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f$ é com $b = c$.

O conjunto A é denominado domínio da função f e o conjunto B é denominado contradomínio de f; já o domínio de f costuma ser denotado por $D(f)$ e o contradomínio por $C(f)$.

Para cada par $(a,b) \in f$, dizemos que b é o valor de f em a e isto pode ser escrito como $b = f(a)$. O conjunto de todos os valores da função f é chamado de conjunto imagem de f e é denotado por $I(f)$.

Para efeito do que vamos trabalhar nesta dissertação, é conveniente adotarmos a seguinte definição de função real de variável real.

1.1.3 *Definição 1.2: Função real de variável real*

Toda função que tem $\mathbb{R}$ como domínio e contradomínio.

Será utilizada a forma abreviada FRVR para nos referirmos a uma função real de variável real.

Esta definição não contempla os casos importantes de funções definidas apenas em subconjuntos de $\mathbb{R}$, também consideradas FRVR, quando adotamos uma definição mais ampla deste conceito. Como estes tipos de funções não serão vistos aqui, não se justifica a adoção da definição mais geral de FRVR do que a apresentada acima.

1.2 Representação Geométrica de uma Função

1.2.1 *Definição 1.3: Gráfico de uma função*

O gráfico cartesiano de um FRVR, denotado por $gr(f)$, é definido por:

$$gr(f) = \{(x, f(x))/x \in \mathbb{R}\}.$$

Por representação geométrica de uma FRVR, nesta dissertação, entendemos um esboço do seu gráfico cartesiano, obtido desenhando-se em algum meio material (uma folha de papel, um quadro-negro, um computador, etc.) um sistema cartesiano de eixos e marcando um conjunto finito de pares ordenados do gráfico da função neste material.

Notemos que, enquanto cada FRVR dá origem a um único gráfico cartesiano, podemos fazer uma infinidade de esboços desse gráfico. Pode até ocorrer de se ter um mesmo esboço representando funções diferentes. O que é importante é que a representação geométrica de uma função seja construída de modo que se tenha um grande poder de síntese, permitindo resumir de modo fácil e claro a essência de seu comportamento; uma representação geométrica bem feita, muitas vezes possibilita a descoberta de novas propriedades da função.

Construir uma representação geométrica significativa de uma FRVR (ou seja, que contemple as propriedades mencionadas acima) pode ser uma tarefa bem complicada, não se resumindo à construção de tabelas, como frequentemente os alunos são levados a pensar. Trataremos disto somente no caso das funções polinomiais de grau menor ou igual a 3.

Abaixo na Figura 1, um exemplo de esboço do gráfico de uma função f:

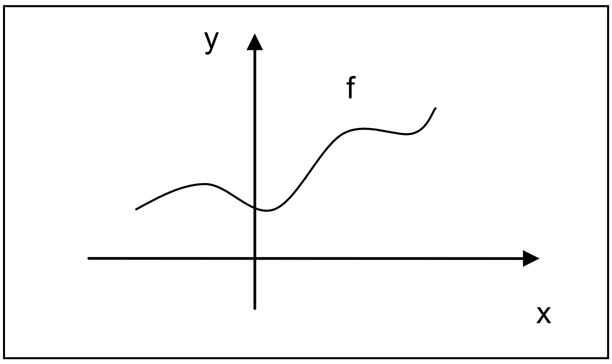


FIGURA 1: Exemplo de esboço do gráfico de uma função

Os exemplos apresentados, nas Figuras 2 e 3, não representam esboço de gráficos de funções em $\mathbb{R}$:

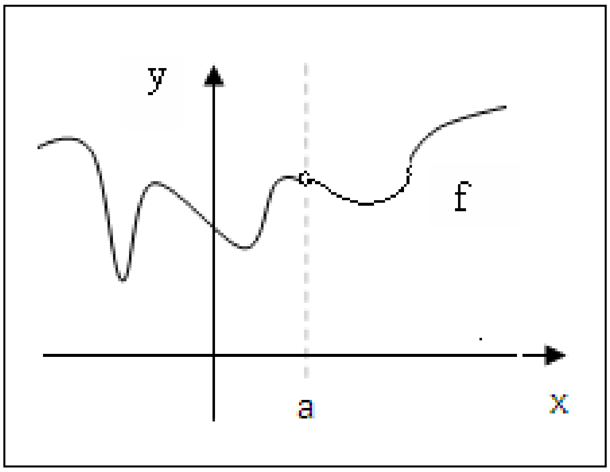


FIGURA 2: Exemplo que não representa o esboço de gráfico uma função em $\mathbb{R}$

No exemplo apresentado na Figura 2, o elemento *a* pertencente ao domínio da função, e não possui um elemento correspondente no contradomínio para formar o par $(a, f(a))$, contradizendo o item (i), do Conceito 1.1 de função.

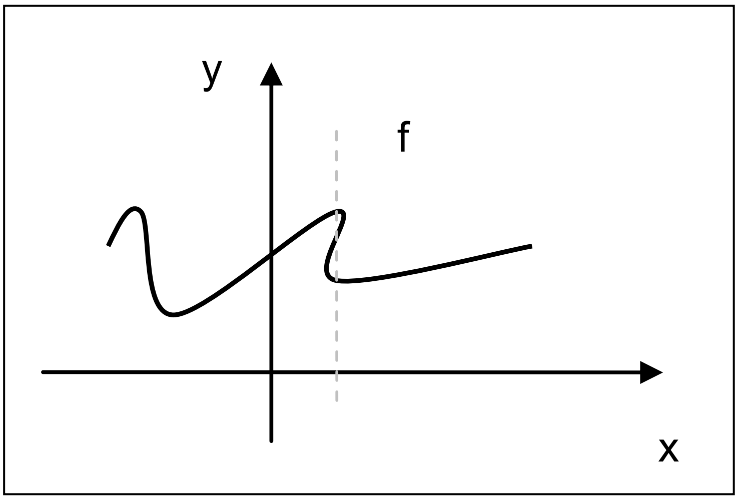


FIGURA 3: Exemplo que não representa o esboço de gráfico uma função em $\mathbb{R}$

Observe que, na Figura 3, existem pares ordenados diferentes de f com mesmo primeiro elemento e segundo elemento diferentes, o que contradiz o item (ii) do Conceito 1.1 de função.

Uma questão fundamental na descrição de uma FRVR é a determinação dos seus intervalos de monotonicidade, por eles, entre outras coisas, possibilitarem a construção de um esboço mais representativo do gráfico de uma função. Passaremos a tratar deste assunto a seguir.

1.3 INTERVALO DE MONOTONICIDADE DE UMA FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL

1.3.1 *Definição 1.4: Intervalo de monotonicidade*

Seja f uma FRVR:

i. Dizemos que f é crescente em um intervalo I se, dados $x_1, x_2 \in I$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.
ii. Dizemos que f é decrescente em I se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.
iii. A função f é dita monótona em I se for crescente ou decrescente em I.
iv. Dizemos também que I é um intervalo de monotonicidade de f.

Como já comentamos, um problema fundamental na descrição de uma FRVR é a determinação dos seus intervalos de monotonicidade, quando estes existem, sendo que isto pode ser um problema bem difícil. O conhecimento destes intervalos é importante por serem exatamente os intervalos em que podemos inverter a função, fato que tem muitas conseqüências em inúmeros contextos específicos. Uma outra razão importante, e que será muito utilizada neste trabalho, é que os intervalos de monotonicidade de uma FRVR possibilitam a construção de esboços representativos do gráfico da função.

Por ser um problema que pode ser bem complicado, muitas vezes não se consegue determinar os intervalos de monotonicidade de uma FRVR. Por outro lado, bem mais fácil é saber se uma dada FRVR passa crescendo ou decrescendo por um dado ponto, como veremos no que segue.

1.3.2 *Definição 1.5: Viés de crescimento e de decrescimento*

Dizemos que uma FRVR f passa crescendo (decrescendo) por um ponto x_0, quando existir um intervalo aberto I contendo x_0 tal que f é crescente (decrescente) em I. Neste caso, podemos dizer que x_0 é um ponto de crescimento (decrescimento) de f, ou ainda, f tem um viés de crescimento (decrescimento) em x_0.

Embora seja uma informação bem menos completa do que a determinação dos intervalos de monotonicidade, ela pode ser bem relevante em determinados contextos, ocorrendo frequentemente em problemas aplicados à Economia. Questão fundamental quando se sabe que uma dada FRVR passa crescendo (decrescendo) por um dado ponto é a de se ter uma estimativa do tamanho do intervalo de monotonicidade da função em torno deste ponto. Contudo, não abordaremos esta questão nessa dissertação.

Em princípio, para verificarmos a monotonicidade de uma FRVR em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, precisamos comparar $f(x_1)$ com $f(x_2)$ para escolhas quaisquer de $x_1, x_2 \in I$, sujeitas à condição $x_1 < x_2$. Contudo, esta exigência pode ser enfraquecida, como garante o teorema que segue. Como veremos, dele decorre o fato de que basta compararmos $f(x_1)$ com $f(x_2)$ para x_1 e x_2 variando em subintervalos de I, eventualmente muito pequenos. Este teorema garante que, para sabermos se uma dada FRVR f é crescente (decrescente) em um intervalo I, basta verificarmos se ela é localmente crescente (decrescente) em I.

1.3.3 *Teorema 1.1*

Sejam f uma FRVR e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto.

i. Se para todo $x \in I$ existe um intervalo aberto $J \subset I$ com $x \in J$ tal que f é crescente em J, então f é crescente em I;

ii. Se para todo $x \in I$ existe um intervalo aberto $J \subset I$ com $x \in J$ tal que f é decrescente em J, então f é decrescente em I.

A validade deste teorema é bastante evidente e poderia ser usada sem maiores justificativas. A seguir, a sua demonstração, que se apóia em conceitos e argumentos de Análise Real.

Prova

Vamos apresentar a prova do item (i), pois para o outro item a prova é similar.

Seja $a = \sup I$, o supremo de I (eventualmente $a = \infty$). Dado $x_1 \in I$, definindo:

$$A = \{x_2 \in I / x_2 > x_1 \text{ e } f(x_1) < f(x) \text{ para todo } x \in]x_1, x_2]\} ,$$

Basta mostrar que $]x_1, a] \subset A$. Por hipótese, existe um intervalo aberto $J \subset I$ contendo x_1 tal que f é crescente em J. Segue-se que $[x_1, \infty[\cap J \subset A$ de modo que, em particular, $A \neq \varnothing$. Assim, pondo $b = \sup A$ basta mostrar que $a = b$. Como a é uma cota superior para A temos que $b \leq a$.

Por contradição, suponha $b < a$. Usando novamente a hipótese podemos considerar um intervalo aberto $J' \subset I$ com $b \in J'$ tal que f é crescente em J'. Segue-se que $J' \cap A \neq \varnothing$.

Seja $t \in J'$ com $t > b$. Afirmamos que $t \in A$, o que contradiz o fato de b=supA. Seja $x \in I$ com $x_1 < x \leq t$. Se $x < b$ então existe $x' \in A$ com $x < x'$ do que segue que $f(x) > f(x_1)$. Se $x \in [b, t[$ tome $x' \in [x_1, b[\cap J'$. Então $x' \in A$ de modo que $f(x_1) < f(x')$ e, sendo f crescente em J' decorre que $f(x') < f(x)$ e, portanto,

$f(x_1) < f(x)$, provando o teorema.

Vimos, na Definição 1.5, o que são pontos de crescimento e de decrescimento do gráfico de uma função. Porém, nem sempre todo ponto do gráfico de uma função é de crescimento ou de decrescimento, podendo haver pontos de "natureza" diferente, ditos "pontos de mudança", como definiremos a seguir.

1.3.4 *Definição 1.6: Ponto de mudança*

Dizemos que um ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico de uma FRVR f é um ponto de mudança, quando existe um intervalo aberto I suficientemente pequeno com $x_0 \in I$ tal que, pondo $I_1 = \{x \in I / x \leq x_0\}$, $I_2 = \{x \in I / x \geq x_0\}$ uma das duas alternativas seguintes ocorre:

i. f é crescente em I_1 e decrescente em I_2;
ii. f é decrescente em I_1 e crescente em I_2.

1.3.5 Exemplo 1.1

Vamos determinar os pontos de mudança, a partir do esboço do gráfico de uma função que está apresentado na Figura 4:

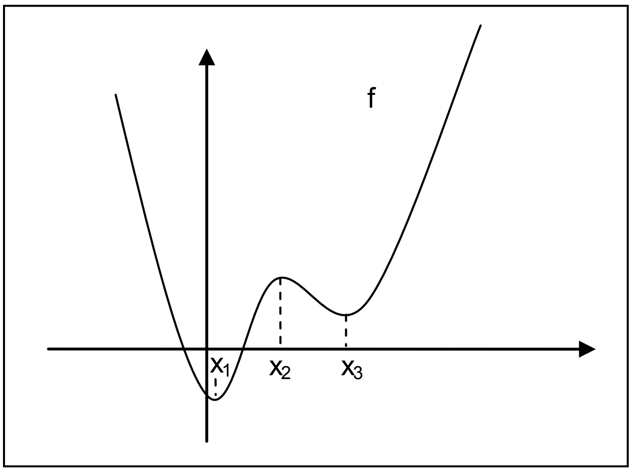


FIGURA 4: Exemplo 1.1

Pontos de mudança: x_1, x_2 e x_3.

- x_1 e x_3 são pontos de mudança, pois ao considerarmos intervalos abertos suficientemente pequenos contendo estes pontos, temos que a função a sua esquerda é decrescente e a sua direita é crescente;
- x_2 é ponto de mudança, pois ao considerarmos intervalos abertos suficientemente pequenos contendo x_2, temos que a função a sua esquerda é crescente e a sua direita é decrescente.

Cabe observar que a nomenclatura utilizada para estes pontos não é a usual. Nós a utilizaremos por achar que elas nos ajudam a entender melhor as propriedades gráficas de uma FRVR. Contudo, a ideia que está por trás não é novidade. Veremos, a seguir, que todo ponto de mudança é um ponto de máximo ou mínimo local ou absoluto, sendo esta terminologia comumente utilizada no estudo de FRVR.

1.4 PONTOS DE MÁXIMO E MÍNIMO DE UMA FUNÇÃO

1.4.1 *Definição 1.7: Máximo e mínimo local de uma função*

i. Diz-se que uma função f tem um valor máximo local em x_0, se existir um intervalo aberto I contendo x_0, tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x em I;
ii. Diz-se que uma função f tem um valor mínimo local em x_0, se existir um intervalo aberto I contendo x_0, tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x em I.

Nas situações apresentadas acima, x_0 é dito um ponto de máximo/ mínimo local da função, ou ainda, ponto de máximo/mínimo relativo da função.

Observamos que nesta dissertação, a palavra *ponto*, é utilizada com duplo significado: ora significando um ponto do plano; ora significando a abscissa de um ponto — o contexto deixará claro o significado que será utilizado.

1.4.2 *Definição 1.8: Máximo e mínimo absoluto de uma função*

i. Diz-se que uma função f tem um valor máximo absoluto num intervalo I, se existir algum x_0 em I tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x em I. Neste caso, $f(x_0)$ será o valor máximo absoluto de f em I;
ii. Diz-se que uma função f tem um valor mínimo absoluto num intervalo I, se existir algum x_0 em I tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x em I. Neste caso, $f(x_0)$ será o valor mínimo absoluto de f em I.

Notemos que todo ponto de mudança é um ponto de máximo ou mínimo local. De fato, como vimos na Definição 1.6, se x_0 é um ponto de mudança, existe um intervalo aberto I suficientemente pequeno com $x_0 \in I$ tal que, pondo $I_1 = \{x \in I / x \leq x_0\}$, $I_2 = \{x \in I / x \geq x_0\}$ uma das duas alternativas seguintes ocorre:

i. f é crescente em I_1 e decrescente em I_2, portanto, para todo $\forall x \in I_1, \text{tem-se que } f(x) \leq f(x_0)$ e $\forall x \in I_2,\ f(x_0) \geq f(x)$. Neste caso, pelo primeiro item da Definição 1.7, temos que o ponto de mudança é um ponto de máximo local;
ii. f é decrescente em I_1 e crescente em I_2, portanto, para todo $\forall x \in I_1, \text{tem-se que } f(x) \geq f(x_0)$ e $\forall x \in I_2,\ f(x_0) \leq f(x)$. Neste caso, pelo segundo item da Definição 1.7, temos que o ponto de mudança é um ponto de mínimo local.

Contudo, a recíproca não é válida. Um ponto pode ser máximo/mínimo local ou absoluto e não ser um ponto de mudança. Por exemplo, a função:

$$f(x)=\begin{cases} |x\sin(1/x)|, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}.$$

Neste caso, $x = 0$ é mínimo absoluto e não é ponto de mudança.

Vemos o esboço do gráfico desta função na Figura 5:

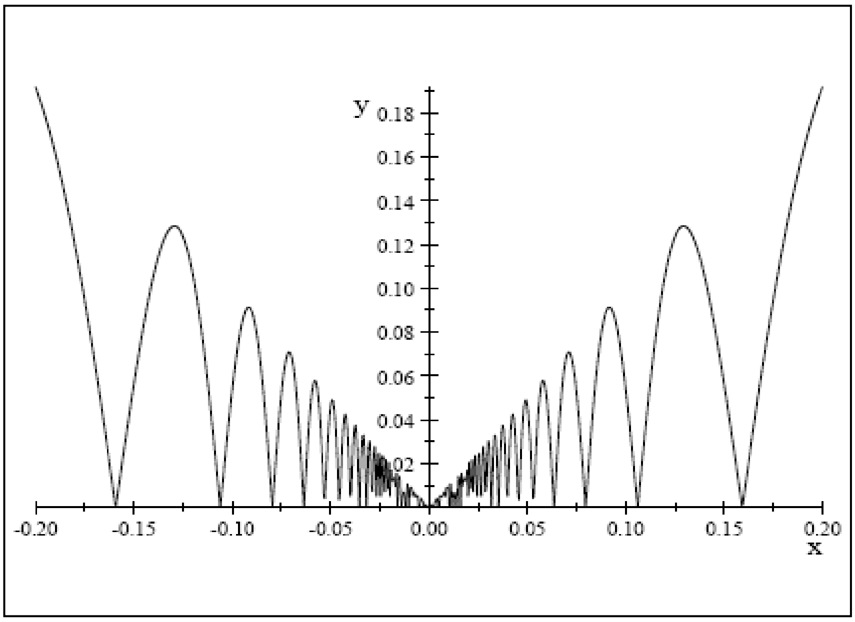


FIGURA 5: Esboço do gráfico da função $f(x)=\begin{cases} |x\sin(1/x)|, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$

Para desenvolvermos o estudo ao qual nos propomos, precisamos de uma condição fundamental para sua sustentação, que é a noção de continuidade que veremos a seguir.

1.5 FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL CONTÍNUA

Embora a noção de continuidade não faça parte dos conteúdos estudados no Ensino Médio, ela está por trás da validade de alguns resultados sobre FRVR utilizados neste nível de ensino.

Por exemplo, ao se afirmar que existe uma solução da equação $\text{sen}2x - \cos 3x = 0$ no intervalo $\left[0, \pi/4\right]$. Para justificar esta afirmação, consideremos a função $f(x) = \text{sen}2x - \cos 3x$. Note que $f(0) < 0$ e $f(\pi/4) > 0$ e sendo f uma função contínua, necessariamente, ao passar de um valor negativo para um valor positivo, deve existir um número real $x \in \left[0, \pi/4\right]$ tal que $f(x) = 0$.

Nota-se que, para garantir a existência de x foi fundamental termos a condição da função ser contínua no intervalo considerado.

Outra situação na qual se usa a condição de continuidade, muito comum no Ensino Médio, é quando se afirma que toda função polinomial de grau ímpar tem ao menos um zero real, ou ainda, todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

Observa-se ainda que, embora seja abordada apenas no Ensino Superior, a noção intuitiva de continuidade não é difícil de ser compreendida. Considerando isto e tendo em vista que a noção de continuidade entra como hipótese fundamental em resultados que apresentaremos adiante, achamos conveniente discutir, ainda que sem muita profundidade, este conceito na dissertação.

A definição matematicamente rigorosa de função contínua é dada em cursos de Análise Real em nível superior. Aqui vamos nos limitar a dar uma ideia intuitiva, não rigorosa deste conceito, possível de ser abordada no Ensino Médio.

1.5.1 *Definição 1.9: Função real de variável real contínua*

Uma FRVR $y = f(x)$ é contínua em um ponto x_0 quando, atribuindo a x valores próximos de x_0, se obtém para y valores próximos de $f(x_0)$.

Dizemos que uma FRVR é contínua, quando for contínua em todos os seus pontos.

A ideia de "próximo" em Matemática, significa que a diferença entre os valores pode ser tão pequena quanto se queira.

1.5.1.1 Exemplo 1.2

Na Figura 6, que segue, temos um esboço do gráfico de uma função contínua.

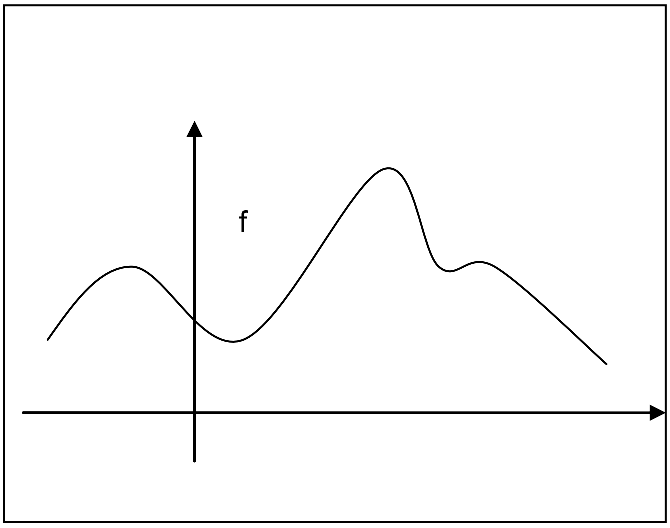


FIGURA 6: Esboço do gráfico de uma função contínua

1.5.1.2 Exemplo 1.3

Considere a função sinal**:**

$$\text{Sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Vamos nos convencer de que f não é contínua em $x = 0$, analisando o que acontece com f(x) à esquerda e à direita de zero.

Na Figura 7, que segue, temos um esboço do gráfico desta função:

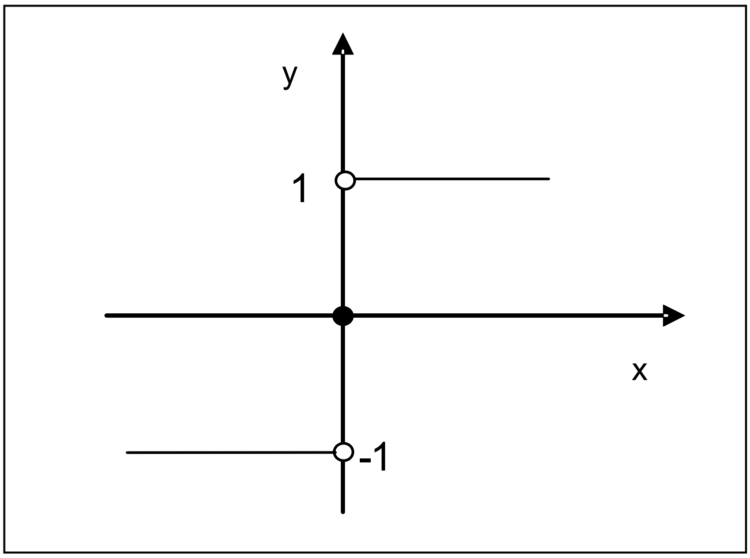


FIGURA 7: Esboço do gráfico da função do Exemplo 1.3

Observe que, à medida que x se aproxima de 0, por valores maiores que 0, os valores de f(x) se aproximam de 1, como de fato são iguais a 1.

