UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARIANA RODOLFO ROCHA

CONSTRUINDO O CONCEITO DE ÂNGULO A PARTIR DA SUA MOBILIZAÇÃO EM DIVERSOS CONTEXTOS E DA UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS

Porto Alegre

2017

MARIANA RODOLFO ROCHA

CONSTRUINDO O CONCEITO DE ÂNGULO A PARTIR DA SUA MOBILIZAÇÃO EM DIVERSOS CONTEXTOS E DA UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Orientadora: Profª. Drª. Elisabete Zardo Búrigo

Porto Alegre

2017

Mariana Rodolfo Rocha

CONSTRUINDO O CONCEITO DE ÂNGULO A PARTIR DA SUA MOBILIZAÇÃO EM DIVERSOS CONTEXTOS E DA UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Porto Alegre, setembro de 2017.

Banca Examinadora:

Profª. Drª. Daniela Stevanin Hoffmann (UFPEL)

Profª. Drª. Leandra Anversa Fioreze (UFRGS)

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso (UFRGS)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que, de alguma forma colaboraram para a concretização deste trabalho. Primeiramente agradeço o apoio e a compreensão da minha mãe e meu irmão enquanto desenvolvia este trabalho e a meu pai que, com certeza, estaria muito orgulhoso desta conquista se estivesse aqui.

À professora Bete pela dedicação enquanto minha orientadora, obrigada pelo exemplo, pela ajuda, pelos conselhos e pela amizade.

Aos meus colegas professores e alunos da Escola Municipal de Ensino Fundamental João Paulo I, pela confiança no meu trabalho e pela disponibilidade, além do apoio à pesquisa e total colaboração na execução das atividades.

Aos meus amigos que muito comemoraram minha aprovação neste programa de Mestrado e que estiveram sempre ao meu lado durante a elaboração desta dissertação.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma experiência de abordagem do conceito de ângulo a partir de sua mobilização em diversos contextos, com a utilização de diferentes materiais manipulativos. O estudo foi desenvolvido com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal de Canoas, no Rio Grande do Sul. Inspirada pelo desenvolvimento do conceito de ângulo por abstração progressiva proposta por Michael Mitchelmore e Paul White e embasada na teoria da abstração reflexionante de Jean Piaget, foram desenvolvidas e analisadas atividades exploratórias em diferentes contextos e utilizando materiais manipulativos diversos para a construção do conceito de ângulo, com base nesses referenciais teóricos. Os dados foram coletados através de gravação em áudio e vídeo, fotografias das produções dos alunos e anotações em um diário de bordo. A análise dos dados permitiu concluir que a mobilização da noção de ângulo em diferentes contextos e a utilização de materiais manipulativos contribuíram para a construção do pensamento geométrico e conceito de ângulo.

Palavras-chave: Ângulos. Geometria. Ensino de matemática. Materiais manipulativos.

ABSTRACT

This work presents an experience in approaching the angle concept from its mobilization in different contexts and by the use of different manipulative materials. The study was developed with seventh grade students from a public school in the city of Canoas, Rio Grande do Sul. Inspired by the development of angle concepts by progressive abstraction proposed by Michael Mitchelmore and Paul White and based on the Jean Piaget's reflective abstraction theory, exploratory activities were developed and analyzed in different contexts and using several manipulative materials for the construction of the angle concept, based on these references. The data were collected through video and audio recording, students' productions photographs and logbook notes. The analysis allowed us to conclude that the mobilization of the angle concept in different contexts and the use of manipulative materials contributed to the construction of the geometrical thinking and concept of angle.

Keywords: Angles. Geometry. Mathematics Education. Manipulative materials.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Como professora do Ensino Fundamental, sempre tive interesse pelo ensino de Geometria. As figuras geométricas admitem diversas representações; considero que as visuais, por meio de desenhos, movimentos e gestos, são as mais impactantes no ensino e na aprendizagem, pelo apoio que fornecem ao pensamento geométrico. Com o uso das tecnologias digitais e de materiais manipulativos, essas representações ganham dinamismo, favorecendo a identificação de propriedades, relações e a construção dos conceitos pelos alunos.

O conceito de ângulo pode aparecer em diversas situações de nossas vidas. Na construção de uma rampa de acesso, a inclinação deve ser muito bem pensada, para que ela possa ser utilizada por pessoas com deficiência ou restrições de movimento. Quando engenheiros projetam estradas, precisam estipular curvas adequadas às condições do terreno, considerando também a capacidade de um carro, a uma certa velocidade, efetuar um determinado giro. Em nosso cotidiano essas situações não são percebidas como envolvendo um conceito matemático, mas tais contextos podem ser explorados, em sala de aula, como ponto de partida para a construção da noção de ângulo.

Em minha atuação como professora do Ensino Fundamental, ainda não havia trabalhado com alunos a abordagem inicial relativa a ângulos, tendo somente desenvolvido um trabalho posterior a esse, envolvendo a medida dos ângulos, congruências e propriedades. Nesse trabalho, deparei-me com muitas dificuldades por parte dos alunos em como manusear o transferidor e também ao interpretar os enunciados. Naquela época, não refleti muito sobre o assunto, porém, ao conhecer a lousa digital disponível na escola e suas ferramentas (régua, transferidor e compasso virtuais), pensei que esses materiais, especialmente o transferidor, seriam de grande utilidade para o ensino e a aprendizagem de ângulos. A partir do esboço de atividade relativa à medição de ângulos, surgiu a ideia de abordar o conceito de ângulo em uma pesquisa, envolvendo a aplicação e avaliação de uma sequência de atividades com um grupo de alunos do Ensino Fundamental.

Para a construção da sequência, busquei apoio em autores que tratam do tema e, especialmente, em Mitchelmore e White (1998; 2000), que apresentam um quadro teórico sobre o desenvolvimento do conceito de ângulo descrito como abstração progressiva, apoiado na teoria da abstração reflexionante de Jean Piaget (1995).

Mitchelmore e White consideram que a aprendizagem de ângulos consiste em reconhecer novas semelhanças – entre experiências com ângulos, entre situações que envolvam ângulos ou entre contextos que envolvam ângulos. As leituras iniciais também suscitaram a visão do conceito de ângulo como uma articulação de várias facetas, as quais não são compiláveis em uma única definição.

A sequência de atividades foi elaborada de modo a contemplar os diferentes estágios da abstração progressiva, envolvendo: a exploração, pelos alunos, da noção de ângulo em situações físicas experienciadas por eles; a classificação das situações de maneira refinada, construindo conceitos de ângulos contextuais; e a construção do conceito de ângulo em domínios abstratos.

Foram utilizados materiais manipulativos para explorar o caráter dinâmico dos ângulos, analisando os movimentos dos objetos, proporcionando uma visualização diferente da fixada no papel. Tais materiais também serviram como apoio para estimativas e generalizações, possibilitando a reflexão dos alunos a partir da execução de determinadas manipulações. Além disso, trabalhando em diversos contextos, pretendeu-se abordar o mesmo conceito sob um ponto de vista diferente, de modo a complementar as definições já obtidas para o conceito de ângulo, buscando ampliá-lo. Busquei planejar atividades de natureza exploratória, possibilitando a construção do conceito por meio da interação entre os colegas, os diversos materiais manipulativos e os diferentes contextos trabalhados.

A pesquisa foi desenvolvida com dezoito alunos das turmas de sétimo ano de uma escola de Ensino Fundamental do município de Canoas, Rio Grande do Sul. Levando em consideração a natureza e a proposta de desenvolvimento das atividades, adotei a investigação qualitativa como metodologia de pesquisa, investigando as experiências vividas pelos sujeitos de investigação e o conjunto de implicações da sequência de atividades, não tendo por objetivo confirmar hipóteses prévias, mas sim, verificar as abstrações construídas à medida em que a pesquisa era desenvolvida.

O estudo foi orientado pela questão norteadora: – *A mobilização da noção de ângulo em diferentes contextos e a utilização de diferentes materiais manipulativos pode contribuir para a construção do conceito geométrico de ângulo?* Assim, a pesquisa pretendeu analisar as potencialidades de uma sequência de atividades exploratórias em diferentes contextos e utilizando variados materiais manipulativos para a construção do conceito de ângulo. O planejamento da sequência foi flexível, considerando que, em um trabalho desta natureza, diversas questões não pensadas previamente surgem a partir das atividades propostas.

Este texto apresenta o desenvolvimento e os resultados da pesquisa. No segundo capítulo, são apresentados os referenciais teóricos que embasaram a construção da sequência de atividades e as análises posteriores. No terceiro capítulo encontra-se a metodologia de pesquisa e a apresentação do grupo. No quarto capítulo é apresentado o relatório das atividades desenvolvidas com os alunos, suas produções e as discussões realizadas em torno dessas produções. No quinto capítulo expõe-se uma análise das produções dos alunos, buscando compreender de que maneira a abordagem adotada contribuiu para a compreensão do conceito de ângulo. As considerações finais apresentam minhas reflexões sobre o estudo realizado e o modo como este trabalho contribuiu para minha prática docente. No Apêndice C, encontra-se o produto técnico deste estudo, composto por uma sequência de atividades para o estudo do conceito geométrico de ângulo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Ângulos: Importância e dificuldades em sua abordagem

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática, nos anos finais do ensino fundamental a geometria é abordada no âmbito do “Espaço e Forma”. Estes documentos salientam a importância deste campo da Matemática na formação cognitiva e indicam ser um importante meio dos alunos compreenderem, descreverem e representarem, de forma organizada, o universo ao redor deles.

> São conhecimentos que contribuem para a aprendizagem de outros saberes, podendo ser identificados em situações do cotidiano. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (BRASIL, 1998, p. 51)

Esta pesquisa teve seu enfoque voltado ao conceito geométrico de ângulo. Vieira (2010) elenca em sua dissertação uma série de situações cotidianas nas quais o conceito de ângulo pode ser empregado, os quais podem servir como motivadores na introdução deste conceito para os alunos, servindo como ponte entre o saber e a realidade dos alunos em sala de aula, levando-os a investigar a presença de ângulos em atividades específicas, construções, situações cotidianas, profissões, etc.

> a) No futebol, os ângulos estão presentes, desde o traçado do campo, até os chutes realizados pelos atletas;
> b) O carpinteiro usa os ângulos para determinar a inclinação do telhado de uma casa, por exemplo;
> c) Esportistas de arco e flecha têm que trabalhar com o ângulo de inclinação;
> d) Quem trabalha com molduras, precisa cortar cada lado do quadro em 45 graus para que as quatro hastes se encaixem sem folga;
> e) Na construção de escadarias e rampas de acesso;
> f) O relógio do sol é outra aplicação do estudo de ângulo formado por sombras;
> g) Medição da posição e distância entre astros e planetas (VIEIRA, 2010, p. 39).

O ensino do conceito de ângulo se justifica mais fortemente na escola pois este é um conceito básico da geometria, que dá suporte a vários outros ao longo de toda a idade escolar.

De acordo com os PCNs e o livro didático[1] adotado pela escola onde a pesquisa foi desenvolvida, o trabalho sistemático com ângulos tem início nos anos iniciais do ensino fundamental, objetivando a localização de objetos no espaço e a relação entre tais objetos. No livro didático do sexto ano do ensino fundamental, sugere-se trabalhar

---

[1] DANTE, L. R. **Projeto Telaris - Matemática**. São Paulo: Ática, 2014.

o conceito de ângulo relacionando-o a giros e voltas, bem como sua classificação como ângulo agudo, reto, obtuso e raso. No sétimo ano, indica-se a medição de ângulos e atividades relativas a ângulos congruentes, complementares, suplementares, opostos pelo vértice e a determinação da bissetriz de um ângulo. Nessas etapas e no oitavo ano são sugeridas atividades relacionando o conceito de ângulos e conteúdos de geometria como o estudo de polígonos, sólidos geométricos, arcos e circunferências, semelhanças, congruências e simetrias. No nono ano, o conceito de ângulo é aplicado à trigonometria explorada no triângulo retângulo, e no tratamento de informações, sendo retomado no Ensino Médio ao se trabalhar principalmente com funções trigonométricas.

Pesquisas como as de Gadotti (2008), Jung (2008) e Vieira (2010) endossam a relevância do estudo do conceito de ângulo, salientando as dificuldades encontradas ao se trabalhar o assunto e a cautela ao se definir tal objeto matemático.

De acordo com Gadotti (2008, p. 12), existe uma complexidade ao se trabalhar com as ideias associadas a ângulo, pois ele “[...] é um conceito difícil de ser aprendido e difícil de ser ensinado, apesar de ser elementar da Geometria e aparentemente simples”. Casas García e Luengo Gonzáles (2005) complementam tal afirmação, identificando nesse conceito uma fonte para erros relacionados tanto em sua conceitualização como em sua medida ou operações, erros que se mantêm até a idade adulta.

De acordo com Diniz e Smole (2008), as pesquisas de Piaget mostram dois pontos importantes para o trabalho deste tema na escola básica: o conceito de ângulo exige um longo tempo para ser compreendido e uma visão estática dificulta a percepção global do conceito, pois é necessário, em alguns contextos, que o ângulo seja percebido como um movimento, como o de giro ou rotação.

Para estas mesmas autoras, segundo as pesquisas do casal Van Hiele sobre a aprendizagem de geometria, outro aspecto precisa ser levado em conta ao se trabalhar com ângulos:

> Os alunos progridem em sua aprendizagem de geometria através de diferentes níveis de entendimento sobre figuras geométricas. Inicialmente percebem a figura como um todo e, progressivamente, desenvolvem suas relações e propriedades. (DINIZ; SMOLE, 2008, p. 1-2)

Dessa forma, segundo Diniz e Smole (2008), os alunos reconhecem pontas, aberturas e cantos, porém, não as identificam como ângulos, nem são capazes de observar propriedades do referido conceito. Com o passar do tempo, deverão se tornar capazes de comparar medidas de ângulo tomando como referência outros ângulos, geralmente retos e rasos, sendo o próximo passo identificar relações e propriedades entre ângulos, tornando-se capazes de operar como tais relações nas mais diversas situações onde o conceito de ângulo figurar.

Em um apanhado geral, podemos classificar as definições usualmente encontradas em livros nos seguintes contextos:

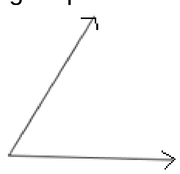
- **Giro ou rotação** (de uma semirreta em torno da origem);
- **Abertura** (entre duas semirretas unidas pela origem);
- **Inclinação** (de uma reta em relação à horizontal);
- **Região** (o cruzamento de duas retas sobre o plano determina quatro regiões).

De acordo com Vianna e Cury (2001), nenhuma das definições usualmente encontradas em livros engloba todos os contextos elencados acima, nos quais podemos trabalhar com ângulos. Não parece haver unanimidade quanto à definição para ângulos nos livros didáticos atuais.

> Uma definição dependerá do uso que se pode fazer daquilo que se pretende definir [...] adotado o nosso critério para dar definições, não existiria uma “essência”, um significado “correto” e aplicável a todas as significações para a palavra ângulo (*Ibid.*, p. 30-31).

As disparidades entre os livros evidenciam dificuldades em se construir uma definição abrangente. Essa mesma dificuldade aparece na compreensão do conceito de ângulo pelos alunos. De acordo com Mitchelmore e White (1998), por conta da natureza multifacetada do conceito de ângulo, as definições trazidas em livros didáticos acarretam dificuldades de compreensão de tal conceito pois, por exemplo, se o ângulo é definido como sendo a amplitude de uma rotação, como interpretar uma esquina como sendo um ângulo? Ou, se o ângulo é definido como sendo um par de semirretas, como distinguir os dois ângulos por ela formados? E, por fim, se o ângulo for definido como uma região, como interpretá-lo como sendo maior do que 360°? Casas García e Luengo Gonzáles (2005) usam o seguinte exemplo para mostrar quão difícil é ensinar tal conceito.

Figura 1 – Representação de ângulo passível de várias interpretações



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Ao se considerar um par de semirretas com uma abertura de 60° entre elas, não há uma única resposta para a pergunta “quanto mede este ângulo”. É possível ver o objeto em questão, mas há uma grande dificuldade em descrever o que ele representa, bem como suas características, uma vez que a representação dá margem a diversas interpretações. Da maneira como é apresentado na Figura 1, pode estar representando os ângulos de 60°, 300°, - 60° ou - 300°. Indo além, poderíamos dizer que tal figura representa a orientação inicial e final de uma semirreta após efetuar um pouco mais de uma volta (420°) ou duas (780°), e assim por diante.

Segundo Casas García e Luengo Gonzáles (2005), no caso da definição de ângulo como região entre retas no espaço, há uma série de dificuldades. Primeiramente, tal definição não institui um único objeto, mas, pelo menos, quatro objetos diferentes, devido a divisão do plano em quatro regiões distintas quando interseccionamos duas retas nesse plano. Outra dificuldade inerente a essa definição é que a mesma não serve para os ângulos de 0º, de 180º, de 360º ou maiores, nem para ângulos negativos.

Ao trabalhar o ângulo como sendo a amplitude de um giro, não somos afetados pelas restrições mostradas anteriormente, relacionadas a ângulos maiores que uma volta ou ângulos negativos, porém, esta definição apresenta uma diferença substancial - implica em algo material que represente a ação de rotacionar.

No contexto de inclinações e giros, geralmente uma das semirretas que compõem o ângulo não é evidente, sendo implícita à situação, porém, a não explicitação deste elemento torna muito mais difícil a identificação do ângulo nesse contexto pelos alunos.

De acordo com Casas García e Luengo Gonzáles (2005), o problema de aprender o conceito de ângulo é que os alunos devem integrar experiências educacionais distintas e também devem integrar definições muito diferentes.

Segundo Mitchelmore e White (1998), estas dificuldades só serão transpostas pelos estudantes quando estes reconhecerem o mesmo conceito envolvido em diferentes situações. É preciso trabalhar o conceito nos diferentes contextos para que as diferentes definições possam ser articuladas pelos alunos, de modo a formar um conceito geral de ângulo que contemple suas mais diversas contextualizações.

Para esses autores, os alunos precisam perceber que o conceito de ângulo é mais amplo que a soma de suas diferentes definições e que não é possível expressá-lo em palavras, mas que implica em duas linhas unidas em um ponto e alguma relação entre elas. Tais relações se expressam de forma diferente em diferentes circunstâncias.

Casas García e Luengo Gonzáles (2005) destacam, também, que o aspecto mais importante não é encontrar uma definição adequada para o conceito de ângulo, mas que os alunos sejam capazes de construí-la a partir de situações que envolvam ângulos ao longo de sua escolarização. Esses mesmos autores salientam a importância de lidar com modelos físicos para aprender realidades abstratas, sendo de suma importância para os alunos a utilização de suportes físicos e atividades manipulativas ao longo de sua escolarização, uma vez que tais instrumentos auxiliam os alunos a organizar o pensamento relativo a conceitos complexos como o de ângulo.

2.3 A utilização de materiais manipulativos

Matos e Serrazina (1996) afirmam que a aprendizagem se baseia na experiência e a construção de conceitos matemáticos é um processo longo que requer o envolvimento ativo do aluno, que vai progredindo do concreto para o abstrato. De acordo com Nacarato (2005), o desenvolvimento dos processos de visualização depende da exploração de modelos ou materiais que possibilitem ao aluno a construção de imagens mentais. Por estes motivos, acredita-se que o material manipulativo pode ter um importante papel no processo de aprendizagem, podendo ser um recurso capaz de catalisar experiências individuais de aprendizagem na construção dos conceitos matemáticos.

Segundo Rodrigues e Gazire (2012), materiais manipulativos podem tornar as aulas mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa. Corroborando esta ideia, os autores afirmam que o material manipulativo é fundamental para o ensino experimental, uma vez que facilita a observação, análise, desenvolve o raciocínio lógico e crítico, sendo excelente para auxiliar os alunos na construção dos seus conhecimentos. Para Lorenzato (2006), os materiais manipulativos podem desempenhar várias funções, dependendo do objetivo a que se prestam: apresentar um assunto, motivar os alunos, auxiliar na memorização de resultados e facilitar a redescoberta. Tal autor considera que o verdadeiro objetivo do material manipulativo seja servir de mediador na construção do conhecimento, facilitando as relações entre professor, aluno e conhecimento.

Para Rêgo e Rêgo (2006), durante a utilização do material manipulativo, cabe ao professor alguns cuidados básicos, dentre os quais se destacam:

> I. Dar tempo para que os alunos conheçam o material;
> II. Incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
> III. Mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades, por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;
> IV. Realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;
> V. Planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo, e
> VI. Sempre que possível, estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material. (RÊGO; RÊGO, 2006, p. 54).

Porém, Matos e Serrazina (1996) alertam para o fato de que, mais importante do que os materiais com os quais se trabalha, a experiência que o aluno está vivenciando deve ser significativa para ele, isto é, deve ser capaz de se ligar aos conhecimentos já adquiridos anteriormente.

Segundo Pais (2000), o uso de materiais manipulativos no ensino de geometria deve ser acompanhado de uma reflexão pedagógica, visando sua contribuição para a construção do conceito trabalhado.

> Uma compreensão inicial pode induzir um aparente dualismo entre as condições concretas e particulares dos recursos didáticos em oposição as condições abstratas e gerais das noções geométricas. Mas esta dualidade não deve ser vista como polos isolados do processo de construção conceitual, deve ser superada pela busca de um racionalismo aberto, dialogado e dialetizado. Em suma, devemos sempre estimular um constante vínculo entre a manipulação de materiais e situações significativas para o aluno (PAIS, 2000, p.14-15)

É preciso atentar-se para o modo de utilização dos materiais manipulativos. Para Lorenzato (2006), a eficiência desse material depende da forma como o professor irá utilizá-lo no momento em que mediar uma atividade com este material. De acordo com Rodrigues e Gazire (2012), ao restringir o contato com o material apenas ao campo visual (observação), corre-se o risco de obter apenas um conhecimento superficial desse objeto. Rêgo e Rêgo (2006) destacam que a aprendizagem não reside na estrutura física do material ou na simples manipulação do mesmo, devendo resultar de reflexões sobre as operações impostas sobre a ação manipulativa.

> Não é o uso específico do material concreto, mas, sim, o significado da situação, as ações da criança e sua reflexão sobre essas ações que são importantes na construção do conhecimento matemático (SCHLIEMANN; SANTOS; COSTA, 1992, p.101).

De um modo geral, tais autores defendem que o aluno não aprende Matemática apenas manipulando objetos. Isto é, os conceitos matemáticos não residem no material ou na ação sobre ele. É preciso que haja uma atividade mental por parte do aluno, mediada pelo professor, permeada de reflexões sobre a ação manipulativa, a qual deve permitir ao aluno o reconhecimento de relações que o levem a pensar, analisar e agir (PASSOS, 2006).

As posições destacadas acima reforçam o argumento de que o uso de materiais manipulativos serve como um meio auxiliar no processo de ensino-aprendizagem onde o professor deve atuar como mediador, orientando os alunos a realizar uma ação reflexiva sobre os objetos durante as atividades.

2.4 A utilização da lousa digital

Há alguns anos as novas tecnologias vêm sendo incorporadas ao cotidiano das salas de aula, sendo consideradas como grandes fontes de inovação nos processos de ensinar e aprender. Com este propósito é que a lousa digital vem sendo agregada ao aparato tecnológico das escolas. Trata-se de uma tela sensível ao toque (das mãos ou de canetas específicas), em que são projetadas imagens enviadas por um projetor multimídia, conectado a um computador. Tais imagens podem ser advindas da internet, filmes ou atividades elaboradas pelo professor. Além disso, existem os *softwares* de gerenciamento, específicos para os quadros interativos, que disponibilizam outros recursos para a elaboração das aulas, possibilitando a inclusão da linguagem audiovisual nas práticas pedagógicas, sendo possível a utilização de objetos de aprendizagem disponíveis na internet, bem como softwares matemáticos como os de geometria dinâmica.

De acordo com Nakashima e Amaral (2007), a lousa interativa incorpora todos os recursos que o computador oferece, mas com o diferencial de permitir a interação entre o professor e a sala de aula, possibilitando reflexões sobre a atividade proposta e registros na própria lousa, estimulando a construção coletiva do conhecimento.

De acordo com Glover e Miller (2001), a utilização da lousa objetiva o aumento da eficiência, permitindo aos professores recorrer a uma variedade de recursos, sem interrupção ou perda de ritmo, bem como estender a aprendizagem, utilizando materiais mais atraentes para explicar conceitos e ainda para transformar a aprendizagem, criando novos estilos de aprendizagem.

Esteves, Fiscarelli e Souza (2013) afirmam que a lousa digital interativa pode auxiliar o professor em suas práticas pedagógicas por meio de diferentes recursos e ferramentas na sala de aula, podendo, ainda, proporcionar maior interatividade, possibilitando aos alunos as mesmas interações que estão acostumados a fazer quando estão navegando na internet, dentre outras funções.

Ao unir os recursos disponibilizados na lousa digital às ideias criativas dos sujeitos envolvidos, cria-se um ambiente capaz de estimular a colaboração entre os alunos, mediado pelas orientações do professor, sendo de suma importância a metodologia do professor ao articular as potencialidades da lousa com as práticas pedagógicas. Esse processo não exclui os momentos em que os alunos trabalham individualmente em seus cadernos e livros, mas traz novas possibilidades pedagógicas de se trabalhar em sala de aula. De acordo com Esteves, Fiscarelli e Souza (2013), é preciso que o *software* e o material propiciem uma nova experiência para o aluno, e que tenha uma participação ativa e coletiva na aula.

Ainda para estes autores, para que qualquer tecnologia possa, necessariamente, fazer a diferença na conquista do saber, ela deve ser utilizada regularmente e tornar-se parte integrante da aprendizagem:

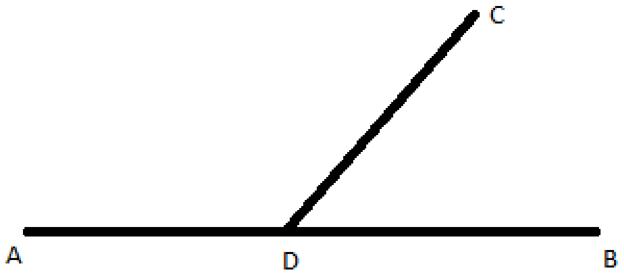
> As lousas digitais "[...] certamente não são a solução definitiva para alcançar o sucesso em sala de aula. Mas, sob as condições adequadas, podem ajudar a promover o envolvimento dos alunos, fomentando a aprendizagem dos conteúdos em sala de aula, centrada no aluno" (CURWOOD, 2009, p. 30).

2.5 A abstração reflexionante

De acordo com a teoria de Piaget (1995), o conhecimento é concebido como uma construção, explicada através de um processo de abstração reflexionante. Abstrair significa retirar, extrair de um objeto informações que fazem sentido ao sujeito. Em matemática, utilizamos o termo abstrair para justificar procedimentos mentais sobre um objeto, como teoremas ou situações-problema, a fim de retirar deles características, buscando a execução de um raciocínio.

No livro *La géométrie spontanée de l'enfant*, de Piaget, Inhelder e Szeminska (1948), há um capítulo dedicado à medida de ângulo, que apresenta uma pesquisa na qual é proposta uma atividade de reprodução de ângulo e são analisadas as respostas dadas pelas crianças. A atividade consiste em reproduzir a figura mostrada a seguir (Figura 2).

Figura 2 - Atividade proposta por Jean Piaget



Fonte: Piaget, Inhelder e Szeminska (1948, p. 226).

Em um estágio inicial, as crianças entrevistadas concebiam o desenho como duas semirretas que deveriam se encontrar em algum ponto, não efetuando medida de comprimento e de ângulo, fazendo o desenho à mão livre, sem a utilização da régua, efetuando somente uma estimativa visual.

Em um segundo estágio, as crianças passaram a medir o comprimento dos segmentos AB e CD, porém, a partição do segmento AB nos segmentos AD e DB não era avaliada e os ângulos mostrados na Figura 2 eram apenas estimados.

No estágio seguinte, a medição de AD e DB já era efetuada e a inclinação do segmento CD passou a ser reproduzida a partir da inclinação da régua transladada do desenho mostrado para o desenho dos alunos. A partir deste estágio, as crianças verificaram que o traçado de CD não era aleatório e que, além de seu comprimento, sua inclinação também deveria ser medida.

No estágio final, as crianças mediam os comprimentos de AC e CB, fixando assim o ponto C de modo a reproduzir os ângulos corretamente. Algumas crianças neste estágio mediram o comprimento de CK, onde K era marcado no segmento AB de modo que CK e AB fossem perpendiculares.Em um estágio posterior de suas pesquisas, na obra intitulada “Abstração Reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais”, Piaget (1995) apresenta relatos de 18 pesquisas feitas com crianças e adolescentes, valendo-se da proposição de situações-problema para inferir sobre o desenvolvimento das crianças ou adolescentes, sujeitos das pesquisas.

Em sua obra, dois tipos de abstrações são abordados - a abstração empírica e a abstração reflexionante.

> As propriedades [extraídas] sobre as quais se refere a abstração empírica existiam nos objetos antes de qualquer constatação por parte do sujeito. [Já a abstração reflexionante], [...] apoia-se sobre tais formas [geradas por esquemas] e sobre todas as atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas, etc.), para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades (novas adaptações, novos problemas, etc.). (PIAGET, 1995, p. 5-6)

A abstração empírica limita-se a extrair informações contidas no objeto, não é fonte de novas construções. Já a abstração reflexionante acontece quando o sujeito retira das ações as características e propriedades, *repassando-as para um patamar superior (reflexionamento) e reorganizando-as nesse patamar (reflexão)*, sendo caracterizada como um processo endógeno. Pelo processo continuo e alternado entre reflexionamento e reflexão é que se realiza a abstração reflexionante.

Segundo Piaget (1995), a abstração empírica só avança se apoiada na abstração reflexionante, enquanto esta se torna autônoma à medida que o sujeito avança nos estágios de desenvolvimento.

A capacidade de conduzir o sujeito a patamares superiores torna a abstração reflexionante apta a produzir novidades. Piaget (1995) salienta que:

> Quanto à abstração reflexionante, ela é fonte contínua de novidades, porque atinge novas ‘reflexões’ sobre cada um dos planos sucessivos do ‘reflexionamento’ e estes se engendram sem que sua sequência seja jamais acabada (PIAGET, 1995, p. 205).

A abstração reflexionante pode se apresentar sob duas formas: a abstração pseudo-empírica e a abstração refletida.

As abstrações pseudo-empíricas ocorrem “[...] a partir de objetos materiais, como se tratassem de abstrações empíricas, [no entanto] as propriedades constatadas são, na realidade, introduzidas nestes objetos por atividades do sujeito.” (PIAGET, 1995, p. 6). Nesse tipo de abstração reflexionante, “[...] o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações” (PIAGET, 1995, p. 274). Já a abstração refletida é a que resulta de um pensamento, ou seja, uma reflexão sobre a reflexão.

Segundo Piaget (1995):

> [...] a abstração pseudo-empírica apareceu bem como um caso particular de abstração reflexionante: o que o sujeito tira dos objetos (além, naturalmente, de suas qualidades físicas registradas por abstração empírica [...] são as propriedades que é capaz de neles introduzir, de acordo com o nível de suas coordenações de ações (PIAGET, 1995, p. 147).

Pela abstração pseudo-empírica o sujeito retira dos objetos características e propriedades não intrínsecas ao objeto, mas colocadas nele pelo próprio sujeito. Na abstração pseudo-empírica, o sujeito coloca no objeto algo que, originalmente, não estava nele; ficando claro que, o que o sujeito abstraiu não pertence ao objeto; foi o sujeito que o colocou lá, daí o nome de pseudo-empírica.

O número, como toda a matemática, só existe na mente do sujeito; não existe na natureza. Se o sujeito retira alguma instância matemática da natureza, ele a retira porque ele a colocou lá, previamente.

Piaget diz que “[...] todo reflexionamento de conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devido à reflexão [...]” (1995, p. 276), e assim teremos uma alternância entre os processos de reflexionamento e reflexão com duração indefinida, proporcionando como resultado novidades e reelaborações.

2.6 Aprendizagem de ângulo por abstração progressiva

Mitchelmore e White (1998; 2000) apresentam uma nova teoria para o desenvolvimento do conceito de ângulo. Estes autores propõem que a aprendizagem de ângulos consiste em reconhecer novas semelhanças – entre experiências com ângulos, entre situações que envolvam ângulos ou entre contextos que envolvam ângulos.

> A aprendizagem sobre ângulos consiste no reconhecimento de novas semelhanças – entre experiências com ângulos, entre situações envolvendo ângulos ou entre contextos angulares. O reconhecimento de uma semelhança entre experiências com ângulos físicos cria uma situação de ângulo físico; o reconhecimento de uma semelhança entre situações de ângulos físicos cria um contexto de ângulo físico; e o reconhecimento de uma semelhança entre contextos de ângulos físicos cria um domínio de ângulo abstrato. Cada situação, contexto e domínio corresponde a um conceito de ângulo situado, contextualizado e abstrato, respectivamente (MITCHELMORE; WHITE, 1998, p.19-20, tradução nossa).

A teoria apresentada por esses autores procura relacionar os conceitos de ângulos das crianças a suas experiências com ângulos físicos e para explicar especificamente suas dificuldades em coordenar diferentes aspectos do conceito de ângulo. Ela se baseia no processo de formação do conceito por abstração e descreve o desenvolvimento conceitual de ângulo como uma sequência de três estágios de abstração. As ideias principais que norteiam sua abordagem para a formação do conceito são classificação, semelhanças, abstração e conceito.

> Abstrair é uma atividade pela qual nós nos damos conta de semelhanças [...] entre nossas experiências. Classificar significa coletar nossas experiências com base nessas semelhanças. Uma abstração é algum tipo de mudança duradoura, o resultado da abstração é que nos permite reconhecer novas experiências como tendo as características de uma classe já formada. [...] Para distinguir entre abstração como uma atividade e abstração como seu produto-final, nós [...] chamaremos o último de conceito (SKEMP, 1986, p. 21, *apud* MITCHELMORE; WHITE, 2000, p. 211, tradução nossa).

Segundo Mitchelmore e White (2000), os termos “generalização” e “abstração” são frequentemente confundidos na literatura. Abstração é vista como a formação de um novo objeto mental que representa uma classe de objetos ou experiências, diferente de quando o conceito inicial se torna mais rico, sem mudar a essência. Tal processo é chamado generalização. A principal diferença entre a abstração e a generalização é que a abstração cria um novo objeto/conceito mental enquanto a generalização só amplia o significado de um conceito já existente.

Outras ideias que sustentam a teoria de tais autores são: a construção de conceitos cotidianos, a construção de conceitos matemáticos elementares e a construção de conceitos matemáticos formais.

As semelhanças entre objetos nas salas de aula são frequentemente relacionadas ao propósito dos objetos e geralmente não são definidas em termos de atributos individuais. Tais objetos são classificados com base em uma série de atributos. Em algum ponto, as crianças começam a tratar tais classes de objetos como entidades únicas e novos objetos mentais, criados a partir de classes de objetos concretos, podem ser relacionados sem haver uma referência específica. Tais autores definem assim os conceitos cotidianos.

> Crianças que dizem "Uma xícara comporta água" ou jogam o jogo da "tesoura, papel, pedra" com as suas mãos, estão operando com classes e não com objetos individuais. Palavras como xícara e tesoura denotam conceitos — novos objetos mentais, criados fora das classes de objetos concretos que podem ser relacionados um ao outro sem referência para objetos específicos e concretos (GREENO, 1983, *apud* MITCHELMORE; WHITE, 2000, p. 218, tradução nossa).

Os conceitos matemáticos elementares são formados através do mesmo processo de classificação e abstração que conceitos cotidianos com uma importante diferença: os objetos classificados não são sempre objetos concretos ou objetos mentais, mas também podem ser relações entre objetos ou conceitos, os quais devem ser abstraídos simultaneamente.

