UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Estudo de um modelo α-ω-b para o dínamo solar

por

Fabio Souto de Azevedo

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Mark Thompson
Orientador

Porto Alegre, Novembro de 2006.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Souto de Azevedo, Fabio

Estudo de um modelo α-ω-b para o dínamo solar / Fabio Souto de Azevedo.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2006.

56 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2006.
Orientador: Thompson, Mark

Dissertação: Matemática Aplicada
Teoria do dínamo, MHD dínamo alpha-omega

Estudo de um modelo α-ω-b para o dínamo solar

por

Fabio Souto de Azevedo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Mark Thompson

Banca examinadora:

Professor Dr. Marco Antônio Raupp
Laboratório Nacional de Computação Científica

Professor Dr. Leandro Farina
PPGMAP - UFRGS

Professor Dr. Alexandre Tavares Baravieira
PPGMAT - UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em 29/11/2006.

Maria Cristina Varriale
Coordenador

Sumário

RESUMO

O problema do campo magnético gerado nos fluidos condutores de uma estrela como o Sol ainda é campo de investigações e muitos modelos têm sido estudados. Neste trabalho realizamos o estudo de um destes modelos para a evolução destes campos em conjunto com o campo de velocidades do fluido, considerando a interação entre eles. Neste contexto, deduzimos as equação do dínamo α-ω apartir de equação da teoria eletromagnética e da física de plasma. Demonstramos também, a existência de quotas a priori para a soluções destas equações, estabelecemos resultados de existência e unicidade de soluções. Finalmente, demonstramos uma estimativa local de truncamento para método espectral aplicado ao sistema em questão e apresentamos resultados de simulação.

ABSTRACT

The magnetic field generated in conducting fluids inside a star like the Sun is yet an open problem and many models have been studied. In this work we analyze one of these model for the evolution of magnetic fields interacting with the field of velocity in the fluid. In this context, we derive the $\alpha - \omega$ dynamo equations from the classical electromagnetic theory and plasma physics. We establish as well some a priori bounds for their solutions, showing a theorem of existence and uniqueness. Finally we demonstrate an estimate of the local truncation error for the espectral method applied to the system in study and we present some results from simulation.

1 INTRODUÇÃO

O interesse pelo estudo do Sol vem de longa data e assume diversas perspectivas, que vão desde a sua influência sobre o clima terrestre até a possibilidade de, a partir da compreensão do seu comportamento, inferir sobre muitos fenômenos presentes em corpos celestes e nos plasmas em geral, alguns desses, ainda temas em aberto na ciência.

Um dos problemas ainda não compreendidos a respeito do Sol – e de outros corpos celestes como a Terra – é a origem e a natureza de seu campo magnético. A observação direta aponta para a existência de campos oscilantes, mudando de sinal periodicamente. Intimamente relacionadas aos campo magnéticos, estão as manchas solares, que apresentam estranho comportamento, ilustrado pelo diagrama de Maunder ou diagrama de borboleta (figura 2.1).

O estudo da evolução do campo magnético em corpos celestes como processo auto-sustentado é um assunto de fundamental relevância na astrofísica. Uma teoria candidata a explicar tal fato é a chamada teoria do dínamo, que defende a existência de uma dínamo solar, ou seja, fenômenos auto-sustentados magnetohidrodinâmicos dando origem ao campo. Tal teoria traz à luz o *problema do dínamo*.

O problema do dínamo, segundo Priest em [18], consiste em demonstrar a existência de um movimento que mantenha um campo magnético oscilante e que este movimento se mantém pelas forças presentes na estrela. Autores como [23] e [14] elegem como marco inicial para o problema do dínamo a publicação, em 1933, da tese de doutorado de Cowling. Nesse trabalho, Cowling demonstrou que sob certas condições simplificadoras o efeito dínamo não poderia se manter. Genericamente falando, um campo magnético estacionário e axissimétrico deveria atenuar-se e desaparecer. Isso implicava que as pesquisas deveriam se voltar à busca de modelos dinâmicos suficientes para sustentar o efeito dínamo. O que tem dado margem a um amplo debate no campo acadêmico, abrangendo teorias que oscilam da aceitação imparcial do dínamo como explicação para o fenômeno à proposições teóricas alternativas, que tentam senão refutá-lo, ao menos matizar e adicionar novas dificuldades ao problema, tendo como base as discrepâncias obtidas entre os valores esperados pelas observações do Sol e aqueles necessários para satisfazer as equações do dínamo. Diversas modificações foram propostas ([18, p.328]) e proliferam trabalhos envolvendo modelagem e simulação, assunto que trabalharemos mais detalhadamente no capítulo 2.

Os primeiros modelos cinéticos para o dínamo foram estabelecidos em 1958 por Backus e Herzenberg ([18, p.328]). Deste então diversos modelos para dínamos tornaram-se freqüentes na literatura como em [4].

Em contrapartida, diversos teoremas estabelecem a impossibilidade de funcionamento para determinadas categorias de dínamos, como os axissimétricos e aqueles com movimento apenas toroidal. Tais resultados deixam claro que a pesquisa não pára nos modelos mais evidentes.

Tais dificuldades levaram ao estudo dos modelos de campos médios, ou seja, considera-se a existência de flutuações em torno de valores efetivos. Assim, apenas estes aparecem explicitamente nas equações e as flutuações surgem como parâmetros a mais de renormalização. Os mais relevantes destes parâmetros são devidos ao “efeito alpha” e significa a geração de campos poloidais a partir de toroidais.

Nesta linha, Robert (pode-se ver em [14, p. 235]), estudou diversos modelos e confimou numericamente o comportamento oscilatório. Nestes trabalhos, grande simplificação foi alcançada considerando o movimento estacionário e conhecido. Steenbeck e Krause fizeram trabalhos semelhantes, e através de simulações sugerem que o período das oscilações seja de aproximadante $\frac{\pi R^2}{50\eta}$. O valor sugerido da difusividade magnética η por observações é da ordem de $10^9 m^2 s^{-1}$, o que resulta em um período de 1 ano, o que vinte e duas vezes menor que o real. Diversos trabalhos modernos estendem estes resultados como [5] e basicamente trabalham nas mesmas linhas.

Alguns trabalhos se centralizam em calcular estes parâmetros de renormalização, como o efeito alpha e difusividade magnética. Este é o caso de [11], onde o autor supondo dependência harmônica no tempo, estima $8,4 \cdot 10^{-2} ms^{-1} \leq \alpha^* \leq 5,2 \cdot 10^{-1} ms^{-1}$ e $4,5 \cdot 10^7 m^2 s^{-1} \leq \eta \leq 7,1 \cdot 10^7 m^2 s^{-1}$, valores mais uma vez muito abaixo do esperado para este último. Um exemplo recente é [8] que sugere $\alpha = (\alpha_0 + \beta_0 \widehat{B} \cdot \nabla \times \widehat{B})/(1 + |\widehat{B}|^2)$, onde $\widehat{B}$ é o campo magnético em grande escala. Isto indica que α seja dependente de B. Priest já catologara tais esforços e cita autores que adotem $\alpha \approx 1 - c|\mathbf{B}|^2$ para campos fracos e $\alpha \approx |\mathbf{B}| - 3$ para campos fortes, considerações idênticas às utilizadas recentemente em [22].

A influência do movimento meridional apenas recentemente tem ganhado atenção e ainda está longe de atingir o consenso. Köhler em 1973 ([11]) afima que "nem a a teoria nem a observação dão confiáveis evidências de sua existência e suas propriedades". Trabalhos mais modernos, no entanto, apontam para o contrário. Em [5] de 1995, afirma-se que a circulação meridional pode ter profunda influência no dínamo e propõe um modelo para o dínamo, onde a circulação meridional altera drasticamente seu comportamento, alterando o período em até três vezes. Buscando estudar o comportamento assintótico de um determinado modelo α-ω para o dínamo, considera o fluxo toroidal e afirma que nenhum movimento azimutal influi significativamente em seu comportamento. Quanto à dados experimentais, [9] mostra ter havido grande correlação entre fluxos meridionais e o período do ciclo, sugerindo que esta circulação modula a frequência de oscilação.

Autores como Jones, Weiss e Cattaneo tentaram compreender o fenômeno, reduzindo as equações do dínamo a um sistema de equações diferenciais ordinárias. O trabalho, apresentado em [10], resulta na redução a sistema de sexta ordem – de três variáveis complexas – cujo comportamento pode ser caótico, fugindo de toda periodicidade.

Dado o exposto, consideramos o problema do dínamo assunto de grande interesse dentro da matemática aplicada. Este trabalho divide-se em três partes. A proposta da primeira, capítulo 2, é apresentar o contexto físico e as equações básicas da magnetohidrodinâmica (MHD), conduzindo a construção de um modelo do dínamo de campos médios formado de um sistema de três equações diferenciais parciais.

No capítulo 3, inserimos o problema num contexto matemático adequado, estabelecemos cotas a priori que nos permitiram através do método de Galerkin, garantir a existência e unicidade de soluções para o sistema. Demostramos também um resultado para o erro de truncamento local para o sistema semi-discreto obtido por aproximações espectrais.

Finalmente, no capítulo 4, nos interessamos pelas simulações numéricas do problema, apresentamos resultados de simulação que sugerem a existência de soluções periódicas.

2 APRESENTAÇÃO E FORMULAÇÃO FíSICA DO PROBLEMA

2.1 O ciclo de onze anos

Desde a antiguidade, são observadas regiões mais escuras na superfície solar. Essas regiões recebem o nome de manchas solares[1] e suas aparições não acontecem de forma bem distribuída no tempo nem no espaço.

As manchas solares parecem seguir um padrão de onze anos. Atingem um máximo, quando muitas manchas são observadas de diversos tamanhos. Depois, as manchas são observadas em menor freqüência, chegam a um mínino. Então, a freqüência aumenta mais uma vez em direção a novo máximo, quando o ciclo se fecha.

A posição das manchas também varia com o tempo. No período de máximo, a maioria das manchas é registrada a uma latitude de aproximadamente 28°. A medida que as manchas tornam-se mais raras, a latitude onde são observadas diminui: no meio do ciclo, a latitude média fica em torno de 12° e no fim no ciclo, atinge uma média de apenas 7°.

Esse comportamento fica claro no diagrama de borboleta[2] de Maunder. Neste gráfico, as abscissas indicam datas, enquanto as ordenadas indicam a latitude. Um ponto é traçado sempre que é observada uma mancha solar na data e latitude correspondentes às coordenadas do ponto.

Figura 2.1: Diagrama de borboleta

As manchas solares são produzidas pelo resfriamento da superfície solar naquela região. Estão fortemente ligadas a outros fenômenos como as explosões

[1]Sunspots, em inglês.
[2]Butterfly diagram, em inglês.

solares[3] e as ejeções de massa da corona[4] e são atribuídas a distorções no campo magnético solar.

Em 1908, Hale mostrou que o período das manchas solares correspondia na verdade, a apenas um semi-período do ciclo magnético. Isso porque fortes campos magnéticos são medidos na superfície solar nas regiões das manchas e a polaridade dessas manchas se inverte de um ciclo para outro. Ou seja, se durante um período as manchas observadas num hemisfério apresentam polaridade norte, no próximo, apresentarão polaridade sul.

Essa periodicidade, no entanto, não é perfeita, mas marcada por épocas de atividade solar mais ou menos intensa. Os anos de 1645 a 1715, por exemplo, são conhecidos como o mínimo de Maunder. Durante esses anos, quase não se observaram machas solares e, portanto, conjecturou-se a ausência de ciclos solares. Medições do isótopo 10 do Berílio em blocos de gelo, no entanto, denunciam, apesar da baixa atividade, a existência de ciclos bem marcados durante esse período. Há estudos como em [2] que comparam tais observações com modelos e sugerem que o ciclo solar seja modulado, havendo épocas de maiores atividade, os assim chamados grandes máximos e épocas de menor atividade, os grandes mínimos.

Na seqüência deste capítulo, discutiremos as equações básicas da física que regem o comportamento de campo magnético em fluidos ionizados como o plasma solar e o movimento deste plasma como um fluido.

2.2 As equações de Maxwell

As equações de Maxwell podem ser expressas através das quatro seguintes equações diferenciais e se referem ao geral comportamento do campo magnético do

[3]Solar flares, em inglês.
[4]Coronal mass ejections, em inglês.

ponto da teoria clássica:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{q}{\varepsilon} \tag{2.4}$$

Onde $\mathbf{B}$ indica a densidade de fluxo magnético, que se mede em tesla (T); $\mathbf{E}$ é o campo elétrico e mede-se em volt por metro (V/m); $\mathbf{j}$, a densidade de corrente elétrica é dada em ampere(A) e q, a densidade de carga elétrica é dada em coulomb por metro cúbico (C/m^3). As constantes permeabilidade magnética e permissividade elétrica são denotados, respectivamente por ε e μ. Ainda, a velocidade da luz é escrita c.

Vamos considerar, invariavelmente, para o plasma solar, ε e μ, as constantes do vácuo, ou seja $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$ e $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} WbA^{-1} m^{-1}$, o que resulta em $c = 3 \cdot 10^8 ms^{-1}$.

Veja que até então nenhuma propriedade do sol foi considerada, isto vai acontecer quando estabelecermos uma relação entre o campo elétrico $\mathbf{E}$ e a densidade de corrente $\mathbf{j}$. Faremos isso através da Lei de Ohm que explicamos a seguir.

2.3 A lei de Ohm

A lei de Ohm é válida para plasmas não relativísticos, não degenerados e totalmente ionizados (situações próxima da encontrada no Sol) e afirma que a densidade de corrente é proporcional ao campo elétrico total. Designando por $\mathbf{v}$ o vetor velocidade do fluido, cujo módulo é dado em metro por segundo (m/s), escrevemos:

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \tag{2.5}$$

onde σ é a condutividade do plasma e é dada em $\Omega^{-1} m^{-1}$. Seu valor é dado pela expressão (Veja [18]):

$$\sigma = 1.53 \cdot 10^{-2} \frac{T^{3/2}}{\ln \Lambda} \Omega^{-1} m^{-1} \tag{2.6}$$

O termo $\ln \Lambda$ é conhecido como logaritmo de Coulomb, seu valor normalmente situa-se entre 5 e 20 e pode ser aproximado por:

$$ln\Lambda = 25.3 - \ln \rho + 2.3 \ln T \tag{2.7}$$

onde T é a temperatura em Kelvin e ρ, a densidade.

Podemos agora, partindo destas equações, deduzir a equação da indução.

2.4 Equação da indução

Ao combinar as equações 2.1, 2.2, 2.3 e 2.5, temos a chamada equação da indução:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) && (2.8)\\
&= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}}{\sigma \mu} \right) && (2.9)\\
&= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times \left[\eta \nabla \times \mathbf{B} + \frac{\eta}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times E) \right] && (2.10)\\
&= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \eta \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\eta}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} && (2.11)
\end{aligned}$$

Aqui, η é a difusividade magnética e foi considerada uniforme.