Já quando x se aproxima de 0, por valores menores que 0, os valores de f(x) se aproximam de -1, como de fato se são iguais a -1. Sendo $f(0) = 0$, por mais que x se aproxime de 0, não se consegue para f(x) valores próximos de f(0).

Assim, a função não é contínua em $x = 0$.

Pode-se intuitivamente dizer, que para fazer o esboço do gráfico de uma função contínua, não se precisa “tirar a ponta do lápis do papel”.

Observações acerca de continuidade:

O fato de uma função ser ou não contínua, não se restringe às questões como as que apresentamos nos exemplos. Elas ilustram um tipo simples de descontinuidade que estão muito aquém de problemas relevantes que originaram este conceito.

O que faz com que o conceito de continuidade seja matematicamente mais interessante ocorre em contextos menos triviais, como é o caso que comentamos a seguir.

No Exemplo 1.3 apresentado, fica muito claro que tal função é descontínua em zero, mas bem menos óbvio e mais interessante é descobrir e provar que esta função, como uma tal descontinuidade, seja dada, no intervalo $\left]-1,1\right[$, por uma “fórmula fechada” envolvendo apenas funções contínuas:

$$\text{Sign}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\,\pi\, x}{2}\right), \ x \in \left]-1,1\right[.$$

Esta igualdade é obtida usando técnicas de Séries de Fourier, ou, alternativamente, de Variável Complexa, assuntos estes, de Matemática do Ensino Superior.

Adiante também veremos que uma FRVR contínua que reparte a soma é linear (Teorema 3.2(b)). Este resultado é fundamental para a prova, sem o uso do Cálculo Diferencial, do Teorema de caracterização das funções quadráticas e da descrição matemática do MRUV. Se a hipótese da continuidade não for satisfeita, este resultado é falso. Contra-exemplos são dados por funções descontínuas. Estas funções são relevantes, haja visto sua relação com os casos acima mencionados, de modo que bem entendê-las seria desejável.

Contudo, esta não é tarefa simples: as descontinuidades destes contra-exemplos são não-triviais, de fato bastante complicadas. Prova-se que o gráfico destas funções são densos no plano (ou seja, dado qualquer ponto do plano, tão próximo dele quanto quisermos, existe um ponto do gráfico de uma tal função)[1].

Um fato extremamente importante é que os pontos de máximo e de mínimo locais de uma FRVR contínua estão diretamente relacionados aos intervalos de monotonicidade de uma função: o conhecimento de um leva ao conhecimento do outro. Estabelecer este fato de forma rigorosa requer um formalismo um tanto quanto exagerado. Vamos nos contentar em ilustrá-lo através de exemplos que serão suficientes para deixar bem claro seu significado.

---

[1] Referência na obra: GELBAUM, Bernard R.; OLMSTED, John M. ***Counterexamples in Analysis***. New York: Dover Publications, 2003.

1.5.1.3 Exemplo 1.4

Suponha que $-3; -2;\ 1; 1{,}5$ sejam os únicos pontos de máximo e de mínimo (locais ou absolutos) de uma dada FRVR $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ contínua. Então os intervalos $]-\infty,-3[,\ ]-3,-2[,\ ]-2,1[,\ ]1;1{,}5[,\ ]1{,}5;\infty[$, são intervalos de monotonicidade de f, alternando intervalos de crescimento e decrescimento.

Reciprocamente, suponha que uma FRVR f contínua, tenha os seguintes intervalos de monotonicidade: $]-\infty,-3[,\ ]-3,-2[,\ ]-2,1[,\ ]1;1{,}5[,\ ]1{,}5;\infty[$. Então -3; - 2; 1; 1,5 são pontos de máximos ou mínimos (locais ou absolutos) da função f.

No Exemplo 1.4, consideramos uma função contínua. Esta condição é fundamental para a relação apresentada entre máximos (mínimos) e intervalos de monotonicidade. A seguir, serão apresentados alguns exemplos que facilitam a compreensão da exigência de supor que a função seja contínua.

1.5.1.4 Exemplo 1.5

Vamos considerar o esboço do gráfico da função apresentado a seguir (Figura 8):

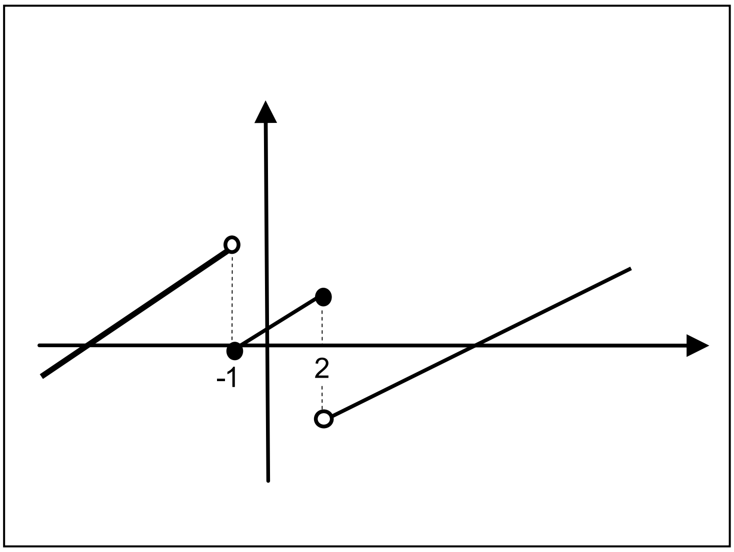


FIGURA 8: Esboço do gráfico da função do Exemplo 1.5

Note que a função é crescente em cada um dos intervalos separadamente: $]\infty, -1[\,, [-1,2]\,,]2, \infty[$. Assim, poderíamos concluir que não existem máximos ou mínimos. Mas, pelo esboço apresentado, vemos que -1 é um ponto mínimo local e 2 é um ponto máximo local.

Da mesma forma, sendo -1 e 2 pontos de mínimo e máximo locais, respectivamente, podemos formar os intervalos $]\infty, -1[\,, [-1,2]\,,]2, \infty[$ e inferir que a função é decrescente em pelo menos um destes intervalos, o que não ocorre, pois graficamente vemos que a função é crescente em cada um destes intervalos.

1.5.1.5 Exemplo 1.6

Observe a Figura 9 que apresenta outra situação na qual a função é descontínua:

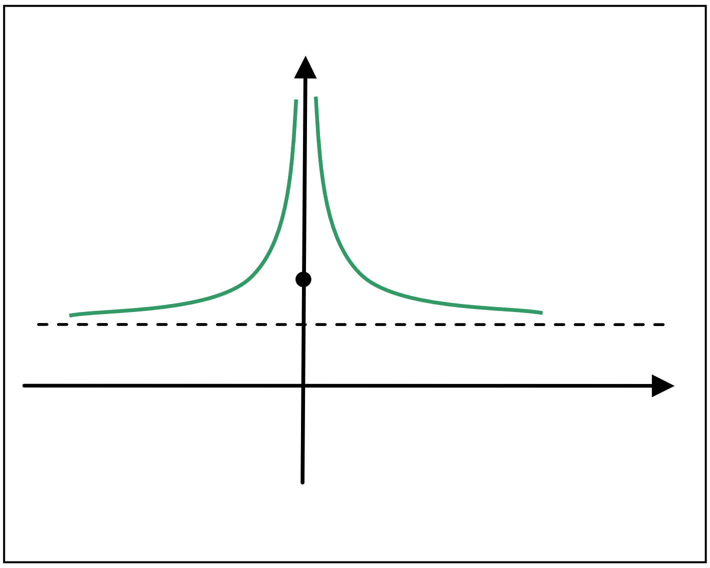


FIGURA 9: Esboço do gráfico da função do E*xemplo 1.6*

Neste exemplo, temos uma função descontínua em $x = 0$. Não há máximos ou mínimos locais ou absolutos, mas temos que em $]\infty, 0[$ a função é crescente e em $]0, \infty[$ a função é decrescente.

Da mesma forma, se os intervalos $]\infty,0[$ e $]0,\infty[$ são, respectivamente, intervalos de crescimento e decrescimento da função, assim poderíamos inferir que zero é um máximo da função, o que não ocorre, pois x=0 é uma descontinuidade da função.

Assim, apresentamos exemplos que mostram a necessidade da condição da função ser contínua para que exista relação entre máximos e mínimos locais com seus intervalos de monotonicidade, e isto reforça ainda mais a importância de discutirmos, mesmo que de forma intuitiva, a noção de continuidade no Ensino Médio. Importante observar que, ao longo de nosso estudo, usaremos algumas propriedades das funções contínuas demonstradas em um curso de Análise Real, mas não iremos aqui demonstrá-las, por levar demasiadamente longe do objetivo principal deste trabalho, além disso, como veremos, estas propriedades são intuitivamente fáceis de entender.

Como já comentamos, a determinação dos intervalos de monotonicidade de uma FRVR é importante para o entendimento das propriedades mais importantes da função. No que segue vamos introduzir a noção de taxa de variação, que é uma poderosa ferramenta no trato deste problema no caso das funções racionais.

2 TAXA DE VARIAÇÃO

2.1 DEFINIÇÃO 2.1: TAXA DE VARIAÇÃO

Dada uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e dados $x\in\mathbb{R}$ e $h\neq 0$, definimos a função taxa de variação de f com relação ao incremento h em x por

$$V_h(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Fixado $h\neq 0$, $V_h(x)$ representa a taxa de variação de f no intervalo $[x,x+h]$ se $h>0$ e no intervalo $[x+h,x]$ se $h<0$. O ponto x é dito ponto de aplicação da variação e o valor de h, como já foi apresentado na definição, é dito incremento da variação.

Pensando em x como uma variável, é comum o uso da notação Δx para indicar uma variação sofrida por x a partir de algum ponto do seu domínio. Por exemplo, ao passar de x a $x+h$ a variação na variável x é $\Delta x=x+h-x=h$, ou seja, a cada incremento h corresponde a uma variação Δx e vice-versa. Denotando por y a variável real relacionada a x através da função f, a saber, $y=f(x)$, a cada variação Δx de x, com ponto de aplicação em x corresponde uma variação Δy de y como ponto de aplicação $y=f(x)$ dada por:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(x+h)-f(x).$$

De modo que podemos representar a taxa de variação de f por $\Delta y/\Delta x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

sendo esta notação de uso tradicional. Porém, não a utilizaremos aqui por ser uma notação ambígua, pois mistura a notação de variável (x) com a de variação (Δx). O uso de uma notação precisa é, como veremos, fundamental para a prova clara de vários resultados desta dissertação.

Antes de seguirmos com nosso estudo, vamos apresentar um exemplo de como determinar a taxa de variação para algumas funções em um ponto dado.

2.1.1 *Exemplo 2.1*

Vamos determinar a taxa de variação das funções apresentadas abaixo em $x = 2$ relativas a um incremento genérico $h \neq 0$:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Solução

$$V_h(2) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) + 1 - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = h + 2.$$

b) $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2$.

Solução

$$V_h(2) = \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \frac{(2+h)^3 - 2(2+h)^2 + 2 - 2}{h} = \frac{h^3 + 4h^2 + 4h}{h} = h^2 + 4h + 4.$$

2.1.2 *Interpretação Geométrica*

A taxa de variação no intervalo $[x, x+h]$, considerando $h > 0$ (e da mesma forma, para $[x+h, x]$, para $h < 0$) nos dá a inclinação da reta secante ao gráfico (Figura 10) nos pontos $P(x, f(x))$ e $Q(x+h, f(x+h))$:

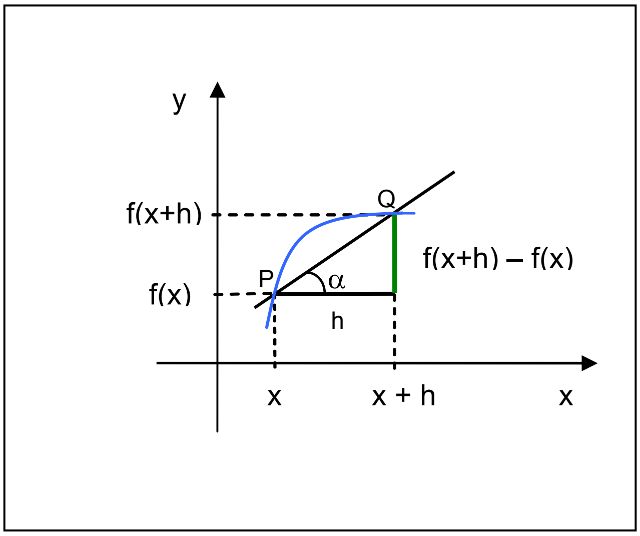


FIGURA 10: Interpretação Geométrica de Taxa de Variação

Da figura vemos que, $tg\alpha = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = V_h(x)$.

2.2 TAXA DE VARIAÇÃO INFINITESIMAL DE UMA FUNÇÃO BÁSICA

Na definição de taxa de variação, tomamos $h \neq 0$, pois se atribuirmos para h o valor zero na expressão da taxa de variação, teremos uma divisão por zero, o que não faz sentido nos números reais. Contudo, ao considerarmos as funções básicas, que são as funções polinomiais e as funções definidas por quociente de funções polinomiais, conforme mostraremos no lema a seguir, sempre é possível colocar h em evidência no numerador e com isto simplificá-lo com o h do denominador, eliminando o problema de poder atribuir a h o valor zero. Esta é a propriedade fundamental sustentada pela função racional que permite à introdução da taxa de variação infinitesimal para esta classe de função.

2.2.1 *Lema 2.1*

Na expressão da taxa de variação de uma função básica, sempre é possível, após simplificações, eliminar o h do denominador e atribuir à h, na expressão, o valor zero.

Prova

Seja $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ onde f e g são funções polinomiais e $g(x) \neq 0$.

Determinando a taxa de variação para esta função, temos:

$$V_h(x) = \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \text{ com } h \neq 0.$$

Observe que fixando x, como as funções f e g são polinomiais, a expressão do numerador é uma função polinomial em h e que se anula em $h = 0$. Isto significa que h divide $g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)$, ou seja, esta expressão pode ser escrita como o produto de h por um polinômio que depende de x e h

$$g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h) = hp(x,h).$$

Segue-se que

$$V_h(x) = \frac{hp(x,h)}{hg(x+h)g(x)} = \frac{p(x,h)}{g(x+h)g(x)}.$$

Esta última expressão pode ser avaliada em $h = 0$, uma vez que $g(x) \neq 0$, o que conclui a prova deste lema.

Note que, na demonstração do Lema 2.1, foi fundamental o fato de estarmos aplicando a taxa de variação infinitesimal a funções polinomiais ou a funções definidas por quociente de funções polinomiais; esta é uma das razões que nos leva a restrição do uso da taxa de variação infinitesimal a estas funções. No caso geral de uma FRVR, o conceito de taxa de variação infinitesimal faz uso de limite, sendo assim estudado apenas em cursos de graduação.

2.2.2 *Definição 2.2: Taxa de Variação Infinitesimal*

A taxa de variação infinitesimal de uma função básica é a função que denotamos por $V_0(x)$, obtida atribuindo-se, na expressão da taxa de variação $V_h(x)$ da função, após simplificações, o valor zero para h.

A terminologia "Taxa de Variação Infinitesimal" deve ser interpretada, como a taxa de variação, em relação a uma variação "infinitamente" pequena em módulo, pois é o resultado da expressão simplificada da taxa de variação, quando atribuímos à h o valor zero, o que é equivalente, a atribuir à h um valor "indefinidamente próximo de zero" em módulo.

2.2.3 *Exemplo 2.2*

Vamos determinar, a seguir, a taxa de variação infinitesimal das funções apresentadas no Exemplo 2.1, em $x = 2$:

a. $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Solução

Já determinamos no Exemplo 2.1 a taxa de variação da função em x=2:

$$V_h(2) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h + 2.$$

Tomando $h = 0$, temos que a taxa de variação infinitesimal de f é $V_0(2) = 2$.

b. $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

Solução

Também já determinamos no Exemplo 2.1 a taxa de variação da função em x=2:

$$V_h(2) = \frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \frac{h(h^2+4h+4)}{h} = h^2+4h+4.$$

Tomando $h=0$, temos que a taxa de variação infinitesimal de f é $V_0(2)=4$.

A seguir, apresentaremos mais uma definição acerca de taxa de variação que é a de taxa de variação de segunda ordem de uma função. O estudo desta taxa possibilita obter um resultado de fundamental importância para este trabalho, que é o Teorema de Caracterização das Funções Quadráticas, que será apresentado mais adiante.

2.3 TAXA DE VARIAÇÃO DE 2ª ORDEM DE UMA FUNÇÃO

2.3.1 *Definição 2.3: Taxa de variação de 2ª ordem de uma função*

Vimos na Definição 2.1 que, dada uma FRVR f, a taxa de variação de f com relação a um incremento $h \neq 0$ é uma nova FRVR, V_h é definida por

$$V_h(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Sendo V_h uma FRVR, está bem definida sua taxa de variação em relação a um incremento $k \neq 0$. Esta taxa de variação chamamos de taxa de variação de 2ª ordem de f em relação aos incrementos não nulos h e k, e denotamos por $V_{h,k}^2(x)$.

Assim,

$$V^2_{h,k}(x) = \frac{V_h(x+k) - V_h(x)}{k}$$

Em termos de f, temos que a taxa de variação de segunda ordem será dada por:

$$V^2_{h,k}(x) = \frac{\frac{f(x+h+k) - f(x+k)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{k} = \frac{f(x+h+k) - f(x+k) - f(x+h) + f(x)}{hk}.$$

2.3.2 *Exemplo 2.3*

Vamos determinar a taxa de variação de 2ª ordem das funções $f(x) = -4x^2 + 3x$ e $g(x) = x^3 - 5x + 2$.

Solução

Inicialmente, iremos determinar a taxa de variação de f com relação a um incremento $h \neq 0$:

$$V_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-4(x+h)^2 + 3(x+h) - \left(-4x^2 + 3x\right)}{h} = -8x - 4h.$$

Calculando agora a taxa de variação de V_h em relação a um incremento $k \neq 0$, temos

$$V^2_{h,k}(x) = \frac{V_h(x+k) - V_h(x)}{k} = \frac{-8(x+k) - 4h - (-8x - 4h)}{k} = -8\,.$$

Portanto, taxa de variação de 2ª ordem de f é constante e igual a -8.

Agora, iremos determinar a taxa de variação de g com relação a um incremento $h \neq 0$:

$$V_h(x) = \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - 5(x+h) + 2 - \left(x^3 - 5x + 2\right)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 - 5.$$

Calculando agora a taxa de variação de V_h em relação a um incremento $k \neq 0$, temos

$$V^2_{h,k}(x) = \frac{V_h(x+k)-V_h(x)}{k} = \frac{3(x+k)^2 + 3h(x+k) + h^2 - 5 - (3x^2 + 3xh + h^2 - 5)}{k} =$$
$$= 6x + 3h + 3k.$$

Iniciaremos, a seguir, a apresentação de algumas contribuições que as noções de taxa de variação e de taxa de variação infinitesimal trazem ao estudo das FRVR.

2.4 RELAÇÃO ENTRE TAXA DE VARIAÇÃO INFINITESIMAL E INTERVALOS DE MONOTONICIDADE DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS

2.4.1 *Teorema 2.1*

Dados uma função polinomial p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, tem-se que:

i. se p tem taxa de variação infinitesimal positiva em x_0, ou seja, $V_0(x_0) > 0$, então p é crescente em um intervalo aberto J contendo x_0, ou seja, $(x_0, p(x_0))$ é um ponto com viés de crescimento;
ii. se p tem taxa de variação infinitesimal negativa em x_0, ou seja, $V_0(x_0) < 0$, então p é decrescente em um intervalo aberto J contendo x_0, ou seja, $(x_0, p(x_0))$ é um ponto com viés de decrescimento;
iii. se x_0 é um ponto de mudança de p, então $V_0(x_0) = 0$.

Notemos que, a prova do Teorema 2.1, se resume à prova dos itens (i) e (ii), uma vez que o item (iii) é uma decorrência lógica dos anteriores. De fato, se $V_0(x_0) \neq 0$, teríamos que $V_0(x_0) > 0$ ou $V_0(x_0) < 0$. No primeiro caso, $V_0(x_0) > 0$, (x_0, y_0) seria um ponto de crescimento, absurdo. No segundo caso, sendo $V_0(x_0) < 0$ o ponto (x_0, y_0) seria de decrescimento, absurdo também. Logo, no ponto de mudança (x_0, y_0), temos que $V_0(x_0) = 0$.

Este resultado segue de forma imediata de resultados básicos de Análise Real. Nós aqui vamos apresentar provas elementares e apenas nos casos das funções polinomiais que vamos estudar neste trabalho, que são as funções afins, as funções quadráticas e as funções cúbicas. Tais provas serão apresentadas à medida que estudarmos cada uma destas funções.

3 ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM

3.1 DEFINIÇÃO 3.1: FUNÇÃO AFIM

Função afim é toda função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que pode ser expressa na forma $f(x)=ax+b$, onde a e b são constantes reais. Equivalentemente, existem constantes $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $f(x)=ax+b, \forall x\in\mathbb{R}$.

3.1.1 *Exemplo 3.1*

$$f(x)=2x-9,\ g(x)=-\frac{8}{3}x,\ h(x)=x+\sqrt{3}.$$

Como queremos apresentar as contribuições que as noções de taxa de variação e de taxa de variação infinitesimal trazem ao estudo das FRVR, vamos apresentar alguns exemplos que motivam a um resultado das funções afins que, na seqüência, será enunciado e provado.

3.1.2 *Exemplo 3.2*

Determinar a taxa de variação da função $f(x)=2x+1$ nos pontos a seguir:

a) $x=2$ e $h=2$;

b) $x=2$ e $h=1$;

c) $x=-1$ e $h=$ -2;

d) Para valores genéricos x e h.

Solução

a) $V_2(2)=\dfrac{2(2+2)+1-(2\cdot 2+1)}{2}=\dfrac{4}{2}=2$.

b) $V_1(2)=\dfrac{2(2+1)+1-(2\cdot 2+1)}{1}=\dfrac{2}{1}=2$.

c) $V_{-2}(-1)=\dfrac{2(-1-2)+1-(2(-1)+1)}{-2}=\dfrac{-4}{-2}=2$.

d) $V_h(x)=\dfrac{2(x+h)+1-(2x+1)}{h}=\dfrac{2h}{h}=2$.

Percebemos que, independente do ponto de aplicação x e do incremento h, a taxa de variação se manteve sempre a mesma. O Teorema 3.1, a seguir, mostra que isto não é coincidência.

3.2 CARACTERIZAÇÕES DAS FUNÇÕES AFINS

3.2.1 *Teorema 3.1: Primeira caracterização das funções afins*

Uma FRVR é uma função afim se e somente se tem taxa de variação constante.