Os atributos essenciais para existência de conceitos matemáticos começam a ser incorporados às definições. Porém, definições verbais neste estágio são ineficientes ao ensinar novos conceitos.

Os conceitos matemáticos formais são interpretados como a abstração dos conceitos matemáticos elementares. É importante que a definição de um conceito matemático formal capture a essência do conceito matemático elementar de onde é abstraído. Os conceitos que surgirem ao longo do processo suplementam e não substituem conceitos adquiridos anteriormente: a ligação entre um conceito, relações envolvendo o conceito, e a classe de objetos do qual é abstraído são cruciais.

Mitchelmore e White (1998; 2000) descrevem o desenvolvimento do conceito de ângulo em termos de três estágios sobrepostos de abstração. Tais estágios diferem não somente em relação às classes em que cada conceito é baseado, mas também em uma apropriada representação física para cada conceito e na generalização do conhecimento relacionado àquele conceito.

De acordo com Mitchelmore e White (1998), o primeiro estágio - conceito situado de ângulo - se dá ao reconhecer que algumas experiências são semelhantes no seu propósito, no movimento envolvido e na configuração geométrica, os alunos agrupam tais experiências em uma classe mental – uma situação de ângulo físico. A situação inicial gradualmente aumenta para incluir futuramente, experiências similares. Em algum ponto, a situação adquire status de objeto mental independente e geralmente recebe um nome. Este objeto mental é um conceito de ângulo situado. Tais conceitos são limitados a situações semelhantes, que envolvem ações similares e são experimentadas em circunstâncias sociais parecidas.

Muitos brinquedos infantis como rampas e guindastes também são modelos de ângulos situados. Um modelo situado representa as características comuns a uma classe de experiências em vez de uma experiência específica, e por isso também representa o conceito situado correspondente.

Este estágio se completa antes da idade escolar. A maioria dos conceitos de ângulo situado se desenvolvem-se de brincadeiras e de várias experiências sociais durante a primeira infância.

No segundo estágio, chamado de conceito contextualizado de ângulo, as crianças reconhecem semelhanças entre diferentes situações de ângulos físicos e começam a formar contextos angulares, reunindo em um mesmo contexto angular as situações de ângulo físico que contenham semelhanças. Por exemplo, eles podem ver que ladeiras e guindastes têm inclinação, e assim vão ampliando gradualmente a ideia de incluir outros exemplos de objetos que inclinam e contextos angulares são formados com base na semelhança aparente entre suas configurações.

Todas as situações em um contexto compartilham uma configuração geométrica comum. Porém, diferentes contextos exibem diferentes configurações. (por exemplo, inclinações consistem em uma linha visual e outra imaginária, esquinas são regiões demarcadas por duas linhas e todos os giros consistem em algum movimento).

De acordo com Mitchelmore e White (1998), as crianças se dão conta destas semelhanças gradualmente, apesar das situações em cada contexto angular serem diferentes, mas sempre há algo sobre eles que é o mesmo. Essa ideia comum corresponde ao conceito de ângulo contextualizado.

Uma vez reconhecido um contexto angular, as crianças começam a desenvolver um conhecimento sobre ângulos contextualizados que se aplica a todas as situações incluídas em cada contexto (mas não necessariamente através de contextos diferentes).

A configuração geométrica dos contextos que a criança formou no estágio de conceito de ângulo contextualizado diferem consideravelmente para o conceito abstrato de ângulo. Neste estágio, as crianças ficam cientes de semelhanças entre essas configurações. O reconhecimento de semelhanças entre os contextos que envolvem ângulos são o início de um conceito matemático elementar de ângulo, formando os conceitos abstratos de ângulo.

Para Mitchelmore e White (2000), cada semelhança define um domínio abstrato de ângulo e pode levar a um conceito abstrato de ângulo. Quanto mais contextos são vistos como semelhantes, mais os domínios de ângulos da criança gradualmente evoluem para o que eles chamam de conceito geral de ângulo padrão.

Semelhanças entre situações em contextos de ângulos físicos e entre contextos de um domínio de ângulo abstrato não são óbvias. O reconhecimento de tais semelhanças requer uma ação física ou mental por parte do aprendiz, e um processo construtivo que requer abstração reflexiva.

Assim que as crianças começam a formar conceitos abstratos de ângulo, elas adquirem conhecimento que se aplica a todos os contextos em um certo domínio. Isso é o que os autores chamam de conhecimento abstrato de ângulo, que se desenvolve como um resultado dos anos finais do ensino fundamental.

Segundo Mitchelmore e White (1998; 2000), para o aluno construir o conceito de ângulo padrão, é necessário desenvolver os três estágios da abstração progressiva: inicialmente, desenvolvendo conceitos de ângulos em situações físicas experienciadas por eles; depois, classificando as situações de maneira refinada, construindo conceitos de ângulos contextuais; e, finalmente, construindo o conceito de ângulo padrão em domínios abstratos.

3 METODOLOGIA E APRESENTAÇÃO DO GRUPO

A pesquisa foi realizada segundo com uma abordagem qualitativa, motivada por algumas inquietações acerca do ensino do conceito de ângulo, buscando responder à seguinte questão norteadora da pesquisa: *A mobilização da noção de ângulo em diferentes contextos e a utilização de diferentes materiais manipulativos pode contribuir para a construção do conceito geométrico de ângulo?* Foi construída e aplicada uma sequência de atividades visando explorar as relações entre as diversas situações e contextos, bem como utilizando diferentes materiais manipulativos, em que o conceito de ângulo é abordado e o seu aprendizado por parte dos alunos.

De acordo com Bodgan e Biklen (1991), na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, neste caso, a própria sala de aula. A investigação qualitativa, preocupa-se com o contexto, entendendo que as ações podem ser mais bem compreendidas quando são observadas no ambiente habitual de ocorrência.

A sequência de atividades foi desenvolvida principalmente no Laboratório de Ciências da escola onde se encontra fixada a lousa digital. Essa sala não é muito utilizada pelos professores e alunos, porém, faz parte do ambiente escolar com o qual os alunos daquela escola já estão familiarizados.

A pesquisadora foi também professora, na medida em que acompanhou, em seu ambiente natural, as experiências dos sujeitos, tentando apreender a visão de mundo de seus alunos, isto é, o significado que estes atribuem à realidade que os cerca e suas ações.

De acordo com a metodologia de pesquisa qualitativa, os materiais registrados devem ser revistos na sua totalidade, sendo o entendimento do pesquisador acerca dos registros o instrumento-chave de análise: “Os investigadores tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos” (BODGAN; BIKLEN, 1991).

Segundo os mesmos autores, os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. Tendem a analisar os dados de forma indutiva, não tendo por objetivos confirmar hipóteses construídas previamente; as abstrações são construídas à medida que os dados recolhidos vão se agrupando.

> Os investigadores qualitativos em educação estão continuamente a questionar os sujeitos de investigação, com o objetivo de perceber “aquilo que eles experimentam, o modo como eles interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem” (PSATHAS, 1973 *apud* BODGAN; BIKLEN, 1991, p. 51).

Com o andamento do trabalho, surgiram novos elementos que não esperávamos no início. Na maioria das vezes essas descobertas surgiam através de manifestações de alunos, na resolução de uma determinada tarefa, manipulando algum objeto, ou em diálogos e indicações físicas. Por este motivo, a sequência de atividades estava em constante aprimoramento, buscando englobar aspectos que se mostraram deficientes ao longo das atividades, de modo a sempre complementar o conceito trabalhado.

> O objetivo dos investigadores qualitativos é o de melhor compreender o comportamento e experiência humanos. Tentam compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados e descrever em que consistem estes mesmos significados (BODGAN; BIKLEN, 1991, p. 70).

Por conta desse interesse no processo e nas abstrações constituídas à medida que as atividades vão se tornando significativas para os alunos, foi necessária uma ampla coleta de dados visando a análise posterior, incluindo diálogos entre os alunos, entre os alunos e o pesquisador, bem como suas anotações, dúvidas e respostas.

Esse tipo de abordagem foi escolhido, pois analisa as relações entre os significados produzidos pelos alunos, buscando compreender suas escolhas e ações. Embora as dificuldades com a compreensão do conceito de ângulo que motivaram a pesquisa não fossem específicas destes alunos, a pesquisa de campo dedicou-se a compreender as aprendizagens daquele grupo de alunos.

A pesquisa foi desenvolvida com a aplicação de uma sequência de atividades, que totalizou sete encontros, com o objetivo principal de construir o conceito de ângulo através da mobilização do conceito em diversos contextos e utilizando diferentes materiais manipulativos. Os sujeitos da pesquisa eram alunos de diferentes turmas dos sétimos anos do Ensino Fundamental da Escola Municipal de Ensino Fundamental João Paulo I, da rede municipal de ensino de Canoas – RS, os quais foram convidados a participar de oficinas de Matemática no turno inverso ao da aula regular, entre os meses de agosto e setembro de 2016. Participaram, em média, nove alunos por encontro, em um total de 19 alunos participantes. Por meio dessa experiência foi possível conviver com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental e coletar informações, estabelecer diálogos e realizar intervenções de modo a compreender o que já era conhecido pelos alunos sobre o conceito de ângulo bem como abordá-lo em diferentes contextos, utilizando diferentes materiais de modo a tornar tal conceito de ângulo mais abrangente e melhor definido para os alunos.

A introdução ao conceito de ângulo estava prevista como conteúdo do 6º ano, na qual os alunos deveriam reconhecer ângulos retos, rasos, obtusos e agudos, além de sua correspondência com giros, porém, segundo depoimento dos alunos e dos professores, nem todos os alunos participantes tiveram contato prévio com este conteúdo.

O desenvolvimento da proposta foi registrado através de gravações em áudio e vídeo, fotos e cópia das atividades desenvolvidas pelos alunos em papel. Para a participação dos alunos na pesquisa, contamos com o termo de consentimento assinado pelo responsável, conforme o Apêndice A, o qual autorizava a frequência dos alunos nos encontros bem como a utilização das atividades e gravações para posterior análise.

Para desenvolver, aplicar e analisar a abordagem didática sobre o conceito de ângulo partiu-se dos referenciais teóricos, descritos no capítulo 2, de modo que as atividades estivessem em consonância com o desenvolvimento dos sujeitos envolvidos, podendo assim compreender tais sujeitos e suas ações.

No capítulo 4, serão apresentadas as atividades propostas bem como o relato das oficinas, e a análise das atividades realizadas são apresentadas no capítulo 5.

4 ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo, são apresentados o relato e comentários acerca do desenvolvimento das atividades propostas aos alunos. Esse desenvolvimento ocorreu nos meses de agosto e setembro do ano de 2016, com o grupo de alunos já caracterizado no terceiro capítulo. O trabalho foi desenvolvido no formato de oficina, no turno inverso ao das aulas, totalizando sete encontros com duração de uma hora e meia cada e contando com a participação de dezenove alunos.

O relato foi construído com base nos registros coletados. Nesse relato, não são apresentadas todas as resoluções produzidas pelos alunos, mas são mostradas as resoluções que ilustram ou que são representativas da produção da maioria dos alunos e, para algumas atividades, também são apresentadas soluções inesperadas. As produções devem ser compreendidas como expressões de um processo de investigação em curso, e não como definições a serem copiadas ou replicadas em outros experimentos. Procurei propor novas atividades e questões que possibilitassem aos alunos reformular suas conclusões, construindo definições e conclusões mais precisas e abrangentes.

Cabe destacar que os alunos citados no relato tiveram seus nomes verdadeiros preservados, sendo feita a referência por nomes fictícios e, como o número de alunos variava a cada encontro, também variou a composição dos grupos formados para a realização das atividades, ao longo da oficina.

4.1 Montando quebra-cabeças

A primeira atividade foi de montagem de quebra-cabeças, em pequenos grupos. Os mesmos quebra-cabeças foram disponibilizados aos alunos em dois diferentes suportes: material manipulativo e objeto digital de aprendizagem a ser explorado em computadores ou na lousa digital. Com essa atividade, objetivou-se o reconhecimento, por parte dos alunos, da importância do “tamanho das aberturas”, isto é, da medida dos ângulos, com relação ao encaixe das peças. Durante a atividade, busquei observar diferenças e preferências na montagem dos quebra-cabeças. Também foi solicitado aos alunos que falassem e escrevessem sobre o que era necessário para se montar as figuras, quais as dificuldades encontradas e quais as figuras mais fáceis de montar.

A princípio, neste primeiro encontro, seria necessário fazer uso dos computadores, então foi utilizado o laboratório de informática e a lousa digital portátil. Ao ligar os computadores, verifiquei que a *internet* não estava funcionando e que seria preciso trabalhar de maneira diferente da planejada. Já sabia desta possibilidade, motivo pelo qual levei meu computador pessoal e sabia que a escola já possuía um *notebook* no laboratório de Ciências que poderia ser utilizado. Acessando a *internet* com outra rede disponibilizada pela escola, consegui executar o jogo em duas máquinas.

A sala disponibilizada não possuía um quadro branco grande para projetar a imagem da lousa digital portátil, apenas um mural pequeno. Para a utilização deste tipo de lousa, era necessário fixar, ao lado do local da projeção, o sensor que captava o toque da caneta no quadro e, ainda, calibrar tal sensor para delimitar a área onde estava sendo projetada a imagem e obter precisão quanto ao toque da caneta. Cogitei adiar a atividade, uma vez que a lousa e os computadores eram os principais instrumentos a serem utilizados nesta aula, porém, decidi utilizar o mural para projeção que, mesmo sendo pequeno, tornava a lousa utilizável.

Grande parte dos alunos já me conhecia, pois haviam sido meus alunos no ano anterior. Ao chegarem à sala da atividade, me cumprimentaram com calorosos abraços. Havia tempo que não os via, pois deixei a escola em 2015. Iniciamos a atividade com uma conversa, enquanto eu ainda ajustava a lousa e os computadores. Durante a conversa, pôde-se notar que os alunos pensavam que as oficinas seriam uma espécie de reforço de Matemática. No total, estavam presentes dezesseis alunos; seis meninos e dez meninas.

Enquanto eu organizava a atividade, pensava em como trabalharia com os alunos, uma vez que eu precisaria dividi-los em grupos. Solicitei que os alunos se dividissem em trios e um quarteto e assim que se organizaram, encaminhei dois trios para a atividade nos computadores e dois trios e o quarteto para a atividade que utilizava o jogo físico.

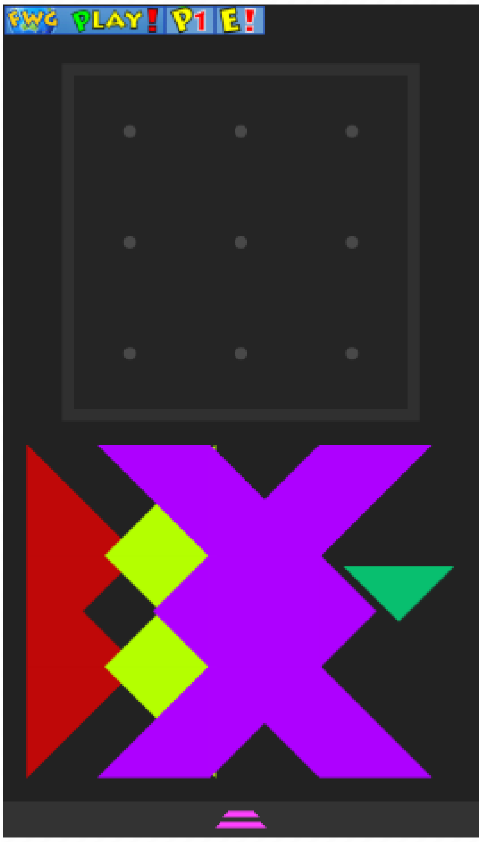
A atividade consistia em disponibilizar aos alunos que estavam utilizando os computadores, o jogo de quebra-cabeças *Powerblocks*[2] e, para os que não estavam no computador, seria disponibilizado o mesmo jogo, porém, usando peças físicas. Ao explicar a atividade, utilizei a lousa para mostrar aos alunos o jogo e indicar como

---

[2] Disponível em: <http://www.clickjogos.com.br/jogos/powerblocks-2/>.

transportar as peças, bem como mostrar em qual local deveria ser montado o quebra-cabeça.

Figura 3 – Layout do jogo PowerBlocks

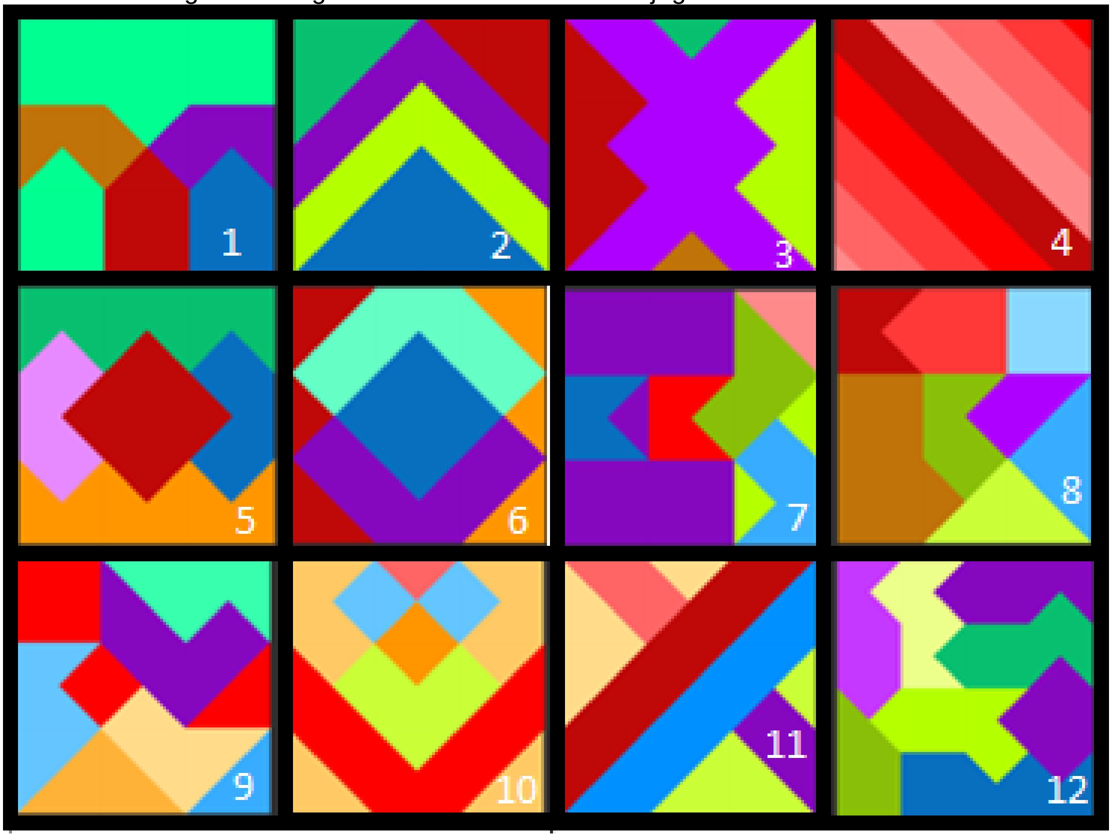


Fonte: Arquivo pessoal da autora

Os alunos nunca haviam utilizado a lousa e mostraram interesse em utilizá-la pela inovação que a mesma representava, porém, no decorrer da atividade, a lousa descalibrava constantemente e era necessário parar a atividade para calibrá-la novamente, pois, sem precisão, não conseguíamos desenvolver a atividade.

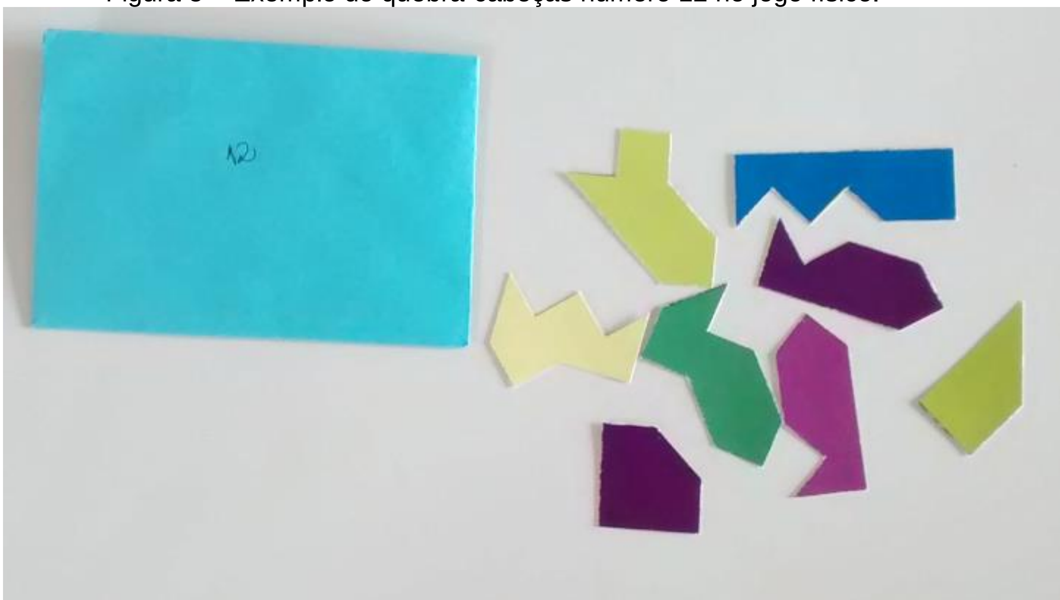
Os quebra-cabeças físicos estavam embalados separadamente e numerados de acordo com a ordem em que apareciam no computador.

Figura 4 – Figuras a serem montadas no jogo PowerBlocks



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Figura 5 – Exemplo do quebra-cabeças número 12 no jogo físico.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Solicitei que os alunos concluíssem somente os três primeiros quebra-cabeças para oportunizar aos alunos que não estavam no computador, que também pudessem utilizá-lo. Os grupos que estavam utilizando o jogo virtual acabavam a atividade mais rapidamente que os demais.

Como os alunos que estavam trabalhando no computador já haviam acabado os três primeiros quebra-cabeças e os demais ainda não haviam terminado, autorizei que fossem feitos mais três quebra-cabeças. Os grupos levavam muito mais tempo para montar os quebra-cabeças físicos do que no computador, fato que desorganizou o prosseguimento da atividade, pois alguns grupos que começaram a atividade no jogo físico não montaram todos os quebra-cabeças solicitados e, quando foram para o computador, o grupo que estava ali anteriormente já estava mais adiantado, não sendo possível retornar a quebra-cabeças anteriores, pois o jogo não o permitia.

O grupo B, ao montar o quebra-cabeças nº 4 (Figura 6) foi questionado se não haviam demorado mais nesta atividade e concordaram comigo. Ao perguntar o motivo pelo qual isto aconteceu, os alunos responderam que tal quebra-cabeças tinha mais peças do que os anteriores e, além disso, as peças haviam diminuído de tamanho se comparadas com as peças dos quebra-cabeças anteriores.

Figura 6 – Quebra-cabeças número 4 montado.

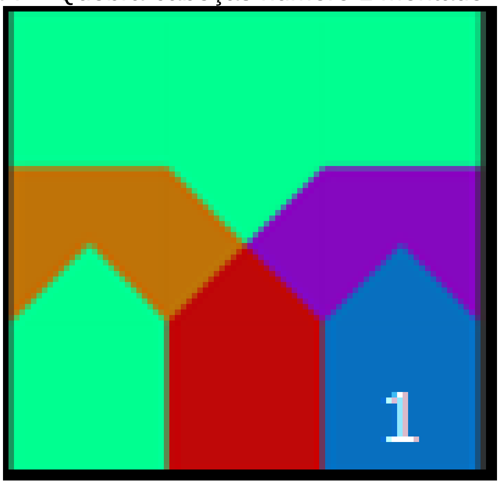
Fonte: Arquivo pessoal da autora

O grupo C percebeu que na lousa estava sendo exibido um passo-a-passo de como se resolviam os quebra-cabeças e se baseou nisto para resolver o terceiro quebra-cabeças, pois não estavam conseguindo. Ao verificar o que estava acontecendo, retirei da tela o passo-a-passo.

Quando todos os grupos terminaram as três primeiras figuras físicas, solicitei que os alunos interrompessem a atividade para que fosse analisado o trabalho feito até o momento.

Montando o quebra-cabeças nº 1 (Figura 7) na lousa, questionei por quais peças eles começaram a montar, e responderam que o melhor era começar pela maior peça. Perguntei por que a peça grande foi na parte superior da moldura e os alunos responderam que de outra maneira não caberiam as demais peças, uma vez que não poderiam rotacioná-las. No jogo Powerblocks, as peças poderiam somente ser transladadas, já sendo mostradas na tela do computador, com a orientação com que deveriam ser encaixadas na moldura, facilitando a construção do quebra-cabeças se comparada com o jogo físico, no qual as peças deveriam ser rotacionadas, além de transladadas.

Figura 7 – Quebra-cabeças número 1 montado.

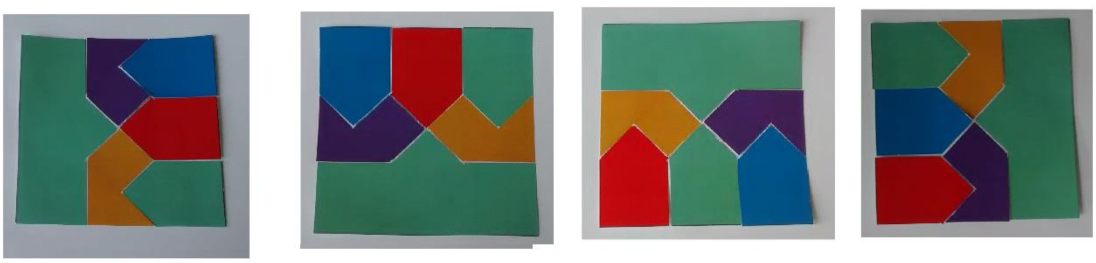


Fonte: Arquivo pessoal da autora

Ao tentar movimentar as peças, não se tinha precisão suficiente com a caneta, parecendo estar descalibrada. Por vezes selecionávamos uma figura e, ao arrastá-la para a moldura, a figura não se posicionava no lugar indicado ou se desprendia do cursor durante o movimento de translação. Por esses motivos, acabei utilizando a lousa como projetor e executando os movimentos com o mouse do computador que fornecia a precisão que a lousa não estava disponibilizando.

Fixei na parede alguns resultados da montagem do quebra-cabeças nº 1 formados pelos grupos ao jogarem o jogo físico (Figura 8) e questionei os alunos com relação ao que havia sido feito no computador e o que havia sido feito no papel, e se as quatro figuras formadas eram iguais. Colei os quebra-cabeças na parede em posições diferentes.

Figura 8 – Quebra-cabeças nº 1 montado de diferentes maneiras no jogo físico.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Os alunos comentaram que os desenhos formados não eram os mesmos, porém as bordas eram iguais, todos formavam quadrados. Perguntei por que foi possível construir, com as mesmas peças, figuras diferentes, e o aluno João respondeu que os formatos das peças eram os mesmos.

Questionei os alunos quanto às posições das peças, indicando peças iguais orientadas com sentidos diferentes. Gostaria de saber se era possível trocar peças de lugar nos jogos. Os alunos atentaram para o fato de que no computador não se podia girar as peças, enquanto no jogo físico isto era possível.

O grupo B, que estava trabalhando no computador, disse que nem todos os quebra-cabeças eram fáceis e eu complementei perguntando o porquê. Os alunos responderam que os quebra-cabeças que tinham mais peças e muito pequenas eram mais difíceis de montar. Após esta conversa, pedi que os alunos que ainda não haviam trabalhado no computador, trocassem de lugar e tentassem fazer a atividade no computador.

Deixei o grupo A, que teve mais dificuldade, terminando o jogo nas peças físicas antes de colocá-lo no computador. O grupo C tinha mais facilidade em montar as figuras tanto no meio físico quanto no computador. O grupo B, que trabalhou bem no computador, apresentou dificuldade para utilizar o jogo físico, pedindo até para trocar de quebra-cabeças quando achava muito difícil.

O grupo E foi questionado sobre por que no computador tinham ido até o quebra-cabeças nº 11 e no jogo físico não estavam passando do nº 4. Eles disseram que não se lembravam de como haviam montado o quebra-cabeças no computador. Além disso, o aluno Marcos sugeriu ao grupo que cortassem as peças de modo a encaixá-las no quebra-cabeça. O grupo riu, e continuou montando o quebra-cabeça.

O grupo C estava adiantado, então resolvi conversar somente com este grupo, enquanto os demais trabalhavam nos quebra-cabeças que faltavam. Questionei os alunos sobre o que era importante para que houvesse êxito na construção dos quebra-cabeças. A aluna Maria falou que ia sobrar espaço em alguns lugares e faltaria em outros, dependendo da peça escolhida para efetuar o encaixe. Ela montou um pedaço de um quebra-cabeças (Figura 9) e colocou uma peça de qualquer maneira mostrando que sobraria espaço da maneira como encaixou, mas se utilizasse outra peça, seria possível encaixar.

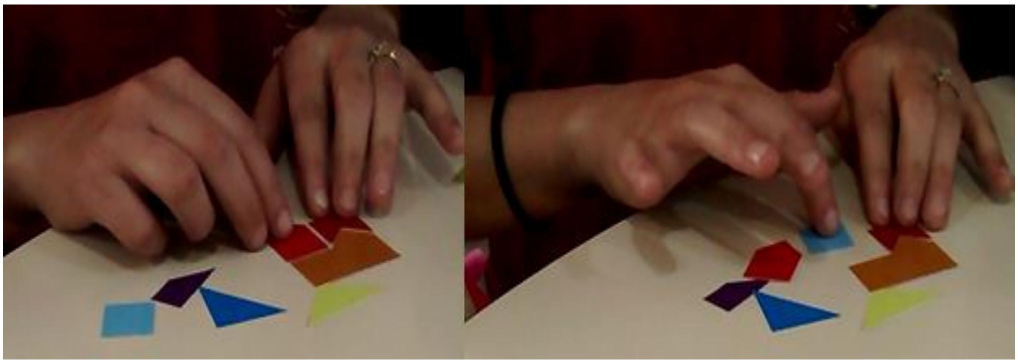
Figura 9 – Peças do quebra-cabeças físico utilizadas por Maria para explicar o encaixe das peças.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

A aluna Laura complementou dizendo que aquele quebra-cabeças já tinha sido montado por eles no computador e não sobraria espaço nenhum. A aluna Maria completou falando que, se por acaso não tivesse montado o quebra-cabeças anteriormente, saberia que aquela peça não poderia ser colocada naquela posição, pois sobraria espaço, não encaixaria.

Questionados sobre a existência de alguma peça que, de fato, encaixaria sem sobrar espaço foi respondido que várias outras peças encaixariam, como por exemplo, o quadrado azul claro e a seta vermelha (Figura 10).

Figura 10 – Aluna mostrando que várias peças encaixam no mesmo espaço por conta do formato.

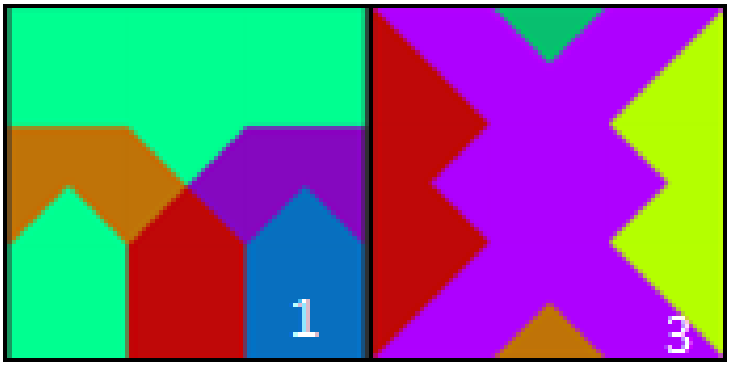


Fonte: Arquivo pessoal da autora

O aluno João comentou que jogar no computador era mais fácil, pois o computador avisava que o quebra-cabeças havia sido concluído; após, falou que no físico também era fácil, pois poderia rotacionar a peça e encaixar como quisesse no quebra-cabeças. A aluna Maria disse que nos dois ambientes era fácil de montar, lembrando que no jogo iterativo as peças não podiam ser rotacionadas e, ainda, apareciam os vértices das figuras na malha onde deveria ser montado o quebra-cabeça, o que facilitava o encaixe das peças. Disseram que a figura mais fácil de montar foi a nº 3, pois uma das peças era muito maior que as outras e facilitava o encaixe.

Utilizei a lousa digital para concluir a atividade, perguntando para o grande grupo sobre a dificuldade dos jogos. Primeiramente foi dito que o quebra-cabeças mais fácil era o nº 1, mas, em seguida disseram que o quebra-cabeças que continha o “x” (nº 3) era o mais fácil (Figura 11). Acredito que a escolha pelo quebra-cabeças nº3 tenha sido feita pois esse continha uma grande peça que ocupava muito espaço, ficando explícito quais peças iriam nos espaços não preenchidos. Falando com o grupo B, perguntei por que um dos quebra-cabeças foi feito no jogo físico, porém não foi feito no jogo virtual e o colega Marcos falou que no jogo físico podia-se rotacionar as peças, porém no computador não, e isto dificultava o jogo físico, pois havia mais maneiras de colocar as peças.

Figura 11– Quebra-cabeças considerados de mais fácil montagem pelos alunos.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Foi dito que era necessário prestar atenção no tamanho das peças e em qual lugar a peça poderia encaixar. A grande maioria dos alunos achou mais fácil de resolver no computador e disseram que no jogo físico precisava pensar mais para conseguir montar o quebra-cabeças.

A finalização desta atividade ocorreu no segundo encontro, no laboratório de ciências onde se encontra a lousa fixa que o colégio possui. Retomei a atividade dos quebra-cabeças na lousa digital, convidando os alunos para que os resolvessem. Como a dificuldade ia aumentando conforme os quebra-cabeças iam sendo montados, houve muita cooperação dos colegas que estavam assistindo com o aluno que estava na lousa montando. Além de orientações verbais, diversas vezes os alunos se levantaram e iam até a lousa para executar o movimento que estavam descrevendo, auxiliando assim o colega que estava montando o quebra-cabeças.

Questionei por que a montagem havia ficado mais difícil a partir do quebra-cabeça nº 4 e o aluno Renato respondeu que as peças estavam menores. Ele também comentou que nas figuras anteriores havia algumas peças grandes que orientavam o quebra-cabeças e foi ficando mais difícil, à medida que todas as peças começaram a ficar pequenas.

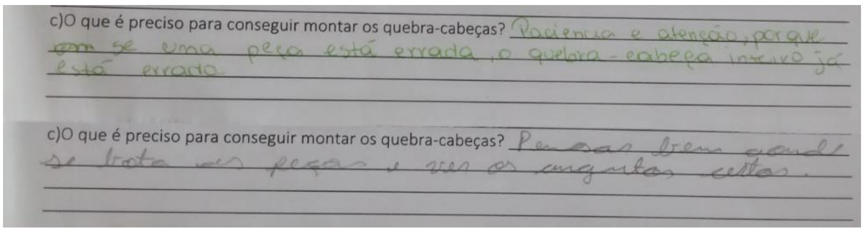
Na lousa fixa não era necessária a utilização de canetas, porém, os alunos acharam mais fácil utilizar a lousa com uma caneta ao invés do próprio dedo, pois as peças deslizavam mais facilmente. Alguns alunos incentivavam os outros a irem para a lousa, porém esses, ao visualizarem qual seria a próxima figura, desistiam e diziam, não terem conseguido montar na aula anterior tal figura no computador.

