UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

IMAGENS DO CONCEITO DE LIMITE: UMA VISÃO DOS ALUNOS DO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

KRISTINE SHEILA SCHUSTER

Porto Alegre
2018

KRISTINE SHEILA SCHUSTER

IMAGENS DO CONCEITO DE LIMITE: UMA VISÃO DOS ALUNOS DO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática

Orientador Metodológico
ProfªDrª Débora da Silva Soares

Porto Alegre
2018

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática

Imagens Do Conceito De Limite: Uma Visão Dos Alunos Do Terceiro Ano Do Ensino Médio

Kristine Sheila Schuster

Banca examinadora:

Profª Drª Débora da Silva Soares
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Profª Drª Andréia Dalcin
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof° Dr° Rodrigo Della Vecchia
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que estiveram comigo no momento de construção, desenvolvimento e finalização deste trabalho, a todos que me incentivaram, acreditaram em mim e me apoiaram para que esse trabalho fosse concluído.

À Marinita, Luis Henrique, Bruna e Luis Ricardo, com carinho.

RESUMO

Este trabalho pretende responder a seguinte pergunta de pesquisa *“Quais as imagens do conceito de limite alunos do terceiro ano do Ensino Médio mobilizam ao trabalhar com a resolução de um problema?”*. Nossa prática foi desenvolvida através da utilização da tendência em educação matemática Resolução de Problemas. Tomamos como base as considerações de Lourdes de La Rosa Onuchic acerca desta tendência e propomos uma prática cujo problema gerador envolveu o estudo de um fractal, o triângulo de Sierpinski. Conduzimos a prática de forma que os alunos chegassem ao conceito de limite de forma intuitiva e, a partir de suas respostas em um questionário sobre o que entendiam por limite e infinito, analisamos as imagens do conceito de limite que os alunos mobilizaram durante o desenvolvimento do problema. Para tanto buscamos a teoria de David Tall que nos fala acerca da imagem do conceito e da definição do conceito.A partir da análise dos dados coletados, foram criadas categorias que agruparam as respostas dos alunos, são elas: identifica o limite como sendo o limite de algo; usa a matemática para argumentar que o limite não existe ou não tem fim; identifica o limite como o fim de algo; justifica o limite de forma parecida com a definição formal; limite como algo que não continua; algo crescente e/ou contínuo; usa a matemática para justificar o limite; limite como algo que aumenta. Depois da prática pudemos observar que as imagens que os alunos descreveram, nas três vezes em que o questionário foi aplicado, sofreram variações, o que nos sugereque a prática teve influência sobre as imagens do conceito de limite que foram mobilizadas pelos alunos.

Palavras-chave: Limite. Fractal.Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This studyintends to answer the research question "Whatconcept images of limit do students from the third year of high school mobilize while working with the resolution of a problem?". Our practice was developed through the use of Problem Solving, a Trend in Mathematics Education. We based our work in the considerations made by Lourdes de La Rosa Onuchic about this trend and we proposed a practice which the trigger problem involved the study of a fractal, the Sierpinski triangle. We conducted the practice in a way that fostered the students to understand the concept of limit in an intuitive way and, from its answers in a questionnaire about what they understoodby limit and infinite, we analyzedthe conceptimages of the limit concept that students mobilized during the development of the problem. Therefore, we considered the theory of David Tall about concept image and concept definition. From data analysis, we have created some categories that grouped students' answers: identifies the limit as being the limit of something; utilize the mathematicsto argue that the limitdoes not exist or has no end; identifies the limit as the end of something; justifies the limit in a way similar to the formal definition; limit as something that does not continue; something increasing and / or continuous; utilizemathematics to justify the limit; limit as something that increases.After the practice, we couldobserve that the conceptimages that the students described, in the three times in which the questionnaire was applied, suffered variations, which suggeststhe practice influenced the concept images of limit that were mobilized by the students.

Keywords: Limit.Fractal. Problem Solving.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo sobre a compreensão dos alunos com relação ao conceito de limite. Dado que muitos dos alunos ingressantes no primeiro semestre das Universidades apresentam dificuldades com a compreensão desse conceito, o qual é fundamental para o estudo de Cálculo Diferencial e Integral, analisaremos as diferentes compreensões sobre limite que os alunos do terceiro ano do Ensino Médio têm.

Movida pelo questionamento: "*Por que não é introduzida a ideia de cálculo no Ensino Médio?*" é que comecei a investigar e questionar o que de fato pode estar por trás dessa questão. Como é de meu interesse aprofundar o estudo com relação ao estudo de Cálculo no ensino médio e visto que, para que seja possível a compreensão desse conteúdo, é preciso compreender o conteúdo de *Limite* foi que decidi mudar meu questionamento.

Agora, "*Para que ou por que introduzir o estudo de limite no Ensino Médio?*". Essa nova questão surgiu quando observei pela primeira vez o livro "Curso de Matemática –para os primeiros, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico". Nele aparece a introdução do estudo de limite antes do estudo de cálculo. Com base neste material foi que pensei em analisar a introdução do estudo de limite com alunos do terceiro ano do ensino médio para observar como se dá a compreensão desses alunos sobre este conteúdo.

Visto que a análise desta pergunta demandaria muito tempo de observação e acompanhamento com os alunos, eis que altero minha pergunta novamente. Baseada na imagem do conceito e definição do conceito de David Tall é que procurei verificar: "*Quais as imagens do conceito de limite alunos do terceiro ano do Ensino Médio mobilizam ao trabalhar com a resolução de um problema?*".

Durante a graduação percebi maior interesse nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e Álgebra Linear. Logo, soube que meu trabalho de conclusão de curso seria voltado a alguma dessas áreas de conhecimento. Motivada pela curiosidade acerca do conteúdo de limite foi que decidi explorar mais essa área e entender porque esse conteúdo não é ensinado no Ensino Médio, visto que sua compreensão é de extrema importância para a disciplina de Cálculo e que ele acaba sendo pouco explorado quando ensinado durante o curso. Assim, quis continuar meu estudo nessa área de conhecimento, buscando compreender as diferentes imagens do conceito de limite que são apresentadas pelos alunos do terceiro ano do Ensino Médio.

Inicialmente havia considerado a proposta de trabalhar com a história da educação matemática, buscando analisar porque o conteúdo de limite não é trabalhado no ensino médio, como, antes de 1960, era trabalhado no curso científico. Dentre as informações que busquei acerca deste tema, constatei que, com a chegada da família Real Portuguesa, Dom João VI criou, aos 12 anos de idade, algumas Universidades e locais de estudo, trazendo para a Colônia os primeiros suspiros da Educação depois de extintas as escolas catequéticas que eram administradas pela ordem de Inácio de Loyola. Ao longo das primeiras décadas do século XX não foram estabelecidas leis que definissem claramente como deveria ser administrada e financiada a educação em todo o país.Eis que surge na década de 1940 as Leis Orgânicas do Ensino que definem todas as disciplinas a serem estudadas nos níveis da Educação Básica.

O Governo Federal deveria fornecer recursos básicos aos Estados para que pudessem desenvolver as atividades das escolas, porém nunca foi estabelecido como deveria se dar essa ajuda. As definições da Lei aprovada em meados de 40 seguiram em vigor até ser aprovada a primeira lei geral da educação brasileira - a Lei de Diretrizes e Bases - LDB n. 4024/1961. Foi entre essas duas reformas que o ensino de Limites saiu do currículo da matemática apresentada no ensino científico.

A partir da reforma de 1961 é que se entendeu avançado demais o estudo de Cálculo para os alunos e foi nesse momento que os professores pararam de ensinar esse conteúdo. Os livros didáticos deixaram de apresentar em seus escritos esse conteúdo tal qual era ministrado até então e o estudo de limites passou a ser um conteúdo exclusivo para aqueles que cursam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral ministrada no Ensino Superior.

Apesar de ainda haver registros em determinados livros didáticos, com o passar dos anos, o conteúdo de limite foi desaparecendo e deixando de ser conhecido pelos alunos, pois essa palavra, “limite”, acabou sendo associada a outros significados, como por exemplo *‘as crianças estão sem limites hoje’*, ou seja, os alunos não conhecem o conceito de limite associado ao conceito matemático, logo passou a ser um conceito que é conhecido apenas por aqueles que seguem seus estudos no Ensino Superior e na área das ciências, engenharias ou exatas. Em um esforço de resgatar o conceito de limite no Ensino Médio é que este trabalho tem por objetivo utilizar a resolução de um problema envolvendo um fractal para que os alunos do terceiro ano do ensino médio construam sua imagem do conceito de limite[1] e possam identificar um “novo” conteúdo até então adormecido para este nível de ensino, mostrando que é possível ensiná-los sobre um determinado conteúdo que não está previsto no currículo atual.

