UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# ANÁLISE COMBINATÓRIA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

**GUILHERME DE LIMA DE MENEZES**

Porto Alegre

2017/2

**GUILHERME DE LIMA DE MENEZES**

# ANÁLISE COMBINATÓRIA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Emilio Allem

Porto Alegre

2017/2

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

**Análise combinatória e resolução de problemas em uma proposta didática para o Ensino Médio**

Guilherme de Lima de Menezes

Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Luiz Emilio Allem

Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

Prof. Dr. Saul Benhur Schirmer

Faculdade de Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

Prof. Dr. Diego Eckhard

Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo incentivo e por me apoiarem nos diversos momentos;

Ao meu irmão, pelo companheirismo, amizade e momentos que vivemos;

Aos meus avós, pelos ensinamentos e valores que me moldaram;

Aos meus amigos, que "orgulhosamente seguimos sonhando";

Aos meus professores, que foram meus gurus e me lapidaram ao longo dessa jornada. Ao meu orientador Luiz Emilio Allem, pela confiança e também pelos ensinamentos que me oportunizou.

E, por último, mas não menos importante, à educação, que me oportunizou chegar até aqui.

Muito obrigado.

**RESUMO**

Este trabalho de conclusão de curso analisa uma proposta de aprendizado de análise combinatória através da resolução de problemas aplicada no ensino médio. O foco da análise foi a busca por contribuições que a metodologia baseada na resolução de problemas proporciona para o desenvolvimento e aprendizado dos alunos. A proposta foi aplicada com uma turma do terceiro ano do ensino médio na Escola Estadual de Ensino Médio Carolina Argemi Vazquez, situada no interior do estado do Rio Grande do Sul, na cidade de Rosário do Sul. Durante o período de quatro semanas, buscou-se, por meio da metodologia definida, um ensino que oportunizasse ao aluno conjecturar ideias e testar hipóteses para que tenha a oportunidade de desenvolver o raciocínio lógico a fim de compreender o conteúdo de análise combinatória. A partir dos dados coletados, podemos concluir que as contribuições da metodologia, quando aplicada ao ensino de análise combinatória, são o desenvolvimento do raciocino lógico e o aumento da capacidade de interpretar um problema e transformá-lo em realidade para, posteriormente, buscar estratégias de solução. Em todo o conjunto, o aluno tende a sair de sua zona de conforto e entrar em um processo de aprendizado mais autônomo.

**Palavras-chave:** Ensino. Análise Combinatória. Resolução de Problema. Raciocínio Lógico.

## ABSTRACT

This final work analyzes a proposal of teaching combinatorial analysis through the resolution of problems in high school. The focus of the analysis was the search for contributions that the problem solving methodology provides for the development and learning of students. The research was developed in a third-year high school class at Carolina Argemi Vazquez State High School, located in the state of Rio Grande do Sul, in the city of Rosário do Sul. During the four-week period, it was proposed a teaching practice that allows the student to conjecture ideas, test hypotheses, and finally develop logical reasoning to learn the content of combinatorial analysis. From the collected data, we can conclude that the contributions of the methodology, when used to teach combinatorial analysis, are: development of logical reasoning, increase of capacity to interpret a problem and to transform it into reality, and finally seek solution strategies. Throughout the research, the student tends to leave his comfort zone and enters into a more autonomous learning process.

**Keywords:** Teaching. Combinatorial Analysis. Problem Resolution. Logical reasoning.

## LISTA DE FIGURAS

**SUMÁRIO**

# 1. INTRODUÇÃO

O assunto que será abordado neste trabalho foi o que me tirou do extenso e diverso grupo de pessoas que não gostam de matemática, que me fez prender e entender a matemática pela primeira vez. Foi, também, responsável pelo meu início como “professor”, pois pude ensinar meus colegas sobre o conteúdo que cairia na prova e o que precisariam saber para resolver determinados problemas. O assunto a ser desenvolvido ao longo deste trabalho é Análise Combinatória (AC) e o uso de Resolução de Problemas (RP) como alternativa de ensino deste conteúdo, de acordo com Souza (2010) e Van De Walle (2001). A escolha deste método é uma alternativa para tornar o assunto mais confortável para o professor, visto que é mais atraente ensinar o conteúdo com ele a apresentar apenas fórmulas “mágicas”.

A AC é um assunto com o qual muitas pessoas acabam por ter pouco ou nenhum contato em sua vida discente, enquanto que, durante o curso de licenciatura em matemática, temos duas disciplinas específicas sobre o assunto. Particularmente, tive a oportunidade de ter visto, tanto no colégio quanto na faculdade, o ensino de AC e a resolução das questões sem o uso de fórmulas, sempre privilegiando o raciocínio lógico e o pensar. Isto sempre gerava discussão entre os alunos, pois cada um defendia uma maneira de resolver e, às vezes, até o professor acabava se perdendo, tamanha a quantidade de suposições e argumentos usados por nós, alunos. A fórmula sempre foi um simplificador apresentado após entendermos a lógica de cada situação. No entanto, esta é uma exceção, pois muitos dos que tiveram acesso ao assunto relatam que apenas sabem que existem fórmulas para resolver e acabam julgando o assunto difícil, já que alguns professores colaboram com essa visão por utilizarem técnicas de ensino limitadas, marcadas pelo uso abusivo de fórmulas e exercícios de aplicação.

Lima (2015) observa que a matemática no ensino médio e fundamental não tem sido trabalhada de modo a contribuir para se alcançarem as metas estabelecidas para a disciplina. A autora diz que os alunos não aprendem a raciocinar, mas sim a memorizar. Em vez de adquirirem a habilidade de resolver problemas, eles são condicionados a responder alguns problemas-padrão dos conteúdos que são ministrados, ou seja, o aluno reproduz o que o professor produz.

> O ensino escolar limita-se quase sempre ao treinamento no uso de fórmulas e algoritmos para encontrar o número de arranjos, combinações ou permutações sem proporcionar que os alunos derivem as referidas fórmulas pelo uso da manipulação dos elementos (PINHEIRO; SÁ, 2007, p. 6)

Sendo assim, o aluno fica limitado, primeiro, a decifrar o tipo de exercício e, posteriormente, a aplicar a fórmula para o mesmo, chegando aos resultados. No entanto, ao fazer isso, o estudante não se questiona para saber se a resposta pode ser possível ou não. Ou seja, ocorre, frequentemente, um pensamento mecânico sem nenhuma reflexão para o desenvolvimento da questão, indo de encontro com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), que recomenda acrescentar esse conteúdo ao currículo devido à necessidade que o ser humano tem de lidar com informações que recebe diariamente, utilizando a ideia de combinatória Brasil (2002).

Com o foco no ensino de AC e no uso de problemas como ponto de partida, foi desenvolvido um trabalho a fim de responder a seguinte pergunta diretriz: **Qual a contribuição, para o aprendizado dos alunos do Ensino Médio, de uma proposta didática de Resolução de Problemas sobre Análise Combinatória?**

Tendo em vista o andamento da pesquisa e também devido a entraves por conta da paralisação de muitas escolas públicas em Porto Alegre, a pesquisa se iniciou e se desenvolveu em uma escola pública no interior do Estado do Rio Grande do Sul, mais precisamente na cidade de Rosário do Sul, na Escola Estadual de Ensino Médio Carolina Argemi Vazquez. Nesta escola, tive a oportunidade de trabalhar com alunos do 3º ano do ensino médio, que estudavam na escola desde o ensino fundamental, mas que não tinham visto o conteúdo de análise combinatória ao longo de sua jornada escolar. A pesquisa foi desenvolvida em horário de aula, levando em conta que um professor estava em greve e foram cedidos os horários dele (três períodos semanais) para que eu pudesse implementar a proposta.

Nos próximos capítulos, serão apresentados o referencial teórico em que se baseia a pesquisa, a metodologia utilizada, os dados coletados, as análises dos dados e, por fim, as considerações finais do trabalho.

# 2. REFERENCIAL TEÓRICO

## 2.1 Análise Combinatória:

É possível notar, através de relatos e vivências entre colegas de faculdade, que a AC é um conteúdo que muitos alunos saem do Ensino Médio sem estudar, sendo que variadas razões colaboram para isso. Borba et al. (2009) fez um levantamento de estudos realizados e apresentados em eventos de divulgação científica: 11 encontros internacionais, 12 encontros nacionais, 3 encontros regionais e 2 encontros estaduais. Pode-se perceber, através da análise deste estudo, que apenas 34 trabalhos abordaram o raciocínio combinatório (um número muito baixo), demonstrando que, apesar da importância do conteúdo, este ainda é pouco pesquisado. Apesar da pouca importância conferida por parte de alguns profissionais, a AC é amplamente cobrada em diversas provas, sejam elas de vestibular ou de concursos públicos, pois, segundo Almeida (2010), “o raciocínio combinatório é um componente essencial do pensamento formal e um pré-requisito importante para o raciocínio lógico geral”. O desenvolvimento do pensar lógico é relacionado com o entendimento da AC, pois, ao desenvolver o pensamento combinatório, o aluno desenvolve o seu pensar lógico:

> A capacidade de realizar operações combinatórias vai muito além de saber utilizar uma ferramenta matemática; ela passa a exercer um papel fundamental para desenvolver um raciocínio lógico, à medida que possibilita a ampliação destes mecanismos de pensamento. (DURO, 2012, p. 10).

Entretanto, para que este desenvolvimento ocorra, o professor deve planejar aulas que valorizem o pensamento do aluno, ou seja, é preciso aumentar a aproximação com ele, de modo que ambos saiam de sua zona de conforto: o professor, por deixar de ser um expositor de conteúdo, e o aluno, por deixar de ser o receptor de informação. Assim, é possível eliminar, o “método confortável” de ensinar através de definições e de como e onde se aplica determinada fórmula para um determinado tipo de exercício, tornando o pensar e a busca por alternativas de ensino prioridades. Sobre isso, PCNEM afirma: “As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande” (BRASIL, 2002, p. 126).

Desta forma, o ensino de AC é imprescindível para o desenvolvimento do aluno, deste modo segue os conteúdos e definições que norteiam o ensino e o aprendizado do assunto. É importante destacar que, além de desenvolver o pensamento lógico, a AC desenvolve a capacidade de interpretação de texto dos alunos, visto que os problemas de

AC podem mudar de um assunto para outro apenas fazendo mudanças pequenas no enunciado. O conteúdo é complexo para os alunos e também para quem ensina, no sentindo de que exige atenção nos detalhes, pois é preciso ler cada problema com muita atenção e interpretar de maneira correta. Para demonstrar isso, vou enunciar um problema e fazer mudanças a fim de definir cada assunto da análise combinatória. As definições foram retiradas de Cerioli e Viana (2012) e foram usadas para a formalização do conteúdo durante a aplicação da pesquisa.

**Problema:** João começou a brincar com um baralho e separou todas as cartas do naipe de espada do baralho (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K). João queria fazer uma senha utilizando 5 cartas, para isso, ele retirou uma carta aleatória, anotou qual era a carta, recolocou no baralho, embaralhou novamente e repetiu o processo mais 4 vezes. Qual o total de senhas que João pode fazer?

Para resolver este problema, precisamos notar que João tem 13 opções de cartas para retirar a 1º carta; ao retirar a 2º carta, é importante notar que João recolocou a carta anterior no baralho e embaralhou de novo para retirar a 2º, portanto ele tinha 13 opções de cartas novamente. E, ao repetir o processo, verifica que ele sempre tem 13 opções de retirar cada carta do baralho. O que temos aqui, portanto, é a aplicação do Princípio Multiplicativo:

| **Retirada (Ação de retirar uma carta do Baralho)** | **Nº de opções de cartas** |
|---|---|
| 1º retirada | 13 |
| 2º retirada | 13 |
| 3º retirada | 13 |
| 4º retirada | 13 |
| 5º retirada | 13 |

Para saber o resultado calcula-se: $13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 = 371293$

**O Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem (PFC)** é uma das principais "ferramentas básicas" para a resolução de problemas de contagem: Seja X um conjunto finito. Se cada elemento de X pode ser formado pela tomada de k decisões, $d_1, d_2, \ldots, d_k$, de maneira que:

– A decisão $d_1$ pode ser tomada de $m_1$ maneiras;

– Para cada maneira como a decisão $d_1$ pode ser tomada, a decisão $d_2$ pode ser tomada de $m_2$ maneiras;

– Para cada maneira como as decisões $d_1$ e $d_2$ podem ser tomadas (nesta ordem), a decisão $d_3$ pode ser tomada de $m_3$ maneiras;

– Para cada maneira como as decisões $d_1$, $d_2$, . . ., $d_{i-1}$ podem ser tomadas (nesta ordem), a decisão $d_i$ pode ser tomada de $m_i$ maneiras;

– Para cada maneira como as decisões $d_1$, $d_2$, . . ., $d_{i-1}$, $d_i$, . . ., $d_{k-1}$ podem ser tomadas (nesta ordem), a decisão $d_k$ pode ser tomada de $m_k$ maneiras; então,

$|X| = m_1 \times m_2 \times m_3 \cdots \times m_i \times \cdots \times m_{k-1} \times m_k.$

**Problema:** João começou a brincar com um baralho e separou todas as cartas do naipe de espada do baralho (A,2,3,4,5,6,7,8,9,10, J, Q, K). João queria fazer uma senha utilizando as cartas, para isso ele decidiu que a senha deveria conter as cartas (A,1,2,3,4). Ele separou-as e retirou uma de cada vez de modo aleatório sem reposição. Qual o total de senhas que João pode fazer?