Chegamos, então, à seguinte equação:

$$\frac{\eta}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \triangle \mathbf{B} \tag{2.12}$$

O simbolo $\triangle$ é o laplaciano, quando aplicado a um vetor, deve ser entendido como o laplaciano escalar aplicada a cada uma das componentes do vetor em coordenadas retangulares. Uma relação fácil de verificar para esse operador é dada por:

$$\triangle \mathbf{B} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} \tag{2.13}$$

Que, no caso de campos incompressíveis (cujo divergente é nulo), se reduz simplesmente a:

$$\triangle \mathbf{B} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} \tag{2.14}$$

Observe que se negligenciarmos a corrente de deslocamento, que corresponde ao termo com a derivada segunda no tempo, chegamos à equação da indução, também conhecida como equação do dínamo:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \triangle \mathbf{B} \tag{2.15}$$

Tal aproximação, conhecida como *aproximação magnetohidrodinâmica*, é largamente utilizada na literatura e resulta que a Lei de Ohm se resume a:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \tag{2.16}$$

2.5 O problema do dínamo

O problema do dínamo, segundo Priest ([18, p. 326]), consiste de duas partes: demonstrar a existência de um movimento $\mathbf{v}$ que sustente campos magnéticos oscilantes e mostrar que este movimento é mantido pelas forças presentes. O problema como um todo é muito complicado, maior parte das tentativas têm sido no sentido de resolver apenas a primeira parte, conhecida como *problema cinético do dínamo*, como um artigo de revisão ainda recente, podemos citar [24].

Em contraste com o problema cinético, o *problema magnetohidrodinâmico do dínamo* se propõe a resolver ambas as partes.

Estes problemas são a centralidade de obras como [14], [17] e [12].

Com o intuito de trazer à luz algumas propriedades do problema, bem como algumas condições necessárias para a existência de um *efeito dínamo*, vamos estudar o balanço de energia magnética associado à equação 2.15.

2.6 A energia associada ao campo magnético

A energia magnética, E_D armazenada numa região D, é dada pela integral:

$$E_D = \int_D \frac{1}{2\mu}|\mathbf{B}|^2 d\mathbf{x} \tag{2.17}$$

Isto nos motiva a multiplicar a equação do dínamo 2.15 pelo campo $\mathbf{B}$ e integrar por partes em todo volume V do Sol, que consideraremos doravante como uma esfera, centrada na origem do sistema de coordenadas.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2\mu}|\mathbf{B}|^2 d\mathbf{x} = -\int_V \frac{\eta}{\mu}|\nabla \times \mathbf{B}|^2 d\mathbf{x} + \int_V \mathbf{v} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B})\, d\mathbf{x} + \int_{\partial V} \widehat{r} \cdot \mathbf{S} dS(\mathbf{x}) \tag{2.18}$$

Aqui, introduzimos o vetor de Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu}\mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{2.19}$$

que, através de 2.5 e 2.16, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\sigma\mu} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \times \mathbf{B} && (2.20) \\ &= -\frac{1}{\mu}\left[(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \eta\,(\nabla \times \mathbf{B})\right] && (2.21) \end{aligned}$$

A expressão 2.18 estabelece um balanço de energia, afirmando que a variação da energia magnética no Sol é igual às perdas ôhmicas, representadas no primeiro termo a direita de 2.18 (com sinal sempre negativo), à interação com o movimento do fluido e pelas trocas líquidas de energia através da superfície.

É fortemente esperado que este último termo tenha sinal negativo, ou seja, que o Sol esteja perdendo energia na forma de radiação eletromagnética. No entanto, a aproximação magnetohidrodinâmica 2.16, associada a hipóteses de continuidade, nos levaram a supor que:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} = 0 \\ &\mathbf{v} = 0 \end{aligned}\right\} \text{na superfície e região exterior} \tag{2.22}$$

Isto implica que o vetor de Poynting seja nulo na fronteira e que, portanto, o Sol não troca energia com o meio externo. Este resultado é conseqüência da aproximação magnetohidrodinâmica, que não é fisicamente aceitável na ausência de fluidos (em especial na fronteira externa do Sol). Não obstante, ela é largamente utilizada na literatura como [12], [14], [18], [21] e [3].

De qualquer forma, devemos concluir que, para sustentar a existência de campos magnéticos não transientes, o dínamo solar deve ser capaz de se alimentar do movimento do fluido.

Para nos aprofundarmos nessa discussão, é conveniente introduzir o conceito de potencial magnético $\mathbf{A}(x)$ para o campo magnético $\mathbf{B}(x)$, que será feito na seção seguinte.

2.7 Potencial Magnético

Define-se o potencial magnético $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ de um campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ através integral singular:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{|x-y|} d\mathbf{y} \tag{2.23}$$

Observe que temos a igualdade $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, pois:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \tfrac{1}{4\pi} \int_V \nabla_x \times \tfrac{\nabla \times \mathbf{B}}{|x-y|} d\mathbf{y} = -\tfrac{1}{4\pi} \int_V \nabla_y \times \tfrac{1}{|x-y|} \left(\nabla \times \mathbf{B}\right) d\mathbf{y} \\ &= \tfrac{1}{4\pi} \int_V \tfrac{\triangle \mathbf{B}}{|x-y|} d\mathbf{y} = \tfrac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \tfrac{\triangle \mathbf{B}}{|x-y|} d\mathbf{y} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Empregamos integração por partes, o fato que $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ em $\mathbf{R}^3 \setminus V$ e a solução do problema de Poisson em $\mathbf{R}^3$.

Desta forma, não só fomos capazes de definir um potencial magnético que, em algum sentido ou outro, tem a função de inverter o rotacional, como fomos capazes de expressar o campo magnético exterior pelos seus valores na região interna ao Sol:

$$\mathbf{B}^{ext}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{|x-y|} d\mathbf{y} \tag{2.25}$$

2.8 O dínamo axissimétrico

O campo magnético solar observado é essencialmente axissimétrico, ou seja, simétrico em relação ao eixo de rotação do Sol. Como ficará mais claro na seqüência desta seção, esta axissimetria é apenas de campos médios, ou seja, admite-se, e mesmo se exige, a existência de flutuações de menor escala – possivelmente de origem turbulenta. Trabalhos recentes, no entanto, questionam até mesmo esta simetria de campos médios; isto é discutido, por exemplo, em [16] e alguns modelos já foram propostos como em [15].

A hipótese de axissimetria de campo médios é, portanto, amplamente assumida, como em [5], [11], [18], [12] e [14].

O trabalho de analisar e simular a equação do dínamo em condições como as encontradas no Sol é extremamente complicado, dado que deveriam ser considerados fenômenos de escalas variando em diversas ordens de grandeza. Os modelos que têm sido propostos sempre tentam tratar estes fenômenos de menor escala de forma simples baseados seja em ajustes com a observação – isso é feito em [11] e [13] – seja através das equações básicas – como é feito em [8].

Sob a hipótese de axissimetria, a equação do dínamo pode ser separada em duas equações escalares. Isso é possível, introduzindo um sistema de coordenadas poloidais (veja seção 3.1).Esta decomposição, no entanto, no caso axissimétrico toma uma forma muito simples, senão vejamos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p = B_\varphi \widehat{\varphi} + \left(B_r \widehat{r} + B_\theta \widehat{\theta} \right) \tag{2.26}$$

onde, B_φ, B_r e B_θ são as componentes azimutal, radial e colateral do campo magnético em coordenadas esféricas. Os vetores $\mathbf{B}_t$ e $\mathbf{B}_p$ representam as componentes toroidal e poloidal, repectivamente.

Esta decomposição ainda nos permite escrever:

$$\mathbf{B}_p = \nabla \times (A\widehat{\varphi}) \tag{2.27}$$

Fazendo a mesma decomposição para o vetor $\mathbf{v}$, a equação do dínamo 2.15 assume a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_p) + \eta \triangle \mathbf{B}_p \\ \frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_t + \mathbf{v}_t \times \mathbf{B}_p) + \eta \triangle \mathbf{B}_t \end{aligned} \tag{2.28}$$

Neste momento devemos concluir que o dínamo não pode existir sob tais hipóteses, senão vejamos:

Integrando a primeira equação de 2.28, temos:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial t} = \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_p + \eta \triangle \mathbf{A}_t \tag{2.29}$$

Definimos a função fluxo como:

$$\chi := r \sin\theta A_\varphi = R(A_t \cdot \widehat{\varphi}) \tag{2.30}$$

E o operador de Stokes $D^2 := R \triangle R^{-1}$, obtemos:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla \chi = \eta D^2 \chi \tag{2.31}$$

Se multiplicarmos os termos de 2.29 por χ e integrarmos, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \chi^2 d\mathbf{x} + \int_V \mathbf{v}_p \cdot \nabla \chi d\mathbf{x} = \eta \int_V \chi D^2 \chi d\mathbf{x} = -\eta \int_V |D\chi|^2 d\mathbf{x} \tag{2.32}$$

A integral do termo advectivo (segundo termo) deve ser zero, então, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \chi^2 d\mathbf{x} = -\eta \int_V |\nabla \chi|^2 d\mathbf{x} \leq -C \int_V |\chi|^2 d\mathbf{x} \tag{2.33}$$

A desigualdade provém da desigualdade de Poincaré – que será discutida na seção 3.3.

Isto implica que χ decai a zero e, portanto, termos poloidais não se mantêm.

Para resolver este impasse, Parker([17]), propôs que as bolhas de plasma que atravessam a zona de convecção sejam aceleradas pela força de Coriolis de executem um movimento giratório. Esta flutuação em torno da axissimetria, seria capaz de transformar campos toroidais em poloidais. Parker modela este efeito como um campo elétrico proporcional ao campo magnético toroidal e altera a equação da indução da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_p) + \eta \triangle \mathbf{B}_p + \nabla \times (\alpha(x)\mathbf{B}_t) \tag{2.34}$$

Onde $\alpha(x)$ é uma função escalar que depende apenas de x.

O que é equivalente a:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial t} = \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_p + \eta \triangle \mathbf{A}_t + \alpha(x)\mathbf{B}_t \tag{2.35}$$

Acredita-se, ainda, que alguns efeitos não lineares (veja [18] pág 339), limitem o crescimento do campo magnético. Uma possibilidade é a remoção de fluxo por empuxo magnético. Vamos considerar um modelo simples proposto por Jones, que assume a seguinte alteração da equação da indução e considera:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_t \times \mathbf{B}_p) + \eta \triangle \mathbf{B}_t - b\left|\mathbf{B}_t\right|^2 \mathbf{B}_t \tag{2.36}$$

Em 2.36, b é uma constante positiva e $\mathbf{v}_p = 0$.

A fim de escrever essas equações na forma escalar, vamos, agora, trabalhar termo a termo, sempre usando:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_t = v_\varphi \widehat{\varphi} = R\omega\widehat{\varphi} \\ \mathbf{B}_p &= \nabla \times \mathbf{A}_t = \nabla \times (A\widehat{\varphi}) \\ \mathbf{B}_t &= B_\varphi \widehat{\varphi} \end{aligned} \tag{2.37}$$

De forma que temos:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{v}_t \times \mathbf{B}_p) &= \nabla \times (v_\varphi \widehat{\varphi} \times (\nabla \times A\widehat{\varphi})) && (2.38)\\
&= \nabla \times \left[\left(\frac{v_\varphi}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A)\widehat{\theta} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA)\widehat{\mathbf{r}} \right) \right] && (2.39)\\
&= \nabla \times \left[\frac{v_\varphi R^{-1}}{r} \frac{\partial AR}{\partial \theta} \widehat{\theta} + v_\varphi R^{-1} \frac{\partial AR}{\partial r} \widehat{\mathbf{r}} \right] && (2.40)\\
&= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\varphi R^{-1}}{\partial r} \frac{\partial AR}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\varphi R^{-1}}{\partial \theta} \frac{\partial AR}{\partial r} \right) \widehat{\varphi} && (2.41)\\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial (v_\varphi R^{-1}, AR)}{\partial (r,\theta)} \widehat{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\omega, AR)}{\partial(r,\theta)} \widehat{\varphi} && (2.42)
\end{aligned}$$

$$\triangle \mathbf{B}_t = \triangle (B_\varphi \widehat{\varphi}) = (\triangle - R^{-2}) B_\varphi \widehat{\varphi} \tag{2.43}$$

Os termos restantes são manipulados de forma idêntica. Isso nos leva ao seguinte sistema escalar:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial t} A &= \eta \left(\triangle - R^{-2} \right) A + \alpha B_\varphi \\
\tfrac{\partial}{\partial t} B_\varphi &= \tfrac{1}{r} \tfrac{\partial(\omega, AR)}{\partial(r,\theta)} + \eta \left(\triangle - R^{-2} \right) B_\varphi - b B_\varphi^3
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Merece atenção observar que se $\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = 0$, ou seja, se a rotação ω (velocidade angular) for constante, então o campo azimutal decai a zero, não havendo efeito dínamo. É por esta razão que este tipo de modelo é chamado de *dínamo* α-ω. Em função da presença do termo de empuxo (buoyance), chamamos este modelo de α-ω-b.

2.9 Equação do movimento azimutal

Uma vez escritas as expressões para o dínamo, resta-nos encontrar equações para o movimento. Em MHD de campos médios, costuma-se utilizar as equações de Navier-Stokes, que podem ser escritas em coordenadas esféricas da seguinte forma (veja [7]):

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \tag{2.45}$$

$$= \frac{1}{\rho} F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\triangle v_r - \frac{2 v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 u_\theta \cot(\theta)}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta - v_\varphi^2 \cot\theta}{r} \tag{2.47}$$

$$= \frac{1}{\rho} F_\theta - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\triangle v_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r - v_\theta v_\varphi \cot\theta}{r} \tag{2.49}$$

$$= \frac{1}{\rho} F_\varphi - \frac{1}{r\rho \sin\theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\triangle v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right) \tag{2.50}$$

Se consideramos o movimento axissimétrico e estritamente azimutal, ou seja:

$$\mathbf{v} = v_\varphi(r, \theta) \widehat{\varphi} \tag{2.51}$$

Encontramos:

$$-v_\varphi^2 = \frac{r}{\rho} F_r - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \tag{2.52}$$

$$-v_\varphi^2 \cot\theta = \frac{r}{\rho} F_\theta - \frac{r}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{\rho} F_\varphi - \frac{1}{r\rho \sin\theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\triangle v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2\theta} \right) \tag{2.54}$$

Se a densidade também for axissimétrica, ou seja $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$, temos:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{\rho} F_\varphi + \nu \left(\triangle - R^{-2} \right) v_\varphi \tag{2.55}$$

Mais uma vez separamos as forças em forças de Lorentz e outras forças.