[1] Baseada em David Tall utilizarei apenas a imagem intuitiva do conceito de limite dos alunos, uma vez que não é de nosso interesse observar e analisar a construção do conceito formal.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção, apresentamos alguns trabalhos de pesquisa que abordam temas correlatos ao desta pesquisa. Em virtude disso, iniciamos uma busca dos trabalhos que compreendem os pré-requisitos da nossa pesquisa e que abordam o mesmo tema de estudo. Ao verificar diversos trabalhos, constatamos que os escolhidos abrangiam um pouco mais sobre o que escolhemos pesquisar.

1.1 Trabalhos correlatos: o ensino de limite

Em primeiro lugar será explorado o assunto do artigo *"*O Ensino de Cálculo no 2° Grau*"* apresentado na RPM 18 no tópico "As coisas que ensinamos" (ÁVILA, 1991). Este texto foca diretamente sobre o estudo do Cálculo no 2° grau, hoje conhecido como Ensino Médio, visando destacar a importância do estudo desse conteúdo pelos alunos ainda antes de seu ingresso nas Universidades. Ao longo do texto o autor faz referência ao fato de que antes de 1960 o cálculo fazia parte do currículo escolar, mas que depois de uma reforma o mesmo foi retirado. O objetivo aqui não é contestar o conteúdo em si, nesse caso o Cálculo, mas sim destacar que o autor reintegra a importância de que o atual currículo de matemática que é trabalhado no Ensino Médio é ultrapassado e necessita de alterações. Nesse sentido que são feitas as apropriações do texto. Quanto ao estudo de limites é importante destacar que ele é parte fundamental para a introdução do ensino do cálculo e que para que o cálculo volte a ser trabalhado nas escolas no período do ensino médio é importante que o estudo de limites também seja.

O autor destaca a importância da alteração do currículo para a inclusão do cálculo da seguinte forma:

> Como se vê, não é que falte espaço para o Cálculo nos programas. É preciso, isto sim, reestruturar esses programas, eliminar o que neles há de arcaico, introduzir novos tópicos e modernizar as apresentações, tudo isto feito de maneira que as diferentes partes fiquem bem articuladas entre si e o conjunto apresente organicidade. (ÁVILA, 1991, p.2).

Assim é possível compreender que a proposta de analisar a ideia de alteração do currículo está diretamente relacionada com o ensino de novos conteúdos, como o cálculo e limite, sendo necessário fazê-lo o quanto antes.

No artigo “Limites e derivadas no ensino médio*?*” (ÁVILA, 2006) percebe-se uma instrução inicial de como trabalhar os conteúdos programáticos do ensino médio de modo que os mesmos não permaneçam desvinculados uns dos outros, mas sim propondo que, a sequência indicada, sirva de guia para que o estudo seja facilitado e de fácil compreensão por parte do aluno. Como no primeiro artigo citado, o conteúdo limite não aparece desvinculado do cálculo e dessa vez aparece vinculado também com o conteúdo de funções, porém em nenhum momento é explicitado apenas o ensino do conteúdo limites, o que foge um pouco do foco deste trabalho.

No livro “Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Cálculo - cápsula 13: Convergência”, “As coisas que ensinamos”, a cápsula estudada mostra uma visão geral do avanço dos estudos sobre Convergência e seus principais autores. Logo no início do texto surgem algumas comparações entre as descobertas de diferentes autores, mas o foco principal do texto é mostrar que os estudos seguem o mesmo estilo, ou seja, apesar da pouca e difícil comunicação, os autores seguem uma mesma linha de conhecimentos.

No que se trata sobre o estudo de limites, foi D’Alembert que declarou que algo deveria ser feito. Ao longo do resto do texto o foco se torna a forma como os pesquisadores se dedicaram a resolver os problemas referentes ao estudo do cálculo, o qual depende do estudo de limite.

O TCC “Pensando no infinito para entender cálculo: uma visão de professores sobre a introdução ao cálculo no ensino médio”, é um trabalho de conclusão de curso orientado pela Profª. Drª.Lucia Helena Marques Carrasco do Instituto de Matemática, hoje Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, do ex-aluno Guilherme Porto da Silva. A proposta deste trabalho é analisar alguns fatores que dificultam a aprendizagem dos alunos com relação ao cálculo diferencial e integral. Os conceitos estudados são funções, continuidade e infinito. A partir dessa análise, o autor busca identificar uma proposta de ensino que ajude os alunos na compreensão desses conteúdos, a fim de facilitar o estudo desses quando na realização da disciplina de cálculo durante o curso superior.

Nossa análise sobre o TCC está direcionada à parte em que o autor se refere do Infinito. Nas páginas 35, 36 e 37, na seção 3.2 Infinito Potencial e Infinito Atual, fica claro observar a relevância do estudo do limite para a definição de infinito. Apesar de apresentar os paradoxos com relação a sua definição, o autor busca mostrar como o conceito de infinito se desenvolveu ao longo dos anos acompanhando a necessidade de seu uso para a matemática.

Analisando agora o conteúdo com relação a limite que o autor apresenta é importante destacar que ele o faz de uma forma simples, utilizando sequências de números e a construção dos números irracionais como exemplo. Com relação ao que buscamos, fica clara a importância de trabalhar essa construção com os alunos antes de iniciar o conteúdo de cálculo. Sem o conceito de limite explicado de maneira correta fica difícil para os alunos entender, no futuro, por exemplo, o comportamento de uma função que não está definida para um determinado ponto.

No texto "Limites de sequência em cálculo: usando a pesquisa de design e baseando-se na intuição para apoiar a instrução" (KEENE, HALL, DUCA, 2014) os autores descrevem que sua pesquisa é um trabalho que foi construído com a finalidade de criar um curso de orientação e aperfeiçoamento para professores do ensino fundamental, abordando a definição de alguns conceitos matemáticos, dentre eles o conceito de limite. Seu objetivo era de que esse aprimoramento auxiliasse na formação destes profissionais para que eles, por sua vez, consigam melhores formas de adaptar o ensino-aprendizagem para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos por parte de seus alunos. Em termos da pesquisa, o objetivo dos autores é analisar as respostas e concepções que os participantes do curso desenvolveram no decorrer da prática realizada. A classificação, feita pelos autores, das ideias intuitivas sobre limite que os alunos do curso construíram, serviu como inspiração para a elaboração de uma classificação semelhante das respostas dos alunos do terceiro ano do ensino médio, com os quais realizamos a prática, sobre o que entendem por limite e infinito.

No texto os autores destacam a ideia de intuição da seguinte forma:

> A intuição de uma pessoa em relação a um sujeito é difícil de medir, dada a miríade de fatores que influenciam a intuição. Além disso, os pesquisadores tiveram dificuldade até mesmo definindo a intuição como Fischbein (1999) ilustra: Não existe uma definição comumente aceita para o conhecimento intuitivo. O termo "intuição" é usado como se usa termos matemáticos primitivos como ponto, linha, conjunto, etc. O significado da intuição é implicitamente considerado como sendo intuitivamente evidente. A propriedade comumente, implicitamente aceita é a de auto-evidência, que se opõe a um esforço analítico lógico.(FISCHBEIN, 1999, p.12 apudKEENE, HALL, DUCA, 2014, p.3)

Além de ser feita uma investigação sobre intuição, os autores do texto fazem uma observação sobre a ideia de limite, onde apresentam a seguinte afirmação:

> Os limites de sentido único são frequentemente introduzidos informalmente através de linguagem dinâmica. Por exemplo, pode-se dizer que uma sequência tem um limite L se os termos dessa sequência estão ficando "perto" ou "cada vez mais perto" de L, ou se a sequência "aproxima-se" de L. No entanto, como os pesquisadores descobriram, embora essas frases não tenham a formalidade da

> proximidade arbitrária necessária para a compreensão da definição de limite de uma sequência (Monaghan 1991; Oehrtman 2008; Roh 2008; Tall e Vinner, 1981; Williams 1991), elas se baseiam na intuição dos alunos sobre o que é um limite, se ele existe, e como ele é encontrado. Essas visões informais e dinâmicas de limite podem ser produtivas para cursos de cálculo introdutórios que enfatizam o limite como um conceito abrangente, mas não satisfatório para educadores que busquem encorajar uma compreensão mais profunda da definição de limite.(KEENE, HALL, DUCA, 2014, p.6)

Essa pesquisa foi conduzida em uma universidade dos Estados Unidos em um curso denominado Cálculo para Professores do Ensino Fundamental. A atividade foi feita em duas etapas e os alunos se dividiram em pequenos grupos, sendo realizadas também discussões guiadas para toda a classe. As estratégias de instrução utilizadas foram destinadas a facilitar o aprendizado ativo através do uso da investigação, colaboração e justificação de ideias (KEENE, HALL, DUCA, 2014, p.6). Foram realizados dois questionários com perguntas norteadoras que envolviam o conteúdo de limite. Um dos questionários foi realizado logo no início das aulas e o outro, depois de algumas semanas de realizada toda a prática. Em ambos foram coletadas as respostas dos alunos, que totalizaram até o fim do curso vinte e oito pessoas, e foram organizadas em tabelas feitas com categorias que classificassem cada umas das respostas, podendo a mesma resposta aparecer em mais de uma categoria.

