Beiträge zur Struktur der Rechnerarithmetik

(Dr. rer. nat.)

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
von der Fakultät für Mathematik
der Universität Karlsruhe

genehmigte
Dissertation

von

Dipl.-Math. Dalcidio M. Claudio
aus Rio de Janeiro/Brasilien

Tag der mündlichen Prüfung: . . . . 11. Mai 1979
Referent: . . . . Prof. Dr. U. Kulisch
Korreferent: . . . . Priv.-Doz. Dr. Ch. Ullrich

Druck: O. Berenz, 7500 Karlsruhe 1

Diese Dissertation habe ich im Rahmen eines dreijährigen Promotionsstipendiums des Ökumenischen Studienwerks Bochum am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Karlsruhe angefertigt.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und die stetige und verständnisvolle Förderung möchte ich Herrn Professor Dr.U. Kulisch sehr herzlich danken.

Besonderer Dank gebührt auch den Mitarbeitern des Instituts für Angewandte Mathematik, vorallem Herrn Dr.E.Kaucher, deren unermüdliche Diskussionsbereitschaft eine große Hilfe für mich bedeutete. Gleichermaßen schulde ich Dank Herrn Privat-Dozent Dr.Ch.Ullrich für die freundliche übernahme des Korreferats.

An dieser Stelle möchte ich auch meiner Frau Vera, der ich diese Arbeit widme, für ihr großes Engagement und Anteilnahme an meiner Promotion danken.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wenn man heute Rechenanlagen zum Zweck des numerischen Rechnens benutzt, ist es unerläßlich, die Arithmetiken und deren Strukturen zu kennen und zu beherrschen.

Die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit beschäftigen sich mit der Frage nach der Struktur der bei numerischen Rechnen mit Rechenanlagen auftretenden Räume, d.h. welche mathematischen Eigenschaften eine Rechenanlage besitzt.

Numerische Algorithmen lassen sich auf einer Rechenanlage im allgemeinen nicht exakt durchführen, da solche numerische Algorithmen in der Regel im Raum $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, der Vektoren $V\mathbb{R}$, der Matrizen $M\mathbb{R}$, der komplexen Räume $\mathbb{C}$, $V\mathbb{C}$, $M\mathbb{C}$ oder der Intervallräume $\mathbb{I}\mathbb{R}$, $\mathbb{I}V\mathbb{R}$, $\mathbb{I}\mathbb{C}$, $\mathbb{I}V\mathbb{C}$, $\mathbb{I}M\mathbb{C}$ (siehe zweite Spalte in Tabelle 1) definiert und hergeleitet werden und keine Isomorphismen zwischen diesen Definitionsmengen und der entsprechenden Menge der Maschinenzahlen existieren. Daher wird das Rechnen mit reellen Zahlen in einem Teilsystem T (z.B. dem System der einfachlangen Gleitkommazahlen einer gegebenen Rechenanlage) oder S (z.B. dem System der doppeltlangen Gleitkommazahlen einer gegebenen Rechenanlage) mit $\mathbb{R} \supset S \supset T$ approximiert. Wir kommen so zu den Räumen VT, MT, $\mathbb{I}T$, $\mathbb{I}VT$, $\mathbb{I}MT$, $\mathbb{C}T$, $V\mathbb{C}T$, $M\mathbb{C}T$, $\mathbb{I}\mathbb{C}T$, $\mathbb{I}V\mathbb{C}T$, $\mathbb{I}M\mathbb{C}T$, sowie zu den entsprechenden Räumen über S (siehe die dritte und vierte Spalte in Tabelle 1).

		$\mathbb{R}$	$\supset$	S	$\supset$	T
		$V\mathbb{R}$	$\supset$	VS	$\supset$	VT
		$M\mathbb{R}$	$\supset$	MS	$\supset$	MT
$\mathbb{P}\mathbb{R}$	$\supset$	$\mathbb{I}\mathbb{R}$	$\supset$	$\mathbb{I}S$	$\supset$	$\mathbb{I}T$
$\mathbb{P}V\mathbb{R}$	$\supset$	$\mathbb{I}V\mathbb{R}$	$\supset$	$\mathbb{I}VS$	$\supset$	$\mathbb{I}VT$
$\mathbb{P}M\mathbb{R}$	$\supset$	$\mathbb{I}M\mathbb{R}$	$\supset$	$\mathbb{I}MS$	$\supset$	$\mathbb{I}MT$
		$\mathbb{C}$	$\supset$	$\mathbb{C}S$	$\supset$	$\mathbb{C}T$
		$V\mathbb{C}$	$\supset$	$V\mathbb{C}S$	$\supset$	$V\mathbb{C}T$
		$M\mathbb{C}$	$\supset$	$M\mathbb{C}S$	$\supset$	$M\mathbb{C}T$
$\mathbb{P}\mathbb{C}$	$\supset$	$\mathbb{I}\mathbb{C}$	$\supset$	$\mathbb{I}\mathbb{C}S$	$\supset$	$\mathbb{I}\mathbb{C}T$
$\mathbb{P}V\mathbb{C}$	$\supset$	$\mathbb{I}V\mathbb{C}$	$\supset$	$\mathbb{I}V\mathbb{C}S$	$\supset$	$\mathbb{I}V\mathbb{C}T$
$\mathbb{P}M\mathbb{C}$	$\supset$	$\mathbb{I}M\mathbb{C}$	$\supset$	$\mathbb{I}M\mathbb{C}S$	$\supset$	$\mathbb{I}M\mathbb{C}T$

Tabelle 1 : Übersicht über die beim numerischen Rechnen auftretenden Räume

In Kulisch [12] wurde ein A-Ringoid (dort als Ringoid bezeichnet) als algebraische Struktur mit zwei 2-stelligen inneren Verknüpfungen, einer Addition und einer Multiplikation, welche gewisse Minimalforderungen erfüllen, definiert. Diese Arbeit [12] hat als wichtigste Aufgabe, die Rechnerarithmetik axiomatisch zu beschreiben.

In der vorliegenden Arbeit haben wir u.a. (D5) und (D6) modifiziert mit dem Ziel Beweise und Eigenschaften zu vereinheitlichen und zu vereinfachen.

- Es wird in (D5) gegenüber [12] die Eigenschaft "$x + e = o$" dazugenommen, d.h. es wird gefordert, daß das Element "x", das (D5) erfüllt, eine additive Inverse besitzt

- das Element "x" in (D6) kann gleich "e" sein (das ist z.B. der Fall, wenn $\{ R,+,\cdot\}$ ein Boolescher Ring ist).

Die damit erreichten wesentlichen Ergebnisse sind in Tabelle 2 Seite 24 ermittelt. Grundsätzlich konnten folgende Dinge erreicht werden:

- alle Strukturen, die in [12] beschrieben werden, lassen sich auch jetzt beschreiben.
- Beweise von Sätzen werden gelegentlich kürzer und in manchen Fällen unter schwächeren Voraussetzungen durchführbar. Beispielsweise läßt sich die Komplexifizierung eines Ringoids ohne Ordnungsstruktur durchführen.

Im ersten Kapitel wird zunächst die neue Definition eines Ringoids angegeben und Untersuchungen über diese Strukturen durchgeführt. Hier wird gezeigt, daß z.B. ein Ring mit Einselement ein Ringoid bildet, was bereits eine wesentliche Vereinheitlichung des Begriffes Ringoid bedeutet. Ferner kann der Beweis für die Eindeutigkeit des Elements "x", das (D5) erfüllt, bei Komplexifizierung ohne Ordnungsstruktur durchgeführt werden und beispielsweise der Beweis, daß die Matrizen über einem Ringoid wieder ein Ringoid bilden, in einfacherer und kürzerer Weise geführt werden.

Im zweiten Kapitel wird das Ringoid zu einem geordneten Ringoid ergänzt. Der Satz 2.1.5 bringt eine wesentliche Verallgemeinerung des Satzes 4.4 von [12] in dem Sinne, daß die Struktur $\{ R,+,\cdot\}$ nicht linear geordnet sein muß, sondern die Teilmenge $X =\{ x \in R \mid$ x erfüllt (D5) $\}$ eine gewisse Ordnung erfüllt.

Im dritten Kapitel erstellen wir mit dem Begriff Vektoid ein allgemeines Konzept mathematischer Strukturen mit äußeren Verknüpfungen, wobei wir im Unterschied zu [12] auf der neuen Definition des Ringoids aufbauen.

Im vierten Kapitel zeigen wir, daß die Abbildung $\square : R \longrightarrow T$ einer Menge R in ein Raster T mit den Eigenschaften

(R1)	$\bigwedge_{a \in T}$	$\square a = a$	Rundung
(S)	$\bigwedge_{a \in T}$	$-a \in T$	
(R2)	$\bigwedge_{a,b \in R}$	$(a \le b \implies \square a \le \square b)$	monoton
(R4)	$\bigwedge_{a \in R}$	$\square(-a) = -\square a$	antisymmetrisch
(RG)	$\bigwedge_{a,b \in T}$	$a \boxed{\star} b := \square(a \star b)$	für alle $\star \in \{ +,-,\cdot,/ \}$ in R

und zugeordneten $\boxed{\star}$ in T

die Struktur eines (schwach) geordneten Ringoids oder Vektoids invariant lassen. Hier stellt der Satz 4.2.3 eine Verallgemeinerung des Satzes 4.5 von [12] im Sinn von Satz 2.1.5 dar.

Im fünften Kapitel werden die bereits bekannten Ergebnisse, daß die Intervalle über einem vollständig geordneten Ringoid wieder ein vollständig geordnetes Ringoid bilden, in einfacher und einleuchtender Weise hergeleitet. Dies zeigt sich besonders im Spezialfall der Intervallmatrizen, die ein vollständig geordnetes Ringoid bilden. Darüberhinaus wird in diesem Kapitel der Übergang zu einem Raster unter neuen Gesichtspunkten untersucht.

Im sechsten Kapitel wird eine Abbildung eines Ringoids in geordnete Mengen definiert. Diese Abbildung erreicht eine wesentliche Verallgemeinerung des Satzes 4.1o von [12] in dem Sinn, daß die Grundmenge nicht unbedingt die Menge von reellen Zahlen sein muß, sondern z.B. ein Ringoid sein kann. Somit kann eine große Klasse von rundungsinvarianten Strukturen erfaßt werden.

1. RINGOIDE

Die Durchführung eines Algorithmus auf einer Rechenanlage führt im allgemeinen nur zu einer Näherungslösung des gegebenen Problems.

Der Grund liegt darin, daß man das Rechnen mit reellen Zahlen auf einer Rechenanlage in einer endlichen Teilmenge, den sogenannten Gleitkommazahlen mit einer endlichen Ziffernzahl in Mantisse und Exponent, durchführt.

Dieses System genügt anderen Gesetzen als die reellen Zahlen.

Es ist daher von größtem Interesse, die mathematischen Eigenschaften von Rechenanlagen zu untersuchen.

Zu diesem Zweck führen wir zunächst den Begriff des Ringoids ein.

1.1 Einführung in die Ringoide

Definition 1.1.1

Es sei R eine nichtleere Menge, in der zwei zweistellige Verknüpfungen, die wir als Addition (+) und Multiplikation (.) bezeichnen, erklärt sind.

{ R,+,. } heißt ein Ringoid, wenn gilt

(D1) $\bigwedge_{a,b \in R} \quad a + b = b + a$

(D2) $\bigvee_{o \in R} \quad \bigwedge_{a \in R} \quad a + o = a$

(D3) $\bigvee_{e \in R\setminus\{o\}} \quad \bigwedge_{a \in R} \quad a.e = e.a = a$

(D4) $\bigwedge_{a \in R} \quad a.o = o.a = o$

(D5) Es existiert ein Element $x \in R$, so daß gilt

(a) $x + e = o$

(b) $x.x = e$

(c) $\bigwedge_{a,b \in R} \quad x.(a.b) = (x.a).b = a.(x.b)$

(d) $\bigwedge_{a,b \in R} \quad x.(a+b) = x.a + x.b$

(D6) Es gibt genau ein Element $x \in R$, für welches (D5) gilt.

Ein Ringoid $\{R,+,.\}$ heißt ein Divisionsringoid, i.Z. $\{R,N,+,.,/\}$, wenn darüber hinaus in R eine Division (/) erklärt ist (mit $o \in N \subset R$) mit folgenden Eigenschaften:

(D7) $\bigwedge_{a \in R} \quad a/e = a$

(D8) $\bigwedge_{a \in R \setminus N} \quad o/a = o$

(D9) Es existiert ein Element $x \in R$, welches außer (D6) auch die Eigenschaft

$\bigwedge_{a \in R} \; \bigwedge_{b \in R \setminus N} \quad x.(a/b) = (x.a)/b = a/(x.b)$ erfüllt.

□

<u>Bemerkungen</u>

1) Sei $\{R,+,.\}$ eine Struktur, die (D1),(D2),(D3),(D4) genügt. Dann bezeichnen wir mit X bzw. X_A die Menge derjenigen Elemente aus R, die (D5 a,b,c,d) bzw. (D5 b,c,d) erfüllen.

2) Kulisch verlangt (D5a) in seinem Buch [12] nicht. Dort wurde ein Ringoid folgendermassen definiert : $\{R,+,.\}$ heißt ein Ringoid wenn (D1) bis (D4) gelten und es ausser $e \in R$ genau ein $x \in R$ gibt, welches (D5 b,c,d) genügt. Diese Struktur bezeichnen wir als A-Ringoid.

3) Im Gegensatz zu [12] verlangen wir nicht $x \neq e$. Dadurch und mit (D5a) ist, wie wir später sehen werden (Satz 1.1.4), jeder Ring mit Einselement bereits Ringoid und der Zusammenhang zwischen beiden Strukturen wird klarer (siehe Beispiele 1.1.1 und 1.1.2).

In einem Ringoid R besteht die Menge X also aus einem Element $\{e\}$ oder $\{-e\}$ je nachdem, ob $x = e$ gilt oder nicht. Im A-Ringoid hingegen immer aus zwei: $X_A = \{ -e , e \}$.

4) Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Verknüpfung gemeint ist, schreibt man statt a.b meist nur ab .

Definition 1.1.2

Es sei $\{ R,+,. \}$ ein Ringoid. Dann erklären wir in R einen Minusoperator und eine Subtraktion durch

$$\bigwedge_{a \in R} -a : = xa$$

$$\bigwedge_{a,b \in R} a - b := a + (- b)$$

□

Satz 1.1.3

Es sei $\{ R,+,. \}$ ein Ringoid. Dann gilt :

i) o bzw. e in (D2) bzw. (D3) ist eindeutig bestimmt

ii) $e \neq o$ und $-e \neq o$.

□

Eine wesentliche Vereinheitlichung des Begriffs Ringoid wurde durch die Hinzunahme der Eigenschaft (D5a) erreicht, wie im nachfolgenden Satz 1.1.6 deutlich wird. Zunächst betrachten wir jedoch zwei Beispiele.

Beispiel 1.1.4

Es sei $P^n[x]$ die Menge der Polynome n-ten Grades mit reellen Koeffizienten.

Für $F(x) = \sum_{j=o}^{n} f_j x^j$, $G(x) = \sum_{j=o}^{n} g_j x^j$ aus $P^n[x]$

erklären wir eine Addition und eine Multiplikation wie folgt :

a) $(F + G)(x) := \sum_{j=o}^{n} (f_j + g_j) x^j$.

b) $(F . \hat{g})(x) := \sum_{i=o}^{2n} (\sum_{u=o}^{i} f_u \cdot g_{i-u}) x^i$.

Die Multiplikation in $P^1[x]$ führt nach $P^2[x]$ und wir wollen dieses Produkt mittels des Bernsteinspolynoms durch ein Element aus $P^1[x]$ darstellen, d.h. durch

c) $B_n (f ; x) := \sum_{k=o}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ mit $n=1$

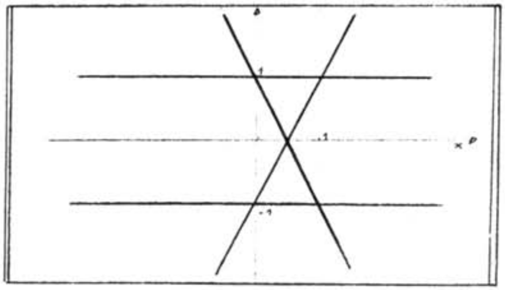
Für $F(x) = f_o + f_1 x$, $G(x) = g_o + g_1 x$ erhält man

$(F . G) (x) = f_o g_o + (f_1 g_o + f_o g_1) x + f_1 g_1 x^2$

Die Multiplikation $\odot$ in $P^1[x]$ definieren wir nach c) durch $(F \odot G) (x) = f_o g_o + (f_1 g_1 + f_1 g_o + f_o g_1) x$

Die Struktur $\{ P^1[x] , + , \odot \}$ ist ein Ring aber kein A-Ringoid, da die Gleichheit $(F \odot F_1) (x) = E (x)$ mit $F(x) = f_o + f_1 x$ und $E(x) = 1 + ox$ in $P^1[x]$ die Lösungsmenge $X = \{ -1 , 1 - 2x, -1 + 2x , 1 \}$ hat und diese Elemente auch (D5c) und (D5d) erfüllen (siehe FIGUR 1) , d.h. $\#(X_A) = 4$.

Gleichwohl ist $\{ P^1[x] , + , \odot \}$ ein Ringoid, da die Gleichung $F(x) + E(x) = o$ die eindeutige Lösung $F(x) = -1 + ox$ hat.

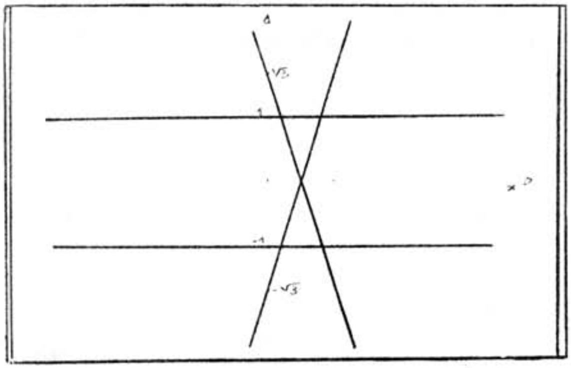


FIGUR 1 - Geometrische Darstellung der Lösungsmenge.

<u>Beispiel 1.1.5</u>

Ein anderes Beispiel findet man in [7] . Dort wurde das Produkt (F . G) (x) mittels der Methode der kleinsten Quadrate durch ein Element aus $P^1[x]$ approximiert.

In diesem Fall hat die Lösungsmenge folgende geometrische Darstellung (FIGUR 2)



FIGUR 2 - Geometrische Darstellung der Lösungsmenge

mit $(F \boxdot G) (x) = f_0 g_0 - \frac{1}{6} f_1 g_1 + (f_0 g_1 + f_1 g_0 + f_1 g_1) x$

und $X_A = \{ -1 , -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\, x , \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\, x , 1 \}$

Folglich ist $\{ P^1[x] , + , \boxdot \}$ wieder kein A-Ringoid.

Da $F(x) = -1 + o\, x$ das einzige Element aus X_A ist, daß das Axiom (D5a) erfüllt, ist der Ring $\{ P^1[x], + , \boxdot \}$ nach Definition 1.1.1 ein Ringoid.

Im allgemeinen haben wir den

<u>Satz 1.1.6</u>

Es sei { R,+,. } ein Ring mit Einselement. Dann gilt : { R,+,. } ist ein Ringoid.

<u>Beweis</u> von (D4) und (D5b)

(D4) mit $a \in R$ gilt

$$a + o = a \implies a.(a + o) = a.a$$
$$\implies a.a + a.o = a.a$$
$$\implies a.o = o$$

(D5b) $o = (-e).o = -e.((-e) + e) = (-e).(-e) + (-e)$

$$\implies (-e).(-e) = e$$

$\square$

Bemerkung

Die folgenden Beispiele zeigen Ringoide mit der Eigenschaft $e + e = o$

Beispiel 1.1.7

Sei $R := \{ o,1,a,b \}$ mit den in den folgenden Tabellen erklärten Verknüpfungen

+	o	1	a	b
o	o	1	a	b
1	1	o	b	a
a	a	b	o	1
b	b	a	1	o

·	o	1	a	b
o	o	o	o	o
1	o	1	a	b
a	o	a	a	o
b	o	b	o	b

Dann gilt : $\{ R,+,. \}$ ist ein Ringoid (auch ein Ring) mit $X = \{ 1 \}$.