O funcionamento das lousas se dá por meio da projeção feita no quadro-branco, o qual possui os sensores em sua volta. Ao utilizá-la, ficamos entre o quadro e o projetor, gerando uma sombra no quadro de projeção. Acredito que a sombra produzida pelos alunos ao utilizarem a lousa dificultava a visualização das peças e assim, o desenvolvimento das atividades. Os alunos Renato, João e Maria eram os mais ativos ao auxiliarem os colegas que estavam na lousa. Houve um momento em que o aluno Renato levantou para auxiliar a colega Sabrina, que estava tendo dificuldades ao resolver o quebra-cabeças na lousa.

O aluno Eric tentava movimentar as peças muito rapidamente, e não conseguia executar bem a atividade. Ao final da atividade pedi que eles respondessem as questões propostas oralmente no encontro anterior, para ficar com o registro (Apêndice B).

Ao questionar se havia alguma diferença entre a atividade no jogo físico e na lousa, os alunos relataram principalmente o fato de, no jogo físico, as peças não virem na posição de encaixe e ser possível virar as peças, o que era bom, mas dificultava o encaixe. Todos relataram gostar mais de fazer na lousa, acredito que pela inovação que este objeto apresenta. Ao perguntar o que era preciso para conseguir montar os quebra-cabeças, foram comuns respostas como concentração, paciência e as peças, somente havendo duas respostas relacionadas ao conceito de encaixe das peças.

Figura 12– Respostas relacionadas ao conceito de encaixe.


c)O que é preciso para conseguir montar os quebra-cabeças? Paciência e atenção, porque com se uma peça está errada, o quebra-cabeça inteiro já está errado

c)O que é preciso para conseguir montar os quebra-cabeças? Pensar bem onde se bota as peças e ver os ângulos certos.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Transcrição das respostas mostradas na Figura 11:

Pergunta: O que é preciso para conseguir montar os quebra-cabeças?
Resposta 1: Paciência e atenção, porque se uma peça está errada, o quebra-cabeças inteiro já está errado.
Resposta 2: Pensar bem aonde se “bota” as peças e ver os ângulos certos.

Terminei a atividade dizendo que falaríamos sobre ângulos no encontro seguinte e perguntei o que eram ângulos para os alunos. O aluno Eric respondeu que era ângulo de visão, outros sinalizaram ângulo como a abertura entre os braços e alguns falaram até do ângulo de 90º, o que me leva a concluir que eles já tiveram algum tipo de contato com ângulos nas séries anteriores.

O primeiro encontro seria uma surpresa para mim, visto que não se sabia a quantidade de participantes até o início da atividade. O fato de não termos vários computadores com acesso à internet para que os grupos trabalhassem ao mesmo tempo no jogo virtual, modificou o andamento do encontro com relação ao previamente planejado, porém, acredito que houve o reconhecimento, por parte dos alunos, da importância do “tamanho das aberturas”, isto é, da medida dos ângulos, com relação ao encaixe das peças, uma vez que eles reconheciam que algumas peças não encaixariam em determinados lugares por conta do formato e ainda identificaram que, em alguns lugares, mais de uma peça poderia ser colocada pois o encaixe aconteceria, tendo que ser levado em consideração para a escolha da peça, a continuidade da figura a ser montada.

Em suas falas, os alunos mostram que observaram diferenças entre o jogo físico e o virtual, porém, para que o objetivo fosse alcançado, em ambos os contextos, era necessário que as peças se encaixassem. Houve a percepção por parte dos alunos de que quebra-cabeças com peças maiores eram mais fáceis de montar e verifiquei que os alunos sempre posicionavam no tabuleiro as peças maiores e iam encaixando as demais peças depois.

Os alunos observaram também a variedade de respostas possíveis ao se tentar encaixar uma peça no quebra-cabeças em questão. Em alguns espaços, mais de uma peça poderia ser encaixada, nem sempre sendo a peça correta para que o quebra-cabeças pudesse ser completado, porém, em alguns dos quebra-cabeças, peças com o mesmo formato e diferentes cores estavam disponíveis para a mesma figura, podendo então o quebra-cabeças ser montado de diferentes maneiras.

De acordo com as observações feitas pelos alunos em conversas sobre a montagem dos quebra-cabeças, evidencia-se o êxito dos alunos em reconhecer a importância do tamanho das aberturas, isto é, da medida dos ângulos, com relação ao encaixe de peças, tornando possível a montagem dos quebra-cabeças. Porém, alguns aspectos referentes às posições relativas das peças no quebra-cabeças e à orientação da figura como um todo não foram percebidos corretamente pelos alunos. Ao exibir um mesmo quebra-cabeças em diferentes orientações, os alunos consideraram cada figura como sendo distinta, sem ter verificado que eram as mesmas, podendo cada uma ser obtida a partir da rotação da outra.

Houve intensa participação dos alunos nas atividades e demonstrações de interesse com relação aos materiais utilizados e às atividades realizadas neste encontro.

4.2 Classificando figuras

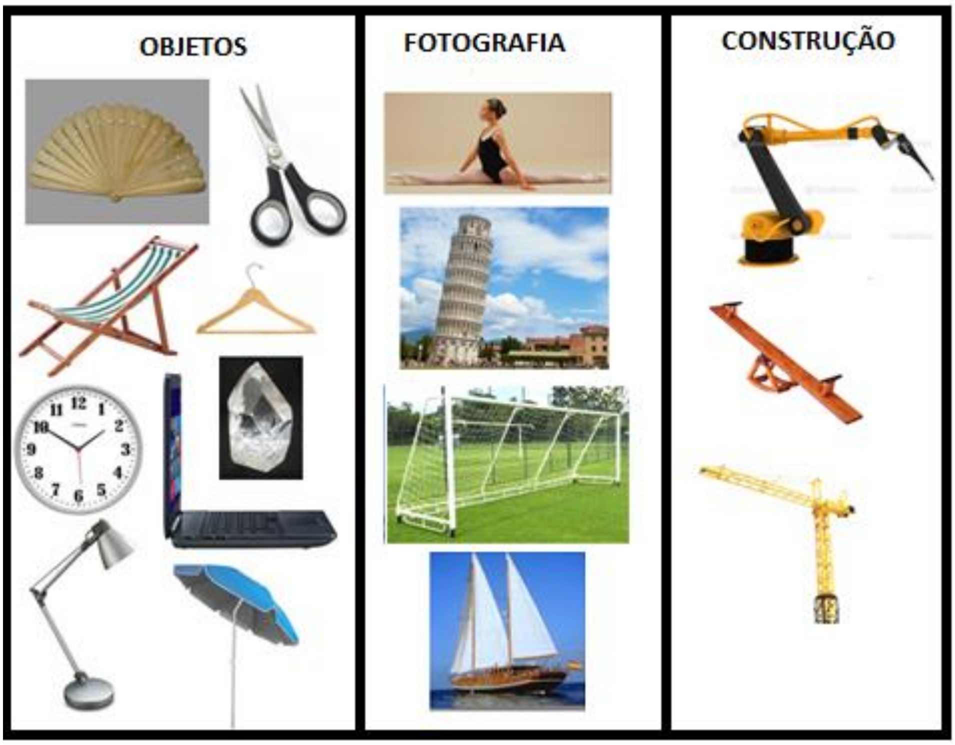
Na segunda atividade, foram disponibilizadas figuras de objetos relacionados à vida cotidiana e foi solicitado que os alunos classificassem as figuras de alguma maneira e justificassem tal classificação (Figura 13). Com esta atividade, procurou-se verificar o reconhecimento de aberturas de diferentes amplitudes nas figuras. Posteriormente, as classificações foram discutidas, tentando unificá-las, buscando uma relação entre as figuras e as aberturas. Nesse encontro, houve também discussões relativas à amplitude, congruência e unicidade dos ângulos.

Figura 13– Figuras utilizadas na atividade de classificação

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Inicialmente, o grupo A pensou primeiro em classificar figuras entre maiores e menores, e depois de alguma discussão finalizaram a classificação utilizando as categorias “objetos”, “fotografia” e “construção” (Figura 14).

Figura 14– Classificação das figuras feita pelo grupo A.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

A ideia do grupo B foi classificar as figuras de acordo com os polígonos que identificaram nos objetos ou com o formato das figuras (Figura 15), por exemplo, agrupando figuras em que identificaram círculos , como o relógio, a tesoura, o guarda-sol e a luminária. Tiveram dificuldade em classificar a bailarina, uma vez que não identificaram nenhum polígono na figura.

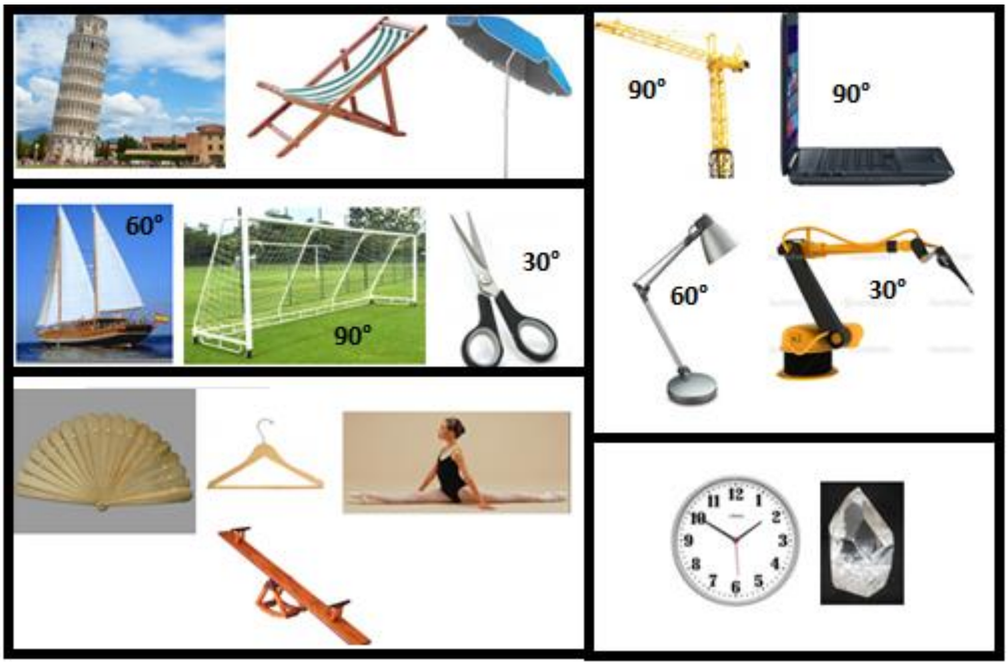
Figura 15– Classificação das figuras feita pelo grupo B.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

O grupo C inicialmente pensou em classificar as figuras com relação à sua posição. A aluna Maria comentou que a bailarina e o leque ficariam na mesma classificação, pois formavam “ângulo reto”. Depreende-se que a aluna fez referência ao ângulo raso formado pelas pernas da bailarina e que a intenção da aluna era dizer “reto”, no sentido de formar um ângulo de 180°. Cabe ressaltar que a palavra ângulo apareceu espontaneamente, talvez advinda de discussão realizada no encontro anterior, ou de outras experiências. A aluna Paola sugeriu a classificação com relação a cor das figuras. O grupo solicitou a presença da professora e disse não estar entendendo a atividade, uma vez que as figuras poderiam ser classificadas de várias maneiras. Expliquei ao grupo que as figuras deveriam ser separadas de alguma maneira, sendo esta de livre escolha do grupo.

A aluna Maria mencionou que estavam classificando as figuras de acordo com os ângulos. Como era essa a classificação que eu gostaria que fosse visualizada, concordei com a escolha. O grupo finalizou a atividade com a seguinte classificação: figuras “abertas” (contendo ângulos rasos), como a bailarina, a gangorra, o leque e o cabide; grupos com “figuras dobradas”; o relógio e a pedra compuseram um grupo das figuras “sem ângulos”. Para alguns grupos de “figuras dobradas” incluíram figuras contendo ângulos que consideraram como sendo de 30º, de 60º e de 90º (Figura 15).

Figura 16– Classificação das figuras feita pelo grupo C (identificação dos ângulos feita pela autora com base nos diálogos do grupo C).



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Após esse momento, foi realizada uma discussão com o apoio da lousa digital, em que as figuras eram exibidas e podiam ser movimentadas. Pedi que eles separassem as figuras segundo os movimentos possíveis dos objetos representados por eles. Ao falar da cadeira, um aluno mencionou que ela "abria e fechava", e aí vários alunos começaram a identificar os objetos que abriam e fechavam, como o guarda-sol e o leque. Os alunos imaginaram os movimentos dos objetos, e concluíram que eram movimentos de abertura e fechamento ou de giro. Por este motivo, antes de abordarmos a ideia matemática de ângulo, abordamos esse conhecimento prévio relacionado a aberturas, giros e voltas.

A denominação de "abertura", inicialmente relacionada ao movimento de "abrir e fechar", logo foi aplicada pelos alunos em referência a ângulos fixos, de objetos sem movimento, como o cabide. Durante esse encontro e no seguinte, antes de formalizar a definição de ângulo, continuei utilizando essa nomenclatura.

Na lousa, tracei segmentos de retas para melhor identificar as "aberturas" identificadas nas figuras pelos alunos. Para algumas figuras como o cabide, a cadeira e a bailarina, mais de uma "abertura" foram identificadas (Figura 16).

Figura 17– Diversas aberturas identificadas na mesma figura.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

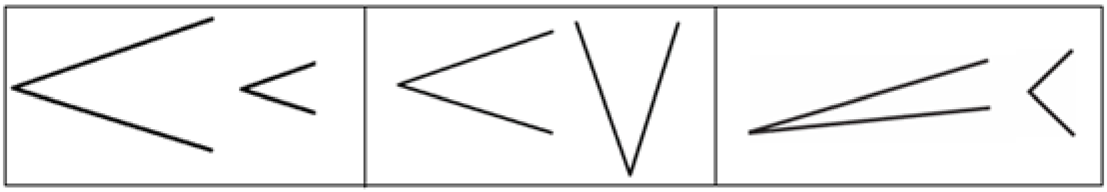
Perguntei se havia semelhanças entre as aberturas das figuras e o aluno Renato disse que a abertura do relógio e da tesoura eram parecidas, fazendo referência às posições dos ponteiros do relógio e dos braços da tesoura (ambos apontando "para cima"). A bailarina foi relacionada com o *notebook* (abertura entre o tronco e uma perna) e com o leque (abertura entre as pernas), considerando dois ângulos diferentes.

Outro aluno relacionou o relógio e a cadeira (nas duas figuras aparecem ângulos obtusos), e perguntei se a tesoura poderia estar na mesma classificação, uma vez que o aluno Renato havia classificado o relógio e a tesoura como estando na mesma classificação anteriormente. O aluno João disse não concordar com as três figuras na mesma classificação pois, na tesoura, a abertura era mais “fechadinha” (menor). Perguntei aos alunos se era comum verem construções parecidas com a Torre de Pisa e eles responderam que não, que as construções geralmente eram “retas” (expressão do aluno para a palavra vertical), tendo sido “feitos cálculos para que saísse reto”.

Perguntei aos alunos se era possível medir as aberturas e logo me responderam afirmativamente, dizendo ser necessário apenas uma régua. Questionei se com a régua poderíamos medir, por exemplo, a abertura do leque ou só o seu tamanho (raio). Os alunos responderam que com a régua só seria possível medir o tamanho do leque. Mostrei o transferidor para os alunos dizendo que utilizaríamos aquele instrumento para medir tais aberturas e que, mais tarde, aprenderíamos a manuseá-lo.

Mostrei desenhos de alguns ângulos (Figura 18), de modo a explorar e discutir as condições necessárias para que obtivéssemos ângulos iguais.

Figura 18 – Desenhos utilizados para verificação de ângulos congruentes.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Na primeira situação, havia dois ângulos com a mesma medida, porém, lados de tamanhos diferentes. Segundo os alunos, não havia diferença entre eles, pois a abertura parecia ser a mesma. Em seguida mostrei ângulos com a mesma medida, porém com orientações diferentes e os alunos também disseram que as aberturas eram iguais; porém, na última figura, em que mostrei ângulos diferentes, foi imediata a resposta dos alunos de que as aberturas não eram iguais.

Neste segundo momento da atividade, os alunos só participavam verbalmente, não sendo solicitados a executar nenhuma outra tarefa além de acompanhar a fala da professora. Restava ainda formalizar o conceito de ângulo, porém, com o tempo escasso, foi apenas lida e comentada a seguinte definição de ângulo, redigida a partir da reunião de diversas definições contidas em livros didáticos do 6° e 7° anos do

Ensino Fundamental.

"Denominamos ângulo uma região do plano limitada por duas semirretas (ou segmentos) de mesma origem. Podemos entendê-lo também como sendo o resultado da rotação de uma semirreta/segmento em torno de sua origem, com relação à outra semirreta/segmento. As semirretas (ou segmentos) recebem o nome de lados do ângulo e a origem delas, de vértice do ângulo. Para medir a "abertura" de um ângulo imaginamos que uma semirreta gira em torno da origem até se sobrepor à outra. Esse giro é uma fração da volta inteira, que a semirreta faz até voltar à sua posição inicial. A medida da "abertura" é a medida do giro".

A partir desta definição, retomamos as características observadas nas atividades anteriores relativas às condições necessárias para que se obtivessem ângulos congruentes (isto é, mesma abertura, independentemente da orientação e do tamanho dos lados). Finalizei a atividade deixando os alunos escreverem livremente na lousa enquanto alguns me ajudavam a organizar a sala.

Os alunos dos grupos B e C realizaram a atividade de classificação de figuras procurando relacioná-las com algum conceito matemático, tendo o grupo B considerado as formas identificadas nas figuras e o grupo C tentado relacionar os ângulos observados. Ao observar os grupos de figuras resultantes das classificações, é possível verificar semelhanças entre as classificações dos grupos, tomados dois a dois, porém, não há resultados comuns aos três grupos. Por exemplo, para os grupos B e C, a bailarina e a gangorra estão na mesma classificação, o que não aconteceu na classificação do grupo A.

Ao tentarmos unificar as classificações, foi interessante perceber os modos como os alunos observavam a figura estática e imaginavam o movimento que poderia ser executado com o objeto. A partir dos movimentos imaginados surgiram novas classificações – objetos que abrem e fecham, objetos que giram (não-estáticos) e os que não se encaixam em nenhuma destas classificações (estáticos).

Os alunos perceberam que, em algumas figuras, mais de um ângulo podia ser observado, porém, tal observação não foi feita para todas as figuras. No caso da tesoura, por exemplo, os alunos indicavam apenas o ângulo formado pelas lâminas, desconsiderando o ângulo formado pela parte externa, entre a lâmina e o cabo, e ao ser questionado se o relógio, a cadeira e a tesoura poderiam estar todos na mesma classificação (todas continham um ângulo obtuso), os alunos compararam os ângulos obtusos do relógio e da cadeira com o ângulo agudo da lâmina da tesoura e consideraram que as três figuras não poderiam estar na mesma classificação.

Trabalhando com imagens de ângulos descontextualizados, os alunos consideravam que os lados de diferentes tamanhos e as diferentes posições das figuras não influenciavam no tamanho da abertura dos ângulos. Porém, ao procurar por figuras com aberturas semelhantes, verificou-se que alguns alunos indicaram como aberturas semelhantes apenas as que estavam orientadas na mesma direção, como por exemplo, a tesoura e o relógio e outros, baseavam-se corretamente no tamanho da abertura e não em sua orientação posicional, como ao relacionar as aberturas do relógio e da cadeira. Durante esta atividade verificou-se também a intensa atividade mental de referente ao movimento que as figuras representadas poderiam efetuar, relacionando as aberturas identificadas a abertura e fechamento e também a giros.

Neste encontro foi possível utilizar a lousa fixa e suas funcionalidades conforme havia planejado. Porém, algumas etapas da atividade planejada não ocorreram, o que só foi percebido no planejamento do encontro seguinte.

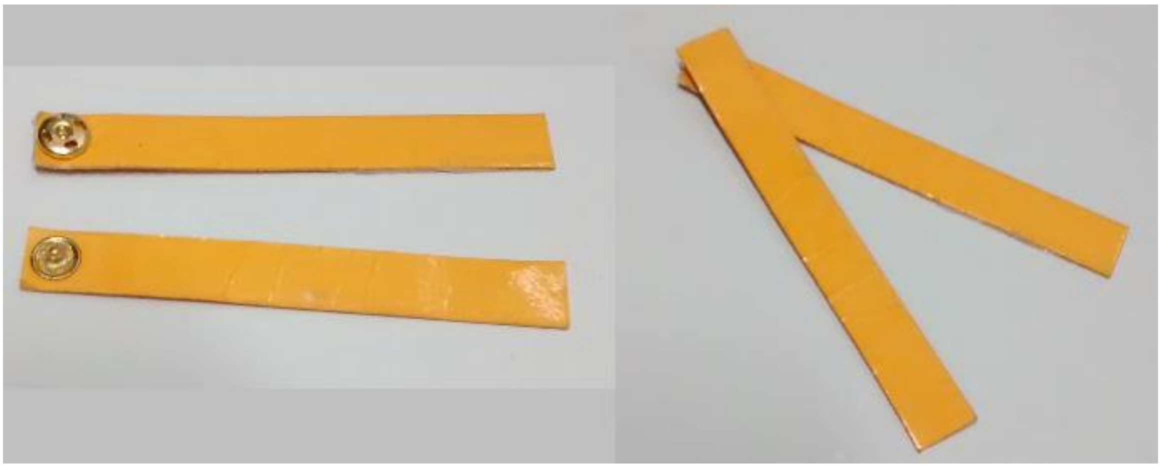
Avalio que este foi um bom encontro, pois os alunos atingiram o objetivo de relacionar, de alguma maneira, as figuras entre si e, ainda, reconheceram as características a serem levadas em consideração na comparação das “aberturas”.

4.3 Reproduzindo ângulos com material manipulativo

Iniciamos o encontro examinando os ângulos correspondentes aos giros do ponteiro do relógio. Esta atividade visou introduzir a medida dos ângulos, sem utilizar instrumentos, como frações de uma volta completa, isto é, um giro de 360º.

Em seguida, com um material manipulativo construído pela professora, composto por duas tiras de cartolina articuladas por meio de um colchete de costura (Figura 18), foi proposto aos alunos reproduzir alguns ângulos presentes nas figuras trabalhadas na atividade anterior, bem como relacionar os ângulos mostrados no material manipulativo com os ângulos presentes nas figuras. Por meio destas atividades seria possível perceber se os alunos conseguiam estimar e reproduzir ângulos sem sobrepor o material à figura, se levavam em conta a posição relativa no espaço que se encontrava a abertura, e se identificavam a mesma abertura em diferentes materiais e contextos.

Figura 19 – Material manipulativo utilizado para comparar e representar ângulos.



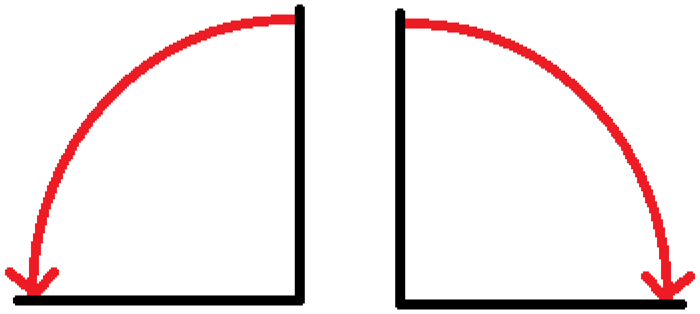
Fonte: Arquivo pessoal da autora

Iniciei a aula perguntando aos alunos quanto mediam alguns ângulos representados pelo giro do ponteiro de um relógio de parede. O primeiro giro efetuado pelo ponteiro do relógio foi de uma volta completa. João falou “10 cm” e eu comentei que 10 cm de volta era estranho, perguntando como ele mediria estes 10 cm. Ele retomou e disse que a medida era 10 cm do centro até a borda do relógio, ou seja, estava medindo o tamanho do ponteiro. Refiz a pergunta, questionando quanto o ponteiro havia se movido. Maria disse uma volta e seus colegas concordaram. A próxima abertura mostrada era de 180°, o que foi rapidamente relacionado por Renato como sendo meia volta, sendo que o aluno Gustavo identificou a abertura em questão como de 180°. A abertura mostrada a seguir foi de 90°, sendo identificada pelo aluno Gustavo como um quarto de volta. João falou em um meio de volta e questionei os alunos sobre qual estaria correta: um quarto ou um meio de volta. Foi então que o aluno João reformulou sua resposta dizendo “meia meia volta”. Retomei brevemente o conceito de frações para que eles pudessem verificar que um meio não seria o correto, mas que as outras duas respostas estavam corretas.

Dando seguimento ao encontro, propus aos alunos um jogo no qual seria necessário o uso da medida dos ângulos como frações da volta. Cada aluno recebeu um objeto manipulativo mostrado na Figura 19. Para esta atividade, uma fita dupla face foi colada no verso de um dos segmentos, de modo que este ficasse fixo durante o decorrer do jogo. Cada aluno iria escolher uma posição inicial para começar o jogo, todos começando a partir do ângulo nulo, fixando um segmento com a fita dupla face. De acordo com o número obtido em um dado comum, executaríamos um giro com o segmento que não estava fixo na mesa, de acordo com a legenda estabelecida para o número sorteado no dado. O vencedor do jogo seria o aluno que, ao final de um movimento, retornasse à posição inicial do jogo.

A legenda correspondente ao movimento a ser executado de acordo com a face do dado mostrada seria composta de duas partes: a “quantidade” de giro e o sentido do movimento. Para a quantidade de giro utilizei as medidas de um quarto, um meio e três quartos de volta. Perguntei aos alunos qual giro seria correspondente a três quartos de volta. O aluno Renato falou que seria “metade da metade da metade da volta”, sendo repreendido pelos colegas da classe. Bianca falou que seria a metade da volta mais meia volta. Finalizei dizendo que seria meia volta mais um quarto de volta. Para definir a legenda referente ao sentido do movimento, perguntei aos alunos como distinguir os movimentos indicados na Figura 20.

Figura 20 – Movimentos efetuados com o objeto manipulativo para definição da legenda relativa ao sentido do movimento.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Os alunos não apresentaram nenhuma solução, dizendo que não teríamos como saber para que lado era. O aluno Gustavo complementou dizendo que saberíamos se houvesse mais alguma coisa na legenda, sugerindo uma cor. Perguntei então se os alunos já tinham ouvido falar em sentido horário e anti-horário. Havendo a resposta afirmativa, perguntei o que seria isso. Gustavo sinalizou com os braços o que seria o sentido horário e o anti-horário e complementei que o sentido horário era o sentido no qual os ponteiros do relógio se movimentam, e o anti-horário era ao contrário. Antes de iniciar o jogo, movi o material manipulativo um quarto de volta no sentido horário e perguntei que sentido era aquele. Houve uma pequena confusão por parte de alguns alunos, sendo rapidamente corrigido com o sentido correto.

Organizamos a legenda no quadro-branco para orientar as jogadas, conforme a Figura 21.

Figura 21 - Legenda utilizada no jogo.

1 – um quarto de volta no sentido horário

2 – meia volta no sentido horário

3 – três quartos de volta no sentido horário

4 - um quarto de volta no sentido anti-horário

5 – meia volta no sentido anti-horário

6 – três quartos de volta no sentido anti-horário

Fonte: Arquivo pessoal da autora

No início do jogo, os alunos estavam com muita dificuldade em relação ao sentido em que deveria ser efetuado o movimento. Os dois primeiros movimentos indicados pelo dado foram de três quartos de volta no sentido anti-horário. O aluno Renato comentou que já havia ganhado, pois completou a volta, porém, o aluno Gustavo chamou atenção do seu colega, dizendo que, para ganhar, era necessário andar ainda mais meia volta, de modo que os dois segmentos ficassem sobrepostos como no início do jogo. Os dois movimentos seguintes foram de um quarto de volta no sentido anti-horário. Após o quarto movimento, todos disseram ter ganhado. Perguntei o porquê de todos terem ganhado, se cada aluno havia começado o jogo em uma posição diferente. O aluno Gustavo comentou que cada aluno havia começado em algum lugar e retornou àquele mesmo lugar, não sendo a mesma posição, porém tendo todos retornado à sua respectiva posição inicial no jogo. Perguntei também quanto à dificuldade do jogo, tendo o aluno João respondido que era fácil, mas não era fácil saber o sentido em que deveria ser efetuado o movimento.

Retomei o momento da atividade desenvolvido no encontro anterior, em que as figuras com objetos do cotidiano foram classificadas pelos alunos, somente para que eles lembrassem das figuras utilizadas.

Primeiramente, solicitei que os alunos reproduzissem a abertura do leque e o aluno Renato logo utilizou o instrumento como se fosse um leque, abriu-o usando um ângulo diferente do mostrado na figura e começou a se abanar (Figura 22).

Figura 22 – Figura do leque a ser representada e aluno Renato representando-a com o objeto manipulativo.


Fonte: Arquivo pessoal da autora

A partir do momento em que frisei que o leque em questão era o que aparecia na figura, ele mudou a abertura do seu material manipulativo, reproduzindo a abertura do leque mostrado na figura. Tal representação foi facilmente desenvolvida pelos treze alunos presentes neste encontro. Quatro alunos perceberam que a abertura do leque não era de meia volta completa, que era um pouco menor. Os demais alunos representaram a abertura do leque como sendo meia volta completa. Vários alunos, após terem representado a abertura do leque, fingiram estar com um leque na mão e se abanaram utilizando a abertura indicada na figura.

A representação seguinte era a da tesoura. Os alunos tentavam se aproximar da figura e sobrepor o instrumento manipulativo de modo a copiar a abertura. Salientei que a atividade tinha o propósito de estimar os ângulos, por esse motivo a intenção era de que eles tentassem abrir o objeto com a mesma amplitude, sem copiá-la. Escolhi a tesoura para ver se os alunos representavam o ângulo em uma orientação diferente da mostrada na figura. Chamou atenção que os alunos não foram fiéis à orientação mostrada, sendo esta orientação escolhida por apenas três alunos, enquanto a grande maioria utilizou-se da representação vertical.

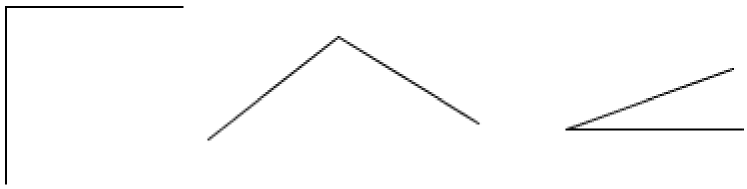
Para a próxima representação, escolhi um objeto no qual, na atividade anterior, os alunos haviam identificado vários ângulos. Ao mostrar a figura, a primeira pergunta que os alunos fizeram foi qual abertura deveria ser representada. Dos três grupos, dois representaram o ângulo obtuso que aparecia bem ao centro da figura e um dos grupos juntou dois objetos manipulativos para formar dois ângulos que apareciam na cadeira (conforme Figura 23). Foi surpreendente perceber que os dois ângulos não foram reproduzidos separadamente e então colocados na figura. Para o ângulo obtuso, foi utilizado um dos segmentos de cada material manipulativo de modo a montar a “abertura”. A composição respeitou a estimativa de que um ângulo era agudo e outro obtuso, porém não houve uma apreensão global da figura, identificando que juntos, formavam um ângulo raso.

Figura 23 – Utilização do objeto manipulativo para representação dos ângulos identificados na figura da cadeira.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Logo dei início ao momento seguinte, em que mostrei, utilizando o material manipulativo, as aberturas com as orientações que aparecem na Figura 24. Escolhi aberturas que estavam representadas nos objetos, porém em orientações diferentes das mostradas, para verificar se os alunos reconheciam o mesmo ângulo em diferentes orientações.

Figura 24 – Orientações representadas no objeto manipulativo para a identificação de figuras com o mesmo ângulo.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Ao mostrar a abertura indicando o ângulo reto, a primeira resposta dada pelos alunos foi o *notebook* e em seguida o guindaste, tendo sido observado pelo aluno João que o guindaste estava em uma posição diferente desta, devido à maneira como a fotografia foi tirada. Essa percepção mostra uma visão global do aluno com relação à figura e ao ângulo formado. O objeto formava um ângulo de 90°, porém, na fotografia, não fica evidente que o ângulo formado é de 90°.

Figura 25 – Figura do guindaste.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Para a segunda abertura apresentada, contendo um ângulo obtuso (Figura 24), houve o seguinte diálogo no grupo B:

João: É assim mesmo ou é de outro jeito, sora? (Comentndo sobre a orientação do ângulo apresentado)

Professora: O que falamos anteriormente? Faz diferença se é assim, ou é assim, ou é assim (mudando a orientação do ângulo)?

João: Ah! Tô ligado qual é! É a Torre de Pisa.

Gustavo: Hã??? (Refletiu um pouco). É também a luminária. E se forçar um pouco pode ser o guarda-sol.

O aluno Gustavo provavelmente não concordou com o aluno João, pois estava pensando na abertura formada à direita, entre a torre e o chão, que é a mais evidente na figura, porém, não podemos nos esquecer do ângulo suplementar para o qual a afirmação do aluno João não estaria errada, embora não seja possível afirmar que era com relação a esta abertura que ele estava se referindo.

Para finalizar a atividade, pedi que os grupos classificassem novamente as figuras, porém agora olhando para as aberturas presentes nas figuras, da “menos aberta” para a “mais aberta”. Iniciei o trabalho em conjunto com os alunos, estipulando qual era a menor abertura encontrada. Os alunos mencionaram a tesoura e a partir daquele referencial deveriam seguir.

Durante a atividade, passei nos grupos motivando-os a utilizar o objeto manipulativo de modo a comparar os ângulos entre as figuras; eles preferiam não utilizá-lo, porém, quando o faziam, acertavam a comparação.

Figura 26 – Grupo C reproduzindo no objeto manipulativo a abertura da pedra, comparando com a abertura do braço robótico.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

O fato de algumas figuras possuírem múltiplas aberturas dificultou a classificação, pois dava liberdade aos grupos para medir a abertura que cada grupo achasse mais conveniente e, ao final da atividade, não foi possível uma classificação comum a todos, uma vez que os alunos não tinham medido as mesmas aberturas em todas as figuras.

Para a classificação das aberturas, os alunos compararam as figuras duas a duas ou três a três, não mais que isso, sem uma comparação global, que envolvesse todas as figuras.

Nesse encontro, um dos grupos fez uma constatação muito relevante. No grupo B, o aluno Gustavo perguntou à professora se ele (objeto manipulativo) fechado não é tecnicamente a menor abertura e seu colega de grupo, o aluno João, falou logo em seguida que também poderia ser a maior abertura. Nesse instante o colega Marcos, colocou as mãos na cabeça e diz: “Peraí, peraí! Não entendi nada! Que bizarro!” Já próxima do grupo, tive a ajuda dos colegas Gustavo e João para explicar ao colega Marcos o motivo pelo qual o material manipulativo fechado, com os dois lados sobrepostos, poderia representar a menor e a maior abertura, ou seja, o ângulo nulo e uma volta completa. Não entrei em detalhes relativos à abertura negativa e a abertura maiores do que uma volta completa, uma vez que abordaríamos essas noções no contexto de giros em outra atividade.

Na atividade inicial do relógio, verificou-se uma dificuldade em distinguir a medida do ângulo do tamanho do seu lado, o que fica explícito na resposta do aluno João quando perguntado sobre qual o tamanho do giro do ponteiro do relógio.

Assim como as frações da volta foram utilizadas para responder às questões relativas ao tamanho dos giros, alguns alunos responderam utilizando graus. A relação entre a volta e os graus ainda não havia sido feita em nossos encontros, o que indica que os alunos tiveram contato anterior com este conteúdo.

Os alunos não tiveram dificuldade em realizar giros com a medida indicada pelo dado e pela legenda, porém houve grande dificuldade em executar os movimentos no sentido correto. A amplitude a ser percorrida era identificada pelos alunos, mas o sentido em que o movimento deveria ser executado, não. Acredito que a não utilização de relógio analógico pelos alunos seja um dos motivos dessa dificuldade.