O trabalho "Construção do conceito de limites no Ensino Médio por meio da metodologia de Resolução de Problemas" (PEREIRA, MELO, BISOGNIN, 2014) tem por objetivo a construção do conceito de limite de funções reais a partir de uma prática desenvolvida através da metodologia de Resolução de Problemas. Os autores se baseiam na teoria de Tall e Vinner (1981) para identificar as imagens do conceito e as definições do conceito que permitem que sejam construídas as imagens conceituais sobre o conceito de limite. No desenvolver do trabalho os autores situam a atual colocação do estudo de limite de funções, o qual não está previsto no currículo do Ensino Médio, porém aparece nos livros didáticos de autores que desenvolvem estes livros.

A prática foi desenvolvida com alunos do segundo ano do ensino médio de uma escola estadual do interior do estado do Rio Grande do Sul aos quais foram propostas três atividades de Resolução de Problemas. A primeira atividade envolvendo área de uma região quadrada e solicitado aos alunos que pintassem metade da área dessa região e sucessivamente metade da região em cada etapa avançada. Na segunda atividade foi solicitado aos alunos que explorassem a área de um retângulo, a qual era limitada e os alunos iriam preenchendo uma tabela com alturas aleatórias, de modo que verificaram que a área máxima do retângulo seria $18\ cm^2$. A última atividade foi um problema relacionado a funções, o qual os alunos deveriam observar quanto tempo uma torneira com a vazão de 1500 litros por hora levaria para encher um tanque com capacidade de 18000 litros, sendo que já haviam 3000 litros dentro do tanque no início da atividade.

Em todas as atividades o foco foi construir o conceito de limite com os alunos e os autores verificaram que essa construção é possível, desde que seja trabalhado com atividade adequadas para o nível intelectual dos alunos, isto é, com atividades que, conforme consta no texto, “não se constituíssem um obstáculo quanto à apropriação do conceito intuitivo de limites” (PEREIRA, MELO, BISOGNIN, 2014, p.10). Podemos verificar que esse texto segue a mesma ideia de construção do conceito de limite que havíamos planejado seguir, com diferença no conteúdo matemático presente nos problemas propostos que foi trabalhado para a construção desse conceito e no objetivo da pesquisa. Este texto foi encontrado durante uma pesquisa com relação a imagem do conceito de limite como conteúdo a ser ensinado nas escolas e enquanto o desenvolvimento do nosso trabalho já estava em andamento, por isso identificamos como trabalho fundamental para os trabalhos correlatos da nossa pesquisa.

1.2 Trabalhando com Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas é uma tendência muito utilizada para pesquisas. O texto “Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas” de Onuchic (1999) mostra como se deu a percepção da Resolução de Problemas como uma tendência a ser estudada. Inicialmente via-se a resolução de problemas apenas como um mecanismo utilizado para exercitar a repetição de técnicas para solucionar problemas matemáticos, mas ao longo do tempo foi-se percebendo que pode-se utilizar esse método para aprender matemática e não só decorá-la. Para justificar a escolha dessa metodologia para a aplicação da atividade proposta retiramos do texto de Onuchic alguns trechos que argumentam sobre a importância da Resolução de Problemas para o ensino-aprendizagem dos alunos de forma intuitiva e independente.

Pensando no foco deste trabalho, Andrade (1998, p.12) nos fala que “a Resolução de Problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática”. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal. O foco está na ação por parte do aluno. Ou seja, utilizaremos a Resolução de Problemas como metodologia para estimular os alunos a fim de que, resolvida a construção do fractal, eles compreendam intuitivamente o conceito de limite e traduzam no glossário qual a imagem do conceito eles têm por limite. Isso será feito para que depois seja possível analisar as diferentes imagens que possam surgir, sem que os alunos se deem conta de que estão contribuindo para isso. No texto de Onuchic (1999) encontramos duas citações que explicam porque é de nosso interesse trabalhar com essa tendência matemática, uma vez que através dela é que os alunos poderão construir seu próprio conhecimento. No texto, podemos observar que:

> O ponto central de nosso interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática. É importante ter a visão de que compreender deve ser o principal objetivo do ensino, apoiados na crença de que o aprendizado de matemática, pelos alunos, é mais forte quando é autogerado do que quando lhes é imposto por um professor ou por um livro-texto. Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. (ONUCHIC, 1999, p. 208)

> Numa sala de aula onde o trabalho é feito com a abordagem de ensino de matemática através da resolução de problemas, busca-se usar tudo o que havia de bom nas reformas anteriores: repetição, compreensão, o uso da linguagem matemática da teoria dos conjuntos, resolver problemas e, às vezes, até a forma de ensino tradicional. Nenhuma intervenção no processo de aprendizagem pode fazer mais diferença do que um professor bem formado, inteligente e hábil. Investir na qualidade de ensino é o que mais importa. A preparação do professor tem um efeito direto na realização dos alunos, pois ninguém dispende tanto tempo ou tem tanta influência sobre os alunos quanto os próprios professores. (ONUCHIC, 1999, p.211)

Em suas considerações finais Onuchic fala que não devemos utilizar a Resolução de Problemas como uma ferramenta para aplicação de uma atividade, mas que devemos considerá-la como um guia para que o aluno possa aprender de forma a construir seu conhecimento pela experiência de resolver um problema. Para identificar um caminho considerável para organizar um planejamento a ser desenvolvido com Resolução de Problemas, Onuchic descreve alguns passos para auxiliar nessa construção.

> Atendendo a solicitações e com a participação de professores, procuramos esquematizar uma aula na qual um objeto matemático fosse trabalhado, visando a um ensino-aprendizagem de compreensão e significado, através da resolução de problemas. Apoiados na literatura consultada e aproveitando experiências anteriores, chegamos a uma proposta básica: Formar grupos - entregar uma atividade; O papel do professor; Resultados na lousa; Plenária; Análise dos resultados; Consenso; Formalização (ONUCHIC, 1999, p.215-217)

Esses são os passos que a autora considera necessário para ensinar matemática através da Resolução de Problemas, visando o aluno como formador principal do seu próprio conhecimento, argumentando e sendo protagonista na formação dos conceitos matemáticos que devem ser definidos ao longo da atividade proposta, tendo o professor apenas como orientador e facilitador do processo de aprendizagem, estando disponível para apoiar e guiar os alunos para que estes consigam identificar o esperado.

Os trechos acima retirados do texto de Onuchic mostram pontualmente porque foi nossa escolha trabalhar com a Resolução de Problemas como metodologia para guiar a atividade a ser desenvolvida com os alunos. É de nosso interesse que os alunos tenham uma experiência de ensino-aprendizagem em que eles sejam responsáveis pela construção do conceito de limite a partir da atividade que foi proposta.

O que é um problema? No texto de Onuchic, “A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos?” encontramos uma referência à English, Lesh e Fennewald (2008) que salientam que “a pesquisa em resolução de problemas tem focado primeiramente sobre os problemas com enunciado do tipo enfatizado nos livros- texto ou nos testes escolares – onde "problemas" são caracterizados como atividades que envolvem ir dos dados para os objetivos quando o caminho não é óbvio.” (ENGLISH; LESH; FENNEWALD, 2008, p.2, apud ONUCHIC, 2013, p.96). Nesse sentido, um problema está baseado em dados que devem ser fornecidos para que o indivíduo seja capaz de, a partir desses dados, descobrir outros dados até ser capaz de resolver o problema. Assim, a escolha desta metodologia está baseada na oportunidade que o aluno tem de pensar sobre aquilo que está prestes a descobrir, uma vez que para resolver o problema, conforme o plano de desenvolvimento da atividade que será proposta, o aluno necessita pensar nas diferentes estratégias, baseado em suas experiências, que possam surgir. Compreendendo, assim, o que está sendo desenvolvido, não apenas repetindo inúmeras vezes os procedimentos ditados pelo professor.