Beispiel 1.1.8

Sei E eine nichtleere Menge und $\mathbb{P}E$ die Potenzmenge über E .

Sei in $\mathbb{P}E$ die Verknüpfung '$\triangle$' folgendermassen definiert

$$\bigwedge_{A,B \in \mathbb{P}E} \quad A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Dann bildet $\{ \mathbb{P}E, \triangle , \cap \}$ ein Ringoid mit $X = \{ E \}$.

Die Beispiele 1.1.7 und 1.1.8 sind spezielle Fälle von

Beispiel 1.1.9

Es sei $\{ B,+,. \}$ ein Boolescher Ring (d.h. ein Ring mit Einselement, dessen Element sämtlich idempotent sind).

Dann gilt :

a) $\bigwedge_{a \in B} \quad a.a = a$

b) $\bigwedge_{a \in B} \quad a = -a$

c) $\{ B,. \}$ ist kommutativ

Das bedeutet, daß $\{ B,+,. \}$ ein Ringoid ist mit $X = \{e\}$

Jetzt betrachten wir drei Sätze, die wichtige Ergänzungen zur Klärung des Begriffs A-Ringoid bringen.

Satz 1.1.10

Es sei $\{ R,+,. \}$ eine Struktur, die (D1) bis (D5) genügt. Dann gilt: $\{ X_A , . \}$ ist eine kommutative Gruppe .

Beweis

i) X_A ist bezüglich . abgeschlossen, d.h. für alle x, y aus X_A gilt $x.y \in X_A$.

Es seien x, y aus X_A und a, b aus R. Dann gelten für das Element x.y die Eigenschaften

(D5) $(x.y).(x.y) \underset{D5c}{=} y.(x.(x.y)) \overset{D5c}{\underset{D5b}{=}} y.(e.y) \overset{D3}{\underset{D5c}{=}} e$

(D5c) $(x.y).(a.b) \underset{D5c}{=} x.(y.(a.b) \underset{D5c}{=} \dots\dots\dots\dots$

$\underset{D5c}{=} ((x.y).a).b \underset{D5c}{=} (x.(y.a)).b \underset{D5c}{=} \dots\dots$

$\underset{D5c}{=} a.((x.y).b)$

(D5d) $(x.y).(a+b) \underset{D5c}{=} x.(y.(a+b) \underset{D5d}{=} x.(y.a+y.b) =$

$\underset{D5d}{=} x.(y.a)+x.(y.b) \underset{D5c}{=} (x.y).a + (x.y).b$

ii) In $\{ X_A , . \}$ gelten

1) Assoziativgesetz

$\bigwedge_{x,y,z \in X_A} \quad (x.y).z \underset{D5c}{=} x.(y.z)$

2) Einselement

$$\bigvee_{e \in X_A} \quad \bigwedge_{x \in X_A} \quad e.x \underset{D3}{=} x.e \underset{D3}{=} x$$

3) Kommutatives Gesetz

$$\bigwedge_{x,y \in X_A} \quad x.y \underset{D3}{=} x.(\, y.e\,) \underset{D5c}{=} y.(\, x.e\,) \underset{D3}{=} y.x$$

4) Inverses Element

$$\bigwedge_{x \in X_A} \quad \bigvee_{x^{-1} = x \in X_A} \quad x.x^{-1} = x^{-1}.x = x.x \underset{D5b}{=} e$$

□

<u>Bemerkung</u>

Für $\{ X,. \}$ läßt sich der Satz i.a. nicht beweisen. Im Ring (Ringoid) der ganzen Zahlen etwa ist $X = \{ -1 \}$ bezüglich . nicht abgeschlossen (siehe Beispiel 1.2.9) .

<u>Satz 1.1.11</u>

Sei $\{ R,+,. \}$ ein Ringoid und X_A endlich. Dann gilt :

i) Die Anzahl der Elemente in X_A ist eine Potenz von 2 : $\#(X_A) = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$

ii) $$\bigwedge_{x \in X_A} \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{Z}} \quad x^n = \begin{cases} x \text{ , falls } n \text{ ungerade} \\ e \text{ , sonst} \end{cases}$$

d.h. die von $x \in X_A$ bezüglich . erzeugte Untergruppe (x) ist $\{ x, e \}$

<u>Beweis</u>

i) siehe [7]

ii) folgt aus $x.x = e$

□

<u>Satz 1.1.12</u>

Es sei $\{ R,+,. \}$ ein Ringoid mit $(X_A) = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist X_A vom Typ $(\underbrace{2,2,\ldots\ldots,2}_{n\text{-mal}})$.

<u>Beweis</u>

Folgt sofort aus Satz 1.1.11 und dem Hauptsatz über abelsche Gruppen.

□

Bemerkung

Im Fall $\#(X_A) = 4$ ist X_A isomorph zur Kleinschen Vierergruppe (siehe Beispiel 1.1.4 und 1.1.5) .

Im folgenden Satz 1.1.13 fassen wir einige einfache Folgerungen aus den Axiomen (D1) bis (D9) zusammen.

Die Eigenschaft a) bringt ein einfaches Hilfsmittel zur Überprüfung der Axiome (D5,6) (diese Eigenschaft kann auch für A-Ringoide verwendet werden) .

Die Punkte b) bis d) , n), o) und p) sind weitere Eigenschaften und werden hier nicht bewiesen; e) bis m) wurden schon in [12] betrachtet.

Satz 1.1.13

Es sei $\{R,+,\cdot\}$ eine Struktur mit den Eigenschaften (D1) bis (D5). Dann gilt

a) $\bigwedge\limits_{x \in X} \quad \bigwedge\limits_{a \in R} \quad \begin{cases} \text{i)} & x \neq a \iff xa \neq e \\ \text{ii)} & xa = ax \end{cases}$

b) $\bigwedge\limits_{x,y \in X} \quad x \neq y \implies x + y \neq e$

c) $o \notin X$

d) $\bigwedge\limits_{x,y \in X} \quad \begin{cases} \text{i)} & xy + y = o \\ \text{ii)} & xy + x = o \\ \text{iii)} & xx + x = o \end{cases}$

Es sei $\{R,+,\cdot\}$ ein Ringoid mit $x = -e \neq e$. Dann gilt für alle a,b aus R

e) $o - a = -a$

f) $-a = (-e)\, a = a\, (-e)$

g) $-(-a) = a$

h) $-(a-b) = -a + b = b - a$

i) 1) $a \cdot e = o \iff a = o$

2) $-a = o \iff a = o$

3) $-a = a \impliedby a = o$

j) $-e$ ist die einzige Lösung von $(-e)\,a = e$

Es sei $\{ R,N,+,\cdot,/ \}$ ein Divisionsringoid. Dann gilt ferner

k) $\bigwedge\limits_{a \in R} \quad \bigwedge\limits_{b \in R \setminus N} \quad (-a)/(-b) = a/b$

l) $(-e)/(-e) = e$

m) Gilt in einem Divisionsringoid $\{ R,N,+,\cdot,/\}$ ferner

$\bigwedge\limits_{a \in R \setminus N} \quad a/a = e$, so ist e das einzige rechtsneutrale Element der Division

Es sei $\{ R,N,+,\cdot,/\}$ eine Struktur mit den Eigenschaften (D1,2,3,4,5,7,8,9). Dann gilt für alle x,y aus X

n) $x/y = xy = y/x$

o) $x/x = xx = e$

p) $y \neq x \iff x/y \neq e$

<u>Beweis</u>

a) Es seien $x \in X$ und $a \in R$

i) $(\Longrightarrow)$ $xa = e \Longrightarrow x(xa) = x \Longrightarrow a = x$
$(\Longleftarrow)$ klar

ii) $xa = x(ae) = a(xe) = ax$

b) Es seien $x,y \in X$

$x+y = e \Longrightarrow x = x\,(x+y) = xx + xy = yy + xy = yx + yy = y(x+y) = y$

$\square$

Bemerkung

In einem Ringoid $\{ R,+,\cdot \}$ gelten dieselben Vorzeichenregeln wie im Körper der reellen Zahlen. Beim Ringoid wird jedoch die Existenz eines inversen Elements bezüglich ' + ' nur für 'e' verlangt.

Andererseits wird die Addition nicht als assoziativ vorausgesetzt. Somit bleibt die Anwendbarkeit auf Gleitkommazahlen gewährt.

1.2 Beispiele für Ringoide

Beispiel 1.2.1

Es sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen. Dann gilt:

$\{ \mathbb{R},+,\cdot,/ \}$ und $\{ \mathbb{C},+,\cdot,/ \}$ sind Divisionsringoide.

Beispiel 1.2.2

Die Potenzmenge über einem Ringoid

Voraussetzungen

1) Sei $\{ R,+,\cdot \}$ ein Ringoid (bzw. $\{ R,N,+,\cdot,/ \}$ ein Divisionsringoid).
2) Sei $\mathbb{P} R$ die Potenzmenge über R.
3) Sei $\mathbb{P} \underset{\cdot}{R} \subset \mathbb{P} R$ die Menge der Punktelemente, d.h.

$$\mathbb{P}\underset{\cdot}{R} := \{ A \mid A = \{ a \} \in \mathbb{P}R \} .$$

Behauptungen

i) $\{ \mathbb{P}\underset{\cdot}{R} , + ,\cdot \}$ ist isomorph zum Ringoid $\{ R,+,\cdot \}$.
ii) $\{ \mathbb{P}R , + ,\cdot \}$ bildet ein Ringoid (bzw. $\{ \mathbb{P}R,N^*,+,\cdot, / \}$ ein Divisionsringoid mit $N^* = \{ B \in \mathbb{P}R \mid B \cap N \neq \emptyset$) .

Beweis

i) Sei $* \in \{ +,\cdot \}$. Dann gilt für alle $A,B \in \mathbb{P}R$:
$A * B = \{ a * b \mid a \in A , b \in B \}$.
Es ist unmittelbar einzusehen, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}\dot{R} &\longrightarrow R \\ \{a\} &\longmapsto \phi(\{a\}) = a \end{aligned}$$ ein Isomorphismus ist.

ii) Wir beweisen nur (D5a) und (D6).

(D5a) Es sei $x \in R$, welches (D6) erfüllt.

$\{x\} + \{e\} = \{x+e\} \overset{D5a}{\underset{\text{in } R}{=\!=}} \{o\}$.

(D6)

Hier bringen wir einen wesentlich einfacheren und kürzeren Beweis von (D6) als in [12] . Das hinzugenommene Axiom (D5a) wird zum Beweis nicht benötigt. Das bedeutet, daß der Beweis auch für A-Ringoide geführt werden kann.

Es sei $Y \in \mathbb{P}R$ für welches die Axiome (D5a,b,c,d) gelten.

Aus (D5b) folgt für alle y_1, y_2 aus Y :

(1) $y_1 y_2 = y_2 y_1 = y_1 y_1 = y_2 y_2 = e$.

Nach (D5c) gilt für alle A,B aus $\mathbb{P}R$

(2) $Y(AB) = (YA)B = A(YB)$.

Es seien $A = \{y_1\}$ und $B = \{y_2\}$. Dann folgt aus (1) und (2)

$$Y\{e\} = \{e\}B = A\{e\} \Longrightarrow Y = A = B ,$$

d.h. $y_1 = y_2$.

Wegen i) folgt die Behauptung.

<u>Beispiel 1.2.3</u>

$\{\mathbb{P}\mathbb{R}, N^*, +, \cdot, \}$ und $\{\mathbb{P}\mathbb{C}, N_1^*, +, \cdot, \}$ sind Divisionsringoide mit $N^* = \{B \in \mathbb{P}\mathbb{R} \mid o \in B\}$ und

$N_1^* = \{B \in \mathbb{P}\mathbb{C} \mid o \in B\}$.

<u>Beispiel 1.2.4</u>

Die Menge $\mathbb{I}\mathbb{R}$ der abgeschlossenen Intervalle über $\mathbb{R}$ bildet als Teilmenge von $\mathbb{P}\mathbb{R}$ bezüglich der in $\mathbb{P}\mathbb{R}$ erklärten Verknüpfungen ein Divisionsringoid $\{\mathbb{I}\mathbb{R}, N_2^*, +, \cdot, \}$ mit $N_2^* = \{B \in \mathbb{I}R \mid o \in B\}$.

Beispiel 1.2.5

Die Matrizen über einem Ringoid

Voraussetzungen

1) Sei $\{ R,+,\cdot \}$ ein Ringoid und M_nR die Menge der n-reihigen quadratischen Matrizen über R.

2) Für $A:= (a_{ij})$ und $B:= (b_{ij})$ aus M_nR definieren wir

a) $A = B \;:\Longleftrightarrow\; (a_{ij}) = (b_{ij}) \;:\Longleftrightarrow\; \bigwedge_{i,j=1(1)n} a_{ij}=b_{ij}.$

b) $A + B \;:= (a_{ij}) + (b_{ij}) \;:= (a_{ij} + b_{ij}).$

c) $A \cdot B \;:= (a_{ij}) \cdot (b_{ij}) \;:= (\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\, b_{\nu j}).$

Behauptungen

i) Die Menge D aller Diagonalmatrizen mit konstantem Diagonalglied über $\{ R,+,\cdot \}$ ist isomorph zum Ringoid $\{ R,+,\cdot \}$.

ii) $\{ M_nR,+,\cdot \}$ ist ein Ringoid mit

$$X:=\begin{pmatrix} x & & & \bigcirc \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & x \end{pmatrix} \qquad O:=\begin{pmatrix} o & & & \bigcirc \\ & o & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & o \end{pmatrix} \qquad E:=\begin{pmatrix} e & & & \bigcirc \\ & e & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & e \end{pmatrix}$$

Beweis

i) Es ist klar, daß die Abbildung

$$\phi: D \longrightarrow R$$

$$\begin{pmatrix} a & & & \bigcirc \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & a \end{pmatrix} \longmapsto a$$ ein Isomorphismus ist.

ii) Wir beweisen (D5a) und (D6).

(D5a) Das Element X erfüllt (D5a), da

$$X + E = \begin{bmatrix} x+e & & & \\ & x+e & & \bigcirc \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & x+e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & & & \\ & o & & \bigcirc \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & o \end{bmatrix} = 0$$

(D6) Hier zeigt sich die Wichtigkeit von Axiom (D5a). Die beim A-Ringoid nicht geforderte Eigenschaft erleichtert den Beweis von (D6) erheblich, da er wesentlich einfacher und kürzer wird.

Es sei $Y = (y_{ij})$ aus M_nR, welches dem Axiom (D5) genügt.

$$Y + E = 0 \implies \bigwedge_{i=1(1)n} y_{ii} + e = o, \bigwedge_{\substack{i,j=1(1)n \\ i \neq y}} y_{ij} = o,$$

d.h. Y hat Diagonalgestalt

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & & & \\ & y_{22} & & \bigcirc \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & y_{nn} \end{bmatrix}$$

Aus Satz 1.1.13 a)ii) folgt für alle A aus M_nR

(1) $Y \cdot A = A \cdot Y$.

Es sei $A = (a_{ij})$ aus M_nR, so daß für alle $i,j=1(1)n$ $a_{ij} = e$ ist. Dann folgt aus (1) für alle $i,j=1(1)n$ $y_{ii} = y_{jj}$.

Das bedeutet, daß

$$Y = \begin{bmatrix} y & & & \\ & y & & \bigcirc \\ & & y \ddots & \\ \bigcirc & & & y \end{bmatrix} \quad \text{ist.}$$

Wegen i) folgt die Behauptung.

In unserem nächsten Beispiel betrachten wir die Komplexifizierung eines Ringoids. In [12] wurde gezeigt, daß die Menge $\{ \mathbb{C}R,+,\cdot \}$ über einem A-Ringoid Axiom (D6) nicht erfüllt. Dort wurde $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ als linear geordnetes A-Ringoid vorausgesetzt, um die Eindeutigkeit von x beweisen zu können (siehe [12]).

Es zeigt sich, daß der Beweis mit Hilfe von (D5a) wesentlich kürzer und eleganter zu führen ist; zu dem wird keine Ordnungsstruktur von R benötigt.

<u>Beispiel 1.2.6</u> <u>Komplexifizierung eines Ringoids</u>

Es sei $\{ R,N,+,\cdot,/\}$ ein Divisionsringoid

Es sei $\mathbb{C}R := \{(a_1,a_2) \mid a_1,a_2 \in R \}$.

Für $\alpha,\beta \in \mathbb{C}R$ erklären wir mit $\alpha := (a_1,a_2)$, $\beta := (b_1,b_2)$

a) $\alpha + \beta := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
b) $\alpha \cdot \beta := (a_1b_1 - a_2b_2 , a_1b_2 + a_2b_1)$
c) $\alpha/\gamma := ((a_1c_1 + a_2c_2)/c ; (a_2c_1 - a_1c_2)/c)$ für $\gamma \in \mathbb{C}R \setminus \bar{N}$

Mit
$\gamma := (c_1,c_2)$, $\bar{N} := \{\delta \in \mathbb{C}R \mid \delta = (d_1,d_2) \wedge d_1d_1 + d_2d_2 \in N \}$
und
$c = c_1c_1 + c_2c_2$

Dann ist $\{ \mathbb{C}R,N,+,\cdot,/\}$ ebenfalls ein Divisionsringoid, wobei die Menge aller Elemente der Form (a,o) , $a \in R$ isomorph zum Ringoid $\{ R,+,\cdot \}$ ist.

<u>Beweis</u>

(D5) $\varepsilon = (x;o)$ erfüllt (D5a,b,c,d)
(D6) Es sei $\alpha = (a_1,a_2) \in \mathbb{C}R$, welches Axiom (D5) genügt.

Aus

(D5a) $\alpha + \varepsilon = o$ folgt $a_1 + e = o \wedge a_2 = o$

d.h. $\alpha = (a_1, o)$.

Wegen Isomorphie folgt $a_1 = x$, d.h. $\{\mathbb{C}R,+,\cdot\}$ ist ein Ringoid.
Die Eigenschaften (D7,8,9) sind trivialerweise erfüllt.

<u>Beispiel 1.2.7</u>

Es seien $\{R_i,+,\cdot\}$, i=1(1)n Ringoide (bzw. $\{R_i, N_i,+,\cdot,/\}$ Divisionsringoide).

Es sei ferner $R := R \times R \times R \times \ldots\ldots \times R$ (Produktmenge)

In R erklären wir Verknüpfungen $* \in \{+,\cdot,/\}$ durch

$$\bigwedge_{a \in R} \bigwedge_{b \in R} a * b := (a_1 * b_1, a_2 * b_2, \ldots\ldots, a_n * b_n)$$

mit $a := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b := (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

und $b_i \neq o$ für alle i=1(1)n bei der Division.

Dann ist $\{R,+,\cdot\}$ ein Ringoid (bzw. $\{R, N,+,\cdot,/\}$ ein Divisionsringoid mit $N := \{a \in R \mid a_i \neq o, i=1(1)n\}$)
und

$$O := (o_1, o_2, \ldots, o_n)$$
$$E := (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$
$$X := (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

<u>Beweis</u> von (D6)

Es sei $y \in R$, welches Axiom (D5) genügt mit $y := (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

I. $y + E = O \implies (y_1 + e_1, y_2 + e_2, \ldots, y_n + e_n) = (o_1, o_2, \ldots, o_n)$

II. $y \cdot y = \implies (y_1 y_1, y_2 y_2, \ldots, y_n y_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$

Es seien $a := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b := (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ aus R

Dann gilt:

III.

$(y_1(a_1b_1), y_2(a_2b_2), \ldots, y_n(a_nb_n)) = ((y_1a_1)b_1, \ldots, (y_na_n)b_n) =$
$= (a_1(y_1b_1), \ldots, a_n(y_nb_n))$.

IV.