Na atividade de representação dos ângulos apresentados nas figuras utilizando o objeto manipulativo, todas as aberturas foram corretamente representadas. Verificou-se que os alunos não se detiveram a representar as aberturas com a mesma orientação, como eram mostradas. Para a figura da cadeira, em que vários ângulos poderiam ser visualizados, os alunos, por conta própria, perceberam as opções e perguntaram qual das aberturas deveria ser representada, tendo alguns alunos representado mais do que um dos ângulos mostrados; e houve ainda um grupo que tentou reproduzir toda a articulação da cadeira, utilizando dois objetos manipulativos.

A retomada da atividade de classificação das figuras não resultou em uma ordenação única, uma vez que, em diversas figuras, havia mais de uma abertura e os alunos ficaram livres para medir as aberturas que quisessem, porém, com a utilização do material manipulativo servindo de auxílio para a comparação entre as figuras, houve um refinamento na classificação, agora com todos os grupos observando a medida dos ângulos e ordenando os ângulos de acordo com essas medidas.

A sequência organizada pelo grupo A foi a seguinte: tesoura, barco, cadeira, braço mecânico, pedra, luminária, cabide, guindaste, goleira, relógio, guarda-sol, torre, notebook, bailarina, gangorra e leque (Figura 27). Este grupo ordenou as figuras de acordo com as classificações (agudos, retos, obtusos e rasos) e, ao listar as figuras, respeitou esta ordem.

Figura 27 - Classificação do grupo A

Fonte: Arquivo pessoal da autora

A sequência organizada pelo grupo B foi a seguinte: tesoura, pedra, luminária, barco, cadeira, braço mecânico, relógio, leque, cabide, bailarina, gangorra, torre, guarda-sol, guindaste, goleira e notebook (Figura 28). Verifica-se aqui uma confusão relativa à ordem da classificação, pois as figuras com ângulos rasos foram colocadas antes das figuras com ângulos retos, talvez por não ter ocorrido uma classificação global, envolvendo todas as figuras, somente uma comparação entre duas ou três figuras ou pela dificuldade específica dos ângulos rasos, uma vez que não ficam bem identificados os dois lados do ângulo. Este grupo apresentou mais dificuldade em ordenar as figuras, fato verificado pela dispersão de figuras com ângulos de medidas aproximadas, como por exemplo, o relógio e o guarda-sol.

Figura 28 - Classificação do grupo B

Fonte: Arquivo pessoal da autora

O grupo C organizou sua sequência da seguinte maneira: tesoura, cabide, cadeira, braço mecânico, pedra, barco, luminária, guarda-sol, gangorra, torre, relógio, notebook, guindaste, goleira, leque e bailarina (Figura 29). Este grupo mostrou a mesma dificuldade do grupo B, relativa à ordem de classificação das figuras, pois as figuras com ângulo reto aparecem posteriormente às figuras com ângulos obtusos.

Figura 29 - Classificação do grupo C

Fonte: Arquivo pessoal da autora.

Em todos os grupos, percebe-se uma classificação entre ângulos agudos, retos, rasos e obtusos, em que as figuras aparecem relativamente próximas na sequência. A cadeira e o cabide aparecem em diversas posições da sequência, provavelmente devido aos diferentes ângulos que apresentam (pelo menos um ângulo agudo e um ângulo obtuso em cada uma das figuras, podendo ter sido medido qualquer um deles). A luminária também apareceu em diferentes posições nas sequências, provavelmente por ser um ângulo obtuso, mas muito próximo do reto. A classificação da torre também não ficou bem definida, acredito que por ser o único objeto que não apresentava os dois lados do ângulo, devendo ser abstraído que o chão era um desses lados.

É muito interessante ver que os alunos do grupo B chegaram a uma conclusão muito relevante, de que uma mesma representação pode corresponder a diferentes ângulos; neste caso, tanto o ângulo nulo quanto uma volta completa, são representados da mesma maneira, com os dois lados do ângulo sobrepostos. Para mostrar tal fato à professora, utilizaram o material manipulativo utilizado durante o encontro. Acredito que seu uso foi de fundamental importância para que chegassem a tal conclusão. A partir da manipulação do objeto, fazendo o mesmo girar e retornar à origem do movimento percebeu-se a mesma representação para diferentes ângulos.

4.4 Medindo ângulos

Nesse encontro, retomamos o conceito de ângulo verbalizado no encontro anterior, compilando diversas definições, de modo a abranger o conceito em todos os contextos utilizados nos encontros. Ainda se introduziu o conceito de grau, mostrando a necessidade da existência de uma unidade de medida para a quantidade de abertura ou giro. Esta introdução também foi necessária para explicar a função do transferidor e ensinar os alunos a medir ângulos. Para explicar a utilização deste instrumento, foi feito o uso da lousa digital e um transferidor virtual, e ainda a execução de algumas medições em papel, utilizando o transferidor físico. Finalizamos o trabalho deste encontro com um jogo disponível na Internet, de modo a verificar se os alunos haviam entendido como medir ângulos utilizando o transferidor e algumas atividades relacionadas a ângulos complementares e suplementares, sem prévia explicação.

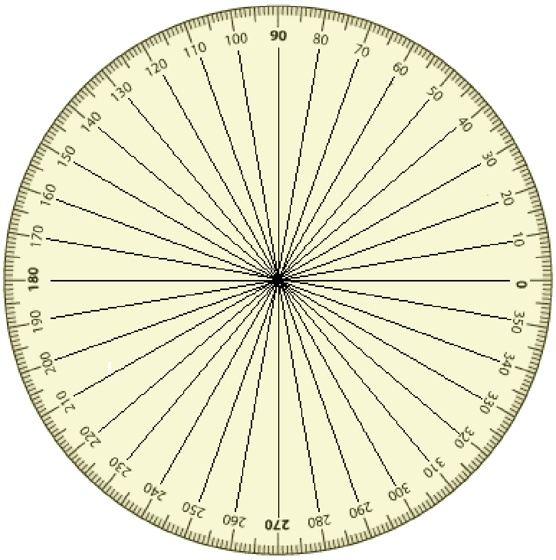
Utilizei a lousa digital para projetar o conteúdo de uma folha entregue aos alunos e explicar a definição abordada para o conceito de ângulo. Apoiei-me no material manipulativo utilizado na aula anterior para exemplificar o que estava sendo dito na definição. Aproveitei o momento, uma vez que a definição abordada também falava sobre giros, para expor ao grupo todo o comentário feito por um grupo de alunos no encontro anterior, referente ao maior e menor ângulo da mesma volta serem representados da mesma maneira.

No encontro anterior, havíamos escrito no quadro branco as classificações feitas pelos grupos e, provavelmente por o laboratório não ter sido utilizado durante a semana, o quadro não foi apagado. Aproveitei tais anotações para falar em classificação de ângulos.

Falei aos alunos que os ângulos agudos eram os ângulos menores que um quarto de volta e os obtusos eram maiores que um quarto de volta e menores que meia volta, utilizando novamente o material manipulativo para mostrar aos alunos as aberturas mencionadas. Perguntei como tais ângulos poderiam ser medidos. O aluno Gustavo disse a régua que poderia ser utilizada para medir. Perguntei como ele faria para medir a abertura utilizando a régua, porém o aluno não se manifestou. Falei então que seria possível medir os lados do ângulo com a régua, mas não seria possível medir a abertura. Verifica-se novamente a ideia de medir ângulos com a régua, como proposto pelo aluno João ao medirmos a quantidade de volta percorrida pelo ponteiro do relógio na terceira atividade.

Na folha que entreguei, havia o desenho de um transferidor de 360º (Figura 30). Perguntei se já haviam visto algo parecido com aquele desenho. O aluno Marcos disse que já havia visto uma “régua” parecida com aquela. Perguntei se eles tinham aquela “régua” e todos responderam não ter. Também perguntei aos alunos como poderíamos utilizá-la, porém não obtive respostas. Analisei o desenho junto com os alunos, mostrando como era dividida e disse que essa era uma “régua” de medir ângulos, chamada transferidor.

Figura 30 – Transferidor mostrado aos alunos na folha de atividades.

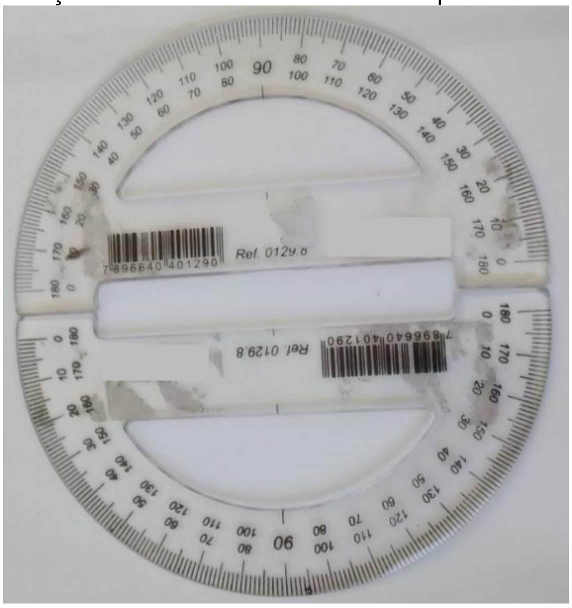


Fonte: Arquivo pessoal da autora.

Ao questionar os alunos a respeito da palavra “grau”, eles relacionaram a palavra aos graus da visão e da temperatura. Aproveitei o exemplo da temperatura, trazido pelos alunos, para dizer que Celsius é uma escala que serve para medir temperatura. Perguntei então o que seria este grau de medir ângulos. Como não houve manifestação por parte dos alunos novamente, fiz um breve comentário a respeito da sua origem na Babilônia devido ao estudo dos astros no céu, em que a precisão quanto à inclinação do telescópio se fazia necessária.

Entreguei a cada um dos alunos um transferidor e expliquei que suas divisões eram os graus e que o grau, neste contexto, seria um pedaço pequeno de volta. As alunas Bianca e Daniele juntaram seus transferidores a fim de copiar o que estava sendo mostrado na folha (Figura 31).

Figura 31 – Representação do transferidor de 360º feita pelas alunas Bianca e Daniele.

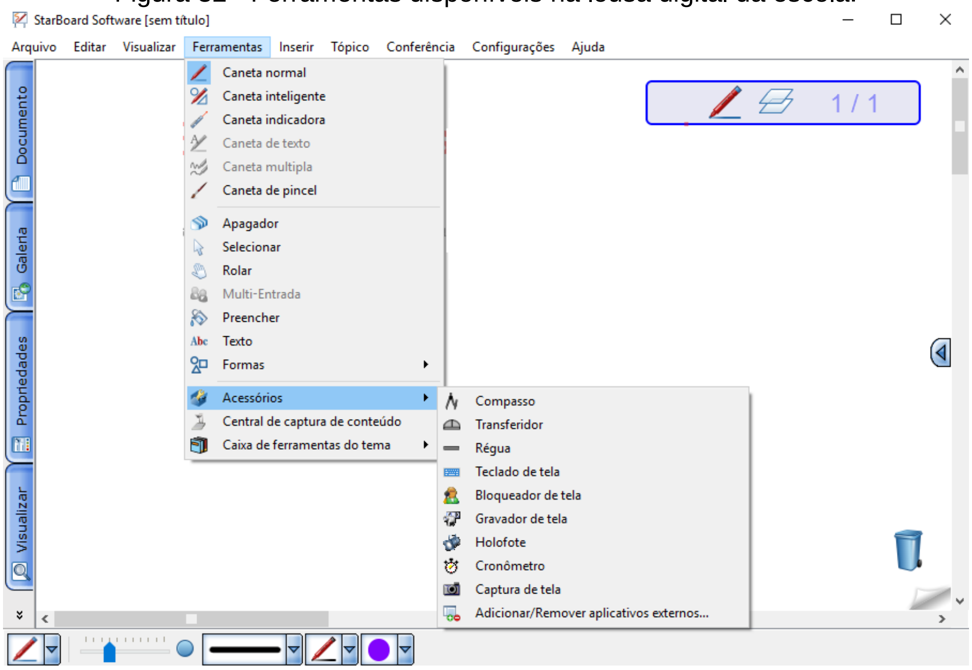


Fonte: Arquivo pessoal da autora

Ressaltei que, do modo como elas uniram os transferidores, não estávamos representando o transferidor ilustrado na folha. Para tanto, o início da graduação em cada um dos transferidores deveria ser sobreposto.

A partir deste momento, utilizei a lousa para explicar o uso do transferidor. A lousa digital disponível na escola apresenta algumas ferramentas para o ensino de Matemática, como formas poligonais, régua, compasso e transferidor virtual (Figura 32).

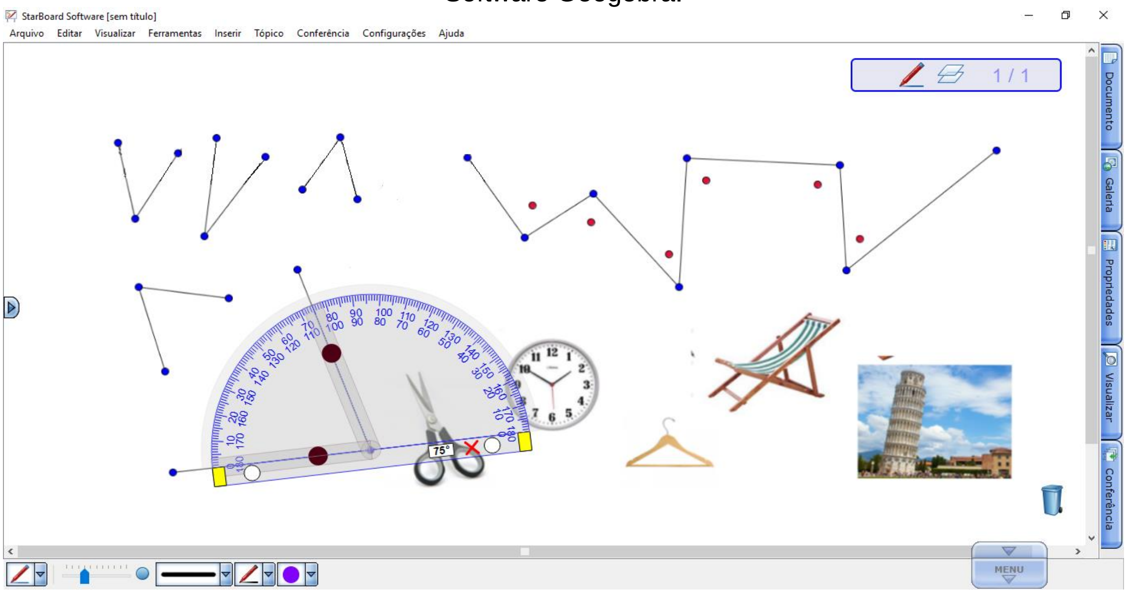
Figura 32 - Ferramentas disponíveis na lousa digital da escola.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Com algumas figuras na lousa, utilizei o transferidor virtual da lousa para explicar seu uso (Figura 33).

Figura 33 – Medição de ângulos utilizando o transferidor digital da lousa em figuras desenvolvidas no Software Geogebra.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

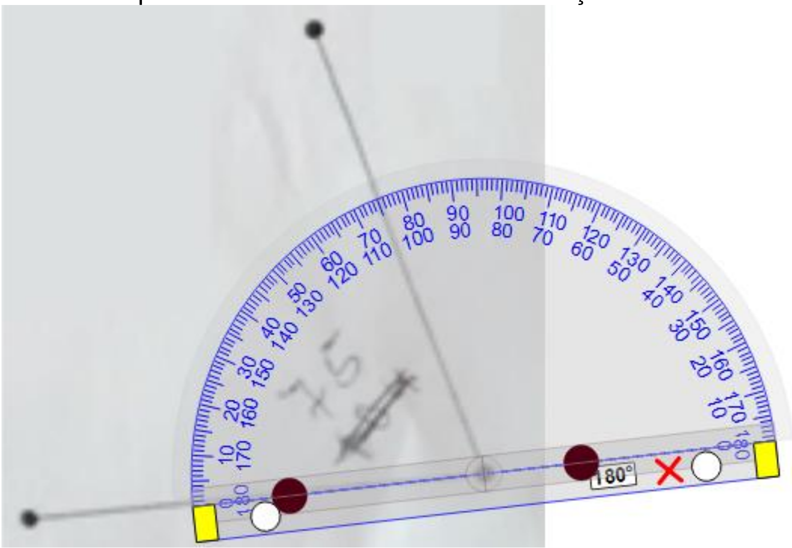
Medi alguns dos ângulos que aparecem na Figura 33, utilizando a lousa digital para exemplificar aos alunos como deveria ocorrer a medição.

No tempo restante da aula, solicitei que os alunos medissem os ângulos das figuras da folha entregue (Apêndice B), que nada mais eram do que os exemplos mostrados na figura acima e as figuras dos objetos utilizadas no encontro anterior. Neste encontro, eles estavam divididos em dois grupos; no início da atividade, passei nos grupos explicando a utilização do transferidor novamente, agora na folha e usando um transferidor igual aos dos alunos.

Após algumas correções, solicitei que os alunos viessem até à lousa para medir os ângulos. Era preciso bastante cuidado, pois qualquer toque no transferidor digital poderia tirá-lo do local correto de medição. Esse fato aconteceu, sendo o aluno João alertado pelos colegas que estavam acompanhando a correção. Os colegas disseram que ele deveria “arrumar a bolinha”, referindo-se ao vértice do transferidor. O aluno reclamou, dizendo que: “ao chegar perto (da lousa digital), ele (o transferidor) muda (de posição)”. Após a reclamação, retornou ao seu lugar, pois não queria mais fazer a atividade na lousa.

A atividade era composta de linhas poligonais feitas no Geogebra e as figuras dos objetos utilizados na atividade anterior. No tempo disponível, a maioria dos alunos havia apenas medido os ângulos das linhas poligonais e não os ângulos apresentados nas figuras dos objetos, demonstrando dificuldade em manusear o transferidor.

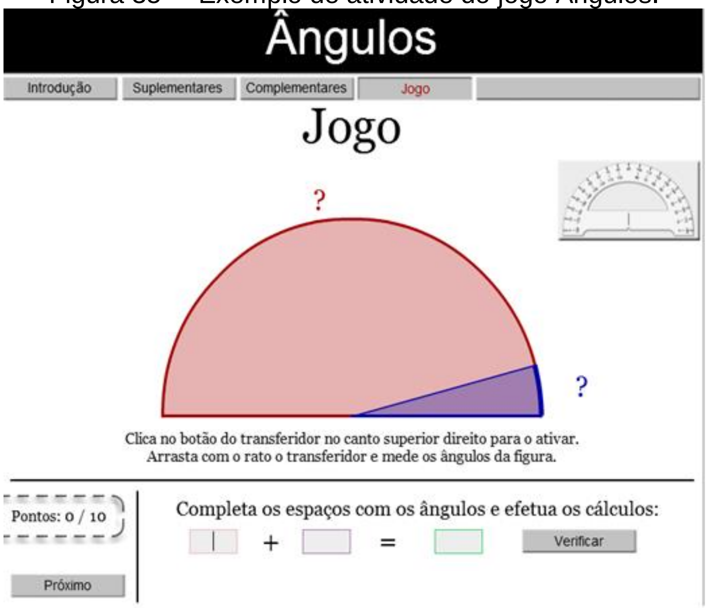
Figura 34 – Atividade de aluno. Primeiramente a leitura do ângulo no transferidor foi de 104°, sendo substituída por 75°. Dificuldade na correta utilização do transferidor.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Finalizei a atividade com o jogo “Ângulos” [3] (Figuras 35 e 36), cujo objetivo era verificar se os alunos haviam entendido como medir ângulos com o transferidor da lousa digital e, também, como medir ângulos com base nos ângulos complementares e suplementares.

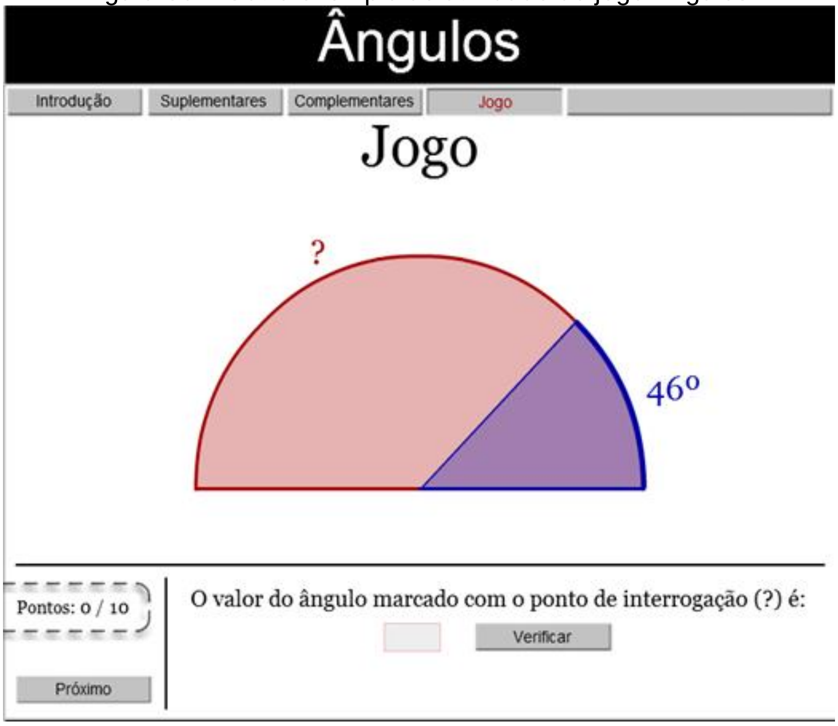
Figura 35 – Exemplo de atividade do jogo Ângulos.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

[3] Disponível em http://imagem.casadasciencias.org/online/37952100/Angulos.swf. Acesso em: 2 mar. 2017.

Figura 36 – Outro exemplo de atividade do jogo Ângulos.

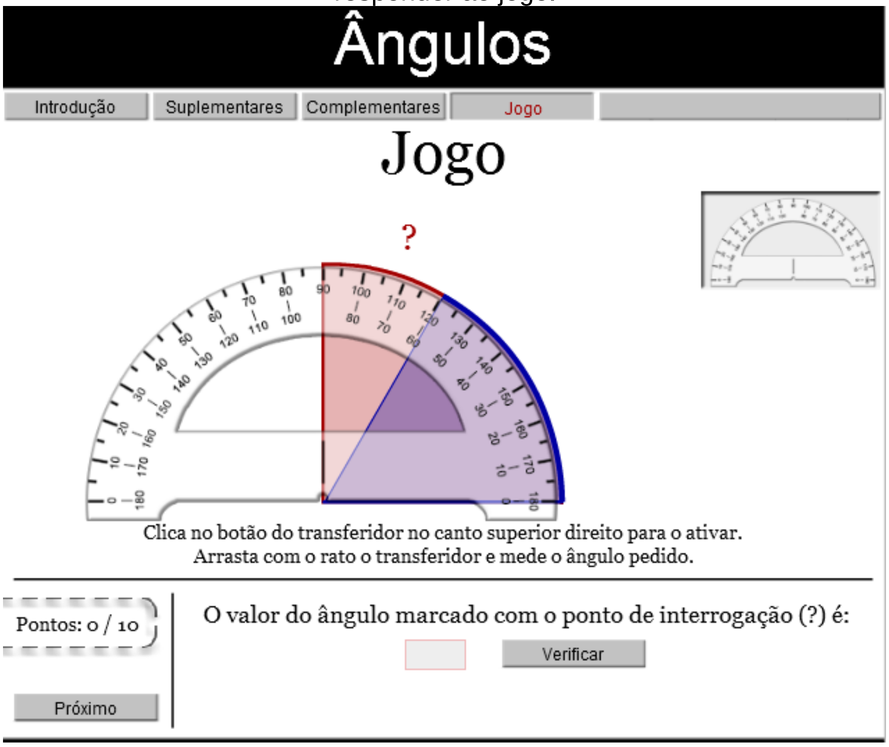


Fonte: Arquivo pessoal da autora

Foi necessário utilizar o mouse do computador, pois o sensor da lousa digital não estava preciso, não permitindo colocar o centro do transferidor exatamente no vértice do ângulo. Alguns exercícios eram feitos por estimativa e, após, a medida era verificada com o transferidor da lousa.

Nesta atividade, o transferidor disponibilizado pelo jogo autorizava somente sua translação, não sendo permitido rotações. Esse fato dificultou o início da atividade, pois os alunos já estavam acostumados com os transferidores da lousa digital e o físico que giravam em torno do vértice se fosse necessário. Verificando esta limitação do jogo, fiz um exemplo, mostrando que poderíamos medir o complemento do ângulo e verificar a medida do ângulo em questão a partir da medida obtida (Figura 37).

Figura 37 - Medindo o complemento do ângulo com o transferidor e operando com ângulos para responder ao jogo.



Fonte: Arquivo pessoal da autora.

Após ter sido apresentado o exemplo, os alunos participaram, obtendo êxito nas atividades, mesmo sem ter sido abordada tal estratégia de raciocínio durante nossos encontros.

Este encontro teve uma característica diferente dos demais, pois algumas definições foram enunciadas e ficaram registradas na folha da atividade. Com o auxílio de materiais manipulativos e do suporte da lousa digital, foi possível comentar as definições dando suporte visual, mostrando através de figuras ou movimentos o que estava sendo explanado. Um novo instrumento foi introduzido na vida escolar dos alunos – o transferidor - sendo de muita importância este primeiro contato para o correto entendimento de sua utilização, bem como de seus elementos.

Durante o planejamento da atividade, pensei em utilizar a lousa digital para explicar a utilização do transferidor, pois vislumbrei a possibilidade de uma melhor compreensão do seu uso, uma vez que o professor não ficaria na frente do quadro segurando-o, e tendo que explicar o uso enquanto segurava o instrumento, praticamente de costas para os alunos. Foram feitos diversos exemplos, tanto em figuras geométricas como segmentos de retas unidos por um vértice, como em figuras do cotidiano cujos elementos formavam ângulos. Enquanto explicava, era possível ver que os alunos estavam olhando para a lousa, acompanhando os movimentos que eu efetuava. Porém, ao solicitar que os ângulos fossem medidos na folha, foi necessário percorrer os grupos e explicar o seu uso novamente, pois muitos ainda não haviam compreendido a maneira de efetuar as medições. Alguns alunos captaram o modo de medir através da explicação na lousa, mas o fato daquela explicação não ter sido suficiente para todo o grupo, frustrou minha expectativa.

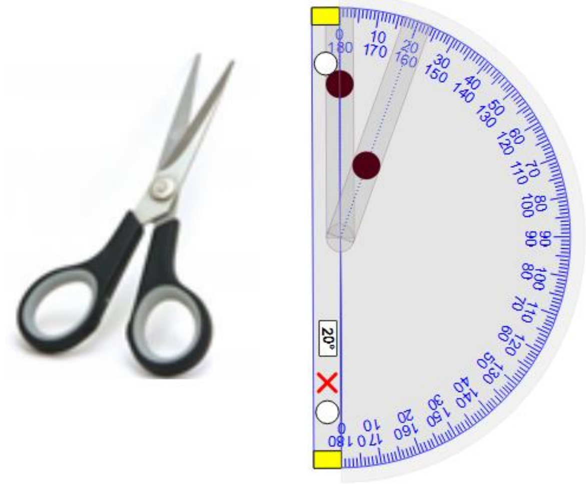
Os alunos passaram grande parte do encontro medindo os ângulos apresentados nos exemplos. Verificou-se, nas atividades, um grande número de acertos, porém, foi perceptível uma confusão na leitura do valor do ângulo no transferidor, uma vez que este tem as escalas horária e anti-horária estampadas. O transferidor é um instrumento necessário para a medição de ângulos, porém não é de fácil utilização, como se pode se verificar nas resoluções das atividades propostas. A partir dessa atividade, procurei utilizar outras vezes tanto o transferidor físico como o disponível na lousa digital, inclusive mostrando novamente a diferença entre as graduações, de modo que os alunos conseguissem utilizá-los de maneira correta.

4.5 Estimando ângulos

Complementando a atividade desenvolvida no encontro anterior, retomamos as medições de ângulos, de modo a esclarecer alguns aspectos relativos ao uso correto do transferidor, principalmente com relação à leitura da medida obtida. Ainda, para as figuras que não tiveram seus ângulos medidos, estimamos a medida do ângulo antes de efetuar a medição e finalizamos o encontro com um jogo de estimativas de ângulos.

O primeiro ângulo a ser estimado e medido foi o da abertura da tesoura. Questionados acerca do valor do ângulo, o aluno Márcio respondeu 20°, o aluno João respondeu 30°, o aluno Marcos estimou 29°. Eu coloquei o transferidor em uma tela branca e indiquei a marcação que corresponderia ao ângulo de 20° (Figura 38).

Figura 38 – Figura da tesoura aberta e transferidor digital indicando o ângulo de 20º.

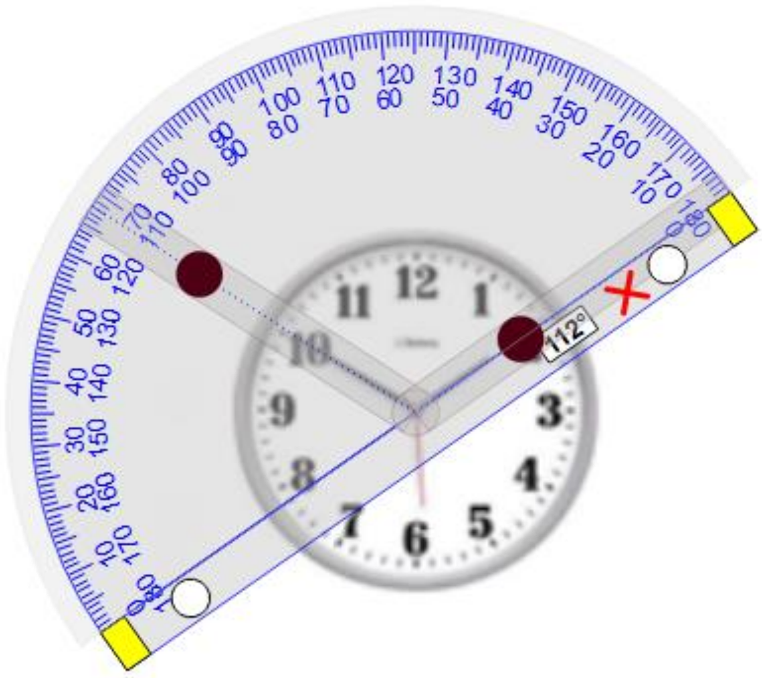


Fonte: Arquivo pessoal da autora

A partir da observação do ângulo de 20° no transferidor, alguns alunos mantiveram sua opinião e outros diminuíram sua estimativa do ângulo da tesoura para 15°. Nesse momento, solicitei que os alunos efetuassem a medição na folha. O aluno Márcio rapidamente respondeu 10°, João respondeu 25°. Na lousa, a medida ficou em 23°, valor próximo tanto à estimativa quanto à medida obtida pelos alunos com o transferidor.

Solicitei então que fosse medido o ângulo entre os ponteiros do relógio. A aluna Maria estimou um ângulo de 35°, mas em seguida afirmou: “Depende de qual (ângulo)”. Afirmei então que desejava saber a medida da menor abertura. A aluna Bianca mediu e obteve 75° como resposta. O aluno Márcio disse 80° e o aluno João disse 67°. Neste momento eu estava próximo do aluno João, enquanto ele media, e pude observar que a maneira de posicionar o transferidor estava correta, porém a leitura no transferidor não estava. Fui até a lousa para medir o ângulo e explicar o que havia acontecido. Mesmo com a medida mostrada na lousa, a maioria dos alunos continuava afirmando que o ângulo estava entre 60° e 70°; foi quando pedi que verificassem se a graduação do transferidor estava sendo utilizada corretamente, foi então que perceberam que estavam fazendo a leitura incorreta, no sentido contrário ao da medição, retificando a medida para 115°, conforme a Figura 39.

Figura 39 – Medindo o ângulo formado pelos ponteiros do relógio.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Aproveitei o exercício para mostrar que o resultado obtido não poderia ser o informado pelos alunos. Indaguei os alunos acerca da medida do ângulo de um quarto de volta e estes responderam que sua medida era de 90°. Pedi então que relacionassem isso com a posição dos ponteiros, verificando se estavam mais ou menos abertos do que um quarto de volta. Eles responderam que estavam mais abertos, e aí concluí perguntando se poderíamos ter naquele ângulo somente 70°, uma vez que a abertura era maior que um quarto de volta e, de imediato, os alunos responderam que não.

A próxima figura trabalhada foi o guarda-sol. O aluno Márcio falou “20°, 10°, sei lá.” Comentei que se fosse 20° as hastes estariam bem próximas uma da outra e a colega Maria falou que não seria isso, pois essa era a abertura da tesoura. Expressei com o corpo e o braço a inclinação padrão do guarda-sol (Figuras 40 e 41), lembrando que teríamos aí um ângulo de 180° e, inclinando um pouco o braço, representei a situação ilustrada pela figura.

Figura 40 - Posições do guarda-sol: padrão e inclinada

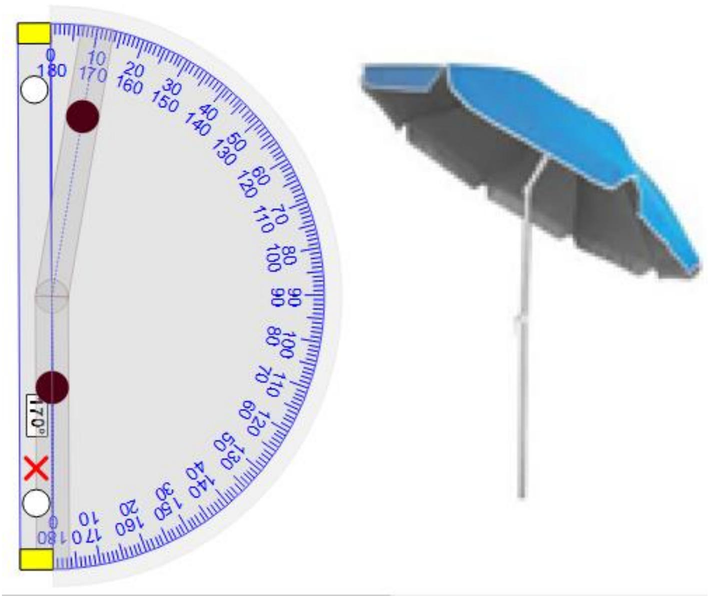
Fonte: Arquivo pessoal da autora.

Figura 41 – Professora representando as posições do guarda-sol: vertical e inclinada como na figura 40.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

A aluna Maria disse que esse seria um ângulo entre 170° e 180°. Posicionei o transferidor na lousa de modo que ficasse mais similar à posição do ângulo no guarda-sol, uma vez que a intenção era estimar sua medida (Figura 42).

Figura 42 – Figura do guarda sol e transferidor digital indicando o ângulo de 170º.

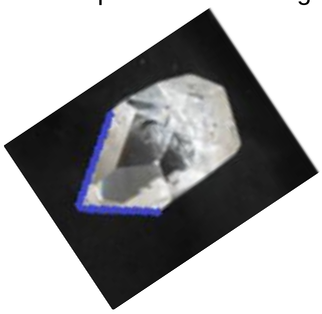


Fonte: Arquivo pessoal da autora

Perguntei se era essa mesma a inclinação e os alunos disseram que o guarda-sol estava mais inclinado. Porém, quanto mais inclinado o guarda-sol estava, menor era o ângulo formado entre a haste vertical e a haste inclinada do guarda sol. Com o transferidor indicando 160°, desloquei-o para sobre o guarda-sol, onde foi possível ver que a estimativa dos alunos estava correta. Perguntei aos alunos qual havia sido a medida obtida quando feita a medição no papel e o aluno João disse 20°, indicando novamente a errônea interpretação da medida obtida no transferidor.