Neste trabalho, então, utilizou-se a resolução de problemas como metodologia para o desenvolvimento do conceito intuitivo de limite. O problema proposto envolveu a construção e análise de um fractal, a partir do qual os alunos registraram no glossário o seu entendimento (imagem do conceito) sobre o conceito de limite. Isso foi feito para que depois fosse possível analisar as diferentes imagens que pudessem surgir, conforme será detalhado no Capítulo 3, referente aos aspectos metodológicos da pesquisa.

1.3 Imagem do Conceito e definição do Conceito

Neste subcapítulo apresenta-se a definição de modelos espontâneos. Baseado nos escritos de David Tall, descreve-se modelos espontâneos como a primeira imagem do conceito que um indivíduo cria, antes mesmo de ter conhecimento matemático sobre o que está sendo apresentado. Ele busca, baseado no que já conhece, adaptar o novo a fim de compreender o diferente a partir das experiências que já viveu.

No texto “ConceptImageandConceptDefinition” (TALL, 1988), o autor inicia explicando que na década de 1960 houve uma modificação no cenário da matemática, surgiu a chamada “Nova Matemática”, conhecida também, no Brasil, como Matemática Moderna, que se baseava na ideia de que se um indivíduo fosse capaz de formular definições e deduções matemáticas, então haveria um melhor desempenho com relação à sua aprendizagem.

Baseado nessa ideia, David Tall fala que “a pesquisa empírica enfatizou que os indivíduos criam suas imagens de um conceito de uma maneira que nem sempre é coerente e consistente, e que experiências anteriores podem iluminar os significados dos fenômenos quando são atendidas em novos contextos”(1988). Ou seja, os indivíduos tendem a construir imagens do conceito baseados em suas experiências e estas podem entrar em conflito com a definição formal do conceito, quando esta última lhes é apresentada. Isso pode gerar um conflito cognitivo, o qual definiremos ao longo deste capítulo.

Quando é apresentada uma nova situação problema para um indivíduo ele busca, baseado em seus conhecimentos, uma forma de resolver essa situação, assim surge uma imagem do conceito. Antes mesmo de conhecer a definição matemática formal, o indivíduo busca encaixar a situação naquilo que já conhece ou, pelo menos, na forma como ele acredita que o conceito esteja correto. Essa construção chama-se “modelos espontâneos” (modelos pré-existentes, antes da aprendizagem da noção matemática e que se originam, por exemplo, na experiência diária) (Tall, 1988, p.1).

O termo imagem do conceito está definido como sendo tudo aquilo que aprendemos sobre o conceito e a definição do conceito é, segundo Tall, uma forma de palavras usada para especificar esse conceito (Tall, 1988). Quando um indivíduo possui a imagem do conceito e é exposto à definição formal do conceito ele pode se deparar com uma contradição, pois sua experiência diz uma coisa e a definição apresentada, outra. Daí surge o conflito cognitivo, que faz com que o indivíduo reveja a imagem que criou sobre o conceito, podendo, a partir deste conflito, dar-se a aprendizagem pela definição do conceito. Neste trabalho será trabalhada e apresentada apenas a imagem do conceito criada pelos alunos e não a aceita pela comunidade acadêmica, uma vez que desejamos identificar apenas as imagens do conceito de limite que os alunos têm e aquelas que eles desenvolvem a partir do trabalho com a prática proposta, mas sem discutir sua definição formal de limite.

A imagem do conceito é evidenciada quando o indivíduo é exposto a uma situação que faz com que ele reflita sobre o conceito. Assim, em uma situação de aprendizagem, por exemplo, na escola, o professor/educador deve pensar em como proporcionar aos alunos experiências de modo que a imagem que cada um cria sobre o conceito seja a mais próxima possível da definição correta do conceito.

2 METODOLOGIA

A escolha dos alunos do terceiro ano do ensino médio está vinculada a ideia de que eles estão prestes a realizar as provas de ingresso ao vestibular e este estudo pode ajudá-los nisso. Essa pesquisa se caracteriza qualitativa uma vez que, além de ser necessária a coleta de dados de alunos, visamos analisá-los para identificar como se deu a evolução da definição do conceito de limite que foi trabalhado.

Conforme Biklen&Bogdan (1994) apresentam em seu texto sobre a investigação qualitativa, o investigador qualitativo vai até o local onde ocorre sua investigação porque se preocupa com as informações que surgem no ambiente de pesquisa. Ele identifica que ao observar seu objeto de estudo no local em que ocorre a ação, seu relato estará sendo o mais fiel possível daquilo que realmente deseja observar.

O objetivo deste capítulo é mostrar as cinco características que os autores destacam importantes para identificação de uma investigação qualitativa, a saber: a investigação qualitativa tem como fonte o ambiente natural, é descritiva, preocupa-se com o processo e não simplesmente pelos dados coletados, os investigadores qualitativos tendem a analisar os dados de forma intuitiva e o significado é importante para a conclusão e análise da pesquisa. Os autores são insistentes quando se trata de enfatizar que toda a investigação sofre influência da presença do investigador e do ambiente em que a mesma está ocorrendo.

Baseadas nisso, verificamos que, feita esta investigação qualitativa, este trabalho terá total influência daquilo que julgamos importante e necessário observar para verificar as considerações sobre aquilo que buscamos. Ou seja, inseridas no ambiente de investigação, não conseguimos relatar os possíveis acontecimentos sem despejar sobre eles a influência do nosso olhar acadêmico e matemático.

2.1 A Escola

A prática foi realizada na Escola Estadual de Ensino Médio Baltazar de Oliveira Garcia, localizada na rua Sarmento Silvio DelmarHollenbach, número 69, bairro Jardim Leopoldina, zona norte de Porto Alegre. Para realizar a prática nessa escola houve um acordo com o monitor da disciplina de estágio III e professor da escola, o colega Rafael, o qual disponibilizou sua turma de terceiro ano do ensino médio. A prática foi realizada nos dias 14, 17, 21 e 24 de novembro com a duração de oito períodos. Os alunos tinham entre 15 e 18 anos, eram 15 meninos e 6 meninas.

2.2 Prática

Partindo da ideia de que os alunos não tem o conteúdo de limite no ensino médio e de que, os que tiverem interesse em algum curso que tenha a disciplina de cálculo estarão ingressando no ensino superior tão breve quanto conseguirem, consideramos importante analisar quais são as imagens do conceito de limite desses alunos, a fim de perceber possíveis dificuldades que eles enfrentarão ao cursar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, a qual utiliza o conceito de limite de uma função para a definição de derivada e de integral.

Para a realizar a prática, foram planejados quatro encontros, apresentados da seguinte forma. No primeiro encontrofoi entregue aos alunos uma ficha para que pudessem descrever, com suas palavras, o que compreendem por *limite* e *infinito*, para que a partir disso fosse construído o glossário. Em seguida, foi apresentado aos alunos um fractal (Imagem 1) e identificado locais em que o mesmo pode aparecer na natureza. A definição de fractal[2] dada para os alunos foi "*Um fractal é uma estrutura geométrica complexa cujas propriedades, em geral, repetem-se em qualquer escala*". Por fim, foi feita a construção do triângulo de Sierpinski, o qual foi utilizado para a realização da prática. No segundo encontro foi fornecida aos alunos uma folha para que construíssem o triângulo de Sierpinski e identificassem o que acontece com a área do triângulo maior conforme fossem sendo construídos mais níveis. Os alunos deveriam se reunir em grupos de até três integrantes para construção do triângulo e discutir uma estratégia para resolução do problema. Foi apresentado o seguinte problema: "*Dado o triângulo Sierpinski, o que acontece com a área de cada triângulo novo conforme avançamos cada etapa de construção?*". No terceiro encontro iniciamos a aula terminando a construção do triângulo de Sierpinski e em seguida foi apresentada novamente a situação problema. Foi fornecido um tempo para que os alunos pensassem na resolução do problema e foi apresentada a resolução baseada numa tabela de dados em que foi descoberta a área dos novos triângulos a cada etapa de construção. Nesta aula os alunos apresentaram para os colegas a resolução que encontraram para o problema e, na sequência, retomaram o glossário para reescrever o que cada um entendia por *limite* e *infinito*. Com base nas apresentações foi conduzido um fechamento da atividade com os alunos, buscando-se um consenso com relação ao conceito de limite. No quarto encontro foi feito um fechamento da prática com os alunos.

[2] No livro "Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula" de Ruy Madsen Barbosa encontramos a seguinte definição para fractal: *"um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos"* (FEDER, 1988, apud BARBOSA, 2002, P.18), quando Ruy faz considerações sobre a forma como fractal foi definido pelos principais autores que escreveram sobre o assunto.