$(y_1(a_1+b_1), \ldots, y_n(a_n+b_n)) = (y_1a_1 + y_1b_1, \ldots, y_na_n + y_nb_n)$

d.h. y_i erfüllt (D5) in R_i und damit $\mathcal{Y} = X$

Bemerkung

$\{R, +, \cdot\}$ bildet hingegen kein A-Ringoid, denn für $n > 1$ erfüllt beispielsweise $(e_1, -e_2, -e_4, \ldots, -e_n)$ die Eigenschaften (D5b,c,d)

Beispiel 1.2.8.

Es sei $\{\mathfrak{a} := \{e, x, y, z\}, \cdot\}$ eine Kleinsche Gruppe. Weiter sei eine Addition in $\mathfrak{a} \cup \{o\}$ durch FIGUR 3 definiert.

+	o	e	x	y	z
o	o	e	x	y	z
e	e	x	o	o	o
x	x	o	e	o	o
y	y	o	o	z	o
z	z	o	o	o	y

FIGUR 3

und zusätzlich sei

(1) $\bigwedge_{a \in \mathfrak{a} \cup \{o\}} o \cdot a = a \cdot o = o.$

Dann gilt (D1) bis (D5), aber $\# (X) = 3$, d.h. $\{\mathfrak{a} \cup \{o\}, +, \cdot\}$ ist kein Ringoid.

<u>Beweis</u>

D1, D2, D4 klar

(D3) $\{ \mathfrak{a}, \cdot \}$ Kleinsche Gruppe und (1) $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{a \in \mathfrak{a} \cup \{ o \}} a \cdot e = e \cdot a = a$$

(D5) x,y,z erfüllen (D5), d.h. $X = \{ x,y,z \}$
(siehe FIGUR 4)

•	o	e	x	y	z
o	o	o	o	o	o
e	o	e	x	y	z
x	o	x	e	z	y
y	o	y	z	e	x
z	o	z	y	x	e

FIGUR 4

<u>Beispiel 1.2.9</u>

Es sei $R = \{ o,e,x,y,xy,M \}$ eine Menge. Weiter sei eine Addition und eine Multiplikation erklärt durch die Tabellen (FIGUR 5)

+	o	e	x	y	xy	M
o	o	e	x	y	xy	M
e	e	x	o	o	M	M
x	x	o	e	M	o	M
y	y	o	M	xy	o	M
xy	xy	M	o	o	y	M
M	M	M	M	M	M	M

FIGUR 5

•	o	e	x	y	xy	M
o	o	o	o	o	o	o
e	o	e	x	y	xy	M
x	o	x	e	xy	y	M
y	o	y	xy	e	x	M
xy	o	xy	y	x	e	M
M	o	M	M	M	M	M

In $\{ R,+,\cdot \}$ sind (D1) bis (D5) erfüllt.

Hier haben wir $x + e = o$ und $y + e = o$ aber $xy + e \neq o$ (siehe Satz 1.1.1o)

Kapitel 1 - Zusammenfassung

STRUKTUR	STRUKTUR A-RINGOID		STRUKTUR RINGOID		
	$\#(X_A \setminus \{e\})$	Für (D6) braucht man	$\#(X)$	Für (D6) braucht man	Neuer Beweis von (D6) wird
$\{ \mathbb{P}R,+,\cdot \}$ Beispiel 1.2.2	1	D5 b,c,d	1	D5 b,c Isomorphie	kürzer
$\{ M_n R,+,\cdot \}$ Beispiel 1.2.5	1	D5 b,c,d	1	D5a Satz 1.1.8 a)ii) Isomorphie	kürzer
$\{ \mathbb{C}R,+,\cdot \}$ Beispiel 1.2.6	≥ 1	Ordnung	1	D5a Isomorphie	a) Ohne Ordnung möglich b) kürzer
$\{ \mathbb{R},+,\cdot \}$ Beispiel 1.2.7	2^n-1	nicht möglich	1	D5 a,b,c,d	durchführbar
$\{ P^1 [x] ,+,\odot \}$ $\{ P^1 [x] ,+,\boxdot \}$ Beispiel 1.1.5	3	nicht möglich	1	D5a	durchführbar
$\{ \mathbb{I}R, \boxplus , \boxdot \}$ (siehe Kapitel 5)	1	D5b,c,d	1	D5b,c Isomorphie	kürzer

TABELLE 2

2. GEORDNETE RINGOIDE

2.1 Definition und Eigenschaften

Definition 2.1.1

a) Ist $\{ R, \leq \}$ eine geordnete Menge[1] und $\{ R,+,\cdot \}$ ein Ringoid, so heißt $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ schwach geordnet wenn gilt:

$$(\text{OD1}) \quad \bigwedge_{a,b,c \in R} (a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c) \text{ und}$$

das aus (D5,6) eindeutig bestimmte Element $x \in R$ die Eigenschaft (OD2) besitzt.

$$(\text{OD2}) \quad \bigwedge_{a,b \in R} (a \leq b \Longrightarrow xb \leq xa).$$

b) Ein schwach geordnetes Ringoid heißt geordnet, wenn zusätzlich gilt

$$(\text{OD3}) \quad \bigwedge_{a,b,c \in R} (o \leq a \leq b \wedge c \geq o \Longrightarrow ac \leq bc \wedge ca \leq cb).$$

c) $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ heißt ein vollständig geordnetes Ringoid, wenn $\{ R,+,\cdot \}$ ein Ringoid und $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein vollständiger Verband ist.

d) Ist $\{ R,\leq \}$ ein vollständig linear geordneter Verband, so heißt $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein vollständig linear geordnetes Ringoid.

□

Im folgenden Satz 2.1.2 fassen wir einige Folgerungen aus den Axiomen (OD1) bis (OD3) zusammen.

Die Eigenschaften a) bis f) , i)bis v) wurden schon in [12] betrachtet.

---

[1] *d.h. $\leq$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv*

Satz 2.1.2

Es sei $\{R,+,\cdot,\leq\}$ ein schwach geordnetes Ringoid.
Dann gelten für alle $a,b,c,d \in R$
wobei x das aus (D5,6) eindeutig bestimmte Element ist.

a) $a < b \implies xb < xa$

b) $a \leq b \wedge c \leq d \implies a + c \leq b + d$

c) $a \leq o \wedge b \leq o \implies a + b \leq o$

d) $a \geq o \wedge b \geq o \implies a + b \geq o$

e) $a > o \implies xa < o$

f) $a < o \implies xa > o$

g) $a \| b \implies xa \| xb$ ($\|$ unvergleichbar)

h) i) $a \geq e \implies a + x \geq o$

ii) $a \geq x \implies a + e \geq o$

In einem geordneten Ringoid $\{R,+,\cdot,\leq\}$ gilt für alle $a,b,c,d \in R$

i) $o \leq a \leq b \wedge o \leq c \leq d \implies o \leq ac \leq bd \wedge o \leq ca \leq db$

j) $a \leq b \leq o \wedge c \leq d \leq o \implies o \leq bd \leq ac \wedge o \leq db \leq ca$

k) $a \leq b \leq o \wedge o \leq c \leq d \implies ad \leq bc \leq o \wedge da \leq cb \leq o$

l) $a \geq o \wedge b \geq o \implies ab \geq o \wedge ba \geq o$

m) $a \leq o \wedge b \leq o \implies ab \geq o \wedge ba \geq o$

n) $a \leq o \wedge b \geq o \implies ab \leq o \wedge ba \leq o$

In einem linear geordneten Ringoid gilt für alle $a,b \in R$ zusätzlich

o) $a \leq b \wedge c \geq o \implies ac \leq bc \wedge ca \leq cb$

p) $a \leq b \wedge c \leq o \implies ac \geq bc \wedge ca \geq cb$

q) $x < o < e$ (siehe Satz 2.1.4)

r) $b = -b \iff b = o$

s) $a + (-a) = o$ d.h. $-a$ ist invers zu a

t) $o < e < a \implies e < a \leq aa$

u) $o < a < e \implies aa \leq a < e$

v) $a \neq e \wedge aa = e \implies a < o$

w) $a \geq b \implies a - b \geq o$

x) $a \geq e \implies a + e > o$

$\square$

<u>Lemma 2.1.3</u>

Sei $\{ R,\leq \}$ eine geordnete Menge. Dann gilt für alle $a,b \in R$ genau eine der Beziehungen

$$a < b \,,\; a > b \,,\; b = a \,,\; a \| b \;.$$

$\square$

<u>Satz 2.1.4</u>

Sei $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ eine Struktur mit (D1) bis (D5) und (OD2) und der Eigenschaft, daß es mindestens ein Paar a,b aus R mit $a < b$ gibt.

Dann gilt:

i) $x \neq e$.

ii) x,y aus X erfüllen (OD2) $\implies$ xy erfüllt (OD2) nicht.

<u>Beweis</u>

Es seien a,b aus R mit $a < b$.

i) Nehmen wir an, daß $x = e$ gelte.

$$a < b \xrightarrow[\text{Satz 2.1.1a)}]{x=e} b = xb < xa = a \qquad \text{Wid. zum Lemma 2.1.3}$$

ii) Es seien x,y aus X. Dann gilt

$a < b \implies xb < xa \implies y(xa) < y(xb) \implies (xy)a < (xy)b \quad (1).$

Würde xy (OD2) erfüllen, so folgte aus

$a < b \implies (xy)b < (xy)a$ im Widerspruch zu (1),

d.h. xy erfüllt (OD2) nicht.

□

Bemerkung

i) besagt u.a., daß in einem schwach geordneten Ringoid mit der oben genannten Eigenschaft stets $x = -e \neq e$ gilt. Das ist natürlich der Fall, wenn $\{ R, \leq \}$ linear geordnet ist.

In [12] wurde gezeigt, daß ein linear geordnetes A-Semiringoid (d.h. $\# (X_A) > 2$) bereits ein linear geordnetes A-Ringoid ist.

Der nächste Satz zeigt überdies, daß die Voraussetzungen 2), 3) und 4) nur in X angenommen zu werden brauchen.

Satz 2.1.5

Es seien

1) $\{R,+,\cdot\}$ eine Struktur mit (D1) bis (D5)

2) In X sei ρ eine zweistellige antisymmetrische Relation

3) $\bigwedge_{x,y \in X} \quad x \rho y \vee y \rho x$ (d.h. sei ρ linear in X)

4) $\bigwedge_{x,y,z \in X} \quad x \rho y \implies zy \rho zx$ oder $x \rho y \implies zx \rho zy$

Dann gilt : $\{ R,+,\cdot \}$ ist ein Ringoid.

Beweis

Es sei $\{ R,+,\cdot \}$ mit (D1) bis (D5) und x,y aus X $\xrightarrow[3)]{\text{o.B.d.A}}$

$x \rho y \xrightarrow[4)]{} xy \rho xx \wedge yy \rho yx \xrightarrow[(D5b)]{\text{Satz1.1.13a}} xy \rho e \wedge e \rho xy$

$\xrightarrow[2)]{} xy = e \xrightarrow[1.1.13a]{\text{Satz}} x = y .$

□

Wir formulieren jetzt einen Satz, der genauere Auskunft über die Beziehung zwischen A-Ringoid und Ringoid gibt.

Satz 2.1.6

Voraussetzungen

1) Sei $\{ R,+,\cdot, \rho\}$ ein schwach geordnetes A-Ringoid

2) Sei $x + e$ mit o vergleichbar, d.h. $x + e \, \rho \, o$ oder $o \, \rho \, x + e$

Behauptung

$\{ R,+,\cdot, \rho\}$ ist ein schwach geordnetes Ringoid.

Beweis

Es bleibt nur (D5a) zu zeigen.

Mit (D5b) haben wir $xx = e$.

$xx = e \implies xx + x = e + x \implies x(x + e) = e + x$ (1)

O.B.d.A. sei $x + e \, \rho \, o$

$x + e \, \rho \, o \implies o \, \rho \, x(x + e) \overset{(1)}{\implies} o \, \rho \, x + e$ und damit

$x + e = o$.

□

Definition 2.1.7

a) Ein Divisionsringoid $\{ R,+,\cdot,/ \}$ heißt schwach geordnet, wenn es ein schwach geordnetes Ringoid ist.

b) Ein Divisionsringoid $\{ R,+,\cdot, /\}$ heißt geordnet, wenn $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein geordnetes Ringoid ist und gilt

(OD4) $\bigwedge_{a,b \in R} (o < a \leq b \wedge c > o \implies o \leq a/c \leq b/c \wedge c/a \geq c/b \geq o)$.

c) $\{ R,+,\cdot, /,\leq \}$ heißt ein vollständig (schwach) geordnetes Divisionsringoid, wenn $\{ R,+,\cdot, /,\leq \}$ ein (schwach) geordnetes Divisionsringoid und $\{ R,\leq \}$ ein vollständiger Verband ist.

□

<u>Definition 2.1.8</u>

Es sei { R,+,· } ein Ringoid und { R,$\leq$} eine geordnete Menge. R heißt inklusionsisoton geordnet, wenn gilt

$$\text{(OD5)} \quad \bigwedge_{a,b,c,d \in R} \quad (a \leq b \wedge c \leq d \implies a * c \leq b * d \ , \ * \in \{+,\cdot\}.$$

Ein Divisionsringoid { R,N,+,·,/ } heißt inklusionsisoton geordnet, wenn es ein inklusionsisoton geordnetes Ringoid ist und gilt

$$\bigwedge_{a,b \in R} \quad \bigwedge_{c,d \in R\setminus N} \quad (a \leq b \wedge c \leq d \implies a/c \leq b/d) . \qquad \square$$

<u>Satz 2.1.9</u>

Es sei { R,N,+,·, /,≤ } ein geordnetes Divisionsringoid. Dann gilt für alle $a,b \in R$

(a) $a \geq o \wedge b > o \implies a/b \geq o$

(b) $a < o \wedge b > o \implies a/b \leq o \wedge b/a \leq o$

(c) $a \leq o \wedge b > o \implies a/b \geq o$

Es sei { R, {o} ,+,·,/,$\leq$} ein geordnetes Divisionsringoid mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\bigwedge_{a \in R\setminus\{o\}} \quad a/a = e.$$ Dann gilt für alle $a,b \in R$ und $x = -e$

(d) $o < a \leq b \implies o \leq a/b \leq e \quad \wedge \quad b/a \geq e > o$

(e) $b \leq a < o \implies o \leq a/b \leq e \quad \wedge \quad b/a \geq e > o$

(f) $o < -a \leq b \implies -e \leq a/b \leq o \quad \wedge \quad b/a \leq -e < o$

(g) $o < b \leq -a \implies -e \leq b/a \leq o \quad \wedge \quad a/b \leq -e < o$

Es sei { R,+,·,≤ } ein inklusionsisoton geordnetes Ringoid. Dann gilt auch für die Subtraktion

(OD4) $\bigwedge_{a,b,c,d \in R} \quad (a \leq b \wedge c \leq d \implies a - c \leq b - d) .$ □

Bemerkung

Ähnlich wie im ersten Kapitel ist hier der Zusammenhang zwischen den Gleitkommazahlen und linear geordneten Divisionsringoiden leicht hergestellt. Die lineare Ordnung wird direkt von den reellen Zahlen induziert und (OD4) ist üblicherweise ebenfalls erfüllt. Die Eigenschaft a) aus Satz 2.1.9 z.B. kann auch für Gleitkommazahlen i.a. nicht schärfer formuliert werden. Man betrachte dazu etwa die Division der kleinsten durch die größte Maschinenzahl.

2.2 Beispiele für geordnete Ringoide

Beispiel 2.2.1

a) $\{ \mathbb{R} \cup \{ -\infty,+\infty \},+,\cdot,\leq \}$ ist ein vollständig, linear geordnetes Divisionsringoid.

b) In dem Ringoid $\{ \mathbb{C},+,\cdot \}$ definieren wir

$$\bigwedge_{\substack{\alpha = a_1 + ia_2 \\ \beta = b_1 + ib_2}\in \mathbb{C}} \quad \alpha \leq \beta \; :\iff a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2$$

Dann gilt

i) $\{ \mathbb{C},+,\cdot,\leq \}$ ist ein schwach-geordnetes Ringoid.

ii) $\{ \mathbb{C}\cup\{\pm\infty\} ,+,\cdot,/,\leq \}$ ist ein vollständig schwach-geordnetes Divisionsringoid.

(OD3) und (OD4) gelten hier nicht, da beispielsweise für

$\alpha \; := (2,3) \; , \; \beta \; := (3,5) \; , \; \gamma := (2,2)$

$(0,0) \; < \; \alpha \; = \; (2,3) \; \leq \; (3,5) \; = \; \beta$ ist, aber

$(-2,10) \; = \alpha \; \gamma \not\leq \beta \; \gamma = (-4,16).$

Beispiel 2.2.2

Die Matrizen über einem geordneten Ringoid

Es sei $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein (schwach) geordnetes Ringoid. In M_nR definieren wir für alle $A := (a_{ij}),\ B := (b_{ij}) \in M_nR$ eine Relation '$\leq$'

$$A \leq B \quad :\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{i,j=1(1)n} \quad a_{ij} \leq b_{ij}$$

Dann ist $\{ M_nR,+,\cdot,\leq \}$ wieder ein (schwach) geordnetes Ringoid.

Ist $\{ R,\leq \}$ eine linear geordnete Menge, so gilt $X = -E < 0$ und $E > 0$.

Beweis

i) Nach Beispiel 1.2.5 ist $\{ M_nR,+,\cdot \}$ wieder ein Ringoid.

ii) $\{ M_nR,\leq \}$ ist offensichtlich eine geordnete Menge.

iii) Verträglichkeitsbedingungen

(OD1) klar

(OD2) $A \leq B \ :\Longleftrightarrow \bigwedge_{i,j=1(1)n} a_{ij} \leq b_{ij} \Rightarrow \bigwedge_{i,j=1(1)n} -b_{ij} \leq -a_{ij}$

$\Longleftrightarrow: -B \leq -A$

(OD3) $o \leq A \leq B \ \wedge C \geq o \Longrightarrow \bigwedge_{i,j=1(1)n} (o \leq a_{ij} \leq b_{ij} \wedge c_{ij} \geq o)$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{i,j,p=1(1)n} \quad o \leq a_{ip}c_{pj} \leq b_{ip}c_{pj}$$

$$\underset{(OD1)_R}{\Longrightarrow} AC \leq BC$$

Beispiel 2.2.3

Die komplexen Divisionsringoide

Es sei $\{R,N,+,\cdot,/\}$ ein Divisionsringoid.
Nach Beispiel 2.1.6 ist $\{\mathbb{C}R,N,+,\cdot,/\}$ wieder ein Divisionsringoid.

In $\mathbb{C}R$ erklären wir eine Relation $\leq$ durch

$$\alpha \leq \beta \quad :\Longleftrightarrow \quad (a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2) \qquad \bigwedge_{\substack{\alpha = a_1 + ia_2 \\ \beta = b_1 + ib_2}} \in \mathbb{C}R$$

Ist $\{R,N,+,\cdot,/,\leq\}$ ein schwach-geordnetes Divisionsringoid, so gilt

1) Das Element $(-a_1, -a_2)$ ist bezüglich der Addition invers zu
   $\alpha = (a_1,a_2)$
2) Falls $\{R,N,+,\cdot,/\}$ kommutativ ist und gilt $\bigwedge_{a \in R\setminus N} \quad a/a = e$,

   so ist auch für alle $\alpha \in \mathbb{C}R\setminus N \quad \alpha/\alpha = (e,o)$

Beispiel 2.2.4

Es sei $\{B,N,+,\cdot,/,\leq\}$ die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen über dem abgeschlossenen Intervall $[a;b] \subset \mathbb{R}$, mit Addition, Multiplikation und Division punktweise erklärt und

$$f \leq g :\Longleftrightarrow \bigwedge_{t \in [a;b]} \quad f(t) \leq g(t)$$

Dann gelten:

$$(\text{D1}) \quad \bigwedge_{f,g \in B} \quad (f+g)(t) = f(t) + g(t) = g(t) + f(t) = (g+f)(t)$$

$$(\text{D2}) \quad \bigvee_{\sigma \in B} \quad \bigwedge_{f \in B} \quad (f+\sigma)(t) = f(t) \qquad \begin{array}{l} \sigma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \longmapsto o \end{array}$$

(D3) $\bigvee_{\varepsilon \in B} \bigwedge_{f \in B} (f \cdot \varepsilon)(t) = f(t) \cdot \varepsilon(t) = \varepsilon(t) \cdot f(t) = f(t)$

Mit $\varepsilon : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto 1$

(D4) $\bigwedge_{f \in B} (f \cdot \sigma)(t) = f(t) \cdot \sigma(t) = \sigma(t)$

(D5) Es sei $X : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto -1$

Es ist klar, daß $X \in B$ (D5) erfüllt.