Prova

Pela Definição 3.1, temos que uma função afim é uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que se expressa por $f(x)=ax+b$ com parâmetros a e b reais.

Aplicando a Definição 2.1 de taxa de variação de uma função f, teremos:

$$V_h(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a(x+h)+b-ax-b}{h}=a.$$

Portanto, a taxa de variação de uma função afim é sempre o parâmetro a da função, não depende do ponto de aplicação x e nem do incremento h.

Reciprocamente, considerando que a taxa de variação é uma constante $a\in\mathbb{R}$. Isto significa que,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a \leftrightarrow f(x+h) = ah + f(x).$$

Para todos x em $\mathbb{R}$ e h em $\mathbb{R}$ e não nulo.

Considerando $x+h = x_1$, $h = x_1 - x$, temos que:

$$f(x_1) = a(x_1 - x) + f(x) \qquad (1)$$

Em particular, tomando $x_1 = 0$ e $x \neq 0$, reescrevemos (1) da forma:

$$f(x) = ax + f(0), \ \forall x \neq 0 \qquad (2)$$

Em (2), consideramos para x a restrição de ser não nulo, mas pode-se observar que ela continua sendo válida quando $x = 0$, o que nos permite estender esta igualdade a todos $x \in \mathbb{R}$, de forma que temos:

$$f(x) = ax + f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para concluir a demonstração, resta denotarmos $f(0)$ por b e assim podemos escrever:

$$f(x) = ax + b, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, provamos que a hipótese de que, se f tem taxa de variação constante, obrigatoriamente, f tem que ser da forma $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, para constantes a e b adequadas.

3.2.2 *Relação entre taxa de variação e intervalos de monotonicidade das funções afins*

Como se sabe, uma função $f(x) = ax + b$ é crescente quando o parâmetro a é positivo e decrescente quando a é negativo.

Vimos, no Teorema 3.1, que $V_h(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$.

Observe que a taxa de variação infinitesimal das funções afins é igual a sua taxa de variação. Assim, temos que o valor da taxa de variação infinitesimal destas funções será também o parâmetro a. Desta forma, temos que:

— f é crescente em $\mathbb{R}$, se e somente se, $V_0(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$; e equivalentemente,

— f é decrescente em $\mathbb{R}$, se e somente se, $V_0(x) < 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

O Teorema 3.1 apresenta um resultado fundamental para caracterização das funções afins. A seguir, apresentaremos mais alguns teoremas de caracterização que servirão como base para o estudo das funções quadráticas.

Antes de enunciarmos o Teorema da Segunda Caracterização das Funções Afins, vamos apresentar dois resultados fundamentais para sua demonstração, que dizem respeito às funções lineares.

3.2.3 *Definição 3.2: Funções que repartem a soma*

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reparte a soma quando, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

3.2.4 *Teorema 3.2: Caracterização das Funções Lineares*[2]

a) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função monótona que reparte a soma se e somente se g é uma função linear não nula;
b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função contínua que reparte a soma se e somente se g é uma função linear.

Prova

Prova do item (a) do Teorema.

Seja g uma FRVR.

Suponhamos que g é uma função linear não nula: $g(x)=ax$ com $a\in\mathbb{R}^*$.

Vamos mostrar que g reparte a soma e que é uma função monótona.

Mostrando que g reparte a soma:

Para todo x_1 e $x_2 \in\mathbb{R}$, temos que

$$g(x_1+x_2)=a(x_1+x_2)=ax_1+ax_2=g(x_1)+g(x_2).$$

Conforme a Definição 3.2, temos que g reparte a soma.

Falta apenas mostrar que g é monótona. Mas, sendo g uma função linear não nula temos, obrigatoriamente, que g é monótona.

Agora, a recíproca de (a). Supondo que g reparte a soma e é monótona. Queremos mostrar que g é uma função linear não nula, ou seja, que $g(x)=ax$, para algum $a\in\mathbb{R}^*$.

Tomando $a=g(1)$, vamos mostrar que:

i) $a\neq 0$ e
ii) $g(x)=a\cdot x, \forall x\in\mathbb{R}$.

---

2 Apresentado, de forma equivalente, como *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*, nas página 95;98, na obra: LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; *et al*. **A Matemática do Ensino Médio** [Vol.1]. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

Vamos primeiro mostrar que $a \neq 0$. Para isso, vamos determinar o valor da função g em zero

$g(0) = g(0+0) = g(0) + g(0)$, o que permite concluir que, $g(0) = 0$.

Por hipótese, sabemos que a função g é monótona, assim, não repete valores, portanto, $g(1) \neq 0$, ou seja, $a \neq 0$. O que demonstra a parte (i).

A demonstração da parte (ii) será feita por etapas, que irão seguir uma seqüência, nas quais cada uma dependerá da anterior.

Tal seqüência será feita da forma: 1º) $\forall x \in \mathbb{N}$, 2º) $\forall x \in \mathbb{Z}$, 3º)$\forall x \in \mathbb{Q}$ até finalizar em 4º) $\forall x \in \mathbb{R}$.

1º $\forall x \in \mathbb{N}$

Mostraremos por indução que para todo $x = n \in \mathbb{N}$, $g(x) = g(1) \cdot x$:

Para $x = n = 1$, temos facilmente que, $g(1) = g(1) \cdot 1$;

Para $x = n = 2$, temos $g(2) = g(1) + g(1) = 2g(1) = g(1) \cdot 2$;

Por indução, supondo que para um n natural arbitrário podemos escrever: $g(n) = g(1) \cdot n$. Vamos mostrar que para $n+1$ temos:

$$g(n+1) = g(1) \cdot (n+1).$$

Calculando g em $n+1$ temos,

$$g(n+1) = g(n) + g(1) = g(1) \cdot n + g(1) = g(1) \cdot (n+1)$$

Portanto,

$$g(x) = g(1) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

2º $\forall x \in \mathbb{Z}$

Mostraremos, que para todo $x = k \in \mathbb{Z}$, onde $k = -n$, com $n \in \mathbb{N}$, $g(k) = g(1) \cdot k$.

Observe que,

$$g(0) = g(n-n) = g(n+(-n)) = g(n) + g(-n),$$

Assim temos

$$g(-n) = g(0) - g(n) = 0 - g(n) = -g(n).$$

Como n é um número natural e já mostramos na etapa anterior que $g(n) = g(1) \cdot n$, $\forall x \in \mathbb{N}$, podemos concluir que

$$g(-n) = g(1)(-n).$$

Assim temos

$$g(x) = g(1) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

3º $\forall x \in \mathbb{Q}$

Mostraremos agora, que para todo $x = \dfrac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}^*$ vale que $g(x) = g(1) \cdot x$.

Note que,

$$ng\left(m/n\right) = g\left(m/n\right) + g\left(m/n\right) + ...g\left(m/n\right).$$

Como já sabemos que g reparte a soma,

$$ng\left(m/_{n}\right) = \underbrace{g\left(\frac{m}{n} + \ldots + \frac{m}{n}\right)}_{n \text{ parcelas}} = g\left(n\frac{m}{n}\right) = g(m) = g(1)\cdot m.$$

Dividindo por $n \neq 0$, temos

$$g\left(m/_{n}\right) = g(1)\cdot\frac{m}{n}.$$

Ou, ainda

$$g(x) = g(1)\cdot x \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Assim, mostramos a validade do item (ii) também para os números racionais.

4º $\forall x \in \mathbb{R}$

Para finalizar esta demonstração vamos mostrar que o item (ii) vale para todo número real e para isto, mais uma vez, precisaremos utilizar a hipótese de que a função g seja monótona.

Vamos mostrar para a situação de g ser uma função crescente. O caso de ser decrescente é análogo.

Sejam x um número real qualquer e $m_1/_{n_1}$ e $m_2/_{n_2}$ dois números racionais tais que

$$\frac{m_1}{n_1} < x < \frac{m_2}{n_2} \quad (2)$$

Como g é crescente temos

$$g\left({}^{m_1}\!\big/_{n_1}\right) < g(x) < g\left({}^{m_2}\!\big/_{n_2}\right).$$

Como já mostramos na etapa anterior para números racionais

$$g(1)\cdot {}^{m_1}\!\big/_{n_1} < g(x) < g(1)\cdot {}^{m_2}\!\big/_{n_2}.$$

Ou ainda, como $g(1) \neq 0$,

$${}^{m_1}\!\big/_{n_1} < \frac{g(x)}{g(1)} < {}^{m_2}\!\big/_{n_2} \quad (3)$$

Comparando (2) e (3), podemos concluir que quaisquer racionais que cercam o número real x, também cercam o número real ${}^{g(x)}\!\big/_{g(1)}$ e aplicando um resultado de Análise Real, que mostra que, entre dois números reais existe sempre um número racional, temos:

$$\frac{g(x)}{g(1)} = x.$$

Ou, ainda

$$g(x) = g(1)\cdot x\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Já foi mostrado em (i), $g(1) \neq 0$. Logo, podemos representar g como sendo $g(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Prova do item (b)

Supondo que g seja uma função linear não nula. No item anterior, mostramos que g reparte a soma, e é imediato que uma função linear é contínua.

Agora a recíproca. Supondo que g é contínua e reparte a soma, vamos mostrar que g é uma função linear, ou seja, $g(x) = g(1) \cdot x$, para todo x real com $g(1) \neq 0$.

A demonstração é idêntica à apresentada no item (a) até a 4ª etapa, no qual mostramos que $g(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{Q}$. A diferença será na justificativa de sua validade de $g(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}$, na qual iremos precisar de resultados de Análise Real.

Sejam x um número irracional e x_n uma seqüência de números racionais (com n natural) tal que x_n tende a x à medida que n aumenta. Usando a notação de limites podemos escrever

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \quad (1)$$

Sendo g uma função contínua, temos que g em x_n tende a g em x à medida que n cresce:

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g(x_n).$$

Sendo $x_n \in \mathbb{Q}$, temos que $g(x_n) = g(1)x_n$, logo

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g(1)x_n.$$

Como g(1) é uma constante real,

$$g(x) = g(1) \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Desta forma, por (1), temos

$$g(x) = g(1)\lim_{n\to\infty} x_n = g(1)x.$$

Logo,

$$g(x) = g(1)\cdot x\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

Assim, conclui-se que g é uma função linear.

Observamos que, se no Teorema 3.2, se não estivéssemos supondo que a função é monótona ou contínua, poderíamos concluir apenas que $g(x) = g(1)\cdot x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$. Para estendermos este resultado para os números irracionais, é fundamental que tenhamos uma destas condições. Caso o leitor tenha interesse em obter exemplos que comprovem a necessidade das condições de continuidade ou de monotonicidade da função, pode obtê-lo na bibliografia apresentada na referência (1) que consta na página 31.

Os Teorema 3.3 e Teorema 3.4 que serão apresentados a seguir, além de caracterizarem as funções afins[3], servem como base para a caracterização das funções quadráticas que veremos no próximo capítulo.

3.2.5 *Teorema 3.3: Segunda Caracterização das Funções Afins*

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função monótona, supondo que:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) - f(0) \text{ para todo } x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Então f é uma função afim.

---

[3] No livro, A Matemática do Ensino Médio, Elon Lages Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado. os autores apresentam de maneira similar a Caracterização das funções afins, nas páginas 98 a 102.

Prova

Seja g uma FRVR definida como $g(x) = f(x) - f(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que g é uma função linear não nula, para que tenhamos f uma função afim.

Pelo Teorema 3.2 (a), mostrar que g é linear e não nula é equivalente a mostrar que g é monótona e reparte a soma. E é isto que vamos demonstrar.

Para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos

$$g(x_1 + x_2) = f(x_1 + x_2) - f(0).$$

Como por hipótese

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) - f(0) \text{ para todo } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Temos que

$$g(x_1 + x_2) = f(x_1 + x_2) - f(0) = f(x_1) + f(x_2) - f(0) - f(0).$$

Ou, ainda

$$g(x_1 + x_2) = \left(f(x_1) - f(0)\right) + \left(f(x_2) - f(0)\right) = g(x_1) + g(x_2).$$

Assim temos que g reparte a soma.

Agora, vamos mostrar que g é monótona e não nula.

Observe que, por hipótese, sabemos que a função f é monótona, como g é obtida a partir de uma translação vertical de f(0) unidades em cada ponto do gráfico de f, g também será monótona, e assim, não repete valores, portanto, $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$.

Desta forma, pelo Teorema 3.2 (a), temos que g é linear não nula. Assim, $g(x) = ax$, com $a \neq 0$. Isto nos permite concluir que a função f é uma função afim.

3.2.6 *Teorema 3.4: Terceira Caracterização das Funções Afins*

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua, supondo que:

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)-f(0) \text{ para todo } x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

Então f é uma função afim.

Prova:

Para demonstrarmos este teorema, faremos o mesmo que no Teorema 3.3, tomaremos uma função g uma FRVR definida como $g(x)=f(x)-f(0), \forall x\in\mathbb{R}$.

Vamos mostrar que g é uma função linear, para que tenhamos f uma função afim.

Pelo Teorema 3.2 (b), mostramos que g é linear é equivalente a mostrar que g é contínua e reparte a soma. E é isto que vamos demonstrar.

Já mostramos no Teorema 3.3 que g reparte a soma.

Por hipótese temos que f é contínua. Como g é obtida a partir de uma translação vertical de f(0) unidades em cada ponto do gráfico de f, g também será contínua.

Assim, temos que g é linear e, consequentemente, f é uma função afim.

Para finalizar o estudado das funções afins, vamos apresentar a seguir, a sua caracterização, utilizando a taxa de variação de segunda ordem.

3.2.7 *Teorema 3.5*

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua. Então f é afim se e somente se $V^2_{h,k}(x)=0$, para todo x e $h,k\neq 0$.

Prova

Seja $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ uma função afim. Vamos mostrar que a taxa de variação de 2ª ordem de f é nula.

Como já sabemos, a taxa de variação de f com relação a um incremento $h \neq 0$ é o parâmetro a da função

$$V_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a.$$

Vamos agora determinar a taxa de variação de V_h em relação a um incremento $k \neq 0$:

$$V^2_{h,k}(x) = \frac{V_h(x+k) - V_h(x)}{k} = \frac{a-a}{k} = 0.$$

Agora a recíproca, vamos mostrar que se $V^2_{h,k}(x) = 0$ para todo x e $h, k \neq 0$ então a função é afim.

Por hipótese, temos que

$$V^2_{h,k}(x) = \frac{V_h(x+k) - V_h(x)}{k} = 0 \text{ com } h, k \neq 0.$$

Assim temos que $V_h(x+k) = V_h(x)$ para todo $h, k \neq 0$.

Tomando $x = 0$ segue que $V_h(k) = V_h(0)$, ou seja,

$$V_h(k) = \frac{f(k+h) - f(k)}{h} = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = V_h(0).$$

E assim, $f(k+h) = f(k) + f(h) - f(0)$ para todo $h, k \neq 0$.

Observe que a igualdade acima também é válida quando $h = k = 0$, assim temos que

$$f(k+h) = f(k) + f(h) - f(0) \quad \forall h,k \in \mathbb{R} .$$

Desta forma, temos que f é uma função afim, pelo Teorema 3.4.

Fizemos neste capítulo um estudo de aspectos fundamentais que envolvem as funções afins, ao mesmo tempo, que fizemos uma construção que servirá como base para nosso próximo estudo, referente às funções quadráticas.

4 ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

4.1 DEFINIÇÃO 4.1: FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função quadrática é uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, que pode ser expressa na forma $f(x)=ax^2+bx+c$, onde a, b, c são constantes reais, com $a\neq 0$.

As constantes a, b, c são chamadas de coeficientes ou parâmetros da função quadrática.

4.1.1 *Exemplo 4.1*

$$f(x)=-7x^2-\frac{2}{3}x+6\ ,\ g(x)=x^2-\sqrt[3]{4}x-9\ ,\ h(x)=\pi x^2 \text{ e } r(x)=-5x^2-1.$$

4.2 LEMA 4.1

Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função quadrática e $x_0\in\mathbb{R}$. Então,

i. f é crescente em uma vizinhança de x_0, então $V_h(x_0)>0$ para todo h suficientemente pequeno;

ii. f é decrescente em uma vizinhança de x_0, então $V_h(x_0)<0$ para todo h suficientemente pequeno.

Prova do item (i)

Vamos supor que f seja crescente em uma vizinhança de x_0, ou seja, supor que existe $\delta>0$ tal que para $x_1,x_2\in(x_0-\delta,x_0-\delta)$ com $x_1<x_2$, temos que $f(x_1)<f(x_2)$.

Seja $h \in \mathbb{R}$, com $|h| < \frac{\delta}{2}$.

Assim, temos que

$$-\frac{\delta}{2} < h < \frac{\delta}{2}.$$

Somando x_0 na desigualdade anterior,

$$x_0 - \frac{\delta}{2} < x_0 + h < x_0 + \frac{\delta}{2}$$

e, ainda

$$x_0 - \delta < x_0 - \frac{\delta}{2} < x_0 + h < x_0 + \frac{\delta}{2} < x_0 + \delta.$$

Então $x_0 + h \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[$, intervalo, no qual, por hipótese, a função é crescente.

Desta forma temos que, para $h > 0$, como $x_0 < x_0 + h \Rightarrow f(x_0) < f(x_0 + h)$.

De modo que

$$V_h(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0.$$

Se $h < 0$, como $x_0 + h < x_0 \Rightarrow f(x_0 + h) < f(x_0)$.

De modo que

$$V_h(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0.$$

Decorre, então, que $V_h(x_0) > 0$, para $|h| < \frac{\delta}{2}$, $h \neq 0$.

Prova do item (ii)

A demonstração deste item segue os mesmos passos da demonstração anterior.

Observamos que, no caso das funções quadráticas, temos que as recíprocas dos itens (i) e (ii) do Lema 4.1 são verdadeiras, ou seja, se $V_h(x_0) > 0$ ($V_h(x_0) < 0$) para todo h suficientemente pequeno, então f é crescente (decrescente) em uma vizinhança de x_0. Vamos mostrar a seguir a validade para o caso de $V_h(x_0) > 0$, já que a prova é análoga para a outra situação.

Sendo $V_h(x_0) > 0$ para todo h suficientemente pequeno e seja a função quadrática,

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ com } a \neq 0.$$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ suponha que exista $\varepsilon > 0$ tal que a taxa de variação em x_0 com um incremento $|h| < \varepsilon$ e $h \neq 0$ seja positiva

$$V_h(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2ax_0 + b + ah > 0$$

Como $a \neq 0$, temos que $2ax_0 + b \neq 0$, pois se isto não acontecesse, teríamos que $V_h(x_0) = ah$ e não teríamos $V_h(x_0) > 0$ para todo $|h| < \varepsilon$ e $h \neq 0$. Por esta mesma razão não podemos ter também que $2ax_0 + b < 0$. Logo, $2ax_0 + b > 0$.

Vamos mostrar agora que f é crescente em um intervalo aberto contendo x_0.

Dados x_1, x_2 com $x_1 < x_2$, podemos escrever, $x_1 = x_0 + s$ e $x_2 = x_0 + t$, com $s < t$. Então,

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_0 + t) - f(x_0 + s).$$

Utilizando a função dada, vemos que esta última igualdade é equivalente à:

$$a\left((x_0+t)^2-(x_0+s)^2\right)+b\left((x_0+t)-(x_0+s)\right)=(t-s)\left[(s+t)a+b+2ax_0\right].$$

Como $2ax_0+b>0$ e como $(s+t)a$ torna-se arbitrariamente pequeno quando $s,t\cong 0$ tem-se $(s+t)a+b+2ax_0>0$ para s, t suficientemente pequenos, digamos $s,t\in(-\delta,\delta)$ para algum $\delta>0$. Como $s<t$, segue que

$$(t-s)\left[(s+t)a+b+2ax_0\right]>0,\ \forall s,t\in(-\delta,\delta).$$

Segue que $f(x_2)-f(x_1)>0$, ou ainda, $f(x_2)>f(x_1)$ para $x_1,x_2\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ com $x_1<x_2$, provando que a função é localmente crescente.

Afirmamos que podemos tomar para δ o valor

$$\delta=\frac{b+2ax_0}{4|a|}.$$

De fato, com esta escolha de δ, se $|s|,|t|<\delta$ vem

$$\begin{aligned}(s+t)a+b+2ax_o &\geq -(|s|+|t|)|a|+b+2ax_0\\ &\geq -2\delta|a|+b+2ax_0\\ &=\frac{-(b+2ax_o)}{2}+b+2ax_0\\ &=\frac{b+2ax_0}{2}>0.\end{aligned}$$

Para melhor compreensão dos resultados apresentados no Lema 4.1, vamos aplicá-lo no exemplo que segue.

4.2.1 *Exemplo 4.2*

Seja a função quadrática $q(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Dados $x, h \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$, temos

$$V_h(x) = \frac{q(x+h) - q(x)}{h} = 3h + 6x - 2.$$

Vamos analisar se os pontos a seguir são de crescimento ou de decrescimento.

Por exemplo, $x = 1$ então $V_h(1) = 3h + 4$, de modo que $V_h(1) > 0$ para $|h| < 4/3$.

Pelo Lema 4.1, q é crescente em (1, q(1)) .

Se $x = -1, V_h(-1) = 3h - 8$. Temos que $V_h(-1) < 0$, para $|h| < 8/3$ e pelo Lema 4.1, temos que a função é decrescente em $(-1, q(-1))$.

Agora, veremos o Teorema 4.1, que fornece um critério mais direto, sem depender da análise de h, para saber se um dado ponto é de crescimento ou de decrescimento.

4.3 ESTUDO DO CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Vamos agora provar o Teorema 2.1, no caso das funções quadráticas.

4.3.1 *Teorema 4.1*

i. Se $V_0(x_0) > 0$ em um ponto $P(x_0, f(x_0)) \in gr(f)$, então f é crescente em P, ou ainda, P é um ponto de crescimento de f.

ii. Se $V_0(x_0) < 0$ em um ponto $P(x_0, f(x_0)) \in gr(f)$, então f é decrescente em P, ou ainda, P é um ponto de decrescimento de f.

iii. Se $P(x_0, f(x_0)) \in gr(f)$ é ponto de mudança então $V_0(x_0) = 0$.

Prova do item (i)

Vamos primeiro mostrar que se $V_0(x_0) > 0$ então a função é crescente.

Seja a função quadrática,

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ com } a \neq 0.$$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, a taxa de variação em x_0 com um incremento $h \neq 0$:

$$V_h(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2ax_0 + b + ah.$$

Determinando a taxa de variação infinitesimal em x_0 teremos

$$V_0(x_0) = 2ax_0 + b > 0.$$

Como $V_h(x_0) = 2ax_0 + b + ah$, temos que para h suficientemente pequeno $V_h(x_0) > 0$.

Assim, recaímos no Lema 4.1, que nos mostra que a função é crescente em $(x_0, f(x_0))$.

Prova do item (ii)

A demonstração deste item segue os mesmos passos da demonstração anterior.

Prova do item (iii)

Já demonstrado no Teorema 2.1.

No Exemplo 4.3, a ser apresentado a seguir, iremos nos referir ao Exemplo 4.2, no qual utilizamos o Lema 4.1. Propomos, neste exemplo, a aplicação do Teorema 4.1, como forma de comparar as duas resoluções.