Foi construído, no quadro, o gráfico formado pelos dados da tabela construída com as áreas dos triângulos e foi discutido o que ocorre com a função quando colocamos mais pontos no gráfico. Na sequência foram feitas algumas perguntas para os alunos:

1. O que ocorre com a área dos triângulos?
2. É possível descobrir a "regra" que determina a área dos triângulos, sem que seja preciso fazer o desenho? Que "regra" é essa?
3. O que ocorre conforme aumentamos o número de etapas?
4. E no infinito? Se pensarmos em uma etapa muito grande, o que ocorre com a área dos triângulos?
5. Se quisermos descobrir um triângulo com área próxima a um valor determinado, é possível? Por exemplo, se quisermos saber se existe uma etapa em que o triângulo tem sua área próxima do valor 0,00001, o que devemos fazer?
6. Alguns responderam que o limite não existe na matemática e outros responderam que existe. Ele existe ou não?
7. Por fim, podemos verificar o que ocorre com as áreas retiradas?

Foi entregue, novamente, aos alunos uma ficha para que cada um escrevesse o que entendia por *limite*.

Feita a organização de como foram guiados os encontros, descrevemos a seguir a forma como cada um foi conduzido, apresentando os conteúdos trabalhados e os resultados imediatos que foram surgindo por parte dos alunos. Destacamos que, devido a um equívoco, construímos com os alunos, na última aula, um gráfico que apresenta valores errados com relação ao que de fato tínhamos interesse de descobrir, mas que, apesar do equívoco, não houve perda do foco da atividade.

3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Iniciamos o primeiro encontro, conforme consta no cronograma, entregando aos alunos o termo de consentimento e solicitando que me entregassem na próxima aula. Entreguei também uma folha para que eles escrevessem o que entender por limite e infinito.

Falamos sobre o que é um fractal, utilizamos a seguinte definição informal: um fractal é uma estrutura geométrica complexa cujas propriedades, em geral, repetem-se em qualquer escala, ou seja, dado uma representação geométrica, repete-se sua forma tantas vezes quantas se quer a fim de construir um padrão de sucessivas formas e se obter um fractal. Esperamos que os alunos compreendessem como se dá a construção de um fractal para que, a partir do exemplo dado, ficasse mais fácil introduzir o triângulo de Sierpinski, o qual é objeto deste estudo. Mostramos alguns exemplos de fractais que podem ser encontrados na natureza.

Figura 1 – Fractal utilizado como exemplo

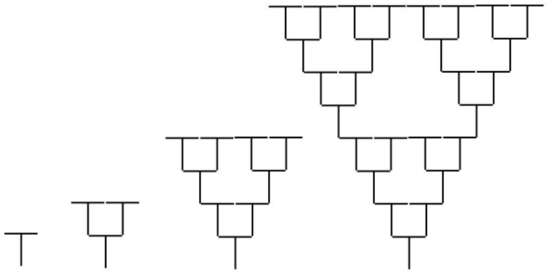
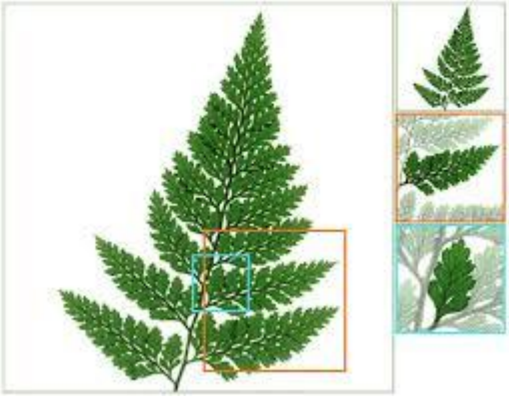
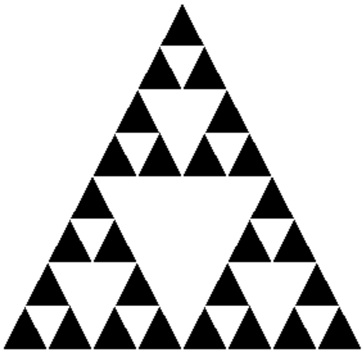


Figura 2 – Exemplo de fractal encontrado na natureza



Foi desenhado, no quadro, o triângulo de Sierpinski e solicitado que o fizessem também em seus cadernos.

Figura 3 – Triângulo de Sierpinski.



Ao fim da atividade foi solicitado que os alunos escrevessem novamente o que entendem por *limite* e *infinito*, depois do que foi apresentado com relação ao fractal. Respostas que apareceram para a pergunta: "*O que você entende por limite e infinito?"*

Tabela 1 – Primeiros resultados – Limite

Limite		
Categorias	**Número de respostas**	**Respostas dos Alunos**
Identifica o limite como sendo o limite de algo.	**7**	É quando números vão até certo ponto. Algo que possui fim, que é delimitado. É tudo que delimita algo. Quando não se pode acrescentar nada, quando se conclui alguma coisa. Exemplo: Noções de espaço (sua casa, seu estado, seu país); coisas que tem uma delimitação. Limite é quando um número tem seu próprio limite. Limite é um ponto quando não pode andar mais. Barreira que impede de alcançar o infinito, algo que tem fim. Algo tem fim, como um terreno.

Usa a matemática para argumentar que o limite tem fim ou não existe	**2**	Limite é quando algo tem fim na matemática. Na matemática nunca tem limite.
Identifica o limite como o fim de algo.	**11**	Quando algo chega ao fim. O fim de algo. Quando algo chega ao fim. Algo que tem fim, algo finito. Algo que uma hora acaba. É uma coisa que tem fim, que chega em momento onde acaba. É uma coisa que tem fim. Limite tem fim. Limite é algo que tem fim. É uma coisa que tem fim. Algo que tem fim em alguma hora.
Usa a matemática para justificar o limite	**1**	Na matemática quase sempre é possível aumentar o limite de algumas coisas.
Limite como algo que aumenta	**1**	Limite pode sempre ficar maior.

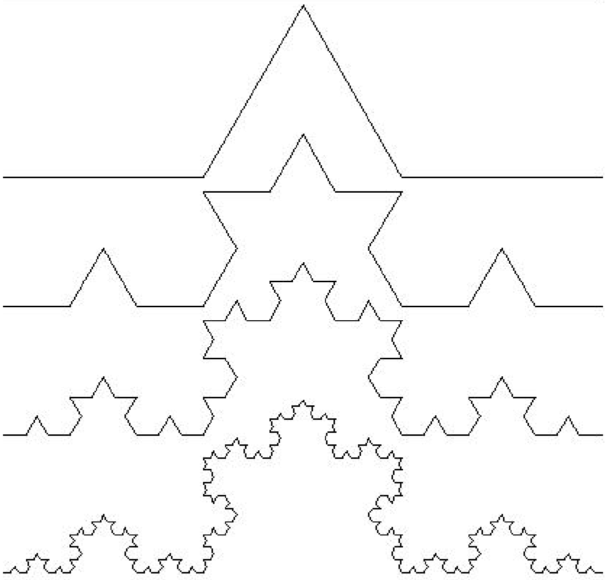
Tabela 2 – Primeiros resultados –Infinito

Infinito		
Categorias	**Número de respostas**	**Respostas dos Alunos**
Infinito como algo que não tem fim.	**11**	Infinito é quando não tem fim. Algo que não possui fim, que segue para sempre. Quando algo não tem fim. Algo sem início ou fim, um ciclo

		eterno. Algo que não tem fim. É uma coisa que nunca acaba, que não tem fim. Quando não tem fim. Infinito é quando pode fazer o que quiser sem ter seu fim quantas vezes quiser. Infinito não tem fim. Infinito é algo que não tem fim. Sempre continua, sem fim. Não tem fim. Não tem fim, mas no espaço físico tem.
Como algo que não se pode medir	**3**	Coisas que não se podem calcular um final definitivo. Exemplos: números, tempo, universo (na ideia). É um ponto que não tem fim. É onde não tem um ponto final.
Como algo que continua	**3**	Que os números são infinitos. Algo constante, tempo. Algo que não tem fim (limite), contínuo.

Como sobrou tempo com relação ao que havia sido planejado, foi passado mais um exemplo de fractal (Fig.4) aos alunos para reforçar a ideia de que a construção repete os mesmos padrões a cada nova etapa.

Figura 4 – Fractal utilizado como exemplo



Alguns dos alunos acharam bem difícil e nem tentaram por entender que seria trabalhoso, já outros fizeram sem grandes dificuldades e, outros tentaram, mas não conseguiram. Foi feita até a quarta etapa no quadro e solicitado que os alunos fizessem a próxima etapa. Depois de um tempo em que os alunos tentaram fazer o solicitado, foi passado a resolução no quadro, onde foi copiada a quarta etapa em tamanho maior e apenas “acrescentado” a abertura no meio de cada segmento.