(D6) Es sei $y \in B$, das auch (D5) erfüllt.

(D5a) $(y+\varepsilon)(t) = y(t) + \varepsilon(t) = o \implies y(t) = -1 \quad \bigwedge_{t \in [a;b]}$

d.h. { B,+,• }ist ein Ringoid, aber nur ein A-Semiringoid (siehe [7]).

Mit

$N = \{h \in B \mid \bigwedge_{\eta > o} \bigvee_{t_1 \in [a;b]} h(t_1) < \eta\}$

gilt weiter

(D7) $\bigwedge_{f \in B} (f/\varepsilon)(t) = f(t)/\varepsilon(t) = f(t)$

(D8) $\bigwedge_{f \in B \setminus N} (\sigma/f)(t) = \sigma(t)/f(t) = \sigma(t)$

(D9) klar

d.h. { B,N,+,•, / } ist ein Divisionsringoid

(OD1) $\bigwedge_{f,g \in B}$ $\quad f \leq g : \iff f(t) \leq g(t) \implies -g(t) \leq -f(t)$

$$\iff -g \leq -f$$

(OD3) $\bigwedge_{f,g,h \in B}$ $\quad \sigma \leq f \leq g \wedge h \geq \sigma :\iff o \leq f(t) \leq g(t) \wedge h(t) \geq o$

$$\implies \quad f(t)\cdot h(t) \leq g(t)\cdot h(t) \wedge h(t)f(t) \leq h(t)g(t)$$

$$\iff \quad f\cdot h \leq g\cdot h \wedge h\cdot f \leq h\cdot g$$

(OD4) klar

d.h. $\{ B, N, +, \cdot, /, \leq \}$ ist ein geordnetes Divisionsringoid.

3. VEKTOIDE

In diesem Kapitel wird wie in [12] und [15] ein allgemeines Konzept mathematischer Strukturen mit äußeren Verknüpfungen erstellt.

Zunächst werden wir die algebraische Struktur des Vektoids über einem Ringoid einführen.

3.1 Definitionen und Eigenschaften

Definition 3.1.1

Es seien $\{ R,+,\cdot \}$ ein Ringoid mit Elementen $\mathrm{a,b,c,d},\ldots$, $\{ V,+ \}$ ein Gruppoid mit Elementen $\mathit{a,b,c,d},\ldots$ und $\cdot : R \times V \longrightarrow V$ eine äußere Verknüpfung (Skalarmultiplikation) :

Es gelte die Abkürzung $\bigwedge\limits_{\mathit{a} \in V} \quad -\mathit{a} = (-\mathrm{e})\cdot \mathit{a}$.

$\{ V,R,+,\cdot \}$ heißt ein Vektoid über R oder ein R-Vektoid, wenn gilt

(V1) $\bigwedge\limits_{\mathit{a,b} \in V} \quad \mathit{a} + \mathit{b} = \mathit{b} + \mathit{a}$

(V2) $\bigvee\limits_{\mathit{o} \in V} \; \bigwedge\limits_{\mathit{a} \in V} \quad \mathit{a} + \mathit{o} = \mathit{a}$

(VD1) $\bigwedge\limits_{\mathit{a} \in V} \; \bigwedge\limits_{\mathrm{a} \in R} \quad \mathrm{a}\cdot\mathit{o} = \mathit{o} \;\wedge\; \mathit{o}\cdot\mathit{a} = \mathit{o}$

(VD2) $\bigwedge\limits_{\mathit{a} \in V} \quad \mathrm{e}\cdot\mathit{a} = \mathit{a}$

(VD3) $\bigwedge\limits_{\mathrm{a} \in R} \; \bigwedge\limits_{\mathit{a} \in V} \quad -(\mathrm{a}\cdot\mathit{a}) = (-\mathrm{a})\cdot\mathit{a} = \mathrm{a}\cdot(-\mathit{a})$

(VD4) $\bigwedge\limits_{\mathit{a,b} \in V} \quad -(\mathit{a} + \mathit{b}) = (-\mathit{a}) + (-\mathit{b})$

Ein R-Vektoid heißt multiplikativ, wenn eine innere Verknüpfung $\cdot : V \times V \longrightarrow V$ erklärt ist und gilt

(V3) $\bigvee\limits_{\mathit{e} \in V} \; \bigwedge\limits_{\mathit{a} \in V} \quad \mathit{a}\cdot\mathit{e} = \mathit{e}\cdot\mathit{a} = \mathit{a}$

(V4) $\bigwedge_{a \in V} \quad a \cdot o = o \cdot a = o$

(V5) $- e + e = o$

(VD5) $\bigwedge_{a,b \in V} \quad -(a \cdot b) = (- a) \cdot b = a \cdot (- b).$ □

Bemerkung

In [12] und [15] wurde ein Vektoid über einem A-Ringoid definiert, und zwar ohne Axiom (V5) zu verlangen. Wie uns die Hinzunahme von (D5a) bei der Definition des Ringoids jeden Ring mit`1´zum Ringoid machte, ermöglicht uns nun (V5) zu beweisen, daß jedes multiplikative Vektoid bereits (D1,2,3,4,5) genügt. Wir werden dies in Satz 3.1.4 beweisen. Doch zunächst zeigen wir ein paar einfache Eigenschaften des R-Vektoids.

Definition 3.1.2

Es sei { V,R,+,• } ein R-Vektoid. Dann erklären wir eine Subtraktion '-' durch $\bigwedge_{a,b \in V} \quad a - b := a + (- b)$ □

Aus [12] erhalten wir

Satz 3.1.3

Es sei { V,R,+,• } ein R-Vektoid. Dann gilt

(a) $\bigwedge_{a \in V} \quad o - a = -a \wedge a - o = a$

(b) $\bigwedge_{a \in V} \quad -(- a) = a$

(c) $\bigwedge_{a,b \in V} \quad -(a - b) = - a + b = b - a$

(d) $\bigwedge_{\mathrm{a} \in R} \bigwedge_{a \in V} \quad (-\mathrm{a}) \cdot (-a) = \mathrm{a}.a$

(e) $\bigwedge_{a \in V} \quad (-a) = o \Longleftrightarrow a = o$

Ist { V,R,+,• } multiplikativ, so gilt ferner

(f) $\bigwedge_{a \in V} \quad -a = (-e)\cdot a = a\cdot(-e)$

(g) $\bigwedge_{a,b \in V} \quad (-a)\cdot(-b) = a\cdot b$

(h) $-e$ ist die einzige Lösung der Gleichung $(-e)x = e$

(i) $e \neq o \wedge -e \neq o$

(j) $\bigwedge_{a \in V} \quad a\cdot e = o \Longleftrightarrow a = o$

wobei e das neutrale Element der Multiplikation in V ist.
□

Satz 3.1.4

Es sei $\{ V,R,+,\cdot \}$ ein multiplikatives R-Vektoid mit e bzw. o als neutrales Element der Multiplikation bzw. der Addition und $\{ R,+,\cdot \}$ ein Ringoid.

Dann gelten die Eigenschaften (D1,2,3,4,5) in $\{ V,+,\cdot \}$.

Beweis

Es gilt nach [12] (D1,2,3,4). Wir zeigen nur, daß $-e$ die Axiome (D5a,b,c,d) in V erfüllt (siehe dazu die nächste Bemerkung).

(V5) $\Longrightarrow$ (D5a)

(D5b) $\quad (-e)\cdot(-e) = e\cdot e = e \quad$ nach Satz 3.1.3 (g)

(D5c) $\bigwedge_{a,b \in V} \quad (-e)\cdot(a\cdot b) = -(a\cdot b) = (-a)\cdot b = a\cdot(-b) =$
$= ((-e)\cdot a)\cdot b = a\cdot((-e)\cdot b)$

(D5d) $\bigwedge_{a,b \in V} \quad (-e)\cdot(a+b) = -(a+b) = (-a) + (-b) = (-e)\cdot a + (-e)\cdot b$
□

Bemerkung

Wir zeigen, daß es R-Vektoide gibt, in denen sich außer $-e$ weitere Elemente angeben lassen, welche die Axiome (D5a,b,c,d) erfüllen.

Es sei V = $\{ o,e,x,y,z \}$ und erklären wir in V zwei 2-stellige innere Verknüpfungen durch

+	o	e	x	y	z
o	o	e	x	y	z
e	e	x	o	o	o
x	x	o	e	o	o
y	y	o	o	z	o
z	z	o	o	o	y

•	o	e	x	y	z
o	o	o	o	o	o
e	o	e	x	y	z
x	o	x	e	z	y
y	o	y	z	e	x
z	o	z	y	x	e

Es sei das Ringoid $R = \{\{ o,e,x\},+,\cdot\}$ erklärt durch die oben gegebene Tabelle.

$\{ V,R,+,\cdot \}$ ist ein multiplikatives Vektoid über R, aber $\{V,+,\cdot\}$ ist kein Ringoid ($X = \{ x,y,z\}$).

3.2 Beispiele für Vektoide (siehe [12])

Beispiel 3.2.1

Es sei $\{ R,+,\cdot \}$ ein Ringoid. In $V_nR = R\times R\times \ldots \times R$ mit den Elementen

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = (a_i) \ , \ a_i \in R \quad \text{für alle } i=1(1)n$$

erklären wir für alle $a, b \in V_nR$, $a \in R$

$$a = b :\Longleftrightarrow \quad a_i = b_i \quad \text{für alle } i = 1(1)n$$

$$\bigwedge_{i=1(1)n} \quad \begin{aligned} a + b &:= (a_i + b_i) \\ a\cdot a &:= (a\cdot a_i) \end{aligned}$$

Dann folgt

a) $\{ V_n,R \}$ ist ein R-Vektoid

b) es gilt $-a = (-a_i)$

Aus Beispiel 3.2.1 ergibt sich:

R ein Ringoid $\Longrightarrow$ M_nR , $\mathbb{C}R$, $\mathbb{P}R$, $\mathcal{R}$ bilden wieder ein Ringoid
$\Longrightarrow$ V_nM_nR , $V_n\mathbb{C}R$, $V_n\mathbb{P}R$, $V_n\mathcal{R}$ bilden ein M_nR, $\mathbb{C}R$, $\mathbb{P}R$, $\mathcal{R}$ - Vektoid.

<u>Beispiel 3.2.2</u>

Es sei das Ringoid $\{ R,+,\cdot \}$. Für $A = (a_{ij})$ aus M_nR , a aus R erklären wir eine äussere Multiplikation

$\cdot : R \times M_nR \longrightarrow M_nR$ durch $a.A \ := (a\cdot a_{ij})$.

Dann ist $\{ M_nR, R\}$ ein multiplikatives R-Vektoid.

<u>Beispiel 3.2.3</u>

Es seien $\{ R,+,\cdot \}$ ein Ringoid und M_nR, V_nR wie vorher definiert. Es sei eine äussere Multiplikation
$\cdot : M_nR \times V_nR \longrightarrow V_nR$ erklärt durch:

$$\bigwedge_{A \in M_nR} \quad \bigwedge_{a \in V_nR} \qquad A \cdot a := \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir} \, b_r \right)$$

Dann ist $\{ V_nR , M_nR \}$ ein M_nR-Vektoid.

<u>Beispiel 3.2.4</u>

Es seien $\{ R,+,\cdot \}$ ein Ringoid, A eine Menge und (A , R) die Menge aller Abbildungen f,g,h,... von A in R . In (A,R) definieren wir für alle f,g aus (A,R) und $a \in R$

$$f = g \iff \bigwedge_{t \in A} \quad f(t) = g(t)$$

$$(f * g) (t) := f(t) * g(t) \qquad * \in \{ +,\cdot \}$$
$$(a\cdot f) (t) := a\cdot f(t)$$

Dann ist (A,R) ein multiplikatives R-Vektoid.

<u>Beispiel 3.2.5</u>

Es sei $\{ V,R \}$ ein R-Vektoid. Dann ist $\{ \mathbb{P}V , \mathbb{P}R \}$ ein $\mathbb{P}R$-Vektoid.

Ohne die Voraussetzung, daß $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein linear geordnetes Ringoid sein muß, erhält man

<u>Beispiel 3.2.6</u> - <u>Das komplexe Vektoid</u>

Es sei $\{ R,+,\cdot\}$ ein Ringoid und das zugehörige komplexe Ringoid $\{ \mathbb{C}R,+,\cdot\}$. Es sei $\{ V,R,+,\cdot\}$ ein Vektoid über R.

Sind nun zwei 2-stellige Verknüpfungen $+ : \mathbb{C}V \times \mathbb{C}V \longrightarrow \mathbb{C}V$ und $\cdot : \mathbb{C}R \times \mathbb{C}V \longrightarrow \mathbb{C}V$ mittels der Vorschriften

$$\bigwedge_{A \in \mathbb{C}V} \quad \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{C}R} \quad \alpha . A := (\mathrm{a}_1 a_1 - \mathrm{a}_2 a_2 , \mathrm{a}_1 a_2 + \mathrm{a}_2 a_1) \quad \text{und}$$

$$\bigwedge_{A,B \in \mathbb{C}V} \quad A + B := (a_1+b_1 \ , \ a_2+b_2)$$

definiert, wobei $A := (a_1 \ , \ a_2)$, $B := (b_1 \ , \ b_2)$, $\alpha := (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2)$

Dann ist

a) $\{ \mathbb{C}V \ , \ \mathbb{C}R \}$ ein Vektoid über $\{ \mathbb{C}R,+,\cdot \}$

b) $\{ \mathbb{C}V \ , \ \mathbb{C}R \ , \ +, \cdot \}$ ein multiplikatives Vektoid über $\mathbb{C}R$, wenn $\{ V,+,\cdot \}$ ein multiplikatives Vektoid ist und wenn zusätzlich eine innere Verknüpfung $\cdot$ in $\mathbb{C}V$ erklärt ist mit

$$\bigwedge_{A,B \in \mathbb{C}V} \quad A \cdot B := (a_1 b_1 - a_2 b_2 \ , \ a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

<u>3.3 Geordnete Vektoide und inklusionsisoton geordnete Vektoide</u>

<u>Definition 3.3.1</u>

Es sei $\{ V, \leq \}$[1)] eine geordnete Menge und $\{V,R,+,\cdot\}$ ein Vektoid über einem schwach-geordneten Ringoid $\{ R,+,\cdot,\leq \}$. V heißt ein schwach-geordnetes R-Vektoid, wenn gilt

---

[1)] *Wir bezeichnen zur Vereinfachung die Ordnungsrelation in* V *und* R *gleich, da Verwechslungen ausgeschlossen sind.*

(OV1) $\displaystyle\bigwedge_{a,b,c \in V} \quad a \le b \implies a + c \le b + c$

und

(OV2) $\displaystyle\bigwedge_{a,b \in V} \quad a \le b \implies -b \le -a$

{ V,R,+,·,≤ } heißt geordnet, wenn zusätzlich gilt

(OV3) $\displaystyle\bigwedge_{a,b \in R} \; \bigwedge_{a,b \in V} \quad \begin{array}{l} o \le a \wedge o \le a \le b \implies a \cdot a \le a \cdot b \\ o \le a \le b \wedge o \le a \implies a \cdot a \le b \cdot a \end{array}$

Ist { V,R,+,·,≤ } ein multiplikatives Vektoid, so heißt es geordnetes multiplikatives Vektoid, wenn (OV1,2,3) und

(OV4) $\displaystyle\bigwedge_{a,b,c \in V} \quad o \le a \le b \wedge o \le c \implies a \cdot c \le b \cdot c \wedge c \cdot a \le c \cdot b$

gelten.

Ein (multiplikatives) Vektoid { V,R,+,· } über einem Ringoid { R,+,· }heißt inklusionsisoton geordnet, wenn { R,⊆} und { V,⊆} geordnete Mengen sind und gilt

(OV5)

a) $\displaystyle\bigwedge_{a,b,c,d \in V} \quad (a \subseteq b \wedge c \subseteq d \implies a * c \subseteq b * d$

$* \in \{ +,\cdot \}$

b) $\displaystyle\bigwedge_{a,b \in R} \; \bigwedge_{a,b \in V} \quad (a \subseteq b \wedge a \subseteq b \implies a \cdot a \subseteq b \cdot b)$

□

<u>Satz 3.3.2</u>

Es gelten in einem schwach-geordneten Vektoid {V,R,≤} für alle $a,b,c,d \in V$ die Eigenschaften

(a) $a \leq b \quad \wedge \quad c \leq d \quad \Longrightarrow \quad a + c \leq b + d$

(b) $a \geq o \quad \wedge \quad b \geq o \quad \Longrightarrow \quad a + b \geq o$

(c) $a \leq o \quad \wedge \quad b \leq o \quad \Longrightarrow \quad a + b \leq o$

(d) $a > o \Longrightarrow -a < o$

(e) $a < o \Longrightarrow -a > o$

(f) Es gilt in V

$$\bigwedge_{a \in V} a \leq o \quad (\text{ oder } \quad o \leq a)$$

dann gilt

$$\text{i)} \quad -a = a \Longleftrightarrow a = o \qquad\qquad \bigwedge_{a \in V}$$
$$\text{ii)} \quad a + (-a) = o$$

In einem geordneten Vektoid gilt für alle $\mathrm{a},\mathrm{b} \in \mathrm{R}$, $a,b \in V$ zusätzlich

(g) $\mathrm{o} \leq \mathrm{a} \leq \mathrm{b} \wedge o \leq a \leq b \Longrightarrow o \leq \mathrm{a}\cdot a \leq \mathrm{b}\cdot b$
(h) $\mathrm{a} \leq \mathrm{b} \leq \mathrm{o} \wedge a \leq b \leq o \Longrightarrow o \leq \mathrm{b}\cdot b \leq \mathrm{a}\cdot a$
(i) $\mathrm{a} \leq \mathrm{b} \leq \mathrm{o} \wedge o \leq a \leq b \Longrightarrow \mathrm{a}\cdot b \leq \mathrm{b}\cdot a \leq o$
(j) $\mathrm{o} \leq \mathrm{a} \leq \mathrm{b} \wedge a \leq b \leq o \Longrightarrow \mathrm{b}\cdot a \leq \mathrm{a}\cdot b \leq o$
(k) $\mathrm{a} \geq \mathrm{o} \quad \wedge \quad a \geq o \quad \Longrightarrow \mathrm{a}\cdot a \geq o$
(l) $\mathrm{a} \geq \mathrm{o} \quad \wedge \quad a \leq o \quad \Longrightarrow \mathrm{a}\cdot a \leq o$
(m) $\mathrm{a} \leq \mathrm{o} \quad \wedge \quad a \geq o \quad \Longrightarrow \mathrm{a}\cdot a \leq o$
(n) $\mathrm{a} \leq \mathrm{o} \quad \wedge \quad a \leq o \quad \Longrightarrow \mathrm{a}\cdot a \geq o$

Es sei $\{ V,R,\leq \}$ ein geordnetes multiplikatives Vektoid, so gilt für alle $a,b,c,d \in V$ ferner

(o) $o \leq a \leq b \quad \wedge \quad o \leq c \leq d \Longrightarrow o \leq a\cdot c \leq b\cdot d \wedge o \leq c\cdot a \leq d\cdot b$
(p) $a \leq b \leq o \quad \wedge \quad c \leq d \leq o \Longrightarrow a\cdot c \geq b\cdot d \geq o \wedge c\cdot a \geq d\cdot b \geq o$
(q) $a \leq b \leq o \quad \wedge \quad o \leq c \leq d \Longrightarrow a\cdot d \leq b\cdot c \leq o \wedge d\cdot a \leq c\cdot b \leq o$
(r) $a \geq o \wedge b \geq o \Longrightarrow a\cdot b \geq o \quad \wedge \quad b\cdot a \geq o$
(s) $a \leq o \wedge b \leq o \Longrightarrow a\cdot b \geq o \quad \wedge \quad a\cdot b \geq o$
(t) $a \leq o \wedge b \geq o \Longrightarrow a\cdot b \leq o \quad \wedge \quad a\cdot b \leq o$

□

Bemerkungen

a) Es sei $\{ V,R,\leq \}$ ein geordnetes multiplikatives Vektoid. Dann gilt

$$\text{entweder} \quad e \parallel o \quad \text{oder} \quad e > o$$

Beweis

Nach Satz 3.1.3 i) gilt $e \neq o$, d.h. es gilt genau eine der Beziehungen.

$$e < o \quad \vee \quad e \parallel o \quad \vee \quad e > o$$

Annahme

$$e < o$$

$$e < o \quad \xRightarrow[3.3.2s]{\text{Satz}} \quad e = e \cdot e \geq o. \quad \text{Wid.}$$

□

b) Es sei $\{ V,R,\leq \}$ ein schwach geordnetes multiplikatives R-Vektoid mit den inneren Verknüpfungen $+,\cdot$ und der Eigenschaft, daß für mindestens ein Paar $a,b \in V$ $a < b$ gilt.
Dann ist $-e \neq e$.