A última figura a ter seus ângulos estimados foi a pedra. A aluna Bianca comentou que esse seria um ângulo menor que 90°. Para chegar a tal conclusão, a aluna virou a folha de modo que um dos segmentos ficasse horizontal, verificando que a abertura marcada na pedra parecia com a abertura da letra L.

Figura 43 – Figura da pedra comparada com o ângulo formado pela letra L.

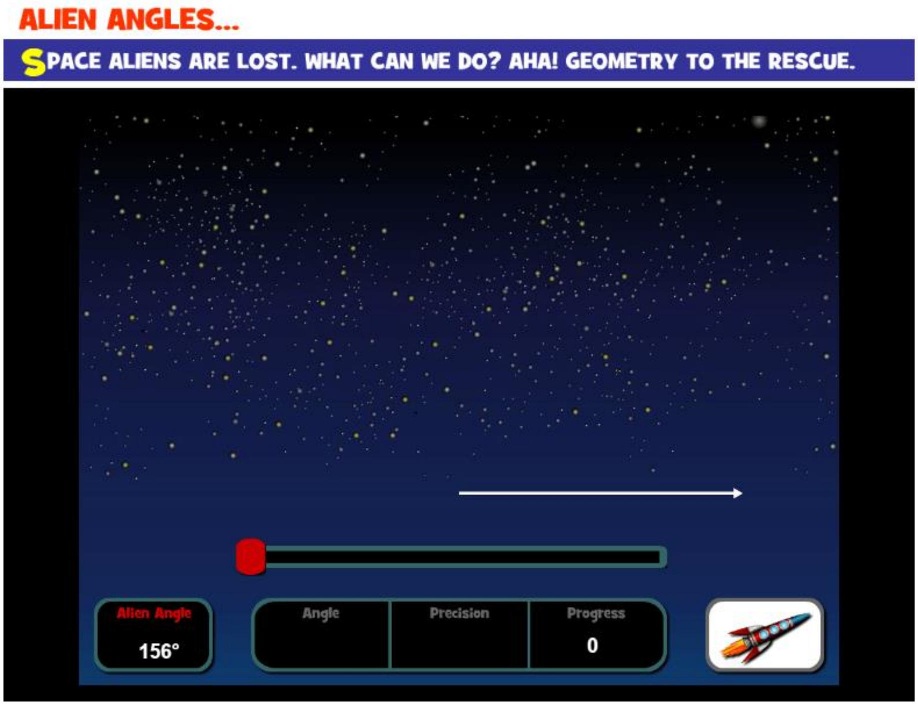


Fonte: Arquivo pessoal da autora

Os alunos concordaram com tal comentário e começaram a estimar. O aluno João estimou uma medida entre 70° e 80° e a aluna Maria concordou com a estimativa do colega. Ao efetuarmos a medida na lousa, verificamos o valor de 73°.

A próxima atividade era um jogo de computador chamado *Alien Angle*[4], cujo objetivo era ajustar o ângulo de lançamento de um foguete a um valor dado em graus pelo *software* com erro de, no máximo, 5° para mais ou para menos. Na tela inicial do jogo o ângulo nulo é representado pela seta branca e no canto inferior esquerdo da tela estava indicado, em graus, qual deveria ser o ajuste do ângulo.

Figura 44 – Tela inicial do jogo *Alien Angles*.

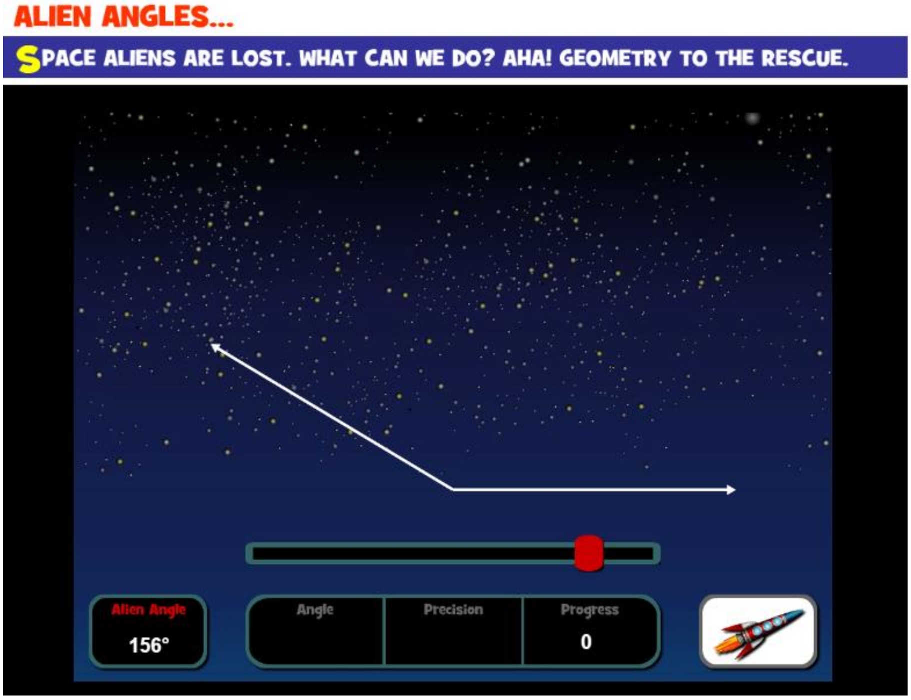


Fonte: Arquivo pessoal da autora

Deslocando o controle deslizante vermelho da esquerda para a direita, o ângulo representado pelas setas brancas aumentava, girando um dos lados do ângulo no sentido anti-horário (Figura 45).

[4] Disponível em http://www.mathplayground.com/alienangles.html (Acesso em13/03/2017).

Figura 45 – Abertura do ângulo sendo obtida a partir do deslizamento do botão vermelho.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

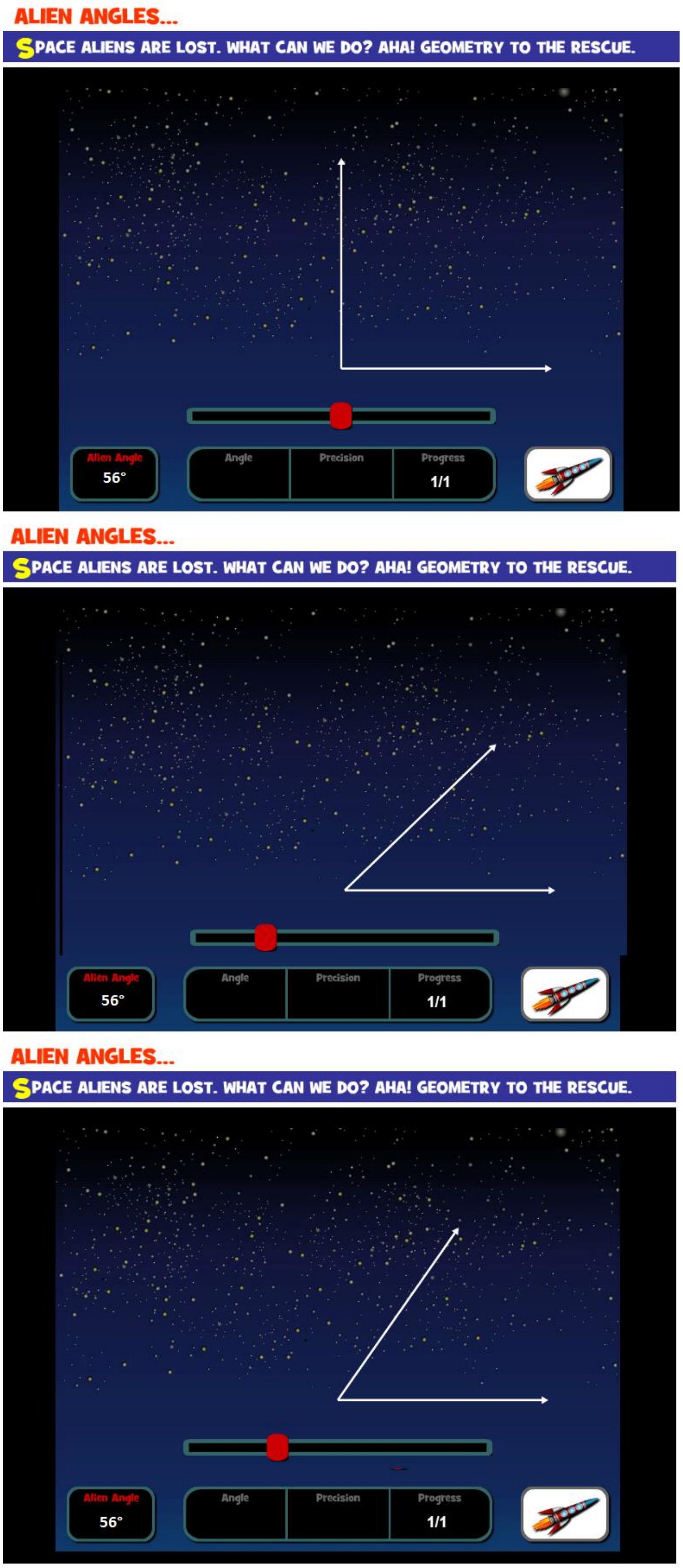
Ao estimar o ângulo de acordo com o valor indicado no canto inferior esquerdo, clica-se no foguete (canto inferior direito) para a verificação da resposta. Nesse momento aparece um transferidor na tela e o desenho de um foguete seguindo a trajetória estimada, além do *Alien* que deve ser atingido. Nos campos não preenchidos ao inferior da tela, apresenta-se o valor estimado e a precisão obtida. O campo *Progress* indica quantas estimativas foram feitas corretamente do total de tentativas.

Figura 46 – Verificação da resposta no jogo.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

O primeiro ângulo a ser estimado pelos alunos foi o de 56 °. O aluno João deu a seguinte sugestão: “Ir até o 90°, baixar para 45° e depois subir 11°” (Figura 47).

Figura 47 – Sequência pensada pelo aluno João para resolução do problema.

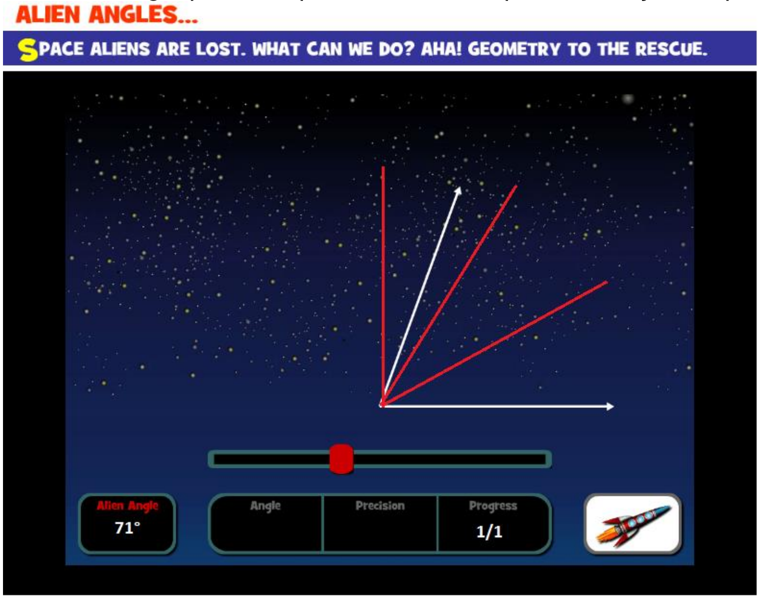


Fonte: Arquivo pessoal da autora

Porém, ao executar tais passos, ele não executou o último movimento (subir 11°) e solicitou que fosse lançado o foguete. Antes de lançar, perguntei se os colegas concordavam e todos estavam em dúvida. Afirmei que não estaria correto, porém deixei que o aluno lançasse o foguete e então expliquei o que havia acontecido de errado. O pensamento do aluno João estava correto, porém ele deixou de efetuar um movimento e por isso não acertou o alvo. Mencionei que também poderia ter sido pensado diferente, uma vez que 56° é próximo de 60°, poderíamos imaginariamente dividir um quarto de volta em três partes iguais e subir duas partes.

O ângulo seguinte foi o de 71°. O aluno Márcio disse para abrirmos 90° e ir diminuindo. A aluna Maria completou, com base no ângulo anterior, que dividindo 90° em três partes iguais e subindo um pouco chegaríamos na abertura desejada, concordando com a abertura colocada pelos colegas. Nessa tentativa os alunos atingiram o alvo com um erro de 3°.

Figura 48 – Estratégia pensada pela aluna Maria para resolução do problema.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

O próximo ângulo a ser estimado era o de 98°. Disseram para subir até o 90° e ir só um pouco para a esquerda, acertando novamente o alvo.

O ângulo seguinte era o de 141°. Solicitei aos alunos uma boa estratégia, uma vez que eles estavam mostrando pouco o raciocínio utilizado. O aluno João propôs a seguinte estratégia: ir até 90° e depois mais metade de 90° e andar mais um pouco. A aluna Maria sugeriu que fôssemos até os 180° e voltássemos um pouco. Os alunos utilizaram a estratégia do colega João e acertaram o alvo novamente.

Durante a retomada das medições, verificou-se ainda dificuldade em relação à interpretação dos dados obtidos no transferidor. Aproveitei as conclusões dos próprios alunos para que percebessem que a medida estava incorreta, utilizando algumas medidas já conhecidas, como a do ângulo de 90°, utilizando-o como referência para a comparação.

Com relação à estimativa de ângulos utilizada em ambos os jogos, os alunos tiveram um desempenho excelente, acertando todas as estimativas feitas no jogo *Alien Angle,* com exceção da primeira. Apesar da dificuldade relativa à utilização do transferidor, acredito que tenham obtido êxito na atividade de estimativa, pois as atividades anteriores envolviam a estimativa e a medição de ângulos, servindo como suporte e experiência prévia para o jogo. Foi possível ver que os alunos não diziam valores aleatórios, eles partiam de alguma base, geralmente o ângulo reto ou raso, já relacionando a medida de ângulos em graus e a que estaria sendo representada ali.

4.5.2 Giros e ângulos em uma modalidade esportiva

Para abordar o conceito de giro e suas relações com ângulos, utilizei algumas modalidades do atletismo (arremesso de peso e lançamento de disco e martelo). Assistimos a um vídeo[5] demonstrativo das modalidades e analisamos os movimentos feitos pelos atletas, de modo a verificar a medida em graus relacionada à quantidade de voltas dadas. Finalizamos o encontro praticando tais esportes. Para a prática de tais modalidades era necessário um espaço bem demarcado, com um arco circular de 35º que delimitava a região de lançamento. Os alunos foram convidados a construir tal arco no pátio da escola, antes de efetuarem os arremessos. Objetivou-se, com esta atividade, além de abordar o conceito de giro e sua relação com ângulos, tratar do conceito em uma atividade não usual aos alunos.

Iniciei a conversa perguntando se algum esporte dependia de ângulos. A aluna Maria mencionou o mergulho na natação e o arremesso do basquete. O aluno João trouxe o exemplo do arco e flecha e arremesso de dardos no atletismo. Utilizei um site de buscas com a palavra atletismo para mostrar as diversas modalidades englobadas por ele. O aluno Márcio comentou sobre o esporte de girar a bola (lançamento de martelo).

---

[5] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=9jD3NEGU6bw.

Tendo sido mencionado pelos alunos os esportes que seriam trabalhados, mostrei um breve vídeo que falava sobre os esportes em questão, sobre como os arremessos eram feitos e quanto o corpo precisava girar antes de arremessar os implementos[6]. Com base no vídeo e em um material escrito a partir dos dados mostrados nele, relacionamos o número de voltas dadas para o arremesso à medida de ângulo percorrido. Posteriormente, os alunos seriam convidados a efetuar tais arremessos no pátio da escola, seguindo o que havia sido informado na folha e no vídeo.

Para o arremesso de peso, os alunos deveriam girar meia volta ou 180°. O peso deveria estar entre o pescoço e o ombro. Para lançar o disco, seria necessária uma volta e meia. Perguntei aos alunos quantos graus teria uma volta e meia e surgiram as seguintes respostas: 540° e 450°. A aluna Bianca disse que deveria ser feita a seguinte conta: 360° + 90°, já o aluno João disse que tal conta não estava correta, devendo ser feita a conta 360° + 180°. A aluna concordou que o correto seriam 540°, retificando sua resposta.

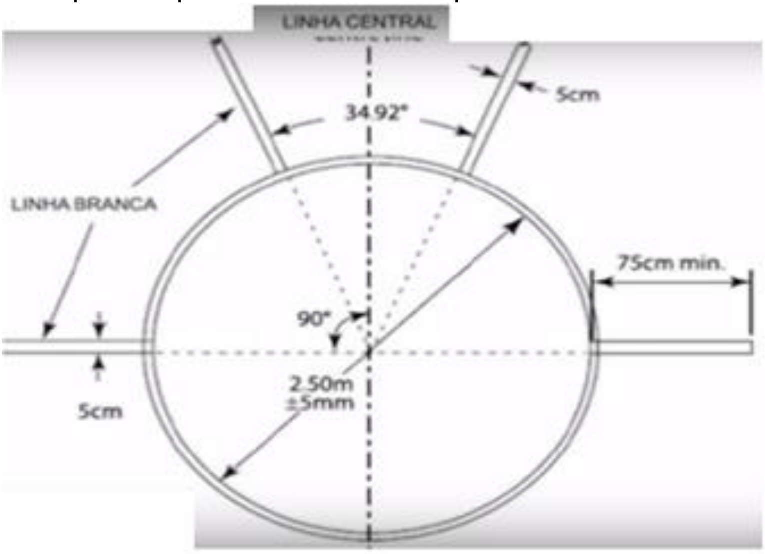
Para o lançamento do martelo, o movimento era um pouco mais complexo, pois havia duas fases: o molinete, que só o martelo era balançado e o giro, que o atleta executa o giro junto com o martelo. Repeti o movimento mostrado no vídeo mais pausadamente, para que os alunos pudessem contar quantas voltas o martelo dava, totalizando seis voltas. Perguntei aos alunos quantos graus havia nas seis voltas que o implemento deu. O aluno Márcio disse que era só fazer seis vezes 360°.

Entendendo os movimentos a serem feitos em cada lançamento, mostrei o local em que esses esportes eram praticados, o qual é limitado por um ângulo de aproximadamente 35° (Figura 49).

---

[6] São chamados de implementos os objetos utilizados nos lançamentos e arremessos, ou seja, o disco, o dardo, o peso e o martelo.

Figura 49 – Esquema representando o local de prática dos arremessos em questão.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Logo, para que pudéssemos praticar os arremessos, era necessário marcar no chão a limitação. Fomos para o pátio da escola e, com um transferidor de quadro, marcamos o piso.

Figura 50 – Aluno João conferindo o valor do ângulo desenhado no chão.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Desenhei um dos lados do ângulo no chão, abrindo uma canaleta no cascalho e expliquei aos alunos que o extremo do segmento desenhado por mim seria o vértice. Pedi que eles marcassem o outro lado, de modo a formar o ângulo de 35°. Os alunos fizeram a medição rapidamente, pois ansiavam por praticar os arremessos; com isso, o ângulo desenhado pelos alunos não foi preciso, tendo sido verificado por eles, após a marcação, que a abertura desenhada era de 55°, mesmo tendo sido usado o transferidor como ferramenta para a construção da medida de 35°. Como o chão impossibilitava que fosse desenhado novamente, praticamos os arremessos utilizando a medida traçada pelos alunos, mesmo esta não sendo a correta.

Figura 51 - Aluno praticando arremesso de disco

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Nesta atividade, o foco não era o jogo em si, mas verificar que o conceito de ângulo estava presente também em vários esportes. Esta foi uma maneira encontrada para trabalhar o contexto de giros e ângulos maiores que 360°. Na atividade que relacionou a quantidade de giros com a medida em graus, os alunos demonstraram facilidade em fazer operações com ângulos.

Apesar de não ter sido trabalhado a construção de ângulos utilizando o transferidor, foi proposta a atividade de construção do ângulo que demarcava a área de jogo dos arremessos. Os alunos conseguiram utilizar o transferidor e construíram um ângulo agudo, porém com a medida imprecisa. A atividade se mostrou interessante por conseguir relacionar ângulos e giros em um contexto diferente dos usuais.

4.5.3 Estimando e medindo ângulos em movimentos da ioga

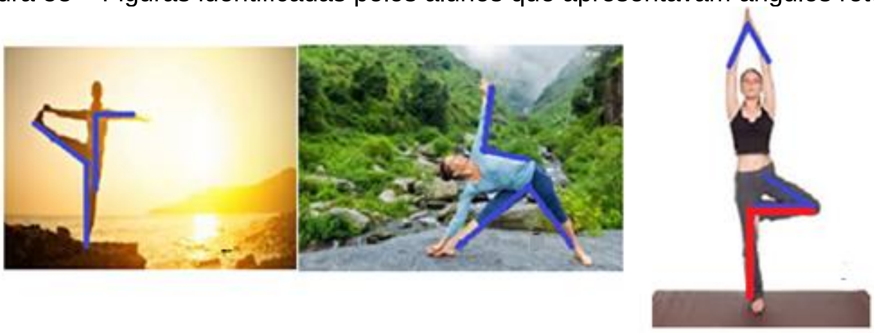
Nas atividades das aulas anteriores, utilizamos muito as figuras de objetos que envolviam ângulos, porém ficou evidente a dificuldade dos alunos em utilizar o transferidor de maneira correta. Por este motivo trouxe outra situação (Figura 51) onde verificamos ângulos - pessoas praticando ioga – na qual as partes do corpo formam ângulos que podem ser medidos.

Figura 52 – Figuras utilizadas na atividade de estimativa e medição de ângulos em movimentos da ioga.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Perguntei aos alunos qual seria o ângulo formado pelas pernas da mulher, mostrada na primeira imagem ao canto superior esquerdo, procurando verificar se o ângulo reto e sua representação haviam sido compreendidos pelos alunos. Prontamente a resposta 90° foi dada por diversos alunos. Questionei os alunos sobre haver mais algum ângulo cuja medida pudesse ser identificada visualmente.

Figura 53 – Figuras identificadas pelos alunos que apresentavam ângulos retos.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

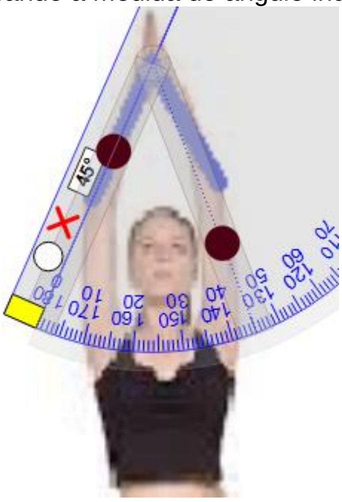
Na Figura 52 são mostrados os exemplos citados pelos alunos como contendo ângulos retos. Na primeira posição, a aluna Maria disse que o braço e o tronco formavam 90°, o que foi verificado também pelo aluno Márcio na posição central. O aluno João disse que na última posição mostrada pela Figura 52, também havia um ângulo de 90°, referindo-se a um ângulo que não estava grifado em azul na Figura 51. Ele repetiu a posição mostrada para indicar a qual ângulo estava se referindo (em vermelho), conforme a Figura 53.

Figura 54 - Posição de ioga referida pelo aluno João na identificação de ângulos retos.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Concordei que o ângulo grifado em vermelho na Figura 53 ao qual o aluno estava se referindo, realmente era de 90°. Aproveitei a figura mencionada pelo aluno João para perguntar a respeito do ângulo formado pelos braços da mulher naquela posição. A aluna Maria respondeu entre 45° e 50°. Ao medir na lousa, obtivemos a medida de 60°. Os alunos não concordaram com a medição. O aluno João comentou que não era tanto, pois aquele ângulo era metade de 90°, na sua opinião. Ampliei a figura e medi novamente, obtendo um ângulo de 53°. Aproveitei o transferidor da lousa para mostrar que a diferença entre os ângulos de 45º e 53º parecia grande, porém, na realidade, não era, conforme mostra a Figura 54.

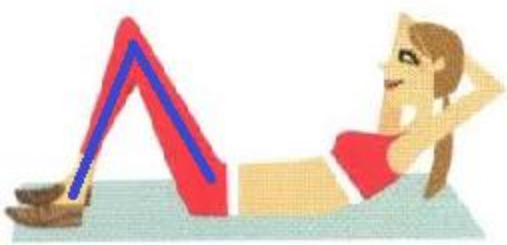
Figura 55 – Verificando a medida do ângulo indicado da figura.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Pedi que os alunos, com base no ângulo recém medido, estimassem a medida do ângulo grifado na figura 55. A intenção era que houvesse uma comparação entre os ângulos.

Figura 56 – Ângulo a ser estimado com base na Figura 43.



Fonte: Arquivo pessoal da autora.

Os alunos disseram que o ângulo da Figura 51 era maior do que o medido na Figura 50. Ao efetuar a medição, verificaram que tal ângulo media 55º. Perguntei se a estimativa de que o segundo ângulo era maior havia ocorrido por conta do comprimento dos lados do ângulo, uma vez que os lados grifados na Figura 48 eram menores do que os lados grifados na Figura 49. O aluno João disse que não; já a aluna Maria afirmou com a cabeça. Retomei o ponto já trabalhado anteriormente, chamando a atenção dos alunos para o fato de que a abertura não depende do comprimento dos lados.

A aluna Maria mencionou que, na Figura 56, o ângulo grifado era obtuso. Aproveitei a fala da aluna para perguntar se os alunos lembravam o que era ângulo obtuso. A primeira manifestação foi da própria Maria, que respondeu utilizando gestos, mostrados na Figura 57, abrindo as mãos de 90° até 180°.

Figura 57 - Ângulo obtuso referido pela aluna Maria

Fonte: Arquivo pessoal da autora.

Figura 58 – Aluna Maria representando os ângulos obtusos.

Fonte: Arquivo pessoal da autora.

Perguntei então se eles sabiam me dizer a medida do referido ângulo. O aluno João disse 180° pela posição dos braços, novamente utilizando seu corpo para representar o ângulo raso.

Figura 59 – Aluno João representando o ângulo de 180°.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

O aluno estava correto em sua colocação, porém ressaltei que estávamos querendo medir o ângulo grifado em azul, formado pelas pernas do homem na figura 56. Ao perguntar sobre a estimativa deste ângulo, o aluno Márcio mencionou 140° e o aluno João, antes de estimar, perguntou como o transferidor deveria ser colocado para fazer a medição. Coloquei a figura com o transferidor de 180° e perguntei se era possível medir o maior ângulo, utilizando aquele tipo de transferidor.

Figura 60 – Verificando como posicionar o transferidor para medir o ângulo em questão.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Os alunos disseram que não, e complementei dizendo que faltaria medir um pedaço do ângulo. Informei que para este tipo de medição seria interessante utilizar um transferidor maior, que medisse ângulos de uma volta completa. Dito isto, o aluno João estimou o menor ângulo como sendo entre 160° e 170°, tendo a aluna Maria concordado com esta estimativa. Efetuando a medida na lousa digital, concluímos que a abertura era de 160°.

O objetivo desta atividade era efetuar medições, uma vez que os alunos estavam demonstrando ter dificuldades em utilizar o transferidor. Porém, verificou-se uma intensa atividade de estimativa, não tendo sido utilizado tanto o transferidor, como era o objetivo inicial da atividade. De todo modo, percebe-se que os alunos compararam corretamente os ângulos obtidos nas figuras, e com maior agilidade do que em atividades anteriores.

4.6 Trabalhando com triângulos

Neste mesmo encontro, para a atividade seguinte seria investigada a condição de existência de triângulos e a soma dos ângulos internos de triângulos, bem como algumas propriedades. O objetivo da atividade era explorar o conceito de ângulo em uma atividade de investigação matemática. Os alunos formaram três trios, sendo cada trio desafiado a montar triângulos com os tamanhos dos lados informados em uma folha de atividades. Cada trio recebeu uma folha de atividades com diferentes triângulos para montar, e essa montagem deveria ser feita com um material manipulativo confeccionado por mim, que consistia em tiras de E.V.A nos tamanhos 6, 10, 15 e 20 centímetros, com colchetes de costura nas pontas, de modo a unir as tiras para representar os triângulos solicitados.

Figura 61 – Material manipulativo utilizado na atividade.

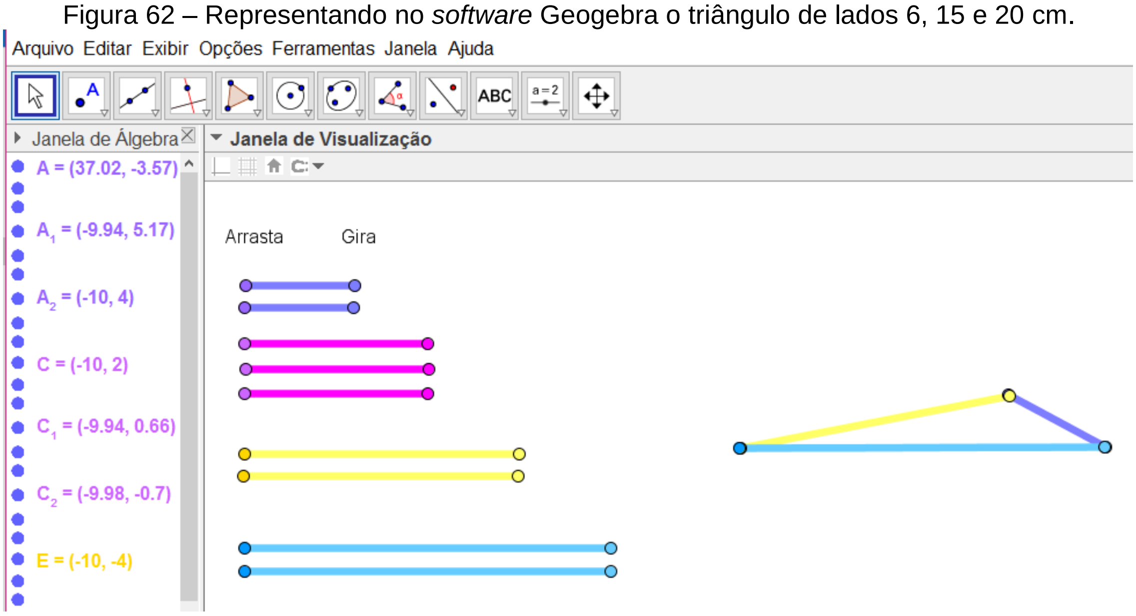
Fonte: Arquivo pessoal da autora

Cada grupo recebeu três peças de cada tamanho (Figura 60). Os alunos deveriam tentar montar os triângulos indicados e medir os ângulos internos com o transferidor. Após, deveriam fazer um esboço do triângulo obtido, indicando os ângulos medidos no material manipulativo.

Os alunos trabalharam nesta atividade durante a maior parte da aula, todos envolvidos na tarefa. As medidas foram distribuídas de modo que, em todos os grupos, algum dos triângulos não poderia ser montado, pois teria a medida de um lado maior ou igual à soma das medidas dos outros dois lados. Ao se depararem com um triângulo impossível de ser montado, o grupo A comentou que os lados eram muito pequenos e não estavam conseguindo juntar. Ao mesmo tempo, o grupo C chegou a outro triângulo impossível e relatou o mesmo que o grupo A: os lados eram muito pequenos e o material manipulativo se deformava ao tentarem emendar os três vértices.

Para os triângulos difíceis de montar utilizando o material manipulativo - pois os segmentos utilizados eram grossos ou impossíveis - os alunos eram convidados a utilizar a lousa digital, no aplicativo do Geogebra, onde a mesma atividade poderia ser feita (Figura 61).

Figura 62 – Representando no *software* Geogebra o triângulo de lados 6, 15 e 20 cm.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

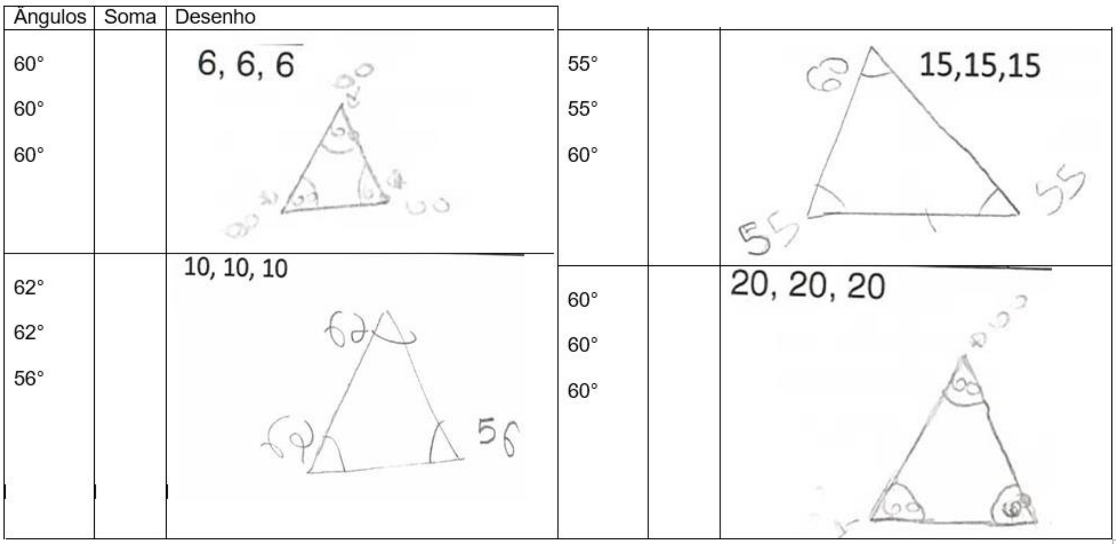
Figura 63 – Representando no objeto manipulativo o triângulo 6, 15 e 20 cm.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Finalizamos essa primeira parte da atividade falando sobre os triângulos impossíveis e qual seria o motivo para que não fosse possível a construção. O aluno Inácio disse que um dos segmentos era muito grande. Com relação ao triângulo 10, 10, 20, utilizei o material manipulativo para construir o triângulo e frisei que não estava parecendo um triângulo, sendo complementado pela aluna Maria que o lado azul era maior. O aluno João questionou o motivo pelo qual não seria possível sua construção, uma vez que os dois lados rosa seriam exatamente da mesma medida que o lado azul. Fomos então analisar a situação na lousa para tentar entender o que estava acontecendo. O próprio aluno João comentou: “Até daria, só que aí não teria área para abrir”. O aluno verificou a possibilidade de se unir os segmentos em questão, porém não seria possível formar um triângulo, somente a sobreposição dos segmentos rosa sobre o segmento azul.

Utilizando a folha preenchida pelos alunos (Apêndice B), selecionei somente os triângulos de lados iguais (equiláteros), de modo que os alunos pudessem verificar alguma semelhança entre eles (Figura 63).

Figura 64 – Recorte da atividade dos alunos. Triângulos equiláteros.



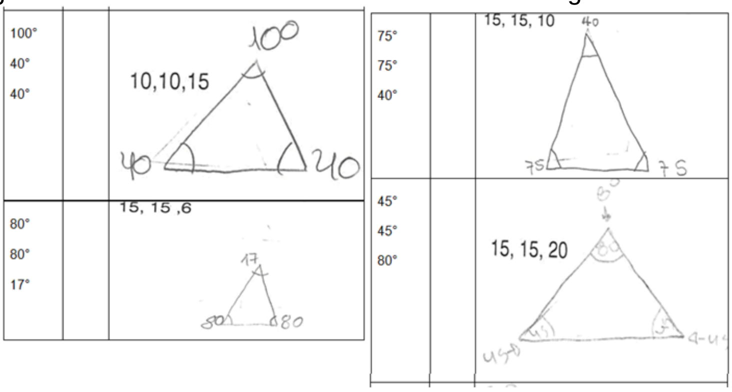
Ângulos	Soma	Desenho
60° 60° 60°		6, 6, 6
62° 62° 56°		10, 10, 10
55° 55° 60°		15,15,15
60° 60° 60°		20, 20, 20

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Foi solicitado que os alunos somassem os ângulos internos de cada triângulo e verificassem se havia alguma regularidade com relação aos ângulos e a essa soma. Os alunos perceberam que todos os ângulos tinham medida próxima a 60º e a soma dos ângulos internos sempre era próxima de180º. Foi explicado então que, quando os lados são todos iguais, a medida de cada ângulo interno é a mesma, efetuando a medição de um exemplo na lousa digital, utilizando o *Geogebra.*

Além disso, analisando os triângulos com dois lados iguais, os alunos verificaram que em cada um deles havia dois ângulos tinham a mesma medida, como mostrado na figura 65.