No segundo encontro solicitamos que os alunos se dividissem em duplas e entregamos para cada dupla uma folha para que desenhassem e recortassem um triângulo equilátero para que depois pudessem desenhar o triângulo de Sierpinski. Verificamos que nem todos os alunos escolheram suas duplas por afinidade, porém percebemos que todos se dão bem.

Duas alunas que estavam na primeira aula não estavam nessa e dois alunos que não estavam na primeira aula estavam nessa. Entregamos para eles também a autorização para uso de seus dados na pesquisa.

Nessa aula havia apenas duas meninas e doze meninos. Todos participaram da construção, mas alguns deixaram que apenas um colega da dupla fizesse tudo. Dentre as duplas uma se destacou. Um dos alunos da dupla fez a construção do triângulo equilátero pensando em sua altura, traçando sucessivos pontos médios até a altura correta que resultaria no triângulo equilátero. Já as demais duplas fizeram a construção utilizando a dica que dei: usando a medida de um dos segmentos do triângulo como sendo o raio de um círculo.

A dupla que construiu o triângulo pela altura conseguiu fazê-lo rápido, recortando e desenhando o triângulo de Sierpinski com facilidade até a quarta etapa durante o resto da aula que restou. As demais duplas demoraram mais de um período para conseguir desenhar o triângulo corretamente, mas todos desenharam, no mínimo, até a terceira etapa do triângulo de Sierpinski até o fim da aula e todos dedicaram-se para desenvolver a atividade proposta. As figuras 5, 6, 7 e 8 ilustram o envolvimento dos alunos na construção do triângulo de Sierpinski.

Figura 5– Alunos na construção do triângulo

Figura 6 – Alunos na construção do triângulo

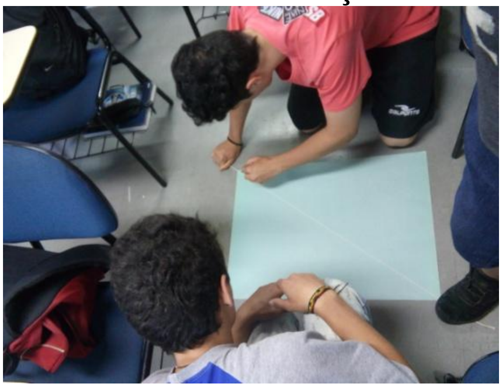


Figura 7 – Alunos na construção do triângulo

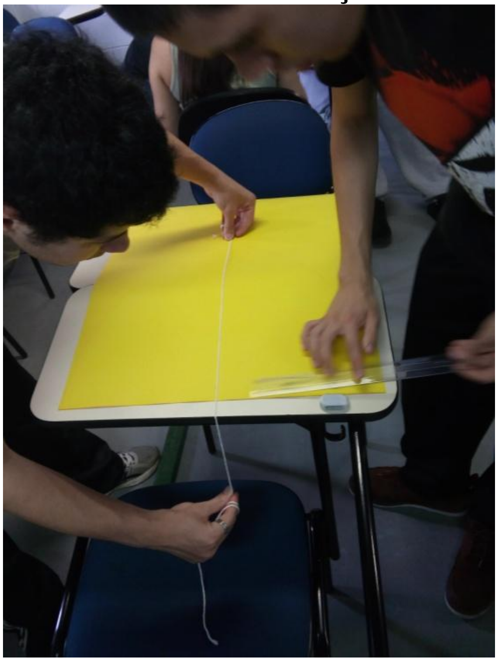
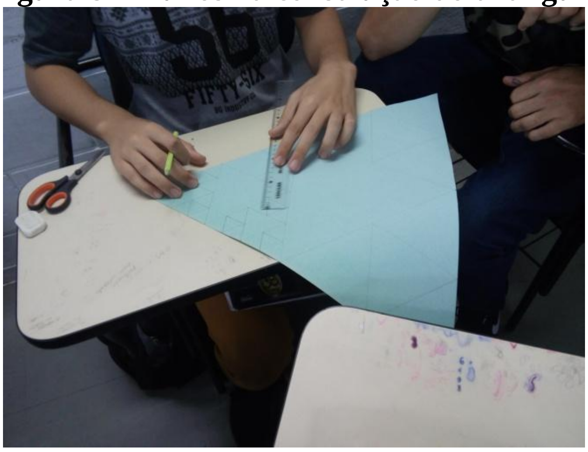


Figura 8– Alunos na construção do triângulo



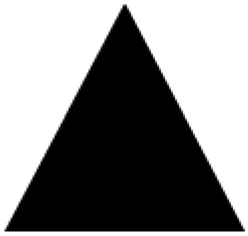
Iniciamos o terceiro encontro solicitando aos alunos que entregassem as autorizações de uso dos dados que produzimos nos encontros. Alguns alunos que não estavam na última aula então juntaram-se com os que estavam para ajudar a terminar a construção dos triângulos. Solicitamos que cada grupo fizesse uma primeira construção até a etapa três e depois escolhessem um dos cantos para continuar a construir as sucessivas etapas até que não conseguissem mais.

Alguns alunos não estavam desenvolvendo a atividade com seriedade. Um grupo ficou quase os dois períodos enrolando e fizeram apenas até a etapa 3. Dos integrantes desse grupo, apenas um desenvolveu o trabalho, enquanto que os demais ficaram o tempo todo conversando e rindo. Já os outros grupos dividiram as tarefas, a cada etapa um aluno fazia uma parte enquanto o outro ajudava a cuidar se a régua estava alinhada e as marcações corretas para traçar os novos triângulos.

Ao longo de toda a atividade a professora ficou ajudando os grupos, dando dicas de construção e verificando se estavam coerentes. Quase no fim do segundo período chamamos a atenção dos alunos para o quadro, onde construímos com eles um novo triângulo de Sierpinski em que a cada etapa verificamos a área dos novos triângulos.

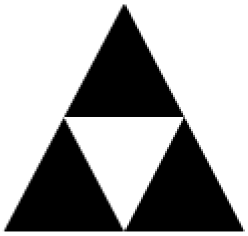
Na primeira etapa (Fig.9) dissemos aos alunos que a área do triângulo vale 1.

Figura 9– Triângulo de Sierpinski – etapa 1



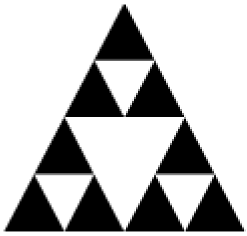
Na segunda etapa (Fig. 10) solicitamos aos alunos que dissessem qual seria a área dos novos triângulos, pois dividimos o triângulo em quatro novos triângulos, todos equiláteros e eles responderam que seria $\frac{1}{4}$.

Figura 10– Triângulo de Sierpinski – etapa 2



Na terceira etapa (Fig. 11) solicitamos que fizessem a mesma divisão, ou seja, cada triângulo deveria ser novamente dividido em quatro novos triângulos e eles identificaram que a área dos novos triângulos deveria ser $\frac{1}{4} * \frac{1}{4}$, pois cada triângulo de área $\frac{1}{4}$ foi novamente dividido em quatro.

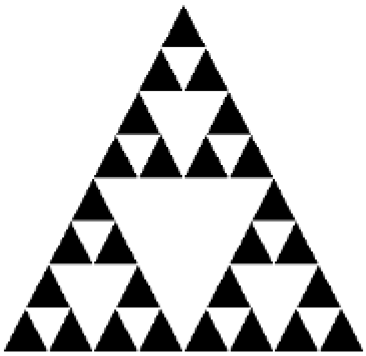
Figura 11 – Triângulo de Sierpinski – etapa 3



Então, lhes perguntamos o que de comum estava acontecendo, pensando em como poderíamos saber a área dos novos triângulos da quarta etapa sem ter que desenhá-los. Inicialmente houve dúvidas, alguns disseram que deveríamos multiplicar por quatro e outros disseram que deveríamos dividir novamente por quatro, então fizemos o desenho no quadro e contamos cada um dos triângulos. Os alunos viram que, de fato, deveríamos dividir cada triângulo em quatro novos triângulos.

Dessa forma, foi obtido o seguinte desenho (Fig. 12) e verificado que a área dos novos triângulos é $\frac{1}{4} * \frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

Figura 12 – Triângulo de Sierpinski – etapa 4



Depois de feita essa quarta etapa, solicitamos aos alunos que identificassem qual a área dos novos triângulos na etapa sete. Então eles disseram que teríamos que multiplicar a área dos triângulos da quarta etapa por mais “três vezes” de $\frac{1}{4}$, ou seja, mais $\frac{1}{4} * \frac{1}{4} * \frac{1}{4}$, logo seria obtida a área dos novos triângulos como sendo $\frac{1}{4} * \frac{1}{4} * \frac{1}{4} * \frac{1}{4} * \frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \frac{1}{4.096}$.