3.4 Beispiele für geordnete Vektoide

Beispiel 3.4.1

Es sei $\{ R,+,\cdot \}$ ein Ringoid. In V_nR sei es eine Relation '$\leq$' definiert durch

$$\bigwedge_{a,b \in V_nR} \quad a \leq b :\Longleftrightarrow \bigwedge_{i = 1(1)n} a_i \leq b_i$$

Dann ist $\{ V_nR,R,\leq \}$ ein geordnetes Vektoid.

Erklären wir komponentenweise eine innere Multiplikation für Elemente aus V_nR mittels der inneren Multiplikation in $\{ R,+,\cdot,\leq \}$, dann wird $\{ V_nR,R,\leq \}$ ein geordnetes multiplikatives R-Vektoid.

Beispiel 3.4.2

Es sei $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein schwach-geordnetes Ringoid. Nach Beispiel 1.2.6 ist $\{ \mathbb{C}R,+,\cdot\ \leq \}$ ein schwach-geordnetes Ringoid. $\{ V_n\mathbb{C}R,\mathbb{C}R,\leq \}$ ist daher ein schwach-geordnetes Vektoid.

Beispiel 3.4.3

Es sei $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein geordnetes Ringoid. Nach Beispiel 3.2.2 ist M_nR ein (multiplikatives) Vektoid über R. Für $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$ aus M_nR erklären wir eine Relation '$\leq$' durch

$$A \leq B \quad :\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{i,j = 1(1)n} \quad (a_{ij} \leq b_{ij})$$

Dann ist $\{ M_nR,R,\leq \}$ ein geordnetes (multiplikatives) R-Vektoid.

Beispiel 3.4.4

Es sei $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein geordnetes Ringoid. Mit einer Ordnungsrelation '$\leq$' definiert in $\{ V_nR, M_nR \}$ durch

$$a \leq b \ :\Longleftrightarrow \ \text{für alle} \ \ i = 1(1)n \quad a_i \leq b_i,$$ wird

$\{ V_nR , M_nR \}$ ein geordnetes M_nR-Vektoid.

Beispiel 3.4.5

Es sei $\{ \mathbb{C}R,+,\cdot,\leq \}$ das schwach-geordnete Ringoid über einem Ringoid $\{ R,+,\cdot \}$. Nach Beispiel 3.2.6 ist $\{ \mathbb{C}V, \mathbb{C}R,+,\cdot \}$ein $\mathbb{C}R$-Vektoid, welches multiplikativ ist, falls V multiplikativ ist.

Ist ferner $\{ V,R,\leq \}$ ein schwach-geordnetes Vektoid, so läßt sich auch in $\mathbb{C}V$ eine Ordnungsrelation einführen durch

$$A \leq B \quad :\Longleftrightarrow \quad (a_1 \leq b_1 \ \wedge \ a_2 \leq b_2) \text{ mit}$$
$$A := (a_1, a_2) \text{ und } B := (b_1,b_2)$$

Dann wird $\{ \mathbb{C}V, \mathbb{C}R,\leq \}$ zu einem schwach-geordneten Vektoid über $\mathbb{C}R$.

3.5. Vollständig geordnete Ringoide und Vektoide

Es ist bekannt, daß eine bedingt vollständig geordnete Menge, die ein kleinstes und ein größtes Element besitzt, einen vollständigen Verband bildet. Beispielsweise bildet die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch Hinzunahme zweier Elemente $+\infty$ und $-\infty$ einen vollständigen Verband. Das Hinzufügen von $+\infty$ und $-\infty$ zu $\mathbb{R}$ bringt bekannte Widersprüche zur algebraischen Struktur oder zu den Verträglichkeitsbedingungen zwischen der algebraischen und der Ordnungsstruktur mit sich.

Wie dieser Vorgang bei bedingt vollständig geordneten Ringoiden aussieht, werden wir im folgenden untersuchen.

Wie in [12] gilt hier

Satz 3.5.1

Es sei $\{R,N,+,\cdot,/,\leq\}$ ein bedingt vollständig geordnetes Divisionsringoid.

Durch Hinzunahme eines kleinsten Elements $-p$ und eines größten Elements $+p$ wird $\{R \cup \{+p\} \cup \{-p\},N,+,\cdot,/,\leq\}$ zu einem vollständig geordneten (schwach-geordneten) Divisionsringoid. Wenn man die Verknüpfungen mit $-p$ und $+p$ folgendermaßen erklärt:

Addition $a + b$:

a \ b	$b \in R$	$-p$	$+p$
$a \in R$	$a + b$	$-p$	$+p$
$-p$	$-p$	$-p$	$p-p$
$+p$	$+p$	$p-p$	$+p$

mit $-(p-p) = p-p$

Multiplikation a • b :

a \ b	-p<b<o	o<b<+p	-p	-e	o	e	+p	$b \Vert o$
-p<a<o	a • b	a • b	+p	-a	o	a	-p	a • b
o<a<+p	a • b	a • b	-p	-a	o	a	+p	a • b
-p	+p	-p	+p	+p	o	-p	-p	(-p) • b
-e	-b	-b	+p	e	o	-e	-p	-b
o	o	o	o	o	o	o	o	o
e	b	b	-p	-e	o	e	+p	b
+p	-p	+p	-p	-p	o	+p	+p	(+p) • b
$a \Vert o$	a • b	a • b	a • (-p)	-a	o	a	a • (+p)	a • b

Division a / b :

a \ b	-p<b<o	o<b<+p	-p	e	+p	$b \Vert o$
-p<a<o	a/b	a/b	o	a	o	a/b
o<a<+p	a/b	a/b	o	a	o	a/b
-p	+p	-p	(-p)/(-p)	-p	(-p)/(+p)	(-p)/b
o	o	o	o	o	o	o
+p	-p	+p	(+p)/(-p)	+p	(+p)/(+p)	(+p)/b
$a \Vert o$	a/b	a/b	a/(-p)	a	a/(+p)	a/b

mit (-p)/(-p)=p/p>o
∧ (-p)/(+p)=p/(-p)<o.

□

Satz 3.5.2

Es sei $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein vollständig schwach-geordnetes Ringoid.

Es sei $\{ V,R,\leq \}$ ein bedingt vollständig geordnetes (schwach-geordnetes) Vektoid.

Durch Hinzunahme des Elements $-p$, $+p$ (wie in Satz 3.5.1), wird $\{ V \cup \{+p\} \cup \{-p\}, R, \leq \}$ zu einem vollständig geordneten (schwach-geordneten) Vektoid, wenn man die Verknüpfungen erklärt durch:

Addition $a + b$:

$a \backslash b$	$b \in V$	$-p$	$+p$
$a \in V$	$a + b$	$-p$	$+p$
$-p$	$-p$	$-p$	$p-p$
$+p$	$+p$	$p-p$	$+p$

mit $-(p-p) = p-p$.

Äußere Multiplikation $a \cdot a$:

a \ a	$-p<a<o$	$o<a<+p$	$-p$	o	$+p$	$a \parallel o$
-p<a<o	$a \cdot a$	$a \cdot a$	$+p$	o	$-p$	$a \cdot a$
o<a<p	$a \cdot a$	$a \cdot a$	$-p$	o	$+p$	$a \cdot a$
-p	$+p$	$-p$	$+p$	o	$-p$	$(-p) \cdot a$
-e	$-a$	$-a$	$+p$	o	$-p$	$-a$
o	o	o	o	o	o	o
e	a	a	$-p$	o	$+p$	a
+p	$-p$	$+p$	$-p$	o	$+p$	$(+p) \cdot a$
a‖o	$a \cdot a$	$a \cdot a$	$a \cdot (-p)$	o	$a \cdot p$	$a \cdot a$

Ist $\{ V,R,\leq \}$ ein geordnetes multiplikatives Vektoid, so wird $\{V \cup \{-p\} \cup \{+p\} , R ,\leq \}$ zu einem vollständig geordneten multiplikativen Vektoid, wenn man die innere Multiplikation mit den neuen Elementen wie folgt erklärt:

Multiplikation $a \cdot b$:

$a \backslash b$	$-p<b<o$	$o<b<+p$	$-p$	o	e	$+p$	$b\|\|o$
$-p<a<o$	$a \cdot b$	$a \cdot b$	$+p$	o	a	$-p$	$a \cdot b$
$o<a<+p$	$a \cdot b$	$a \cdot b$	$-p$	o	a	$+p$	$a \cdot b$
$-p$	$+p$	$-p$	$+p$	o	$-p$	$-p$	$(-p) \cdot b$
o	o	o	o	o	o	o	o
e	b	b	$-p$	o	e	$+p$	b
$+p$	$-p$	$+p$	$-p$	o	$+p$	$+p$	$p \cdot b$
$a\|\|o$	$a \cdot b$	$a \cdot b$	$a \cdot (-p)$	o	a	$a \cdot p$	$a \cdot b$

$\square$

4. RUNDUNGSINVARIANTE STRUKTUREN

4.1 Allgemeine Grundbegriffe

Die folgenden Kapitel 4 und 5 sind der Frage gewidmet, wie Verknüpfungen für die in den Spalten 3 und 4 von Tabelle 1 stehenden Mengen eingeführt werden können. Diese sollen in der Art und Weise definiert werden, daß sie die entsprechenden Verknüpfungen der Mengen in der zweiten Spalte möglichst gut "approximieren", ohne für den Moment genauer definieren zu wollen, was das heißt. Weiter wird untersucht, auf welche Strukturen diese Verknüpfungen führen.

Die folgenden Definitionen zitieren wir aus [12] :

Definition 4.1.1

Es sei $\{ M,\leq \}$ eine geordnete Menge, $T \subseteq M$ eine Teilmenge von M , $a \in M$ und

$L_T(a) := \{ b \mid b \in T \wedge b \leq a \}$ bzw.

$U_T(a) := \{ b \mid b \in T \wedge a \leq b \}$ die Menge der unteren bzw. oberen

Schranken von a in T.

T heißt ein unteres bzw. oberes Raster von M, wenn gilt

(S1) $\bigwedge\limits_{a \in M} L_T(a) \neq \emptyset$ bzw. $\bigwedge\limits_{a \in M} U_T(a) \neq \emptyset$

(S2) $\bigwedge\limits_{a \in M} \bigvee\limits_{x \in L_T(a)} \bigwedge\limits_{b \in L_T(a)} b \leq x$ bzw.

$\bigwedge\limits_{a \in M} \bigvee\limits_{x \in U_T(a)} \bigwedge\limits_{b \in U_T(a)} x \leq b$

d.h. die Menge $L_T(a)$ bzw. $U_T(a)$ besitzt ein grösstes bzw. kleinstes Element

$x = i\ (L_T(a)\ )$ bzw. $x = o\ (U_T(a)\ )$.

Ist T zugleich unteres und oberes Raster von M , so heißt $\{ T, \leq \}$ ein Raster von $\{ M, \leq \}$.

□

Definition 4.1.2

a) Es sei M eine Menge und $T \subseteq M$ eine Teilmenge von M. Eine Abbildung $\square : M \longrightarrow T$ heißt eine Rundung, wenn gilt

$$(\mathrm{R1}) \quad \bigwedge_{a \in T} \square a = a$$

b) Es sei $\{ M, \leq \}$ eine geordnete Menge und $\{ T, \leq \}$ ein unteres Raster bzw. oberes Raster von $\{ M, \leq \}$. Eine Rundung $\square : M \longrightarrow T$ heißt monoton, wenn gilt

$$(\mathrm{R2}) \quad \bigwedge_{a,b \in M} (a \leq b \Longrightarrow \square a \leq \square b)$$

Eine Rundung $\square : M \longrightarrow T$ heißt nach unten (bzw. oben) gerichtet, wenn gilt

$$(\mathrm{R3}) \quad \bigwedge_{a \in M} \square a \leq a \quad (\text{bzw.} \quad a \leq \square a).$$

Ist $\{ M,+,\cdot \}$ ein Ringoid, so heißt eine Rundung $\square : M \longrightarrow T$ antisymmetrisch, wenn gilt

$$(\mathrm{R4}) \quad \bigwedge_{a \in M} \square(-a) = -\square a .$$

□

Bemerkung

Zusammen mit der Monotonie erhält man eine Reihe spezieller Rundungen :

∇a : monotone, nach unten gerichtete Rundung
Δa : monotone, nach oben gerichtete Rundung

Ist $T = T(\beta, n, e_1, e_2)$ ein Gleitkommazahlsystem mit der Basis β, n Ziffern in der Mantisse und mit kleinstem Exponenten e_1 und größtem Exponenten e_2, so sind noch folgende Rundungen gebräuchlich (siehe [12])

$$\bigwedge_{a \ge o} \square_\beta a \le a \;\wedge \bigwedge_{a < o} \square_\beta a = -\square_\beta(-a)$$ Monotone Rundung nach innen

$$\bigwedge_{a \ge o} a \le \square_o a \;\wedge \bigwedge_{a < o} \square_o a = -\square_o(-a)$$ Monotone Rundung nach außen

Es bezeichne $S_\mu(a) := \nabla a + \frac{\Delta a - \nabla a}{\beta} \cdot \mu$, $\mu = 1(1)\,\beta - 1$

Dann erklären wir Rundungen $\square_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow T$, $\mu = 1(1)\beta - 1$
durch

$$\bigwedge_{a \in [o;\beta^{e_1-1}]} \square_\mu a = o$$

$$\bigwedge_{\beta^{e_1-1} \le a \le B} \square_\mu a = \begin{cases} \nabla a & \text{für } a \in [\nabla a;\ S_\mu(a)) \\ \Delta a & \text{für } a \in [S_\mu(a);\ \Delta a] \end{cases}$$

$$\bigwedge_{a < o} \square_\mu a = -\square_\mu(-a)$$

Wobei $B := o,(\beta - 1)(\beta - 1)\ldots\ldots(\beta - 1)\,\beta^{e_2}$ bezeichnet die größte darstellbare Gleitkommazahl und die Rundungen $\square_\mu$, $\mu = 1(1)\beta - 1$ werden nur im Bereich $|a| \le B$ verwendet.

Ist β eine gerade Zahl, so bezeichnet man die Rundung $\square_{\beta/2}$ als Rundung zur nächstgelegenen Zahl aus T, und es ist

$S_{\beta/2}(a) = (\nabla a + \Delta a)/2$ und

$$\bigwedge_{a \in [o;\beta^{e_1-1})} \square_{\beta/2} a = o$$

$$\bigwedge_{\beta^{e_1-1} \leq a \leq B} \quad \square_{\beta/2} a = \begin{cases} \nabla a & \text{für } a \in [\nabla a ; \frac{\nabla a + \Delta a}{2}) \\ \Delta a & \text{für } a \in [\frac{\nabla a + \Delta a}{2} ; \Delta a] \end{cases}$$

$$\bigwedge_{a \leq o} \quad \square_{\beta/2}\, a = -\square_{\beta/2}(-a)$$

Die Rundungen $\{\nabla, \Delta, \square_\mu, \mu = o(1)\beta\}$ sind nicht unabhängig voneinander. Darüberhinaus gelten

i) $\Delta a = -\nabla(-a)$, $\nabla a = -\Delta(-a)$

ii) $\square_o a = \text{sign}(a) \cdot \nabla(|a|)$

iii) $\square_\beta a = \text{sign}(a) \cdot \Delta(|a|)$

Alle Rundungen $\square_\mu , \mu = o(1)\beta$ sind ferner antisymmetrische Funktionen.

<u>Definition 4.1.3</u>

Es sei $\{R,+,\cdot\}$ ein Ringoid, $\{R,\leq\}$ eine geordnete Menge und $\{T,\leq\}$ ein Raster von $\{R,\leq\}$.

$\{T,\leq\}$ heißt ein symmetrisches Raster von $\{R,\leq\}$, wenn gilt

$$(S3) \quad o,e \in T \quad \wedge \quad \bigwedge_{b \in T} \quad -b \in T .$$

$\square$

Folgender Satz gibt ein einfaches Kriterium an, wann eine Teilmenge ein Raster ist.

<u>Satz 4.1.4</u>

Es sei $\{M,\leq\}$ ein vollständiger Verband (d.h. $\{M,\leq\}$ ist eine geordnete Menge und für jede Teilmenge $T \subseteq M$ existiert $\inf T$ und $\sup T$.

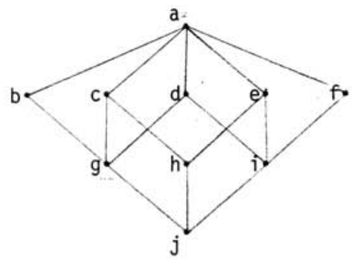
Eine Teilmenge $T \subseteq M$ ist dann und nur dann ein Raster von $\{M,\leq\}$ wenn $\{T,\leq\}$ ein vollständiger Teilverband von $\{M,\leq\}$ ist.

Der <u>Beweis</u> verläuft ähnlich wie in [12] .

$\square$

Beispiel 4.1.3

Sei der vollständige Verband $M = \{ a,b,c,d,e,f,g,h,i,j \}$ mit dem folgenden Ordnungsdiagramm:



Dann gilt für das Raster $T = \{ a, b, f, h, j \}$

a) die Abbildung $\square : M \longrightarrow T$

$$x \longrightarrow \square x := \begin{cases} x \text{ für } x \in T \\ j \text{ sonst} \end{cases}$$

ist eine nach unten gerichtete, nicht monotone Rundung

b) Die Abbildung $\square : M \longrightarrow T$

$$x \longrightarrow \square x := \begin{cases} x \text{ für } x \in T \\ a \text{ für } x \in \{ c,d,e \} \\ j \text{ für } x \in \{ g,i \} \end{cases}$$

bildet eine monotone Rundung (jedoch keine gerichtete Rundung!)