Vejamos que, para resolver este problema, as nossas opções não são mais as 13 cartas, mas sim apenas as 5 separadas (A, 1, 2, 3, 4). Como ele retira as cartas de modo aleatório e sem reposição, precisamos analisar quantas opções João tem para a primeira carta. Neste caso, são 5. Ao escolher a primeira carta, sobram 4 opções para a segunda carta e assim, sucessivamente, até escolher as 5 cartas. Isso é o que chamamos de permutação:

| **Retirada (Ação de retirar uma carta do Baralho)** | **Nº de opções de cartas** |
|---|---|
| 1º retirada | 5 |
| 2º retirada | 4 |
| 3º retirada | 3 |
| 4º retirada | 2 |
| 5º retirada | 1 |

Para saber o resultado calcula-se: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120\, possibilidades$

**Permutação Simples** ou simplesmente Permutação: Seja A um conjunto com $n$ elementos. Uma permutação simples dos $n$ elementos de A é uma sequência sem repetições de todos os n elementos de A. Permutações são escritas como: $x_1 x_2 \ldots . x_n$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são os $n$ elementos de A.

Fórmula: $P_n = n!$

**Problema:** João começou a brincar com um baralho e separou todas as cartas do naipe de espada do baralho (A,2,3,4,5,6,7,8,9,10, J, Q, K). João queria fazer uma senha utilizando as cartas, para isso ele decidiu que a senha deveria conter 5 cartas. Ele retirou uma de cada vez de modo aleatório sem reposição. Qual o total de senhas que João pode fazer?

Este problema é análogo ao anterior, no qual temos que tomar 5 decisões. No entanto, o que muda é que agora não temos apenas 5 opções de escolha, mas sim 13. Além disso, o processo para resolver é o mesmo, assim, o que torna este problema um arranjo é que temos menos retiradas do que opções:

| **Retirada (Ação de retirar uma carta do Baralho)** | **Nº de opções de cartas** |
|---|---|
| 1º retirada | 13 |
| 2º retirada | 12 |
| 3º retirada | 11 |
| 4º retirada | 10 |
| 5º retirada | 9 |

Para saber o resultado calcula-se: $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 154440\ possibilidades$

**Arranjo Simples** ou simplesmente arranjo: Seja A um conjunto com $n$ elementos e $k \in N$ tal que $1 \leq k \leq n$. Um arranjo simples dos n elementos de A, tomados k a k, é uma sequência de k elementos distintos de A. Arranjos são escritos como: $x_1 x_2 \ldots x_k$.

Fórmula: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

**Problema:** João começou a brincar com um baralho e separou todas as cartas do naipe de espada do baralho (A,2,3,4,5,6,7,8,9,10, J, Q, K). João queria separar as cartas, previamente selecionadas, em dois grupos: o primeiro grupo com 6 cartas e outro com 7 cartas. Quantos grupos João pode fazer?

Neste problema, a principal ideia é que são grupos, ou seja, não existe diferença na ordem em que é retirada as cartas, pois o que vamos considerar é o conjunto delas. Portanto, para resolver este problema, primeiramente precisamos definir o primeiro grupo.

Para escolhermos o primeiro grupo, temos 6 lugares (retiradas) e 13 objetos (cartas). Como vimos no problema anterior, isto é o que define um arranjo, portanto aplicamos a fórmula do arranjo: $A_{13,6} = \frac{13!}{(13-6)!}$, mas como não faz diferença a ordem em que é retirada as cartas, é preciso dividir pelo número de permutações possíveis de 6 cartas para 6 lugares, portanto é preciso dividir por $P_6 = 6!$. Então, o que diferencia uma combinação de um arranjo é se a ordem que dispõe os objetos faz diferença ou não.

**Combinação Simples** ou simplesmente combinação: Seja A um conjunto com $n$ elementos e $k \in N$ tal que $1 \leq k \leq n$. Uma combinação simples dos n elementos de A, tomados k a k, é um conjunto de k elementos distintos de A. Combinações simples de n elementos de A, tomados k a k, nada mais são do que conjuntos de k elementos de A. Por essa razão, podem ser representadas por $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. A ordem em que os elementos estão listados não é levada em conta na determinação da combinação.

Fórmula: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

## 2.2 A Análise Combinatória e o Ensino

O processo de ensinar combinatória, aos alunos, é um entre diversos conteúdos que é um problema para o professor, haja vista que é mais cômodo trabalhar este conteúdo a partir de definições, fórmulas "mágicas" e aplicação na resolução de exercícios, ou seja, o método mais reproduzido no ensino. O ensino de AC é um assunto que frequentemente é colocado em xeque por parte de professores, visto que eles se sentem desconfortáveis para ensinar este conteúdo de maneira a valorizar o raciocínio lógico e então acabam por utilizar um ensino através de definições e fórmulas, por ter menos atrapalhação.

De acordo com a pesquisa feita por Freitas (2014), 37% dos entrevistados (sendo que 77% deles lecionavam em rede pública) afirmavam ter pouco conhecimento de AC. Ainda de acordo com a pesquisa, 19% dos entrevistados usavam as fórmulas para lecionar o conteúdo. De acordo com Sturm (1999) e Vazques e Noguti (2004), Almeida e Ferreira (2009), ensinar AC é um desafio para muitos professores de matemática, já que parte deles considera o conteúdo complicado e de difícil entendimento pelos alunos, o que mostra o despreparo dos profissionais. Sobre isso, Freitas (2014) ainda afirma que os professores não têm uma formação adequada na área. Portanto, no ensino de AC, o que geralmente é apresentado em aula para os alunos é sua definição e fórmulas para resolver um determinado tipo de exercício. Por exemplo, nos casos em que não faz diferença a ordem dos objetos, usa-se a fórmula da combinação.

De acordo com Pinheiro e Sá (2007), as aulas de AC estão atreladas ao método de ensino tradicional, em que o professor se utiliza do livro para ensinar o conteúdo aos estudantes. Também segundo os autores, muitos professores, apesar do tempo de atuação em sala de aula, ainda se sentem inseguros para desenvolver um ensino de combinatória que proporcione aos alunos o uso do raciocínio combinatório na RP. Cerioli e Viana (2012) afirmam que a didática adotada no ensino de AC é a "Didática da Classificação dos Problemas", que consiste em aplicar critérios, primeiro: tentar aplicar o princípio multiplicativo, se não der certo, então segundo: classificar o problema em arranjo, permutação ou combinação e por último: aplicar a fórmula. Segundo os autores Sturm (1999), Vazques e Noguti (2004) e Fonseca (2012), esta metodologia prejudica a aprendizagem, dificultando o entendimento e fixação do conteúdo por parte dos alunos. As fórmulas devem aparecer para simplificar e ajudar os alunos. No entanto, quando não faz sentido para os mesmos, pode tornar-se um fator determinante e agravante no aprendizado do aluno, pois não preenche as lacunas no desenvolvimento do pensar:

> A Análise Combinatória é considerada, assim, um tópico difícil de ser abordado na sala de aula, pois geralmente é trabalhada através de "fórmula-aplicação", deixando lacunas na compreensão dos conceitos de arranjo, permutação e combinação. (SOUZA, 2010, p. 3)

Como alternativa para buscar uma melhor compreensão por parte dos alunos, alguns autores como Souza (2008) e Homa e Groenwald (2014) defendem o uso da resolução de problemas.

## 2.3 Resolução de Problemas

A RP é uma opção para o ensino de AC, assim como sugerem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNS) (Brasil, 1997), pois prioriza a participação do aluno para a construção do seu conhecimento. Através de estratégias, o aluno busca maneiras de resolver cada questão, logo, a RP deve ser vista como um ponto de partida para o início do conteúdo e não como uma aplicação para fixação do mesmo.

O problema deve ser proposto para o aluno a fim de que ele busque alternativas de resolução, analise sua resposta, compare com outras respostas e, assim, desenvolva um raciocínio matemático para a resolução de problemas. Como afirma Duro (2012, p. 13), "a análise combinatória é um conteúdo matemático que exige técnicas de raciocínio formal para a interpretação dos problemas pertinentes". Posteriormente, ao resolver vários problemas, o aluno pode chegar a conclusões e até mesmo conjecturar ideias e fórmulas para determinados tipos de problemas, melhorando assim o seu pensamento e raciocínio lógicos.

A metodologia da RP surge com George Pólya em 1945 que pode ser considerado o pai da RP ao criar etapas para abordar um problema (compreender o problema, criar uma estratégia para resolver o problema, aplicar a estratégia e ao final olhar de volta para o problema inicial) mas o assunto ganhou uma maior visibilidade, segundo Onuchic (1999), a partir de 1980. Antes disso, até 1960, os estudos em RP, segundo Andrade (1998), preocuparam-se inicialmente na obtenção de solução com sucesso, sem interesse no processo, ou seja, eram resolvidos muitos problemas semelhantes. De 1970 a 1980, surge a preocupação com o processo da resolução de problemas, por isso busca-se um ensino centrado no uso de diferentes estratégias.

Para os autores Schroeder e Lester (1989), Mendonça (1993) e de La Rosa Onuchic e Junior (2016), existem três modos de abordar a RP, que são: ensinar sobre RP, no qual seria a utilização do método de Pólya, ensinar a resolver problemas e, por último, ensinar matemática através da RP. Este último passou a ser visto como uma metodologia de ensino segundo Andrade (1998), ou seja, o problema não é mais um exercício-aplicação, mas ponto inicial e meio de ensinar matemática.

Sobre essa metodologia de ensino, Onuchic (1999, p. 208) afirma que "a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática".

Portanto, segundo o autor, compreender é o principal objetivo do ensino, pois o aluno simpatiza com os conteúdos quando é obtido através de suas conclusões e não com a imposição do conteúdo, seja pelo professor, seja pelos livros didáticos.

Van de Walle (2001) também vai ao encontro de Onuchic (1999) e defende o ensino de matemática através da resolução de problemas, ou seja, a RP como metodologia de ensino. E também sugere um modo, com três fases importantes, que o professor deve encaminhar suas aulas ao trabalhar com o ensino através da RP, sugestão esta que usarei como base metodológica para minha pesquisa. Abaixo, seguem explicitadas as três fases importantes para uma aula envolvendo resolução de problemas segundo Souza (2010), que está de acordo com Van de Walle (2001).

**Fase 1: O antes -** Este momento é realizado fora da sala de aula e é onde o professor realiza o planejamento da aula. O professor desempenha a função de uma espécie de mentor e, para isso, ele precisa se preparar para melhor instruir os alunos e conduzir a aula. Cabe ao professor, durante esta fase, analisar o conhecimento prévio do aluno para fazer um planejamento de aula adequado, e, neste planejamento, existem quatro momentos:

1. Foco, neste o professor vai definir o que de novo (conceito, ideias e etc.) será construído com os problemas;
2. O professor deve selecionar os problemas e ideias para que possa ocorrer a construção dos conceitos pré-definidos no primeiro instante;
3. O professor deve elaborar uma Estratégia para encaminhar e desenvolver a aula. E, por último;
4. É preciso Resolver os Problemas. Nesta etapa o professor resolve o problema com o máximo de detalhes possíveis, a fim de selecionar diversos caminhos para chegar à solução.

**Fase 2: Durante** – Realizado na sala de aula. Neste processo, o professor exerce a função de observador e avaliador. Nesta etapa do trabalho, o processo segue da seguinte forma:

1. Entregar uma cópia da tarefa individualmente para os alunos, que, por sua vez, devem ler a tarefa;
2. Após a leitura, os alunos deverão formar grupos para que haja a socialização do trabalho, ou seja, para que exista uma cooperação entre os alunos na busca de estratégias que poderão levar o grupo à solução;
3. Dar tempo suficiente para os alunos desenvolverem o trabalho e o raciocínio;
4. Ao esgotar o tempo, alguns grupos devem expor as soluções na lousa para que as dúvidas sejam esclarecidas na plenária.

**Fase 3: Depois** – Professor e Alunos interagem ativamente. Neste momento, ocorre:

1. A plenária com os alunos, onde o professor deve levantar questões para estimular os alunos à discussão e à exploração dos problemas e, por último, deve-se;
2. Formalizar o conteúdo. Neste momento, o professor apresenta por escrito definições e novos conceitos construído durante a aula.