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\left(\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_\varphi + \frac{1}{\rho}F_{e\varphi} + \nu\left(\triangle - R^{-2}\right)v_\varphi \tag{2.56}$$

O termo $\left(\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_\varphi = \left(\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)\cdot\widehat{\varphi}$, vale:

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_\varphi\widehat{\varphi} &= \frac{1}{\mu}\left(\nabla\times\mathbf{B}_t\right)\times\mathbf{B}_p = \frac{1}{\mu}\left(\nabla\times\mathbf{B}_\varphi\right)\times\left(\nabla\times(A\widehat{\varphi})\right)\\
&= \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin(\theta)B_\varphi]\widehat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi)\widehat{\theta}\right)\\
&\times \left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin(\theta)A_\varphi]\widehat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\widehat{\theta}\right)\\
&= \frac{1}{\mu r^2\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin(\theta)B_\varphi]\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\theta}[\sin(\theta)A_\varphi]\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi)\right)\left(\widehat{\theta}\times\widehat{\mathbf{r}}\right)\\
&= \frac{1}{\mu r^2\sin(\theta)}\left[\left(\sin(\theta)\frac{\partial B_\varphi}{\partial\theta} + \cos(\theta)B_\varphi\right)\cdot\left(r\frac{\partial R^{-1}X}{\partial r} + R^{-1}X\right)\right.\\
&- \left.\left(\sin(\theta)\frac{\partial R^{-1}X}{\partial\theta} + \cos(\theta)R^{-1}X\right)\cdot\left(r\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + B_\varphi\right)\right](-\widehat{\varphi})
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_\varphi &= \frac{-1}{\mu r^2\sin(\theta)}\left[r\sin(\theta)\left(\frac{\partial R^{-1}X}{\partial r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial R^{-1}X}{\partial\theta}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\right.\\
&+ \left.\frac{1}{r}\left(X\frac{\partial B_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial X}{\partial\theta}B_\varphi\right) + r\cos(\theta)\left(\frac{\partial R^{-1}X}{\partial r}B_\varphi - R^{-1}X\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.58}$$

O termo $F_{e\varphi}$ representa uma força azimutal que move o dínamo. Vamos considerar que tal força não depende do tempo e é suficientemente regular, ou seja:

$$F_{e\varphi} = f(x) \tag{2.59}$$

2.10 Condição externa e de contorno

Na região externa ao Sol, a condição $\nabla\times\mathbf{B} = 0$ pode ser decomposta em condições sobre A e B_t da seguinte forma.

Escolhemos um ponto $x(r,\theta,\varphi)\in V^c$ e tal que $R = r\sin\theta \neq 0$, C é a curva dada pela rotação deste ponto em torno do eixo Oz e V uma semi-esfera disjunta de V limitada por C, então aplicamos o teorema de Stokes:

$$B_\varphi(r,\theta) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}B_\varphi(r,\theta)Rd\varphi = \oint_C\mathbf{B}(r,\theta)\cdot d\mathbf{t} = \int_V(\nabla\times\mathbf{B})dS(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.60}$$

O que nos leva a: $B_\varphi = 0, \quad x \in V^c$

Para o escalar A, temos tão somente: $0 = (\nabla \times \mathbf{B})_\varphi = (\triangle - R^{-2})\, A$

Se adicionarmos a isso uma condição de não movimento (velocidade nula) do fluido junto à superfície, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial A}{\partial t} & = & \alpha B_\varphi + \eta(\triangle - R^{-2})A \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} & = & \frac{1}{r}\frac{\partial(v_\varphi R^{-1}, AR)}{\partial(r,\theta)} + \eta(\triangle - R^{-2})B_\varphi - bB_\varphi^3 \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} & = & \frac{1}{\rho}\,(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\varphi + \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \nu\,(\triangle - R^{-2})\, v_\varphi \end{array}\right\} \text{No interior}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} (\triangle - R^{-2})A & = & 0 \\ B_\varphi & = & 0 \\ v_\varphi & = & 0 \end{array}\right\} \text{No exterior} \tag{2.61}$$

Aqui, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x)\widehat{\varphi}$.

2.11 Equações adimensionais

A fim de escrever equações adimensionais, introduziremos as seguintes mudanças de variáveis:

$$r' = \frac{r}{\ell^o}, \quad R' = \frac{R}{\ell^0}, \quad v' = \frac{v}{v^o}, \quad B'_\varphi = \frac{B_\varphi}{B^o},$$
$$A' = \frac{A}{B^o \ell^o}, \quad t' = t\frac{v^o}{\ell^o}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{v^o}$$

Definiremos ainda as constantes adimensionais $Rm = \frac{l^o v^o}{\eta}$ e $Re = \frac{l^o v^o}{\nu}$, conhecidas como constante de Reynolds magnética e constante de Reynolds. Definiremos também a constante E, relacionada à razão entre a densidade de energia cinética $\left(\frac{\rho v^{o2}}{2}\right)$ e a densidade de energia magnética $\left(\frac{B^{o2}}{2\mu}\right)$:

$$E = \frac{\frac{\rho v^{o2}}{2}}{\frac{B^{o2}}{2\mu}} = \frac{\mu \rho v^{o2}}{B^{o2}} \tag{2.62}$$

Assim, chegamos às seguintes versões adimensionais para o interior da esfera:

$$\frac{\partial A'}{\partial t'} = \frac{1}{v^o B^o}\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{v^o B^o}\left[\alpha B^o B'_\varphi + \eta B^0 \ell^o (\triangle - R^{-2})A'\right] \tag{2.63}$$

$$= \frac{\alpha}{v^o} B'_\varphi + \frac{\eta}{l^o v^o}(\nabla'^2 - R'^{-2})A' \tag{2.64}$$

$$= \alpha' B'_\varphi + \frac{1}{Rm}(\nabla'^2 - R'^{-2})A' \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial B'_\varphi}{\partial t'} = \frac{\ell^o}{v^o B^o}\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \frac{\ell^o}{v^o B^o}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(v_\varphi R^{-1}, AR)}{\partial(r,\theta)} + \eta(\triangle - R^{-2})B_\varphi - bB_\varphi^3\right] \tag{2.66}$$

$$= \frac{\ell^o}{r'}\frac{\partial(v'_\varphi R'^{-1}, A'R')}{\partial(r',\theta)} + \frac{1}{Rm}(\nabla'^2 - R^{-2})B_\varphi - \frac{bB^{o2}\ell^o}{v^o}B'^3_\varphi \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial v'_\varphi}{\partial t'} = \frac{\ell^o}{v^{o2}}\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{\ell^o}{v^{o2}}\left[\frac{1}{\rho\mu}\left(\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}\right)_\varphi + \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \nu\left(\nabla^2 - R^{-2}\right)v_\varphi\right] \tag{2.68}$$

$$= \frac{1}{E}(\nabla \times \mathbf{B}' \times \mathbf{B}')_\varphi + \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \frac{1}{Re}\left(\nabla'^2 - R'^{-2}\right)v'_\varphi \tag{2.69}$$

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 Decomposição do campo magnético em componentes poloidal e toroidal

Nesta seção, procederemos com a decomposição do campo magnético **B** em uma componente poloidal e outra toroidal. Seguiremos, basicamente, [14] e [12].

Como é nosso intuito equacionar o problema em uma geometria esférica, introduziremos o sistema de coordenadas polares esféricas (r, θ, φ). A letra r indica a distância do ponto até a origem, θ(colatitude) indica o ângulo polar entre o eixo z e o raio (definido como o vetor da origem ao ponto) e φ(azimute) indica o ângulo entre o raio e o eixo x projetados sobre o plano xy. Ainda, é conveniente denotar por R a distância entre o ponto e o eixo z ($R = r\sin\theta$). De forma que:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta \tag{3.1}$$

Os vetores unitários neste sistemas serão denotados por: $\widehat{r}$, $\widehat{\theta}$ e $\widehat{\varphi}$, de forma que temos a equivalência: $(r, \theta, \varphi) \equiv r\widehat{r} + \theta\widehat{\theta} + \varphi\widehat{\varphi}$. O vetor posição (ou vetor radial) será denotado por $\mathbf{r}$ ou $\mathbf{x}$.

Se $F = F(\mathbf{x})$ é um campo escalar e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ é um campo vetorial, temos:

$$\begin{aligned}
\nabla F &= \frac{\partial F}{\partial r}\widehat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\widehat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\widehat{\varphi} && (3.2)\\
\triangle F &= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \Omega F\right] && (3.3)\\
\Omega F &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} && (3.4)\\
\langle f\rangle(r) &= \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(r,\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi && (3.5)
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v_\varphi) \tag{3.6}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} \;=\; \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}v_\theta\right)\widehat{r} \tag{3.7}$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}v_r - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\varphi)\right)\widehat{\theta} \tag{3.8}$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}v_r\right)\widehat{\varphi} \tag{3.9}$$

São, ainda, válidas as seguintes relações (via integração direta):

$$\langle \Omega F \rangle \;=\; 0 \tag{3.10}$$

$$\langle F \rangle \;=\; 0 \Longrightarrow \langle \triangle F \rangle = 0 \tag{3.11}$$

Procedendo com separação de variáveis, vemos que os autovalores do operador Ω são os harmônicos esféricos S_n dados por:

$$S_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{3.12}$$

onde P_n^m são os polinômios associados de Legendre e C_n^m são coeficientes arbitrários. Os autovalores associados são:

$$\Omega S_n(\theta,\varphi) = -n(n+1)S_n(\theta,\varphi) \tag{3.13}$$

Ainda vale:

$$\langle P_n^m \rangle = 0 \Longleftrightarrow n \neq 0 \tag{3.14}$$

Temos a relação de ortogonalidade:

$$\langle S_n S_{n'} \rangle = 0 \Longleftrightarrow n \neq n' \tag{3.15}$$

E da completude dos harmônicos esféricos em $L^2(S)$, temos que qualquer função $f \in L^2(S)$ pode ser escrita na forma:

$$f := \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} C_n^m P_n^m(cos\theta)e^{im\varphi}$$

de 3.14:

$$\langle f \rangle = C_0^0$$

O que mostra que o operador Ω é invertível quando restringido às funções de média nula ($\langle f \rangle = 0$).

Introduzimos, agora, os conceitos de campo toroidal e poloidal.

Definição 3.1.1. *Um campo magnético é dito toroidal se pode ser escrito na forma:*

$$B_t = \nabla \times (\mathbf{x}T(\mathbf{x})) \tag{3.16}$$

Onde $T(\mathbf{x})$ é um campo escalar.

Definição 3.1.2. *Um campo magnético é dito poloidal se pode ser escrito na forma:*

$$B_p = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{x}P(\mathbf{x})) \tag{3.17}$$

Onde $P(\mathbf{x})$ é um campo escalar.

Observe que se $g(\mathbf{x})$ é uma função radial então $\nabla \times (\mathbf{x}g(\mathbf{x})) = 0$, o que no permite supor $\langle T \rangle = 0$ e $\langle P \rangle = 0$

As definições deixam claro que o rotacional de um campo toroidal é poloidal. A recíproca também vale pois:

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times (\mathbf{x}P) = -\nabla \times (\mathbf{x}\triangle P)$$

Podemos demonstrar as seguintes propriedades dos campos poloidais e toroidais:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\cdot\mathbf{B}_p &= \mathbf{x}\cdot[\nabla\times\nabla\times(\mathbf{x}P(\mathbf{x}))] = \mathbf{x}\cdot\left[\nabla\times\left(\tfrac{1}{\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\varphi}P(\mathbf{x})\widehat{\theta} - \tfrac{\partial}{\partial\theta}P(\mathbf{x})\widehat{\varphi}\right)\right] \\
&= -\tfrac{1}{\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\tfrac{\partial P(\mathbf{x})}{\partial\theta}\right) - \tfrac{1}{\sin^2\theta}\tfrac{\partial^2 P(\mathbf{x})}{\partial\varphi^2} = -\Omega P(\mathbf{x}) \\
\mathbf{x}\cdot\mathbf{B}_t &= \mathbf{x}\cdot[\nabla\times(\mathbf{x}T(\mathbf{x}))] = \mathbf{x}\cdot\left[\tfrac{1}{\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\varphi}T(\mathbf{x})\widehat{\theta} - \tfrac{\partial}{\partial\theta}T(\mathbf{x})\widehat{\varphi}\right] = 0 \\
\mathbf{x}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}_p) &= \mathbf{x}\cdot[\nabla\times\nabla\times\nabla\times(\mathbf{x}P(\mathbf{x})] = -\mathbf{x}\cdot[\nabla\times(\mathbf{x}\triangle P)] = 0 \\
\mathbf{x}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}_t) &= \mathbf{x}\cdot[\nabla\times\nabla\times(\mathbf{x}T(\mathbf{x})] = -\Omega T(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Levando em conta a invertibilidade do operador Ω, observamos que se $\mathbf{B}$ é incompressível então podemos definir P e T da seguinte forma:

$$P = -\Omega^{-1}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{B}) \tag{3.19}$$

$$T = -\Omega^{-1}(\mathbf{x}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})) \tag{3.20}$$

E assim, temos uma decomposição para $\mathbf{B}$ em um campo poloidal e outro toroidal.

Consideramos agora o caso particular em que o campo magnético $\mathbf{B}$ é axissimétrico tendo como eixo de simetria o eixo z. Neste caso, as funções P e T também são axissimétricas. E daí temos:

$$\mathbf{B_t} = \nabla \times (\mathbf{x}T(\mathbf{x})) = -\mathbf{x} \times \nabla T(\mathbf{x}) = -\frac{\partial T}{\partial \theta} = B_\varphi \widehat{\varphi} \tag{3.21}$$

Similarmente:

$$\mathbf{B_p} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{x}P(\mathbf{x})) = \nabla \times (A\widehat{\varphi}) \tag{3.22}$$

De forma que o campo magnético axissimétrico pode ser escrito como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p = B_\varphi \widehat{\varphi} + \nabla \times (A\widehat{\varphi}) \tag{3.23}$$

3.2 Os espaços de Sobolev

Os espaços de Sobolev têm exercido grande importância na teoria de equações diferenciais. Nesta seção, apresentaremos uma breve discussão a respeito destes espaços, mostraremos algumas definições e anunciaremos resultados importantes. O leitor procurando uma apresentação completa dos resultados elementares, pode encontrá-la em [6]; para resultados mais avançados, em [25].

Denotaremos por Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$. Um ponto é dado por $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\int (.) d\mathbf{x} = \int (.) dx_1 \ldots dx_n$ é a integral de Lebesgue.

Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ se e somente se $\int_\Omega |f|^p < \infty$. Ainda, f é dita $L^\infty(\Omega)$ se e somente se ela é essencialmente limitada. Convém identificar as funções L^p apenas quase sempre (q.s.) em relação a medida de Lebesgue, ou seja, duas funções são equivalentes se e somente se são iguais quase sempre. Sem risco de ambigüidade, podemos nos referir a toda a classe de equivalência de uma função f citando apenas a última. Desta forma, segue que a definição abaixo é, de fato, uma norma:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{supess}_\Omega |f(c)|, & p = \infty \end{cases}$$

Pode-se mostrar também que os espaços L^p munidos desta norma são espaços de Banach.

Um função é dita $L^p_{loc}(\Omega)$ se for L^p em limitados de Ω. É evidente que toda função $L^p(\Omega)$ é também $L^1_{loc}(\Omega)$.

Considere, agora, o espaço C^∞_o das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto. É fácil ver que duas funções f e g são iguais quase sempre em Ω se e somente se $\int_\Omega f(x)\phi(x)d\mathbf{x} = \int_\Omega g(x)\phi(x)d\mathbf{x}, \forall\phi \in C^\infty_0$. As integrais estão bem definidas pois o suporte de ϕ é compacto e tanto f como g são $L^1_{loc}(\Omega)$.

O conceito de derivada é fundamental no estudo das equações diferenciais. O conceito clássico de derivação pode ser estendido para o conceito fraco conforme: sejam u e v funções $L^p(\Omega)$, v é dita derivada fraca em relação a x_j e grafada $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ se e somente se $\int_\Omega v(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = -\int_\Omega u(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, para toda $\phi \in C^\infty_c$

Deve-se observar que quando $u(x)$ for uma função diferenciável no sentido clássico, sua derivada também é uma derivada fraca. Ainda, pelo que já foi dito, a derivada fraca é única no sentido das classes de equivalência.