4.2 Rundungsinvariante Eigenschaften von Ringoiden

Die folgenden beiden Definitionen übernehmen wir aus [12] :

Definition 4.2.1

a) Es sei $\{ R,+,\cdot \}$ ein Ringoid, $\{ R,\leq \}$ ein vollständiger Verband und $\{T,\leq \}$ ein symmetrisches unteres Raster (bzw. oberes bzw. Raster) von $\{ R, \leq \}$, Ein Ringoid $\{ T, \boxplus, \boxdot \}$ heißt ein Rasterringoid von $\{ R, \leq \}$ bezüglich $\leq$, wenn das Element $x \in T$ das Axiom (D5) in $\{ T, \boxplus, \boxdot \}$ erfüllt und zusätzlich gilt

$$(RG1) \quad \bigwedge_{a,b \in T} \quad a * b \in T \implies a \boxed{*} b = a * b \qquad * \in \{ +, \cdot \}$$

b) Ein Rasterringoid heißt unteres (bzw. oberes) Rasterringoid, wenn gilt

$$(RG3) \quad \bigwedge_{a,b \in T} \quad a \boxed{*} b \leq a * b \quad (\text{bzw. } a * b \leq a \boxed{*} b) \qquad * \in \{ +, \cdot \}$$

c) Ein Rasterringoid heißt <u>monoton</u>, wenn gilt

$$(RG2) \quad \bigwedge_{a,b,c,d \in T} \quad (a * b \leq c * d \implies a \boxed{*} b \leq c \boxed{*} d) \qquad * \in \{ +, \cdot \}$$

d) Ist $\{ R, N, +, \cdot, / \}$ ein Divisionsringoid, so heißt ein Divisionsringoid $\{ T, T \cap N, \boxplus, \boxdot, / \}$ ein Rasterdivisionsringoid, wenn $\{ T, \boxplus, \boxdot \}$ ein Rasterdivisionsringoid ist, das Element $x \in T$ auch das Axiom (D9) erfüllt und (RG1) auch für die Division gilt, wobei $b \in T \setminus (T \cap N)$ bei der Division ist.

Ein Rasterdivisionsringoid heißt monoton bzw. unteres Rasterdivisionsringoid, wenn (RG2) bzw. (RG3) auch für die Division gilt, mit $b, d \in T \setminus (T \cap N)$ ist.

<u>Definition 4.2.2</u>

Es sei $\{ R, +, \cdot, \leq_1 \}$ ein schwach-geordnetes Ringoid, $\{ R, \leq_2 \}$ ein vollständiger Verband und $\{ T, \leq_2 \}$ ein symmetrisches unteres Raster (bzw. ein symmetrisches oberes Raster, bzw. ein symmetrisches Raster) von $\{ R, \leq_2 \}$. Eine im Raster erklärte geordnete algebraische Struktur heißt ein schwach-geordnetes Rasterringoid $\{ T, \boxplus, \boxdot, \leq_1 \}$ von $\{ R, +, \cdot, \leq_1 \}$ bezüglich der Ordnungsrelation $\leq_2$, wenn gilt

1. $\{ T, ⊞, ⊡ \}$ ist ein Rasterringoid.

2. $\{ T, ⊞, ⊡ \leq_1\}$ ist ein schwach-geordnetes Ringoid.

3. Das Element $x \in T$ erfüllt das Axiom (OD2) in $\{ T, ⊞, ⊡, \leq_1 \}$.

Ist $\{ R,+,\cdot,\leq_1\}$ ein geordnetes Ringoid, so heißt ein schwach-geordnetes Rasterringoid $\{ T, ⊞, ⊡, \leq_1\}$ ein "geordnetes-Rasterringoid", wenn es ein geordnetes Ringoid ist.

Ist $\{ R,N,+,\cdot,/,\leq_1\}$ ein (schwach-) geordnetes Divisionsringoid, so heißt ein (schwach) geordnetes Divisionsringoid $\{ T,T\cap N, ⊞, ⊡, ⧄, \leq_1 \}$ein "(schwach) geordnetes Rasterdivisionsringoid", wenn es sowohl ein (schwach) geordnetes Rasterringoid ist als auch ein Rasterdivisionsringoid.
□

Wir werden jetzt den Satz 4.5 von [12] verallgemeinern. Dort wurde vorausgesetzt, daß $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein linear geordnetes A-Ringoid ist. Hier werden wir ähnlich wie in Satz 2.1.5 nur von der Menge

$X_T := \{ k \in T \mid k$ erfüllt (D5) in $\{ T, ⊞, ⊡ \}$ spezielle Eigenschaften benötigen.

<u>Satz 4.2.3</u>

Voraussetzungen

1) Sei $\{ R,N,+,\cdot,/ \}$ ein Divisionsringoid

2) Sei $\{ R,\leq \}$ ein vollständiger Verband

3) Sei $\{ T,\leq \}$ ein symmetrisches unteres (bzw. oberes) Raster von $\{ R,\leq \}$

4) Sei $\square : R \longrightarrow T$ eine antisymmetrische Rundung

5) Seien in T zwei 2-stellige innere Verknüpfungen + und $\cdot$ sowie eine Division / erklärt durch die Vorschrift

$$\text{(RG)} \quad \bigwedge_{a,b \in T} \quad a \boxed{*}\, b \ := \ \Box\,(a * b) \qquad\qquad * \in \{+,\cdot,/\}$$

6) Sei ρ eine zweistellige antisymmetrische Relation in

$X_T \ := \{ k \in T \mid k$ erfüllt (D5) in $\{T, \boxplus, \boxdot\}\}$ mit folgenden

Eigenschaften

i) $$\bigwedge_{x,y \in X_T} \quad x \,\rho\, y \ \vee \ y \,\rho\, x$$

ii) $$\bigwedge_{x,y,z \in X_T} \quad x \,\rho\, y \ \Longrightarrow \ z \boxdot y \ \ \rho\ \ z \boxdot x \quad \text{oder}$$

$$\bigwedge_{x,y,z \in X_T} \quad x \,\rho\, y \ \Longrightarrow \ z \boxdot x \ \ \rho\ \ z \boxdot y$$

<u>Behauptungen</u>

i) $\{T, T \cap N, \boxplus, \boxdot, \boxslash\}$ ist ein Rasterdivisionsringoid von $\{R,N,+,\cdot,/\}$ bezüglich $\leq$. Das Element $x \in T$ erfüllt außer (D5) auch das Axiom (D9) in T.

ii) Ist $\Box$ eine monotone Rundung, so ist $\{T, T \cap N, \boxplus, \boxdot, \boxslash\}$ ein monotones Rasterdivisionsringoid

iii) Ist $\Box$ nach unten (bzw. oben) gerichtet, so ist $\{T, T \cap N, \boxplus, \boxdot, \boxslash\}$ ein unteres (bzw. oberes) Rasterdivisionsringoid.

iv) Ist $\{R,N,+,\cdot,/,\leq\}$ ein (schwach) geordnetes Divisionsringoid und $\Box$ eine monotone Rundung, so ist $\{T, T \cap N, \boxplus, \boxdot, \boxslash\}$ ein (schwach) geordnetes, monotones Rasterdivisionsringoid.

<u>Beweis</u>

Nach [12] bleibt nur (D5a) und (D6) zu zeigen.

(D5a) Es sei $x \in T \subseteq R$, welches (D6) in $\{R,+,\cdot\}$ erfüllt. Dann ist

$$x \boxplus e \ := \ \Box(x + e) \ = \ \Box o = o.$$

(D6) Direkt aus Satz 2.1.3.

$\Box$

Wir werden jetzt die Strukturen M_nS und $\mathbb{C}S$ untersuchen.

Satz 4.2.4

Voraussetzungen

1) Sei $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein vollständig (schwach) geordnetes Ringoid

2) Sei $\{ M_nR,+,\cdot,\leq \}$ wie in Beispiel 2.2.2 erklärt

3) Sei S ein symmetrisches Raster von R, $\square : R \longrightarrow S$ eine Rundung und $\{ S, \boxplus, \boxdot, \leq\}$ wieder ein(schwach) geordnetes Ringoid

4) Seien in S zwei 2-stellige innere Verknüpfungen $\boxplus$ und $\boxdot$ erklärt durch

$$(\text{RG}) \quad \bigwedge_{a,b \in S} \quad a \boxast b := \square(a * b) \qquad * \in \{+,\cdot\}$$

Behauptungen

i) Die Menge D aller Diagonalmatrizen mit konstantem Diagonalglied über $\{ S, \boxplus, \boxdot, \leq\}$ ist isomorph zu $\{ S, \boxplus, \boxdot, \leq \}$

ii) $\{ M_nS, \boxplus, \boxdot, \leq \}$ ist ein (schwach) geordnetes Rasterringoid von $\{ M_nR, \boxplus, \boxdot, \leq \}$ mit $\square : M_nR \longrightarrow M_nS$ erklärt durch

$$\bigwedge_{A = (a_{ij}) \in M_nR} \quad \square A := (\square a_{ij}) \text{ und mit}$$

$$\bigwedge_{A,B \in M_nR} \quad A \boxast B := \square(A * B)$$

iii) Es gilt (R1,2,4) für $\square : M_nR \longrightarrow M_nS$, wenn (R1,2,4) für $\square : R \longrightarrow S$ gilt

Beweis

i) klar

ii)iii) Wir beweisen hier nur (D6), da nach Satz 4.2.3 (D1,2,3,4,5) gilt, nach Satz 4.1 3 (siehe [12]) M_nS ein symmetrisches Raster von M_nR ist und $\square : M_nR \longrightarrow M_nS$ eine monotone und antisymmetrische Rundung bildet.

(D6) Hier führt das Axiom (D5a) und i) wieder zu einem einfachen und kurzen Beweis.

(D6)

$$X = \begin{bmatrix} x_x & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & x \end{bmatrix} \qquad \text{erfüllt (D5) in } M_nS.$$

Es sei ein $Y \in M_nS$ gegeben, welches (D5) in M_nS erfüllt. Aus (D5a) folgt

$$Y \boxplus E = 0 \implies \bigwedge_{i,j=1(1)n} \begin{cases} i=j \implies y_{ii} \boxplus e = o \\ i \neq j \implies y_{ij} = o \end{cases}$$

Aus Satz 1.1.13 a)ii) folgt für alle

$$A \in M_nS \qquad Y \boxdot A = A \boxdot Y \qquad (1)$$

Es sei $A = (a_{ij})$ so, daß für alle $i,j=1(1)n$ $a_{ij} = e$. Dann folgt aus (1)

$$\bigwedge_{i,j=1(1)n} \qquad y_{ii} = y_{jj}.$$

Das bedeutet, daß

$$Y = \begin{bmatrix} y_y & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & y \end{bmatrix} \qquad \text{ist,}$$

und wegen i) folgt die Behauptung.

<u>Satz 4.2.5</u>

Voraussetzungen

1) Sei $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein vollständig geordnetes Ringoid
2) Sei $\{ \mathbb{C}R,+,\cdot,\leq \}$ wie in Beispiel 2.2.3
3) Sei S ein symmetrisches Raster von R und $\square : R \longrightarrow S$ eine Rundung
4) Seien in S zwei 2-stellige Verknüpfungen erklärt durch

$$(\text{RG}) \quad \bigwedge_{a,b \in S} \qquad a \boxast b := \square (a * b) \quad \text{für} \quad * \in \{+,\cdot\}$$

5) Sei $\{ S, \boxplus, \boxdot, \leq \}$ das (z.B. aus Satz 4.2.3) entsprechende Rasterringoid

<u>Behauptungen</u>

i) Es besteht eine Isomorphie zwischen $\{ S, \boxplus, \boxdot, \leq \}$ und $\{ \mathbb{C}S, \boxplus, \boxdot, \leq \}$ für Elemente mit verschwindendem Imaginärteil

ii) $\{ \mathbb{C}S, \boxplus, \boxdot, \leq \}$ ist ein schwach geordnetes Rasterringoid von $\{ \mathbb{C}R,+,\cdot,\leq \}$ wobei $\square : \mathbb{C}R \longrightarrow \mathbb{C}S$ erklärt ist durch

$$\bigwedge_{\alpha = (a_1,a_2) \in \mathbb{C}R} \qquad \square\alpha := (\square a_1, \square a_2) \text{ und}$$

$$\bigwedge_{\alpha,\beta \in \mathbb{C}S} \qquad \alpha \boxast \beta := \square (\alpha * \beta) \quad \text{mit} \quad * \in \{ +,\cdot \}$$

iii) Es gilt (R1,2,4) für $\square : \mathbb{C}R \longrightarrow \mathbb{C}S$,
wenn (R1,2,4) für $\square : R \longrightarrow S$ gilt

Beweis

i) klar

ii)iii) Nach Satz 4.2.3 gilt D1 bis D5 und aus [12] folgt, daß $\mathbb{C}S$ ein symmetrisches Raster von $\mathbb{C}R$ und $\square : \mathbb{C}R \longrightarrow \mathbb{C}S$ eine monotone und antisymmetrische Rundung ist.

Es bleibt nur noch (D6) zu zeigen.

(D6) Hier führen wir wieder einen einfacheren und kürzeren Beweis ohne die Voraussetzung, daß $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein linear geordnetes Ringoid ist.

(x,o) erfüllt (D5) in $\mathbb{C}S$.

Es sei $\eta = (y_1, y_2)$ aus $\mathbb{C}S$, welches die Axiome (D5a,b,c,d) erfüllt. Aus (D5a) folgt

$$(y_1, y_2) \boxplus (e,o) = (o,o) \Longrightarrow y_1 \boxplus e = o \quad \wedge \quad y_2 = o$$

d.h. η muß die Form $\eta = (y_1,o)$ haben.

Wegen i) folgt $y = x$ und damit $\eta = (x,o)$.

$\square$

Bemerkungen

a) Das folgende Diagramm 1 gibt eine Obersicht, wie sich eine ganze Menge von Strukturen erklären lassen. Darin bedeutet

1) R ein geordnetes Ringoid (z.B. die reellen Zahlen $\mathbb{R}$)

2) S,T das z.B. aus Satz 4.2.3 erzeugte Ringoid (oder linear geordnete Ringoid) in symmetrischen Rastern von R, z.B.

S - die doppeltlangen Gleitkommazahlen

T - die einfachlangen Gleitkommazahlen einer gegebenen Rechneranlage.

b) In M_nT, $\mathbb{C}T$, $M_n\mathbb{C}T$, lassen sich Strukturen folgendermassen einführen:

Es sei $\mathbb{C}T$ ein symmetrisches Raster von $\mathbb{C}S$, daraus folgt, daß $\mathbb{C}T$ ein symmetrisches Raster von $\mathbb{C}R$ ist. Es sei $\Diamond : \mathbb{C}S \longrightarrow \mathbb{C}T$ eine monotone und antisymmetrische Rundung, dann ist die Abbildung $\Box : \mathbb{C}R \longrightarrow \mathbb{C}T$ auch eine monotone und antisymmetrische Rundung.

Es seien in $\mathbb{C}T$ zwei 2-stellige Verknüpfungen folgendermassen erklärt:

$$\bigwedge_{A,B \in \mathbb{C}T} \quad A \mathbin{\Diamond\!\!\!\!\;\ast} B := \Diamond(A \boxast B) = \Diamond(\Box(A * B))$$

Dann erhält man:

Satz 4.2.5 $\Longrightarrow$ $\{ \mathbb{C}T, \diamondplus, \diamondcdot, \leq \}$ ist ein schwach geordnetes, monotones Rasterringoid von $\{ \mathbb{C}R, +, \cdot, \leq \}$.

Damit folgt: $\{\mathbb{C}T, \diamondplus, \diamondcdot, \leq \}$ ist ein schwach geordnetes Rasterringoid von $\{ \mathbb{C}S, \boxplus, \boxdot, \leq \}$.

Ebenso folgt die Aussage für $M_n T$ und $M_n \mathbb{C}T$.

4.3 Rundungen in Vektoiden

Die Sätze, Lemma und Definitionen gelten ohne Änderungen wie bei [15], [12]. Wir bringen nur eine

Zusammenfassung

Bei Abbildung eines Vektoides (bzw. eines multiplikativen Vektoides) $\{V,R\}$ in ein symmetrisches Raster T mittels (R1,2,4) (RG)[1)] entsteht wieder ein Vektoid (bzw. ein multiplikatives Vektoid) über einem Rasterringoid S von R. Ebenso wird die Struktur eines (schwach) geordneten (multiplikativen) Vektoides auf das Vektoid im Raster übertragen. Zusätzlich gelten die durch den Begriff des (multiplikativen) Rastervektoides gefassten Veträglichkeitsbedingungen zwischen den Verknüpfungen in $\{V,R\}$ und $\{T,S\}$. In diesem Sinne sind die Begriffe eines (schwach) geordneten (multiplikativen) Vektoides wieder invariant bezüglich (R,1,2,4) (RG) (S3) in ein symmetrisches (unteres, oberes) Raster.

---

1) (RG) $\bigwedge_{A,B \in T} A \boxast B := \Box(A * B) \qquad \bigwedge_{a \in S} \bigwedge_{A \in T} a \boxdot A := \Box(a \cdot A)$

Kapitel 4 - Zusammenfassung

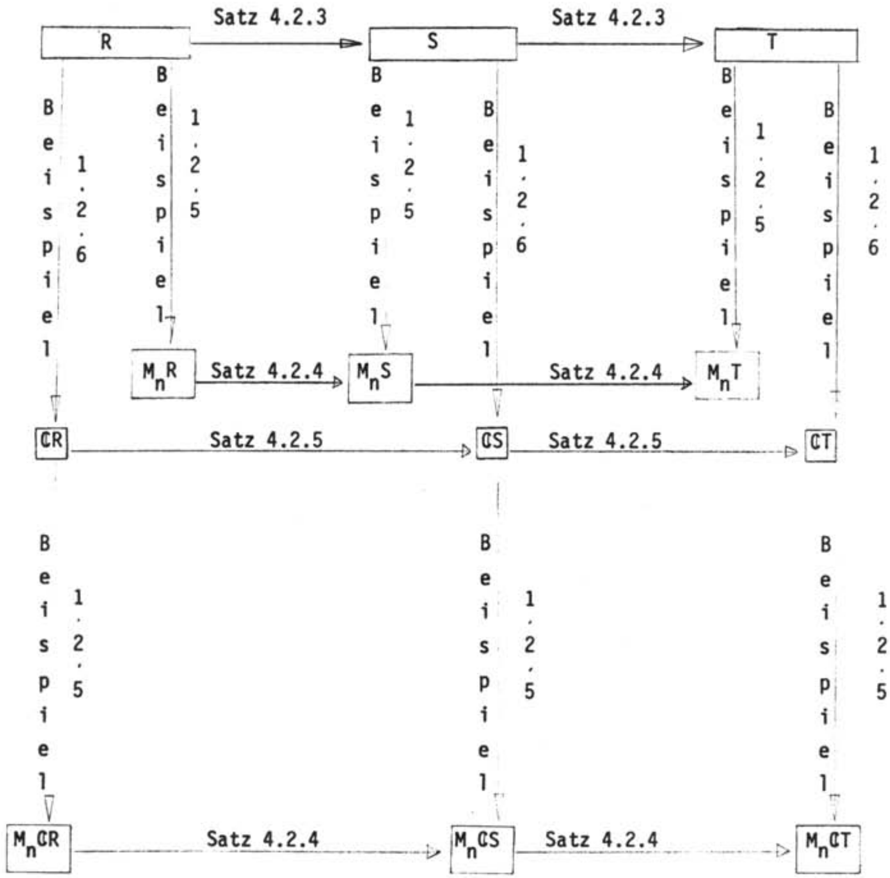


DIAGRAMM 1

Übersicht über den Zusammenhang einiger Strukturen und rundungsinvarianten Strukturen beim Rechnen mit Gleitkommazahlen

5. INTERVALLRECHNUNG OBER RINGOIDEN

5.1. Grundbegriffte der Intervallrechnung

In Anlehnung an [1] , [12] und [14] führen wir folgende Begriffe und Strukturen ein :

Definition 5.1.1

a) Es sei $\{R,\leq\}$ eine geordnete Menge. Die Menge aller Intervalle $[a_1; a_2]$ mit den Intervallgrenzen a_1 und a_2 werden wir mit $\mathbb{I}R$ bezeichnen, wobei

$$A := [a_1; a_2] := \{x \in R \mid a_1, a_2 \in R \wedge a_1 \leq x \leq a_2\} \text{ mit } a_1 \leq a_2 .$$

Ein Intervall $[a;a]$ bezeichnen wir als Punktintervall.

b) Zwei Intervalle $A=[a_1;a_2]$, $B=[b_1;b_2]$ heißen gleich, im Zeichen $A=B$, genau dann, wenn $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$ ist.
□