4.3.1.1 Exemplo 4.3

Consideremos o Exemplo 4.2 cuja função quadrática é dada por

$$q(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

No Exemplo 4.2, determinamos a taxa de variação de q dados $x, h \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$:

$$V_h(x) = \frac{q(x+h) - q(x)}{h} = 3h + 6x - 2.$$

Vamos agora analisar se a função é crescente ou decrescente nos pontos $(1, q(1))$ e $(-1, q(-1))$, utilizando o Teorema 4.1.

Para isto, precisamos determinar a taxa de variação infinitesimal da função q em x

$$V_0(x) = 6x - 2.$$

Comecemos com o ponto $(1, q(1))$: quando $x = 1$ temos que $V_0(1) = 4 > 0$.

Pelo Teorema 4.1, a função q é crescente em $(1, q(1))$.

Agora o ponto $(-1, q(-1))$: quando $x = -1$, temos que $V_0(-1) = -8 < 0$.

Pelo Teorema 4.1, a função q é decrescente em $(-1, q(-1))$.

Apresentamos, nos Exemplos 4.2 e 4.3, duas formas diferentes de determinar se um ponto do gráfico da função é de crescimento ou decrescimento. Comparando os dois procedimentos, é evidente que o uso da taxa de variação infinitesimal possibilitou uma análise de forma mais direta, pois nela não precisamos nos preocupar em estimar valores para h.

Note que na prática, o uso do Teorema 4.1 como foi dito, é mais direto, mas não podemos deixar de reconhecer a importância do Lema 4.1, como suporte teórico para obtermos este resultado.

4.3.2 *Teorema 4.2*

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função quadrática. Então, f tem um único ponto de mudança (x_0, y_0), que é um ponto de máximo absoluto quando $a<0$ e um ponto de mínimo absoluto quando $a>0$.

Além disso, x_0 é obtido resolvendo a equação $V_0(x)=0$.

Prova

Suponha $f(x)=ax^2+bx+c$ com $a\neq 0$. Conforme já observamos, se f tem um ponto de mudança (x_0, y_0), então $V_0(x_0)=0$. Portanto,

$$V_0(x)=2ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}.$$

Desta forma temos que

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

Vemos então que $V_0(x)\neq 0\ \forall x\neq x_0$.

Primeiro, vamos observar que, sendo $V_0(x) = 2ax + b$, estas situações não podem ocorrer:

$V_0(x) > 0, \forall x \neq x_0$ ou $V_0(x) < 0, \forall x \neq x_0$.

Assim,

i) $V_0(x) > 0$ para todo $x \in]-\infty, x_0[$ e $V_0(x) < 0$ para todo $x \in]x_0, +\infty[$.

Ou

ii) $V_0(x) < 0$ para todo $x \in]-\infty, x_0[$ e $V_0(x) > 0$ para todo $x \in]x_0, +\infty[$.

Vamos ver em que condições (i) e (ii) ocorrem:

(i) $V_0(x) > 0$ é equivalente a $2ax + b > 0$, dependendo do sinal de a temos as situações:

— Se $a > 0$, temos que $x > -\frac{b}{2a} = x_0$;

— Se $a < 0$, temos $x < -\frac{b}{2a} = x_0$.

(ii) $V_0(x) < 0$, temos $x < -\frac{b}{2a} = x_0$ quando $a > 0$ e $x > -\frac{b}{2a} = x_0$ quando $a < 0$.

Logo, para $a > 0$, temos que

— $V_0(x) > 0$ quando $x > x_0$, ou seja, $\forall x \in]x_0, +\infty[$ e

— $V_0(x) < 0$ quando $x < x_0$, ou seja, $\forall x \in]-\infty, x_0[$.

Assim, x_0 é ponto de mínimo absoluto de f.

Para $a < 0$, temos que

— $V_0(x) > 0$ quando $x < x_0$, ou seja, $\forall x \in \left]-\infty, x_0\right[$ e

— $V_0(x) < 0$ quando $x > x_0$, ou seja, $\forall x \in \left]x_0, +\infty\right[$.

Assim, x_0 é ponto de máximo absoluto de f.

A seguir, iremos apresentar o resultado do Teorema 4.2, em termos dos coeficientes da função quadrática.

4.3.3 *Corolário 4.1*

Seja uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Então valem:

i. Se $a > 0$, a função é crescente para $x \geq -b/2a$ e decrescente para $x \leq -b/2a$;

ii. Se $a < 0$, a função é crescente para $x \leq -b/2a$ e decrescente para $x \geq -b/2a$;

iii. Se $a > 0$ o ponto $\left(-b/2a, f(-b/2a)\right)$ é ponto de mínimo absoluto e se $a < 0$ o ponto $\left(-b/2a, f(-b/2a)\right)$ é ponto de máximo absoluto da função.

Prova

Imediata dos Teoremas 4.1 e 4.2.

4.4 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Passaremos agora, a estudar algumas aplicações dos pontos de máximo e mínimo absolutos para resolver problemas de otimização descritos por funções quadráticas. Matematicamente, estes problemas visam à determinação do maior ou menor valor da função em um intervalo, assim como onde ocorre este valor.

A resolução destes problemas será apresentada em duas etapas:

1ª) Organização dos dados e obtenção da função que descreve a situação apresentada;

2ª) Resolução do problema a partir da função obtida na etapa anterior.

Usualmente, no Ensino Médio, para a resolução destes problemas, o aluno memoriza e aplica de forma "mecânica" o Corolário 4.1, sem saber o seu significado e nem como é obtido.

Nossa proposta é que através dos problemas apresentados a seguir, o aluno passe pelas principais etapas da demonstração dos Teoremas 4.1 e 4.2, podendo assim, a partir do conceito de taxa de variação infinitesimal e de toda teoria acerca deste conceito, resolver tais problemas, fazendo suas próprias elaborações sobre a teoria e, quem sabe até, estabelecendo conclusões que lhe permitam eliminar algumas das etapas de resolução à medida que compreende os conceitos envolvidos.

Busca-se com isso, que o aluno compreenda o processo envolvido, evitando reduzir tal estudo a uma mera memorização e aplicação de fórmulas, que muito distantes estão do objetivo do real ensino de Matemática.

4.4.1 *Exemplo 4.4*

Quais as dimensões de um retângulo com perímetro 100 cm, cuja área é a maior possível? [4]

[4] Howard Anton. Bookman. Cálculo um novo horizonte, página 339

Solução

1ª etapa

Vamos considerar um retângulo com lados x e y, com a condição de que $x, y > 0$. (1)

Embora as funções quadráticas sejam FRVR que, por definição, têm domínio $\mathbb{R}$, estamos interessados em seu comportamento apenas para $x, y > 0$, dito domínio contextual da função.

Sabendo que o perímetro do retângulo é 100 cm, temos que

$$2x + 2y = 100.$$

Ou ainda,

$$x + y = 50 \quad (2)$$

A área do retângulo é dada por

$$A(x, y) = xy.$$

A nossa questão é determinar a medida dos lados do retângulo que tem área máxima, segundo as condições (1) e (2).

A partir de (2), vamos escrever y em função de x e substituir na expressão da área

$$\begin{aligned} y &= 50 - x \\ A(x) &= 50x - x^2. \end{aligned} \quad (3)$$

2ª etapa

Devemos, agora, determinar x para que $A(x) = 50x - x^2$ atinja seu valor máximo, lembrando que este retângulo tem lados x e y, onde $y = 50 - x$ e ainda $x, y > 0$.

Para aplicarmos o Teorema 4.1, precisamos determinar a taxa de variação para, posteriormente, obter a taxa de variação infinitesimal

$$V_h(x) = \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{50(x+h) - (x+h)^2 - (50x - x^2)}{h} = 50 - 2x - h.$$

Pela Definição 2.2 de taxa de variação infinitesimal, teremos

$$V_0(x) = 50 - 2x.$$

Pelo Teorema 4.2, como $a = -1 < 0$, já podemos concluir que para $x = 25$, o ponto é de máximo da função. Porém, propomos que o aluno obtenha esta relação, para isto utilizamos a seguinte argumentação, conforme o que foi apresentado no Teorema 4.1.

Vamos determinar, agora, os intervalos no qual a taxa de variação infinitesimal é positiva e onde é negativa:

$$V_0(x) = 50 - 2x > 0 \leftrightarrow x < 25$$
$$V_0(x) = 50 - 2x < 0 \leftrightarrow x > 25.$$

Portanto, a função é crescente em $x < 25$ e decrescente em $x > 25$.

Assim, o ponto de mudança ocorre em $x = 25$ cm, cujas coordenadas são $(25, A(25)) = (25,625)$.

A partir da interpretação dos intervalos de monotonicidade, temos que este ponto é de máximo da função área.

Determinando a medida do outro lado do retângulo, temos que

$$x = 25$$
$$y = 50 - 25 = 25.$$

Logo, o retângulo de área máxima é um quadrado cujos lados medem 25 cm, correspondendo a área de 625 cm^2.

4.4.2 *Exemplo 4.5*

Dentre os retângulos de perímetro fixo P, qual o de área máxima?

Solução

1ª etapa

Vamos considerar um retângulo com lados x e y, com a condição de $x, y > 0$. (1)

Sabendo que o perímetro do retângulo é P, temos que

$$2x + 2y = P.$$

Ou ainda,

$$x + y = \frac{P}{2} \quad (2)$$

A área do retângulo é dada por

$$A(x, y) = xy.$$

A nossa questão é determinar a medida dos lados do retângulo que tem área máxima, segundo as condições (1) e (2).

A partir de (2), vamos escrever y em função de x e substituir na expressão da área

$$y = \frac{P}{2} - x$$
$$A(x) = \frac{P}{2}x - x^2. \qquad (3)$$

2ª etapa

Vamos seguir as mesmas etapas apresentadas no exemplo anterior, iniciando pela determinação da taxa de variação da função

$$V_h(x) = \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{\frac{P}{2}(x+h) - (x+h)^2 - (\frac{P}{2}x - x^2)}{h} = \frac{P}{2} - 2x - h.$$

Desta forma, a taxa de variação infinitesimal, será:

$$V_0(x) = \frac{P}{2} - 2x.$$

Determinemos os intervalos onde a taxa de variação infinitesimal é positiva e onde é negativa

$$V_0(x) = \frac{P}{2} - 2x > 0 \leftrightarrow x < \frac{P}{4}$$
$$V_0(x) = \frac{P}{2} - 2x < 0 \leftrightarrow x > \frac{P}{4}.$$

Logo, a função é crescente em $x < \frac{P}{4}$ e decrescente em $x > \frac{P}{4}$.

Assim, o ponto de mudança ocorre em $x = \frac{P}{4}$, portanto, podemos escrevê-lo como

$$\left(\frac{P}{4}, A\left(\frac{P}{4}\right)\right) = \left(\frac{P}{4}, \frac{P^2}{16}\right).$$

Pelo Teorema 4.2, como $a = -1 < 0$, já podemos concluir que para $x = \frac{P}{4}$, o ponto é de máximo da função. Porém, mais uma vez, propomos que o aluno obtenha este resultado, para isto apresentamos a seguinte argumentação, apresentada no Teorema 4.1. Por meio dos intervalos de monotonicidade temos que o ponto de mudança é o ponto de máximo da função, assim temos que área máxima é $\frac{P^2}{16}$ e ocorre quando um de seus lados mede $\frac{P}{4}$ cm.

Como precisamos determinar o retângulo que possui área máxima, precisamos determinar a medida do outro lado deste retângulo

$$x = \frac{P}{4}$$
$$y = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4}.$$

Logo, o retângulo de área máxima é um quadrado de lados $\frac{P}{4}$ uc.

4.4.3 *Exemplo 4.6*

Um terreno será cercado de forma que dois lados opostos devem receber uma cerca reforçada que custa R$3,00 o metro, enquanto que os dois lados restantes recebem uma cerca de R$2,00 o metro. Quais as dimensões do terreno de maior área que pode ser cercado com R$6000,00?

Solução

1ª etapa

Consideremos um terreno retangular com lados x e y, com a condição de que $x, y > 0$. (1)

Sejam x cada um dos lados cujo metro de cerca custa 3 reais e y cada um dos lados cujo metro custa 2 reais.

O custo para cercar o terreno é de 6000 reais, portanto, podemos escrever a equação

$$6x + 4y = 6000 .$$

Ou ainda,

$$y = 1500 - \frac{3}{2}x . \quad (2)$$

Queremos determinar as dimensões do terreno de maior área satisfazendo as condições (1) e (2).

A área do terreno é dada por

$$A(x, y) = xy .$$

Substituindo (2) na função acima,

$$A(x) = 1500x - \frac{3}{2}x^2 .$$

2ª etapa

Vamos buscar o ponto de máximo da função área, determinando, inicialmente, a sua taxa de variação

$$V_h(x) = \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{1500(x+h) - \frac{3}{2}(x+h)^2 - (1500x - \frac{3}{2}x^2)}{h} = 1500 - 3x - \frac{3}{2}h.$$

Pela Definição 2.2 de Taxa de variação infinitesimal, temos que

$$V_0(x) = 1500 - 3x.$$

Portanto,

$$V_0(x) = 1500 - 3x > 0 \leftrightarrow x < 500$$
$$V_0(x) = 1500 - 3x < 0 \leftrightarrow x > 500.$$

Desta forma, pelo Teorema 4.1, a função é crescente em $x < 500$ e decrescente em $x > 500$.

Assim, o ponto de mudança ocorre em $x = 500$, portanto, podemos escrevê-lo como

$$(500, A(500)) = (500, 375000).$$

E pela análise dos intervalos onde a função é crescente e decrescente, temos que o ponto de mudança é o ponto de máximo da função. Pode-se também obter este resultado a partir do Teorema 4.2, já que $a = -3/2 < 0$.

Assim, temos que a área máxima é $375000\,m^2$ e ocorre quando um de seus lados mede 500 m.

Determinando a medida do outro lado do retângulo temos o que segue

$$x = 500$$
$$y = 1500 - \frac{3}{2}500 = 750.$$

Logo, o terreno que possui maior área, com o custo apresentado é de 500 m x 750 m.

4.5 CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS

4.5.1 *Teorema 4.3: Caracterização das Funções Quadráticas*

Seja f uma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Então f é quadrática, se e somente se, $V^2_{h,k}(x) = d \neq 0$, para todo $h,k \neq 0$.

Prova

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a,b,c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, uma função quadrática.

Determinando a taxa de variação para função f com relação a um incremento $h \neq 0$:

$$V_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2ax + b + ah.$$

Vamos agora determinar a taxa de variação de V_h em relação a um incremento $k \neq 0$:

$$V^2_{h,k}(x) = \frac{V_h(x+k) - V_h(x)}{k} = \frac{2a(x+k) + b + ah - 2ax - b - ah}{k} = 2a.$$

Como a é uma constante real não nula, tomamos $d = 2a$.

Assim, mostramos que nas funções quadráticas a taxa de variação de 2ª ordem é uma constante não nula.

Vamos mostrar agora que, se a taxa de variação de 2ª ordem de f é constante $d \neq 0$, então a função é quadrática.

Seja $z(x) = f(x) - \frac{dx^2}{2}$.

Então, dado $h \neq 0$, denominando $W_h(x)$ a função taxa de variação de z relativa à h, temos

$$W_h(x) = \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x) - \frac{d(x+h)^2}{2} + \frac{dx^2}{2}}{h} =$$
$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{\frac{d(x+h)^2}{2} - \frac{dx^2}{2}}{h} = V_h(x) - \frac{1}{2}dh - dx.$$

De modo que,

$$W_{h,k}^2(x) = \frac{W_h(x+k) - W_h(x)}{k}$$
$$W_{h,k}^2(x) = \frac{V_h(x+k) - d(x+k) - \frac{1}{2}dh - \left(V_h(x) - dx - \frac{1}{2}dh\right)}{k} =$$
$$= \frac{V_h(x+k) - V_h(x)}{k} - d =$$
$$= d - d = 0.$$

Pelo Teorema 3.5, temos que z é uma função afim, ou seja, $z(x) = bx + c$.

Assim,

$$bx + c = f(x) - \frac{dx^2}{2}$$
$$f(x) = \frac{d}{2}x^2 + bx + c,$$

O que conclui a prova do teorema.

Observa-se que o resultado apresentado no Teorema 4.3 é falso se não supusermos a função f como sendo contínua. Um contra-exemplo seria uma função da forma $f(x) = x^2 + g(x)$, onde g(x) é uma função que reparte a soma, mas não é uma função linear, ou seja, g(x) é uma função que serve como contra-exemplo para o Teorema 3.2 de Caracterização das Funções Lineares, conforme comentamos. Esta função f tem taxa de variação de segunda ordem constante e igual a 2, mas não é uma função quadrática.

A seguir, utilizando os resultados desenvolvidos até aqui, vamos iniciar o estudo do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.

4.6 APLICAÇÃO DE TAXA DE VARIAÇÃO NA DEFINIÇÃO E DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DO MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

O movimento retilíneo uniformemente variado, MRUV, é assunto da Física estudado em um dos seus ramos chamado de Cinemática e ensinado, em geral, no primeiro ano do Ensino Médio (EM). Na modelagem matemática do MRUV é importante o conceito matemático de função, especialmente o de função afim e quadrática.

Apesar de ser um fenômeno físico aparentemente simples, existem dois problemas que não são simples na descrição matemática do MRUV para o EM:

a) o estabelecimento de uma definição matemática precisa, ao nível do EM, do MRUV;
b) a obtenção, com a Matemática do EM, da fórmula da distância em função do tempo no MRUV.

Segundo a Cinemática, o MRUV é caracterizado como o movimento de um objeto pontual sobre uma reta cuja velocidade escalar varia uniformemente. Isto significa que existe uma constante <u>a</u> tal que, se em dois instantes distintos quaisquer t_1 e t_2 o objeto tem velocidades v_1 e v_2, então

$$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = a.$$

Logicamente, portanto, a descrição matemática de MRUV pressupõe, primeiro, a descrição ou definição matemática do que é um objeto pontual em movimento retilíneo e, na seqüência, a definição de velocidade v, em um dado instante t, deste objeto.

A primeira parte, ou seja, a descrição matemática de um objeto pontual O em Movimento Retilíneo (MR) é fácil de levar a termo:

Inicialmente, recordando que MR é o movimento que ocorre sobre uma reta, vamos modelar matematicamente o MR, supondo que o movimento ocorra sobre uma reta euclidiana r e que o objeto O seja pontual (Figura 11).

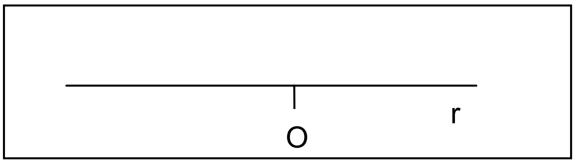


FIGURA 11: Reta euclidiana

Para descrever matematicamente o movimento de O, fixamos um sistema de coordenadas em r (Figura 12).

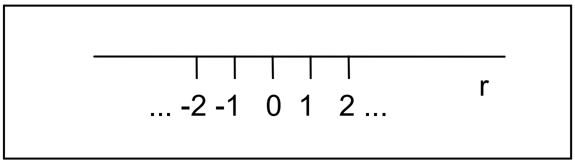


FIGURA 12: Reta euclidiana com um sistema de coordenadas

Assim, pelo Teorema Fundamental da Geometria Analítica, existe uma correspondência biunívoca entre r e $\mathbb{R}$ que associa, a cada ponto P de r, um número real $x(P)$ dito abscissa de P (Figura 13).

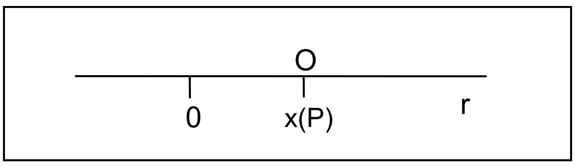


FIGURA 13: Correspondência biunívoca entre r e $\mathbb{R}$

Em um dado instante t, o objeto, por ser pontual, está sobre um único ponto P_t de r, que tem como abscissa o número real $x(P_t)$, que para simplificar denotamos por x(t). Assim, o movimento de O sobre r é, matematicamente, descrito por uma função real $x:[0,T] \to \mathbb{R}$ (onde T é o tempo de duração do movimento, podendo-se ter eventualmente $T = \infty$ se o movimento continuar indefinidamente).

Para facilitar a descrição matemática do MRUV, vamos supor $x:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Isto equivale a dizer, que o objeto se desloca desde um passado infinitamente remoto até um futuro infinitamente distante. Contudo, observamos que seria possível chegar às mesmas conclusões se considerássemos $x:[0,T] \to \mathbb{R}$.

Há, portanto, duas representações possíveis (Figura 14):

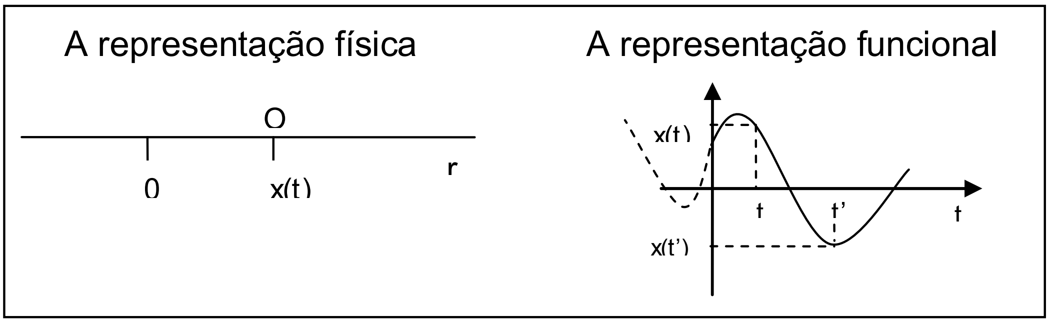


FIGURA 14: Representações física e funcional do movimento

Vejamos agora como definir a velocidade de O em um dado instante t.

Em um instante $s \neq t$, o objeto O se encontra em um ponto P_s de abscissa x(s) e, para chegar ao ponto P_t, ele levará um tempo $t - s$. Neste intervalo de tempo, que podemos denotar por $\Delta t \neq 0$ $(\Delta t = t - s)$, o objeto vai se deslocar $\Delta x := x(t) - x(s)$, desenvolvendo, portanto, a velocidade média

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1)$$

A velocidade instantânea de O em t deve ser o valor deste quociente quando $\Delta t(\neq 0)$ torna-se muito próximo de zero, ou seja, quando s se aproxima indefinidamente de t.

Assim, definimos a velocidade de O no instante t como o valor “limite” do quociente (1) quando a diferença Δt tende a zero.

O problema aqui é: *como garantir que este valor existe*?

Embora a existência deste valor seja fisicamente óbvia, matematicamente não é. O processo de Δt tornar-se indefinidamente próximo de zero não termina nunca ou só terminaria quando $\Delta t = 0$. Mas, neste caso limite, o quociente acima resulta em uma divisão por zero, o que não faz sentido entre números reais. Assim, um raciocínio direto para definir matematicamente velocidade instantânea, forçosamente, nos leva a um conflito.

Em resumo, não é possível, com o uso direto e simples do quociente (1), se chegar a uma definição de velocidade instantânea. Se quisermos continuar utilizando esta abordagem temos, inevitavelmente, que recorrer ao conceito de limite, que dá sentido e torna possível comparar grandezas “infinitamente pequenas”, ou seja, adentrar ao estudo do Cálculo Infinitesimal, o que foge do nível de Ensino Médio. Portanto, a solução deste impasse tem que obviamente se dar por alguma outra via.