Figura 65 – Recorte da atividade dos alunos. Triângulos isósceles.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Alguns alunos demonstravam dificuldade com a utilização do transferidor, sem saber como posicioná-lo na figura nem como medir; eram alunos que não foram assíduos às oficinas e haviam faltado a, pelo menos, dois encontros. Com relação aos demais alunos, verificou-se uma melhora na leitura dos valores obtidos, não tendo ficado registrado nenhuma troca de medidas como as relatadas anteriormente. Houve ainda a interação entre os alunos, que muitas vezes discordavam sobre o valor obtido. Os alunos João e Maria, que estavam no mesmo grupo, por diversas vezes, mediam os ângulos duas vezes, para verificar se a medida do colega estava correta.

Os próprios alunos chegaram à conclusão de que os triângulos que não poderiam ser formados eram os que possuíam um dos lados maior que os outros dois lados juntos, verificando, ainda, que se a medida de um dos lados fosse igual à soma da medida dos outros dois lados, era possível unir os segmentos, mas não seria formado um triângulo.

Com esta atividade, proporcionou-se a investigação em sala de aula, nos moldes propostos por Ponte, Brocado e Oliveira (2006), envolvendo o conceito de ângulo e propriedades relativas aos triângulos. Os alunos se empenharam na montagem dos triângulos e medição dos ângulos obtidos, mostrando interesse e envolvimento com a atividade. Durante a montagem dos triângulos, os alunos verificaram que não era possível montar um triângulo a partir de três segmentos quaisquer, concluindo, a partir das investigações, que um dos lados não poderia ser maior do que a união dos outros dois lados. No fechamento da atividade os alunos puderam concluir, com base nas medições feitas e das relações identificadas a partir da observação dos triângulos no grande grupo com a mediação da professora que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° e concluíram ainda que nos triângulos com lados de mesmo tamanho, os ângulos encontrados foram os mesmos e em triângulos com dois lados de mesmo tamanho, havia também dois ângulos de mesma medida.

4.7 Rampas e suas inclinações

Para trabalhar com inclinações, utilizamos como contexto as rampas existentes na escola. O objetivo era medir a inclinação das rampas e compará-las, abordando o conceito de ângulo como inclinação. Inicialmente, montaríamos em sala de aula uma estratégia para medir a inclinação e, após, iríamos ao pátio fazer as medições.

Perguntei se as rampas que havia na escola eram todas iguais e os alunos responderam que elas eram diferentes, pois umas eram maiores que as outras. Também perguntei se poderíamos falar de inclinação ao trabalharmos com rampas e os alunos disseram que sim. Questionei então o que era inclinação. O aluno João disse que quanto mais alto e longe do chão, maior a inclinação. Ele falou isso gesticulando com o braço, como se fosse uma rampa (figura 66).

Figura 66 – Aluno João respondendo à pergunta “O que é inclinação? ” .

Fonte: Arquivo pessoal da autora

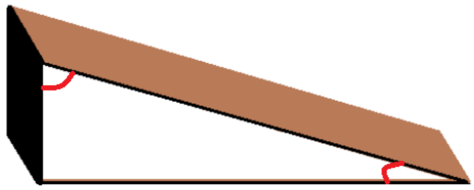
Repeti o gesto do aluno João, porém colocando um referencial na base, fazendo a abertura entre os meus braços aumentar e diminuir (Figura 67). A partir dessa representação de rampa, os alunos Miriam e João falaram que, o que estava sendo mostrado no encontro dos braços eram ângulos.

Figura 67 – Professora gesticulando diversas rampas com os braços.

Fonte: Arquivo pessoal da autora.

Coloquei então na lousa digital o desenho de uma rampa e perguntei como mediríamos sua inclinação. Como não obtive retorno dos alunos, mudei a pergunta para qual dos ângulos deveria ser medido para se obter a inclinação. O aluno João disse que seria necessário medir o ângulo de cima e o de baixo, indicados na Figura 68.

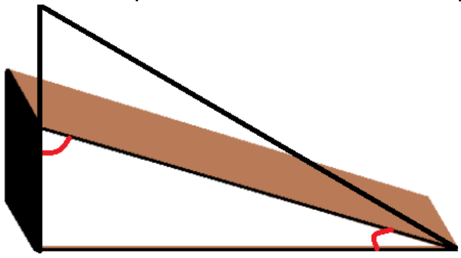
Figura 68 – Desenho de rampa feito na lousa digital para orientar a atividade como os ângulos indicados pelo aluno João em vermelho.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Foi questionado aos alunos se havia outro ângulo na figura. O aluno Márcio disse que no canto esquerdo havia um ângulo de 90°. Tracei sobre o desenho exposto uma rampa mais inclinada e questionei os alunos sobre o que aconteceria com a medida daquele ângulo se a rampa fosse mais inclinada.

Figura 69 – Novo desenho baseado na Figura 67 para verificar o que está acontecendo com os ângulos da rampa ao aumentar sua inclinação.



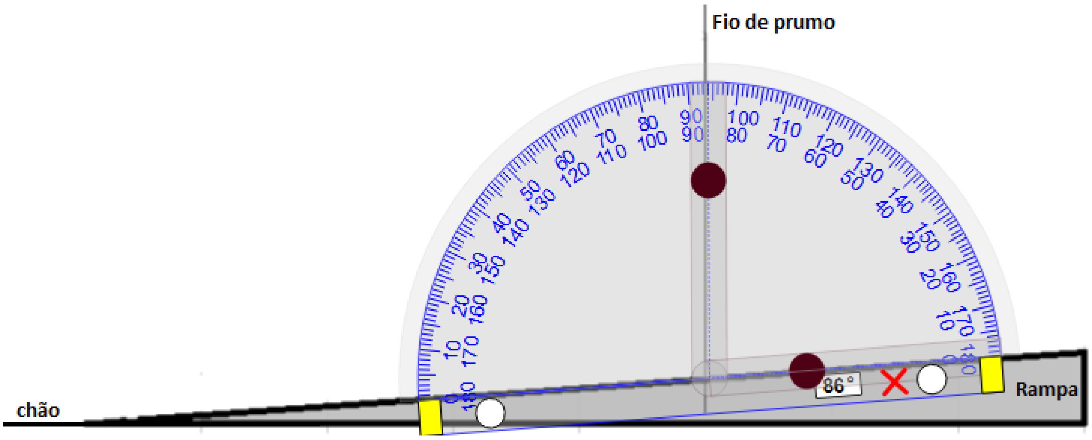
Fonte: Arquivo pessoal da autora.

Os alunos confirmaram que a medida seria a mesma, então perguntei sobre os outros ângulos, se a medida deles também continuaria a mesma, e logo disseram que tanto a medida do ângulo superior quanto a do ângulo inferior estavam mudando. Perguntei então o que seria aquela linha horizontal (prolonguei na lousa digital). O aluno Inácio disse que era a base, então perguntei relativamente à rampa do colégio, o que faria o papel de base e o aluno João respondeu que seria o chão.

Com o transferidor na lousa, medi o ângulo de inclinação na base da rampa, porém, como na rampa da escola não seria fácil medir na base, perguntei aos alunos se era possível medir a inclinação no meio da rampa. O aluno João comentou que sim e que seria a mesma inclinação. Comentei que eu não teria o chão de referência, mas poderíamos utilizar o fio de prumo, para nos auxiliar. Perguntei se os alunos conheciam este material e alguns disseram que sim. Tracei sobre o desenho da rampa uma linha vertical, representando o fio de prumo, porém não ficou claro para os alunos o que deveria ser medido. Sugeri então que fôssemos para fora da sala de aula tentar medir a inclinação diretamente na rampa.

Fora da sala de aula, em frente à rampa, tentamos novamente verificar como medir o ângulo, porém, a inclinação era muito pequena, dificultando a medição, algo que só percebi ao tentar medir o ângulo com os alunos. Ventava muito e o fio de prumo era movido pelo vento. Chamei uma aluna para auxiliar na medição. Segurei o transferidor e pedi que ela dissesse quantos graus o instrumento estava marcando. A aluna Miriam verificou que o ângulo formado entre a rampa e o fio de prumo era de 86°.

Figura 70 – Representação da atividade de medição de inclinação da rampa realizada no pátio da escola.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

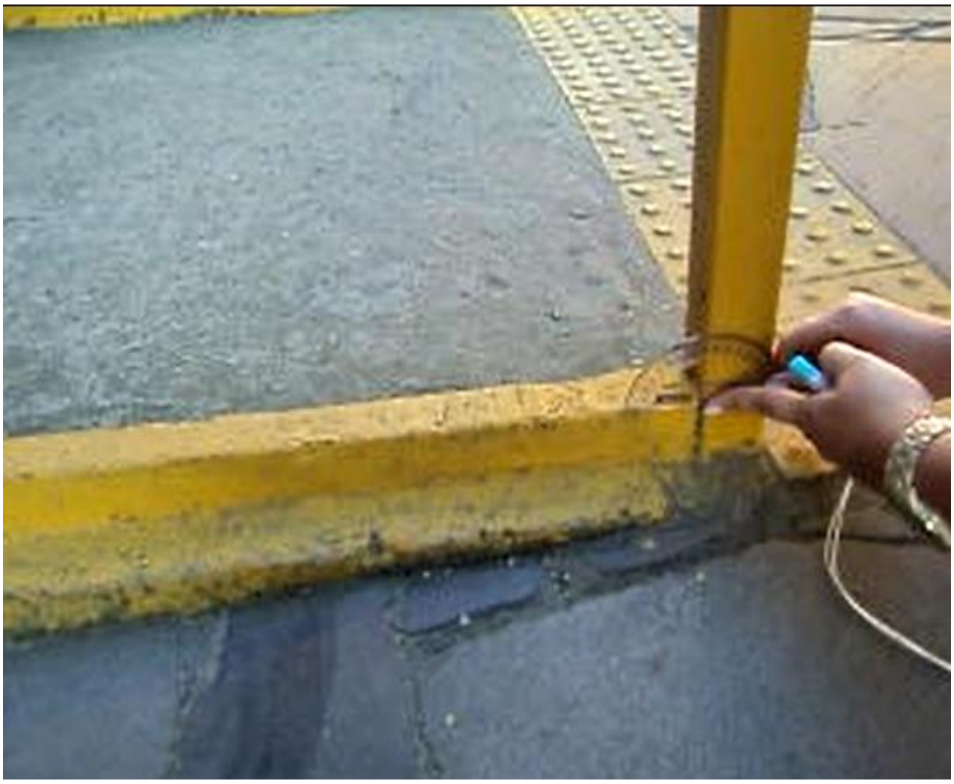
Figura 71 – Aluna Marcela efetuando a medição do ângulo de inclinação da rampa no pátio da escola com a ajuda da professora.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

A partir desta constatação, perguntei aos alunos qual ângulo estaria sendo formado entre o chão e o fio de prumo, e rapidamente os alunos falaram 90°. Mostrei que o ângulo obtido era aquele determinado pelo fio e a rampa, e ainda faltava a medida do ângulo entre a rampa e o chão, a qual nos interessava. Fazendo isto, os alunos disseram que a medida faltante era de 4° e complementei dizendo que essa era a medida que estávamos procurando.

Percebendo que os alunos não pareciam ter entendido o que estávamos medindo, procurei outra rampa no pátio para fazer a medição e retomar a explicação.

Figura 72 – Medição de inclinação de outra rampa no pátio utilizando o corrimão como fio de prumo.



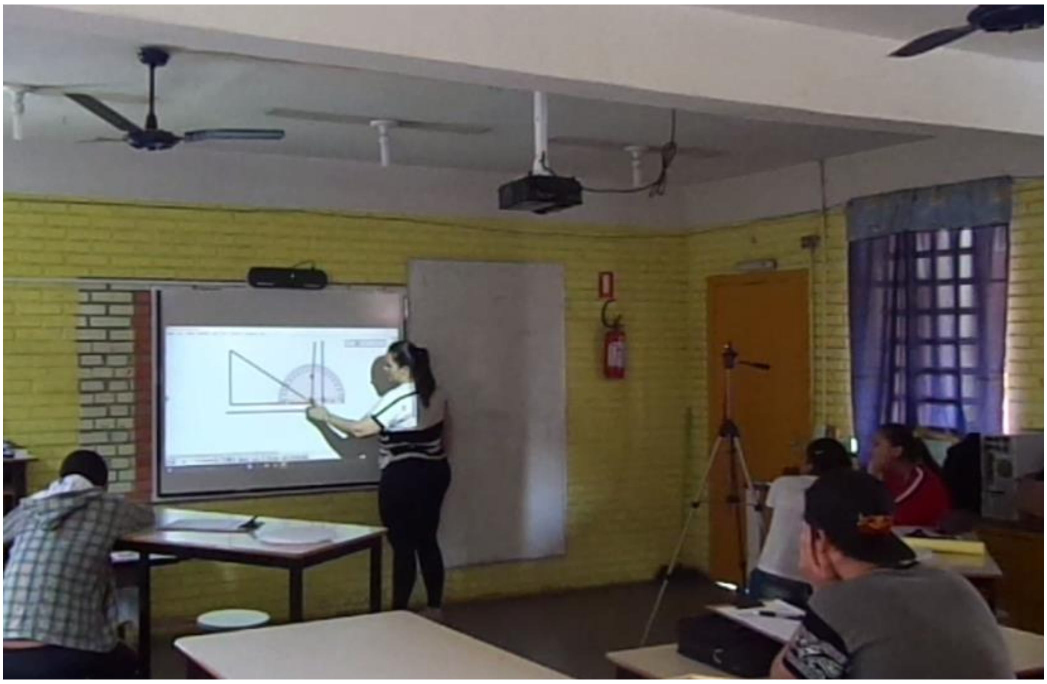
Fonte: Arquivo pessoal da autora

Nesta rampa (Figura 72), o corrimão fazia o papel do fio de prumo, ficando mais fácil para medir. Chamei a aluna Maria que não havia participado da medição anterior para verificar a medida que estava marcando o transferidor, sendo obtido o mesmo valor anterior, 86°. Reuni os alunos para concluir a atividade. Indiquei que os 86° medidos pela colega estavam entre a rampa e o corrimão e perguntei onde estariam os 4° faltantes. Os alunos não souberam dizer, então expliquei que o ângulo restante seria aquele entre a rampa e o chão, correspondendo à inclinação da rampa.

A atividade não atingiu seus objetivos, uma vez que não ficou claro para os alunos como efetuar a medição do ângulo de inclinação da rampa. Já estávamos no final do encontro e os alunos estavam menos concentrados, o vento estava mexendo o fio de prumo, o que não auxiliava a medição e, percebi que não ficou claro para os alunos a relação entre o ângulo medido e a inclinação. Decidi retomar o contexto de inclinação com os alunos no encontro seguinte, sob uma perspectiva diferente, utilizando rampas mais inclinadas do que as da escola, para que a relação entre inclinação e os ângulos pudesse ser feita, bem como a medição do ângulo de inclinação das rampas.

No encontro seguinte, perguntei se algum dos presentes se lembrava de como estávamos medindo as inclinações das rampas. Dos quatro alunos presentes neste encontro, três estavam no encontro anterior. O aluno João disse que lembrava e pediu para usar a lousa para explicar como se fazia a medição. Ele desenhou um triângulo representando a rampa, porém não soube explicar como fazer a medição. Aproveitei o seu desenho, inseri uma semirreta vertical, fazendo papel do fio de prumo, ferramenta que usamos na atividade externa, e o transferidor virtual para nos auxiliar medir o ângulo, fazendo toda a explanação na lousa.

Figura 73 – Retomando a medição de ângulo de inclinação na lousa digital.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

A partir da explicação feita na lousa, os alunos foram convidados a fazer novas medições, agora em rampas confeccionadas por mim.

Figura 74 – Rampas confeccionadas pela professora para nova atividade de medição de ângulo de inclinação.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Foi disponibilizada aos alunos uma folha com algumas questões que deveriam ser respondidas na ordem em que apareciam (Apêndice B). Inicialmente foi questionado se o ângulo de inclinação na base e no topo das rampas seria o mesmo. Posteriormente, foi solicitado que os alunos estimassem o ângulo de inclinação, na base e no topo das três rampas, sem que o ângulo fosse medido. Após as estimativas, os alunos foram convidados a medir os ângulos de inclinação nas rampas, anotando suas respostas na folha de atividades.

Chamou atenção que apenas o grupo B estimou que a menor inclinação era a da rampa 1 e a maior a da rampa 3. O grupo A apresentou mais dificuldade em desenvolver o trabalho de medição, porém estimaram corretamente que o ângulo da inclinação não se alteraria no topo e na base, o que não ocorreu nos demais grupos. Foi necessária uma nova explicação, desta vez no quadro branco, similar à explicação feita na lousa, para que os alunos compreendessem como medir o ângulo no topo da rampa. Conforme os alunos iam finalizando as estimativas, iam sendo chamados para efetuar as medições das inclinações das rampas.

Figura 75 – Aluno João medindo a inclinação da rampa 2.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Para concluir a atividade, sintetizei as informações coletadas pelos alunos e concluímos juntos, a partir do diálogo e da análise dos valores obtidos pelos grupos que os valores obtidos por cada grupo poderiam ser diferentes, devido à dificuldade apresentada em efetuar as medições de ângulo solicitadas. Devido à divergência de respostas relativas à variação do ângulo de inclinação na base e no topo da rampa, efetuei novamente a medição dos ângulos na base e no topo da rampa 2, e pedi que os alunos verificassem o valor do ângulo obtido. Tendo reconhecido que o valor era o mesmo, os grupos B e C concordaram com a resposta dada pelo grupo A, de que o ângulo de inclinação seria o mesmo para cada rampa, independentemente do local da medição.

Solicitei que os alunos relacionassem as rampas trabalhadas com situações em que utilizamos rampas, de modo a identificar a mais adequada para cada situação ou ação. Os alunos foram coerentes nas respostas, dizendo que rampas menos inclinadas (tipo a nº 1) eram as rampas que apareciam nos acessos às repartições públicas e que eram as mais fáceis para cadeirantes subirem e as mais inclinadas (como a nº 3) seriam as que aparecem em pistas de *skate* e *rally* de corrida ou as utilizadas para a descarga de caminhões, como os que transportam grãos.

A retomada do contexto de rampas relacionando inclinações e ângulos era indispensável, tendo em vista o não entendimento demonstrado pelos alunos na atividade anterior. O fato de precisarmos utilizar o fio de prumo, além do transferidor, para efetuar a medição, e o fato de a medida obtida não ser a inclinação, e sim, o ângulo complementar ao da inclinação, podem ter contribuído para tal dificuldade.

Utilizando as rampas em menor escala de tamanho e maiores inclinações e substituindo o fio de prumo por uma régua que encaixava na base das rampas e ficava fixa, ficou mais acessível aos alunos a medição dos ângulos complementares ao de inclinação, baseados na explicação do encontro anterior e na retomada feita durante este encontro. Os alunos conseguiram mencionar diversas situações nas quais o contexto de inclinação estava presente, bem como indicar qual inclinação seria mais apropriada para cada situação.

4.8 Operando com ângulos

O intuito da atividade era inserir o conceito de ângulo em um contexto interessante para os alunos, no qual deveriam operar com os ângulos, por meio da divisão e reunião das fatias, de modo a formar pizzas inteiras.

Iniciamos este trabalho falando sobre a tele entrega de pizzas e a variedade de tamanhos. Questionei os alunos sobre os tamanhos de pizzas disponíveis e se era possível dividir uma pizza brotinho e uma pizza família na mesma quantidade de fatias. Rapidamente um dos alunos informou que é possível repartir ambas as pizzas na mesma quantidade de fatias, afirmando ainda que as fatias de cada pizza terão o mesmo ângulo de abertura e ao serem questionados quanto ao tamanho das fatias, eles responderam que as fatias teriam tamanhos diferentes.

O seguinte contexto foi proposto: pediríamos a tele entrega de quatro pizzas tamanho família nos seguintes sabores - uma pizza de brigadeiro, uma pizza de calabresa e coração, uma pizza de quatro queijos, frango e strogonoff e uma pizza de milho, *marguerita*, portuguesa e bacon, de modo que em cada pizza as partes de cada sabor seriam divididas igualmente. Foi pedido que os alunos respondessem algumas perguntas relativas ao ângulo correspondente a cada sabor em cada pizza.

O único sabor para o qual os alunos demonstraram dificuldade em identificar o ângulo correspondente foi o da pizza de um único sabor, brigadeiro. Após uma pequena conversa, os alunos chegaram à conclusão de que a pizza de brigadeiro correspondia a uma volta inteira de brigadeiro, ou seja, 360º.

Feito isso, utilizei o *software* Geogebra para desenhar as pizzas, de acordo com as divisões sugeridas no enunciado, para que servissem de apoio para os alunos.

Figura 76 – Representando feita no *software* Geogebra das pizzas da atividade.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

Na atividade seguinte, os alunos deveriam dividir cada sabor de pizza em quatro fatias de mesmo tamanho e anotar o ângulo referente a cada fatia na folha disponibilizada como roteiro da atividade (Apêndice B), pois tais informações serviriam de apoio para as próximas atividades. Exemplificando, efetuei a divisão do primeiro sabor – brigadeiro - o que não foi difícil, visto que tal divisão já havia sido feita na pizza de quatro sabores. As demais divisões foram feitas facilmente pelos alunos, inclusive a divisão não inteira da quarta pizza.

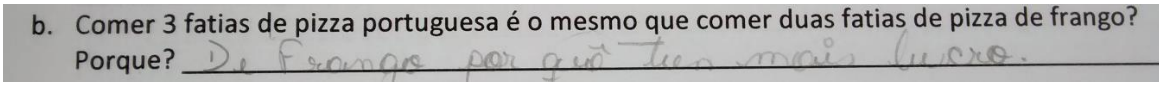
Disponibilizei na lousa o desenho das quatro pizzas da atividade, agora fatiadas de acordo com a etapa anterior da atividade.

Figura 77 – Pizzas divididas conforme o segundo momento da atividade.

Fonte: Arquivo pessoal da autora

A atividade seguinte solicitava que os alunos efetuassem comparações entre as fatias de pizza, ou verificassem equivalências. Das três perguntas respondidas pelos três grupos, somente uma não foi respondida corretamente.

Figura 78 – Única pergunta respondida de maneira incorreta.

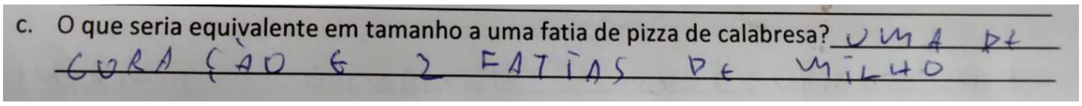


Fonte: Arquivo pessoal da autora

Transcrição da resposta do aluno: “De frango por quê tem mais lucro”.

A última pergunta possibilitava mais do que uma resposta correta e um dos grupos citou duas das possíveis respostas (Figura 79).

Figura 79– Duas das respostas possíveis para a mesma pergunta.

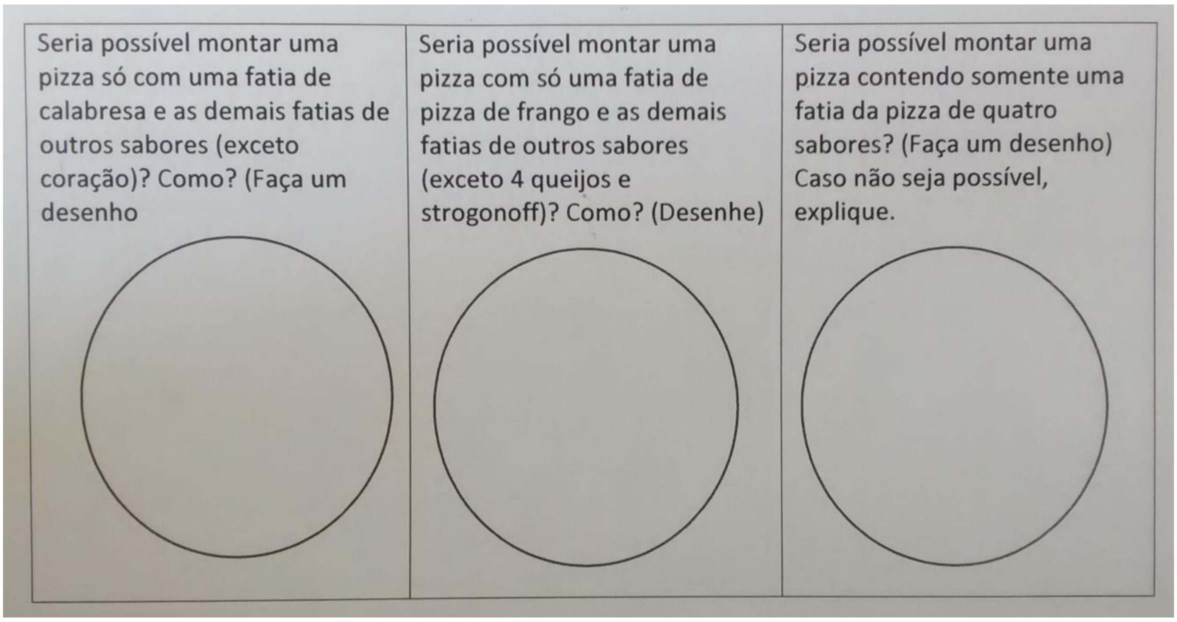


Fonte: Arquivo pessoal da autora.

Transcrição da resposta: “Uma [fatia] de [pizza de] coração e duas fatias de [pizza de] milho”.

Para a última parte desta atividade, os alunos foram questionados sobre a possibilidade de montar uma pizza, seguindo algum critério.

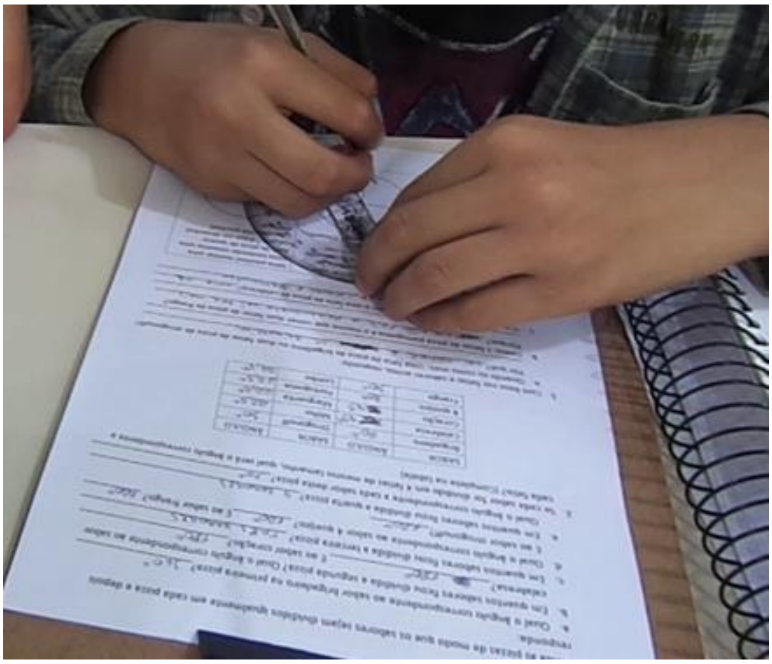
Figura 80 – Última parte da atividade. Montagem de pizzas.



Fonte: Arquivo pessoal da autora.

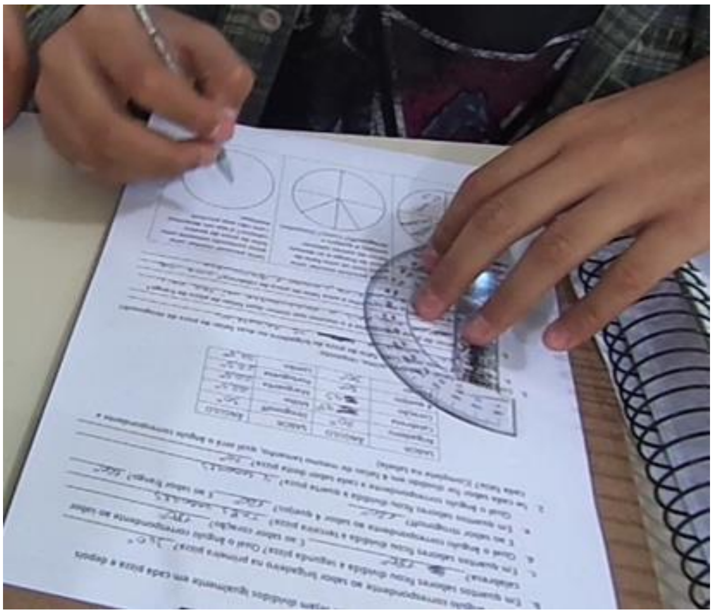
Verificou-se o uso do transferidor na construção das fatias, mesmo sem ter sido solicitada sua utilização (Figuras 81 e 82).

Figura 81 – Aluno desenhando as fatias de pizza utilizando o transferidor.



Fonte: Arquivo pessoal da autora

Figura 82 – Fatias de pizza desenhadas utilizando o transferidor.

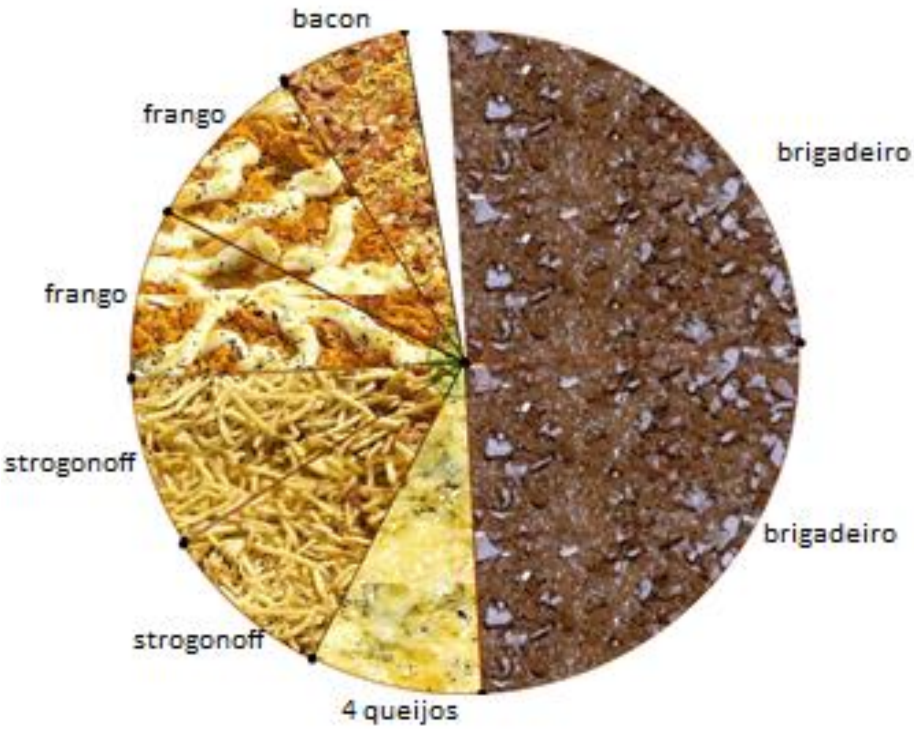


Fonte: Arquivo pessoal da autora.

O último exercício desta atividade apresentava uma pizza impossível de ser montada, uma vez que o critério para a montagem desta pizza era conter apenas uma fatia de 22,5°, da pizza de quatro sabores e as demais fatias deveriam ser das outras pizzas, com ângulos centrais 90°, 45° ou 30°, impossibilitando a soma de 360°. Porém, os alunos deveriam chegar a esta conclusão a partir da tentativa de montagem da pizza.

O aluno João escolheu uma fatia do sabor bacon (22,5º) e logo em seguida exclamou que não teria como montar a pizza, pois sempre haveria um número com vírgula. Seu colega de dupla – Eric - disse ter conseguido montar a pizza em questão enquanto eu auxiliava o grupo A. Ao verificar o trabalho do Eric, percebi que havia duas fatias da pizza que, de acordo com o enunciado, só poderia conter uma fatida daquela pizza na montagem. Mostrei ao aluno a falha em montar a pizza de acordo com o enunciado da tarefa e sugeri que ele tentasse efetuar a montagem da sua pizza na lousa, utilizando as fatias desenhadas no *Geogebra*, retificando o que havia feito de errado na primeira tentativa de montagem. A segunda tentativa feita pelo aluno Eric foi a que aparece na figura 83.

Figura 83 – Pizza montada na última atividade pelo aluno Eric.



Fonte: Arquivo pessoal da autora.

Finalizamos a atividade na lousa, somando o valor das fatias que o aluno Eric havia utilizado. Verificou-se que faltava uma fatia para completar a pizza, não havendo à disposição nenhuma fatia do tamanho necessário. Questionei os alunos se trocando as fatias seria possível montar a pizza e os alunos disseram que seria possível. Alertei aos alunos que estávamos usando uma fatia de pizza cujo ângulo central era de 22,5º e entre as opções disponíveis de fatias para colocar na pizza (90°, 45° e 30°), não tínhamos nenhuma outra fatia com 0,5º para inteirar um grau, logo, só seria possível montar a pizza se fosse possível utilizar, pelo menos, duas fatias da pizza de quatro sabores, que mediam 22,5°. Nesse momento, o aluno João comemorou, pois foi o único que disse que não era possível montar tal pizza.

Com esta atividade, o conceito de ângulo foi inserido em um contexto conhecido pelos alunos, no qual foram oportunizadas atividades de comparação, equivalências, divisões e reunião de ângulos, a partir da divisão de fatias nas pizzas. Os alunos conseguiram realizar as atividades propostas, inclusive propondo diferentes respostas para a mesma pergunta, como o verificado na Figura 79. Finalizamos este encontro e nossas oficinas confraternizando com pizzas.

5 ANÁLISES DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

5.1 A contribuição dos materiais manipulativos nas atividades propostas

A atividade de montagem de quebra-cabeças objetivava que os alunos verificassem a importância dos ângulos dos polígonos que formavam as peças dos quebra-cabeças. O objetivo das atividades era, mesmo, formar uma composição com as peças disponibilizadas, porém, no ambiente virtual, as peças possuíam movimentos limitados, só podendo ser transladadas. No ambiente físico, as peças poderiam ser rotacionadas também, o que proporcionava uma variedade maior de possibilidades para montagem. Após a experimentação em ambos os ambientes, os alunos relataram ser mais fácil montar o quebra-cabeças no ambiente virtual e que no ambiente físico a atividade era mais desafiadora. Verifica-se, nesta situação, a utilização do material concreto acompanhado de uma reflexão acerca das possibilidades de cada ambiente, bem como das dificuldades vivenciadas pelos alunos, contribuindo para o objetivo da atividade.

Segundo Rodrigues e Gazire (2012), materiais manipuláveis podem tornar as aulas mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa, fato que também foi verificado na atividade de investigação sobre a condição de existência e propriedades dos triângulos. Com o material manipulativo confeccionado para a atividade, os alunos montavam os triângulos, quando possível e verificaram a impossibilidade de montagem de alguns triângulos solicitados. Essa constatação é difícil de ser feita a partir de desenho no caderno, uma vez que ao desenhar dois segmentos, o ângulo formado entre eles já seria fixado.

5.2 Situações cotidianas e os conceitos de ângulo situado e contextualizado

Ao trabalhar o reconhecimento de ângulos em figuras de objetos do cotidiano, procuramos verificar se os alunos reconheciam nas figuras, aberturas de diferentes amplitudes e poderiam relacioná-las. Os alunos foram orientados a classificar as figuras de algum modo e deveriam justificar tal classificação.