Definition 5.1.2

a) Es sei $\{R,\leq\}$ eine geordnete Menge und $A = [a_1;a_2]$, $B = [b_1;b_2]$ aus $\mathbb{I}R$. Wir erklären eine Ordnungsrelation " $\leq$ " in $\mathbb{I}R$ durch

$$A \leq B \ :\Longleftrightarrow\ (a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2)$$

b) $\mathbb{I}R$ ist eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathbb{P}R$. Damit erklären wir in $\mathbb{I}R$ eine Relation " $\subseteq$ " durch

$$[a_1; a_2] \subseteq [b_1; b_2] \ :\Longleftrightarrow\ (b_1 \leq a_1 \wedge a_2 \leq b_2).$$
□

Definition 5.1.3

Die algebraischen Verknüpfungen $\{+,-,\cdot,/\}$ sind in $\mathbb{IR}$ erklärt durch

$$\bigwedge_{A,B \in \mathbb{IR}} \quad \bigwedge_{* \in \{+,-,\cdot,/\}} \quad A * B := \{z=x*y \mid a_1 \le x \le a_2 \wedge b_1 \le y \le b_2\}$$

Dabei setzen wir im Falle der Division voraus, daß $o \notin [b_1; b_2]$.
$\square$

Satz 5.1.4

Die oben angegebenen Intervallverknüpfungen lassen sich in $\mathbb{IR}$ darstellen als Verknüpfungen der Intervallgrenzen. Für a_1,a_2,b_1,b_2 aus $\mathbb{R}$ folgt

(a) $[a_1;a_2] + [b_1;b_2] = [a_1+b_1 ;a_2 +b_2]$

(b) $-[a_1;a_2]= [-a_2;-a_1]$ und $A-B = A + (-B)$

(c) $[a_1;a_2] \cdot [b_1;b_2] = [\inf M; \sup M]$ mit $M =\{a_1b_1,a_2b_2,a_1b_2, a_2b_1\}$

(d) $1/[a_1;a_2] = [1/a_2; 1/a_1]$ und $A/B = A\cdot(1/B)$ sofern $o \notin B$. $\square$

5.2 Intervallrechnung über Ringoiden

Satz 5.2.1

A) Es sei $\{ R,\le \}$ ein vollständiger Verband und $\overline{\mathbb{I}R}:=\mathbb{I}R \cup\{\emptyset\}$. Dann gilt:

i) $\{\mathbb{I}R,\subseteq\}$ ist ein bedingt vollständiger Verband

ii) Wenn $\mathbb{I}R \supseteq A \neq \emptyset$ beschränkt ist, dann gilt für $B=[b_1;b_2]$

$$\inf_{\mathbb{I}R} A = [\sup_{B \in A} b_1 ; \inf_{B \in A} b_2]$$

$$\sup_{\mathbb{I}R} A = [\inf_{B \in A} b_1 ; \sup_{B \in A} b_2]$$

iii) $\{\overline{\mathbb{I}R}, \subseteq\}$ ist ein oberes Raster von $\{\mathbb{P}R, \subseteq\}$

B) Es sei $\{R,+,\cdot,\leq\}$ ein vollständig schwach-geordnetes Ringoid. Dann gilt:

iv) $\{\overline{\mathbb{I}R}, \subseteq\}$ ist ein symmetrisches, oberes Raster von $\{\mathbb{P}R, \subseteq\}$ bezüglich " $\subseteq$ "

v) $$\bigwedge_{A \in \mathbb{I}R} (A=[a_1;a_2] \Longleftrightarrow -A = [-a_2;-a_1] \;\; \mathbb{I}R)$$

vi) $$\bigwedge_{\emptyset \neq A \in \mathbb{P}R} \square A := \inf(U(A) \cap \mathbb{I}R) = [\inf_{a \in A} a ; \sup_{a \in A} a],$$

wobei $\square : \mathbb{P}R \longrightarrow \overline{\mathbb{I}R}$ die monotone, nach oben gerichtete Rundung von $\mathbb{P}R$ nach $\overline{\mathbb{I}R}$ bezeichnet.

vii) Die oben erklärte monotone, nach oben gerichtete Rundung $\square : \mathbb{P}R \longrightarrow \overline{\mathbb{I}R}$ ist antisymmetrisch, d.h. es gilt

$$\bigwedge_{\emptyset \neq A \in \mathbb{P}R} \square(-A) = -\square A$$

Beweis

siehe [12]

□

Definition 5.2.2

Es seien $\{R,+,\cdot,\leq\}$ ein vollständig schwach-geordnetes Ringoid, $\mathbb{P}R$ das Ringoid in der Potenzmenge von R und $\square : \mathbb{P}R \longrightarrow \overline{\mathbb{I}R}$ die monotone, nach oben gerichtete Rundung. Dann definieren wir in $\mathbb{I}R$ zwei 2-stellige innere Verknüpfungen durch:

$$\bigwedge_{A,B \in I\!IR} \quad A \boxed{*} B := \square (A * B) \qquad * \in \{ +, \cdot \}$$

$\square$

Bemerkung

Aus Satz 5.2.1 vi) folgt

$$\bigwedge_{A,B \in I\!IR} \quad A \boxed{*} B := \square (A * B) = [\inf_{a \in A,\, b \in B} (a * b) \, ; \, \sup_{a \in A,\, b \in B} (a * b)]$$

Satz 5.2.3

Voraussetzungen

1) Sei $\{ R, +, \cdot, \leq \}$ ein vollständig schwach-geordnetes Ringoid.

2) Sei $\{ I\!PR, +, \cdot \}$ das Ringoid der Potenzmenge von R

3) Bezeichne $\boxed{*}$, $* \in \{ +, \cdot \}$, die in Definition 5.2.2 in $I\!IR$ erklärten Verknüpfungen.

Behauptungen

i) Die Menge $\{ I\!I\underset{\cdot}{R}, \boxplus, \boxdot \}$ aller Punktintervalle über R ist isomorph zum Ringoid $\{ R, +, \cdot \}$.

ii) $\{ I\!IR, \boxplus, \boxdot, \leq, \subseteq \}$ ist bezüglich $\leq$ ein vollständig schwach-geordnetes Ringoid.

iii) $I\!IR$ ist bezüglich $\subseteq$ ein inklusionsisoton geordnetes Ringoid

iv) Bezüglich $\subseteq$ ist $\overline{I\!IR}$ ein monotones, oberes Rasterringoid von $I\!PR$.

Beweis

i) klar

ii) bis iv) Nach [12] bleibt nur (D5a) zu beweisen:

$$-E \boxplus E = [-e;-e] \boxplus [e;e] = \square([-e;-e] + [e;e]) =$$
$$= [\inf(-e+e); \sup(-e+e)] = [o;o]$$

Für das Axiom (D6) kann im Gegensatz zu [12] ein wesentlich einfacherer und kürzerer Beweis erbracht werden:

Es sei $Y = [y_1; y_2] \in \mathbb{I}R$ mit der Eigenschaft (D5).
Aus $Y \boxdot Y = [e;e]$ folgt insbesondere

$$\bigwedge_{a,b \in Y} \quad ab = aa = ba = bb = e \qquad \text{(I)}$$

Es sei $A = [y_1;y_1]$ und $B = [y_2;y_2]$ aus $\mathbb{I}R$. Nach (D5c) gilt

$$[y_1;y_2] \boxdot ([y_1;y_1] \boxdot [y_2;y_2]) = ([y_1;y_2] \boxdot [y_1;y_1]) \boxdot [y_2;y_2]$$
$$= [y_1;y_1] \boxdot ([y_1;y_2] \boxdot [y_2;y_2])$$

Damit folgt aus (I)

$$[y_1;y_2] \boxdot [e;e] = [e;e] \boxdot [y_2;y_2] = [y_1;y_1] \boxdot [e;e]$$

$$\Longrightarrow \quad [y_1;y_2] = [y_1;y_1] = [y_2;y_2] \quad \Longleftrightarrow \quad y_1 = y_2$$

d.h. $Y = [y;y]$

Da Y ein Punktintervall ist, folgt wegen i) $y = x$ und damit

$Y = [x;x]$. $\square$

5.3 Intervallrechnung über einem Raster eines Ringoids

Definition 5.3.1

Es sei $\{R,\le\}$ ein vollständiger Verband, $\{T,\le\}$ ein Raster (bzw. oberes bzw. unteres Raster) von $\{R,\le\}$ und $\mathbb{P}R$ die Potenzmenge von R.

Die Menge der Intervalle über R mit Schranken in T der Form

$$A := [a_1 ; a_2] := \{x \in R \mid a_1, a_2 \in T \wedge a_1 \le x \le a_2\}$$

werden wir mit $\mathbb{I}T$ bezeichnen. Es ist dann

$$\mathbb{I}T \subseteq \mathbb{I}R \quad \text{und} \quad \overline{\mathbb{I}T} := \mathbb{I}T \cup \{\emptyset\} \subseteq \mathbb{I}R \cup \{\emptyset\} =: \overline{\mathbb{I}R}\,.$$

□

Satz 5.3.2

Voraussetzungen

1) Sei $\{R,\le\}$ ein vollständiger Verband
2) Sei $\{T,\le\}$ ein Raster von $\{R,\le\}$
3) Seien $\mathbb{P}R$, $\mathbb{I}R$, $\mathbb{I}T$ wie üblich

Behauptung

i) $\{\mathbb{I}T,\subseteq\}$ ist ein bedingt vollständiger Verband

ii) Für $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{I}T$ und $B := [b_1;b_2] \in \mathbb{I}T$ gilt

$$\inf_{\mathbb{I}T} A = [\sup_{B\in A} b_1 ; \inf_{B\in A} b_2]$$

$$\sup_{\mathbb{I}T} A = [\inf_{B\in A} b_1 ; \sup_{B\in A} b_2]$$

iii) $\{\overline{\mathbb{I}T}, \subseteq\}$ ist ein Raster von $\{\overline{\mathbb{I}R}, \subseteq\}$

Beweis

Siehe [12]

Satz 5.3.3

Voraussetzungen

1) Sei $\{R,+,\cdot,\leq\}$ ein vollständig schwach-geordnetes Ringoid

2) Sei $\{T,\leq\}$ ein symmetrisches Raster von $\{R,\leq\}$

3) Sei $\{\mathbb{I}R,\subseteq\}$ der bedingt vollständige Verband der Intervalle über R

4) Sei $\{\mathbb{I}R, \boxplus, \boxdot,\}$ das monotone, obere Rasterringoid von $\{\mathbb{P}R,+,\cdot\}$ bezüglich $\subseteq$

Behauptungen

i) $\{\mathbb{I}T,\subseteq\}$ ist eine symmetrische Teilmenge von $\{\mathbb{I}R, \boxplus, \boxdot\}$ und es gilt

$$\bigwedge_{A=[a_1;a_2]\in\mathbb{I}T} \boxminus A = [-a_2; -a_1] \in \mathbb{I}T$$

ii)

$$\bigwedge_{A=[a_1;a_2]\in\mathbb{I}R} \Diamond A := \inf(U(A)\cap\mathbb{I}T) = [\nabla a_1; \Delta a_2]$$

iii) Die durch ii) erklärte monotone, nach oben gerichtete Rundung $\Diamond: \overline{\mathbb{I}R} \longrightarrow \overline{\mathbb{I}T}$ ist antisymmetrisch, d.h. es gilt

$$\bigwedge_{A \in \mathbb{I}R} \quad \Diamond(\boxminus A) = \boxminus(\Diamond A)$$

Beweis

siehe [12]

Definition 5.3.4

Es sei $\{R,+,\cdot,\leq\}$ ein vollständig schwach-geordnetes Ringoid (bzw. $\{R,N,+,\cdot,/,\leq\}$ ein vollständig schwach geordnetes Divisionsringoid) und $\{\mathbb{I}R, \boxplus, \boxdot\}$ das monotone obere Rasterringoid von $\{\mathbb{P}R,+,\cdot\}$ (bzw. $\{\mathbb{I}R,\overline{N}, \boxplus, \boxdot, \boxslash\}$ $\overline{N} := \{A \mid A \in \mathbb{I}R \wedge A \cap N \neq \emptyset\}$ das monotone, obere Rasterdivisionsringoid von $\{\mathbb{P}R,\widetilde{N},+,\cdot,/\}$, $\widetilde{N} := \{A \mid A \in \mathbb{P}R \wedge A \cap N \neq \emptyset\}$) bezüglich $\subseteq$.

Es sei ferner $\{T,\leq\}$ ein symmetrisches Raster von $\{R,\leq\}$, $\{\mathbb{I}T,\subseteq\}$ das symmetrische Raster der Intervalle über R mit Schranken aus T von $\{\mathbb{I}R, \boxplus, \boxdot\}$ und $\Diamond : \overline{\mathbb{I}R} \longrightarrow \overline{\mathbb{I}T}$ die monotone, nach oben gerichtete Rundung.

In $\mathbb{I}T$ definieren wir zwei (bzw. drei) 2-stellige Verknüpfungen durch

$$\bigwedge_{A,B \in \mathbb{I}T} \quad A \,\Diamond\!\!\!\!\ast\, B := \Diamond(A * B) \qquad * \in \{+,\cdot\}$$

bzw. $$\bigwedge_{A \in \mathbb{I}T} \quad \bigwedge_{B \in \mathbb{I}T\setminus\overline{N}} \quad A \,\Diamond\!\!\!\!/\, B := \Diamond(A \boxslash B)$$

Aus Definition 5.2.2 und 5.3.4 folgt

$$\bigwedge_{A,B \in \mathbb{I}T} \quad A \,\Diamond\!\!\!\!\ast\, B := \Diamond(A \,\boxed{\ast}\, B) := \Diamond(\square(A * B)) =$$

$$= [\, \triangledown \inf_{a \in A, b \in B} (a * b);\ \vartriangle \sup_{a \in A, b \in B} (a * b)\,]$$

Jetzt wird der Obergang zu einem Raster $\mathbb{I}T$ von $\mathbb{I}R$ unter neuen Gesichtspunkten untersucht.

Hier beweisen wir in einfacher Weise die Eigenschaft "Wenn $A \in \mathbb{I}T$ (D5) erfüllt, so ist A ein Punktintervall". (siehe Lemma 5.5 und Satz 5.12 von [12]).

<u>Satz 5.3.5</u>

Voraussetzungen

1) Sei $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ ein vollständig schwach-geordnetes Ringoid
2) Sei $\{ T,\leq \}$ ein symmetrisches Raster von $\{ R, \leq \}$
3) Sei ferner $\mathbb{I}T$ und $\{ \mathbb{I}R, \boxplus, \boxdot \}$ wie üblich
4) Seien $\diamond$: $\mathbb{I}T \times \mathbb{I}T \longrightarrow \mathbb{I}T$ die in Definition 5.3.4 erklärten Verknüpfungen

<u>Behauptung</u>

$\{ \mathbb{I}T, \diamond\!\!\!+, \diamond\!\!\!\cdot, \leq, \subseteq \}$ ist bezüglich $\leq$ ein vollständig schwach-geordnetes Ringoid (bezüglich $\subseteq$ ein inklusionsisoton geordnetes Ringoid) und $\mathbb{I}T$ ist bezüglich $\subseteq$ ein monotones, oberes Rasterringoid von $\mathbb{I}R$, wenn gilt

i) In $\{ R,+,\cdot,\leq \}$ gelte für genau ein Element

$$x + e = o \quad \vee \quad x \cdot x = e$$

oder

ii) a) $\bigwedge_{x,y \in X_T} \quad x \leq y \vee y \leq x$

b) $\bigwedge_{x,y,z \in X_T} \quad x \leq y \Longrightarrow y \cdot z \leq x \cdot z$

oder b') $\bigwedge_{x,y \in X_T} \quad x \leq y \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

wobei $X_T = \{ k \in T \mid k$ erfüllt (D5a,b) in R $\}$

Beweis

Zunächst beweisen wir, daß sobald $A \in \mathrm{II}\, T$ (D5) erfüllt, A bereits ein Punktintervall ist.

Es sei $A \in \mathrm{II}\, T$, welches (D5) erfüllt.
Aus (D5b) folgt $A \diamond A = [e;e] \Longrightarrow$ für alle a,b aus A

$a \dot{\cdot} b = a \cdot a = b \cdot a = a \cdot a = e$

Es seien $M = [a_1;a_1]$, $N = [a_2;a_2]$ für $A = [a_1;a_2] \in \mathrm{II}\, T$
Aus (D5c) folgt $A \diamond ([e;e]) = ([e;e]) \diamond N = M \diamond ([e;e])$

$\Longrightarrow [a_1;a_2] = [a_2;a_2] = [a_1;a_1]$

$\Longrightarrow a_1 = a_2 \Longrightarrow A = [a;a]$, d.h. A ist ein Punktintervall.

Nehmen wir jetzt an, es gäbe in T zwei Elemente x und y, so daß die Intervalle $X := [x;x]$ und $Y := [y;y]$ die Axiome (D5a,b,c,d) in $\{ \mathrm{II}\, T, \oplus, \diamond \}$ erfüllen.

$X \diamond X = [e;e] = Y \diamond Y \Longrightarrow x \cdot x = e \wedge y \cdot y = e$

$X \oplus E = [o;o] = Y \oplus E \Longrightarrow x + e = o \wedge y + e = o$

d.h. x und y erfüllen (D5a) und (D5b) in R und damit folgt x = y nach i) .

Da x und y (D5a,b) in R erfüllen, gilt nach ii) o.B.d.A.

$$x \le y \implies x \cdot y \le e \;\wedge\; x \cdot y \ge e \implies x \cdot y = e$$

$$\implies \Delta(x \cdot y) = e \wedge \nabla(x \cdot y) = e \implies X \mathbin{\Diamond\!\!\!\!\cdot\;} Y = [\, e;e] \implies X = Y$$

Nach Satz 1.1.13 a)i).

□

<u>Bemerkung</u>

Wir wollen jetzt noch den Übergang zu einem Raster bei den Intervallmatrizen (bzw. bei den Intervallen über $\mathbb{C}$ R) genauer untersuchen.

Es sei { R,+,· } ein Ringoid mit der Eigenschaft, daß genau ein Element $x \in R$ das Axiom (D5a) $x + e = o$ erfüllt.

Dann gilt (D5a) auch in dem Matrizenringoid { $M_n R$,+,· } (bzw. in dem komplexen Ringoid { $\mathbb{C}$R,+,· }) für genau ein Element

$$X = \begin{pmatrix} x_x & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & x \end{pmatrix} \qquad \text{(bzw. } \alpha = (x,o) \text{)}$$

Aus Satz 5.3.5 folgt:

Es sei { R,+,·, ≤ } ein vollständig schwach-geordnetes (bzw. geordnetes) Ringoid mit der Eigenschaft, daß genau ein Element $x \in R$ das Axiom (D5a) erfüllt.

1) {T,≤ } sei ein symmetrisches Raster von { R,≤ } und { $M_n T$,≤ } bezeichne das symmetrische Raster der Matrizen über t von { $M_n R$,+,·,≤ } . Dann ist { $I\!I\, M_n T$, $\Diamond\!\!\!\!+\;$, $\Diamond\!\!\!\!\cdot\;$,≤ , $\subseteq$ } bezüglich ' $\subseteq$ ' ein inklusionsisoton geordnetes Ringoid, sowie ein monotones, oberes Rasterringoid von { $I\!I\, M_n R$, $\boxplus$, $\boxdot$, ≤, $\subseteq$ }

2) Es sei $\{ T,\le \}$ ein symmetrisches Raster von $\mathbb{C}R$. Dann ist $\{\mathbb{I}T, ⟐ ⟐, \le, \subseteq \}$ bezüglich ' $\le$ ' ein vollständig schwach-geordnetes Ringoid und bezüglich ' $\subseteq$ ' inklusionsisoton geordnet, sowie ein monotones, oberes Rasterringoid von $\mathbb{I}\mathbb{C}R$.

6. Rundungsinvariante Strukturen unter Anwendung einer Abbildung eines Ringoids in eine geordnete Menge

In diesem Kapitel wollen wir eine spezielle Abbildung eines Ringoids $\{ R, +, . \}$ in eine geordnete Menge M so erklären, daß wir eine wesentliche Verallgemeinerung des Satzes 4.10 von [12] erhalten. Wir vollziehen dies in dem Sinne, daß die Grundmenge nicht unbedingt die Menge der reellen Zahlen sein muß sondern etwa ein Ringoid sein kann.