Uma via que vamos mostrar aqui e que pode ser utilizada no EM, faz uso da função velocidade média.

4.6.1 *Definição 4.2: Função velocidade média*

Fixado um intervalo de tempo $\Delta t \neq 0$, definimos a função velocidade média de O em relação a intervalos de tempo de duração Δt como a função $v_m(t)$ dada por

$$v_m(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad .$$

Observe que a velocidade média em relação a um incremento de tempo Δt é a taxa de variação $V_{\Delta t}$ da função posição x com relação ao incremento Δt.

A notação, $v_m(t)$, apresentada para velocidade média, pode não parecer a melhor a ser utilizada, por não apresentar o intervalo de tempo Δt considerado. Porém, o uso de uma notação mais precisa, como por exemplo, $v_m(t, \Delta t)$ fica por demais pesada, considerando o que, usualmente, é utilizado no Ensino Médio.

Apresentaremos a seguir, um exemplo de aplicação da definição de velocidade média.

4.6.1.1 Exemplo 4.7

Um objeto tem sua posição x, em metros, em relação ao tempo t, em segundos, dada por:

$$x(t) = -t^2 + 30t + 10\,.$$

a) Determinar a função velocidade média em intervalos de tempo de 5 segundos;
b) Determinar a função velocidade média em intervalos de tempo de -10 segundos;
c) Para cada uma das funções obtidas, determinar a velocidade média 6 segundos após o início do movimento.

Solução

a) A função velocidade média em intervalos de tempo Δt, sendo neste caso $\Delta t = 5$, é dada por

$$v_m(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t + 5) - x(t)}{5}\,.$$

Para a função x apresentada, teremos

$$v_m(t) = \frac{x(t+5) - x(t)}{5} = \frac{-(t+5)^2 + 30(t+5) + 10 - (-t^2 + 30t + 10)}{5}$$

$$v_m(t) = \frac{-10t + 125}{5} = (-2t + 25)\,m/s.$$

b) Para $\Delta t = -10$, devemos determinar $v_m(t) = \dfrac{x(t-10) - x(t)}{-10}$.

Considerando a função x, temos que

$$v_m(t) = \frac{x(t-10) - x(t)}{-10} = \frac{-(t-10)^2 + 30(t-10) + 10 - (-t^2 + 30t + 10)}{-10}$$

$$v_m(t) = \frac{+20t - 400}{-10} = (-2t + 40)\,m/s.$$

c) Determinando a velocidade média no instante $t = 6s$, a partir de cada uma das funções determinadas teremos:

Na primeira situação, ao fixarmos $\Delta t = 5$, obtivemos:

$$v_m(t) = (-2t + 25)\,m/s \quad ,$$

Assim, quando $t = 6s$, teremos:

$$v_m(6) = (-2 \cdot 6 + 25) = 13\ m/s\ .$$

Na segunda situação, ao fixarmos $\Delta t = 10$, obtivemos

$$v_m(t) = (-2t + 40)\,m/s \quad ,$$

Assim, quando $t = 6s$, teremos

$$v_m(6) = (-2 \cdot 6 + 40) = 28\ m/s\ .$$

Notemos que o conceito prático, comum, que todos conhecemos de velocidade média embora, em essência, seja o mesmo que o introduzido aqui, eles diferem em certos detalhes decorrentes da precisão e rigor matemático que é fundamental para definir e descrever com rigor o MRUV, mas que em situações práticas mais simples é irrelevante.

Vejamos um exemplo prático. Se soubermos que no instante t_1 o objeto se encontra em um ponto A e num instante posterior t_2 este objeto se encontra em um ponto B, então a velocidade média que o objeto desenvolveu para se deslocar de A até B, no entendimento popular, senso comum, é $v_m = \frac{d}{\Delta t}$, sendo d a distância entre A e B e $\Delta t = t_2 - t_1$. Note que esta concepção de velocidade média pode, e é utilizada, mesmo não estando o móvel em movimento retilíneo; além disso, ela é sempre um valor positivo.

Segundo a nossa definição, se este objeto estiver em movimento retilíneo, e hipoteticamente, for descrito pela função $x = x(t)$, então a velocidade média do objeto no instante t_1 em relação ao incremento de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é

$$v_m(t_1) = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{\Delta t} = \frac{\pm d}{\Delta t}.$$

A partir da função velocidade média iremos, a seguir, definir movimento retilíneo uniforme, sem uso de Cálculo Infinitesimal.

Como já comentamos, o MRUV é definido, nos cursos de Física do Ensino Médio, como o movimento retilíneo que apresenta variação da velocidade diretamente proporcional à variação do tempo. O problema é que a velocidade a que esta definição se refere é a velocidade instantânea. Evitando o uso da velocidade instantânea, vamos considerar a velocidade média, que irá nos permitir dar uma definição matematicamente correta do MRUV, sem fazer uso de limite. Como já comentamos na introdução, não apresentamos neste trabalho uma motivação Física desta definição, embora acreditamos que isto possa ser feito.

4.6.2 *Definição 4.3: MRUV*

Dizemos que O se desloca em MRUV se a taxa de variação da função velocidade média v_m, relativa a um incremento $\Delta t \neq 0$, é uma constante não nula, seja qual for o intervalo de tempo $\Delta s \neq 0$ considerado. Precisamente, se existe

$a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ tal que

$$\frac{v_m(t+\Delta s) - v_m(t)}{\Delta s} = a\,, \qquad (2)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e para qualquer intervalo de tempo Δs.

Usando a noção de taxa de variação de segunda ordem de uma FRVR, podemos conceituar MRUV, de forma equivalente a anterior, requerendo que, um objeto em movimento retilíneo, descrito por uma função $x = x(t),$ está em MRUV, se existe $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ tal que

$$V^2_{\Delta t, \Delta s}(t) = a \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

sendo $V^2_{\Delta t, \Delta s}$ a taxa de variação de segunda ordem da função posição x com relação aos incrementos de tempo $\Delta t,\ \Delta s \neq 0$.

4.6.3 *Proposição 4.1*

Se a função x(t) que descreve o movimento de O é uma função quadrática então O está em MRUV.

Prova

Para mostrar que uma função quadrática x(t) descreve um MRUV, devemos mostrar que a taxa de variação da velocidade média de O é constante não nula em qualquer intervalo de tempo $\Delta s \neq 0$.

Como já vimos, a velocidade média, é a taxa de variação de x (posição) com relação a um incremento de tempo $\Delta t \neq 0$.

Desta forma, devemos mostrar que a taxa de variação de segunda ordem da posição em relação a quaisquer intervalos de tempo $\Delta t,\ \Delta s \neq 0$ é uma constante não nula.

Pelo Teorema 4.3 da Caracterização das Funções Quadráticas, temos que a taxa de variação de segunda ordem de uma função quadrática é uma constante não nula. Neste caso específico, a função quadrática é a função posição x em relação ao tempo t. Portanto, temos que $V^2_{\Delta t, \Delta s}(t) = k \neq 0$. O que satisfaz a condição de o objeto estar em MRUV.

Pergunta: será que vale a volta? A resposta parece que é obviamente sim. De fato é sim, desde que tenhamos como hipótese que $x = x(t)$ seja uma função contínua, o que usualmente, em Física se considera, só que a prova é não trivial, pois como veremos no Teorema 4.4, para prová-lo, necessitamos do Teorema 4.3, que por sua vez, depende de uma série de construções que permitiram obter este resultado.

4.6.4 *Teorema 4.4*

Se O se desloca em MRUV então x(t) é uma função quadrática.

Prova

Pela Definição 4.3, temos que se O se desloca em MRUV então, para qualquer intervalo de tempo Δs não nulo,

$$\frac{v_m(t + \Delta s) - v_m(t)}{\Delta s} = a \neq 0 ,$$

ou equivalentemente, $V^2_{\Delta t, \Delta s}(t) = a \neq 0$, $\forall\ \Delta t,\ \Delta s \neq 0$. O resultado é então uma decorrência direta do Teorema 4.3 de Caracterização das funções quadráticas.

4.6.5 *Definição 4.4: Velocidade instantânea*

Apresentamos no início desta seção, que a velocidade de um objeto O no instante t é o valor "limite" do quociente $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero.

Uma vez que tenhamos mostrado que o MRUV é descrito por uma função quadrática $x(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ com $\alpha \neq 0$, temos, portanto, que a velocidade média em relação a uma variação $\Delta t \neq 0$ de tempo em um instante t será dada por

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 2\alpha\, t + \beta + \alpha\Delta t\,.$$

Vemos, então, que a impossibilidade que tínhamos de atribuir a Δt o valor zero, agora não existe mais, de modo que a velocidade v no instante t será dada por

$$v(t) = 2\alpha\, t + \beta\,.$$

Notemos que v(t) nada mais é do que a taxa de variação infinitesimal de x(t) e também, que podemos obter os coeficientes da função x(t) em termos de grandezas físicas como será apresentado a seguir.

Seja $x(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

Quando $t = 0$, temos a posição inicial do objeto O: $x(0) = \alpha 0^2 + \beta 0 + \gamma = \gamma$.

Assim temos que γ é a posição inicial de O. Denotando a posição inicial por x_0, temos que $\gamma = x_0$.

A velocidade no instante t dada por $v(t) = 2\alpha\, t + \beta$. Em $t = 0$, temos a velocidade no instante 0, ou seja, a velocidade inicial, denotada por v_0, será

$$v_0 = v(0) = 2\alpha \cdot 0 + \beta = \beta\,.$$

Assim, temos que β representa a velocidade inicial.

Além disso, na Física, a aceleração (escalar) instantânea de um móvel com velocidade (escalar) instantânea v(t) é definida como

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

No caso em que o movimento do móvel é o MRUV, vimos que

$$v(t) = 2\alpha \cdot t + v_0.$$

Neste caso, temos

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = 2\alpha \text{, que não depende de } \Delta t.$$

Logo, $a(t) = 2\alpha, \forall t$.

Daí, concluímos que a aceleração de um móvel em MRUV é constante e é igual ao dobro do coeficiente do termo de segundo grau da função quadrática que descreve o movimento. Portanto, a função posição x(t) de um móvel em MRUV é dada por

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

onde x_0 é a posição inicial, v_0 é a velocidade inicial e a é a aceleração do móvel.

5 ESTUDO DAS FUNÇÕES CÚBICAS

5.1 DEFINIÇÃO 5.1: FUNÇÃO CÚBICA

Uma função cúbica é uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, que pode ser expressa na forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, onde a, b, c, d são constantes reais, com $a\neq 0$.

5.1.1 *Exemplo 5.1*

$$f(x)=x^3-x+4\ ,\ g(x)=-2x^3+\frac{3}{7}\ \text{e}\ h(x)=\sqrt{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-5x-9.$$

5.1.2 *Lema 5.1*

Dados uma função cúbica C: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $x_0\in\mathbb{R}$, tem-se que:

a) se C tem taxa de variação V_h positiva em x_0 para valores pequenos de h, então C é crescente em um intervalo aberto J contendo x_0;

b) se C tem taxa de variação V_h negativa em x_0 para valores pequenos de h, então C é decrescente em um intervalo aberto J contendo x_0.

Prova do item (a)

Seja a função $C(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ com $a\neq 0$. Suponhamos que existe $\varepsilon>0$ tal que $V_h(x_0)>0$ para todo $|h|<\varepsilon, h\neq 0$.

Temos

$$V_h(x_0)=\frac{C(x_0+h)-C(x_0)}{h}=\frac{a(x_0+h)^3+b(x_0+h)^2+c(x_0+h)+d-ax_0^{\ 3}+bx_0^{\ 2}+cx_0+d}{h}$$

$$V_h(x_0)=3ax_0^{\ 2}+2bx_0+c+h(ah+3ax_0+b).$$

Para que tenhamos $V_h(x_0)>0$, $|h|<\varepsilon$, afirmamos que $3ax_0^{\ 2}+2bx_0+c\geq 0$, vejamos a explicação.

Por absurdo, se $3ax_0^{\ 2}+2bx_0+c<0$, para valores de h suficientemente pequenos teríamos que $3ax_0^{\ 2}+2bx_0+c+h(ah+3ax_0+b)<0$, contradizendo nossa hipótese.

Suponha agora que $3ax_0^{\ 2}+2bx_0+c=0$. Então, $V_h(x_0)=h(ah+3ax_0+b)$.

Afirmamos que, neste caso, $3ax_0+b=0$ e $a>0$. Se $3ax_0+b\neq 0$, teríamos uma das duas possibilidades $3ax_0+b>0$ ou $3ax_0+b<0$ que vamos mostrar que não são possíveis de acontecer:

1) Se $3ax_0+b>0$, então para h próximo de zero, teríamos $ah+3ax_0+b>0$ e quando $h<0$ resulta que $V_h(x_0)=h(ah+3ax_0+b)<0$, contradizendo a hipótese;
2) Se $3ax_0+b<0$, teríamos para h próximo de zero, $ah+3ax_0+b<0$ e quando $h>0$ resulta que $V_h(x_0)=h(ah+3ax_0+b)<0$, também contradizendo a hipótese.

Logo, $3ax_0+b=0$ o que nos dá $V_h(x_0)=ah^2$ que, por sua vez, resulta em $a>0$.

Assim, ao supor $V_h(x_0)>0$, temos que,

(a) $3ax_0^{\ 2}+2bx_0+c>0$; ou

(b) $3ax_0^{\ 2}+2bx_0+c=0$, $3ax_0+b=0$ e $a>0$.

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$. Escrevendo $x_1 = x_0 + s$ e $x_2 = x_0 + t$ com $s < t$, então

$$\begin{aligned} &C(x_2) - C(x_1) = C(x_0 + t) - C(x_0 + s) = \\ &= (t - s)\left(as^2 + ast + 3asx_0 + bs + at^2 + 3atx_0 + bt + 3ax_0{}^2 + 2bx_0 + c\right). \end{aligned}$$

No caso (a) $3ax_0{}^2 + 2bx_0 + c > 0$, temos que

$$(t - s)\left(as^2 + ast + 3asx_0 + bs + at^2 + 3atx_0 + bt + 3ax_0{}^2 + 2bx_0 + c\right) > 0$$

Para $s, t \approx 0$ de modo que $C(x_1) < C(x_2)$ para $x_1, x_2 \approx x_0$ e $x_1 < x_2$.

No caso (b), $3ax_0{}^2 + 2bx_0 + c = 0$, $3ax + b = 0$ e $a > 0$ temos que

$$\begin{aligned} &(t - s)\left(as^2 + ast + 3asx_0 + bs + at^2 + 3atx_0 + bt\right) \\ &= (t - s)\left(a\left(s^2 + st + t^2\right) + s(3ax_0 + b) + t(3ax_0 + b)\right) \\ &= (t - s)\left(a\left(s^2 + st + t^2\right) + (3ax_0 + b)(s + t)\right) \\ &= a(t - s)\left(s^2 + st + t^2\right). \end{aligned}$$

Sabemos que $a > 0$ e que $t - s > 0$. Se:

— $st > 0$ temos que $a(t - s)\left(s^2 + st + t^2\right) > 0$;

— $st < 0$ note que $s^2 + st + t^2 = (s + t)^2 - st > 0$.

Assim, temos que $a(t - s)\left(s^2 + st + t^2\right) > 0$ o que resulta em $C(x_1) < C(x_2)$.

Desta forma, mostramos se C tem taxa de variação positiva em x_0, então C é crescente em um intervalo aberto J contendo x_0.

A prova do item (b), segue de forma análoga a do item (a).

5.1.3 *Teorema 5.1*

i. Se $V_0(x_0) > 0$ em um ponto $P(x_0, C(x_0)) \in gr(C)$, então C é crescente em P, ou ainda, P é um ponto de crescimento de C;
ii. Se $V_0(x_0) < 0$ em um ponto $P(x_0, C(x_0)) \in gr(C)$, então C é decrescente em P, ou ainda, P é um ponto de decrescimento de C;
iii. Se $P(x_0, f(x_0)) \in gr(f)$ é ponto de mudança então $V_0(x_0) = 0$.

Prova do item (i)

Vamos primeiro mostrar que se $V_0(x_0) > 0$ então a função é crescente em P.

Seja a função cúbica,

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ com } a \neq 0 .$$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ temos que a taxa de variação em x_0 com um incremento $h \neq 0$ será

$$V_h(x) = 3ax_0{}^2 + 2bx_0 + c + h(ah + 3ax_0 + b).$$

Determinando a taxa de variação infinitesimal em x_0 teremos

$$V_0(x_0) = 3ax_0{}^2 + 2bx_0 + c .$$

E por hipótese

$$V_0(x_0) = 3ax_0{}^2 + 2bx_0 + c > 0 .$$

Como $V_h(x_0) = 3ax_0^{\ 2} + 2bx_0 + c + h(ah + 3ax_0 + b)$, temos que para h suficientemente pequeno $V_h(x_0) > 0$.

Assim, recaímos no Lema 5.1, que nos mostra que a função é crescente em um intervalo aberto J contendo x_0, portanto, crescente em $(x_0, C(x_0))$.

Prova do item (ii)

A demonstração deste item segue os mesmos passos da demonstração do item (i).

Prova do item (iii)

Já demonstrado no Teorema 2.1.

5.2 CONSTRUÇÃO DE ESBOÇO DO GRÁFICO DE FUNÇÕES CÚBICAS VIA TAXA DE VARIAÇÃO

5.2.1 *Exemplo 5.2*

Vamos construir o esboço do gráfico da função cúbica

$$C(x) = 3x^3 - x + 4.$$

Solução

Vamos determinar a taxa de variação para esta função:

$$V_h(x) = \frac{C(x+h) - C(x)}{h} = \frac{3(x+h)^3 - (x+h) + 4 - 3x^3 + x - 4}{h} = 9xh + 9x^2 + 3h^2 - 1.$$

Quando $h = 0$, temos que a taxa de variação infinitesimal da função é: $V_0(x) = 9x^2 - 1$;

Quando $V_0(x) > 0$, temos que $9x^2 - 1 > 0$ e isto ocorre nos intervalos $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, \infty\right[$.

Assim, pelo Teorema 5.1, temos que a função é crescente nestes intervalos.

Quando $V_0(x) < 0$, temos que $9x^2 - 1 < 0$ e isto ocorre em $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ desta forma, C é decrescente neste intervalo.

Analisando os intervalos de crescimento e decrescimento, temos que em $x = -\frac{1}{3}$ a função passa de crescente para decrescente e em $x = \frac{1}{3}$, f passa de decrescente para crescente, assim, esta função tem dois (e somente dois) pontos de mudança a saber:

$$\left(-\tfrac{1}{3}, C\left(-\tfrac{1}{3}\right)\right) = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{38}{9}\right)$$

e

$$\left(\tfrac{1}{3}, C\left(\tfrac{1}{3}\right)\right) = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{34}{9}\right).$$

Com base nas informações acima, podemos construir um esboço do gráfico da função, apresentado na Figura 15, que segue:

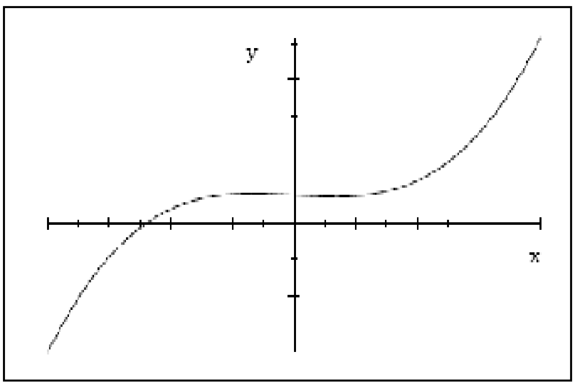


FIGURA 15: Esboço do gráfico da função do Exemplo 5.2

5.2.2 Exemplo 5.3

Vamos construir o esboço do gráfico da função cúbica

$$C(x) = x^3 + 1.$$

Solução

Vamos determinar a taxa de variação para esta função:

$$V_h(x) = \frac{C(x+h) - C(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 + 1 - x^3 - 1}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Quando h = 0, temos que a taxa de variação infinitesimal da função é: $V_0(x) = 3x^2$.

Quando $V_0(x) > 0$, temos que $3x^2 > 0 \;\; \forall x \neq 0$.

Assim, pelo Teorema 5.1, temos que a função é crescente em $]\infty,0[\cup]0,\infty[$.

Observa-se que neste caso x=0, não pode ser nem máximo nem mínimo da função, apesar de $V_0(0) = 0$. Tais pontos são chamados, nos cursos de Cálculo Diferencial, de pontos de inflexão. Estes pontos são onde a função muda de concavidade, mas não iremos estudá-los aqui. O esboço que apresentamos na Figura 16, mais deixa claro o que estamos querendo dizer sobre a “mudança de concavidade”:

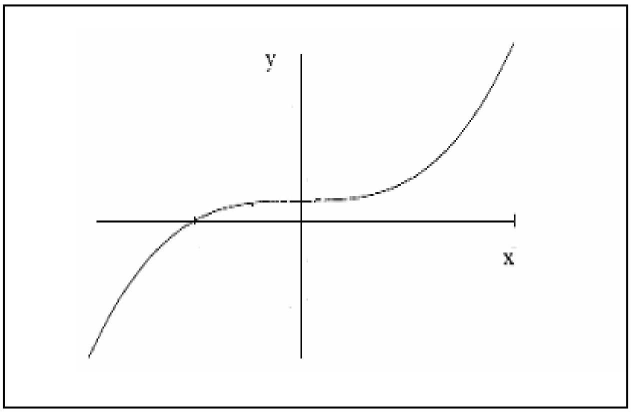


FIGURA 16: Esboço do gráfico da função do Exemplo 5.3

5.3 APLICAÇÃO DE TAXA DE VARIAÇÃO INFINITESIMAL

5.3.1 *Problemas de Otimização*

Propomos para os problemas de otimização que envolvem funções cúbicas o mesmo processo apresentado para os problemas de otimização das funções quadráticas, sendo que aqui, passaremos pelas principais etapas do Teorema 5.1.

5.3.1.1 Exemplo 5.4

Uma caixa sem tampa deve ser feita a partir de uma folha de papelão medindo 16 cm por 30 cm, destacando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Qual é a medida do lado dos quadrados para se obter uma caixa com maior volume?[5]

Solução

1ª etapa

Para facilitar o entendimento da questão, vamos fazer um desenho para representar a situação apresentada, conforme mostra a Figura 17.

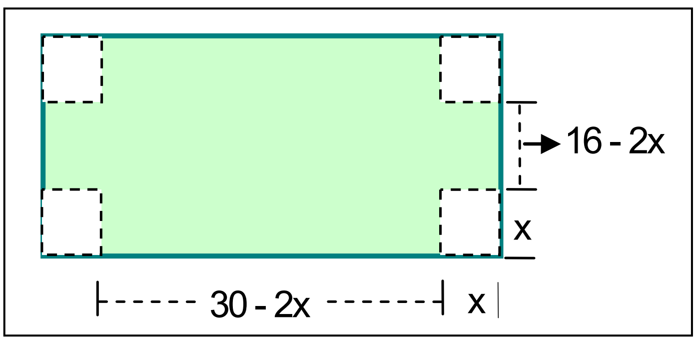


FIGURA 17: Representação da situação apresentada no Exemplo 5.4

[5] Howard Anton. Cálculo um novo horizonte, página 340.

Seja x a medida do lado dos quadrados que serão formados nos quatro cantos do retângulo.