Mesmo trabalhando com figuras iguais, cada grupo fez uma classificação distinta dos objetos. Avalio que tal classificação dos objetos foi feita de acordo com o que Mitchelmore e White (2000) chamam de conceitos cotidianos. Os alunos se basearam em semelhanças observadas nas próprias figuras (como fica evidenciado na classe denominada “fotografia”, feita pelo grupo A) e em experiências anteriores (reconhecendo um uso similar para os objetos relacionados). Além destes conceitos, ao reconhecer nos objetos uma relação entre partes da figura, verifica-se a utilização do que os autores chamam de conceitos elementares de matemática, como por exemplo na classificação feita pelo grupo C, que denominou uma das classes de “figuras abertas” pois as pernas da bailarina, os lados do leque, a base do cabide e a gangorra possuíam esta característica de “estarem completamente abertos”, identificando ângulos rasos.

A atividade era aberta e os grupos poderiam agrupar os objetos da maneira que desejassem, contanto que houvesse uma justificativa para esse agrupamento. Apresentaram-se nessa atividade, de acordo com Mitchelmore e White (1998), uma série de conceitos situados de ângulo, em que os grupos reconheceram nas experiências, no movimento e na configuração geométrica alguma semelhança e, com base nisso, fizeram suas classificações.

As classificações baseadas na maneira como estes objetos eram apresentados advém, segundo Piaget, de uma abstração empírica, relacionada somente às figuras mostradas e não ao movimento que poderia ser efetuado pelos objetos. A classificação baseada nos ângulos apresentados nas figuras, feitas pelo grupo C, mostra-se advinda de uma abstração pseudo-empírica, tendo se apoiado nas figuras, porém, utilizando uma relação visualizada pelo grupo (ângulos), não inerente às figuras.

Posteriormente, as classificações foram discutidas, tentando unificá-las, buscando estabelecer uma classificação baseada nos ângulos mostrados nas figuras. Para tanto, os alunos foram solicitados a organizar novamente as figuras segundo os movimentos possíveis dos objetos representados por elas. Neste momento, os alunos imaginaram os movimentos dos objetos, e concluíram que os movimentos dos objetos representados pelas figuras eram movimentos de abertura e fechamento ou de giro. Para efetuarem esta classificação, foi necessária a ação mental dos alunos, ou seja, uma reflexão, imaginando o movimento que os objetos poderiam executar, obtendo uma organização das figuras baseada nos diferentes contextos em que o conceito de ângulo é utilizado, instaurando assim o conceito de ângulo contextualizado, de acordo com Mitchelmore e White (1998).

5.3 Reproduzindo ângulos: o conceito de ângulo abstrato

Ao utilizar o material manipulativo para reproduzir os ângulos apresentados nas figuras, os alunos verificaram que a relação visualizada entre os segmentos não era exclusiva da figura observada e que a mesma relação poderia ser identificada em outros objetos. O mesmo vale para a atividade em que o material manipulativo é mostrado com um determinado ângulo, em uma determinada orientação, e os alunos indicam várias figuras que apresentam a mesma abertura.

Os alunos não estão se baseando no contexto em que as figuras mostradas podem ser utilizadas, mas sim, na relação estabelecida entre as partes da figura, identificando em diversos contextos a mesma relação, independentemente do tamanho das partes e de sua orientação.

De acordo com Mitchelmore e White (2000), este seria o terceiro estágio de abstração envolvido na construção do conceito de ângulo – o conceito de ângulo abstrato, no qual há o reconhecimento de semelhanças entre diferentes contextos de ângulo. Tal reconhecimento é um processo construtivo que requer abstração reflexionante para ser constituído.

Verifica-se o acontecimento da abstração reflexionante, uma vez que os alunos tomaram consciência de que a abertura apresentada no material manipulativo era a mesma mostrada nas figuras e que esta mesma abertura poderia ser obtida em outros materiais e objetos, chegando assim em uma generalização do seu uso. Segundo Becker (2001), quando a generalização ultrapassa o plano do real (objetos manuseados), projetando-se sobre o plano dos possíveis (o conjunto dos aparelhos possíveis a partir de determinadas condições), se estabelecem condições para que os alunos tomem consciência, neste caso, do conceito de ângulo.

5.4 A ampliação do conceito por meio de novos contextos

De acordo com Casas García e Luengo Gonzáles (2005), é preciso trabalhar o conceito nos diferentes contextos para que as diferentes definições possam ser compiladas pelos alunos, de modo a formar um conceito geral de ângulo que contemple suas mais diversas contextualizações.

Segundo Mitchelmore e White (1998), uma vez reconhecido um contexto angular, as crianças começam a desenvolver um conhecimento sobre ângulos contextualizados que se aplica a todas as situações incluídas em cada contexto (mas não necessariamente através de contextos diferentes).

Por estes motivos, propus atividades que envolvessem o conceito de ângulo relacionado também a giros e inclinações.

Em cada contexto, o conceito de ângulo é trabalhado de uma maneira diferente, e, por vezes, as características que aparecem em um determinado contexto, não são verificadas em outros, como, por exemplo, não faz sentido falar em aberturas maiores do que 180º, mas fazer sentido falar em giros maiores que 180°.

Ao trabalharmos o contexto de giros em uma modalidade esportiva, incluímos no conceito de ângulo já construído por estes alunos a possibilidade de obtermos ângulos maiores que 360°, bem como a de relacionar giros a ângulos. Fato evidenciado pelo grupo de alunos que verificaram que a representação do ângulo nulo e do ângulo de 360° era a mesma. A partir da abordagem de giros, estendem-se ao conceito de ângulo os ângulos ilimitados, podendo-se então ampliar tal conceito à representação de qualquer volta completa.

No contexto de inclinações, foi utilizado um objeto presente no cotidiano dos alunos – rampas. O objetivo desta atividade era propiciar que os alunos compreendessem que, para construir uma rampa, é necessário um ângulo de inclinação e ainda, que o ângulo é o que determina se uma rampa é mais ou menos inclinada.

Não considerei como satisfatórias as atividades envolvendo inclinações, uma vez que os alunos tiveram muita dificuldade em identificar o ângulo que determinava a inclinação da rampa e compreender que a inclinação no topo e na base da rampa era o mesmo. No entanto, a atividade contribuiu muito pelo fato de ampliar o escopo de situações em que o conceito de ângulo aparecia, tornando possível a elaboração do conceito de inclinação como um conceito contextualizado de ângulo e, mediante o processo de abstração reflexionante, a ampliação e o enriquecimento do conceito de ângulo.

5.5 A importante contribuição com a lousa digital para a sequência de atividades

De acordo com Glover e Miller (2001), a utilização da lousa objetiva o aumento da eficiência, permitindo aos professores recorrerem a uma variedade de recursos, sem interrupção ou perda de ritmo, bem como estender a aprendizagem, utilizando materiais mais atraentes para explicar conceitos e ainda para transformar a aprendizagem, criando novos estilos de aprendizagem.

Durante todos os encontros a lousa digital serviu de apoio às atividades, porém, em alguns encontros, ela figurou como principal suporte às atividades desenvolvidas. O uso de uma tecnologia diferente da usualmente utilizada em sala de aula cria um ambiente novo para a construção do conhecimento. Os alunos anseiam pela novidade, demostrando muito interesse em atividades desenvolvidas na lousa.

Além disso, em diversas oportunidades o uso da lousa complementou a abordagem com material manipulativo, por exemplo, no trabalho de investigação de propriedades relativas aos ângulos dos triângulos. Os alunos tinham à disposição um material físico para a montagem de triângulos, porém, nas situações limite ou de impossibilidade de montagem, a lousa se mostrava muito mais efetiva para que os próprios alunos pudessem manipulá-la e verificassem que, naquelas situações, não era possível efetuar a montagem dos triângulos.

Ao explicar a medição de ângulos aos alunos, escolhi utilizar a lousa digital e o transferidor virtual pois, do meu ponto de vista, o fato de não precisar segurar o transferidor e fazer toda a explicação praticamente de costas para os alunos, auxiliaria na compreensão do procedimento. A explicação utilizando o transferidor físico também foi utilizada em complementação à explicação prévia na lousa, mas para cada um dos grupos, não sendo necessário ficar de costas e explicar ao mesmo tempo.

Os jogos utilizados nas atividades poderiam ter sido propostos em computadores, como atividades individuais, porém, ao utilizá-los na lousa, houve um desenvolvimento colaborativo das atividades propostas no qual os alunos, em conjunto, efetuavam o que estava sendo proposto. Desse modo, proporcionou uma nova experiência para o aluno, de participação ativa e coletiva na aula.

5.6 A construção do conceito de ângulo ao longo das oficinas

Em diversas atividades (classificação de figuras cotidianas, no lançamento de foguetes no jogo e estimando ângulos em posições de ioga, etc.) os alunos foram convidados a estimar os ângulos apresentados. Tais estimativas foram feitas com base em diferentes referenciais: “quantidade de giro” medido em frações da volta completa e “tamanho da abertura” medido em graus.

Verificou-se, inicialmente, uma comparação baseada na posição e no tamanho dos braços dos ângulos, considerando como de mesmo tamanho, aberturas orientadas na mesma posição ou com braços de mesmo tamanho. Adotando o referencial das voltas, os alunos começaram a melhorar as estimativas, se desprendendo das características de posição e tamanho dos braços, baseando-se na abertura para efetuar as estimativas, utilizando principalmente os ângulos reto e raso como referência.

Ao introduzir um novo referencial - os graus - a estimativa foi refinada, uma vez que, ao utilizar frações de volta, os alunos podiam inicialmente escolher os quadrantes, e a partir do uso da medida em graus, era possível obter estimativas mais precisas. Ao mesmo tempo, a utilização do transferidor mostrou-se de difícil compreensão para os alunos, principalmente ao verificarem o valor do ângulo mostrado, como verificado na Figura 34. A partir do seu uso em várias atividades, utilizando transferidores físicos e virtuais, os alunos aprimoraram sua utilização e interpretação, deixando de cometer tais erros.

A partir do jogo *Alien Angle*, verifiquei que o objetivo de estimar ângulos havia sido alcançado pelos alunos. Nesta atividade os alunos operavam com ângulos com o objetivo de representar a abertura solicitada pelo jogo. Foram utilizados principalmente os ângulos reto e raso como referenciais e, algumas vezes, até frações destes ângulos, e todas as estimativas propostas foram acertadas.

Comparando a atividade de classificação dos ângulos nas figuras do cotidiano desenvolvida no segundo encontro, e a atividade de estimativa e medição dos ângulos formados nas posições da Ioga realizada no sexto encontro, verifica-se uma melhora significativa. Os alunos conseguiam relacionar uma medida de ângulo às aberturas mostradas nas figuras, identificavam facilmente figuras que apresentam o mesmo ângulo e, ao utilizar o transferidor, interpretavam as informações corretamente.

Podemos inferir, desse processo, que a construção do conceito de ângulo está sendo concebida através do processo de abstração reflexionante. Da classificação das figuras, da reprodução de ângulos com materiais manipulativos e das estimativas de medida baseadas em diferentes escalas (entre outras atividades), foram extraídas informações que fazem sentido ao sujeito e justificaram procedimentos mentais sobre estas ações, a fim de retirar deles características, buscando a execução de raciocínios.

A melhora no desempenho dos alunos ao estimar ângulos se explica pelo processo de reflexionamento (quando o sujeito retira das ações as características e propriedades, repassando-as para um patamar superior) e reflexão (reorganização das características e propriedades, condicionando o sujeito a produzir novidades).

Grande parte das abstrações reflexionantes desenvolvidas ao longo das oficinas foram do tipo pseudo-empíricas, uma vez que a utilização de materiais manipulativos foi intensa. Porém, em diversas situações as conclusões dos alunos advinham de situações imaginadas por eles, como por exemplo nas classificações das figuras, caracterizando assim abstrações refletidas. As primeiras explicações ou formas explicativas transformam-se em conteúdo para os quais constroem-se novas formas. Transita-se, assim, para diferentes patamares de reflexionamento, de acordo com o seguinte processo espiral: “ todo reflexionamento de conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devido à reflexão” (PIAGET, 1995, p. 276) e assim teremos uma alternância entre os processos de reflexionamento e reflexão com duração indefinida, proporcionando como resultado novidades e reelaborações.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como objetivo principal analisar se a mobilização da noção de ângulo em diferentes contextos e a utilização de diferentes materiais manipulativos pode contribuir para a construção do conceito geométrico de ângulo.

Para responder à questão principal do estudo, a leitura dos referenciais teóricos expostos no segundo capítulo foi de grande importância. Por meio deles e da minha vivência em sala de aula, pude compreender mais profundamente as dificuldades em se abordar o conceito de ângulo na escola e sobre maneiras de se pensar acerca da construção deste conceito tão complexo.

A partir do desenvolvimento da sequência de atividades planejada, procurei promover a autonomia dos alunos, estimulando a descoberta em sala de aula, ao invés de transmitir conceitos acabados e já formulados. Acredito que as atividades não usuais e o uso de diferentes materiais manipulativos instigou a participação dos alunos em aula, além de suas contribuições para a construção do conceito de ângulo. Durante o processo de construção desse conceito, acredito ter sido de suma importância a sua experimentação em diferentes meios e em diversas situações, de modo que os alunos compreendessem as relações obtidas em cada contexto e, através de suas reflexões, se tornassem capazes de relacionar contextos diferentes, visando a ampliação do conceito de ângulo.

Ao utilizar o material manipulativo para reproduzir os ângulos apresentados nas figuras, os alunos verificaram que a relação visualizada entre os segmentos não era exclusiva da figura observada e que a mesma relação poderia ser identificada em outros objetos. Nessa atividade, verificou-se a ocorrência da abstração reflexionante, uma vez que os alunos tomaram consciência de que a abertura apresentada no material manipulativo era a mesma mostrada nas figuras e de que essa mesma abertura poderia ser obtida em outros materiais e objetos, chegando assim a uma generalização do seu uso.

Em cada contexto, o conceito de ângulo é trabalhado de uma maneira diferente, e, por vezes, as características que aparecem em um determinado contexto, não são verificadas em outros. Ao trabalharmos o contexto de giros em uma modalidade esportiva, incluímos a possibilidade de obtermos ângulos maiores que 360°. No contexto de inclinações procurou-se compreender a relação entre o ângulo e a inclinação das rampas.

Durante todos os encontros a lousa digital serviu de apoio às atividades, complementando a abordagem com material manipulativo, porém, em alguns encontros, ela figurou como principal suporte às atividades desenvolvidas. O uso de uma tecnologia diferente da usualmente utilizada em sala de aula pode criar um ambiente novo para a construção do conhecimento. Ao propor diversos jogos na lousa digital, houve um desenvolvimento colaborativo das atividades no qual os alunos, em conjunto, efetuavam o que estava sendo proposto, proporcionando experiências de participação ativa e coletiva na aula.

Mediante as considerações acima concluo que sim, a mobilização da noção de ângulo em diferentes contextos e a utilização de diferentes materiais manipulativos pode contribuir para a construção do conceito geométrico de ângulo.

Além disso, o desenvolvimento dessa dissertação certamente aprimorou minha prática como professora e como pesquisadora, principalmente pelo que aprendi acerca do processo de construção do conhecimento. Nesse período, tive a oportunidade de refletir sobre a minha prática e, atuando como professora pesquisadora, pude conceber novas perspectivas em relação ao aprender e ao ensinar. Com o produto técnico dessa dissertação, espero auxiliar colegas de profissão a abordarem o conceito de ângulo, levando em consideração sua mobilização em diferentes contextos e com o uso de materiais manipulativos.

REFERÊNCIAS

BECKER, Fernando. **Educação e Construção do Conhecimento**. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2012.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (5ª a 8ª séries)**: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

CASAS GARCÍA, Luis M.; LUENGO GONZÁLES, Ricardo. Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. enseñanza de las ciencias. **Revista de investigación y experiencias didácticas**, v. 23, n. 2. p. 201-216, 2005. Disponível em:<http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/22018/332761>. Acesso em: 29 jun. 2017.

CURWOOD, Jen S. Education 2.0: the case for interactive whiteboards. **Instructor.** Nova Iorque, v. 118, n. 6, p. 29-33, jun. 2009. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/14759390100200115>. Acesso em: 14 jul. 2017.

DINIZ, Maria Ignez S. V.; SMOLE, Maria. C. S. **O conceito de ângulo e o ensino de Geometria**. São Paulo: CAEM-IME/USP, 1993.

ESTEVES, Rodolfo F.; FISCARELLI, Silvio H.; SOUZA, Cláudio B. G.. A lousa digital interativa como instrumento de melhoria da qualidade da educação-um panorama geral. **Revista on line de Política e Gestão Educacional**, Araraquara: UNESP, n. 15, p. 186 – 197, 2013. Disponível em: <http://seer.fclar.unesp.br/rpge/article/view/9350/6202>. Acesso em: 29 jun. 2017.

GADOTTI, Marlene F. **Definições matemáticas do conceito de ângulo**: influências da história, do movimento da matemática moderna e das produções didáticas nas concepções dos docentes. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências Humanas. Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba, 2008. Disponível em: <https://www.unimep.br/phpg/bibdig/pdfs/2006/KSEWYYOOCWRB.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2017.

GLOVER, Derek; MILLER, David. Running with technology: the pedagogic impact of the large-scale introduction of ineractive whiteboards in one secondary school. **Information Technology for Teacher Education**, London, v. 10, n. 3, p. 257-277, 2001. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/14759390100200115>. Acesso em: 14 jul. 2017.

JUNG, Karen M. **Algumas considerações sobre ângulo.** Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://euler.mat.ufrgs.br/~comgradmat/tccs/monos_0802/TCC_Karen.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2017.

LORENZATO, Sérgio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MATOS, José M.; SERRAZINA, Maria de L. **Didática da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MITCHELMORE, Michael C.; WHITE, Paul. Development of angle concepts: A framework for research. **Mathematics Education Research Journal**, v. 10, n. 3, p. 4–27, 1998. Disponível em: <https://www.merga.net.au/documents/MERJ_10_3_Mitchelmore&White.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2017.

MITCHELMORE, Michael C.; WHITE, Paul. Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 41, n. 3, p. 209-238, 2000. Disponível em: <http://mast.thomasjpitts.co.uk/wp-content/uploads/2010/12/Mitchelmore_White_Development_Of_Angle_Concepts.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2017.

NACARATO, Adair M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, SBEM São Paulo, v. 9, n. 9/10, p. 1-6, 2005. Disponível em: <https://pactuando.files.wordpress.com/2014/08/eu-trabalho-primeiro-no-concreto.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2017.

NAKASHIMA, Rosária. H.; AMARAL, Sérgio. F. **Práticas pedagógicas mediatizadas pela Lousa Digital.** 2007. Disponível em: <http://recursos.portaleducoas.org/publicaciones/pr-ticas-pedag-gicas-mediatizadas-pela-lousa-digital >. Acesso em: 29 jun. 2017.

PAIS, Luis C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no** ensino de Geometria. Apresentado na 23ª Reunião Anual da ANPEd (Associação de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação), GT Educação Matemática. Caxambu (MG): 2000. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf >. Acesso em: 14 jul. 2017.

PASSOS, Carmen L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S**. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

RÊGO, Rogéria M.; RÊGO, Rômulo G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 39-56.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel; SZEMINKSKA, Alina. **La Géomètrie Spontanée de L'enfant.** Paris: Presses Universitaires de France, 1948.

PIAGET, Jean. **Abstração reflexionante:** Relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PONTE, João P.; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigação Matemática na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

RODRIGUES, Fredy; GAZIRE, Eliane. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revemat**, ano 7, n. 2, p.187 – 196, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p187>. Acesso em: 29 jun. 2017.

SCHLIEMANN, Analúcia D.; SANTOS, Clara M.; COSTA, Solange C. Da compreensão do sistema decimal à construção de algoritmos. In: ALENCAR, Eunice S. (Org.). **Novas Contribuições da Psicologia aos Processos de Ensino e Aprendizagem.** São Paulo: Cortez, 1992. p. 97-117.

SCHROEDER, Robert. Active learning with interactive whiteboards: a literature review and a case study for college freshmen. **Communications in Information Literacy**, [S.l.], v.1, n.2, 2007. Disponível em: <http://www.comminfolit.org/index.php?journal=cil&page=article&op=view&path%5B%5D=Fall2007AR2&path%5B%5D=50>. Acesso em: 14 jul. 2017.

SKEMP, Richard. **The psychology of learning mathematics**. Harmondsworth: Penguin, 1986.

VIEIRA, Kléber M. **O ensino do conceito de ângulo:** limites e possibilidades. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2010. Disponível em: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/1968>. Acesso em: 29 jun. 2017.

APÊNDICE A

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ___________________________________,R.G._____________, responsável pelo(a) aluno(a) _____________________________________, da turma ______, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Aprendizagem do conceito de ângulo mediada pela lousa digital**, desenvolvida pela pesquisadora Mariana Rodolfo Rocha. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Elisabete Zardo Burigo, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (51) 91558205 ou e-mail burigo@mat.ufrgs.br .

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Explorar a lousa digital, mobilizando o conceito de ângulo em diferentes tipos de representações, buscando favorecer a construção de tal conceito.
- Analisar a participação e a produção dos alunos avaliando se a sequência didática proposta contribuiu para a concepção do conceito de ângulo e se os alunos foram capazes de converter os registros feitos na lousa para atividades que não envolvam o uso dessa tecnologia.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio da participação em oficinas, a ocorrer uma vez por semana, em turno inverso ao da aula regular, nas dependências da escola João Paulo I, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço Av. Bento Gonçalves, 9500 – Campus do Vale – UFRGS.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Canoas, _____ de ________________ de 2016.

Assinatura do Responsável: ____

Assinatura do(a) pesquisador(a):____

Assinatura do Orientador da pesquisa:____

APÊNDICE B – FOLHAS DE ATIVIDADES UTILIZADAS NA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES APLICADA

Questionário utilizado na atividade 4.1:

Nome:_________________________________

Retomada da atividade 1 – Responda as seguintes questões com base na atividade da aula anterior e no início desta aula:

a) Quais foram as figuras mais fáceis de fazer e por quê?________________________________

____
____
____

b) Há alguma diferença da atividade na lousa para a atividade em papel? Qual você achou mais fácil? Qual você gostou mais de fazer?

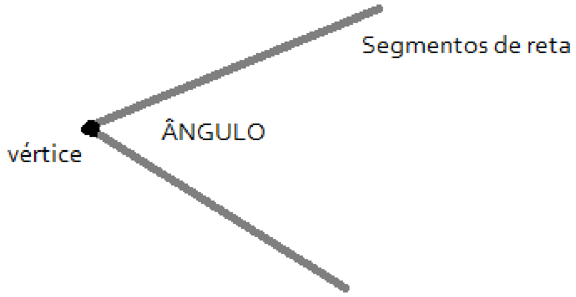
____
____
____

c) O que é preciso para conseguir montar os quebra-cabeças?

____
____
____

Material utilizado na atividade 4.4:

Denominamos ângulo uma região do plano limitada por duas semirretas (ou segmentos) de mesma origem. Podemos entendê-lo também como sendo o resultado da rotação de uma semirreta/segmento em torno de sua origem, com relação à outra semirreta/segmento. As semirretas (ou segmentos) recebem o nome de lados do ângulo e a origem delas, de vértice do ângulo.



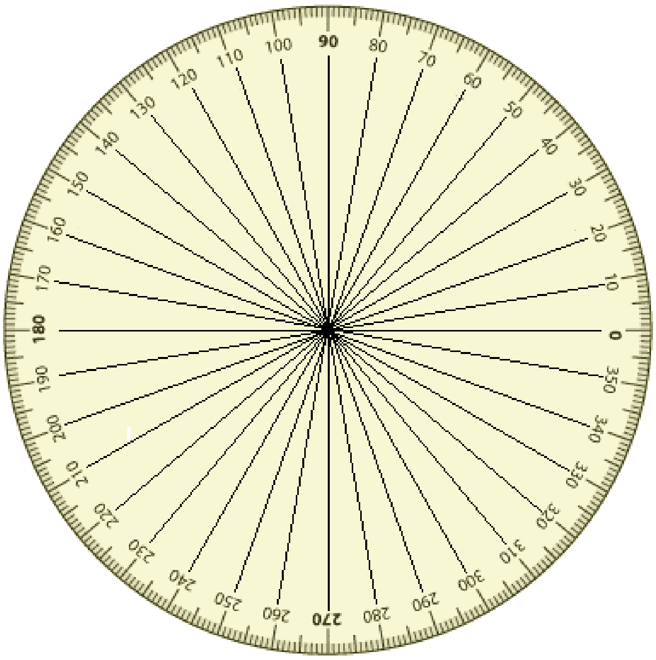
Para que dois ângulos sejam tenham a mesma medida precisamos que a "abertura" entre as semirretas seja a mesma, independentemente do tamanho dos lados dos ângulos e de sua orientação.

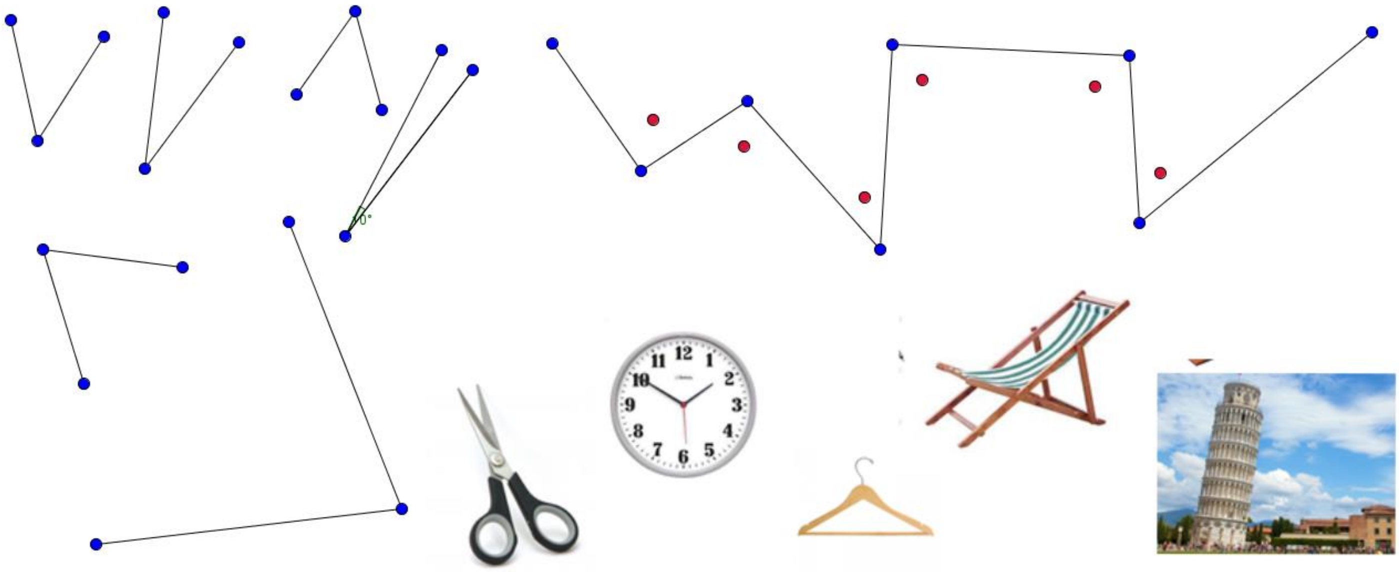
Para medir a "abertura" de um ângulo imaginamos que uma semirreta gira em torno da origem até se sobrepor à outra. Esse giro é uma fração da volta inteira, que a semirreta faz até voltar à sua posição inicial. A medida da "abertura" é a medida do giro.

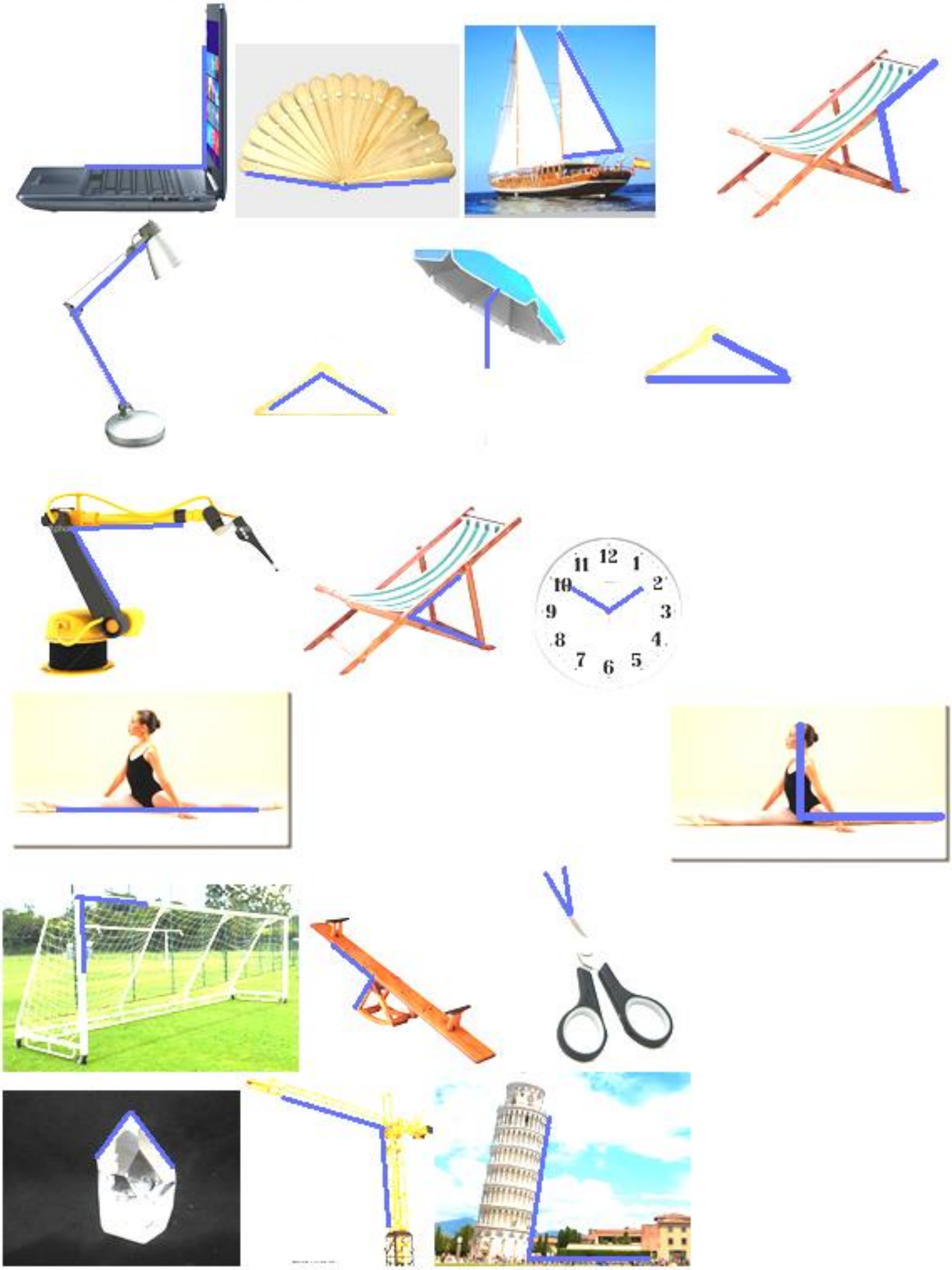
Ângulos com "abertura" menor que um quarto de volta, recebem o nome de ângulo agudo. Ângulos com abertura maior que um quarto de volta, mas menor do que meia volta, recebem o nome de ângulo obtuso. O ângulo formado pela abertura de um quarto de volta é chamado de ângulo reto e o ângulo de meia volta é chamado de ângulo raso.

O grau é originário da Babilônia. Para estabelecerem o grau, os babilônios dividiram o círculo em 360 partes iguais, pois acreditavam que essa era a quantidade de dias referente ao período de um ano e porque seu sistema de numeração era de base sessenta ou sexagesimal.

Outra motivação para escolher o número 360 pode ser porque ele tem 24 divisores. Além disso, 360 é divisível pelos números de 1 a 10, com exceção de 7. Esta propriedade tem diversas aplicações práticas, tal como dividir o planeta em 24 fusos horários, cada um com 15° de longitude, correlacionando com a convenção estabelecida do dia de 24 horas.







Material utilizado na atividade 4.5.2:

Arremesso de peso é uma modalidade do atletismo, onde os atletas competem para arremessar uma bola de metal o mais longe possível. Ao contrário do lançamento de dardo, martelo e disco, este esporte é chamado oficialmente de arremesso devido ao fato do peso ser empurrado e os demais serem projetados com características diferentes.

O arremessador tem uma área restrita circular de diâmetro 2,135 m (7 pés) para se locomover, com um anteparo semicircular de 10 cm de altura no limite frontal dela; no início do lançamento, o peso deve estar colocado entre o ombro e o pescoço do atleta e arremessado com as pontas dos dedos, e não com a palma da mão. Durante o lançamento, o atleta deve dar meia volta sobre si mesmo e arremessar. A marca obtida em cada arremesso é medida a partir do primeiro lugar onde o peso bater no chão, dentro de um setor pré-determinado com 35° de abertura; o atleta não pode tocar no anteparo do chão, nem ultrapassá-lo com o pé e o arremesso deve ser sempre feito numa linha acima do ombro. Caso ele deixe o círculo antes do peso tocar o solo ou se retirar dele pela frente ou pelo lado, o arremesso é invalidado.

Lançamento de disco consiste em lançar um disco de metal à maior distância possível. O disco usado é um prato de metal com a forma de um círculo com o diâmetro de 22 cm. Na prova masculina, o disco mede entre 219 e 221 mm de diâmetro e de 44 a 46 mm de espessura e pesa 2 kg. Na modalidade feminina, mede entre 180 e 182 mm de diâmetro e de 37 a 39 mm de espessura, pesando 1 kg. O lançamento é feito de dentro de um círculo de 2,5 m de diâmetro no chão, margeado por um anteparo de concreto de 2 cm de altura. O atleta segura o disco plano contra os dedos da mão e o antebraço do lado do lançamento, gira sobre si mesmo rapidamente e lança o disco ao ar estendendo o braço.

Lançamento de martelo:

É feito com o atleta posicionado dentro de uma base de concreto circular de 2,135 metros de diâmetro, com um anel metálico ressaltado marcando o diâmetro limite. Para que a distância seja medida, o lançamento precisa ser feito de maneira a que o implemento caia dentro de uma área marcada num ângulo de 34,92° à frente e o atleta não pode sair do círculo antes que o martelo toque o chão após o lançamento.

O movimento de lançamento pode ser divido em três etapas distintas, o molinete, o giro e o lançamento. O movimento é iniciado com o atleta virado de costas para a trajetória do lançamento, segurando a manopla com as duas mãos e mantendo os pés imóveis. O atleta gira o martelo sobre a sua cabeça, a fim de dar velocidade ao implemento. Em sequência ao molinete, o atleta gira sobre o próprio corpo, mantendo a trajetória circular já iniciada do martelo. Ao final do último giro, o atleta bloqueia o movimento do seu corpo, fazendo uma alavanca e lançando o martelo. Essa puxada final é onde o atleta imprime maior força, e geralmente onde se conclui a trajetória de direção e ângulo de lançamento.

Material utilizado na atividade 4.6:

Cada grupo possui três segmentos nos tamanhos 20 cm (azul), 15 cm (amarelo), 10 cm (rosa) e 6 cm (lilás). Tente montar triângulos de acordo com os tamanhos indicados, faça um esboço da montagem e, caso tenha conseguido montar o triângulo, meça os ângulos internos do triângulo com transferidor.