Se α é um multiíndice, isto é, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, definimos $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ e denotamos:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Temos que $D^\alpha u = v$ se e somente se $\int_\Omega u D^\alpha \phi d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi d\mathbf{x}$ Dizemos, então, que $|\alpha|$ é a ordem da derivada de índice α

Defina como o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ a família das funções $u : \Omega \to \mathbb{C}$ em $L^p(\Omega)$, que possuem todas as derivadas fracas de ordem menor ou igual a p

em $L^p(\Omega)$. E defina a seguinte norma neste espaço:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty \end{cases}$$

Não é difícil ver que a completeza dos espaços L^p implica a completeza dos espaços $W^{k,p}$, uma vez que os limites comutam com a definição de derivada fraca.

Os espaços $W^{k,2}(\Omega)$ são também espaços de Hilbert com o produto interno:

$$< u, v >= \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v^* d\mathbf{x}$$

Estes espaços constumam ser denotados como $H^k(\Omega)$.

Para nossos estudos, será conveniente denotar: $V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |x| < R_\odot\}$, onde $R_\odot$ é uma constante e indicará o raio solar,

$$\begin{aligned}
H_1 &:= \left\{ \mathbf{B} \in H^1(V)^3, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, x \times (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \text{ e } x \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ em } |x| = R_\odot \right\} \\
\tilde{H}_1 &:= \left\{ \mathbf{B} \in H^1(\mathbb{R}^3)^3, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \right\} \bigcap \left\{ \mathbf{B} \in H^1(\mathbb{R}^3)^3, \nabla \times \mathbf{B} = 0, |x| > R_\odot \right\} \\
H_2 &:= \left\{ \mathbf{v} \in H^1(V)^3, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \text{ e } \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ em } |x| = R_\odot \right\} \\
H_3 &= \left\{ A \in H^2(\mathbb{R}^3)^3 : A = \int_V \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{|x-y|} d\mathbf{x}, B \in H_1 \right\}
\end{aligned}$$

O operador extensão $\mathbf{B} \to \nabla \times \int_V \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{|x-y|} d\mathbf{x}$ é, ainda, um isomorfismo, veja [21]

Quando o domínio não for explicitamente especificado, assume-se como V. Quando o espaço for omitido, assume-se $L_2(V)$, de forma que $\|.\| = \|.\|_{L_2(V)}$

3.3 Uma desigualdade de Poincaré

Nesta seção estamos interessados em estudar o operador rotacional $\mathbf{B} \to \nabla \times \mathbf{B}$. Em especial queremos encontrar o valor de :

$$\inf \frac{\displaystyle\int_V |\nabla \times \mathbf{B}|^2 \, d\mathbf{x}}{\displaystyle\int_V |\mathbf{B}|^2 \, d\mathbf{x}} \tag{3.24}$$

O ínfimo sendo tomado para $\mathbf{B} \in H_1$.

É conhecido que $\|\mathbf{B}\| + \|\nabla \times \mathbf{B}\|$ e $\|u\| + \int_{\partial V} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}| dS(\mathbf{x})$ são normas equivalentes à norma de Sobolev usual em H^1. Na segunda expressão, $\mathbf{n}$ é o vetor normal que coincide com o vetor radial $\widehat{r}$ na esfera V. Destes fatos e da condição de contorno $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = 0$, temos a desigualdade de Poincaré:

$$\|\mathbf{B}\| \leq C \|\nabla \times \mathbf{B}\| \tag{3.25}$$

Para encontrar a constante ótima, considere o problema de autofunções do laplaciano:

$$-\triangle \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} \tag{3.26}$$

É bem sabido da teoria de operadores elípticos que $\mathbf{B}$ é uma função infinitamente diferenciável no interior de V. Procedemos agora à extensão $\tilde{\mathbf{B}}$ de $\mathbf{B}$ em $\mathbb{R}^3$, dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) &= \tfrac{1}{4\pi} \int_V \nabla_x \times \tfrac{\nabla \times \mathbf{B}}{|x-y|} d\mathbf{y} = -\tfrac{1}{4\pi} \int_V \nabla_y \times \tfrac{1}{|x-y|} \left(\nabla \times \mathbf{B}\right) d\mathbf{y} \\ &= \tfrac{1}{4\pi} \int_V \tfrac{\triangle \mathbf{B}}{|x-y|} d\mathbf{y} = \tfrac{\lambda}{4\pi} \int_V \tfrac{\mathbf{B}}{|x-y|} d\mathbf{y} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Assim, esta extensão coincide com $\mathbf{B}$ em V e é contínua na fronteira como conseqüência da teoria de integrais singulares.

Tomando o produto interno com $\mathbf{B}$, temos:

$$|\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}|^2 + \nabla \cdot \left[(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \mathbf{B} \right] = \lambda \tilde{\mathbf{B}}$$

Via integração e observando que:

$$\int_V \nabla \cdot \left[(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}}\right] d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \left[(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}}\right] \cdot \mathbf{x} d\mathbf{S}(\mathbf{x}) \tag{3.28}$$

$$= -\int_{\partial V} \left[(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \mathbf{x}\right] \cdot \tilde{\mathbf{B}} d\mathbf{S}(\mathbf{x}) = 0 \tag{3.29}$$

temos que:

$$\int_V \left|\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}\right|^2 d\mathbf{x} = \lambda \int_V \left|\tilde{\mathbf{B}}\right|^2 d\mathbf{x} \tag{3.30}$$

O que implica $\lambda > 0$.

Suponha, então, que $\tilde{\mathbf{B}}$ esteja na sua representação poloidal-toroidal:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{x}P(\mathbf{x})) + \nabla \times (\mathbf{x}T(\mathbf{x}))$$

Podemos separar o problema de autovalores em:

$$\begin{aligned} -\triangle\left(\nabla \times \nabla \times (\mathbf{x}P(\mathbf{x}))\right) &= \lambda \nabla \times \nabla \times (\mathbf{x}P(\mathbf{x})) \\ -\triangle\left(\nabla \times (\mathbf{x}T(\mathbf{x}))\right) &= \lambda \nabla \times (\mathbf{x}T(\mathbf{x})) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Observando que $\nabla \times (\mathbf{x}T(\mathbf{x})) = -\mathbf{x} \times \nabla T(\mathbf{x})$ e que $\triangle\left(\nabla \times (\mathbf{x}T(\mathbf{x}))\right) = \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\mathbf{x}T(\mathbf{x})) = -\mathbf{x} \times \nabla \triangle T(\mathbf{x})$, temos:

$$\mathbf{x} \times \nabla\left(\triangle T(\mathbf{x}) + \lambda T(\mathbf{x})\right) = 0 \tag{3.32}$$

Disto resulta que $(\triangle T(\mathbf{x}) + \lambda T(\mathbf{x}))$ só depende de r. Como $\langle \triangle T(\mathbf{x}) + \lambda T(\mathbf{x}) \rangle = 0$, temos $\triangle T(\mathbf{x}) + \lambda T(\mathbf{x}) = 0$

A fim de inferir sobre P, observe que o operador rotacional é invertível dado o fato que o laplaciano o é no espaço complementar às funções constantes, conforme discutimos na seção anterior. Assim, chegamos a:

$$\mathbf{x} \times \nabla\left(\triangle P(\mathbf{x}) + \lambda P(\mathbf{x})\right) = 0 \tag{3.33}$$

E o problema recai em resolver o seguinte problema de autofunções:

$$\left.\begin{aligned} \triangle P(\mathbf{x}) &= -\lambda P(\mathbf{x}) \\ \triangle T(\mathbf{x}) &= -\lambda T(\mathbf{x}) \end{aligned}\right\}, \qquad \mathbf{x} \in V \tag{3.34}$$

$$\left.\begin{aligned} \triangle P(\mathbf{x}) &= 0 \\ T(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \mathbf{x} \in V^c \tag{3.35}$$

As condições na região exterior são obtidas observando que aquelas funções devem ser radiais.

Para encontrar soluções, procedemos com separação de variáveis:

$$T(r,\theta,\varphi) = R(r)S_n(\theta,\varphi) \tag{3.36}$$

Aqui, S_n indica o n-ésimo harmônico esférico.

Substituindo em 3.34, temos:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}R\right) + n(n+1)R\right) = -\lambda R \tag{3.37}$$

Equivalente a:

$$r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}R + 2r\frac{\partial}{\partial r}R + \left[\lambda r^2 - n(n+1)\right]R = 0 \tag{3.38}$$

Esta é uma equação de Bessel esférica modificada, cuja solução regular na origem é dada por:

$$R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}J_{n+1/2}\left(\sqrt{\lambda}r\right) \tag{3.39}$$

A condição de contorno é satisfeita se tivermos $J_{n+1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}R_{\odot}\right) = 0$, ou seja, se x_{nj} é o j-ésimo zero da funçao de Bessel $J_{n+1/2}$, então:

$$\lambda = \frac{x_{nj}^2}{R_{\odot}^2} \geq \lambda_t = \frac{x_{11}^2}{R_{\odot}^2} \geq \frac{20}{R_{\odot}^2} \tag{3.40}$$

Como j é um natural arbitrário e o problema é linear, vale a expansão:

$$R(r) = \sum_{j=1}^{\infty} R^{(j)}\sqrt{\frac{\pi}{2r}}J_{n+1/2}\left(\frac{x_{nj}}{R_{\odot}}r\right) \tag{3.41}$$

De forma análoga, fazemos para $P(\mathbf{x})$

$$P(r,\theta,\varphi) = \sum_n R(r)S_n(\theta,\varphi) \tag{3.42}$$

Na região exterior, temos $\triangle P(\mathbf{x}) = 0$ e, portanto:

$$\triangle P(r,\theta,\varphi) = \sum_n \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right) - n(n+1)R(r)\right]S(\theta,\varphi) \tag{3.43}$$

Como cada um dos termos deve ser nulo, $P(r)$ deve obedecer a seguinte equação de Euler:

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + 2r \frac{\partial}{\partial r} R(r) - n(n+1)R(r) = 0 \tag{3.44}$$

cuja solução regular no infinito é dada por:

$$R(r) = Cr^{-(n+1)} \tag{3.45}$$

onde a constante C é dada por:

$$C = R(R_\odot) R_\odot^{n+1} \tag{3.46}$$

Considerando que a derivada primeira é contínua na interface, temos:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)_{r=R} = -C(n+1)R^{-(n+2)} = -R(R_\odot)(n+1)R_\odot^{-1} \tag{3.47}$$

Como $R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{n+1/2} \left(\sqrt{\lambda} r \right)$ aplicamos a relação de recorrência:

$$r \frac{\partial J(r)}{\partial r} + \nu J_\nu(r) = r J_{\nu-1}(r) \tag{3.48}$$

e concluímos:

$$J_{n-1/2} \left(\sqrt{\lambda} r \right) = 0 \tag{3.49}$$

O que resulta em:

$$\lambda = \frac{x^2_{(n-1)j}}{R^2_\odot} \geq \lambda_p = \frac{x^2_{01}}{R^2_\odot} = \frac{\pi^2}{R^2_\odot} \tag{3.50}$$

E ainda temos a expansão:

$$R(r) = \sum_{j=1}^{\infty} R^{(j)} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{n+1/2} \left(\frac{x_{nj}}{R_\odot} r \right) \tag{3.51}$$

Temos, então, as seguintes desigualdades de Poincaré:

$$\|\mathbf{B}_p\|_{L_2(V)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \|\nabla \times \mathbf{B}_p\|_{L_2(V)} \tag{3.52}$$

$$\|\mathbf{B}_t\|_{L_2(V)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_t}} \|\nabla \times \mathbf{B}_t\|_{L_2(V)} \tag{3.53}$$

$$\|\mathbf{B}\|_{L_2(V)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \|\nabla \times \mathbf{B}\|_{L_2(V)} \tag{3.54}$$

3.4 Lemas de Gronwall

Os lemas de Gronwall são desigualdades amplamente usadas na teoria de equações diferenciais. Apresentamos a seguir duas versões muito conhecidas e úteis, a primeira é uma forma clássica e traz resultados a partir das condições iniciais. A segunda forma, dita uniforme, parte de outras hipóteses, e fornece resultados apenas para tempo positivo.

Lema 3.4.1 (Desigualdade clássica de Gronwall). *Sejam y, g e h funções localmente integráveis em (t_0, ∞) tais que $\frac{dy}{dt}$ também é localmente integrável e satisfazendo a desigualdade:*

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h, \quad t \geq t_0 \tag{3.55}$$

Então:

$$y(t) \leq y(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds} + \int_{t_0}^{t} h(s)e^{\int_{s}^{t} g(u)du}ds \quad t \geq t_0 \tag{3.56}$$

Demonstração. O fator integrante $e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)ds}$ é não-negativo, portanto:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)ds}\right) \leq h(t)e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)ds} \tag{3.57}$$

Integração de t_0 a t fornece exatamente o resultado desejado. □

Corolário 3.4.1. *Se $g = -\lambda$ e $h = K$, onde $\lambda > 0$ e $K \geq 0$, temos*

$$y(t) \leq t(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} + K\left(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}\right), \quad t > t_0 \tag{3.58}$$

Lema 3.4.2 (Desigualdade uniforme de Gronwall). *Sejam g, y e h funções não negativas localmente integráveis em $t \in (t_0, \infty)$ satisfazendo a desigualdade:*

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h \tag{3.59}$$

E ainda existem constante positivas r, a_1, a_2, a_3 tais que:

$$\int_{t}^{t+r} g(s)ds \leq a_1, \qquad \int_{t}^{t+r} h(s)ds \leq a_2, \qquad \int_{t}^{t+r} y(s)ds \leq a_3, \qquad \forall t \geq t_0 \tag{3.60}$$

Então

$$y(t+r) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right)e^{a_1}, \quad t > t_0 \tag{3.61}$$

Demonstração. Assuma $t_0 \leq t \leq s \leq t+r$. Multiplicamos a desigualdade pelo fator integrante positivo $e^{-\int_t^s g(\tau)d\tau}$, a fim de obter:

$$\frac{d}{ds}\left(y(s)e^{-\int_t^s g(\tau)d\tau}\right) \leq h(s)e^{-\int_t^s g(\tau)d\tau} \leq h(s) \tag{3.62}$$

Integramos entre s e $t+r$ e chegamos a:

$$y(t+r) \leq y(s)e^{\int_s^{t+r} g(\tau)d\tau} + \left(\int_t^s g(\tau)d\tau e^{\int_s^{t+r} g(\tau)d\tau}\right) \leq (y(s)+a_2)e^{a_1} \tag{3.63}$$

Integramos esta expressão em s entre t e $t+r$ e obtemos:

$$y(t+r)r \leq (a_3 + ra_2)e^{a_1} \tag{3.64}$$

□

3.5 Desigualdades e imersões em espaços de Sobolev

Algumas desigualdade em espaços de Sobolev são fundamentais e faremos uso ao longo do desenvolvimento. Nesta seção, nos atemos a elas.