A caixa obtida terá base com dimensões (16-2x) cm e (30-2x) cm e altura x cm.

Como as dimensões da caixa devem ser positivas, teremos que

$$x > 0,\ 16 - 2x > 0\ \text{ e }\ 30 - 2x > 0.$$

Ou ainda,

$$x > 0,\quad x < 8\ \text{ e }\ x < 15\,.$$

Assim devemos ter para medida do lado dos quadrados, uma medida x tal que $0 < x < 8$. (1)

Assim, o volume da caixa será dado por

$$\text{Vol}(x) = x(16 - 2x)(30 - 2x)\text{, com } 0 < x < 8\,.$$

Ou ainda,

$$\text{Vol}(x) = 4x^3 - 92x^2 + 480x\text{, com } 0 < x < 8\,.$$

Embora as funções cúbicas sejam FRVR que, por definição, têm domínio $\mathbb{R}$, estamos interessados em seu comportamento apenas no intervalo $]0{,}8[$. Como já havíamos mencionado nos problemas de otimização das funções quadráticas, tal intervalo será dito domínio contextual da função.

2ª etapa

Como já vimos, os pontos de máximo ou de mínimo são pontos de mudança. Vamos determiná-los estudando a taxa de variação da função volume.

$$V_h(x) = \frac{4(x+h)^3 - 92(x+h)^2 + 480(x+h) - 4x^3 + 92x^2 - 480x}{h}$$

$$V_h(x) = 12x^2 - 184x + 480 + h(4h + 12x - 92).$$

A taxa de variação infinitesimal da função será

$$V_0(x) = 12x^2 - 184x + 480.$$

Pelo Teorema 5.1, temos que

$V_0(x_0) > 0$ a função é crescente em x_0 e $V_0(x_0) < 0$ a função é decrescente em x_0,

O sinal da função V_0 está representado na Figura 18:

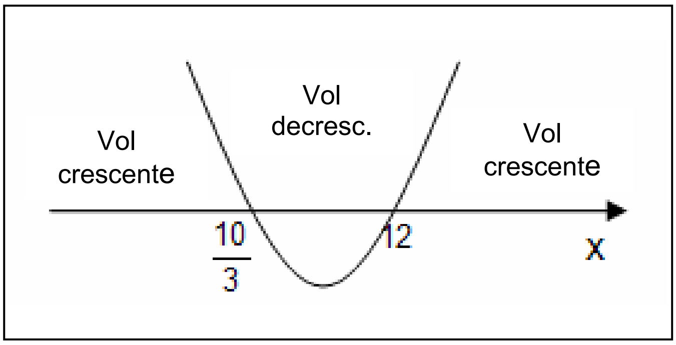


FIGURA 18: Estudo do sinal de V_0 apresentado no Exemplo 5.4

$V_0(x) = 12x^2 - 184x + 480 > 0$ quando $x < \frac{10}{3}$ ou $x > 12$;

$V_0(x) = 12x^2 - 184x + 480 < 0$ quando $\frac{10}{3} < x < 12$.

Portanto, temos os dois pontos de mudança $x = \frac{10}{3}$ e $x = 12$.

Mas note que 12 não pertence ao domínio contextual da função, mas 10/3 pertence ao domínio.

Porém, 10/3 é ponto de máximo ou de mínimo? Note que a função à esquerda do 10/3 está crescendo e à direita decrescendo, desta forma, 10/3 é ponto de máximo da função.

Assim, a medida do lado dos quadrados deve ser 10/3 para tenhamos uma caixa com maior volume.

5.3.1.2 Exemplo 5.5

Ache o raio e a altura de um cilindro circular reto com o maior volume, o qual pode ser inscrito em um cone circular reto de 10 cm de altura e 6 cm de raio.[6]

Solução

1ª etapa

Sejam H a altura do cilindro (usaremos esta notação já que h denotamos como incremento da taxa de variação da função) e r o seu raio.

Queremos determinar H e r, com a condição de que o volume do cilindro seja o maior possível.

Sabe-se que o volume de um cilindro é dado por $Vol = \pi r^2 H$. (1)

Note que o volume depende de duas variáveis: r e H. Desta forma, precisamos obter uma relação entre as variáveis envolvidas para reescrever o volume como função de uma delas.

Por semelhança de triângulos, de acordo com os triângulos mostrados na Figura 19, podemos escrever a relação $\frac{10-H}{10} = \frac{r}{6}$.

[6] Howard Anton. Cálculo um novo horizonte. Página 343.

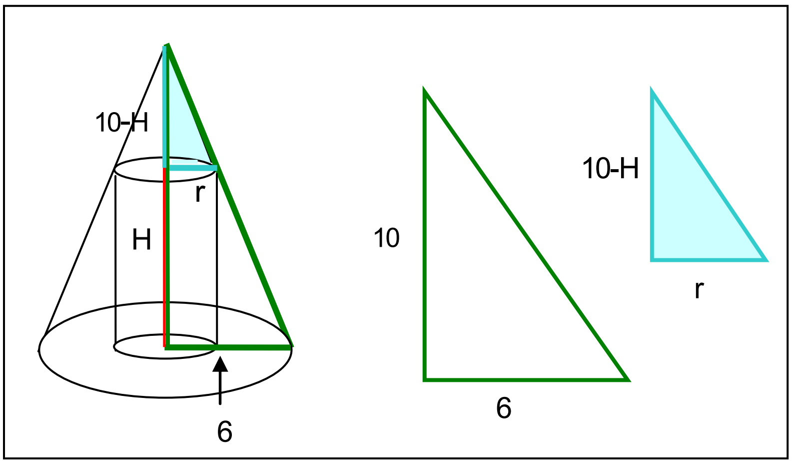


FIGURA 19: Exemplo 5.5

Desta forma, podemos escrever $H = 10 - \frac{5}{3}r$. (2)

Substituindo a expressão (2) de H em (1) teremos

$$Vol(r) = 10\pi r^2 - \frac{5}{3}\pi r^3 .$$

Antes de iniciarmos a resolução da questão, vamos determinar o seu domínio contextual:

$$\left.\begin{array}{l} r > 0 \\ H > 0 \Rightarrow 10 - \frac{5}{3}r > 0 \Rightarrow r < 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < r < 6 .$$

2ª etapa

Vamos iniciar a resolução, determinando a taxa de variação da função volume, como segue

$$V_h(r)=\frac{10\pi(r+h)^2-\frac{5}{3}\pi(r+h)^3-10\pi r^2+\frac{5}{3}\pi r^3}{h}=20\pi r+10\pi h-5\pi r^2-5\pi rh-\frac{5}{3}\pi h^2.$$

A taxa de variação infinitesimal da função será então

$$V_0(r)=20\pi\, r-5\pi\, r^2.$$

O sinal da função V_0 está representado na Figura 20:

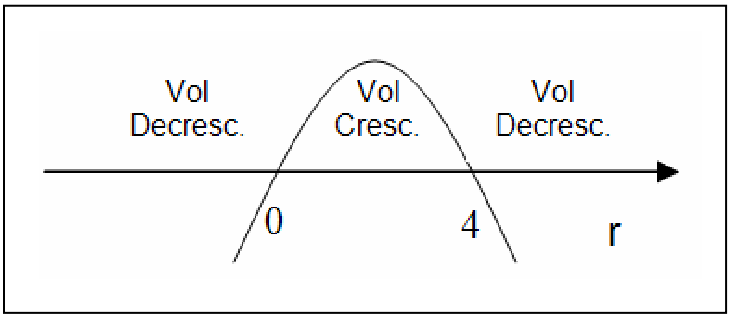


FIGURA 20: Estudo do sinal de V_0 apresentado no Exemplo 5.5

Portanto, $V_0(r)=20\pi\, r-5\pi\, r^2>0$ quando $0<r<4$.

Da mesma forma, temos $V_0(r)=20\pi\, r-5\pi\, r^2<0$ quando $r<0$ ou $r>4$.

Portanto, temos dois pontos de mudança $r=0$ e $r=4$.

Note que 0 não pertence ao domínio da função, mas 4 pertence.

Resta saber se r = 4 é máximo ou mínimo? Note que a função à esquerda de 4 está crescendo e à direita decrescendo, assim podemos garantir que 4 é máximo da função.

Determinando a altura do cilindro, vamos substituir r = 4 em (2):

$$H=10-\frac{5}{3}\cdot 4=\frac{10}{3}.$$

Portanto, o cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito em um cone circular reto de raio da base 6 cm e altura 10 cm tem raio da base 4cm e altura $\frac{10}{3}$cm.

5.3.2 CÁLCULO APROXIMADO DO VALOR DA FUNÇÃO POLINOMIAL EM UM DADO PONTO

Veremos, a partir dos exemplos envolvendo funções cúbicas, aplicações da taxa de variação para o cálculo aproximado do valor da função em um dado ponto.

É importante observarmos que esta aplicação pode ser estendida a toda função racional.

Com o uso de calculadoras, tal estudo pode parecer obsoleto, porém considerando seu aspecto teórico, consideramos importante apresentar esta aplicação que envolve taxa de variação.

5.3.2.1 Exemplo 5.6

Consideremos a função $C(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$. Determinar o valor de C(0,1).

Solução

Sendo a função C contínua, sabemos que C(0,1) deve ser próximo de $C(0) = 6$.

Nosso objetivo aqui é através da utilização de taxa de variação e taxa de variação infinitesimal determinarmos, com uma aproximação razoável, o valor de C(0,1), sem ter que substituir x por 0,1 na função e realizar os devidos cálculos.

Da expressão da taxa de variação, temos

$$V_h(0) = \frac{C(h) - C(0)}{h} = \frac{C(h) - 6}{h}.$$

De modo que

$$C(h) = hV_h(0) + 6. \quad (1)$$

Segue-se que

$$C(0,1) = 0,1V_{0,1}(0) + 6.$$

Como 0,1 está muito próximo de 0, devemos ter $V_{0,1}(0)$ aproximadamente igual a $V_0(0)$, o que nos leva a aproximação de

$$C(0,1) \approx 0,1V_0(0) + 6.$$

Basta então determinarmos $V_0(0)$.

Temos

$$V_h(0) = \frac{C(h) - C(0)}{h} = \frac{h^3 - 3h^2 - 9h + 6 - 6}{h} = h^2 - 3h - 9,$$

de modo que $V_0(0) = -9$.

Assim teremos,

$$C(0,1) \approx 0,1(-9) + 6 = 5,1.$$

O valor de C(0,1) pela função é 5,071, enquanto que nossa aproximação foi 5,1, um erro menor que 3 centésimos.

5.3.2.2 Exemplo 5.7

No Exemplo 5.6, obter valor aproximado de $C(3,95)$.

Solução

Utilizando, como no Exemplo 5.6, a taxa de variação e a taxa de variação infinitesimal, determinaremos com uma aproximação razoável, o valor de $C(3{,}95)$, sem ter que substituir x por 3,95 na função e realizar os devidos cálculos.

Da expressão da taxa de variação, temos

$$V_h(4) = \frac{C(4+h) - C(4)}{h} = \frac{C(4+h) + 14}{h},$$

de modo que

$$C(4+h) = hV_h(4) - 14. \qquad (1)$$

Segue-se que

$$C(4-0{,}05) = -0{,}05V_{-0{,}05}(4) - 14.$$

Como -0,05 é aproximadamente 0, devemos ter $V_{-0{,}05}(4)$ aproximadamente igual a $V_0(4)$, o que nos leva a aproximação

$$C(3{,}95) \approx -0{,}05V_0(4) - 14.$$

Basta então determinarmos $V_0(0)$.

Temos

$$V_h(4) = \frac{C(4+h) - C(4)}{h} = \frac{h^3 + 9h^2 + 15h}{h} = h^2 + 9h + 15,$$

De modo que $V_0(4) = 15$.

Assim teremos,

$$C(3{,}95) \approx -0{,}05(15) - 14 = -14{,}75 \text{ .}$$

O valor de C(3,95) pela função é -14,727625, enquanto que nossa aproximação foi $-14{,}75$, um erro menor que 3 centésimos.

6 OFICINA: *O ESTUDO DA NOÇÃO DE TAXA DE VARIAÇÃO NO ENSINO MÉDIO*

A Oficina intitulada “O Estudo da Noção de Taxa de Variação no Ensino Médio” ocorreu em 4 encontros de 1h30min cada, uma vez por semana, entre outubro e novembro de 2008. O grupo era formado, inicialmente, por 8 alunos do 3º ano do Ensino Médio, do Colégio de Aplicação da UFRGS, que se propuseram a participar, através de um convite feito pelos professores da instituição.

6.2 ASSUNTO DA OFICINA

O uso do conceito de taxa de variação de uma função real de variável real no estudo das funções quadráticas e cúbicas.

6.3 JUSTIFICATIVA

Propiciar ao aluno uma abordagem mais conceitual, abrangente e unificadora do estudo de funções quadráticas e cúbicas.

6.4 OBJETIVOS

6.4.1 *Objetivo Geral*

Elaborar e aplicar o conceito de taxa de variação ao estudo das funções quadráticas. Introduzir o estudo das funções cúbicas estendendo a abordagem desenvolvida no estudo das quadráticas via taxa de variação.

6.4.2 *Objetivos Específicos*

Re-obter resultados estudados em funções reais, como intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximo e de mínimo e apresentar uma nova forma de construção de esboços de gráficos de funções quadráticas;

Proporcionar o estudo das funções cúbicas, descobrindo seus intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximo e de mínimo e construir esboços de gráficos para estas funções;

Utilizar taxa de variação no estudo de problemas de otimização que envolvem funções quadráticas e cúbicas.

6.5 ETAPAS DE REALIZAÇÃO

— *Primeiro Encontro*, 17 de Outubro de 2008: Apresentação da proposta de trabalho, a qual faz uso da noção de taxa de variação, para estudar pontos de crescimento, pontos de decrescimento, pontos de mudança, pontos de máximo e mínimo de uma função, intervalos de crescimento e decrescimento, construção de esboços de gráficos de funções quadráticas e cúbicas e problemas de otimização envolvendo estas funções. A seguir, colocou-se o programa a ser estudado em cada encontro e, então, demos início às atividades. Os alunos receberam o material[7] que utilizariam nesse encontro, no qual estava apresentado o assunto proposto para o encontro e onde fariam suas anotações;

— *Segundo Encontro*, 07 de Novembro de 2008: Em virtude de atividades da escola, esse encontro que estava marcado para 24 de outubro foi adiado para 07 de novembro. No início da aula, os alunos receberam parte do material a ser utilizado nesse encontro, no qual estavam apresentadas as principais etapas envolvidas na construção dos resultados a serem utilizados no estudo de funções básicas. Aplicamos os resultados obtidos para o estudo das

[7] O material entregue aos alunos em cada encontro está apresentado na parte APÊNDICES, desse trabalho (Apêndices: 1, 2, 3 e 4).

funções quadráticas;

— *Terceiro Encontro*, 14 de Novembro de 2008: Os alunos receberam todo material a ser estudado nesse encontro. Continuamos com as aplicações dos resultados construídos no encontro 2 para o estudo das funções cúbicas e a determinação de máximos e mínimos de uma função;
— *Quarto Encontro*, 21 de Novembro de 2008: Nossa proposta era de revisar os assuntos discutidos nos encontros anteriores. Desta forma os alunos receberam uma folha contendo problemas de otimização, que envolviam as funções quadráticas e cúbicas e os conceitos já estudados.

6.6 DESCRIÇÃO DOS ENCONTROS

6.6.1 *Primeiro Encontro*: 17 de Outubro de 2008

Os alunos receberam no início deste encontro o material a ser utilizado, conforme apresentado (Apêndice 1). Cada atividade apresentada neste material foi discutida em grande grupo, como forma dos alunos colocarem suas dúvidas e conclusões sobre o conteúdo estudado.

Na atividade 1, foram apresentadas as considerações apresentadas a seguir:

— Primeiro quanto ao termo esboço de um gráfico;
— Então, apresentei para cada ponto a ser estudado a noção do conceito envolvido: quanto à natureza de um ponto, ou seja, se ele é crescente, decrescente ou de mudança.

Nos três primeiros pontos, segui a forma como comento abaixo e nos demais pontos, os alunos apresentaram seus resultados.

Para apresentar estes conceitos, iniciei com uma forma bem intuitiva, estabelecendo uma analogia do esboço do gráfico apresentado com uma montanha russa. Comentei que iríamos nos deslocar nesta montanha russa da esquerda para direita, ou seja, no sentido em que x aumenta, conforme nos indica a orientação da flecha horizontal. Assim, começaríamos a nos deslocar a partir do ponto (-3, f(-3)). Observei que o eixo y aumenta para cima, pedi que observassem o sentido de crescimento dado pelo sentido flecha do eixo vertical. Portanto, iríamos começar nosso percurso subindo, e a partir de $x = -2$, começaríamos a descer, e desceríamos até $x = 0$ e então subiríamos, até $x = 3$ e desceríamos até o final do percurso. Pedi que observassem que, quando passávamos pelo ponto P estávamos subindo, o que nos dava a ideia de que P seria um ponto de crescimento. Porém, essa era uma ideia intuitiva e que poderia falhar. Desta forma, seria necessária a Matemática para comprovar nossa intuição. Para isto apresentei matematicamente, como verificar se um ponto era de crescimento, considerando um intervalo aberto em torno do ponto P, o mais próximo possível deste ponto, e aí segue como foi definido na dissertação. Portanto, temos que P é um ponto de crescimento e acrescentei, um ponto é dito de crescimento quando $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$.

Da mesma forma, obtivemos o conceito de ponto de decrescimento, primeiro de forma intuitiva, associando à montanha russa e depois a forma matemática.

Para o ponto R, comentei que a função a sua esquerda - mas o mais próximo possível de R - crescia e a sua direita - novamente o mais próximo de R possível – decrescia, e então, R era dito ponto de mudança. Portanto, um ponto de mudança seria todo ponto a partir do qual, a função passa de crescente para decrescente ou vice-versa.

Aplicando estas noções, sem dificuldade os alunos classificaram os demais pontos apresentados.

Passamos aos intervalos de crescimento e decrescimento, e os alunos diretamente responderam após observarem os esboços dos gráficos apresentados. Discutimos apenas a forma de escrevê-los para cada função, relembrando as notações e símbolos envolvidos.

Para a determinação da variação da função, no intervalo pedido, tive que orientar os alunos na resolução, pois eles tinham a ideia, mas faziam a diferença entre os valores sem considerar que f(0) que era negativo, afirmando que a variação era 1,2. Ao localizar no eixo y os valores de f(0) e de f(3) e perguntar qual seria a distância entre estes valores, eles perceberam qual deveria ser a variação pedida e já iniciaram a atividade 2.

Ao passarmos ao estudo da taxa de variação, apresentei aos alunos a representação analítica de uma função (quadrática) e perguntei como poderíamos responder as questões anteriores: pontos de crescimento, decrescimento, pontos de mudança e intervalos de crescimento e decrescimento da função, apenas conhecendo a sua lei? Os alunos tentaram justificar, fazendo referência ao vértice da parábola e a sua concavidade, mas não sabiam como determinar o vértice. O que eles queriam era construir o esboço do gráfico e resolver como na atividade 1. Assim, comentei com o grupo que, para resolvermos estas questões a partir da lei da função, não seria necessário construir o esboço do gráfico, mas até isso seria possível fazer, com a "ferramenta" que iríamos estudar, chamada a taxa de variação de uma função.

Apresentei a definição de taxa de variação fazendo com os alunos as construções gráficas que a envolvem: considerei no plano uma curva qualquer (contínua) e localizei no eixo das abscissas um dado x no qual iríamos determinar a taxa de variação. Depois considerei um valor para h, no exemplo tomei $h > 0$, e localizei a partir desse incremento (no caso, um acréscimo) um valor à direita de x, que representei por x+h. Pelo esboço apresentado, determinei através da função os seus correspondentes f(x) e f(x+h), respectivamente. Defini como P o ponto (x, f(x)) e Q o ponto (x+h, f(x+h)), passei uma reta por estes dois pontos e os questionei sobre o que ela representava. Perguntei como poderíamos determinar a inclinação desta reta. Ninguém respondeu. Assim, considerei o triângulo formado pela variação entre estes pontos P e Q e a variação em x. Perguntei se o ângulo de inclinação do triângulo era igual a da reta. Pela figura, os alunos confirmaram ser iguais. Justifiquei que seriam ângulos correspondentes. Comentei que para determinar a inclinação da reta, iríamos utilizar o triângulo, já que as inclinações eram iguais. Associando às atividades anteriores que tratavam de variação, obtivemos assim a diferença: $f(x+h) - f(x)$, correspondente a um dos lados do triângulo. Para a variação em x, apresentei valores numéricos para que eles identificassem que seria h. Perguntei ao grupo, como escrever uma relação entre estas medidas (catetos do triângulo retângulo) e então, uma aluna respondeu: "que a tangente do ângulo seria o cateto oposto dividido pelo cateto adjacente". Então escrevemos: $tg\alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, assim tínhamos que a inclinação da reta secante à curva nos pontos P e Q seria a taxa de variação em x com relação ao incremento h. Esta construção foi orientada sem que eles tivessem visto a definição previamente. Foi muito interessante fazê-la. Certamente, se eles a tivessem visto, achariam complicada, mas os passos seguidos na sua construção, permitiram que eles fossem entendendo a relação apresentada. Comentei que quanto menor fosse o incremento h, mais próximo o segmento PQ estaria do gráfico da função e melhor seria a aproximação da taxa de variação no ponto dado.

Da leitura da definição passamos aos exemplos: no primeiro exemplo, discutimos cada etapa com o grupo, obtendo a expressão final da taxa de variação. No segundo exemplo, esperava proceder da mesma forma, pois envolvia uma função cúbica, portanto mais trabalhosa, mas eles pediram para fazer e que depois corrigíssemos. Bem, tive que orientá-los em algumas passagens da definição, como por exemplo, para fazer $(1+h)^3$. Atrapalharam-se com sinais, na álgebra envolvida, mas no final conseguiram, e, ainda, discutimos no quadro a questão, comentando detalhadamente cada etapa, para que eles percebessem o que haviam feito e os preparando à questão seguinte.

Na atividade 3, referente à generalização, a qual iriam utilizar (x+h) houve muitas dúvidas e, novamente, intervenções foram feitas. Eles queriam atribuir um valor a x, pois nos exemplos haviam feito assim. Comentei que seria necessário neste caso trabalharmos com um x genérico, pois nos próximos encontros precisaríamos proceder desta forma, para obter alguns resultados. Iniciei a definição no quadro e os alunos prosseguiram. O interesse do grupo em resolver e aprender proporcionou que todos, por maiores que fossem as dificuldades, conseguissem concluir a atividade.

6.6.2 *Segundo Encontro*: 7 de Novembro de 2008

Iniciei o segundo encontro conforme o comentário inicial apresentado no material entregue a eles. Tal material está apresentado no Apêndice 2.

Acrescentei que neste encontro já construiríamos, a partir do estudo da taxa de variação, o esboço do gráfico da função quadrática, pois esta era uma grande expectativa do grupo, relembrar a forma de construção de esboços de gráficos, principalmente para o caso de funções quadráticas. Comentei que eu havia perguntado na aula anterior como determinar a natureza de um ponto e os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente utilizando a lei da função. Lembrei que eu havia dito que para respondermos estas questões, utilizaríamos a taxa de variação, e naquele dia, nós estudaríamos, então, como fazer.