Esboço da montagem e medida dos ângulos internos (se possível)	SOMA
20, 20, 20	
6, 6, 6	
20, 20, 6	
15, 15, 20	
20, 10, 15	

10, 10, 6	
6, 6, 15	

Há alguma relação entre conseguir formar os triângulos e os tamanhos dos lados? E com relação aos ângulos? Nos triângulos formados, o que acontece ao somarmos os ângulos internos?

____
____
____
____
____

Material utilizado na atividade 4.7:

Investigando as inclinações das rampas de acesso da escola:

1.Olhando para as rampas de acesso ao ginásio, ao palco das bandeiras e em frente ao bar da escola, qual delas vocês consideram mais inclinada? Como fizeram tal comparação? ____ ____

2. Estime o ângulo de inclinação das rampas de acesso do colégio, completando a tabela abaixo:

Rampa	Inclinação na base	Inclinação no topo
Ginásio		
Palco		
Bar		

3. Caso tenham estimados valores diferentes para a inclinação da base da rampa e do topo, justifique sua resposta.
____

____

4.Descreva como vocês farão para medir a inclinação da rampa de acesso ao ginásio (será necessário medir tal inclinação em dois pontos da rampa, um mais próximo da base e um mais próximo do topo): ____
____

5. Complete a tabela com as medições obtidas pelo seu grupo e o grupo dos colegas:

Rampa	Inclinação na base	Inclinação no topo
Ginásio		
Palco		
Bar		

6. O que podemos concluir desta atividade de investigação? As estimativas do grupo estavam próximas o valor real? As inclinações são iguais ou diferentes na base e no topo da rampa? Foi fácil medir a inclinação? As rampas tem todas a mesma inclinação? Por que têm ou não têm?____

Retomada da atividade 4.7:

1. Estime o ângulo de inclinação das rampas completando a tabela abaixo:

Rampa	Inclinação na base	Inclinação no topo
1		
2		
3		

2 .Caso tenha estimado valores diferentes para a inclinação da base da rampa e do topo, justifique sua resposta.

____

3. Complete a tabela com as medições obtidas pelo seu grupo e o grupo dos colegas:

Rampa	Inclinação na base	Inclinação no topo
1		
2		
3		

4. Foi fácil medir a inclinação? As rampas têm todas a mesma inclinação? Por que têm ou não têm? ____
____

5. No nosso cotidiano, onde encontramos inclinações tipo a rampa tipo 1? ____

E a rampa tipo 2? ____

E a rampa tipo 3? ____

Materiais utilizados na atividade 4.8:

1. Divida as pizzas de modo que os sabores sejam divididos igualmente em cada pizza e depois responda:
   a. Qual o ângulo correspondente ao sabor brigadeiro na primeira pizza? _____
   b. Em quantos sabores ficou dividida a segunda pizza? ___________________
      Qual o ângulo correspondente ao sabor calabresa? ____________________
      E ao sabor coração?___________
   c. Em quantos sabores ficou dividida a terceira pizza? ____________________
   d. Qual o ângulo correspondente ao sabor 4 queijos? ____________________
      E ao sabor frango? ______________E ao sabor strogonoff?______________
   e. Em quantos sabores ficou dividida a quarta pizza?_____________________
      Qual o ângulo correspondente a cada sabor desta pizza?________________

2. Se cada sabor for dividido em 4 fatias de mesmo tamanho, qual será o ângulo correspondente a cada fatia? (Complete na tabela)

SABOR	ÂNGULO	SABOR	ÂNGULO
Brigadeiro		Strogonoff	
Calabresa		Milho	
Coração		Marguerita	
4 queijos		Portuguesa	
Frango		Lombo	

3. Com base nas fatias e sabores acima, responda:
   a. Quando eu como mais: Uma fatia de pizza de brigadeiro ou duas fatias de pizza de strogonoff? Por quê? ____
   b. Comer 3 fatias de pizza portuguesa é o mesmo que comer duas fatias de pizza de frango? Porque? ____
   O que seria equivalente em tamanho a uma fatia de pizza de calabresa? ____

Seria possível montar uma pizza só com uma fatia de calabresa e as demais fatias de outros sabores (exceto coração)? Como? (Faça um desenho	Seria possível montar uma pizza com só uma fatia de pizza de frango e as demais fatias de outros sabores (exceto 4 queijos e strogonoff)? Como? (Desenhe)	Seria possível montar uma pizza contendo somente uma fatia da pizza de quatro sabores? (Faça um desenho) Caso não seja possível, explique.

APÊNDICE C – SUGESTÃO DE ATIVIDADES PARA A ABORDAGEM DO CONCEITO DE ÂNGULO

Neste apêndice apresentamos o produto técnico deste estudo. Trata-se de uma sugestão de sequência de atividades para a abordagem do tema “construção do conceito de ângulo”. Ressaltamos que as atividades apresentadas a seguir são flexíveis e não precisam ser seguidas rigorosamente, podendo ser adaptadas de acordo com o grupo de alunos, ambiente escolar ou espaço de tempo. Cabe destacar que o tema dessa sequência pode ser desenvolvido a partir do quarto ano do Ensino Fundamental, tendo como pré-requisito o conhecimento de operações com números naturais.

Atividade 1:

Objetivos

- Reconhecer a importância do tamanho da abertura com relação ao encaixe de peças.
- Explorar a lousa digital e o material manipulativo de modo que auxiliem os alunos no reconhecimento citado anteriormente.
- Discussão relativa a peças diferentes que encaixam no mesmo lugar e mais de uma peça composta poder equivaler a outra peça.

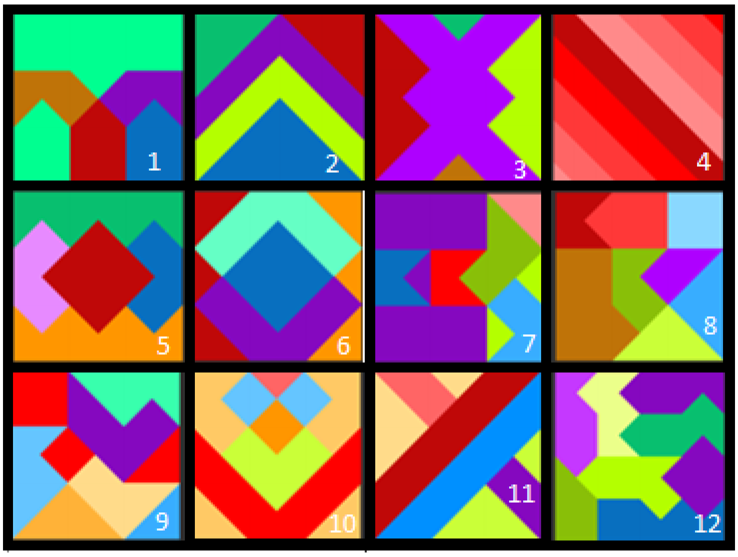
Procedimentos:

1º momento: Disponibilizar aos alunos o jogo *Power Blocks* [7]nos computadores do laboratório de informática e também o mesmo jogo usando peças físicas.

Os alunos devem trabalhar em duplas ou trios. Alguns grupos devem jogar no computador e alguns com o jogo físico e a discussão com o grande grupo ficará na lousa digital junto com os quebra-cabeças montados fisicamente. Cada grupo trabalhará ao mesmo tempo no mesmo desafio.

As figuras a serem construídas são as da figura seguinte.

[7] Disponível em http://www.clickjogos.com.br/jogos/powerblocks-2/ .



2º momento: Chamar os alunos à lousa para que montem os quebra-cabeças. Um de cada grupo, um por vez. Espera-se que os colegas ajudem a montar as figuras. Expor os quebra-cabeças montados no jogo físico e trabalhar com as seguintes questões:

- As figuras formadas são as mesmas?

- É possível montar figuras diferentes com as mesmas peças nos computadores? E no jogo físico?

- O que é preciso para conseguir montar os quebra-cabeças?

- Quais foram as figuras mais fáceis de fazer e por quê?

- Há alguma diferença da atividade na lousa para a atividade em papel?

Atividade 2: (dois encontros)

Objetivos:

- Reconhecimento de ângulos em objetos da vida cotidiana dos alunos.
- Verificação de como os alunos nomeiam os ângulos.
- Reprodução dos ângulos verificados nas figuras utilizando material manipulativo.
- Relacionar aberturas mostradas no objeto manipulativo aos ângulos presentes nas figuras.
- Organização das figuras com base nos ângulos apresentados.
- Discussões relativas a amplitude e congruência dos ângulos.

Procedimentos:

1º momento: Reconhecendo ângulos em objetos

Expor aos alunos figuras de objetos que contenham ângulos e também disponibilizá-las fisicamente para que possam ser manipuladas, como peças de quebra-cabeças. Questioná-los acerca de características em comum entre as figuras. Pode-se começar questionando os alunos sobre as figuras de duas em duas , ampliando para três ou quatro e finalizar a discussão procurando alguma característica comum a todas as figuras. Espera-se que o conceito de ângulo ou abertura seja mencionado. Caso não seja, o professor pode dar exemplos com base nas figuras, de modo a chamar atenção para os ângulos ou os movimentos possíveis de se fazer com os objetos.

2º momento: Com as figuras na lousa, pretende-se chegar à conclusão de que todas as figuras mostram ângulos. Observar como eles chamam ângulos, verificando se o conceito já foi previamente abordado.

3º momento: Mostrar o material manipulativo representando diferentes ângulos e em orientações diferentes das apresentadas nas figuras. Pedir que os alunos relacionem o ângulo mostrado com a abertura mostrada nos objetos. Repetir o procedimento com três ou quatro ângulos. Verificar se os alunos levam em consideração a orientação em que está sendo mostrado o ângulo no objeto.

4º Momento: Utilizando o material manipulativo formado por dois pedaços de e.v.a. e um colchete, indicar aos alunos um dos objetos elencado nas figuras e pedir que eles representem o ângulo mostrado no objeto utilizando o material manipulativo. Repetir o procedimento com três ou quatro objetos. Verificar se os alunos levam em consideração a orientação em que está sendo mostrado o ângulo no objeto.

5º momento: Pedir que os grupos organizem as figuras de acordo com as aberturas mostradas em cada objeto. Pedir que os alunos determine justifique os critérios de formação de cada grupo.

6º momento: Análise das organizações feitas pelos alunos. Fazer perguntas do tipo:

- Qual a razão para duas figuras estarem na mesma classificação? Pretende-se discutir que a figura é diferente, porém a abertura é a mesma.
- Dentro de um mesmo grupo, todas as figuras apresentam aberturas iguais?
- Selecionar pares de figuras e perguntar qual apresenta a maior abertura.
- Perguntar para os alunos se tem figuras que apresentam aberturas de mesmo tamanho.

7° momento: Pedir que os alunos organizem novamente as figuras, ordenando da menor para a maior abertura, utilizando o material manipulativo para comparar as figuras.

8º momento: Apresentar as seguintes figuras e perguntar se as aberturas mostradas são iguais. Verificar se os alunos se atêm à orientação e ao tamanho dos lados. Utilizar o material manipulativo para verificar se os ângulos possuem o mesmo tamanho.

Finalizar perguntando: O que dois ângulos precisam ter em comum para serem iguais? Abertura igual? Lados iguais? Mesma direção?

Atividade 3:

Objetivos:

- Relacionar frações da volta aos ângulos nela representados.
- Formalização de uma definição de ângulo, bem como suas classificações.
- Introduzir o conceito de grau.
- Aprender a utilizar o transferidor para medir ângulos.
- Medir ângulos na lousa digital e com o transferidor no papel.

Procedimentos:

1º momento: Apresentar aos alunos ângulos que representem ¼, ½, ¾ e 1 volta inteira e perguntar quanto mede o ângulo. Espera-se que os alunos respondam utilizando as frações da volta. Utilizar um relógio para mostrar os ângulos e começar com o de uma volta inteira.

2º momento: Individualmente, fazer os alunos jogar o jogo “Girando muito”.

Será necessário o objeto montado de e.v.a. com uma fita dupla face com um dos lados colados à mesa (posição inicial) e um dado com a seguinte legenda (combinar com os alunos a legenda a ser usada).

Exemplo de legenda:

1 ¼ de volta sentido horário

2 ½ de volta sentido horário

3 ¾ de volta sentido horário

4 ¼ de volta sentido anti-horário

5 ½ de volta sentido anti-horário

6 ¾ de volta sentido anti-horário

A ideia é que todos os alunos joguem, individualmente, executando o giro sorteado, até que se retorne novamente à posição inicial. A posição inicial será indiferente e todos os alunos chegarão à posição inicial ao mesmo tempo, não havendo um vencedor. Após a atividade, pretende-se discutir com os alunos as dificuldades do jogo e por quê, mesmo começando em posições diferentes, todos acabaram ao mesmo tempo.

3º momento: Formalizar uma definição de ângulo verificando as características verificadas nas atividades anteriores relativas a congruência e também as definições de ângulo agudo, obtuso raso e reto, utilizando as figuras da atividade anterior como exemplos para tais classificações, ainda não abordando a medida do ângulo (primeira parte do material de apoio desta atividade).

4º momento: Perguntar aos alunos como mediríamos os ângulos da vela do barco, da luminária, do cabide, do guarda-sol, do braço robótico, da cadeira, do relógio, da tesoura, da pedra e da torre, uma vez que eles não representam ¼, ½, ¾ e 1 volta inteira. Explicar o porquê do uso do grau e mostrar a volta dividida em 360 partes iguais (segunda parte do material de apoio desta atividade).

5° momento: Mostrar o transferidor e explicar seu uso com exemplos na lousa (desenhos) (terceira parte do material de apoio desta atividade).

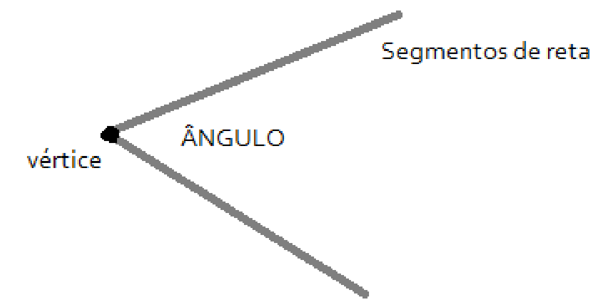
6° momento: Solicitar que os alunos façam a medição dos ângulos das figuras trabalhadas na aula anterior e oferecer que venham até a lousa para medir usando o transferidor da lousa (quarta parte do material de apoio). Efetuar a correção na lousa esclarecendo eventuais dúvidas na utilização do transferidor.

7º momento: Relacionar as frações da volta com seus respectivos ângulos bem como introduzir as classificações de ângulo raso, reto, agudo e obtuso através da explicação da professora, utilizando a noção da medida do ângulo para determinar a classificação (quinta parte do material de apoio).

Material a ser utilizado pelos alunos na atividade 3:

Parte 1:

Denominamos ângulo uma região do plano limitada por duas semirretas (ou segmentos) de mesma origem. Podemos entendê-lo também como sendo o resultado da rotação de uma semirreta/segmento em torno de sua origem, com relação à outra semirreta/segmento. As semirretas (ou segmentos) recebem o nome de lados do ângulo e a origem delas, de vértice do ângulo.



Para que dois ângulos sejam tenham a mesma medida precisamos que a “abertura” entre as semirretas seja a mesma, independentemente do tamanho dos lados dos ângulos e de sua orientação.

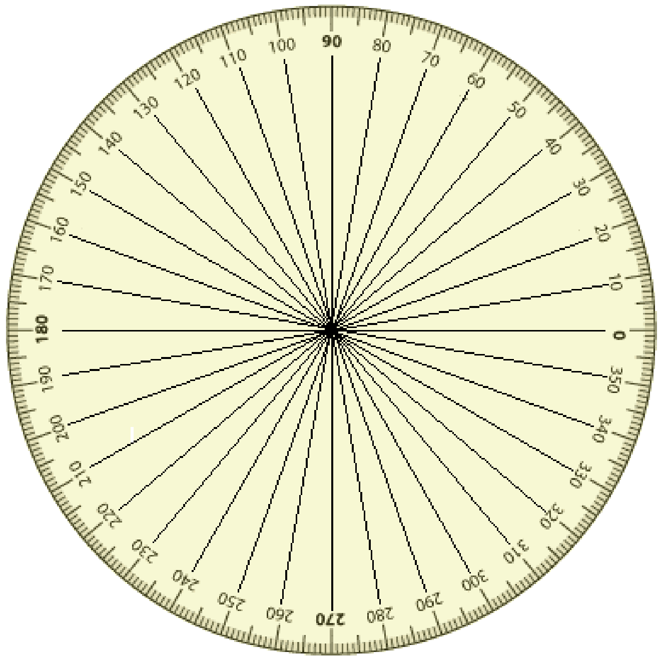
Para medir a “abertura” de um ângulo imaginamos que uma semirreta gira em torno da origem até se sobrepor à outra. Esse giro é uma fração da volta inteira, que a semirreta faz até voltar à sua posição inicial. A medida da “abertura” é a medida do giro.

Ângulos com “abertura” menor que um quarto de volta, recebem o nome de ângulo agudo. Ângulos com abertura maior que um quarto de volta, mas menor do que meia volta, recebem o nome de ângulo obtuso. O ângulo formado pela abertura de um quarto de volta é chamado de ângulo reto e o ângulo de meia volta é chamado de ângulo raso.

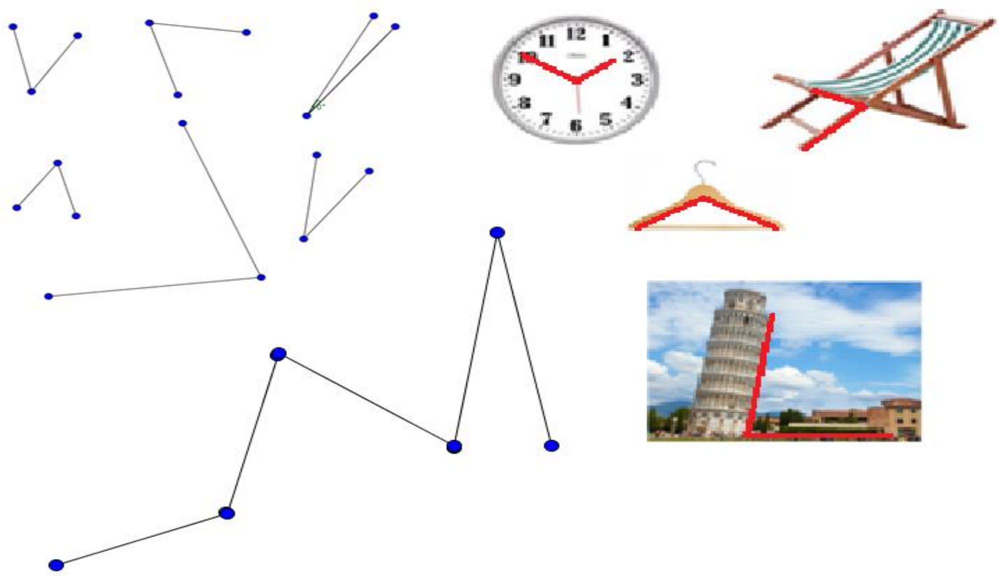
Parte 2:

O grau é originário da Babilônia. Para estabelecerem o grau, os babilônios dividiram o círculo em 360 partes iguais, pois acreditavam que essa era a quantidade de dias referente ao período de um ano e porque seu sistema de numeração era de base sessenta ou sexagesimal.

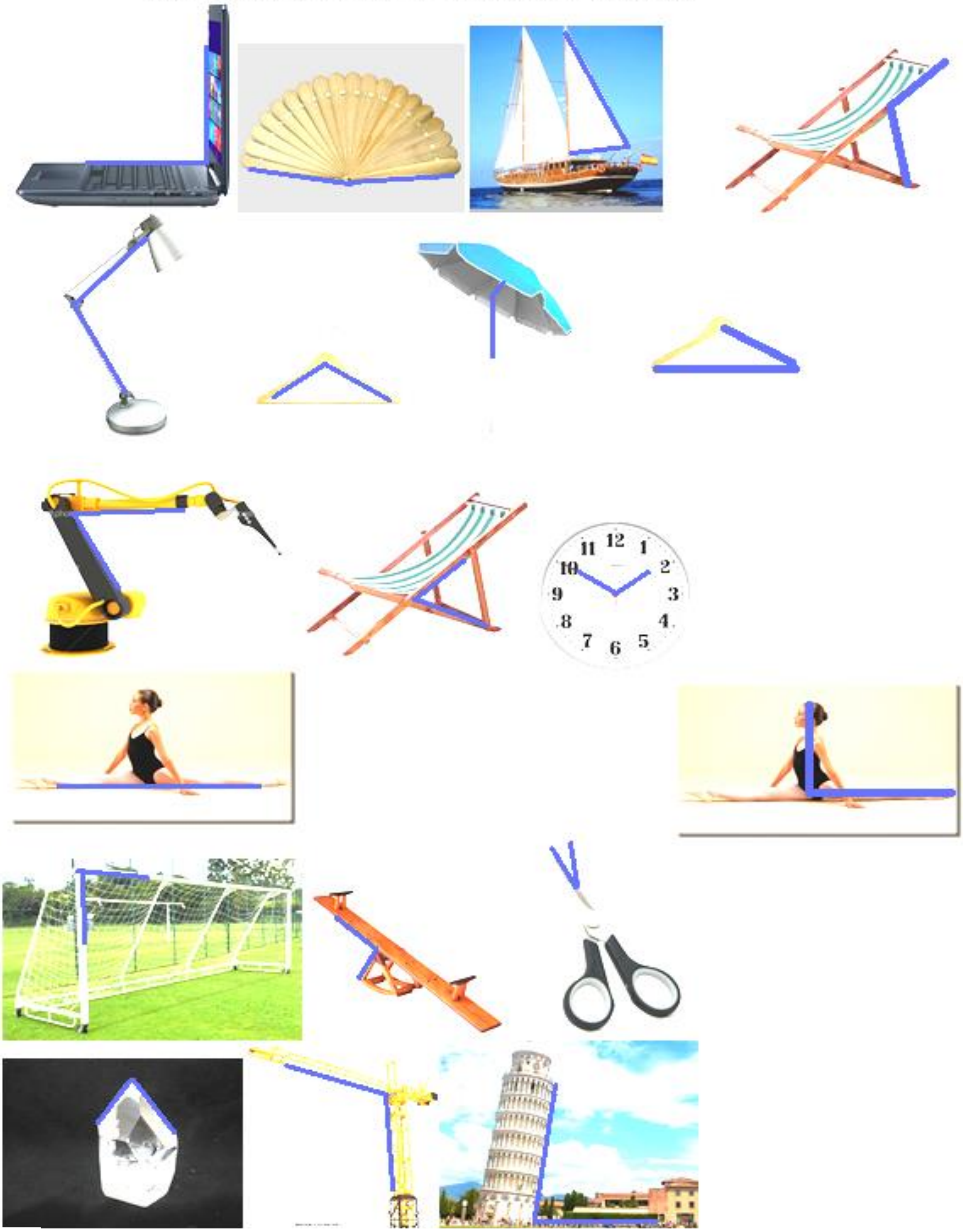
Outra motivação para escolher o número 360 pode ser porque ele tem 24 divisores. Além disso, 360 é divisível pelos números de 1 a 10, com exceção de 7. Esta propriedade tem diversas aplicações práticas, tal como dividir o planeta em 24 fusos horários, cada um com 15° de longitude, correlacionando com a convenção estabelecida do dia de 24 horas.



Parte 3:



Parte 4:



Parte 5:

Ângulos com “abertura” menor que _______ou________, recebem o nome de ângulo agudo. Ângulos com abertura maior que_________ou__________ mas menor do que _______ou______, recebem o nome de ângulo obtuso. O ângulo formado pela abertura de _________ou________ é chamado de ângulo reto e o ângulo de _______ou_______é chamado de ângulo raso.

Atividade 4:

Objetivos:

- Estimar ângulos;
- Abordar ângulos no contexto de jogos virtuais;
- Contextualizar o conceito de ângulo a voltas e giros, através de modalidades de atletismo;
- Construção de ângulo.

Procedimentos:

1º momento: Jogar junto com os alunos na lousa digital o jogo *Alien Angle* [8]. Solicitar a participação dos alunos para indicar o ângulo de abertura, porém, os alunos precisarão justificar o valor utilizado. Espera-se que os alunos consigam estimar o valor dos ângulos a partir do posicionamento do aliem (boneco posicionado na tela de modo que a partir da abertura do ângulo se atinja o aliem), sem que façam o uso do transferidor.

2º momento: Disponibilizar aos alunos o jogo Ângulos[9] na lousa digital e jogar com os alunos.

Objetivo: Esta atividade será desenvolvida para que os alunos pratiquem a medição dos ângulos com o uso do transferidor de uma maneira diferente e também para que, a partir das atividades, relacionem a medição de ângulos em voltas com seu valor em graus.

3º momento: Conversar com os alunos sobre esportes e perguntar se seria necessário entender ângulos para a prática de algum esporte. Espera-se que entre os esportes citados, os arremessos de dardo, disco, peso e martelo sejam citados.

4º momento: Mostrar o vídeo https://www.youtube.com/watch?v=9jD3NEGU6bw (até 1:45) para os alunos e entender o que o vídeo fala sobre os giros. Conhecer melhor as modalidades descritas no vídeo a partir de um resumo levado pela professora (em anexo).

5º momento: Pedir que os alunos, com base no vídeo e na leitura, completem a seguinte tabela:

MODALIDADE	QUANTIDADE DE GIROS	QUANTIDADE EM GRAUS
Arremesso de disco		

[8] http://www.mathplayground.com/alienangles.html.
[9] http://imagem.casadasciencias.org/online/37952100/Angulos.swf

Lançamento de peso		
Arremesso de martelo		

Breve discussão ampliando o conceito. Questionar aos alunos qual seria o maior e o menor ângulo que existe. Se existe diferença em girar no sentido horário e anti-horário.

6º momento: Disponibilizar aos alunos giz, transferidor de quadro e pedir para que desenhem a área de lançamento para praticar. Espera-se verificar se os alunos sabem desenhar ângulos utilizando o transferidor e suas estratégias para tal atividade.

7º momento: A atividade será finalizada com a prática das modalidades olímpicas trabalhadas. Para o disco será utilizada dois discos de papelão preenchidos com areia, para o arremesso de peso será utilizada uma bola de meia, cheia de areia e para o martelo esta mesma bola porém, com uma corda para efetuar o arremesso.

Material utilizado pelos alunos na atividade 4:

Arremesso de peso é uma modalidade do atletismo, onde os atletas competem para arremessar uma bola de metal o mais longe possível. Ao contrário do lançamento de dardo, martelo e disco, este esporte é chamado oficialmente de arremesso devido ao fato do peso ser empurrado e os demais serem projetados com características diferentes.

O arremessador tem uma área restrita circular de diâmetro 2,135 m (7 pés) para se locomover, com um anteparo semicircular de 10 cm de altura no limite frontal dela; no início do lançamento, o peso deve estar colocado entre o ombro e o pescoço do atleta e arremessado com as pontas dos dedos, e não com a palma da mão. Durante o lançamento, o atleta deve dar meia volta sobre si mesmo e arremessar. A marca obtida em cada arremesso é medida a partir do primeiro lugar onde o peso bater no chão, dentro de um setor pré-determinado com 35° de abertura; o atleta não pode tocar no anteparo do chão, nem ultrapassá-lo com o pé e o arremesso deve ser sempre feito numa linha acima do ombro. Caso ele deixe o círculo antes do peso tocar o solo ou se retirar dele pela frente ou pelo lado, o arremesso é invalidado.

Lançamento de disco consiste em lançar um disco de metal à maior distância possível. O disco usado é um prato de metal com a forma de um círculo com o diâmetro de 22 cm. Na prova masculina, o disco mede entre 219 e 221 mm de diâmetro e de 44 a 46 mm de espessura e pesa 2 kg. Na modalidade feminina, mede entre 180 e 182 mm de diâmetro e de 37 a 39 mm de espessura, pesando 1 kg. O lançamento é feito de dentro de um círculo de 2,5 m de diâmetro no chão, margeado por um anteparo de concreto de 2 cm de altura. O atleta segura o disco plano contra os dedos da mão e o antebraço do lado do lançamento, gira sobre si mesmo rapidamente e lança o disco ao ar estendendo o braço.

Lançamento de martelo:

É feito com o atleta posicionado dentro de uma base de concreto circular de 2,135 metros de diâmetro, com um anel metálico ressaltado marcando o diâmetro limite. Para que a distância seja medida, o lançamento precisa ser feito de maneira a que o implemento caia dentro de uma área marcada num ângulo de 34,92° à frente e o atleta não pode sair do círculo antes que o martelo toque o chão após o lançamento.

O movimento de lançamento pode ser divido em três etapas distintas, o molinete, o giro e o lançamento. O movimento é iniciado com o atleta virado de costas para a trajetória do lançamento, segurando a manopla com as duas mãos e mantendo os pés imóveis. O atleta gira o martelo sobre a sua cabeça, a fim de dar velocidade ao implemento. Em sequência ao molinete, o atleta gira sobre o próprio corpo, mantendo a trajetória circular já iniciada do martelo. Ao final do último giro, o atleta bloqueia o movimento do seu corpo, fazendo uma alavanca e lançando o martelo. Essa puxada final é onde o atleta imprime maior força, e geralmente onde se conclui a trajetória de direção e ângulo de lançamento.

Atividade 5:

Objetivos:

- Revisão de estimativas e medições de ângulo;
- Investigação acerca da condição de existência dos triângulos e suas propriedades.

Procedimentos:

1º Momento: A partir de posições de ioga, pedir que os alunos identifiquem posições onde apareçam ângulos iguais, ângulos agudos, ângulos obtusos, etc. Escolher alguns ângulos para serem estimados, efetuando a posterior verificação das estimativas na lousa digital com o transferidor virtual.

2º momento: Disponibilizar aos alunos as tiras de e.v.a e um roteiro a ser seguido na aula (em anexo). Perguntar se com qualquer um daqueles pedaços é possível se construir triângulos. Na lousa digital, no *software* Geogebra serão disponibilizados os mesmos conjuntos de segmentos de modo a efetuar tal tentativa também na lousa. Os tamanhos das tiras de e.v.a. serão 20, 10, 15 e 6 cm. Para os triângulos possíveis, os alunos deverão medir os seus ângulos internos. Cada um dos três grupos tentará montar uma coleção de triângulos de acordo com a tabela a seguir:

20,20,20	10,10,10	15,15,15
6,6,6	15,15,6	20,20,15
20,20,6	6,6,10	10,10,15
15,15,20	20,15,6	10,6,15
10,10,6	15,15,10	20,10,6
6,6,15	20,20,10	15,15,6
20,10,15	6,6,20	10,10,20

Espera-se trabalhar a condição de existência dos triângulos esperando que essa descoberta venha da tentativa dos alunos de montar triângulos utilizando o material manipulativo disponibilizado ou na lousa digital, e ainda, pedir se os alunos verificaram alguma similaridade (espera-se que eles identifiquem que a soma dos ângulos internos é sempre 180°, que os ângulos da base são iguais em triângulos isósceles e que os triângulos equiláteros possuem três ângulos iguais).

Material a ser utilizado na atividade 5:

Cada grupo possui três segmentos nos tamanhos 20 cm (azul), 15 cm (amarelo), 10 cm (rosa) e 6 cm (lilás). Tente montar triângulos de acordo com os tamanhos indicados, faça um esboço da montagem e, caso tenha conseguido montar o triângulo, meça os ângulos internos do triângulo com transferidor.

Esboço da montagem e medida dos ângulos internos (se possível)	**SOMA**
20, 20, 20	
6, 6, 6	
20, 20, 6	
20, 10, 15	

10, 10, 6	
6, 6, 15	
15, 15, 20	

Há alguma relação entre conseguir formar os triângulos e os tamanhos dos lados? E com relação aos ângulos? Nos triângulos formados, o que acontece ao somarmos os ângulos internos?

____

____

____

____

____

Atividade 6:

Objetivos:

- Utilização de rampas para trabalhar o conceito de inclinação e sua relação com ângulos;
- Operar com ângulos a partir da situação concreta da montagem de pizzas com fatias de diferentes tamanhos.

Procedimentos:

1º momento: Breve discussão com os alunos. Perguntar aos alunos onde existem rampas e suas utilizações, podendo se utilizar exemplos como os mostrados nas figuras a seguir.

Perguntar se todas elas são iguais (pode-se utilizar como exemplos as rampas de acesso que existem na escola, sendo comum terem extensões diferentes porém a mesma inclinação, e ainda perguntar qual a diferença entre a rampa da escola e a da pista de skate). Essa conversa tem por objetivo verificar os diferentes usos das rampas e ainda as diferenças entre elas. A partir dos exemplos, solicitar que os alunos respondam quais as principais diferenças entre as rampas, objetivando que a inclinação apareça entre as respostas.

2° momento: Verificar a relação entre inclinação e ângulo. Mostrar dois desenhos de rampas e verificar que mudança de uma para outra fez com que uma se tornasse mais inclinada (Pode ser feita uma rampa animada no Geogebra para mostrar tais mudanças). Utilizar o desenho de uma rampa para mostrar como a inclinação depende do ângulo.

3° momento: Características das rampas. Conversar com os alunos sobre a inclinação na base e no topo da rampa. Incentivar, utilizando a lousa digital, que os alunos percebam que esse ângulo de inclinação é sempre o mesmo. Colocar duas rampas com mesma inclinação e comprimentos diferentes e questionar os alunos quanto à sua inclinação. Verificar que a inclinação é a mesma.

4º Momento: Operando com ângulos. Conversar com os alunos sobre pizza, se os alunos gostam e quais sabores. Entrar no assunto de tele-entrega de pizzas e tamanhos disponíveis. Verificar com os alunos quantas fatias terá cada pizza.

5º momento: Propor aos alunos um roteiro de atividades (em anexo) em que pizzas serão repartidas e é necessário operar com as fatias. Os alunos poderão utilizar discos de pizza para auxiliar o raciocínio. Após cada etapa dessa atividade, os resultados obtidos serão expostos na lousa digital, utilizando o software Geogebra.

Materiais utilizados na atividade 6:

1.Divida as pizzas de modo que os sabores sejam divididos igualmente em cada pizza e depois responda:

a. Qual o ângulo correspondente ao sabor brigadeiro na primeira pizza? ________

b. Em quantos sabores ficou dividida a segunda pizza? ______________________

c. Qual o ângulo correspondente ao sabor calabresa? _______________________

d. E ao sabor coração?____

e. Em quantos sabores ficou dividida a terceira pizza? ______________________

f. Qual o ângulo correspondente ao sabor 4 queijos? ________________________

g. E ao sabor frango? _____________ E ao sabor strogonoff?_________________

h. Em quantos sabores ficou dividida a quarta pizza?________________________

i. Qual o ângulo correspondente a cada sabor desta pizza?__________________

2.Se cada sabor for dividido em 4 fatias de mesmo tamanho, qual será o ângulo correspondente a cada fatia? (Complete na tabela)

SABOR	ÂNGULO	SABOR	ÂNGULO
Brigadeiro		Strogonoff	
Calabresa		Milho	
Coração		Marguerita	
4 queijos		Portuguesa	
Frango		Lombo	

3.Com base nas fatias e sabores acima, responda:

a. Quando eu como mais: Uma fatia de pizza de brigadeiro ou duas fatias de pizza de strogonoff? Por quê? ____

b. Comer 3 fatias de pizza portuguesa é o mesmo que comer duas fatias de pizza de frango? Porque? ____

c. O que seria equivalente em tamanho a uma fatia de pizza de calabresa?
____

Seria possível montar uma pizza só com uma fatia de calabresa e as demais fatias de outros sabores (exceto coração)? Como? (Faça um desenho	Seria possível montar uma pizza com só uma fatia de pizza de frango e as demais fatias de outros sabores (exceto 4 queijos e strogonoff)? Como? (Desenhe)	Seria possível montar uma pizza contendo somente uma fatia da pizza de quatro sabores? (Faça um desenho) Caso não seja possível, explique.