Portanto, a RP propicia um ambiente de ensino em que o professor é um orientador, um estimulador para os alunos, ou seja, ele deixa de exercer um autoritarismo de estar "passando" seu conhecimento aos alunos e passa a estimular, incentivar e orientar os estudantes a resolver as situações propostas sobre o assunto e permite que os alunos descubram por seus próprios meios. Esta etapa de descobrimento é muito importante, pois os alunos precisam ser estimulados a descobrir, a testar hipóteses, a questionar e, também, a resolver problemas, sejam eles matemáticos, seja qualquer outro tipo de problema ao longo da vida. O papel do professor, além de ensinar conteúdos importantes, é também o de formar cidadãos capazes de questionar, pois a dúvida é o combustível que leva à descoberta de novas tecnologias e ideias.

## 3. METODOLOGIA

O conteúdo de AC, bem como todos que envolvem o tema de contagem, segundo os PCNEM, devem ser trabalhados com maior visibilidade no ensino médio e através da perspectiva da RP. Assim, o objetivo é evitar que o conteúdo seja muito teorizado, no sentido de ser demasiadamente teórico. O professor deve "permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo"(BRASIL, 2002, p. 129)

Portanto, para responder à questão: Qual a contribuição, para o aprendizado dos alunos do Ensino Médio, de uma proposta didática de Resolução de Problemas sobre Análise Combinatória?

O público alvo de minha pesquisa são alunos do ensino médio, preferencialmente alunos que já tenham visto o conteúdo de AC, pois, inicialmente, a ideia foi investigar o quanto eles usam fórmulas, bem como outras estratégias para chegar a uma solução. A partir daí, foi proposta uma abordagem do conteúdo sem o uso de fórmulas através da RP. Assim, ao final da implementação, será possível verificar se o aluno continua ou não utilizando apenas a fórmula para resolver os problemas.

A metodologia desta pesquisa consiste em três momentos: um de identificação de perfil, outro de aplicação da pesquisa e, por último, um de avaliação. Através destes três momentos, buscarei entender, aplicar e avaliar o trabalho desenvolvido.

Primeiro momento: identificar o que os alunos trazem de conhecimento prévio sobre o assunto e analisar quais os métodos utilizados para resolver cada questão proposta. Para isso, aplicarei um teste com 8 questões-problemas (2 de princípio fundamental da contagem, 2 de permutação, 2 de arranjo e 2 de combinação).

Segundo momento: Propor aprendizagem através da metodologia de Resolução de Problemas sem o uso de fórmula, sempre buscando formas de abordar cada problema/situação através da discussão de estratégias. O papel do Professor/pesquisador é ser um mediador, ou seja, ajudar os alunos a chegarem a uma solução, sem dizer especificamente como resolver/atacar o problema.

A metodologia adotada para o trabalho está de acordo com a sugerida por Van de Walle (2001) e Souza (2010) onde vou seguir as três fases de sua proposta. Para fins de execução, vou elaborar e propor que os alunos resolvam uma lista de problemas por semana. Os problemas devem ser solucionados em grupos (de 2 ou 3 pessoas) utilizando-se de dois períodos de aula para chegar a uma conclusão comum ao grupo. No encontro seguinte, os primeiros 20 minutos serão destinados à plenária, onde será exposta a solução encontrada pelos grupos nos problemas, a fim de que os outros participantes possam analisar a estratégia utilizada pelo grupo proponente e também avaliar correta ou não a solução encontrada, apresentando seus pontos de vista. Cada grupo apresentará a sua solução aos demais. Após as apresentações, o restante do tempo será destinado a formalização do conteúdo.

Terceiro momento: proposição de problemas semelhantes aos que foram vistos em aula, mas que serão resolvidos individualmente. Com estas aplicação resoluções, quero confrontar dados dos alunos antes e depois da proposta aplicada, a fim de investigar em que medida se percebe, ou não, alteração no uso de fórmulas, bem como indícios sobre as aprendizagens dos alunos diante do trabalho realizado.

# 4. IMPLEMENTANDO A PROPOSTA DIDÁTICA

## 4.1 Aspectos gerais analisados

Utilizando a metodologia de ensinar AC através da RP e utilizando também as três fases importantes definidas por SOUZA (2010): o antes (planejamento prévio da aula pelo professor), o durante (professor como orientador e avaliador) e o depois (interação professor/aluno), foi feita a escolha da turma para aplicação da pesquisa. Em reunião com a direção e a professora de matemática Carolina Argemi Vazquez, foi definida a turma do terceiro ano do ensino médio, turma 301. Foram disponibilizados 3 períodos semanais de 50 minutos cada, no horário normal de aula, pois o professor titular estava em greve. Desta forma, os alunos não deixaram de ter aula de matemática durante o período de realização da pesquisa (realizada entre 01 de novembro e 07 de dezembro de 2017). O motivo da escolha da escola no interior foi a dificuldade detectada para encontrar uma escola na capital que não estivesse em greve no período e que possibilitasse a oportunidade de desenvolver uma pesquisa com duração de 4 semanas.

## 4.2 Definindo o Antes:

- Conhecimento prévio do aluno – A turma cedida para aplicação da pesquisa era um grupo em que todos os alunos eram colegas desde o ensino fundamental, ou seja, tiveram acesso as mesmas matérias e tiveram os mesmos problemas durante o processo escolar. Devido a isso, todos estavam no mesmo nível de conhecimento. Visto que eles nunca tiveram contato com o conteúdo de AC, optei por não realizar uma avaliação prévia com os alunos, ou seja, a aplicação do teste previsto no primeiro momento não foi realizada.

- Foco – A ideia dos encontros, tanto o primeiro quanto os demais, era que os alunos percebessem que o professor não era uma autoridade, ou seja, não era a pessoa que iria ensinar um conteúdo no quadro e entregar uma lista de exercício para aplicação. A proposta era apresentar um professor orientador, um tutor que estava disponível para ajudar os alunos a desenvolverem as ideias para resolver os problemas que fossem propostos semanalmente, bem como os conceitos que seriam construídos ao longo de cada semana: Princípio Fundamental da Contagem, conceito de permutação e fatorial de um número, Arranjo Simples e Combinação.

- Estratégia – Seguindo a influência de metodologia sugerida por Souza (2010), a fim de dar tempo suficiente para pensar e resolver os problemas e para que discutam as ideias entre si, os problemas semanais serão entregues em uma lista com o intuito de poupar tempo de copiar conteúdo do quadro. Os alunos terão acesso a dois períodos para resolver a lista de problemas e, no terceiro período da semana, será feita a apresentação de exercício pelos alunos, selecionado pelo professor, e, após isso, os últimos trinta minutos serão para a formalização do conteúdo.

Após a definição do antes e início da sequência das atividades, foi possível perceber que os alunos, em um primeiro momento, sentiram-se desconfortáveis e até mesmo resistentes, mas, aos poucos, alguns foram se acostumando e aceitando a metodologia sugerida. Ao longo das 4 semanas, foi possível notar que houve um avanço mais significativo com os alunos que estavam presentes nas aulas em que foram realizadas a plenária e a formalização do conteúdo.

# 5. ANÁLISE DOS DADOS

## 5.1. Semana 01 – Princípio Fundamental da contagem (PFC)

No primeiro encontro, me apresentei aos alunos e expliquei como iriam funcionar as aulas durante as próximas semanas. Após esse primeiro contato, foi distribuída a lista de problemas 1 (ver Apêndice A) aos alunos, juntamente com as instruções para resolução. Após entregar a lista, todos os problemas foram lidos em voz alta e, após a leitura, os alunos se organizaram em seis grupos para começar a resolver os exercícios. Neste momento, surgiu a primeira pergunta de um grupo de alunos:

Aluno 1: Professor, não existe fórmula para resolver isso aqui?

Professor: Existe, mas se vocês quiserem usar, vocês vão ter que pesquisar no livro de matemática de vocês.

Aluno1: A professora explica para nós, primeiro, e depois passa exercício

Aluno2: Nós temos que pensar para resolver?

Professor: Sim, durante as minhas atividades, o que mais vamos ter de fazer é pensar.

Este diálogo foi registrado no diário de campo, logo após ocorrer.

Podemos perceber, neste questionamento feito por uma Aluna, que o problema não é a lista de exercícios e nem a quantidade. A dificuldade é ter de pensar, pois nada foi explicado nem foi oferecida nenhuma fórmula para resolver. Com este diálogo, é possível notar a o tipo de processo a que os alunos estão submetidos. Os estudantes não estão acostumados a serem desafiados, e pensar é um desafio para eles. Também tive a oportunidade de questionar e verificar que o que ocorre no ensino é uma reprodução de conteúdo, onde o professor explica e dá um exercício, explica de novo e novamente oferece um novo exercício de aplicação.

> Os alunos acabam sentindo falta de atividades em que participem mais ativamente e desenvolvem, inclusive, uma espécie de "preguiça de pensar e de argumentar". Além disso, o uso excessivo dessa "metodologia de cópia" transmite uma mensagem negativa do que se espera dos alunos, como se eles fossem capazes apenas de copiar. (LIMA, 2015, p. 12)

Após este primeiro impacto, os alunos começam a tentar resolver os problemas, mas começaram a surgir os desafios, pois percebe-se que o grande problema que os alunos têm é de entender o que o enunciado está pedindo, ou seja, interpretar o problema.

Durante esta primeira aula, muitos alunos me pediam ajuda dizendo que não tinham entendido o que era para fazer, e minha postura diante desta situação era tornar aquele caso um ocorrido imaginário, no qual eles eram os sujeitos do problema. "Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar." (LIMA et al., 2001, p. 86)

A maioria dos questionamentos realizados durante essa primeira aula eram:

"Eu não entendi, o que tem que fazer?"

"Está certo isso que eu fiz?"

"É assim que se faz?"

Minha postura diante destas questões era sempre a de sentar perto do(a) aluno(a) e pedir para ele(a) reler o problema e, após isso, tentava tornar a situação mais palpável ao aluno, ou seja, reexplicava o que o problema queria de uma forma que fosse mais visível, mais concreta, com sugestões de situações que poderiam ser reais, como por exemplo:

Para melhor compreensão e para que o leitor se situe do problema, enunciarei apenas algumas questões e o encaminhamento dados no sentido de apresentar sugestões mais amigáveis que serão analisadas no texto, enquanto outras estarão disponíveis no apêndice:

**Questão 3:** Em uma sala de aula existem 7 cadeiras em fila, suponhamos que o professor queira que seus 3 alunos sentem nesta fila. De quantos modos os alunos podem sentar em fila?

Um grupo perguntou como resolvia a questão, então sugeri que eles tornassem o problema uma realidade dentro da sala de aula e dispusessem as cadeiras e mesas a fim de tornar um problema visível.

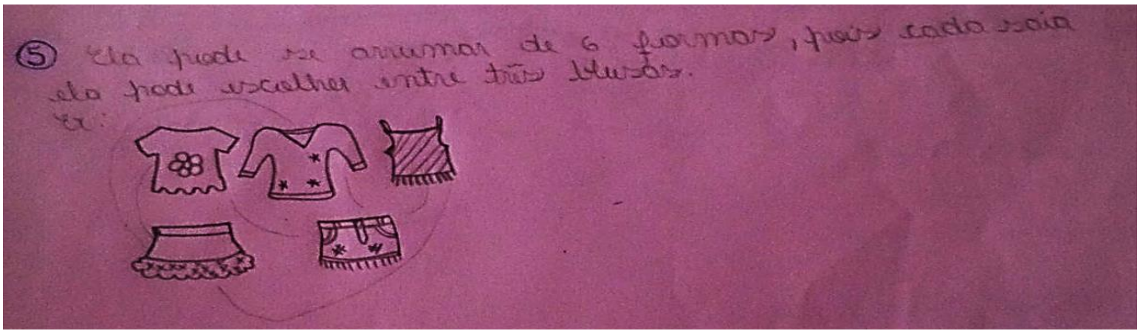
Figura 1: Fileira de cadeiras que os alunos formaram para resolver o problema

Fonte: Arquivo Pessoal

**Questão 5:** Maria vai sair com suas amigas e, para escolher a roupa que usará, separou 2 saias e 3 blusas. De quantas maneiras ela pode se arrumar?

Nesta questão, 4 grupos desenharam as opções de modo a ficar visível, como na figura abaixo:

Figura 2: Desenho feito para tornar o problema visível.




Fonte: Arquivo Pessoal

Com isso, percebe-se que os alunos começam a tornar o problema em uma situação real pelo menos no papel, ou seja, o problema sai do pensamento e toma certa materialidade que aproxima os estudantes de possíveis soluções.

Os alunos começam também a explicar uns para os outros como eles pensam para tentar resolver.