Wir werden hier einfache Bedingungen angeben, wie man die Eindeutigkeit der Inversen bezüglich ' + ' erreichen kann, womit eine große Klasse von rundungsinvarianten Strukturen erfaßt werden kann.

6.1 Definition und Eigenschaften

Definition 6.1.1

Es seien $\{ R, +, . \}$ ein Ringoid mit $x = -e$ und $T \subseteq R$ eine Teilmenge von R mit der Eigenschaft $o \in T$. Ferner sei $\{ M, \leq \}$ eine geordnete Menge und $\square : R \longrightarrow T$ eine Abbildung. Die Teilmenge T hat die Eigenschaft (t), wenn gilt

$$(t) \quad \bigvee_{\substack{\delta : R \longrightarrow M \\ \text{Abbildung}}} \ \bigvee_{\varepsilon \in M} \begin{cases} (t1) & \bigwedge\limits_{\substack{a,b \in T \\ a \neq b}} \delta\,(a+(-e)b) > \varepsilon \\ (t2) & \bigwedge\limits_{u \in R} \square u = o \Longrightarrow \delta\,(u) \leq \varepsilon \,. \end{cases}$$

□

Beispiel 6.1.2

Es sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen und $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen. Es sei $\square : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine Rundung zur nächstgelegenen Zahl des Rasters $\mathbb{Z}$, d.h. es gilt z.B.

i) $\square\, o := o$

ii) $\bigwedge\limits_{o<x<\infty}$ $\quad \square x := \begin{cases} \nabla x \text{ für } x \in [\nabla x ; \frac{\nabla x + \Delta x}{2}] \\ \Delta x \text{ für } x \in (\frac{\nabla x + \Delta x}{2} ; \Delta x] \end{cases}$

iii) $\bigwedge\limits_{x<o}$ $\quad \square x := - \square(-x)$

Es sei $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$\qquad x \longrightarrow |x|$.

Wenn wir $\varepsilon \in [o{,}5 ; 1)$ wählen, dann gilt die Eigenschaft (t) für die Teilmenge $\mathbb{Z}$, da

(t1) $\bigwedge\limits_{\substack{a,b \in \mathbb{Z} \\ a \neq b}}$ $\quad \delta(a + (-1)\,b) = |a - b| \geq 1 > \varepsilon$

(t2) $\bigwedge\limits_{u \in \mathbb{R}}$ $\quad \square u = o \Rightarrow \delta(u) = |u| \leq o{,}5 \leq \varepsilon$.

□

<u>Satz 6.1.3</u>

Es seien $\{R, +, .\}$ ein Ringoid und $T \subseteq R$ eine Teilmenge von R mit der Eingenschaft (t) für $\{M, \leq\}$ und $\square : R \longrightarrow T$ und mit $o, e, -e \in T$. Es sei in T eine Addition erklärt durch

(RG) $\bigwedge\limits_{a,b \in T}$ $\quad a \boxplus b := \square(a + b)$.

Dann gilt

a) $\bigwedge\limits_{a \in T \setminus \{o\}}$ $\delta(a) > \varepsilon$

b) $\delta(-e) > \varepsilon \wedge \delta(e) > \varepsilon$

c) $e \neq -e \Rightarrow \delta(e+e) > \varepsilon$

d) $e \boxplus e \neq o$

e) Es sei $\square$ eine Rundung, dann gilt $\delta(o) \leq \varepsilon$

f) Es sei b invers zu a in R und $\square\, o = o$, dann gilt $\delta(a + b) \leq \varepsilon$

g) Es sei b invers zu a in T und $\square\, o = o$, dann gilt $\delta(a \boxplus b) \leq \varepsilon$

Beweis

a) $a \in T \wedge a \neq o \in T \Longrightarrow \delta(a) = \delta(a + (-e)o) > \varepsilon$

b) folgt direkt aus a)

c) $\delta(e+e) = \delta(e + (-e)(-e)) > \varepsilon$

d) Nehmen wir an, daß $e \boxplus e = o$

$e \boxplus e = o \Longrightarrow \square(e+e) = o \Longrightarrow \delta(e+e) \leq \varepsilon$ Wid. zu c)

e), f) und g) trivial

$\square$

Satz 6.1.4

Es sei $T \subseteq R$ eine symmetrische Teilmenge des Ringoids $\{R, +, .\}$ mit der Eigenschaft (t) für $\{M, \leq\}$ und $\square : R \longrightarrow T$.

Es sei in T eine Addition ' + ' erklärt durch (RG)

Dann gilt $\displaystyle\bigwedge_{\substack{a,b \in T \\ a \neq b}} \quad a \boxminus b \neq o$

wobei $a \boxminus b := a \boxplus (-b)$.

Beweis

Es seien $a,b \in T$ mit $a \neq b \Longrightarrow \delta(a + (-e)b) > \varepsilon$

Mit $a \boxminus b = o$, also $\square(a + (-e)b) = o$ wäre $\delta(a + (-e)b) \leq \varepsilon$ im Widerspruch zu Lemma 2.1.3

$\square$

Korollar 6.1.5

Voraussetzungen

1) Sei $\{R, +, .\}$ ein Ringoid
2) Eine symmetrische Teilmenge $T \subseteq R$ habe die Eigenschaft (t) für $\{M, \leq\}$ und $\square : R \longrightarrow T$
3) Sei in T eine Addition ' $\boxplus$ ' durch (RG) erklärt

Behauptung

$$\bigwedge_{x \in T} \quad x \boxplus e = o \Longrightarrow x = -e$$

D.h. $x = -e \in T$ ist das einzige Element, welches (D5a) in $\{T, +, \cdot\}$ erfüllt.

Beweis

$$x \neq -e \Longrightarrow x \boxminus (-e) \neq o$$
$$\Longrightarrow x \boxplus e \neq o$$

$\square$

6.2 Die Wirkung der δ - Abbildung über einem Ringoid $\{ R, +, \cdot \}$ und einem Raster $T \subseteq R$

Satz 6.2.1

Es seien $\{ R, +, \cdot \}$ ein Ringoid, $T \subseteq R$ ein symmetrisches Raster von R mit der Eigenschaft (t) für $\{M, \leq\}$ und $\square : R \longrightarrow T$ eine antisymmetrische Rundung. In T seien zwei 2-stellige innere Verknüpfungen erklärt durch die Vorschrift

$$\bigwedge_{a,b \in T} \quad a \boxast b := \square (a \ast b), \qquad \ast \in \{ +, \cdot \}$$

Dann ist $\{ T, \boxplus, \boxdot \}$ ein Rasterringoid.

Beweis

(D1) bis (D4), (D5b,c,d für $x = -e$) und (RG1) siehe [12]

(D5a) $(-e) \boxplus e = \square ((-e) + e) = \square o = o$

(D6) Es sei $x \in T$ mit $x \boxplus e = o$

Aus Korollar 6.1.5 folgt direkt, daß $x = -e$ sein muß und damit ist $\{T, \boxplus, \boxdot\}$ ein Rasterringoid von $\{ R, +, \cdot \}$. $\square$

Korollar 6.2.2

Es seien $\{ R, +, \cdot\}$ ein Ringoid, $\{R, \leq\}$ ein vollständiger Verband und $\{ \mathbb{C}R, +, \cdot \}$ das entsprechende Ringoid (Beispiel 1.2.6). Es seien ferner $\{ T, \boxplus, \boxdot \}$ das in Satz 6.2.1 erklärte Ringoid, $\mathbb{C}T$ das symmetrisches Raster von $\mathbb{C}R$ und die Verknüpfungen

a) $\boxast : \mathbb{C}T \times \mathbb{C}T \longrightarrow \mathbb{C}T$

$\qquad (\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha \boxast \beta := \square (\alpha \ast \beta), \quad \ast \in \{+, \cdot\}$

b) $\square : \mathbb{C}R \longrightarrow \mathbb{C}T$

$\qquad \alpha \longrightarrow \square \alpha := \square(a_1, a_2) := (\square a_1, \square a_2)$

Dann ist $\{\mathbb{C}T, \boxplus, \boxdot \}$ ein Rasterringoid

Beweis

Es bleibt nur (D6) zu beweisen.

(D6) Es sei $\alpha = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}T$, welches dem Axiom (D5) in $\mathbb{C}T$ erfüllt.

Aus (D5a) folgt :

$$(a_1, a_2) \boxplus (e, o) = (o, o) \Longrightarrow a_1 \boxplus e = o \wedge a_2 = o$$

$$\Longrightarrow a_1 = -e \wedge a_2 = o \Longrightarrow \alpha = (-e, o) .$$

$\square$

Korollar 6.2.3

Es sei $\{R, +, \cdot\}$ ein Ringoid ,$\{R, \leq\}$ ein vollständiger Verband und $\{M_n R, +, \cdot\}$ das entsprechende Ringoid (Beispiel 1.2.5). Es seien ferner $\{T, \boxplus, \boxdot\}$ das in Satz 6.2.1 erklärte Ringoid, $M_n T$ das symmetrisches Raster von $M_n R$ und die Verknüpfungen

a) $$\boxed{*} : M_n T \times M_n T \longrightarrow M_n T$$
$$(A, B) \longrightarrow A \boxed{*} B := \square (A \times B), \quad * \in \{+, \cdot\}$$

b) $$\square : M_n R \longrightarrow M_n T$$
$$A \longrightarrow \square A := (\square a_{ij})$$

Dann ist $\{M_n T, \boxplus, \boxdot\}$ ein Rasterringoid

Beweis

Es bleibt nur (D6) zu zeigen.

(D6) Es sei $X \in M_n T$, welches (D5) in $M_n T$ erfüllt .

$$X \boxplus E = 0 \Longrightarrow \bigwedge_{i=1(1)n} (x_{ii} \boxplus e = o) \wedge \bigwedge_{\substack{i,j=1(1)n \\ i \neq j}} x_{ij} = o$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{i=1(1)n} x_{ii} = -e \wedge \bigwedge_{\substack{i,j=1(1)n \\ i \neq j}} x_{ij} = o$$

$$\Longrightarrow X = -E .$$

$\square$

Korollar 6.2.4

Es seien R_i , i = 1(1) n Ringoide, $\{R_i, \leq_i\}$, i=1(1)n, vollständige Verbände und $\{R, +, \cdot\}$ das in Beispiel 1.2.7 definierte Ringoid. Es sei ferner für alle i =1(1)n $\{T_i, \boxplus, \boxdot\}$ das in Satz 6.2.1 erklärte Ringoid , mit $\{M_i, \leq_i\}$ geordnete Menge und $\square_i : R_i \longrightarrow T_i$ und $T := T_1 \times T_2 \times \cdots\cdots \times T_n$ das symmetrische Raster von $\{R, \leq\}$ Dann ist $\{T, \boxplus, \boxdot\}$ ein Rasterringoid von $\{R, +, \cdot\}$.

Beweis

(D6) Es sei $X = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in T$, welches dem Axiom (D.5) erfüllt .

$X \boxplus E = O \implies (x_1 \boxplus e_1, \ldots\ldots, x_n \boxplus e_n) = (o_1, \ldots, o_n)$

$\implies x_1 \boxplus e_1 = o_1, \ldots\ldots, x_n \boxplus e_n = o_n \implies$

$x_1 = -e_1, \ldots\ldots, x_n = -e_n$, d.h. $X = (-e_1, \ldots\ldots, -e_n)$.

□

6.3 Die Wirkung der δ - Abbildung in der Intervallrechnung

Satz 6.3.1

Voraussetzungen

1) Sei $\{R, +, \cdot, \leq\}$ ein vollständig schwach geordnetes Ringoid
2) Sei $\{T, \oplus, \odot\}$ das in Satz 6.2.1 erklärte Ringoid, d.h.
   a) T ist ein symmetrisches Raster von R mit der Eigenschaft (t) für $\{M, \leq\}$ und $\bigcirc : R \longrightarrow T$ eine antisymmetrische Rundung
   b) $\circledast : T \times T \longrightarrow T$ ist erklärt durch
   $$\bigwedge_{a,b \in T} a \circledast b := \bigcirc(a * b), \quad * \in \{+, \cdot\}$$
3) Sei $\{\amalg T, \subseteq\}$ die symmetrische Teilmenge von $\amalg R$ mit Schranken in T von $\{\amalg R, \boxplus, \boxdot\}$ und $\diamond : \overline{\amalg R} \longrightarrow \overline{\amalg T}$ die monotone nach oben gerichtete Rundung von $\overline{\amalg R}$ in $\overline{\amalg T}$
4) In $\amalg T$ seien zwei 2- stellige Verknüpfungen durch die Definition 5.3.4 erklärt .

Behauptungen

i) $\{ \mathbb{I}T , \diamondplus , \diamonddot , \leq , \subseteq \}$ ist

i_1) bezüglich $\leq$ ein vollständig schwach geordnetes Ringoid

i_2) bezüglich $\subseteq$ ein inklusionsisoton geordnetes Ringoid

ii) $\mathbb{I}T$ ist bezüglich $\subseteq$ ein monotones, oberes Rasterringoid von $\mathbb{I}R$.

Beweis wir beweisen nur (D6)

(D6) Es sei $X = [x_1 ; x_2] \in \mathbb{I}T$, welches die Axiome (D5a,b,c,d) in $\mathbb{I}T$ erfüllt .

Da das Intervall $[o ; o]$ nur ein Element $o \in R$ enthält, muß daher auch das Element $X \diamondplus E$, sowie das Element $X \boxplus E$ nur aus einem Element bestehen . Es gilt daher $X \diamondplus E = X \boxplus E = X + E = [o ; o]$.

Daraus folgt insbesondere $x_1 + e = o \wedge x_2 + e = o$ und damit

$x_1 \oplus e = o \wedge x_2 \oplus e = o$.

Aus Korollar 6.1.5 folgt $x_1 = -e$ und $x_2 = -e$, d.h. $X = [-e;-e]$.

□

Bemerkung 6.3.2

Es sei das Ringoid $\{ \mathbb{R} , + , \cdot \}$. Dann hat die Menge $\{ \mathbb{I}T , \diamondplus , \diamonddot \}$ die Eigenschaft (t) , wenn wir wählen

$\delta : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ =: M$ mit

$\delta(A + (-B)) := q (A,B) := \max \{ |a_1 - b_1| , |a_2 - b_2| \}$ und $\varepsilon := o$

Das Raster T braucht nicht wie in Satz 6.3.1 die Eigenschaft (t) zu besitzen

6.4 Allgemeine Bemerkungen über die δ - Abbildung

Bemerkung 6.4.1

Es seien $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $M := \mathbb{R}_+$. Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ sei

$\delta(a + (-b)) := |a + (-b)|$.

Dann besitzt die Teilmenge T die Eigenschaft (t1), wenn wir $\varepsilon = o$ setzen.

Dies bedeutet, daß die Eigenschaft (t2) und damit (t) beim Übergang zu Gleitkommazahlen nur von der Rundung $\square$ abhängig ist .

Bemerkung 6.4.2

Es seien $T \subseteq \mathbb{R}$ ein symmetrisches Raster der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft (t) für $M := \mathbb{R}_+$ und $\square : \mathbb{R} \longrightarrow T$ eine monotone, antisymmetrische Rundung .

In T sei ferner eine Addition durch (RG) erklärt .

Da $\mathbb{R}$ linear geordnet ist, folgt nach Satz 6.1.4 und Satz 2.1.2s) , daß $b = -a$ die einzige Inverse von a in T ist . Nach Satz 4.10 von [12] ist diese Bedingung aquivalent zu $\square^{-1}\, o \subseteq (-\alpha,\alpha)$, wo $\alpha > o$ der kleinste Abstand zweier benachbarter Rasterpunkte ist .

Die Bedingung $\square^{-1}\, o \subseteq (-\alpha, \alpha)$ kann man erreichen, wenn man z.B. verlangt

$\square^{-1}\, o = o$ oder $\alpha \in T$

Die erste Bedingung verhindert leider einige bequeme und übliche Unterlaufbehandlungen

Raster mit Bedingung b) kommen in der Praxis häufig vor z.B. die sogenannten Festkommazahlen im Beispiel 6.1.2 oder wenn wir bei Gleitkommazahlen vereinbaren, daß außer den üblichen Gleitkommazahlen der Form $x = m.b^e$ $e1 \leq e \leq e2$, $b^{-1} \leq |m| < 1$, m Mantisse, e Exponent für $e = e1$ auch nicht normalisierte Mantissen zugelassen werden .

Literaturverzeichnis

A Bücher

[1] G.Alefeld, J.Herzberger: Einführung in die Intervallrechnung, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich (1974)

[2] G.Alefeld: Intervallrechnung über den komplexen Zahlen und einige Anwendungen, Dr.-Dissertation, Universität Karlsruhe (1968)

[3] E.K.Blum: Numerical analysis and computation theory and practice, Addison-Wesley (1972)

[4] N.Bourbaki: Elements of Mathematics - theory of sets, Addison-Wesley (1968)

[5] L.Collatz: Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Springer-Verlag (1968)

[6] L.Fuchs: Partially ordered algebraic systems, Pergamon Press (1963)

[7] I.Gärtner: Aufgaben zu rundungsinvarianten Strukturen, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1977)

[8] J.Herzberger: Metrische Eigenschaften von Mengensystemen und einige Anwendungen, Dr.-Dissertation, Universität Karlsruhe (1969)

[9] G.S.Hönig: Análise Funcional e aplicações. Universidade de São Paulo/Brasilien (197o)

[1o] E.Kaucher: Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretenden Räume. Dr.-Dissertation, Universität Karlsruhe (1973)

[11] R.Klatte: Zyklisches Enden bei Iterationsverfahren, Dr.-Dissertation, Universität Karlsruhe (1975)

[12] U.Kulisch: Grundlagen des Numerischen Rechnens. Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich (1976)

[13] N.H.McCoy: Introduction to Modern Algebra, Allyn and Basan, Inc. Boston (1968)

[14] R.E.Moore: Intervallanalyse, R.Oldenburg Verlag (1969)

[15] Ch.Ullrich: Rundungsinvariante Strukturen mit äußeren Verknüpfungen, Dr.-Dissertation, Universität Karlsruhe (1972)

16 C.Vilanova: Elementos da teoria dos grupos e da teoria dos aneis, Instituto de Matemática pura e aplicada, Rio de Janeiro, Brasilien (1973)

B Einzelbeiträge in Zeitschriften

B 1 G.Bohlender: Floating-point computation of functions with maximum accuracy. IEEE Computer Society, Symposium on Computer Arithmetic. Dallas 1975. IEEE, 14-23 (1977)

B 2 K.Grüner: Fehlerschranken für lineare Gleichungssysteme. Computing Supplementband 1, 47-55 (1977)

B 3 U.Kulisch: Formalization and implementation of floating point arithmetic. Computing 14, 323-348 (1975)

B 4 H.C.Reichel, W.Ruppert: Über Distanzfunktionen mit Werten in angeordneten Halbgruppen. Monatshefte Math.83, 223-251 (1977)

B 5 Ch.Ullrich: Über die beim numerischen Rechnen mit komplexen Zahlen und Intervallen vorliegenden mathematischen Strukturen. Computing 14, 51-65 (1975)

L e b e n s l a u f

Dalcidio M. C l a u d i o

geboren am 16.Oktober 1946 in Rio de Janeiro/Brasilien als Sohn des Jorge Moraes Claudio und seiner Ehefrau Julieta Carlos Claudio geb. Da Costa.

1953 - 1959	Besuch der Volksschule 'Colêgio Nilo Peçanha' in Rio de Janeiro
196o - 1967	Besuch des Gymnasiums 'Colêgio Pedro II' in Rio de Janeiro
Dezember 1967	Reifeprüfung am Gymnasium 'Pedro II'
1969 - 1973	Studium der Mathematik an der Universität von Porto Alegre und an der Universität von Rio Grande do Sul
Dezember 1973	Diplom in Mathematik
1974	wissenschaftlicher Angestellter an der Fakultät für Mathematik der Universität von Rio Grande do Sul
1975- 1979	Promotionsstipendium des Ökumenischen Studienwerkes e.V. Bochum. Im Rahmen dieses Stipendiums seit WS 1976/77 Doktorand am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Karlsruhe