Por fim, entregamos novamente aos alunos uma folha onde cada um deveria responder a seguinte pergunta: *“O que você entende por: Limite e Infinito?”* Na Tabela 3 abaixo seguem as respostas dos alunos, as quais se modificaram um pouco depois de feita essa primeira etapa da prática.

Tabela 3 – Segundos resultados –Limite

Limite		
Categorias	**Número de respostas**	**Respostas dos Alunos**
Identifica o limite como sendo o limite de algo.	**7**	O limite vai até onde preciso, ele limita uma área. Limite é até onde a coisa pode ir. É uma forma de como uma folha cada vez faz um triângulo vai diminuindo até não conseguirmos mais. Limite é a tentativa de chegar no zero fragmentando ainda mais a área dos triângulos. Limite é até onde pode ir. Limite é quando se tenta chegar no fim mas nunca é possível. O limite só tem fim quando eu decidir.
Usa a matemática para argumentar que o limite não existe ou não tem fim	**5**	Matematicamente, não existe limite. Matematicamente falando, não existe limite. O limite não existe na matemática. Limite é o que pode chegar ao fim no espaço físico, mas matematicamente não tem fim. Ele não tem fim (na matemática),

		você pode se aproximar ou se distanciar o quanto quiser dele.
Identifica o limite como o fim de algo.	**5**	É o fim de algo. É um ponto sem fim. É um ponto que determina o fim de alguma coisa. Limite é o fim de alguma coisa. Algo que em uma hora terá fim.
Justifica o limite de forma parecida com a definição formal	**2**	Quando você vai tentando se aproximar ainda mais do fim, mas não chega. Ele não tem fim (na matemática), você pode se aproximar ou se distanciar o quanto quiser dele.
Limite como algo que não continua	**1**	Limite é alguma coisa que não pode continuar.
Algo crescente e/ou contínuo	**2**	Valor crescente rumo ao infinito. São pontos determinados até o infinito na matemática.

Tabela 4 – segundos resultados - infinito

Infinito		
Categorias	**Número de respostas**	**Respostas dos Alunos**
O infinito como algo inalcançável	**1**	Infinito é o inalcançável.
O infinito como algo que não tem fim	**11**	Já o infinito não tem fim. Já diz o nome não tem fim. Infinito é quando não tem fim.

		Algo que não tem fim. O infinito é algo que não tem fim. Não tem fim. Uma noção de algo que não tenha fim. O infinito não tem fim. Infinito é alguma coisa que não tem fim. Sem fim. Algo que não tem fim.
Algo que não tem ponto final	**3**	Não tem ponto nem fim. O infinito é aquela coisa que não tem esse ponto final. Não tem ponto nem fim.
Usa a matemática para justificar que não tem ou tem fim	**4**	Não há um fim matematicamente. Infinito não te fim, porém na matemática o infinito pode ter fim. É uma ideia do que pode ser o limite. Infinito é o que não tem limite. O ponto inalcançável na matemática, pois é contínuo e nunca acaba, de acordo com os limites que impusermos.
Usa o infinito como algo infinito	**1**	A capacidade de algo de ser fragmentado infinitamente.

Na mesma folha os alunos responderam a situação problema com relação ao triângulo de Sierpinski: *"Dado o triângulo de Sierpinski, o que acontece com a área dos novos triângulos conforme avançamos cada etapa de construção?"*

Dentre as respostas dos alunos, as que mais chamaram a atenção devido suas aproximações a ideia do conceito de limite, foram:

A área dos triângulos vai se aproximando de zero, porém, nunca chega em zero.

Vai se aproximando cada vez mais do limite, ou seja, do fim.

As demais respostas se repetiam e estavam muito vagas com relação ao solicitado na pergunta. Por exemplo:

O que acontece é diminuição.

Diminui.

Iniciamos o quarto e último encontro relembrando com os alunos o que construímos nos últimos encontros. Foi feita a construção do triângulo de Sierpinski e para o fechamento da atividade construímos, nesse quarto encontro, uma tabela contendo a área dos triângulos a cada etapa da construção do triângulo de Sierpinski, a função que define essa área, o gráfico que mostra como a área dos triângulos diminui e a cada passo os alunos foram respondendo, oralmente, algumas perguntas que foram feitas para esclarecer o que estávamos fazendo, visto que os alunos tiveram uma certa dificuldade de construir a função que define a área dos triângulos, pois não estavam conseguindo visualizar o que acontecia, por isso seguimos várias etapas.

Tabela 5 – área dos triângulos a cada etapa de construção

ETAPA	ÁREA DOS TRIÂNGULOS
1ª	1
2ª	$\frac{1}{4}$
3ª	$\frac{1}{16}$
4ª	$\frac{1}{64}$
5ª	$\frac{1}{256}$
6ª	$\frac{1}{1.024}$

7ª	$\frac{1}{4.096}$
8ª	$\frac{1}{16.384}$
9ª	$\frac{1}{65.536}$
10ª	$\frac{1}{262.144}$
15ª	$\frac{1}{268.435.456}$
20ª	$\frac{1}{274.877.906.944}$

A cada etapa, os alunos foram calculando a área dos triângulos e fui completando a tabela aos poucos. Então fizemos as seguintes perguntas:

1. O que ocorre com a área dos triângulos?
2. É possível descobrir a "regra" que determina a área dos triângulos, sem que seja preciso fazer o desenho? Que "regra" é essa?

Os alunos responderam que a área dos triângulos diminui a cada etapa e que seria possível criar a regra, mas não sabiam como. Então lhes dissemos que deveriam observar o que estava mudando em cada uma das etapas. Por exemplo:

Na etapa 1, temos $\acute{a}rea\ do\ tri\hat{a}ngulo = 1$

Na etapa 2, temos $\acute{a}rea\ do\ tri\hat{a}ngulo = \frac{1}{4}$

Na etapa 3, temos $\acute{a}rea\ do\ tri\hat{a}ngulo = \frac{1}{16}$

Na etapa 4, temos $\acute{a}rea\ do\ tri\hat{a}ngulo = \frac{1}{64}$ e assim por diante.

Explicamos a eles que podemos escrever os números de uma maneira diferente, neste caso, na forma de potências. Escolhemos escrever assim porque é interessante que eles vejam os números dessa maneira para que possamos identificar a "regra" para encontrar a área dos novos triângulos.

Assim teremos:

Na etapa 1, temos $área\ do\ triângulo = 1 = \frac{1}{4^0}$, ao mostrar essa primeira etapa alguns alunos não entenderam porque $\frac{1}{4^0} = 1$, então fizemos uma pequena demonstração:

$4^0 = 4^{1-1} = 4^1 * 4^{-1} = \frac{4^1}{4^1} = \frac{4}{4} = 1$, logo temos que: $\frac{1}{4^0} = \frac{1}{1} = 1$.

A escolha de fazer essa pequena demonstração parte da ideia de que os alunos apresentaram dificuldade com a compreensão de alguns conteúdos matemáticos básicos, como exponenciação e operação com frações. Como não é o objetivo da nossa pesquisa, decidimos mostrar a demonstração para os alunos e não nos deter a uma explicação mais rigorosa. Porém, reconhecemos que poderíamos ter utilizado da própria prática da construção do triângulo de Sierpinski para justificar porque, na primeira etapa, a área é igual a 1.

Na etapa 2, temos $área\ do\ triângulo\ = \frac{1}{4^1}$

Na etapa 3, temos $área\ do\ triângulo\ = \frac{1}{4^2}$

Na etapa 4, temos $área\ do\ triângulo\ = \frac{1}{4^3}$

Os alunos verificaram que o expoente do 4 é um número a menos do que a etapa que está sendo verificada. Portanto escrevemos a "regra" para achar a área dos triângulos como sendo $f(x) = \frac{1}{4^{x-1}}$, onde x é o número da etapa em que queremos encontrar a área dos triângulos. Concluímos com os alunos que essa "regra" é uma função.

Depois, fizemos as seguintes perguntas para os alunos:

3. O que ocorre conforme aumentamos o número de etapas?
4. E no infinito? Se pensarmos em uma etapa muito grande, o que ocorre com a área dos triângulos?