Diálogo entre os alunos na questão:

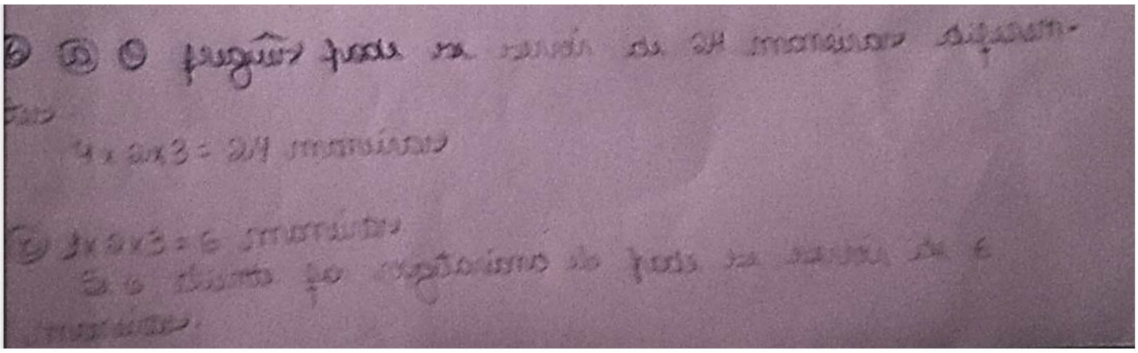
Aluno A: Existem 6 formas

Aluno B: Por quê? Sempre sobra uma blusa.

Aluna A: Porque tem 3 blusas que podemos usar com uma saia e depois também podemos usar com a outra saia.

Durante o segundo período da semana, os grupos continuam a resolver as questões, e é possível notar que três deles já começam a usar o PFC para resolver algumas questões, como na figura abaixo:

Figura 3: Ideia de Principio Fundamenta da Contagem sendo aplicada.



Fonte: Arquivo Pessoal

Após os dois primeiros períodos de aula da semana, o terceiro estava destinado à apresentação e formalização do conteúdo no quadro, no entanto, devido aos atrasos e muitas faltas, não ocorreu a apresentação dos problemas por parte dos alunos. Mas, a fim de formalizar o conteúdo, foram resolvidos os problemas da lista no quadro, e, posteriormente, disposta a definição de princípio fundamental da contagem para os que estavam presentes em sala de aula.

### *5.1.1 Conclusões Parciais da semana 01*

Após esta primeira semana de aula, foi possível ver que, no início do trabalho, os alunos resistiram um pouco. Foi possível verificar, através dos registros escritos dos exercícios, que apenas 4 grupos dos 6 tentaram resolver e descreveram as situações dos problemas, 2 grupos entregaram as respostas sem nenhuma justificativa.

Ao analisar a semana fica, claro que alguns alunos ainda estão em sua zona de conforto, optando por resistir ao “novo” no sentido de que a metodologia é peculiar para os alunos. No entanto, ao olhar para o público com mais interesse e de forma mais receptiva à metodologia, percebe-se que existe uma dificuldade muito grande na interpretação do problema. Minha principal tarefa durante esta primeira semana era tentar tornar esta dificuldade menor. Além disso, o objetivo desta aula, além de ensinar princípio multiplicativo, era que os alunos desenvolvessem estratégias e percebessem generalizações para utilizar na próxima aula.

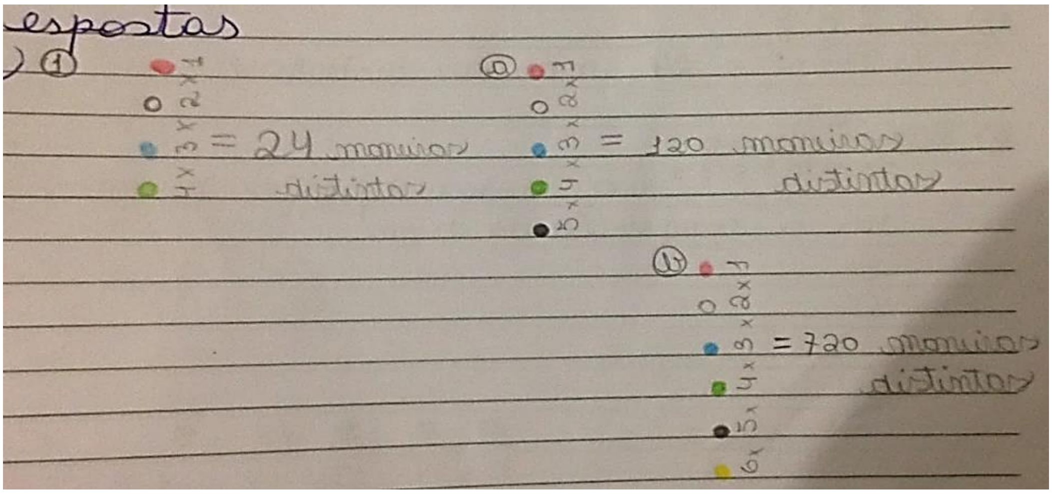
Pode-se dizer, analisando as respostas dos grupos e também pelo comportamento dos alunos que, após o primeiro impacto, aos poucos os alunos começam a escrever e supor hipóteses de solução. Ou seja, eles começam a abordar os problemas através de uma forma mais lógica. Ao pensar o problema por casos, utilizando-se de recursos para torná-lo mais concreto, também se percebe o uso de princípio multiplicativo para resolver os problemas. Portanto, mesmo que seja pouco intuitivo para os alunos ainda, a metodologia revela potencialidades para auxiliar os estudantes na compreensão dos problemas e na e elaboração de estratégias de soluções.

### 5.2. Semana 02 – Permutação

Ao entrar em sala de aula, pedi para que os alunos melhorassem as respostas, justificando-as, pois, alguns grupos estavam apenas colocando a resposta do problema. Expliquei que a ideia era que eles escrevessem o que pensavam e também explicassem o porquê de cada resposta. Após este pedido, entreguei a lista de problemas referente à segunda semana (ver apêndice B) para os alunos presentes e fiz a leitura de todos os problemas em voz alta. Nesta leitura, tentei deixar uma ideia do que cada questão estava pedindo. Nesta semana, os alunos organizaram-se em 5 grupos.

Durante a segunda semana, foi possível ver que eles já tinham uma ideia do que era preciso para resolver os problemas. Foi possível notar que no início eles seguiam usando a estratégia de tornar o problema mais concreto, usando cores e desenhos para exemplificar, como demonstram as figuras abaixo:

Figura 4: O grupo desenha as bolas e as cores do problema 1 de maneira correta:




Fonte: Arquivo Pessoal

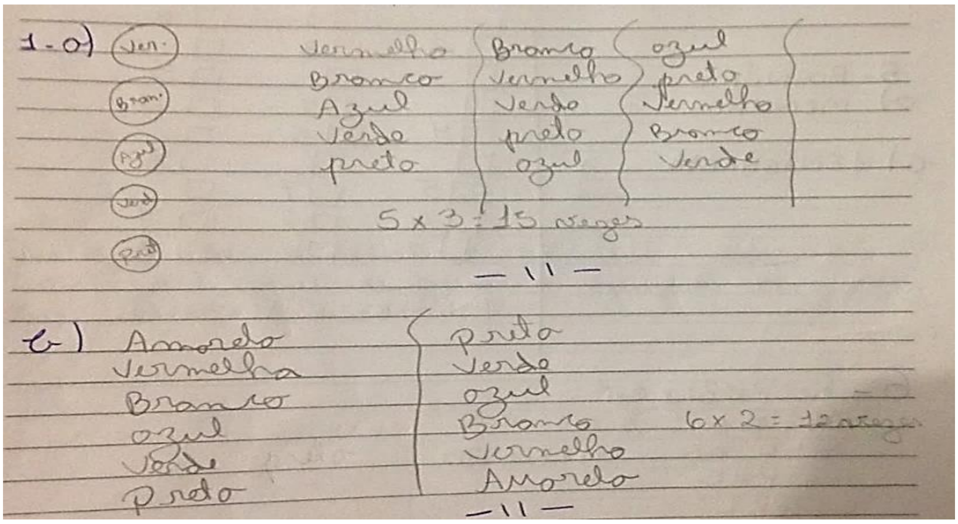
Abaixo segue o enunciado do problema referente a imagem acima.

**Problema 1:** Existem quantas maneiras distintas para dispor em uma fila 4 bolas: uma vermelha, uma branca, uma azul e uma verde?

a. Se adicionarmos mais uma bola preta, de quantas maneiras distintas podemos dispor as cinco bolas em uma fila?
b. Se adicionarmos mais uma bola amarela, de quantas maneiras distintas podemos dispor as seis bolas em uma fila?

Neste problema, 2 grupos desenharam e pintaram as cores; no entanto, um respondeu apenas parcialmente o problema; outros 2 grupos escreveram as cores das bolas e fizeram uma distribuição de possíveis disposições, aplicando posteriormente o princípio fundamental da contagem para resolver o problema, mas não aplicaram corretamente o princípio.

Figura 5: O grupo distribui as bolas de algumas maneiras possível, mas não conta todas.




Fonte: Arquivo Pessoal

Após resolverem os dois primeiros problemas, três grupos perceberam que todos os outros eram possíveis de resolver da mesma maneira e, então, passaram apenas a aplicar o Princípio Fundamental da Contagem para resolver. Um grupo estava tentando quantificar, ou seja, tentando escrever todas as maneiras possíveis e depois aplicar o princípio, mas contando apenas as opções que eles quantificavam, como demonstra a figura 5. Esse grupo utilizou a mesma estratégia para os demais exercícios.

### *5.2.2. Conclusões Parciais da semana 02*

Após a segunda semana de implementação da proposta didática observa-se que alguns alunos começam a compreender algumas ideias, como o princípio fundamental da contagem e de como abordar um problema. Nesta semana, dos cinco grupos que fizeram o trabalho, foi possível verificar que quatro tentaram resolver os problemas. Destes, três conseguiram resolver corretamente quase que a totalidade da lista de exercícios; apenas um grupo aplicou o princípio fundamental da contagem de maneira errada, mas já aborda o problema de forma a tornar o problema mais concreto. E, por último, um grupo não resolveu nenhum exercício, colocando apenas a resposta sem justificativa nem cálculos. Com isso, foi possível perceber um avanço nas resoluções em relação à maioria dos grupos

Novamente, o terceiro período de aula da semana foi marcado por muitas faltas e, com isso, apenas os alunos que estavam presentes neste dia de formalização do conteúdo puderam acompanhar a resolução da lista no quadro e, posteriormente, a correção. Foram descritos no quadro as definições de permutação e também o que significa Fatorial de um número ($n!$).

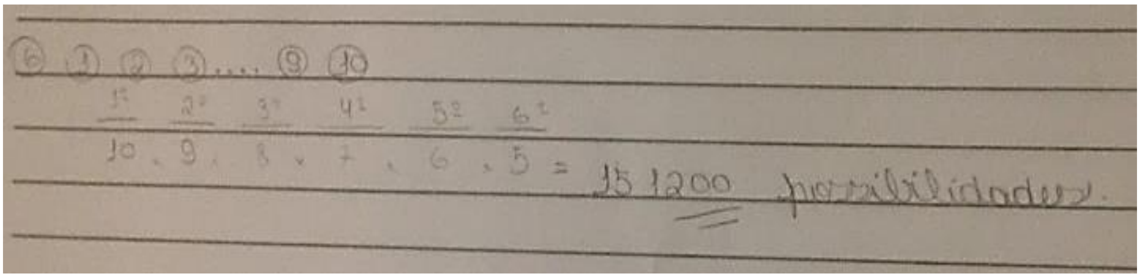
### 5.3. Semana 03 – Arranjo Simples

Na terceira semana, foi entregue a lista 3 de problemas (ver apêndice C). A lista continha problemas de arranjo, e mantive a mesma dinâmica, na qual cada aluno recebeu a lista de problemas; logo em seguida, fiz uma leitura de todos os problemas da lista. Durante este momento destaquei que, para resolver esses problemas, a ideia da lista anterior era essencial, no entanto, o que diferenciava dos problemas anteriores era que nestes o número de lugares era menor que o número de objetos, ou seja, objetos iriam ficar de fora. Ressaltei que isso não teria problema nenhum, e que o método de contagem continuava o mesmo. Após essa dica, os alunos se dividiram em 5 grupos e começaram a resolver os problemas.

Na terceira semana, os cinco grupos trabalharam de forma semelhante. Todos já dispõem os lugares e depois, abaixo desses lugares, colocam os números de opções que podem ser colocadas naquele lugar, ou seja, percebe-se que os alunos começam a ver que este padrão de resolução vem se repetindo desde a primeira semana e começa a virar o primeiro passo da resolução. Também, nota-se que os alunos não mais desenham os objetos e pintam, podemos ver na imagem abaixo o que foi relatado:

**Problema 6:** Em uma urna de sorteio de prêmios, existem dez bolas enumeradas de 0 a 9. Determine o número de possibilidades existentes num sorteio cujo prêmio é formado por uma sequência de 6 algarismos.

Figura 6: Resolução do problema 6 da lista.