Desigualdade de Agmon em três dimensões (para maiores detalhes, veja [20, 1]):

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C_{ag}\|u\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{H^2(\Omega)} \tag{3.65}$$

A qual, frente à desigualdade de Poincaré nos leva à:

$$\|\mathbf{v}\| \leq C_{ag}\|\nabla \times \mathbf{v}\|^{1/2}\|\triangle\mathbf{v}\|^{1/2}, \quad v \in H_1 \tag{3.66}$$

A seguinte desigualdade de interpolação é trivial, sempre que se tem:

$$\int_V |\nabla \times \mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} = \int_V \mathbf{v}\triangle\mathbf{v}d\mathbf{x}$$

teremos:

$$\|\nabla \times \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|^{1/2}\|\triangle\mathbf{v}\|^{1/2}, \quad v \in H_1 \tag{3.67}$$

Usamos ainda um teorema (essencial) de compacidade:

Teorema 3.5.1. *Sejam X_0, X e X_1 espaços de Banach tais que:*

1. *$X_0 \subset\subset X \subset X_1$, O símbolo $\subset\subset$ indica que a imersão é compacta.*

2. *X_0 e X_1 são reflexivos.*

Defina o espaço $\mathcal{Y}$ conforme:

$$\mathcal{Y} = \left\{ \mathbf{v} \in L^{\alpha_0}(0, T; X_0), \frac{d\mathbf{v}}{dt} \in L^{\alpha_1}(0, T; X_1) \right\} \tag{3.68}$$

Munido da norma:

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{Y}} = \|\mathbf{v}\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X_0)} + \left\| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\|_{L^{\alpha_1}(0,T;X_1)} \tag{3.69}$$

Então $\mathcal{Y}$ é um espaço de Banach e $\mathcal{Y} \subset\subset L^{\alpha_0}(0, T; X)$

Demonstração. A demonstração é omitida neste trabalho. Veja em [19]. □

3.6 Formulação matemática

Nesta seção finalmente explicitamos o problema de valor inicial e as hipóteses assumidas, com base no estudo já feito, ou seja, procuramos soluções para as equações diferenciais parciais:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} = \frac{1}{Rm} \triangle \mathbf{B}_p + \nabla \times (\alpha' \mathbf{B}_t) \tag{3.70}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B_t}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B_p}) + \frac{1}{Rm} \triangle \mathbf{B}_t - b' |\mathbf{B}_t|^2 \mathbf{B}_t \tag{3.71}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{E} (\nabla \times \mathbf{B}_t) \times \mathbf{B}_p + \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{1}{Re} \triangle \mathbf{v} \tag{3.72}$$

Para $\mathbf{B}_p \in E_1$, $\mathbf{B}_t \in E_2$ e $\mathbf{v} \in E_3$, estes definidos como:

$$E_1 = \{ \mathbf{B}_p \in H_1 : \mathbf{B}_p \cdot \widehat{\varphi} = 0 \text{ e é axissimétrico} \} \tag{3.73}$$

$$E_2 = \left\{ \mathbf{B}_t \in H_1 : \mathbf{B}_t \cdot \widehat{\theta} = \mathbf{B}_t \cdot \widehat{r} = 0 \text{ e é axissimétrico} \right\} \tag{3.74}$$

$$E_3 = \left\{ \mathbf{v} \in H_2 : \mathbf{v} \cdot \widehat{\theta} = \mathbf{v} \cdot \widehat{r} = 0 \text{ e é axissimétrico} \right\} \tag{3.75}$$

Onde $b' = \frac{bB^{o3}\ell^o}{v^o} \geq 0$ e $\alpha'(r,\theta) \in C^\infty(V)$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(r,\theta)\widehat{\varphi} \in L^2(V)$

E relembramos que:

$$\mathbf{B} = \left(B_r\widehat{r} + B_\theta\widehat{\theta}\right) + B_\varphi\widehat{\varphi} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_t = \nabla \times (A\widehat{\varphi}) + B_\varphi\widehat{\varphi} \tag{3.76}$$

$$\mathbf{v} = v_\varphi\widehat{\varphi} \tag{3.77}$$

Complementamos com condições iniciais:

$$\mathbf{B}_p(0) = \mathbf{B}_{p0}, \quad \mathbf{B}_t(0) = \mathbf{B}_{t0}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \tag{3.78}$$

E supomos cada uma destas condições iniciais como pertencentes aos espaços E_1, E_2 e E_3, respectivamente.

3.7 Estimativas

Nesta seção, estamos interessados em encontrar algumas estimativas para as soluções do sistema da seção 3.6. Assim, estabelecemos os seguintes teoremas:

Teorema 3.7.1. *Existem constantes C_{B_t} e C_v tais que:*

$$\|\mathbf{B}_t(t)\| \leq C_{B_t} \qquad e \qquad \|\mathbf{v}(t)\| = \|v_\varphi(t)\| \leq C_v$$

Demonstração. Partimos da parte toroidal da equação da indução 3.71:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_p) + \frac{1}{Rm}\triangle(\mathbf{B}_t) - b'|\mathbf{B}_t|^2\mathbf{B}_t \tag{3.79}$$

Tomando o produto interno com $\mathbf{B}_t$, segue:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial |\mathbf{B}_t|^2}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_p) \cdot \mathbf{B}_t + \frac{1}{Rm}\triangle(\mathbf{B}_t) \cdot \mathbf{B}_t - b'|\mathbf{B}_t|^4 \tag{3.80}$$

Lembramos que:

$$\triangle\mathbf{B}_t \cdot \mathbf{B}_t = -|\nabla \times \mathbf{B}_t|^2 - \nabla \cdot [(\nabla \times \mathbf{B}_t \times \mathbf{B}_t)]$$

Como $(\nabla \times \mathbf{B}_t \times \mathbf{B}_t) \cdot \mathbf{x} = (\nabla \times \mathbf{B}_t \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_t = 0$ na fronteira, integrando, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\mathbf{B}_t\|^2 + \frac{1}{Rm}\|\nabla \times \mathbf{B}_t\|^2 + b'\|\mathbf{B}_t\|^4 = \int_V \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B_p}) \cdot \mathbf{B}_t d\mathbf{x} \quad (3.81)$$

Agora, considere a equação do movimento 3.72:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{E}(\nabla \times \mathbf{B}_t) \times \mathbf{B}_p + \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{1}{Re}\triangle \mathbf{v} \quad (3.82)$$

Multiplicamos cada termo por $\mathbf{v}$ e observando que:

$$\int_V [(\nabla \times \mathbf{B}_t) \times \mathbf{B}_p] \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = -\int_V \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B_p}) \cdot \mathbf{B}_t d\mathbf{x} \quad (3.83)$$

Chegamos a:

$$\frac{E}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\mathbf{v}\|^2 + \frac{E}{Re}\|\nabla \times \mathbf{v}\|^2 = -\int_V \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B_p}) \cdot \mathbf{B}_t d\mathbf{x} + \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad (3.84)$$

E podemos estimar:

$$\int_V f(\mathbf{x}) v_\varphi d\mathbf{x} \leq \|f\|.\|\mathbf{v}\| \leq \frac{1}{\lambda^{1/2}}\|f\|.\|\nabla \times \mathbf{v}\| \leq \frac{Re\lambda^2}{2E}\|f\|^2 + \frac{E}{2Re}\|\nabla \times \mathbf{v}\|^2 \quad (3.85)$$

Somando 3.81 e 3.84 e levando em conta a estimativa 3.85, chegamos a:

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\|\mathbf{B}_t\|^2 + E\|\mathbf{v}\|^2\right) + \tfrac{2}{Rm}\|\nabla \times \mathbf{B}_t\|^2 + \tfrac{E}{Re}\|\nabla \times \mathbf{v}\|^2 + \tfrac{2E}{Re}\|\nabla \times \mathbf{v}\|^2 \\ +2b'\|\mathbf{B}_t\|^4 \leq \tfrac{Re\lambda^2}{E}\|f\|^2\end{aligned} \quad (3.86)$$

Definindo $C_1 = \frac{1}{2}\min(\frac{\lambda}{2Re}, \frac{\lambda}{Rm})$, temos em particular:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\|\mathbf{B}_t\|^2 + E\|\mathbf{v}\|^2\right) + c_1\left(\|\mathbf{B}_t\|^2 + E\|\mathbf{v}\|^2\right) \leq c_2 := \frac{Re\lambda^2}{E}\|f\|^2 \quad (3.87)$$

Usando a desigualdade de Gronwall, segue:

$$\|\mathbf{B}_t(t)\|^2 + E\|\mathbf{v}(t)\|^2 \leq \left(\|\mathbf{B}_t(0)\|^2 + E\|\mathbf{v}(0)\|^2\right) e^{-c_1 t} + \frac{c_2}{c_1}\left(1 - e^{-c_1 t}\right) \quad (3.88)$$

□

Teorema 3.7.2. *Existe uma constante C_{B_p} tal que:*

$$\|\mathbf{B}_p\| \leq C_{B_p}$$

Demonstração. Considere a componente poloidal da equação da indução 3.70:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} = \frac{1}{Rm} \triangle \mathbf{B}_p + \nabla \times (\alpha' \mathbf{B}_t) \tag{3.89}$$

Tomamos o produto com $\mathbf{B}_p$ e integrando, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\mathbf{B}_p\|^2_{L_2(V)} + \frac{1}{Rm}\|\nabla \times \mathbf{B}_p\|^2_{L_2(V)} = -\int_V (\nabla \times (\alpha' \mathbf{B}_t)) \cdot \mathbf{B}_p d\mathbf{x} \tag{3.90}$$

A equação 3.90 e a estimativa seguinte:

$$-\int_V \alpha' \mathbf{B}_t \cdot (\nabla \times \mathbf{B}_p)\, d\mathbf{x} \leq \frac{{\alpha'_\infty}^2 Rm}{2}\|\mathbf{B}_t\|^2_{L_2(V)} + \frac{1}{2Rm}\|\nabla \times \mathbf{B}_p\|^2_{L_2(V)} \tag{3.91}$$

Resultam em:

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\mathbf{B}_p\|^2_{L_2(V)} + \frac{1}{Rm}\|\nabla \times \mathbf{B}_p\|^2_{L_2(V)} \leq {\alpha'_\infty}^2 Rm \|\mathbf{B}_t\|^2_{L_2(V)} \tag{3.92}$$

o que implica, pelo lema de Gronwall:

$$\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{B}_p\|^2_{L_2} < \infty \tag{3.93}$$

□

Corolário 3.7.1. *As seguintes estimativas são validas:*

$$\int_t^{t+r} \|\nabla \times \mathbf{B}_t\|^2 dt \leq C_1 + C_2 r \tag{3.94}$$

$$\int_t^{t+r} \|\nabla \times \mathbf{B}_p\|^2 dt \leq C_1 + C_2 r \tag{3.95}$$

$$\int_t^{t+r} \|\nabla \times \mathbf{v}\|^2 dt \leq C_1 + C_2 r \tag{3.96}$$

para constantes C_1 e C_2 positivas independentes de t e r.

Demonstração. Integração entre t e $t + r$ de 3.92, nos leva a:

$$\int_t^{t+r} \|\nabla \times \mathbf{B}_p\|^2 dt \leq Rm\|\mathbf{B}_p(0)\| + {\alpha'_\infty}^2 Rm^2 \int_t^{t+r} \|\mathbf{B}_t\|^2_{L_2(V)} dt \tag{3.97}$$

bastando escolher $C_1 \geq Rm\|\mathbf{B}_p(0)\|$ e $C_2 \geq {\alpha'_\infty}^2 Rm^2 C_{B_t}^2$

Procedemos de forma idêntica com 3.86 para obter as outras estimativas. □

Teorema 3.7.3. *Existe uma constante D_{B_p} tal que:*

$$\|\nabla \times \mathbf{B}_p\| \leq D_{B_p} \tag{3.98}$$

Demonstração. Multiplicamos 3.70 por $\triangle \mathbf{B}_p$ e integramos, a fim de obter:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla \times \mathbf{B}_p\|^2 + \frac{1}{Rm}\|\triangle \mathbf{B}_p\|^2 = -\int_V \nabla \times (\alpha' \mathbf{B}_t) \cdot \triangle \mathbf{B}_p d\mathbf{x} \tag{3.99}$$

$$\leq \left(\alpha'_\infty \|\nabla \times \mathbf{B}_t\| + \|\nabla \alpha'\|_{L_\infty}\|\mathbf{B}_t\|\right)\|\triangle \mathbf{B}_p\| \tag{3.100}$$

$$\leq C_{B_t}^2 Rm\|\nabla \alpha'\|_{L_\infty}^2 + {\alpha'_\infty}^2 Rm\|\nabla \times \mathbf{B}_t\|^2 + \frac{1}{2Rm}\|\triangle \mathbf{B}_p\|^2 \tag{3.101}$$

O que equivale a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla \times \mathbf{B}_p\|^2 + \frac{1}{Rm}\|\triangle \mathbf{B}_p\|^2 \leq C\|\nabla \times \mathbf{B}_t\|^2 \tag{3.102}$$

Assim, aplicamos 3.4.2 com $a_1 = 0$ conjuntamente com as estimativas do corolário 3.7.1, ou seja, $a_2 = a_3 = C_1 + C_2 r$ e obtemos:

$$\|\nabla \times \mathbf{B}_p(t)\|^2 \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right), \quad \forall t > r \tag{3.103}$$

Para $0 \leq t \leq r$, uma estimativa é trivialmente obtida, integrando 3.99 considerando condição inicial finita. O que completa a demonstração. □

Corolário 3.7.2. *Vale a estimativa:*

$$\int_t^{t+r} \|\triangle \mathbf{B}_p\|^2 dt \leq C_1 + C_2 r \tag{3.104}$$

Para constantes C_1 e C_2 positivas independentes de t e r.

Demonstração. Basta integrar 3.102 e proceder de forma idêntica ao corolário 3.7.1.