Dando continuidade ao que nos propusemos discutir neste encontro, iniciei relembrando a definição da taxa de variação de uma função. Apresentei um exemplo e discuti cada uma das etapas do processo com eles. Esta resolução estava apresentada no material para que eles se envolvessem apenas na sua discussão.

Para que os alunos tivessem uma boa referência sobre o que iríamos estudar, procurei apresentar no material a essência das noções envolvidas, como também, sua justificativa.

Aproveitando o exemplo do início deste encontro, discutimos tudo que estava no primeiro quadro apresentado no texto do material, e assim, definimos a taxa de variação infinitesimal. Aproveitando o exemplo inicial, justifiquei a possibilidade de simplificar h na expressão da taxa de variação, sempre que estivéssemos tratando de funções polinomiais ou funções definidas por quocientes de funções polinomiais.

Desta forma, estávamos em um processo que iniciava com a determinação da taxa de variação e passava para a determinação da taxa de variação infinitesimal, faltando assim, relacioná-las com a natureza de um ponto e com os intervalos de crescimento /decrescimento, para que atingíssemos a primeira proposta de nosso estudo.

No material apresentado aos alunos, escrevi a ideia principal, que nos permite chegar na relação mencionada, acrescentando a seguinte ideia:

> Sabemos que, $V_0(3) > 0$ e que $V_h(3) = \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$. Mas, para valores de h suficientemente pequenos, notem que $V_h(3) = 2h + 16$ deverá ser positiva também, pois os acréscimos (h>0), como os decréscimos (h<0) de 2h serão muito pequenos frente a 16, já que estamos considerando para h valores muito próximos de zero.
>
> Desta forma, temos que $V_h(3) = \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} > 0$, ou seja:
>
> Se $h > 0$, teremos $V_h(3) = \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h > 0} > 0$, logo $f(3+h) - f(3) > 0$, ou ainda, $f(3+h) > f(3)$.

> Assim temos que, $3+h>3$ e $f(3+h)>f(3)$. Portanto f é crescente em x=3.
>
> Se $h<0$, teremos $V_h(3)=\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h<0}>0$, logo $f(3+h)-f(3)<0$, ou ainda, $f(3+h)<f(3)$.
>
> Assim temos que, $3+h<3$ e $f(3+h)<f(3)$. Portanto f é crescente em x=3.”

Depois destas conclusões, perguntei ao grupo sobre o que poderíamos concluir se $V_0(3)$ fosse negativa, e eles fizeram rapidamente a analogia com a situação apresentada, inferindo que a função seria decrescente em x=3.

Comentei que a ideia discutida no exemplo, representava um resultado que poderia ser demonstrado, e que estava sendo apresentado no primeiro quadro da segunda página do material deles, que era a relação entre sinal da taxa de variação infinitesimal em um ponto e a função ser crescente/decrescente neste ponto (corresponde ao Teorema 2.1). Corrigi o que estava neste quadro afirmando que seria uma dupla implicação e comentando cada uma delas.

Comentei que o intervalo de crescimento de uma função, deveria conter apenas pontos de crescimento da função, e como todos estes pontos tinham taxa de variação infinitesimal positiva, o intervalo de crescimento poderia ser obtido com $V_0(x)>0$ para todo $x\in I$. E da mesma forma comentei para o intervalo de decrescimento da função e passamos ao Exemplo 2.

Os alunos realizaram os itens (a) e (b) com relativa facilidade. As dificuldades foram regra de sinais, desatenção em multiplicações, enganos na escrita.

No item (c), com base nos intervalos de monotonicidade da função, os alunos entenderam como obter o ponto de mudança. E aí, alguns inferiram que no ponto de mudança $V_0(x)=0$. Confirmei, mas chamei a atenção que este resultado não estava no quadro, pois isto poderia não ocorrer para todas as funções polinomiais. Nas funções cúbicas, que seriam as próximas a serem estudadas, veríamos que isto não ocorreria sempre. Relembrei que a forma que permitiria, para qualquer função, determinar os pontos de mudança, seria a que tínhamos visto no primeiro encontro, analisando se a função à esquerda de ponto seria crescente e a sua direita seria decrescente ou vice-versa.

Com base nos intervalos de crescimento e decrescimento e no ponto de mudança, construímos o esboço do gráfico da função quadrática.

Chamei atenção do grupo que o esboço tinha sido construído apenas com a utilização de taxa de variação e nos seus resultados. Não precisamos lembrar a fórmula do vértice da parábola, nem saber que sendo o coeficiente de x^2 positivo, então, a parábola teria concavidade para cima. Percebi que eles não estavam acreditando que com a taxa de variação eles haviam conseguido fazer o que até então era cheio de "artifícios".

Comentei que o esboço poderia ser melhorado, calculando os pontos de interseção da curva com os eixos x e y, mas que isto eles fariam caso fosse necessário.

Para finalizar a aula, coloquei o objetivo de determinarmos o esboço do gráfico para uma função quadrática genérica. Eles iniciaram determinando a taxa de variação em x com relação a um incremento h e a taxa de variação infinitesimal. Corrigimos e passamos aos intervalos onde a função é crescente e aos intervalos onde é decrescente. À medida que eles iam fazendo, fui alertando para a importância do sinal do coeficiente de x^2 para o sentido da desigualdade. Meio que se desorientaram. Fiz um exemplo numérico para que eles percebessem o porquê de ao multiplicamos ou "dividimos" por um número negativo devíamos inverter o sentido da desigualdade. E então revisei no quadro até onde eles tinham feito e subdividi a construção do esboço do gráfico em dois casos um com $a > 0$ e outro para $a < 0$ e mostrei como ficaria, pedindo a participação deles. O caso, para o qual $a > 0$ eles conseguiram concluir. Na hora de construir o esboço eles tiveram dificuldades em transcrever o que estava escrito para construção do esboço, assim, fui fazendo no quadro com base nas respostas deles as minhas indagações. Para $a < 0$, fizemos juntos (por meio de meus questionamentos e as respostas dos alunos) a determinação dos intervalos de crescimento e decrescimento e a construção do esboço do gráfico.

6.6.3 *Terceiro Encontro*: 14 de Novembro de 2008

Iniciamos a aula relembrando o que fizemos no 2º encontro, conforme o que estava apresentado no material que os alunos receberam (Apêndice 3), no início deste encontro:

> No encontro 02, conseguimos a partir da taxa de variação infinitesimal, construir o esboço do gráfico de funções quadráticas, mesmo na sua forma geral. Agora vamos aplicar novamente a noção de taxa de variação infinitesimal no estudo das funções cúbicas, para determinar:
> - Se um ponto é de crescimento, decrescimento ou de mudança;
> - Intervalos onde a função é crescente e intervalos onde é decrescente;
> - Construção do esboço do gráfico.

Um aluno perguntou, se uma função cúbica tinha um “jeito” assim como a quadrática, que tinha a forma de uma “parábola”. Afirmei que sim, que esta curva, assim como ocorre na função quadrática, poderia ter as possíveis formas, e mostrei como seria. E disse que depois que construíssemos o esboço do gráfico da função do exemplo, iríamos tentar entender um pouco do porquê desta forma com o estudo da taxa de variação.

Os alunos iniciaram então a resolução do item (a) do exemplo. Para x=0, não houve dificuldade. Já para $x = -1$, mais uma vez, discutimos como seria para resolver $(-1+h)^3$. Após a determinação da taxa de variação, vi que os alunos consultaram o material do encontro 2, para se certificar se ainda faltava algo a mais a fazer para determinar se o ponto era de crescimento ou decrescimento. À medida que as dúvidas surgiam, eu ia orientando os alunos individualmente. Lembraram-se dos resultados acerca da taxa de variação infinitesimal e concluíram este primeiro item.

No item (b), os alunos conseguiram encontrar a expressão da taxa de variação e a taxa de variação infinitesimal, mas a partir daí tive que intervir no quadro. Fiz referência ao item (a), porque (0, f(0)) era ponto de decrescimento e $(-1, f(-1))$ era de crescimento. Ao justificarem, comentei que esta seria a ideia a ser aplicada na taxa de variação infinitesimal. Coloquei no centro do quadro a expressão de TVI, $V_0(x) = 9x^2 - 1$, e fiz duas flechas saindo da expressão. Na primeira, ela seria positiva e na segunda, negativa. Perguntei em quais intervalos ocorreria cada uma destas situações.

Os alunos iniciaram os cálculos e descobriram os zeros da expressão. Então perguntei: “—*E agora*? *Como fazer*?”

Orientei que deveriam estudar o sinal da função $V_0(x) = 9x^2 - 1$. Para isso iríamos fazer um esboço do gráfico desta função para saber para quais valores de x

$V_0(x) = 9x^2 - 1 > 0$ e $V_0(x) = 9x^2 - 1 < 0$, lembrando que tudo que estivesse acima do eixo x, corresponderia a $V_0(x) = 9x^2 - 1 > 0$ e tudo que estivesse abaixo deste eixo, seria $V_0(x) = 9x^2 - 1 < 0$. Tracei uma reta horizontal e chamei de eixo x, depois localizei as raízes e perguntei como seria a parábola, par ao que, fiz referência ao que estudamos na função quadrática, comentando também, que se quiséssemos fazer o esboço do gráfico da função taxa de variação seria correspondente a fazer o esboço do gráfico de uma função quadrática. Seguindo esta ideia, perguntei ao grupo o que seria necessário fazer, e um aluno respondeu: "*—Determinar a taxa de variação e depois a taxa de variação infinitesimal*!". Confirmei, e observei que neste caso a taxa de variação infinitesimal seria 18x e novamente perguntei: "*—Para que valores de x a taxa infinitesimal é positiva e quando é negativa*?" e eles pensaram e responderam que seria quando 18x>0 e 18x<0, ou seja, x>0 e x<0, respectivamente. Acrescentei esta informação na reta que eu já havia feito no quadro e em zero tracei uma reta vertical pontilhada, para separar a parte do gráfico onde a função crescia da parte onde decrescia. Mais uma vez perguntei: "*—Qual é o ponto de mudança e o que acontece com a função antes e depois dele*?" e eles responderam: "*—Zero e que antes seria decrescente e depois seria crescente*."; novamente perguntei: "*—Como seria a parábola assim*?" (perguntei como fazer o esboço desta parábola, considerando estas raízes), e eles ensaram e responderam corretamente, e assim construímos o esboço e estudamos o sinal da taxa de variação. Um aluno colocou: "*—Como 'a' seria positivo a concavidade seria para cima* […]", ao que confirmei e comentei que o processo que levava a este resultado poderia ser justificado pela taxa de variação, como fizemos, mas também poderíamos ter utilizado este resultado, afinal já havíamos discutido isto no final da aula anterior. Concluímos este item, escrevendo os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

Sobre o item (c): Com base nos intervalos de crescimento e decrescimento escritos no item (b) perguntei sobre a existência de ponto de mudança neste caso. Os alunos confirmaram. Solicitei que fosse determinada a coordenada y para cada um.

Item (d): Solicitei que eles tentassem construir o esboço do gráfico, localizando os pontos de mudança e seguissem as orientações de onde a função seria crescente e onde seria decrescente. Eu não ajudei, disse que seria muito importante que eles tentassem. Com base nas curvas de modelo comentadas no início da aula, eles conseguiram construir seus esboços. Foi muito legal!

Quanto aos máximos e mínimos, lemos a definição e através dos exemplos, procurei esclarecer o que a definição apresentava.

No primeiro, os alunos sem dificuldade compreenderam o que era um ponto de máximo e mínimo, além de conseguirem diferenciar quando era local ou absoluto.

Relembrei a representação gráfica de intervalo semi-aberto, referente ao segundo esboço do exemplo, pois os alunos não lembravam o que significava.

Discutimos assim, cada exemplo. Eu perguntava e os alunos respondiam quais seriam os máximos e mínimos e se estes seriam absolutos ou relativos. Ao final, perguntei quais seriam os pontos de mudança. Os alunos perceberam que estes pontos seriam sempre máximos e mínimos de cada esboço apresentado. E aí perguntei se existia algum ponto de mudança que não seja nem máximo nem mínimo. Eles responderam que não. Perguntei se existia algum máximo ou mínimo que não fosse de mudança? Eles responderam que, a e b, não eram pontos de mudança” (os extremos de alguns intervalos). Comentei que estes não seriam os únicos casos, mas que a ideia seria esta, todo ponto de mudança seria um ponto de máximo ou de mínimo da função (pela definição de ponto de mudança e de máximo e mínimo). Porém a recíproca, todo ponto de máximo e de mínimo nem sempre seria ponto de mudança.

6.6.4 *Quarto Encontro*: 21 de Novembro de 2008

Entreguei inicialmente o material do 4º encontro e apresentei o assunto a ser estudado, fazendo a seguintes considerações apresentadas no material, conforme Apêndice 4:

> Vimos, nos encontros anteriores, as contribuições da taxa de variação infinitesimal na construção dos esboços dos gráficos das funções quadráticas e cúbicas, como também no reconhecimento da natureza de um ponto do gráfico e os intervalos de crescimento e decrescimento. Hoje iremos finalizar o estudo da noção de taxa de variação, resolvendo alguns problemas de otimização descritos por funções quadráticas e cúbicas. Os problemas de otimização envolvem estudo de pontos de máximo e mínimo absolutos, que vimos no terceiro encontro. Matematicamente, estes problemas visam à determinação do maior ou menor valor da função, em um intervalo, assim como, onde ocorre este valor.

Comentei que o intervalo, no qual as variáveis envolvidas pertenceriam, para que estivessem adequadas à situação do problema, seria dito domínio contextual.

Coloquei as etapas envolvidas na resolução destes problemas, fazendo os comentários pertinentes a cada uma.

A primeira etapa seria a organização dos dados para obtenção da função que descreve a situação apresentada e determinação de seu domínio contextual.

A segunda etapa corresponderia à resolução do problema a partir da função obtida na etapa anterior.

Comentei que a primeira etapa seria necessária, porque desconhecíamos a lei das funções envolvidas em cada situação a ser estudada. Se as conhecêssemos, já iríamos para a etapa da resolução, como fazíamos nos encontros anteriores, quando conhecíamos a "lei" da função.

Feitos os devidos comentários, iniciamos o estudo com o primeiro exemplo, que envolvia a determinação do retângulo de área máxima, cujo perímetro era 100 cm.

Para que os alunos compreendessem a situação perguntei do que se tratava. Depois de algumas opiniões, um aluno sugeriu dividir 100 por 4, afirmando que os lados teriam 25 cm. Perguntei como poderíamos garantir isso, mas e ele disse não saber, colocando que era apenas uma opinião.

Discutimos alguns exemplos, de acordo com a situação dada, atribuindo valores aos lados:

> Um retângulo com lados iguais a 25 cm, ou seja, um quadrado com lado 25 cm, tem perímetro é 100 cm e a área....? Fizeram as contas e responderam: 625 cm^2; um retângulo com lados 1 cm e 49 cm. Perímetro é 100 cm e a área é.....? 49 cm^2; um retângulo com lados 10 cm e 40 cm. Perímetro é 100 cm e a área é 400 cm^2; um retângulo com lados 20 cm e 30 cm. Perímetro é 100 cm e a área é 600 cm^2.

Com os exemplos, os alunos perceberam que, quanto mais próximas estavam as medidas dos lados do retângulo, maior seria a área. Desta forma, comentei: "o quadrado está "ganhado", mas será mesmo esta resposta?" "Como comprovar este resultado?"

Desta forma, passamos à resolução da primeira etapa. Consideramos um retângulo com lados genéricos, x e y, e escrevemos a função que queríamos otimizar. Como tal função contém duas variáveis x e y, deveríamos escrevê-la em função de uma destas variáveis, pois não sabíamos como proceder com mais de uma variável na função. Aí entrava a equação que envolvia o perímetro. Com esta informação, conseguiríamos escrever uma variável em função da outra, e assim, reescrever a função área.

Eu ia orientando os alunos, questionando a cada passo, para que fosse compreendido o processo de construção da função. Comentei sobre os possíveis valores que x e y poderiam assumir e escrevemos o domínio contextual para nossa função obtida.

Perguntei aos alunos como descobriríamos x para que a área fosse a maior possível e fazendo referência aos encontros anteriores, o que nos permitiria chegar a este valor. Então complementei, que os pontos de mudança, como havíamos visto, eram pontos de máximo e de mínimo. Mas questionei por que este ponto não seria de mínimo. Um aluno respondeu: “porque ela é para baixo”, fazendo com as mãos uma “parábola” com concavidade para baixo. Assim complementei: “ela cresce até o ponto de mudança e depois decresce, não é?” Assim concluímos que para a função obtida, realmente, o ponto de mudança seria um ponto de máximo.

A partir daí, passamos ao estudo da taxa de variação, relembrando quando necessário o que vimos no encontro 2. Após algumas intervenções, os alunos finalizaram o exemplo e assim, comprovamos a resposta do colega. Importante observar que, mesmo os alunos sabendo que o ponto de mudança era um ponto de máximo, orientei que a partir do estudo do sinal da taxa de variação infinitesimal, obtivessem os intervalos de crescimento e decrescimento da função, reforçando esta ideia.

No exemplo (b), iniciei mostrando uma folha com as medidas apresentadas no problema e fiz a construção de uma caixa conforme a situação do enunciado. Considerei uma medida genérica x relativa aos lados dos quadrados na folha, desenhei os quadrados, os recortei e a formei a caixa. Mostrando a caixa construída, perguntei qual era a sua altura. Abrindo a caixa, os alunos identificaram x. E assim, perguntei qual seria a expressão para os lados da base. Eles identificaram sem dificuldade as medidas através da caixa construída.

Questionei sobre como determinar o volume de uma caixa, e então, fizemos juntos a determinação da função, a partir das respostas e discussões, as minhas perguntas. Assim, escrevemos a função e seu domínio contextual e os alunos passaram à etapa de resolução.

Percebi que consultaram os materiais das aulas anteriores e a maior parte das dúvidas ocorreram na parte algébrica da determinação da taxa de variação. Lembrando das etapas do exemplo do encontro anterior, discutimos novamente o estudo do sinal da função taxa de variação infinitesimal e os alunos concluíram o problema, determinando os lados e o volume máximo.

No exemplo (c) discutimos a determinação da função e a obtenção da resolução transcorreu sem dificuldade. Percebi maior independência dos alunos no processo envolvido.

O exemplo (d) não foi possível resolver o tempo de aula já havia acabado.

Finalizamos o último encontro agradecendo a participação e o interesse dos alunos e eles mostraram-se satisfeitos com o que foi estudado e comentaram que o assunto traria muitas contribuições para o desempenho no vestibular e, futuramente, no ensino superior.

6.7 ANÁLISE DA OFICINA

Na oficina, buscamos construir com os alunos os conceitos envolvidos no estudo da taxa de variação, permitindo que eles compreendessem estes conceitos, através da construção de suas etapas fundamentais, justificando e sistematizando os fundamentos para sua compreensão. Percebemos que os alunos compreenderam a definição de taxa de variação, assim como, seus resultados aplicados ao estudo das funções básicas, apresentando apenas na determinação da taxa de variação a sua maior dificuldade, relativa ao processo algébrico envolvido.

Os alunos obtiveram com o uso do conceito de taxa de variação uma outra forma de re-obter resultados sobre as funções quadráticas, como intervalos de crescimento e decrescimento, a obtenção das coordenadas do vértice e a construção de esboço de gráficos, sem fazer uso de roteiros e fórmulas. Com o uso de taxa de variação este estudo ocorreu de forma mais “natural” e abrangente, no sentido em que os resultados obtidos podem ser utilizados para qualquer outra função básica. Um exemplo disso, foi o estudo das funções cúbicas, que se utilizaram dos mesmos resultados aplicados às funções quadráticas, mostrando que estas funções podem, através da noção de taxa de variação, ser estudadas neste nível de ensino.

Os alunos mostraram-se curiosos e interessados no conteúdo estudado em cada encontro, apresentando erros e dificuldades em nível mais algébrico, como já comentei, entretanto, demonstrando condições de compreensão relativas ao assunto.

Cabe, portanto, o estudo da noção de taxa de variação no Ensino Médio, porém não apresentamos uma forma como isto pode ser feito, além de uma referência da Oficina. Contudo, acreditamos que cada profissional pode orientar este estudo da forma como achar mais adequado a seu público e a sua realidade.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte** [Vol.1]. 6. ed. São Paulo: Bookman Companhia Editora, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6021**: informação e documentação: publicação periódica científica impressa: apresentação. Rio de Janeiro, 2003.

_________. **NBR 6022**: *informação e documentação: artigo em publicação periódico científica impressa: apresentação*. Rio de Janeiro, 2003.

________. **NBR 6023**: *informação e documentação: referências: elaboração*. Rio de Janeiro, 2002.

________. **NBR 6024**: *informação e documentação: numeração progressiva das seções de um documento escrito: apresentação*. Rio de Janeiro, 2003.

________. **NBR 6027**: *informação e documentação: sumário: apresentação*. Rio de Janeiro, 2003.

________. **NBR 6028**: *informação e documentação: resumo: apresentação*. Rio de Janeiro, 2003.

________. **NBR 6029**: *informação e documentação: livros e folhetos: apresentação*. Rio de Janeiro, 2002.

________. **NBR 10520**: *informação e documentação: citações em documentos: apresentação*. Rio de Janeiro, 2002.

________. **NBR 14724**: *informação e documentação: trabalhos acadêmicos: apresentação*. Rio de Janeiro, 2002.

DANTE, Luís Roberto. **Matemática — Contexto e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2007.

GELBAUM, Bernard R.; OLMSTED, John M. ***Counterexamples in Analysis***. New York: Dover Publications, 2003.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; *et al*. **A Matemática do Ensino Médio** [Vol.1]. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

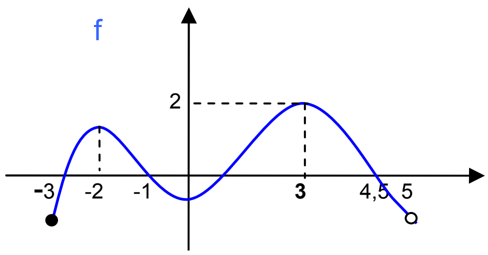
____________. **Temas e Problemas**. [*on line*] Disponível em: http://www.ensinomedio.impa.br/materiais/index.htm. Acesso em Julho/2009.

APÊNDICES

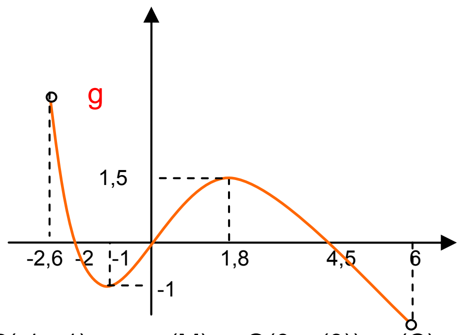
APÊNDICE 01: Material de Apoio Entregue no Primeiro Encontro, com as Respectivas Respostas

ATIVIDADE 1: Observe os esboços apresentados abaixo e responda:

1) Escreva se os pontos a seguir são de crescimento (C), decrescimento (D) ou de mudança (M).