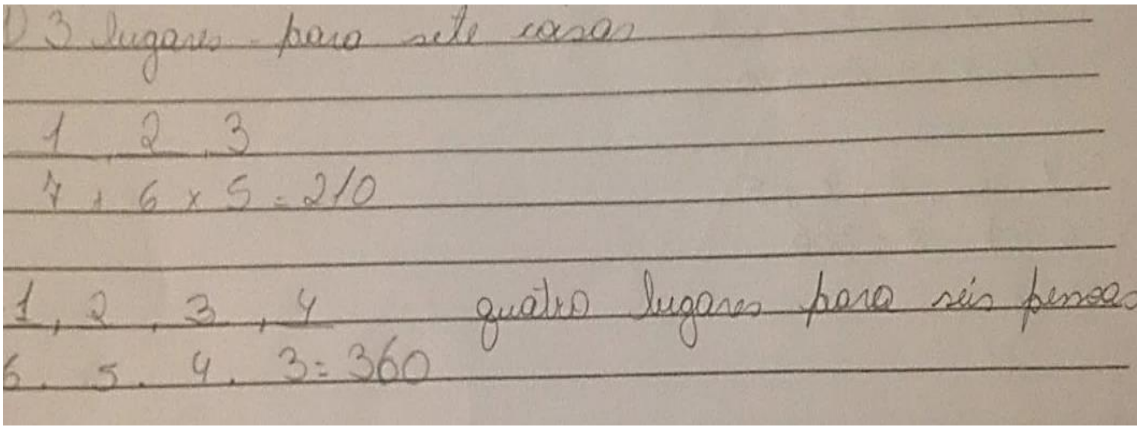

Fonte: Arquivo Pessoal.

Nesta imagem, é possível notar que, além de colocar os lugares, este grupo também colocou a ordem que foi feita cada ação.

**Problema 1:** Quantos números de três dígitos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 podemos formar?

**Problema 2:** Quantas filas com quatro pessoas podemos formar a partir de um grupo de seis pessoas?

Figura 7: Solução dos problemas 1 e 2 da lista, apresentada por um grupo.




Fonte Arquivo Pessoal.

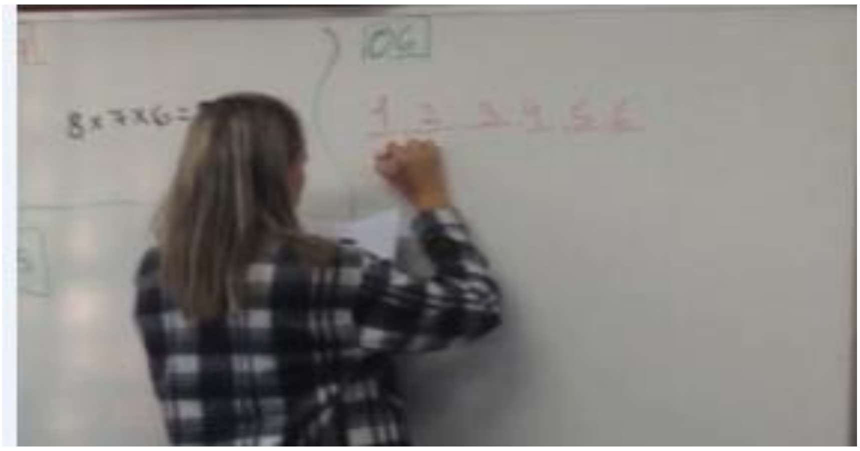
Esta semana foi uma semana em que foi alterado o dia de formalização do conteúdo, pois houve feriado dia 20/11/2017 e, portanto, o dia da formalização do conteúdo foi adiado para o próximo encontro. Com isso, ocorreu, pela primeira vez, no período destinado, a realização da plenária, ou seja, a apresentação de alguns problemas por parte dos alunos que se prontificaram a resolver e explicar no quadro.

Na apresentação do problema 6, realizada por uma aluna de um dos grupos, foi seguido os seguintes passos:

1º - Ela leu o problema para os colegas:

2º - Enumerou o número de sorteios como mostra a figura abaixo:

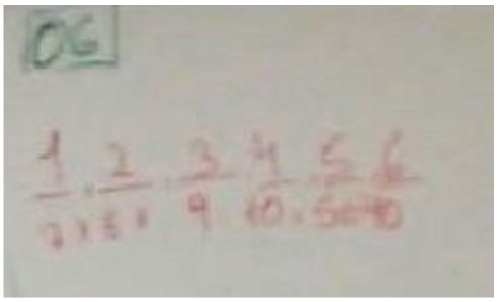
Figura 8: Resolução problema 6 da lista.



Fonte: Arquivo Pessoal.

3º - Colocou os números de opções que tinha embaixo de cada sorteio, mas nota-se que ela começou a partir do número 6. Acredito que, ao fazer, a aluna considerou que, como eram 6 bolas que deveriam ser sorteadas, devia aplicar o PFC a partir do 6, de forma crescente até o 10, como demonstra a figura a baixo:

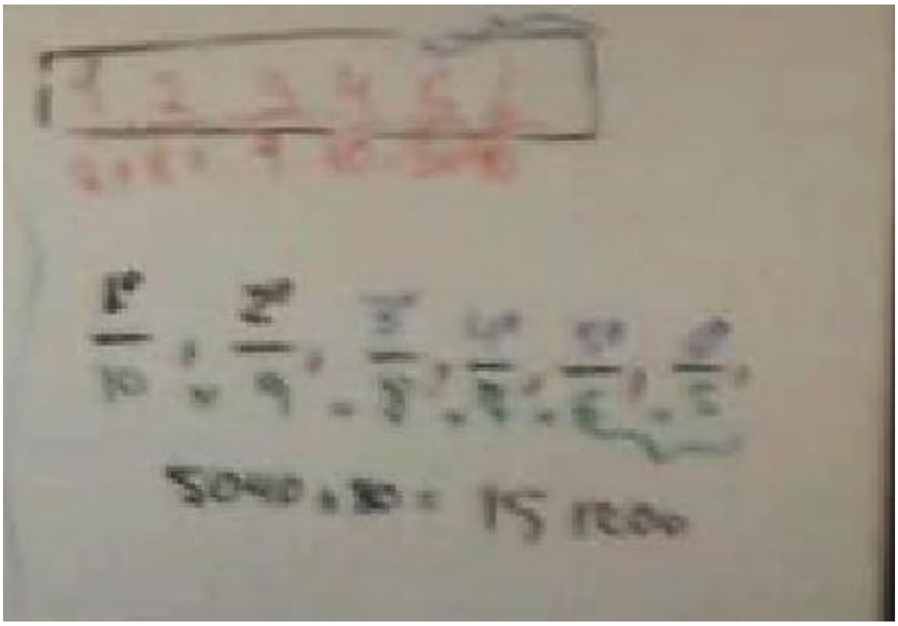
Figura 9: Resolução apresenta pela aluna referente ao problema 6



Fonte: Arquivo pessoal

Após a aluna colocar a sua resolução no quadro, eu questionei o que ela tinha pensado e feito, e ela me respondeu que não sabia explicar. Então, perguntei quantos dígitos o número sorteado deveria ter e ela prontamente me respondeu que eram 6. Nessa situação, novamente, perguntei por que não havia nenhum número com as opções de sorteio que deveriam ter abaixo do quinto e sexto número sorteado, e, novamente, a resposta foi incompleta: "Porque não." Então, perguntei aos demais grupos se alguém havia pensado ou feito de outra maneira e achado alguma resposta diferente, ao que todos os grupos se pronunciaram dizendo que concordavam com ela, que pensavam que a solução apresentada estava correta. Com isso, fui ao quadro e expliquei o que havia sido feito equivocadamente pela colega e resolvi o problema, tornando a resolução correta.

Figura 10: Resolução correta no quadro

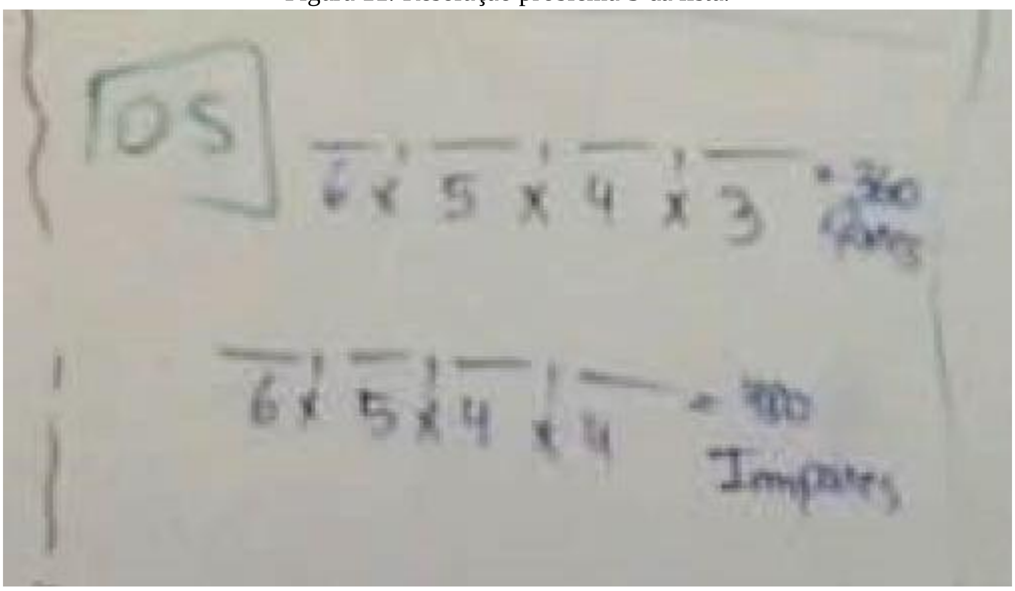


Fonte: Arquivo Pessoal.

Outra questão que foi apresentada e gerou dúvida em uma aluna foi o problema 5 da lista, do qual a aluna colocou a resolução no quadro de forma correta, e a colega disse que achava que estava errado, porque aparecia o número 4 duas vezes, quando o número era ímpar, e no problema dizia que os dígitos tinham de ser distintos. Segue abaixo o problema e a resolução apresentada no quadro durante a plenária.

**Problema 5:** Quantos números pares de quatro dígitos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 podemos formar? E quantos números ímpares de quatro dígitos distintos podemos formar?

Figura 11: Resolução problema 5 da lista.




Fonte: Arquivo Pessoal.

Como a aluna não estava de acordo, uma outra colega do grupo que apresentou o problema no quadro explicou que, no caso em que o número seja par, no último dígito podiam ser colocados apenas 3 opções de números, porque só tinham três números pares (2,4,6). Depois disso, como tinham sobrado 6 números, então o primeiro tinha 6 possibilidades de número, o segundo tinha 5 e o terceiro 4 possibilidades. E continuou a questão dizendo que, no segundo item, onde o número desejado tinha que ser ímpar, como existiam 4 números impares possíveis para o último digito (1,3,5,7), então existiam 4 possibilidades, e, ao usar um número destes, restavam 6 para os outros três lugares e, por isso, a multiplicação ficava $6x5x4x4$ e por este motivo repetia o número 4.

### *5.3.3. Conclusões Parciais da semana 03*

Como mencionado, esta foi a primeira semana em que houve a apresentação das resoluções de alguns problemas por parte dos alunos. A partir desse pode-se concluir, ao final desta semana, que os 5 grupos já estão trabalhando com o mesmo método para abordar um problema, 4 grupos fizeram todos os problemas e entregaram e apenas 1 grupo entregou a resolução parcial dos problemas, respondendo de forma direta sem colocar como chegou aos resultados em alguns problemas.

Foi possível analisar que, embora uma colega tenha resolvido de forma equivocada o problema, ninguém se opôs a solução naquele momento. Penso que isso tenha ocorrido devido ao fato de apenas o grupo que resolveu o problema em questão ter ido ao quadro. Portanto, como os outros grupos não haviam feito, não houve nenhuma outra resposta ou questionamento sobre a solução apresentada.

Concluímos, ao final desta semana, que a parte do planejamento destinado para as apresentações dos problemas no quadro (plenária) pelos grupos é um momento importante, pois permite que os grupos interajam entre eles, questionem a resolução apresentada e também expliquem suas ideias para os outros. Essa interação faz parte do processo de aprendizagem, pois, às vezes, uma explicação feita por uma pessoa que usa uma linguagem mais simples e conciliadora ao grande grupo torna mais fácil o esclarecimento de uma dúvida. Desta forma, vale ressaltar que este momento de reflexão e exposição, embora não tenha sido aplicado satisfatoriamente durante as duas primeiras semanas, é uma das principais etapas na metodologia aplicada.

### 5.4. Semana 04 – Combinação Simples

Outra semana curta na escola devido ao final do ano letivo e por estar marcada uma reunião da direção com os pais e responsáveis dos alunos. As aulas foram canceladas durante um dia, por acaso o mesmo dia de um de nossos encontros. Por este motivo, tivemos apenas dois períodos para trabalhar este assunto, pois o terceiro estava destinado a um Teste e não podia ser adiado devido ao calendário escolar.