□

Teorema 3.7.4. *Existem constantes D_{B_t} e D_v tais que:*

$$\|\nabla\times\mathbf{B}_t\|\leq D_{B_t}\quad e\quad \|\nabla\times\mathbf{v}\|\leq D_v$$

Agora, considere a componente toroidal da equação da indução (3.71):

$$\frac{\partial\mathbf{B}_t}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_p)+\frac{1}{Rm}\triangle(\mathbf{B}_t)-b'|\mathbf{B}_t^2|\mathbf{B}_t \tag{3.105}$$

Tomando o produto interno com $\triangle\mathbf{B}_t$ e integrando, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla\times\mathbf{B}_t\|^2_{L_2(V)}+\frac{1}{Rm}\|\triangle\mathbf{B}_t\|^2_{L_2 V} \tag{3.106}$$

$$=-\int_V[\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B_p})]\cdot\triangle\mathbf{B}_t d\mathbf{x}+b'\int_V\left(|\mathbf{B}_t|^2\mathbf{B}_t\right)\cdot\triangle\mathbf{B}_t d\mathbf{x} \tag{3.107}$$

Calculando o termo mais à direita:

$$T := \int_V\left(|\mathbf{B}_t|^2\mathbf{B}_t\right)\cdot\triangle\mathbf{B}_t d\mathbf{x}=-\int_V\nabla\times\left(|\mathbf{B}_t|^2\mathbf{B}_t\right)\cdot(\nabla\times\mathbf{B}_t)d\mathbf{x} \tag{3.108}$$

$$= -\int_V\left(\nabla|\mathbf{B}_t|^2\times\mathbf{B}_t+|\mathbf{B}_t|^2\nabla\times\mathbf{B}_t\right)\cdot(\nabla\times\mathbf{B}_t)d\mathbf{x} \tag{3.109}$$

$$= -\int_V\left(\nabla|\mathbf{B}_t|^2\times\mathbf{B}_t\right)\cdot(\nabla\times\mathbf{B}_t)d\mathbf{x}-\int_V|\mathbf{B}_t|^2|\nabla\times\mathbf{B}_t|^2 d\mathbf{x} \tag{3.110}$$

Seguindo:

$$\int_V\left(\nabla|\mathbf{B}_t|^2\times\mathbf{B}_t\right)\cdot\nabla\times\mathbf{B}_t d\mathbf{x} \tag{3.111}$$

$$=2\int_V[((\mathbf{B}_t\cdot\nabla)\mathbf{B}_t+\mathbf{B}_t\times(\nabla\times\mathbf{B}_t))\times\mathbf{B}_t]\cdot\nabla\times\mathbf{B}_t d\mathbf{x} \tag{3.112}$$

$$=2\int_V[\mathbf{B}_t\times(\nabla\times\mathbf{B}_t)\times\mathbf{B}_t]\cdot\nabla\times\mathbf{B}_t d\mathbf{x} \tag{3.113}$$

$$=2\int_V\left[(\nabla\times\mathbf{B}_t)|\mathbf{B}_t|^2\right]\cdot\nabla\times\mathbf{B}_t d\mathbf{x}=2\int_V|\mathbf{B}_t|^2|\nabla\times\mathbf{B}_t|^2 d\mathbf{x} \tag{3.114}$$

Portanto:

$$\int_V\left(|\mathbf{B}_t|^2\mathbf{B}_t\right)\cdot\triangle\mathbf{B}_t d\mathbf{x}=-3\int_V|\mathbf{B}_t|^2|\nabla\times\mathbf{B}_t|^2 d\mathbf{x} \tag{3.115}$$

E ainda, temos:

$$\int_V[\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B_p})]\cdot\triangle\mathbf{B}_t d\mathbf{x} = \int_V(\mathbf{B}_p\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\cdot\triangle\mathbf{B}_t d\mathbf{x} \tag{3.116}$$

$$= \int_V(\mathbf{B}_p\cdot\nabla v_\varphi)\,\triangle\mathbf{B}_t\cdot\widehat{\varphi}d\mathbf{x} \tag{3.117}$$

Substituindo os termos, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla\times\mathbf{B}_t\|^2+\frac{1}{Rm}\|\triangle\mathbf{B}_t\|^2+3b'\int_V|\mathbf{B}_t|^2|\nabla\times\mathbf{B}_t|^2d\mathbf{x} \tag{3.118}$$

$$=-\int_V\left(\mathbf{B}_p\cdot\nabla v_\varphi\right)\triangle\mathbf{B}_t\cdot\widehat{\varphi}d\mathbf{x} \tag{3.119}$$

De forma análoga para a equação do movimento, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla\times\mathbf{v}\|^2+\frac{1}{Re}\|\triangle\mathbf{v}\|^2 \tag{3.120}$$

$$=-\frac{1}{E}\int_V(\nabla\times\mathbf{B}_t\times\mathbf{B}_p)\cdot\triangle\mathbf{v}d\mathbf{x}-\int_V\mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\triangle\mathbf{v}d\mathbf{x} \tag{3.121}$$

Devemos, agora, estimar os termos à direita de 3.118 e 3.120:

$$T2:\ =\ \int_V\left(\mathbf{B}_p\cdot\nabla v_\varphi\right)\triangle\mathbf{B}_t\cdot\widehat{\varphi}d\mathbf{x}\le\|\mathbf{B}_p\|_{L_\infty}\|\nabla\times\mathbf{v}\|.\|\triangle\mathbf{B}_t\| \tag{3.122}$$

$$\le\ C_{Ag}\|\nabla\times\mathbf{B}_p\|^{1/2}\|\triangle\mathbf{B}_p\|^{1/2}\|\mathbf{v}\|^{1/2}\|\triangle\mathbf{v}\|^{1/2}\|\triangle\mathbf{B}_t\| \tag{3.123}$$

$$\le\ C_{Ag}D_{Bp}C_v\|\triangle\mathbf{B}_p\|^{1/2}\|\triangle\mathbf{v}\|^{1/2}\|\triangle\mathbf{B}_t\| \tag{3.124}$$

$$\le\ C|\triangle\mathbf{B}_p\|^2+\frac{E}{4Re}\|\triangle\mathbf{v}\|^2+\frac{1}{6Rm}\|\triangle\mathbf{B}_t\|^2 \tag{3.125}$$

Foi usada a desigualdade de Agmon 3.66 e de interpolação 3.67.

De forma idêntica temos:

$$T3\ :=\ \int_V(\nabla\times\mathbf{B}_t\times\mathbf{B}_p)\cdot\triangle\mathbf{v}d\mathbf{x} \tag{3.126}$$

$$\le\ C_{Ag}D_{Bp}C_{B_t}\|\triangle\mathbf{B}_p\|^{1/2}\|\triangle\mathbf{B}_t\|^{1/2}\|\triangle\mathbf{v}\| \tag{3.127}$$

$$\le\ C\|\triangle\mathbf{B}_p\|^2+\frac{E}{6Re}\|\triangle\mathbf{v}\|^2+\frac{1}{4Rm}\|\triangle\mathbf{B}_t\|^2 \tag{3.128}$$

E ainda:

$$-\int_V f(\mathbf{x})\triangle\mathbf{v}d\mathbf{x}\le C\|f(\mathbf{x})\|^2+\frac{E}{6Re}\|\triangle\mathbf{v}\|^2 \tag{3.129}$$

Basta somarmos 3.118 e 3.120, substituindo as estimativas obtidas, para chegar a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\|\nabla\times\mathbf{B}_t\|^2+E\|\nabla\times\mathbf{v}\|^2\right)+\frac{1}{2Rm}\|\triangle\mathbf{B}_t\|^2+\frac{E}{2Re}\|\triangle\mathbf{v}\|^2 \tag{3.130}$$

$$\le C\left(\|\triangle\mathbf{B}_p\|^2+\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2\right) \tag{3.131}$$

Assim, podemos aplicar o lema uniforme de Gronwall (3.4.2), uma vez que já temos as estimativas pelos corolários 3.7.1 e 3.7.2. Isto nos leva à estimativa:

$$\|\nabla \times \mathbf{B}_t\|^2 + E\|\nabla \times \mathbf{v}\|^2 \leq \frac{a_3}{r} + a_2, \quad \forall t \geq r \tag{3.132}$$

Com a_2 e a_3 constantes positivas. Uma estimativa para $0 \leq t \leq r$, pode ser obtida via integração de 3.130, supondo condições iniciais sobre $\|\nabla \times \mathbf{B}_t\|$ e $\|\nabla \times \mathbf{v}\|$ finitas.

Proposição 3.7.1. *Existem constantes C_1 e C_2 tais que:*

$$\int_t^{t+r} \|\triangle \mathbf{B}_t\|^2 dt \leq C_1 + C_2 r \tag{3.133}$$

$$\int_t^{t+r} \|\triangle \mathbf{v}\|^2 dt \leq C_1 + C_2 r \tag{3.134}$$

Demonstração. Totalmente idêntico ao corolário 3.7.1, considerando 3.120. □

3.8 Sobre a existência de soluções

Como já foi discutido nas seções 3.1 e 3.3, o campo magnético $\mathbf{B}$ pode ser decomposto em:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_t = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{x}P(\mathbf{x})) + \nabla \times (\mathbf{x}T(\mathbf{x})) = \nabla \times (A\widehat{\varphi}) + B_\varphi \widehat{\varphi} \tag{3.135}$$

Onde $A = -\frac{\partial}{\partial \theta} P(\mathbf{x})$ e $B_\varphi = -\frac{\partial}{\partial \theta} T(\mathbf{x})$

E encontramos as seguintes expansões em autofunções para T e P:

$$T(r,\theta,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} T^{(i,j)}(t)\sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{i+1/2}\left(\frac{x_{ij}}{R_\odot} r\right) P_i(\cos\theta) \tag{3.136}$$

$$P(r,\theta,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} P^{(i,j)}(t)\sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{i+1/2}\left(\frac{x_{(i-1)j}}{R_\odot} r\right) P_i(\cos\theta) \tag{3.137}$$

Diferenciando adequadamente, podemos escrever expansões para as variáveis $\mathbf{B}_t$, $\mathbf{B}_p$ e $\mathbf{v}$ em autofunções do operador $-\triangle$, conforme a seguir:

$$\mathbf{B}_p = \sum_{k=1}^{\infty} B_p^{(k)}(t)\psi_k \tag{3.138}$$

$$\mathbf{B}_t = \sum_{k=1}^{\infty} B_t^{(k)}(t)\phi_k \tag{3.139}$$

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}(t)\phi_k \tag{3.140}$$

$$\tag{3.141}$$

Onde as funções ψ_k formam uma base ortonormal completa para H_3 e ϕ_k para H_1 e os autovalores são respectivamente λ_k^{ψ} e λ_k^{ϕ}.

Definimos os espaços de dimensão finita $\mathcal{M}_n^{\psi} := \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ e $\mathcal{M}_n^{\phi} := \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$. Denotaremos P_n^{ψ} e P_n^{ϕ} os projetores ortogonais em $\mathcal{M}_n^{\psi}$ e $\mathcal{M}_n^{\phi}$, respectivamente.

Definimos ainda soluções ditas aproximadas $\mathbf{B}_p^n$, $\mathbf{B}_t^n$ e $\mathbf{v}^n$, tais que satifaçam o sistema a seguir:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_p^n}{\partial t} = \frac{1}{Rm}\triangle \mathbf{B}_p^n + P_n^{\psi}\left[\nabla \times (\alpha' \mathbf{B}_t^n)\right] \tag{3.142}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_t^n}{\partial t} = \frac{1}{Rm}\triangle \mathbf{B}_t^n + P_n^{\phi}\left[\nabla \times \left(\mathbf{v}^n \times \mathbf{B}_p^n\right) - b'|\mathbf{B}_t^n|^2 \mathbf{B}_t^n\right] \tag{3.143}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^n}{\partial t} = \frac{1}{Re}\triangle \mathbf{v}^n + P_n^{\phi}\left[\frac{1}{E}(\nabla \times \mathbf{B}_t^n) \times \mathbf{B}_p^n + f(\mathbf{x})\widehat{\varphi}\right] \tag{3.144}$$

Teorema 3.8.1. *As estimativas da seção anterior são aplicáveis ao problema dado por 3.142 a 3.144, no sentido que:*

$$\|\mathbf{B}_p^n\| \le C_{B_p}\ , \quad \|\nabla \times \mathbf{B}_p^n\| \le D_{B_p}, \quad \int_t^{t+r} \|\triangle \mathbf{B}_p^n\|^2 dt \le C_1 + C_2 r$$
$$\|\mathbf{B}_t^n\| \le C_{B_t}\ , \quad \|\nabla \times \mathbf{B}_t^n\| \le D_{B_t}, \quad \int_t^{t+r} \|\triangle \mathbf{B}_t^n\|^2 dt \le C_1 + C_2 r$$
$$\|\mathbf{v}^n\| \le C_{B_v}\ , \quad \|\nabla \times \mathbf{v}^n\| \le D_{v}, \quad \int_t^{t+r} \|\triangle \mathbf{v}^n\|^2 dt \le C_1 + C_2 r$$

Demonstração. Se P é um projetor ortogonal num espaço de Hilbert, então $P = P^*$ e se $u = Pu$, então:

$$\langle u, Pv\rangle = \langle Pu, v\rangle = \langle u, v\rangle \tag{3.145}$$

Aliado a isto e ao fato que $\|Pu(0)\| \leq \|u(0)\|$, as estimativas seguem de forma idêntica. $\square$

Agora se escrevermos:

$$\mathbf{B}_p^n = \sum_{k=1}^{n} B_p^{(k,n)}(t)\psi_k \tag{3.146}$$

$$\mathbf{B}_t^n = \sum_{k=1}^{n} B_t^{(k,n)}(t)\phi_k \tag{3.147}$$

$$\mathbf{v}^n = \sum_{k=1}^{n} v^{(k,n)}(t)\phi_k \tag{3.148}$$

$$\tag{3.149}$$

Obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares sobre os coeficientes:

$$\frac{\partial}{\partial t}B_p^{(k,n)} = -\lambda_k^{\psi} B_p^{(k,n)} + \sum_{i=1}^{n} B_t^{(i,n)} \langle \nabla \times (\alpha' \phi_i), \psi_k \rangle \tag{3.150}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}B_t^{(k,n)} &= -\lambda_k^{\phi} B_t^{(k,n)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v^{(i,n)} B_p^{(j,n)} \langle \nabla \times (\phi_i \times \psi_j), \phi_k \rangle \\ &\quad -b' \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} B_t^{(i,n)} B_t^{(j,n)} B_t^{(l,n)} \langle |\phi_i \cdot \phi_j| \phi_l, \phi_k \rangle\end{aligned} \tag{3.151}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}v^{(k,n)} &= -\lambda_k^{\phi} v^{(k,n)} + \frac{1}{E}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_t^{(i,n)} B_p^{(j,n)} \langle (\nabla \times \phi_i) \times \psi_j, \phi_k \rangle \\ &\quad + \langle f(\mathbf{x}), \phi_k \rangle\end{aligned} \tag{3.152}$$

Este sistema possui solução maximal definida para todo $t \in [0, \infty)$, dadas as estimativas no teorema 3.8.1. As soluções aproximadas, portanto, permacem em uma bola limitada de $L^2(0,T,H^2) \bigcap L^\infty(0,T,H^1)$

Aplicaremos o teorema de compacidade 3.5.1 com relação às inclusões:

$$H^2(V) \subset\subset W^{1,4}(V) \subset H^1(V) \tag{3.153}$$

O teorema garante a existência de subsequências $\mathbf{B}_t^{n'}$, $\mathbf{B}_p^{n'}$ e $\mathbf{v}^{n'}$ fortemente convergentes em $W^{1,4}(V)$ para elementos $\mathbf{B}_t^*$, $\mathbf{B}_p^*$ e $\mathbf{v}^*$ também em $W^{1,4}(V)$. Podemos supor também, que a subsequência converge fracamente em $H^2(V)$.

Analisamos, agora, comportamento das equações 3.142 a 3.144 frente ao limite $n' \to \infty$.