P(2, f(2)) (C)
T(-2,3, f(-2,3)) (C)
Q(3,24, f(3,24)) (D)
S(-1, f(-1)) (D)
R(3, 2) (M)



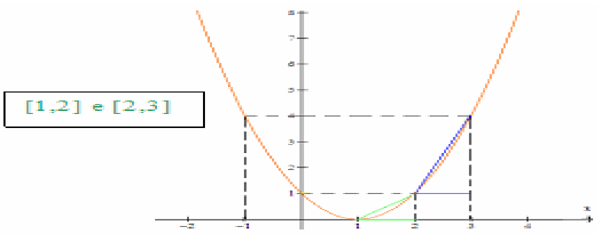
P(-1, -1) (M)
R(1,8; 1,5) (M)
Q(0, g(0)) (C)
S(5, g(5)) (D)

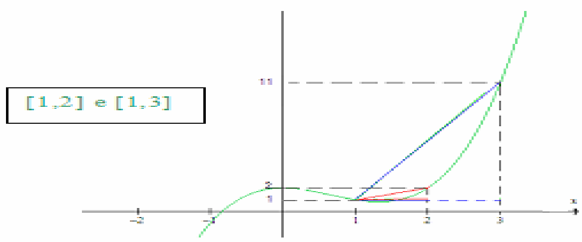
2) Intervalos de Crescimento	Intervalos de Decrescimento
f: $[-3,-2]\cup[0,3]$	$[-2,0]\cup[3,5[$
g: $[-1;1,8]$	$]-2,6;-1]\cup[1,8;6[$

3) Quanto variou a função f no intervalo [0,3], sabendo que $f(0) = -0{,}8$?

A variação da função no intervalo pedido é: $f(3) - f(0) = 2 - (-0{,}8) = 2{,}8$.

ATIVIDADE 2: Vamos verificar quanto variou cada função nos intervalos:





Vimos acima como responder as questões propostas nas atividades quando conhecemos o esboço do gráfico das funções. Agora, veremos como respondê-las, utilizando a lei destas funções e para isto, faremos o uso de uma ferramenta muito importante, a taxa de variação de uma função.

TAXA DE VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

Definição de taxa de variação

Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e dado $x\in\mathbb{R}$, definimos a função taxa de variação $V_h(x)$ como

$$V_h(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{ com } h\neq 0.$$

O ponto x é dito ponto de aplicação da variação e o valor de h é dito incremento da variação. Antes de aprendermos como utilizar esta ferramenta para descobrir a natureza de um ponto do gráfico de uma função, vamos nos dedicar a aprender a calcular a taxa de variação no caso de funções polinomiais mais simples de: primeiro, segundo e terceiro graus.

Exemplo: Vamos determinar a taxa de variação das funções apresentadas abaixo:

1. $f(x)=x^2-2x+1$ em x = 2.

$$V_h(2)=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-2(2+h)+1-(2^2-2\cdot 2+1)}{h}$$
$$=\frac{4+4h+h^2-4-2h}{h}=\frac{h^2+2h}{h}=h+2$$

2. $g(x)=x^3-2x^2+2$ em x = 1.

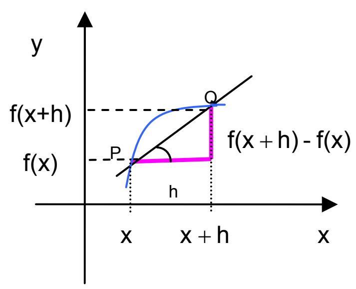
$$V_h(1)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^3-2(1+h)^2+2-(1^3-2\cdot 1^2+2)}{h}$$
$$=\frac{1+3h+3h^2+h^3-2-4h-2h^2+2-1}{h}=\frac{h^3+h^2-h}{h}=h^2+h-1$$

ATIVIDADE 3: Como seria a expressão da taxa de variação para a função f apresentada acima para um valor genérico x?

$$V_h(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-2(x+h)+1-(x^2-2\cdot x+1)}{h}$$
$$=\frac{x^2+2xh+h^2-2x-2h+1-x^2+2x-1}{h}=\frac{2xh+h^2-2h}{h}=\frac{h(2x+h-2)}{h}=2x+h-2$$

Interpretação Geométrica

A taxa de variação no intervalo $[x,x+h]$ nos dá a inclinação da reta secante nos pontos $P(x,f(x))$ e $Q(x+h,f(x+h))$, ou ainda, a variação média da função neste intervalo.



APÊNDICE 02: Material de Apoio Entregue no Segundo Encontro, com as Respectivas Respostas

Lembrando que nosso objetivo aqui é obter uma nova forma de construir o esboço do gráfico de funções quadráticas e cúbicas, saber se um ponto é de crescimento, decrescimento ou mudança e ainda os intervalos nos quais a função é crescente e decrescente, vamos iniciar nosso segundo encontro, relembrando alguns aspectos importantes na determinação da taxa de variação.

Vejamos o exemplo**:** determinar a taxa de variação de $f(x)=2x^2+4x-6$ em (3, f(3)).

$$V_h(3)=\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{2(3+h)^2+4(3+h)-6-24}{h}=\frac{2h^2+16h}{h}=\frac{h(2h+16)}{h}=2h+16$$

Observe que na definição de taxa de variação, não é possível tomar $h=0$ por gerar uma indeterminação do tipo zero divido por zero.

Contudo, ao considerarmos as funções básicas, que são as funções polinomiais e as funções definidas por quociente de funções polinomiais, é sempre possível colocar h em evidência no numerador e com isto simplificá-lo com o h do denominador, eliminando qualquer possibilidade de indeterminação. Feita, então, esta simplificação toma-se $h=0$. Por que sempre é possível tal simplificação p/ estas funções?

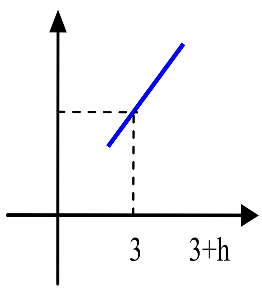
Note que quando fixamos x (no exemplo acima x=3), $f(x+h)-f(x)$ é um polinômio em h (no exemplo era h^2+16h) e se anula quando $h=0$. Desta forma, podemos fatorar esse polinômio colocando h em evidência e assim simplificá-lo com o denominador.

Esta é a ideia fundamental da noção de taxa de variação infinitesimal que veremos a seguir.

Exemplo 1: No exemplo acima, vamos determinar a taxa de variação infinitesimal em $(3, f(3))$. $V_h(3)=2h+16 \rightarrow V_0(3)=16$.

Acima vimos como determinar a taxa de variação infinitesimal de uma função, mas que contribuições podemos obter a partir de seu estudo?

Vamos ver a partir de agora as suas aplicações no estudo de funções, a começar pelo reconhecimento de um ponto de crescimento ou de decrescimento e a determinação dos intervalos onde a função é crescente e os intervalos onde é decrescente.



Note que $V_0(3)>0$ e também $V_h(3)>0$ quando tomamos para h valores suficientemente pequenos. Isso ocorre porque neste caso, os acréscimos ou descontos de h, quando este for suficientemente pequeno, não são significativos na taxa de variação. Sendo $V(3)>0$, a reta secante a f, passando por (3,f(3)) e (3+h,f(3+h)) é uma reta crescente. Assim, temos que ter que f(3+h)>f(3). Desta forma, (3, f(3)) é um ponto de crescimento de f. De maneira análoga, podemos verificar se um ponto é de decrescimento da função.

Acima, apresentamos um exemplo, mas pode-se provar que:

Quando $V_0(x) > 0$ em um ponto $P(x, f(x)) \in f$ temos que f é crescente em P, ou ainda, P é um ponto de crescimento de f.

Quando $V_0(x) < 0$ em um ponto $P(x, f(x)) \in f$ temos que f é decrescente em P, ou ainda, P é um ponto de decrescimento de f.

I é um intervalo de crescimento se todos os seus pontos (x, f(x)) forem de crescimento.

Consequentemente, se $V_0(x) > 0$ para todo $x \in I$ temos que I é um intervalo de crescimento de f.

I é um intervalo de decrescimento se todos os seus pontos (x, f(x)) forem de decrescimento.

Consequentemente, se $V_0(x) < 0$ para todo $x \in I$ temos que I é um intervalo de decrescimento de f

Exemplo 2: Seja a função $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

a) Identifique se os pontos (1, f(1)) e (-2, f(-2)) são de crescimento ou decrescimento.

Inicialmente, vamos determinar a taxa de variação em x =1:

$$V_h(1) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2h^2 + 8h}{h} = \frac{h(2h+8)}{h} = 2h + 8$$

Quando $h = 0$ $V_0(1) = 8$, então o ponto (1, f(1)) é de crescimento de f.

Agora vamos determinar a taxa de variação em x =-2:

$$V_h(-2) = \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{2h^2 - 4h}{h} = \frac{h(2h-4)}{h} = 2h - 4$$

Quando $h = 0$ $V_0(-2) = -4$, então o ponto (-2, f(-2)) é de decrescimento.

b) Determinação, parcial ou completa, dos intervalos de crescimento e de decrescimento.

Para isto vamos tomar um ponto genérico (x, f(x)).

$$V_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2(x+h)^2 + 4(x+h) - 6 - (2x^2 + 4x - 6)}{h} = \frac{h(4x + 2h + 4)}{h} = 4x + 2h + 4$$

Note que quando $V_0(x) > 0$, temos $4x + 4 > 0$, ou seja, $x > -1$.

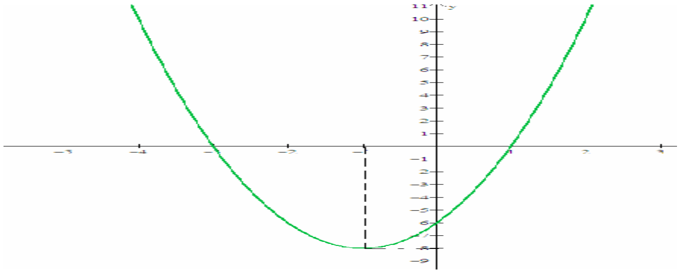
Assim, a função é crescente em $(-1, \infty)$.

Quando $V_0(x) < 0$,temos $4x + 4 < 0$, ou seja, $x < -1$. Em $(-\infty, -1)$, a função é decrescente.

c) Determinação, caso existam, os pontos de mudança de f.

O ponto a partir do qual a função passou de decrescente para crescente, que podemos observar pelo item anterior que foi em x = -1, portanto, no ponto (-1, f(-1)) = (-1, -8).

d) Com base nas informações acima, vamos construir alguns esboços do gráfico da função.



Generalizando, como será o esboço do gráfico para qualquer função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ com } a \neq 0.$$

Determinando, inicialmente, a expressão da taxa de variação de f, em um ponto genérico (x, f(x)):

$$V_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} = 2ax + b + ah$$

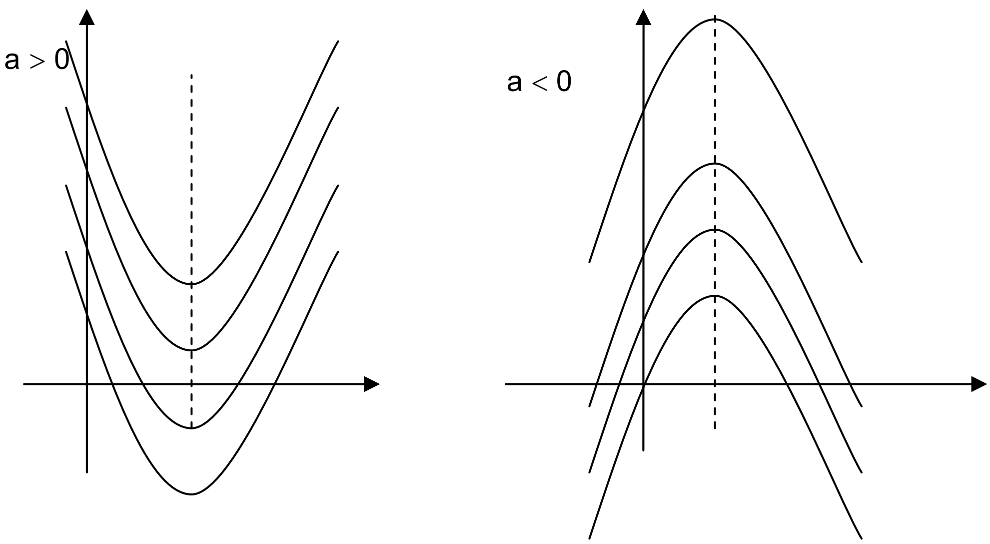
Agora, podemos obter a taxa de variação infinitesimal da função, fazendo $h = 0$:

$V_0(x) = 2ax + b$.

Como já vimos, quando $V_0(x) > 0$ a função é crescente, assim temos que a função é crescente quando $2ax + b > 0$, ou seja, $x > -b/2a$ (para $a > 0$) e $x < -b/2a$ (para $a < 0$).

Da mesma forma a função será decrescente quando $V_0(x) < 0$, ou seja, quando $x < -b/2a$ (para $a > 0$) e $x > -b/2a$ (para $a < 0$).

Assim, temos que para $x = -b/2a$, o ponto $\left(-b/2a, f(-b/2a)\right)$ é ponto de mudança.



APÊNDICE 03: Material de Apoio Entregue no Terceiro Encontro, com as Respectivas Respostas

No encontro 02, conseguimos a partir da taxa de variação infinitesimal, construir o esboço do gráfico de funções quadráticas, mesmo na sua forma geral.

Agora vamos aplicar novamente a noção de taxa de variação infinitesimal no estudo das funções cúbicas, para determinar:

- Se um ponto é de crescimento, decrescimento ou de mudança;
- Intervalos onde a função é crescente e intervalos onde é decrescente;
- Construção do esboço do gráfico.

Exemplo: Seja a função $f(x) = 3x^3 - x + 4$

a) Identificação de pontos de crescimento ou decrescimento para os pontos (0, f(0)) e $(-1, f(-1))$.

Inicialmente, vamos determinar a taxa de variação em (0, f(0)):

$$V_h(0) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{3h^3 - h + 4 - 4}{h} = \frac{h(3h^2 - 1)}{h} = 3h^2 - 1$$

Quando $h = 0$ $V_0(0) = -1$ então o ponto (0, f(0)) é de decrescimento.

Agora, vamos fazer o mesmo para (-1, f(-1)):

$$V_h(-1) = \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{3(-1+h)^3 - (-1+h) + 4 - 2}{h} = 3h^2 - 9h + 8$$

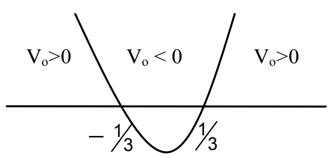
Quando $h = 0$ $V_0(-1) = 8$ então o ponto (-1, f(-1)) é de crescimento.

b) Determinação, parcial ou completa, dos intervalos de crescimento e de decrescimento da função.

Para isto vamos aplicar a definição de TV de f em um ponto genérico (x, f(x)).

$$V_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3(x+h)^3 - (x+h) + 4 - 3x^3 + x - 4}{h} = 9xh + 9x^2 + 3h^2 - 1$$

Assim, segue que a taxa de variação infinitesimal será $V_0(x) = 9x^2 - 1$. Para verificar os intervalos nos quais $V_0(x) > 0$ e onde é $V_0(x) < 0$, devemos estudar seu sinal.

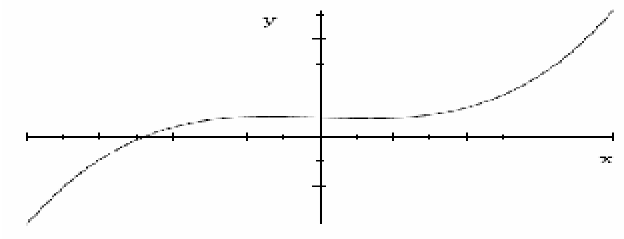


Quando $V_0(x) > 0$, temos que $9x^2 - 1 > 0$ e isto ocorre nos intervalos $(-\infty, -1/3) \cup (1/3, \infty)$.
Assim temos que a função é crescente.
Quando $V_0(x) < 0$, temos que $9x^2 - 1 < 0$ e isto ocorre em $(-1/3, 1/3)$ sendo assim decrescente neste intervalo.

c) Determinação, caso existam, os pontos de mudança de f.

Vimos no item anterior que em $x = -\frac{1}{3}$ a função passa de crescente para decrescente e em $x = \frac{1}{3}$ f passa de decrescente para crescente, assim, temos os pontos de mudança da função: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{38}{9}\right)$ e $\left(\frac{1}{3}, \frac{34}{9}\right)$.

d) Com base nas informações acima, vamos construir alguns esboços do gráfico da função.



PONTOS DE MÁXIMO E MÍNIMO DE UMA FUNÇÃO

i. Definição de máximo e mínimo relativo de uma função;
ii. Definição de máximo e mínimo absoluto de uma função.

i. Definição

Diz-se que uma função f tem um valor máximo relativo em x_0 se existir um intervalo aberto I contendo x_0, tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x em I. x_0 é dito ponto de máximo relativo de f.

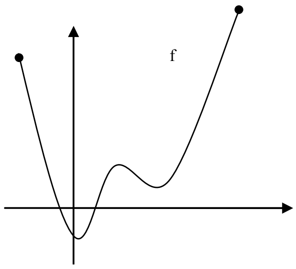
Diz-se que uma função f tem um valor mínimo relativo em x_0 se existir um intervalo aberto I contendo x_0, tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x em I. x_0 é dito ponto de mínimo relativo de f.

ii. Definição

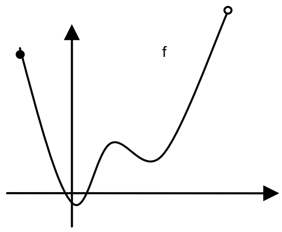
Diz-se que uma função f tem um valor máximo absoluto num intervalo J, se existir algum x_0 em J tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x em J. Neste caso, $f(x_0)$ será o valor máximo absoluto de f em J. x_0 é dito máximo absoluto de f em J.

Diz-se que uma função f tem um valor mínimo absoluto num intervalo J, se existir algum x_0 em J tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x em J. Neste caso, $f(x_0)$ será o valor mínimo absoluto de f em J. x_0 é dito mínimo absoluto de f em J.

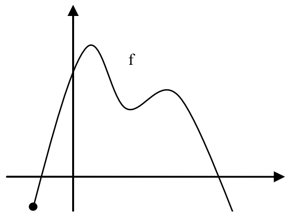
Exemplos:



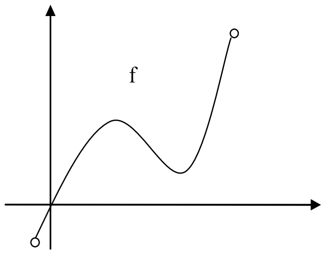
f tem mínimo e máximo absolutos em $[a,b]$.
f tem máximo e mínimo relativos em $[a,b]$.



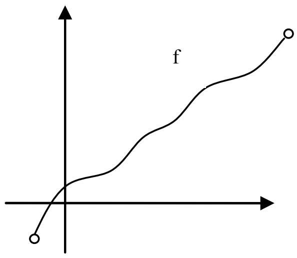
f tem mínimo absoluto, mas não tem máximo absoluto em $[a,b[$.
f tem máximo e mínimo relativos em $[a,b[$.



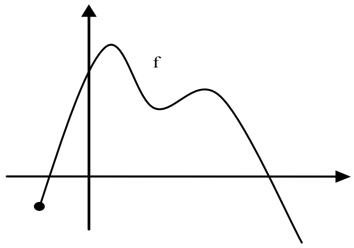
f tem máximo absoluto e não tem mínimo absoluto em $[a,b[$.
f tem máximo e mínimo relativos em $[a,b[$.



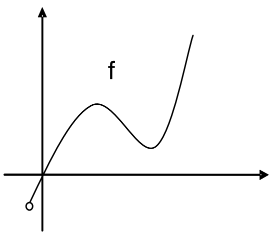
f não tem máximo nem mínimo absolutos em $]a,b[$. f tem máximo e mínimo relativos em $]a,b[$.



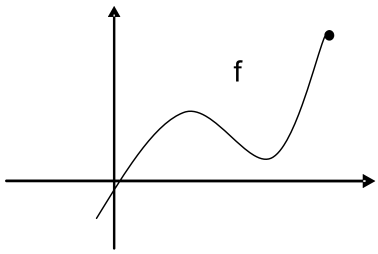
f não tem máximo nem mínimo absolutos em $]a,b[$ e nem máximo e mínimo relativo em $]a,b[$.



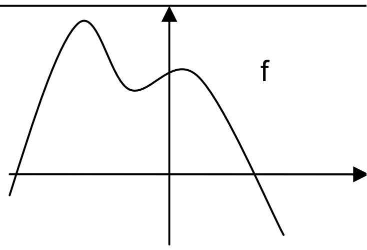
f tem máximo absoluto e não tem mínimo absoluto em $[a,\infty)$ e tem máximo e mínimo relativos em $[a,\infty)$.



f não tem máximo e nem mínimo absolutos em $]a,\infty[$ e tem máximo e mínimo relativos em $]a,\infty[$.



f tem máximo e não tem mínimo absoluto em $]-\infty,b]$ e tem máximo e mínimo relativos em $]-\infty,b]$.



f tem máximo e não tem mínimo absolutos em $\mathbb{R}$ e tem máximo e mínimo relativos em $\mathbb{R}$.

Note que os pontos de mudança são sempre máximos ou mínimos da função e dependendo do intervalo e da função, podem ser absolutos ou relativos.

No próximo encontro, iremos estudar algumas aplicações dos pontos de máximo e mínimo para resolver problemas de otimização. Matematicamente, os problemas de otimização podem ser reduzidos à determinação do maior ou menor valor da função em um intervalo, assim como onde ocorre este valor.

APÊNDICE 04: Material de Apoio Entregue no Quarto Encontro, com as Respectivas Respostas

Vimos nos encontros anteriores as contribuições da taxa de variação infinitesimal na construção do esboço do gráfico das funções quadráticas e cúbicas, como também no reconhecimento da natureza de um ponto do gráfico e os intervalos de crescimento e decrescimento.

Agora, vamos ver mais algumas aplicações, nas quais estudaremos os pontos de máximo e de mínimo para resolver problemas de otimização.

Nos problemas a seguir, a resolução será realizada em duas etapas:

1ª) Organização dos dados e obtenção da função que descreve a situação apresentada.

2ª) Resolução do problema a partir da função obtida na etapa anterior aplicando os conceitos que estudamos nos encontros anteriores.

EXEMPLOS

a) Quais as dimensões de um retângulo com perímetro 100 cm, cuja área é a maior possível?

A solução deste exemplo está apresentada no capítulo 4, no Exemplo 4.4.

b) Uma caixa sem tampa deve ser feita a partir de uma folha de papelão medindo 16 por 30 cm, destacando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Qual é a medida do lado dos quadrados para se obter uma caixa com maior volume?

A solução deste exemplo está apresentada no capítulo 5, no Exemplo 5.4.

.

c) Ache o raio e a altura de um cilindro circular reto com o maior volume, o qual pode ser inscrito em um cone circular reto de 10 cm de altura e 6 cm de raio.

A solução deste exemplo está apresentada no capítulo 5, no Exemplo 5.5.

d) Um terreno retangular será cercado de forma que dois lados opostos devem receber uma cerca reforçada que custa R$ 3,00 o metro, enquanto que os dois lados restantes recebem uma cerca de R$ 2,00 o metro. Quais as dimensões do terreno de maior área que pode ser cercado com R$6000,00?

A solução deste exemplo está apresentada no capítulo 4, no Exemplo 4.6.