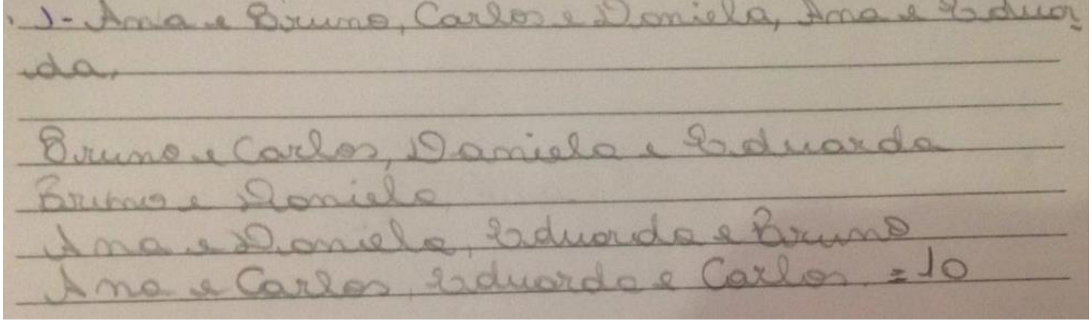
Ainda assim, eu continuei com a mesma metodologia das semanas anteriores, no entanto, os alunos, que antes tinham dois períodos para tentar resolver a lista, nesta semana tiveram apenas um período destinado à resolução. Ao perceber que estava indo contra uma das premissas definida na metodologia de Souza (2010), que era dar tempo suficiente para os alunos pensarem e tentarem resolver o problema, sugeri que os alunos resolvessem somente os dois primeiros problemas da lista (ver apêndice D). Em minha opinião como professor, eram importantes para a compreensão do conteúdo, visto que oportunizavam ao aluno a listagem das possibilidades e também uma possível conjectura de ideias para o entendimento do conteúdo, possibilitando a diferenciação do assunto anterior e a criação do conceito de combinação.

**Problema 1**: Ana, Bruno, Carlos, Daniela e Eduarda formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?

**Problema 2**: A equipe composta por: Ana, Bruno, Carlos, Daniela e Eduarda. Em uma segunda atividade precisa escolher três pessoas para representa-los. Quais são e quantas são as possibilidades?

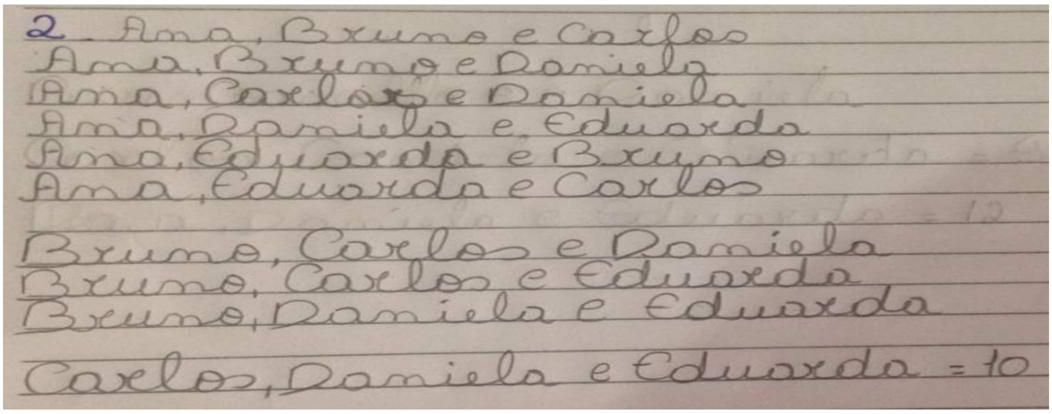
Dos 5 grupos que se organizaram, um não resolveu nenhuma das questões, dois listaram as possibilidades no problema 1, mas não terminaram de listar as possibilidades no problema 2.

Figura 12: Lista de combinações possíveis no problema1.


1- Ana e Bruno, Carlos e Daniela, Ana e Eduarda,
Bruno e Carlos, Daniela e Eduarda
Bruno e Daniela
Ana e Daniela, Eduarda e Bruno
Ana e Carlos, Eduarda e Carlos = 10

Fonte: Arquivo Pessoal.

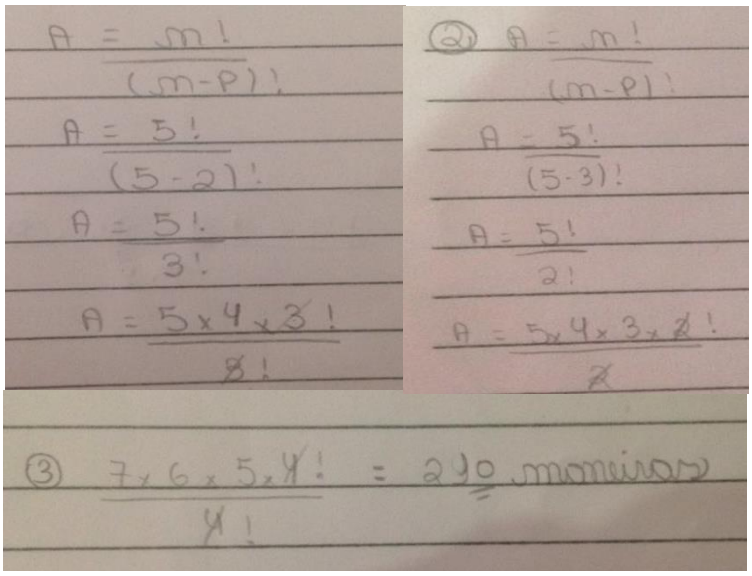
Figura 13: Lista de combinações possíveis no problema 2




Fonte: Arquivo Pessoal.

Os outros dois grupos utilizaram a fórmula do arranjo, vista na formalização da aula anterior, para resolver o problema. Pode-se perceber que isso ocorreu devido ao fato de que nas outras 3 listas de problemas era preciso utilizar o que tinha sido aprendido na semana anterior para resolver. Seguem abaixo três exemplos de utilização da fórmula de arranjo para resolver os problemas.

Figura 14: Grupos utilizando a fórmula do arranjo




Fonte: Arquivo Pessoal.

Sendo assim, os alunos fizeram uso deste artifício, utilizaram uma estratégia anteriormente aprendida para resolver os problemas, mas não notaram que era preciso excluir as possibilidades que se repetiam. Acredito que isso ocorreu devido ao fato de eles não resolverem a primeira parte do problema, que era listar as possibilidades.

No período destinado à apresentação e formalização deste conteúdo, visto que os alunos não tinham conseguido resolver os problemas de forma completa, busquei resolver os dois primeiros problemas da lista (ver apêndice D) da forma mais detalhada possível, pois queria que os alunos entendessem, acompanhassem a resolução e também visualizassem o que diferenciava um arranjo de uma combinação.

Nesse momento, busquei a mesma interação dos grupos nas semanas anteriores: quando havia dúvida, eu buscava orientar os alunos a um caminho para a solução, mas agora eu estava expondo para todos os grupos ao mesmo tempo. A primeira coisa que fiz foi tornar o problema mais concreto e visível a eles. O que antes eu fazia na classe do aluno como um orientador, agora estava fazendo na lousa, mas buscando uma interação com eles de modo que fossem contribuindo com as respostas. Embora eu estivesse na frente da turma explicando os problemas para todos os alunos, não era eu resolvendo os exercícios e os alunos copiando do quadro. A formalização seguiu dentro da ideia da plenária anteriormente definida, onde eu levantava questões a fim de estimular os alunos a uma resposta.

Note-se que, embora eu estivesse resolvendo os problemas no quadro, minha intenção era que os alunos chegassem às conclusões necessárias para a resolução. Para isso fiz, perguntas de modo a adaptá-las aos assuntos ou exemplos vistos anteriormente, a fim de que eles pudessem relacionar o assunto com conhecimentos previamente adquiridos.

### *5.4.4. Conclusões Parciais da semana 04*

Nesta semana, os alunos tiveram pouco tempo para resolver os problemas. Foi possível perceber que, mesmo os grupos que listaram as possibilidades, eles listaram apenas as possibilidades corretas, os mesmos não listaram todas e, posteriormente, excluíram as repetições que não interessavam. Por se tratar de uma semana mais curta e ter limitado o desenvolvimento da atividade, eu optei para que a formalização deste conteúdo fosse através dos problemas que sugeri para eles resolverem e aproveitei para mostrar o que eu queria que eles vissem nos problemas.

Considero que este foi o conteúdo mais prejudicado, pois além de não haver a apresentação dos problemas no quadro, os alunos não tiveram tempo suficiente para trabalhar e formular suas hipóteses e ideias.

## 5.5. Análise do Teste:

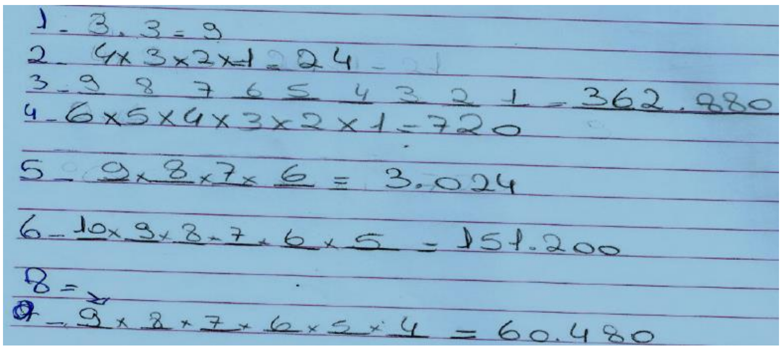
A primeira ideia desta avaliação, quando foi incluída na metodologia, era medir o uso de fórmulas. No entanto, como tive a oportunidade de trabalhar este conteúdo pela primeira vez com os alunos, esta ideia passou a não fazer mais sentido. Durante as semanas trabalhadas e com os trabalhos entregues, era possível ver que a maioria dos alunos estava buscando alternativas para resolver os problemas de maneira que não faziam o uso da fórmula. Isso demonstra que a proposta vinha apresentando resultados interessantes. Demonstra, também, que os alunos já consideram alternativas e pensam no problema para resolvê-lo. Pode-se afirmar, de acordo com o PCNEM (Brasil, 2002), que as fórmulas de AC devem ser apresentadas aos alunos a fim de facilitar os cálculos, mas antes é preciso valorizar o desenvolvimento do raciocínio logico do aluno. Acredito que a ênfase dada para que eles pensassem e buscassem ideias de como resolver o problema é responsável por isso, portanto, mesmo após ter colocado as fórmulas no quadro, ao final de cada conteúdo e também no dia da aplicação do teste, este não foi o método pelo qual os alunos tentaram resolver os problemas.

Com a aplicação do teste (ver apêndice E), podemos notar que o desempenho dos alunos não foi o esperado, apesar de as perguntas serem baseadas nas listas de problemas vistos durante as 4 semanas anteriores. É possível, contudo, perceber que as questões em que os alunos tiveram melhor desempenho foram as questões: 1,2 e 6.

Dos 16 alunos que fizeram o teste, 10 aplicaram o princípio multiplicativo em todas as questões que tentaram resolver e apenas 2 verificaram que algumas questões tinham restrições e que não era possível somente aplicar o princípio multiplicativo.

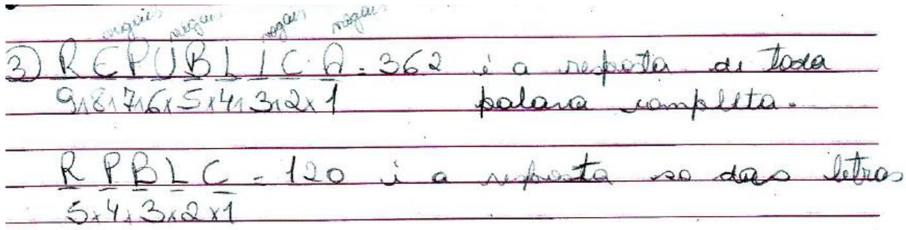
.

Figura 15: Aluna aplicando o princípio fundamental da contagem.




Fonte: Arquivo Pessoal.

Figura 16: Aluno aplica o princípio multiplicativo considerando a restrição do problema.




Fonte: Arquivo Pessoal.

Também é possível verificar que dois alunos tentaram listar as opções no primeiro problema, e um inclusive fez o diagrama da árvore para verificar a distribuição. Portanto, pude concluir que, apesar do desempenho dos alunos não ter sido muito bom, eles já abordam o problema através de uma estratégia especifica para o conteúdo (princípio fundamental da contagem). Atribuo também o mal desempenho dos alunos devido à falta frequente nos períodos destinados a formalização do conteúdo, onde foi possível ver que os 4 melhores desempenhos são de alunos que estavam presentes durante o período de formalização do conteúdo. Além disso, é preciso destacar que, ao optar por trabalhar em grupos de 3 e 4 pessoas, o que ocorreu é que um ou dois alunos se dedicam na atividade enquanto que os outros não demonstram interesse. Dessa forma, vale destacar que o principal responsável pelo ensino é o professor, mas todo o aluno tem sua parcela de responsabilidade neste processo. Outro aspecto positivo que podemos perceber é que os alunos não usaram as fórmulas para tentar resolver os problemas, pode-se dizer que não é porque eles não lembravam da fórmula, pois elas foram disponibilizadas no quadro durante a realização da prova.