Tomando o produto interno de 3.142 com as autofunções, temos:

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{B}_p^{n'}}{\partial t}, \psi_k \right\rangle + \frac{1}{Rm} \left\langle \nabla \times \mathbf{B}_p^{n'}, \nabla \times \psi_k \right\rangle = \left\langle \alpha' \mathbf{B}_t^{n'}, \nabla \times \psi_k \right\rangle \tag{3.154}$$

Multiplicando a última expressão por uma função $\varsigma(t) \in C^1[0,T]$ tal que $\varsigma(T) = 0$, temos:

$$\begin{gathered} - \int_0^T \left\langle \mathbf{B}_p^{n'}, \psi_k \right\rangle \varsigma'(t) dt + \left\langle \mathbf{B}_p^{n'}(0)\varsigma(0), \psi_k \right\rangle + \\ \frac{1}{Rm} \int_0^T \left\langle \nabla \times \mathbf{B}_p^{n'}, \nabla \times \psi_k \right\rangle \varsigma(t) dt = \int_0^T \left\langle \alpha' \mathbf{B}_t^{n'}, \nabla \times \psi_k \right\rangle \varsigma(t) dt, \ 1 \leq k \leq n' \end{gathered} \tag{3.155}$$

onde procedeu-se com integração por partes no primeiro termo. A passagem para o limite não oferece dificuldade, quando observamos que $\mathbf{B}_p^{n'}(0) \to \mathbf{B}_{p0}$ fortemente em L^2, $\mathbf{B}_{p0}$ é a condição inicial. De forma que 3.155 se torna:

$$\begin{gathered} - \int_0^T \left\langle \mathbf{B}_p^*, \psi_k \right\rangle \varsigma'(t) dt + \langle \mathbf{B}_p(0)\varsigma(0), \psi_k \rangle + \\ \frac{1}{Rm} \int_0^T \left\langle \nabla \times \mathbf{B}_p^*, \nabla \times \psi_k \right\rangle \varsigma(t) dt = \int_0^T \langle \alpha' \mathbf{B}_t^*, \nabla \times \psi_k \rangle \varsigma(t) dt, \forall k \geq 1 \end{gathered} \tag{3.156}$$

Por linearidade e continuidade, podemos reescrever esta expressão como:

$$\begin{gathered} - \int_0^T \left\langle \mathbf{B}_p^*, \nu \right\rangle \varsigma'(t) dt + \langle \mathbf{B}_{p0}\varsigma(0), \nu \rangle + \\ \frac{1}{Rm} \int_0^T \left\langle \nabla \times \mathbf{B}_p^*, \nabla \times \nu \right\rangle \varsigma(t) dt = \int_0^T \langle \alpha' \mathbf{B}_t^*, \nabla \times \nu \rangle \varsigma(t) dt \end{gathered} \tag{3.157}$$

onde ν é qualquer função em H_1. Se escolhermos agora $\varsigma(t) \in \mathcal{D}(0,T) \equiv \{f \in C^\infty, supp(f) \subset (0,T)\}$. Temos:

$$- \int_0^T \left\langle \mathbf{B}_p^*, \nu \right\rangle \varsigma'(t) dt + \frac{1}{Rm} \int_0^T \left\langle \nabla \times \mathbf{B}_p^*, \nabla \times \nu \right\rangle \varsigma(t) dt = \int_0^T \langle \alpha' \mathbf{B}_t^*, \nabla \times \nu \rangle \varsigma(t) dt$$

O que é equivalente à formulação fraca:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \mathbf{B}_p^*, \nu \right\rangle + \frac{1}{Rm}\left\langle \nabla \times \mathbf{B}_p^*, \nabla \times \nu \right\rangle = \left\langle \alpha' \mathbf{B}_t^*, \nabla \times \nu \right\rangle, \ \forall \nu \in H_1 \tag{3.158}$$

Mostraremos agora que $\mathbf{B}_p(0) = \mathbf{B}_{p0}$. Para tal multiplique 3.158 por $\varsigma(t) \in C^1(0, T)$ tal que $\varsigma(T) = 0, \varsigma(0) \neq 0$ e após integração por partes obtenha:

$$\int_0^T \left\langle \mathbf{B}_p^*, \nu \right\rangle \varsigma'(t)dt + \left\langle \mathbf{B}_p^*(0)\varsigma(0), \nu \right\rangle + \frac{1}{Rm}\int_0^T \left\langle \nabla \times \mathbf{B}_p^*, \nabla \times \nu \right\rangle \varsigma(t)dt \tag{3.159}$$

$$= \int_0^T \left\langle \alpha' \mathbf{B}_t^*, \nabla \times \nu \right\rangle \varsigma(t)dt, \ \forall \nu \in H_1 \tag{3.160}$$

A simples comparação com 3.157 nos leva a $\mathbf{B}^*(0) = \mathbf{B}_{p0}$.

A passagem ao limite é idêntica para as equações 3.143 e 3.144.

3.9 Sobre a unicidade de soluções

Suponha a existência de dois trios de soluções $\mathbf{B}_p$, $\mathbf{B}_t$ e $\mathbf{v}$, bem como, $\mathbf{B}_p^*$, $\mathbf{B}_t^*$ e $\mathbf{v}^*$, satisfazendo 3.70 a 3.72 no intervalo de $[0, T]$ e também as condições iniciais 3.78. Defina:

$$\mathbf{w}_{Bp} := \mathbf{B}_p - \mathbf{B}_p^*, \quad \mathbf{w}_{Bt} := \mathbf{B}_t - \mathbf{B}_t^*, \quad \mathbf{w}_v := \mathbf{v} - \mathbf{v}^* \tag{3.161}$$

E também:

$$\mathbf{w} := \left(\mathbf{w}_{Bp}, \mathbf{w}_{Bt}, \mathbf{w}_v\right), \qquad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{\|\mathbf{w}_{Bp}\|^2 + \|\mathbf{w}_{Bt}\|^2 + \|\mathbf{w}_v\|^2} \tag{3.162}$$

Substituindo em 3.70 a 3.72, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}_{Bp} = \frac{1}{Rm}\triangle \mathbf{w}_{Bp} + \nabla \times (\alpha' \mathbf{w}_{Bt}) \tag{3.163}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}_{Bt} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B_p}) - \nabla \times \left(\mathbf{v}^* \times \mathbf{B_p^*}\right) \\ &\quad + \frac{1}{Rm}\triangle \mathbf{w}_{Bt} - b'|\mathbf{B}_t|^2\mathbf{B}_t + b'|\mathbf{B}_t^*|^2\mathbf{B}_t^* \end{aligned} \tag{3.164}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}_v = \frac{1}{E}(\nabla \times \mathbf{B}_t) \times \mathbf{B}_p - \frac{1}{E}(\nabla \times \mathbf{B}_t^*) \times \mathbf{B}_p^* + \frac{1}{Re}\triangle \mathbf{w}_v \tag{3.165}$$

Tomando o produto interno de 3.163 com $\mathbf{w}_{Bp}$, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\mathbf{w}_{Bp}\|^2 + \frac{1}{Rm}\|\nabla \times \mathbf{w}_{Bp}\|^2 = \langle \nabla \times (\alpha' \mathbf{w}_{Bt}), \mathbf{w}_{Bp}\rangle \tag{3.166}$$

$$= \langle \alpha' \mathbf{w}_{Bt}, \nabla \times \mathbf{w}_{Bp}\rangle \leq \frac{\alpha'_\infty Rm}{2}\|\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2Rm}\|\nabla \times \mathbf{w}_{Bp}\|^2 \tag{3.167}$$

Fazendo o mesmo com 3.164, estimando os termos seguintes:

$$\left\langle \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_p) - \nabla \times \left(\mathbf{v}^* \times \mathbf{B}_p^*\right), \mathbf{w}_{Bt}\right\rangle \tag{3.168}$$

$$= \left\langle (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_p) - \left(\mathbf{v}^* \times \mathbf{B}_p^*\right), \nabla \times \mathbf{w}_{Bt}\right\rangle \tag{3.169}$$

$$= \langle (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \times \mathbf{B}_p, \nabla \times \mathbf{w}_{Bt}\rangle + \left\langle \mathbf{v}^* \times (\mathbf{B}_p - \mathbf{B}_p^*), \nabla \times \mathbf{w}_{Bt}\right\rangle \tag{3.170}$$

$$\leq \left(\|\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\|.\|\mathbf{B}_p\|_{L_\infty} + \|\mathbf{B}_p - \mathbf{B}_p^*\|.\|\mathbf{v}^*\|_{L_\infty}\right)\|\nabla \times \mathbf{w}_{Bt}\| \tag{3.171}$$

$$\leq C\left(\|\triangle \mathbf{B}_p\| + \|\triangle \mathbf{v}^*\|\right)\|\mathbf{w}\|.\|\nabla \times \mathbf{w}_{Bt}\| \tag{3.172}$$

$$\leq C\left(\|\triangle \mathbf{B}_p\|^2 + \|\triangle \mathbf{v}^*\|^2\right)\|\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2Rm}\|\nabla \times \mathbf{w}_{Bt}\| \tag{3.173}$$

Usaremos, agora, a representação $\mathbf{B}_t = B_\varphi \widehat{\varphi}$, a fim de chegar à igualdade:

$$-b'|\mathbf{B}_t|^2\mathbf{B}_t + b'|\mathbf{B}_t^*|^2\mathbf{B}_t^* = -b'\left({B_\varphi}^3 - {B_\varphi^*}^3\right)\widehat{\varphi} \tag{3.174}$$

$$= -b'\left({B_\varphi}^2 + B_\varphi B_\varphi^* + {B_\varphi^*}^2\right)\mathbf{w}_{Bt} \tag{3.175}$$

De forma que:

$$\left\langle -b'|\mathbf{B}_t|^2\mathbf{B}_t + b'|\mathbf{B}_t^*|^2\mathbf{B}_t^*, \mathbf{w}_{Bt}\right\rangle = -\left\langle b'\left({B_\varphi}^2 + B_\varphi B_\varphi^* + {B_\varphi^*}^2\right)\mathbf{w}_{Bt}, \mathbf{w}_{Bt}\right\rangle$$
$$= -b'\int_V \left({B_\varphi}^2 + 2B_\varphi B_\varphi^* + {B_\varphi^*}^2\right)|\mathbf{w}_{Bt}|^2 d\mathbf{x} \leq 0 \tag{3.176}$$

Assim 3.164 nos leva a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\mathbf{w}_{Bt}\|^2 + \frac{1}{Rm}\|\nabla \times \mathbf{w}_{Bt}\|^2 \leq C\left(\|\triangle \mathbf{B}_p\|^2 + \|\triangle \mathbf{v}^*\|^2\right)\|\mathbf{w}\|^2 \tag{3.177}$$

Agora, passamos à terceira equação, para tal estimamos o termo não linear:

$$
\begin{aligned}
& \left\langle (\nabla \times \mathbf{B}_t) \times \mathbf{B}_p - (\nabla \times \mathbf{B}_t^*) \times \mathbf{B}_p^*, \mathbf{w}_v \right\rangle & (3.178)\\
= \;& \langle (\nabla \times \mathbf{w}_{Bt}) \times \mathbf{B}_p, \mathbf{w}_v \rangle + \langle (\nabla \times \mathbf{B}_t^*) \times \mathbf{w}_{Bp}, \mathbf{w}_v \rangle & (3.179)\\
\leq \;& \|\nabla \times \mathbf{w}_{Bt}\|.\|\mathbf{B}_p\|_{L_\infty}.\|\mathbf{w}_v\| + \|\nabla \times \mathbf{B}_t^*\|_{L_4}.\|\mathbf{w}_{Bp}\|.\|\mathbf{w}_v\|_{L_4} & (3.180)\\
\leq \;& C\|\nabla \times \mathbf{w}_{Bt}\|.\|\triangle \mathbf{B}_p\|.\|\mathbf{w}_v\| + C\|\triangle \mathbf{B}_t^*\|.\|\mathbf{w}_{Bp}\|.\|\nabla \times \mathbf{w}_v\| & (3.181)\\
\leq \;& \frac{1}{4Rm}\|\mathbf{w}_{Bt}\|^2 + \frac{E}{2Re}\|\nabla \times \mathbf{v}\|^2 + C\left(\|\triangle \mathbf{B}_p\|^2 + \|\triangle \mathbf{B}_t^*\|^2\right)\|\mathbf{w}\|^2 & (3.182)
\end{aligned}
$$

Das estimativas obtidas, chegamos:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\|\mathbf{w}\|^2 \leq C\left(\|\triangle \mathbf{v}^*\|^2 + \|\triangle \mathbf{B}_p\|^2 + \|\triangle \mathbf{B}_t^*\|^2\right)\|\mathbf{w}\|^2 \tag{3.183}
$$

Como vale a estimativa:

$$
C\int_0^t \left(\|\triangle \mathbf{v}^*(s)\|^2 + \|\triangle \mathbf{B}_p(s)\|^2 + \|\triangle \mathbf{B}_t^*(s)\|^2\right) ds \leq C_3 + C_4 t \tag{3.184}
$$

segue que $\|\mathbf{w}\| \equiv 0$, posto que as condições iniciais são nulas.

3.10 Sobre o erro local de truncamento

Nesta seção estamos interessados em estimar o erro de truncamento causado quando se assume a aproximação 3.142 a 3.144 para o sistema 3.70 a 3.72.

Sejam $\mathbf{B}_p$, $\mathbf{B}_t$ e $\mathbf{v}$, as soluções exatas e $\mathbf{B}_p^*$, $\mathbf{B}_t^*$ e $\mathbf{v}^*$, as soluções aproximadas. Defina, como, na seção anterior:

$$
\mathbf{w}_{Bp} := \mathbf{B}_p - \mathbf{B}_p^*, \quad \mathbf{w}_{Bt} := \mathbf{B}_t - \mathbf{B}_t^*, \quad \mathbf{w}_v := \mathbf{v} - \mathbf{v}^* \tag{3.185}
$$

E também:

$$
\mathbf{w} := (\mathbf{w}_{Bp}, \mathbf{w}_{Bt}, \mathbf{w}_v), \qquad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{\|\mathbf{w}_{Bp}\|^2 + \|\mathbf{w}_{Bt}\|^2 + \|\mathbf{w}_v\|^2} \tag{3.186}
$$

Substituindo em 3.70 a 3.72 e 3.142 a 3.144, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}_{Bp} = \frac{1}{Rm}\triangle\mathbf{w}_{Bp} + \nabla\times(\alpha'\mathbf{B_t}) - P_n^{\psi}\left[\nabla\times(\alpha'\mathbf{B_t^*})\right] \quad (3.187)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}_{Bt} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B_p}) - P_n^{\phi}[\nabla\times\big(\mathbf{v}^*\times\mathbf{B_p^*}\big)]$$

$$+\frac{1}{Rm}\triangle\mathbf{w}_{Bt} - b'|\mathbf{B}_t|^2\mathbf{B}_t + b'P_n^{\phi}[|\mathbf{B}_t^*|^2\mathbf{B}_t^*] \quad (3.188)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}_v = \frac{1}{E}(\nabla\times\mathbf{B}_t)\times\mathbf{B}_p - P_n^{\phi}\frac{1}{E}(\nabla\times\mathbf{B}_t^*)\times\mathbf{B}_p^* \quad (3.189)$$

$$+ \frac{1}{Re}\triangle\mathbf{w}_v + Q_n^{\varphi}[\mathbf{f}(\mathbf{x})] \quad (3.190)$$

Definimos ainda os projetores Q_n^{ψ} e Q_n^{ϕ}, como sendo os projetores complementares a P_n^{ψ} e P_n^{ϕ}, respectivamente. As seguintes estimativas são simples aplicações da desigualdade de Poincaré:

$$\|Q_n^{\phi}\mathbf{B}\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_n^{\phi}}\|\nabla\times\mathbf{B}\|^2 \quad (3.191)$$

$$\|Q_n^{\psi}\mathbf{B}\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_n^{\psi}}\|\nabla\times\mathbf{B}\|^2 \quad (3.192)$$

$$(3.193)$$

Tomando o produto interno de 3.187 com $\mathbf{w}_{Bp}$, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\mathbf{w}_{Bp}\|^2 + \frac{1}{Rm}\|\nabla\times\mathbf{w}_{Bp}\|^2 = \Big\langle\nabla\times(\alpha'\mathbf{B_t}) - P_n^{\psi}\left[\nabla\times(\alpha'\mathbf{B_t^*})\right], \mathbf{w}_{Bp}\Big\rangle \quad (3.194)$$