### 5.6. Questionário

Após devolver os testes aos alunos e corrigir o mesmo na lousa, escrevi um questionário no quadro, para quem quisesse responder. O questionário continha três itens, e disse que os alunos não precisavam se identificar, a fim de que eles se sentissem seguros para escrever o que realmente pensavam a respeito.

Abaixo, seguem o questionário e também a transcrição de algumas respostas.

Item 1: Escreva o que você achou das aulas, da metodologia desenvolvida pelo professor e as criticas e elogios, se houver.

Item 2: O que você aprendeu?

Item 3: Dê uma nota de 0 a 10 e justifique.

De um modo geral, dos 12 alunos que responderam os questionários, 10 alunos acharam as aulas boas, e dois alunos não acharam boas e disseram não ter aprendido nada. Destes 10 alunos, 3 alunos descreveram que aprenderam a pensar, a raciocinar coisas diferentes. Seguem as transcrições das respostas de alguns alunos. Foram corrigidos alguns erros de português para entendimento do leitor. As respostas de todos os alunos que responderam o questionário estão listadas no apêndice F.

Aluno A: “Eu aprendi a complicar mais minha cabeça com tudo isso que foi dado durante essas três semanas de aula. Mas, no final, acho que foi bom, porque raciocinar e claro que em tudo que fazemos tem que ter um raciocínio né. Enfim, foi uma experiência bem legal onde mais rimos do que fazemos os exercícios.” “Minha nota é 8, porque era tudo diferente do que sabemos e mais raciocínio do que éramos acostumados”

Aluno B: “Aprendi muitas coisas: a fazer os cálculos e pensar de modo diferente.” “10 muito bom professor, atencioso, sempre explicou bem.”

Aluno C: “Eu achei as aulas interessantes, eu aprendi a pensar mais para conseguir resolver os problemas, acho o prof legal, explica bem, as vezes é um pouco chatinho.” “Eu aprendi algumas coisas, a pensar para resolver exercícios.”

Aluno D: “As aulas foi muito legal bem interessantes foi bem divertidas e você foi bem legal para nos ajudar.” “Eu aprendi varias maneiras do aprendizado, foi muito importante para mim aonde eu aprendi coisas diferente.”

Aluno E: “As suas aulas foram bem legais, trabalhadas, porém muitas vezes não nos dedicávamos, mas acho que todos tentaram fazer os exercícios proposto.”

Aluno F: “Achei as aulas bem legal divertida, acho que o prof tem que dar mais tempo para prova.” “Não aprendi muito pois não nos interessávamos muito chegávamos atrasado e não prestávamos atenção”

Aluno G: “Sobre as aulas eu não entendi muito, não entendo o que ele fala e explica, ele complica todo o conteúdo, explica dum jeito e na hora da gente fazer ele fala que ta errado.” “Eu não aprendi nada se me perguntarem desse conteúdo não saberei fazer.”

Percebe-se, ao longo destas respostas, que os alunos em sua grande maioria gostaram da metodologia. Cabe ressaltar que as respostas mostram que a proposta didática provocou um certo desequilíbrio que para alguns se transformou em desafio e para outros em limite. Pode-se perceber, também, que os alunos escreveram que aprenderam coisas diferentes, a pensar, a raciocinar, ou seja, é possível notar uma certa compreensão dos alunos diante do conteúdo, compreensão que, segundo Onuchic (1999), é o principal objetivo do ensino.

# 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa, foi aplicada uma metodologia de ensino através da qual buscou-se ensinar, a partir da RP, o conteúdo de AC. A AC, como podemos ver ao longo desta pesquisa, é um tema que exige muita atenção, preparo e dedicação tanto para quem deseja aprender como para quem deseja ensinar.

Essa preparação seguiu como base teórica os momentos definidos por Souza (2010): o antes, o durante e o depois; onde cada etapa continha deveres do professor, que, por sua vez, deveria preparar e elaborar estratégias para conduzir a aula; do aluno, que tinha como desafio resolver os problemas propostos, ou de ambos, quando era exigida uma interação aluno-professor para a construção de ideias. Definidos todos estes momentos e elaborada uma estratégia que contemplava os três, onde o "antes" contou com o preparo de listas de problemas e preparo de aulas para os alunos, o "durante" foi o momento em que era exigida a interação, a dedicação e desenvolvimento do pensar dos alunos e, por último, mas não menos importante, o "depois", que era o momento de interação dos alunos e de formalização do conteúdo visto semanalmente. Então, através das práticas desenvolvidas, buscou-se analisar quais as contribuições que esta metodologia proporcionava para o ensino de análise combinatória.

Assim como a metodologia aplicada na pesquisa era uma novidade para os alunos, bem como o conteúdo, era também novidade para mim, como professor, poder trabalhar a AC através da RP, pois não havia posto em prática este método ao longo do curso. Desenvolver o ensino de AC a partir de problemas foi o meu desafio como profissional da educação. O que notei como professor ao longo da pesquisa é que o ensino de AC através da RP é um caminho árduo, mas gratificante. É como enfrentar o medo, a ansiedade e o risco diariamente em sala de aula. Essa sensação de sair da zona de conforto, de lidar com a incerteza e a falta de segurança de não saber o que esperar na sala de aula nos obriga a estar mais preparados para cada aula, a pensar, a repensar e reexaminar nossa aula e conduta diariamente. Isso torna o trabalho muito cansativo e desgastante. No entanto, ver os alunos pensando, trabalhando e formulando ideias é uma sensação inefável.

É preciso salientar que esse sentimento de sair da zona de conforto também vale, em parte, para os alunos, pois essa metodologia tinha como exigência essa coragem de poder construir novas ideias e pensamentos, bem como elaborar estratégias para resolver problemas. O aluno tem de se colocar como protagonista do problema, processo este defendido pela propostas dos PCNEM (BRASIL 2002, p. 126): "aproximar o aluno da realidade e fazê-lo vivenciar situações próximas que lhe permitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta realidade". No decorrer da pesquisa, algumas expectativas foram atendidas e outras não. Pode-se afirmar que, mesmo diante de adversidades enfrentadas ao longo de cada semana, é notável o desenvolvimento dos alunos em buscar a independência no processo de aprender, em tentar antes de perguntar, ou seja, os alunos passaram a refletir sobre o problema.

Desta forma, considerando a metodologia aplicada, é possível afirmar algumas contribuições associadas a ela. Uma delas é o aluno tornar-se protagonista do seu saber, ou seja, com esta metodologia, o aluno vira o principal responsável na busca de conceitos, e, ao final da pesquisa, é possível afirmar que algumas habilidades definidas pelo PCNEM referente ao assunto de contagem foram adquiridas pelos alunos que desenvolveram as atividades propostas. Um exemplo: o aluno deve "identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolve raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem" (BRASIL, 2002, p. 127). É possível, também, verificar os benefícios de ter em sala de aula um professor orientador, pois, ao se deparar com uma dúvida, o aluno sente-se seguro em perguntar, visto que isso não irá interromper a aula, além de que a maioria das dúvidas são expostas, já que não há um modelo único para seguir.

Outra contribuição notável através do questionário respondido pelos alunos é que esta metodologia privilegia e promove o ato de pensar e de raciocinar, pois oportuniza o aluno a conjecturar e testar ideias, tornando o conteúdo mais atraente. Esta conclusão corrobora a fala de Onuchic (1990), na qual ele defende que o estudante precisa simpatizar com o conteúdo para poder aprender. A exposição das resoluções no quadro pelos alunos é outro fator bastante agregador e que, embora tenha sido feito apenas em um encontro durante a pesquisa, mostrou ser uma das principais formas de troca de conhecimento. Por meio desta exposição, os próprios aprendizes têm a oportunidade de debater, expor as ideias, contradizer ou concordar com os colegas. Esta forma de debate é bastante produtiva quando conduzida para somar conhecimento e ideias. E também oportuniza que os alunos compartilhem suas conclusões através de uma linguagem mais informal entre aluno e aluno. Um ponto negativo da metodologia é que, ao trabalhar em grupo, em alguns casos, existem pessoas que não contribuem com progresso do grupo. Também não é possível medir individualmente o avanço dos alunos, mas, por outro lado, permite o diálogo entre os alunos do grupo, o que promove um debate de ideias entre eles.

Em um contexto geral, a metodologia de RP para o ensino de AC é uma proposta que deve ser levada em consideração pelos professores, visto que os pontos positivos são de extrema relevância para a construção do saber, bem como o desenvolvimento autônomo do aluno em aprender, desenvolver e aplicar ideias próprias. Todo o desgaste emocional, físico e/ou mental exigido por essa metodologia de ensino é recompensado ao final de um trabalho que nos enche de orgulho. O bom professor não é aquele que melhor explica, mas sim aquele que mais incomoda e gera dúvida nos alunos, pois é a dúvida que nos obriga a buscar respostas.

Por último, vale ressaltar, como sugestões de desenvolvimento de pesquisas futuras, que, para se obter resultados melhores e mais precisos, é preciso que todos os momentos definidos na metodologia (o antes, o durante e o depois) sejam aplicados de forma correta e adequada, sem exclusão ou omissão de nenhuma das fases. O período de 4 semanas mostrou-se curto para o ensino deste conteúdo devido à complexidade do assunto.

# REFERÊNCIAS


ALMEIDA, Adriana Luziê de. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio**. 2010. 166 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010. Disponível em: <www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/2522>. Acesso em: 09 dez. 2017.

ALMEIDA, Adriana Luziê de; FERREIRA, Ana Cristina. Aprendendo análise combinatória através da resolução de problemas: um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio. **IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto,** Ouro Preto, v. , p.1-20, ago. 2009. Disponível em: <www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/1293>. Acesso em: 09 dez. 2017.

ANDRADE, Silvanio de. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problema**. 1997. 1 v. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1997.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa et al. O que dizem estudos recentes sobre o raciocínio combinatório. In: X ENCONTRO GAUCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí, Rs. **Anais**.. . Ijuí: Sbem-rs, 2009. p. 1 - 12. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_8.pdf>. Acesso em: 09 dez. 2017.

BRASIL. Brasil. Secretaria da Educação. **Parâmetro Curriculares Nacionais Ensino Médio:** Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Mec, 2002. 141 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 24 out. 2017.

BRASIL. Brasil. Secretaria de Educação Fundamental (Org.). **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: Mec, 1998. 148 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2017.

CERIOLI, Márcia R.; VIANA, Petrucio. Minicurso de combinatória de contagem. In: II COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, 2., 2012, Londrina. **Anais**... . Londrina: Sbm, 2012. p. 1 - 146. Disponível em: <http://www.emis.ams.org/journals/em/docs/coloquios/SU-2.05.pdf>. Acesso em: 09 ago. 2017.

DURO, Mariana Lima. **Análise combinatória e construção de possibilidades : o raciocínio formal no ensino médio**. 2012. 106 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Educação. Programa de Pós-graduação em Educação., Porto Alegre, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/49729>. Acesso em: 09 dez. 2017.

FONSECA, Jussara Aparecida da. **Análise combinatória na educação de jovens e adultos : uma proposta de ensino a partir da resolução de problemas**. 2012. 178 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/67877>. Acesso em: 09 dez. 2017.

FREITAS, Leandro Figueira. **Análise combinatória vivenciada na matemática uma nova proposta**. 2014. 42 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/leandro_figueira_freitas.pdf>. Acesso em: 09 dez. 2017

HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokitti; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. Análise Combinatória no Ensino Médio. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática: Educação Matemática em Revista - RS,** Rio Grande do Sul, v. 1, n. 14, p.65-74, mar. 2013. Disponível em: <http://www.sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/article/view/92>. Acesso em: 15 out. 2017.

LIMA, Elon Lages et al. **Temas e Problemas.** 3. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2001. 193 p.

LIMA, Wanessa Aparecida Trevizan de. **Ensinando matemática por meio de situações potencialmente adidáticas: estudo de casos envolvendo aná.** 2015. 137 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-24092015-171120/pt-br.php>. Acesso em: 26 out. 2017.

MENDONÇA, Maria do Carmo Domite. **Problematização: um caminho a ser percorrido em educação matemática.** 1993. 307 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/253646>. Acesso em: 25 nov. 2017.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/nedir/disciplinas-Pagina/Lourdes_Onuchic_Resol_Problemas.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2017.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; LEAL JUNIOR, Luiz Carlos. A influência da leitura na resolução de problemas: Questões de sentidos, significados, interesse e motivações. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura: Resolução de Problemas na Educação Matemática,** Natal, v. 21, n. 21, p.0-100, jan. 2016. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/58>. Acesso em: 20 set. 2017.

PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda; SÁ, Pedro Franco de. O ensino de análise combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais... .** Belo Horizonte: Sbem, 2007. p. 1 - 13. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em: 24 dez. 2017.

SOUZA, Analucia Castro Pimenta de. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de mat.** 2010. 344 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91047>. Acesso em: 12 nov. 2017.

STURM, Wilton. **As possibilidades de um ensino de analise combinatória sob uma abordagem alternativa.** 1999. 132 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/253486>. Acesso em: 15 nov. 2017.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. Análise Combinatória: Alguns Aspectos Históricos e uma Abordagem Pedagógica. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais... .** Recife: Sbem, 2004. p. 1 - 13. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2017.

Van de WALLE, John A. **Elementary and Middle School Mathematics.** New York: Longman, 2001.

# APÊNDICE A

Lista de Problemas de Análise Combinatória Semana 01

Orientações:

Ler atentamente enunciado do problema

Um representante do grupo lê o problema para o grupo

Trabalhar cooperativamente em busca de alternativas para a solução do problema.

Problemas:

1) João pode escolher entre três estradas para ir de sua casa ao colégio. De quantas maneiras diferentes João pode ir ao colégio e retornar para casa?
2) Suponhamos que João do problema anterior não queira retornar para casa pelo mesmo caminho que foi a escola. Quantos caminhos diferentes de ida e volta ele poderá fazer?
3) Em uma sala de aula existem 7 cadeiras em fila, suponhamos que o professor queira que seus 3 alunos sentem nesta fila. De quantos modos os alunos podem sentar em fila?
4) Quantas palavras podermos formar com todas as letras da palavra Brasil ?
5) Maria vai sair com suas amigas e, para escolher a roupa que usará, separou 2 saias e 3 blusas. De quantas maneiras ela pode se arrumar?
6) Um restaurante prepara 4 pratos quentes (carne, frango, peixe , carne de soja), 2 saladas (verde e russa) e 3 sobremesas ( sorvete, frutas e torta).
    a. De quantas maneiras diferentes um freguês pode se servir consumindo um prato quente, uma salada e uma sobremesa?
    b. Se o cliente for vegetariano (não come carne, frango e peixe) de quantas maneiras este cliente pode se servir consumindo uma prato quente, uma salada e uma sobremesa?
7) Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando as cores amarelo, branco e vermelho, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?
8) As placas de automóveis eram todas formadas por 2 letras (inclusive K,Y e W) seguidas por 4 algarismos. Atualmente as placas dos carros possuem 3 letras e 4 algarismos. Quantas placas de cada tipo podemos formar?

# APÊNDICE B

Lista de Problemas de Análise Combinatória Semana 02

Orientações:

Ler atentamente enunciado do problema

Um representante do grupo lê o problema para o grupo

Trabalhar cooperativamente em busca de alternativas para a solução do problema.

Problemas:

2) Existem quantas maneiras distintas para dispor em uma fila 4 bolas: uma vermelha, uma branca, uma azul, e uma verde?
    a. Se adicionarmos mais uma bola preta, de quantas maneiras distintas podemos dispor as cinco bolas em uma fila?
    b. Se adicionarmos mais uma bola amarela, de quantas maneiras distintas podemos dispor as seis bolas em uma fila?
3) De quantos modos distintos podemos formar uma fila com 4 pessoas?
4) Quantos anagramas da palavra "**TRAPO**" podemos formar?
5) De quantos modos distintos podemos formar uma fila com 7 pessoas?
6) A partir da palavra **NÚMEROS** (o acento sempre acompanhará a letra u), Responda:
    a. Quantos anagramas são possíveis de serem formados?
    b. Quantos anagramas têm como primeira letra uma vogal?
7) (FEI – adaptada) Quantos anagramas são formados com as letras da palavra **REPUBLICA** sendo que as vogais se mantém em suas respectivas posições?
    a. Se retirarmos a restrição das posições vogais quantos anagramas podemos formar?
8) Dois casais de amigos formam uma fila para compra de ingresso. De quantas maneiras distintas eles podem formar a fila?
9) (UFRGS - adaptada) Um trem de passageiros é constituído de uma única locomotiva e seis vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, de quantos modos diferentes podemos montar a composição do trem?

# APÊNDICE C

Lista de Problemas de Análise Combinatória Semana 03

Orientações:

Ler atentamente enunciado do problema

Um representante do grupo lê o problema para o grupo

Trabalhar cooperativamente em busca de alternativas para a solução do problema.

Problemas:

1) Quantos números de três dígitos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, podemos formar?
2) Quantas filas com quatro pessoas podemos formar a partir de um grupo de seis pessoas?
3) Em uma sala de aula tem 6 lâmpadas com interruptores independentes. De quantos modos pode-se iluminar essa sala, tal que:
    a. Acendendo 3 lâmpadas?
    b. Acendendo pelo menos duas lâmpadas?
    c. Acendendo 4 lâmpadas?
    d. Acendendo 2 lâmpadas?
4) Durante a olimpíada da escola de Maria, uma das tarefas era organizar uma estante de livros da biblioteca da escola. Sabendo que Maria tinha que organizar 8 livros (3 de matemática, 3 de psicologia e 2 de literatura), de quantos modos Maria pode organizar, sabendo que os livros devem ser organizados por categoria?
5) Quantos números pares de quatro dígitos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 podemos formar? E quantos números ímpares de quatro dígitos distintos podemos formar?
6) Em uma urna de sorteio de prêmios existem dez bolas enumeradas de 0 a 9. Determine o número de possibilidades existentes num sorteio cujo prêmio é formado por uma sequência de 6 algarismos.
7) Uma faculdade mantém 8 cursos diferentes. No vestibular, os candidatos podem fazer opção por 3 cursos, determinando-os por ordem de preferência. Sabendo disso, qual o número de formas de escolher os cursos?

# APÊNDICE D

Lista de Problemas de Análise Combinatória Semana 04

Orientações:

Ler atentamente enunciado do problema

Um representante do grupo lê o problema para o grupo

Trabalhar cooperativamente em busca de alternativas para a solução do problema.

Problemas:

1) Ana, Bruno, Carlos, Daniela e Eduarda formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?
2) A equipe composta por: Ana, Bruno, Carlos, Daniela e Eduarda. Em uma segunda atividade precisa escolher três pessoas para representa-los. Quais são e quantas são as possibilidades?
3) Em uma eleição escolar para escolha de uma comissão de formatura 7 alunos se candidatam para as 4 vagas disponível. De quantas maneiras essa comissão pode ser formada?
4) Em uma reunião social, cada pessoa cumprimentou todas as outras, havendo ao todo 45 apertos de mão. Quantas pessoas havia na reunião? DICA: Faça com os seus colegas um experimento.
5) Numa prova de 10 questões, o aluno deve resolver apenas 6. De quantas maneiras diferente ele poderá escolher essas 6 questões?
6) De quantas maneiras diferentes um técnico pode escalar seu time de basquete (5 integrantes) tendo a sua disposição 12 atletas que jogam em qualquer posição?

# APÊNDICE E

Prova Avaliativa Individual

Nome:

Orientações da prova: Escolha 8 Problemas abaixo, resolva e explique como chegou na solução, lembre-se só a resposta não é considerado certo, é preciso apresentar os cálculos e justificativas na solução.

1) João pode escolher entre três estradas para ir de sua casa ao colégio. De quantas maneiras diferentes João pode ir ao colégio e retornar para casa?
2) Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando as cores amarelo, branco e vermelho, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?
3) Quantos anagramas são formados com as letras da palavra **REPUBLICA** sendo que as vogais se mantêm em suas respectivas posições?
4) UFRGS - adaptada). Um trem de passageiros é constituído de uma única locomotiva e seis vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, de quantos modos diferentes podemos montar a composição do trem?
5) Quantos números pares de quatro dígitos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, 8 e 9 podemos formar? E quantos números ímpares de quatro dígitos distintos podemos formar?
6) Em uma urna de sorteio de prêmios existem dez bolas enumeradas de 1 a 10. Determine o número de possibilidades existentes num sorteio cujo prêmio é formado por uma sequência de 6 algarismos.
7) Quantos números de três dígitos distintos escolhidos entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, podemos formar?
8) Numa prova de 9 questões, o aluno deve resolver apenas 5. De quantas maneiras diferente ele poderá escolher essas 6 questões?
9) De quantas maneiras diferentes um técnico pode escalar seu time de basquete (5 integrantes) tendo a sua disposição 18 atletas que jogam em qualquer posição?

## APÊNDICE F

(1) As aulas foram ótimas e Sobre o Prof. excelente não tenho o que reclamar pois ajudou a todos como pôde.

(3) 9

1- Achei dificil.

2- Aprendi Análise Combinatória

3- 5.

(1) Sobre as aulas eu não entendi muito, não entendo o que ele fala e explica, ele complica todo o contéudo, explica de um jeito e na hora da gente fazer ele fala que ta errado.

(2) Eu não aprendi nada se me perguntarem desse contéudo não saberei fazer.

(3) dou a nota 3 .

1) Achei as aulas bem legal divertida, Acho que o prof. tem que dar mais tempo pra prova. Ele é uma pessoa legal.

2) Não aprendi muito pois não nós interessamos muito chegavamos atrasado e não prestavamos atenção

3) 6 pois ele é bem esforçado ~~e eu~~ acho que vai ser um bom prof. só não pode ser muito rigido.

1) Eu achei as aulas interessantes eu aprendi a pensar mais para conseguir resolver os problemas; acho o prof legal, explica bem, as vezes é um pouco chatinho.

2) Eu aprendi algumas coisas, a pensar para resolver exercícios...

3) 1,25 obs: porque foi minha nota.

1- O que você apredeu?

Eu aprendi a complicar mais minha cabeça com tudo isso que foi dado durante essas três semanas de aula. Mas no final acho que foi bom porque raciocinar é claro que em tudo que fazemos tem que ter um raciocinio né. Enfim foi uma experiência bem legal. onde mais rimos do que fazemos os exercícios.

2- Dê uma nota de 0 a 10 e justifique.

Minha nota é 8 porque era tudo diferente do que sabemos e mais raciocinio do que eramos acostumados.

2) Aprendi, muitas coisas a fazer os cálculos e pensar de modo diferente.

3) 10 muito bom profesor, atencioso sempre explicou bem.

1 - Eu achei as aulas boas, aprendi coisas novas, o professor é legal explica bem.

2 - Eu aprendi na matéria de Análise Combinatória que existe fatorial, comerimação,

3 - 8 porque as aulas foram boas.

D S T Q Q S S

Eu achei as aulas Boas, aprendi coisas novos, O professor é bom professor.

1. Escreva o que você achou das Aulas e metódologia do prof: críticas e elógio, se haver

Eu achei muito bom, que aprendemos bastante e se esforçamos para fazer-mos os exercícios em sala, explicou uma Seria muito bem dum feito que todo mundo aprendeu e entendeu.
Parabéns

O que você aprendeu?

Eu aprendi que nós podemos resolver as questões dum modo simples, aprendeu coisas novas foi muito bom e interressante, elas interativas com brincadeiras, mas na hora do conteúdo era hora de explicar.

Muito Bom

De uma nota justifique de 0 á 10 e justifique.

10

1 As suas aulas foram bem legais bem trabalhadas porem muitas vezes nós não nos dedicamos, mas acho que todos tentaram fazer os exercícios propostos.

2 Eu aprendi varios conteudos permutação simples, análise combinatória entre outras.

3 10 – Pois o senhor se esforço para nos explicar mas os alunos que não se didicam por isso muitos foram errado

data S T Q Q S S D

1 – As aulas foi muito legal bem interessantes ~~[illegible]~~ Foi bem divertidas e vc Foi bem legal para nós ajudar.

2 – Eu aprendi varias maneiras do aprendizado Foi muito emportante pra mim aonde eu aprendi coisas diferentes.

3 – 10

## ANEXO A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE PEQUISA

Escola Estadual de Ensino Médio Professora Carolina Argemi Vazquez
Rosário do Sul – RS
19ª Coordenadoria Regional de Educação
Santana do Livramento – RS
Secretaria da Educação
Estado do Rio Grande do Sul

Escola Estadual de Ensino Médio
Profª. Carolina Argemi Vazquez
Av. Cel. Sabino de Araújo, 1619
Par. de Aut. 811/94 D.O: 15/03/94
E-mail: carolinaavazquez19cre@educacao.rs.gov.br
Rosário do Sul - RS

**AUTORIZAÇÃO**

Autorizo o acadêmico **GUILHERME DE LIMA DE MENEZES** a aplicar a pesquisa de TCC, referente ao tema **"Análise Combinatória"**, no período de 30 de outubro a 07 de dezembro de 2017.

Rosário do Sul, 30 de outubro de 2017.

**LUCI IVANI FURTADO PRATES**
**DIRETORA**
**ID: 1860534/01**