Tratamos de estimar o termo à direita:

$$\Big\langle\nabla\times(\alpha'\mathbf{B_t}) - P_n^{\psi}\left[\nabla\times(\alpha'\mathbf{B_t^*})\right], \mathbf{w}_{Bp}\Big\rangle \leq \langle\nabla\times(\alpha'\mathbf{B_t}) - \nabla\times(\alpha'\mathbf{B_t^*}), \mathbf{w}_{Bp}\rangle \quad (3.195)$$

$$+\Big\langle\nabla\times(\alpha'\mathbf{B_t^*}) - P_n^{\psi}\left[\nabla\times(\alpha'\mathbf{B_t^*})\right], \mathbf{w}_{Bp}\Big\rangle \quad (3.196)$$

$$= \langle\alpha'\mathbf{w}_{Bt}, \nabla\times\mathbf{w}_{Bp}\rangle + \Big\langle[\nabla\times(\alpha'\mathbf{B}_t^*)], Q_n^{\psi}\mathbf{w}_{Bp}\Big\rangle \quad (3.197)$$

$$\leq \alpha'_{\infty}\|\mathbf{w}_{Bt}\|\|\nabla\times\mathbf{w}_{Bp}\| + \|\alpha'\|_{H^1}\|\mathbf{B}_t\|_{H^1}\|\mathbf{w}_{Bp}\| \quad (3.198)$$

$$\leq C\|\mathbf{w}_{Bt}\|^2 + \frac{1}{Rm}\|\nabla\times\mathbf{w}_{Bp}\|^2 + \frac{C}{\lambda_n^{\psi}} \quad (3.199)$$

Obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\mathbf{w}_{Bp}\|^2 \leq \frac{{\alpha'_{\infty}}^2 Rm}{4}\|\mathbf{w}_{Bt}\|^2 + \frac{1}{\lambda_n^{\psi}}(\|D\alpha'\|_{L_\infty}\|\nabla\times\mathbf{B}_t\| + \alpha'_{\infty}\|\triangle\mathbf{B}_t^*\|) \quad (3.200)$$

Já o mesmo procedimento aplicado à segunda equação, nos leva a:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w_{Bt}\|^2 + \frac{1}{Rm}\|\nabla \times \mathbf{w}_{Bt}\| \\
= \;& \left\langle \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B_p}) - P_n^{\varphi}\nabla \times (\mathbf{v}^* \times \mathbf{B_p^*}), \mathbf{w}_{Bt} \right\rangle \\
- \;& b' \left\langle |\mathbf{B}_t|^2\mathbf{B}_t - P_n^{\varphi}[|\mathbf{B}_t^*|^2\mathbf{B}_t^*], \mathbf{w}_{Bt} \right\rangle \\
= \;& T_1 + T_2 \qquad (3.201)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_1 : \;=\;& \left\langle \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_p) - P_n^{\varphi}\nabla \times (\mathbf{v}^* \times \mathbf{B}_p^*), \mathbf{w}_{Bt} \right\rangle \qquad (3.202) \\
=\;& \left\langle \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_p) - \nabla \times (\mathbf{v}^* \times \mathbf{B}_p^*), \mathbf{w}_{Bt} \right\rangle + \left\langle Q_n^{\varphi}\nabla \times (\mathbf{v}^* \times \mathbf{B}_p^*), \mathbf{w}_{Bt} \right\rangle \\
=\;& \left\langle (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_p) - (\mathbf{v}^* \times \mathbf{B}_p^*), \nabla \times \mathbf{w}_{Bt} \right\rangle + \left\langle \nabla \times (\mathbf{v}^* \times \mathbf{B}_p^*), Q_n^{\varphi}\mathbf{w}_{Bt} \right\rangle \\
=\;& \left\langle (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \times \mathbf{B}_p + \mathbf{v}^* \times (\mathbf{B}_p - \mathbf{B}_p^*), \nabla \times \mathbf{w}_{Bt} \right\rangle + \left\langle (\mathbf{B}_p^* \cdot \nabla)\mathbf{v}^*, Q_n^{\varphi}\mathbf{w}_{Bt} \right\rangle
\end{aligned}
$$

que pode ser estimado:

$$
\begin{aligned}
|T_1| \;\leq\;& \left(\|\mathbf{w}_v\|_{L^4} \cdot \|\mathbf{B}_p\|_{L^4} + \|\mathbf{w}_{Bp}\|_{L^4} \cdot \|\mathbf{v}^*\|_{L^4}\right) \|\nabla \times \mathbf{w}_{Bt}\| \\
+\;& \|\mathbf{B}_p^*\|_{L^4}\|\nabla \times \mathbf{v}^*\| \cdot \|\mathbf{w}_{Bt}\|_{L^4} \\
\leq\;& C\left(\frac{1}{\lambda_n^{\phi\,1/4}} + \frac{1}{\lambda_n^{\psi\,1/4}}\right)\|\nabla \times \mathbf{w}\|^2 + \frac{C}{\lambda_n^{1/2}} + \frac{1}{4Rm}\|\nabla \times \mathbf{w}_{Bt}\|^2 \qquad (3.203)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
T_2 : \;=\;& -b' \left\langle |\mathbf{B}_t|^2\mathbf{B}_t - P_n^{\varphi}[|\mathbf{B}_t^*|^2\mathbf{B}_t^*], \mathbf{w}_{Bt} \right\rangle \\
=\;& -b' \left\langle |\mathbf{B}_t|^2\mathbf{B}_t - |\mathbf{B}_t^*|^2\mathbf{B}_t^*, \mathbf{w}_{Bt} \right\rangle - b' \left\langle Q_n^{\varphi}\left[|\mathbf{B}_t^*|^2\mathbf{B}_t^*\right], \mathbf{w}_{Bt} \right\rangle \\
\leq\;& -b' \left\langle Q_n^{\varphi}\left[|\mathbf{B}_t^*|^2\mathbf{B}_t^*\right], \mathbf{w}_{Bt} \right\rangle \qquad (3.204)
\end{aligned}
$$

onde calculando $|T_2|$, obtemos:

$$
|T_2| \;\leq\; \frac{b'}{\lambda_n^{\varphi}}\|\nabla \times \left(|\mathbf{B}_t^*|^2\mathbf{B}_t^*\right)\| \cdot \|\mathbf{w}_{Bt}\| \qquad (3.205)
$$

Conforme cálculos idênticos aos de 3.108 e 3.111, temos:

$$
|T_2| \;\leq\; \frac{b'}{\lambda_n^{\varphi}}\left\||\mathbf{B}_t^*|^2\left(\nabla \times \mathbf{B}_t^*\right)\right\| \cdot \|\mathbf{w}_{Bt}\| \qquad (3.206)
$$

Agindo de forma idêntica para terceira equação, podemos somar as três expressões obtidas para ter, para n grande:

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\mathbf{w}\|^2 \leq C\|\mathbf{w}\|^2 + \frac{D}{\lambda_n}, \qquad \lambda_n = \min(\lambda_n^{\varphi}, \lambda_n^{\psi}) \tag{3.207}$$

De forma, que o lema de Gronwall leva à estimativa seguinte:

$$\|\mathbf{w}\|^2 \leq \frac{D}{C\lambda_n}\left(e^{C(t-t_0)} - 1\right) + \|\mathbf{w}(t_0)\|^2 e^{C(t-t_0)} \tag{3.208}$$

4 INVESTIGAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, voltamos nossa atenção ao estudo numérico das equações em tela na forma mais conveniente para simulações, ou seja, na forma escalar que repetimos abaixo. Foram realizadas simulação através de dois métodos. O métodos das diferenças finitas e por expansão em autovalores do laplaciano (Galerkin). Infelizmente, não fomos capazes de obter resultados com o segundo método: todas as soluções decaem exponencialmente a zero. Atribuimos isso ao fato de a complexidade do algoritmo não nos permitir a utilização de um número suficiente de modos.

As equações são:

$$
\left.\begin{array}{rcl}
\frac{\partial A}{\partial t} & = & \alpha B_\varphi + \eta(\triangle - R^{-2})A \\
\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} & = & \frac{1}{r}\frac{\partial(v_\varphi R^{-1}, AR)}{\partial(r,\theta)} + \eta(\triangle - R^{-2})B_\varphi - bB_\varphi^3 \\
\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} & = & \frac{1}{\rho}\left(\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_\varphi + \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \nu\left(\triangle - R^{-2}\right)v_\varphi
\end{array}\right\}\text{No interior}
$$

$$
\left.\begin{array}{rcl}
(\triangle - R^{-2})A & = & 0 \\
B_\varphi & = & 0 \\
v_\varphi & = & 0
\end{array}\right\}\text{No exterior}
\tag{4.1}
$$

4.1 Estudo numérico pelo método das diferenças finitas

Realizou-se um estudo numérico do sistema de equações em questão pelo método das diferenças finitas. A discretização espacial foi feita usando derivadas centrais de segunda ordem, a discretização temporal foi implementada pelo método de Runge-Kutta simplificado de segunda ordem com três estágios. Maiores detalhes são dados a seguir.

Devido à simetria axial do sistema, o domínio esférico pode ser representado por apenas uma metade de um círculo meridional. Com intuito de proceder com o método das diferenças finitas, este meio círculo foi preenchido com uma malha polar conforme sugere a figura 4.1:

Figura 4.1: Malha polar em um semi-círculo meridional. Aqui, apenas para efeito de ilustração, vê-se uma malha 7x5.

Para a região interna à malha, escolhemos um esquema de derivadas centrais de forma que, mediante suficiente regularidade, têm-se erros de segunda ordem. Ao valor do núcleo, atribuímos a média aritmética dos valores adjacentes.

4.1.1 Discretização temporal

Utilizaremos o método de Runge-Kutta simplificado de três estágios que resulta em aproximações de segunda ordem. O esquema é dado a seguir:

$$X_{i,j}^1 = X_{i,j}^0 + 1/2 f\left(X_{i,j}^0\right) \tag{4.2}$$

$$X_{i,j}^2 = X_{i,j}^0 + 1/2 f\left(X_{i,j}^1\right) \tag{4.3}$$

$$X_{i,j}^0 = X_{i,j}^0 + f\left(X_{i,j}^2\right) \tag{4.4}$$

4.1.2 Condições de contorno

As variáveis B e ω apresentam condições de contorno de Dirichlet nulas, desta forma:

$$B_{i_{max}+1,j} = 0 \tag{4.5}$$

$$\omega_{i_{max}+1,j} = 0 \tag{4.6}$$

No entanto, encontramos condição de contorno não trivial para a variável A, que deve satisfazer $(\nabla^2 - R^{-2})(A) = 0$ na região externa ao sol e módulo zero no infinito. Felizmente, a linearidade do operador permite-nos definir:

$$A_{i_{max}+1,j} = T\left(A_{i_{max},j}\right) \tag{4.7}$$

onde T é uma operação linear e, portanto, pode ser descrita por uma multiplicação matricial. Esta matriz foi obtida numericamente utilizando o método de Gauss-Seidel com relaxação por um programa auxiliar.

4.1.3 Resultados da simulação

A simulação considerou os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} \eta &= 5 \cdot 10^8 m^2 s^{-1} \\ \alpha(r,\theta) &= \alpha_\infty \sin(\theta) \\ \alpha_\infty &= 1 m s^{-1} \\ b &= 10^{-2} T^{-2} s^{-1} \\ \nu\rho &= 10^{-5} Kg \cdot m^{-1} s^{-1} \\ \rho &= 500 Kg \cdot m^{-3} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como condições iniciais, utilizamos:

$$\begin{aligned} A(r,\theta) &= 1 \\ B(r,\theta) &= 10^{-3} \\ w(r,\theta) &= -\tfrac{w_o}{2}(1-\tilde{r}^2)^5, \quad \tilde{r} = r/R_\odot \\ w_0 &= 5 \cdot 10^{-1} m s^{-1} \end{aligned} \tag{4.9}$$

A (aparentemente estranha) condição inicial para o movimento foi considerada realista e estudada por Roberts (veja [14]).

A seguir apresentamos os perfis do campo magnético simulado.

Figura 4.2: $\Omega = 0$ e $\Omega = \pi/8$

Figura 4.3: $\Omega = \pi/4$ e $\Omega = 3\pi/8$

Figura 4.4: $\Omega = \pi/2$ e $\Omega = 5\pi/8$

Figura 4.5: $\Omega = 3\pi/4$ e $\Omega = 7\pi/8$

Referências Bibliográficas

[1] AGMON, S. *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems.* Van Nostrand Mathematical Studies, Princeton, N.J., 1965.

[2] BEER, J., TOBIAS, S., AND WEISS, N. An active sun throughout the maunder minimum. *Solar Physics 181* (1998), 237–249.

[3] BOSSAVIT, A., AND PLANCHARD, J. On the dynamo effect. *Computational and Applied Mathematics 7* (1988), 41 – 54.

[4] CHILDRESS, S. New solutions of the kinematic dynamo problem. *Jounal of Mathematical Physics 11*, 10, 3063 – 3076.

[5] CHOUDHURI, A. R., SCHUSSLER, M., AND DIKPATI, M. The solar dynamo with meridional circulation. *Astronomy and Astrophysics 303* (1995), L29–L32.

[6] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations.* Americal Mathematical Society, Providence, I.L., 1998.

[7] FLUID MOTION PANEL OF THE AERONAUTICAL RESEARCH COMMITTEE. *Modern developments in fluid dynamics.* Oxford University Press, Oxford, 1957.

[8] GRUZINOV, A., AND DIAMOND, P. Self-consistent theory of mean-field electrodynamics. *Physical Review Letters 72*, 11 (1994), L1–L4.

[9] HATHAWAY, D. H., NANDY, D., WILSON, R. M., AND REICHMANN, E. J. Evidence that a deep meridional flow sets the sunspot cycle period. *The Astrophysical Journal 589* (2003), 665–670.

[10] JONES, C. A., WEISS, N. O., AND CATTANEO, F. Nonlinear dynamos: A complex generalization of the lorenz equations. *Physica D Nonlinear Phenomena 14* (1985), 161–176.

[11] Köhler, H. The solar dynamo and estimates of the magnetic diffusity and the alpha-effect. *Astronomy and Astrophysics 25* (1973), 467476.

[12] Krause, F. *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory.* adler, Pergamon Press, New York, 1980.

[13] Küker, M., Rüdinger, G., and Kitchatinov, L. An alpha-omega-model of the solar differential rotation. *Astronomy and Astrophysics 279*, L1 – L4.

[14] Moffatt, H. R. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids.* Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

[15] Moss, D. Non-axisymmetric solar magnetic fields. *Monthly Notices of the Royal Astronomical 306* (1999), 300–306.

[16] Ossendrijver, M. The solar dynamo. *The Astronomy and Astrophysics review 11* (2003).

[17] Parker, E. *Cosmical Magnetic Fields - their origin and their activity.* Clarendon Press, Oxford, 1979.

[18] Priest, E. R. *Solar Magneto-Hydrodynamics.* D. Reidel Publishing, 1982.

[19] Temam, R. *Navier-Stokes Equations - Theory and Numerical Analysis.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.

[20] Temam, R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Springer-Verlag, New York, 1988.

[21] Thompson, M. Approximate inertial manifolds for mdh-equations with thermal dispersion. *Seminário Brasileiro de Anásise* (1998).

[22] Tworkowski, A., Tavakol, R., Brandenburg, A., Brooke, J. M., Moss, D., and Tuominen, I. Intermittent behaviour in axisymmetric mean-field dynamo models in spherical shells. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 296* (1998), 287–295.

[23] Weiss, N. O. The dynamo problem. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society 12* (1971), 432–446.

[24] Zhank, K., and Liao, X. The kinematic theory of solar dynamo. *Chinese Journal of Astrophysics 3*, 1 (2003), 12–32.

[25] Ziemer, W. P. *Weakly Differentiable Functions*. Springer-Verlag, New York, 1989.