Então os alunos responderam que a cada etapa a área dos triângulos fica cada vez menor e que numa etapa muito grande, no infinito, a área dos triângulos é quase zero. Perguntamos a eles: *"mas ela chega a zero ou não?"* e eles ficaram na dúvida, pois alguns defenderam que chega e outros que não chega. Segundo alguns, ela só vai ser menor, mas nunca vai ser zero, porém, se for olhar a construção feita no papel, depois de uma determinada etapa não é mais possível construir triângulos, logo a área vai ser zero. Então lhes explicamos que no papel não é mais possível fazer a construção de novos triângulos depois de uma certa etapa porque a folha é finita, ou seja, ela tem fim e, em virtude dessa limitação, não conseguimos construir infinitos triângulos nela.

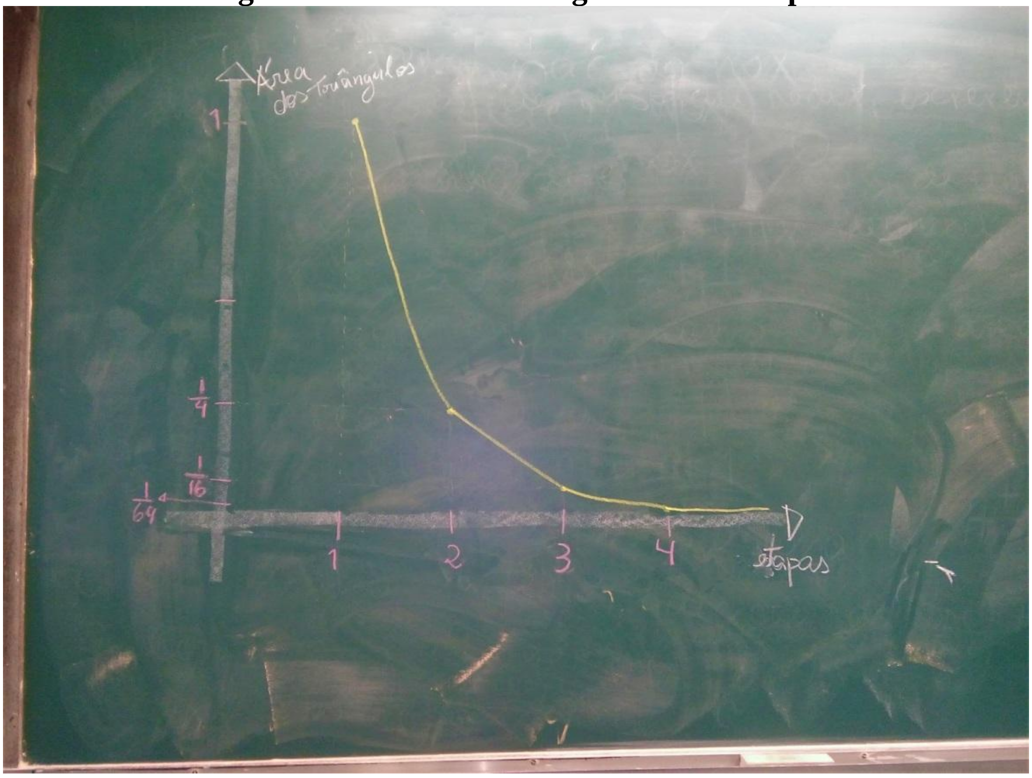
Apesar da dúvida, olhamos para a tabela construída e solicitamos aos alunos que obtivessem o resultado da etapa 20 para que pudéssemos analisar o que ocorre com a área dos triângulos. Chegamos na seguinte constatação:

$$\frac{1}{274.877.906.944} \simeq 0{,}00000000000363797880709171$$

Concluímos que é um número muito pequeno, muito próximo de zero, porém, não é zero. Logo os alunos responderam que a cada etapa a área dos novos triângulos vai ser cada vez mais próxima de zero, mas que nunca vai ser zero.

Depois de construída a tabela construí com os alunos o gráfico que representa a função encontrada.

Figura 13 – Área dos triângulos a cada etapa



Na sequência, perguntamos:

5. Se quisermos descobrir um triângulo com área próxima a um valor determinado, é possível? Por exemplo, se quisermos saber se existe uma etapa em que os triângulos têm sua área próxima do valor 0,00001, o que devemos fazer?

No início os alunos não sabiam, então explicamos melhor a questão. *"O que precisamos saber para encontrar a etapa em que a área dos triângulos seja próxima de 0,00001? Ou seja, sabendo que a área tem que ser 0,00001, qual é a etapa em que isso ocorre?"*

Pegando a "regra" que encontramos para descobrir a área dos triângulos montamos o seguinte sistema:

$f(x) = \frac{1}{4^{x-1}}$ e $f(x) = 0{,}00001$, portanto, $0{,}00001 = \frac{1}{4^{x-1}}$

Logo,

$$0{,}00001 = 4^{-(x-1)}$$

$$0{,}00001 = 4^{-x+1}$$

$$log(0{,}00001) = log(4^{-x+1})$$

$$log(0{,}00001) = (-x+1)log(4)$$

Solicitamos que eles utilizassem a calculadora de seus celulares para que pudéssemos encontrar os valores dos logaritmos e eles encontraram:

$$log(0{,}00001) = -5$$

$$log(4) = 0{,}602$$

$$-5 = (-x+1) * 0{,}602$$

$$-5 = -0{,}602x + 0{,}602$$

$$-5 - 0{,}602 = -0{,}602x$$

$$-5{,}602 = -0{,}602x$$

$$\frac{-5{,}602}{-0{,}602} = x$$

$$x \simeq 9{,}305$$

Concluímos que os triângulos terão sua área próxima de 0,00001 na etapa 9.

6. Alguns alunos haviam respondido que o limite não existe na matemática e outros responderam que existe. Perguntei: Ele existe ou não?

Mesmo depois do que foi feito alguns alunos ainda responderam que não existe, enquanto outro responderam que existe, então pedimos que cada um defendesse sua resposta. Um dos alunos respondeu: *"existe e que é algo que podemos chegar próximo, mas que nunca vamos alcançar"*. Então ele usou o exemplo do quadro (o gráfico que representa as áreas dos triângulos a cada etapa estava desenhado) para justificar sua resposta. Os alunos que responderam que o limite não existe acabaram entendendo a explicação do colega e concordando. Então lhes dissemos que o limite existe sim, e que podemos identificá-lo no gráfico desenhado no quadro e também pensar que o limite é um valor ao qual podemos nos aproximar ou afastar cada vez mais conforme formos aumentando o número de etapas da nossa construção.

7. Por fim, podemos verificar o que ocorre com as áreas retiradas?

Construímos outra tabela em que pensamos na soma das áreas que estavam sendo retiradas do triângulo a cada etapa de construção. Nesta parte houve um equívoco por parte da professora, pois havíamos considerado que a cada etapa seriam divididos todos os novos triângulos construídos em quatro partes, sem deixar de contar a parte retirada da etapa anterior, logo a tabela construída com os alunos foi a tabela 6, a qual apresenta uma soma que chega próxima a 1 mais rápido do que de fato deveria ser. A progressão ocorre da mesma forma, porém equivocadamente, pois é desprezado o fato de que alguns triângulos já estão sendo retirados e não é possível contá-los novamente para verificar o total da área que é retirada do triângulos original, além de desprezarmos o fato de que a cada etapa a área dos triângulos retirados é dada sobre a área do triângulo na etapa anterior.

Tabela 6 – Soma da área dos triângulos retirados - equivocada

ETAPA	**SOMA DA ÁREA DOS TRIÂNGULOS RETIRADOS**
1ª	0
2ª	$\frac{1}{4} = 0{,}25$
3ª	$\frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3+4}{16} = \frac{7}{16} = 0{,}4375$
4ª	$\frac{9}{64} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{9+12+16}{64} = \frac{33}{64} = 0{,}515625$
5ª	$\frac{27}{256} + \frac{9}{64} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{27+36+48+64}{256} = \frac{175}{256} = 0{,}68359375$

A tabela correta e que deveria ter sido construída com os alunos é a seguinte:

Tabela 7 – Soma da área dos triângulos retirados – correta

ETAPA	SOMA DA ÁREA DOS TRIÂNGULOS RETIRADOS
1ª	0
2ª	$\frac{1}{4} = 0{,}25$
3ª	$\frac{3}{12} * \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0{,}31125$
4ª	$\frac{9}{36} * \frac{3}{12} * \frac{1}{4} + \frac{3}{12} * \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0{,}328125$
5ª	$\frac{27}{108} * \frac{9}{36} * \frac{3}{12} * \frac{1}{4} + \frac{9}{36} * \frac{3}{12} * \frac{1}{4} + \frac{3}{12} * \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0{,}033203125$

De qualquer forma, verificamos que a cada etapa as áreas retiradas vão sendo somadas e quanto maior for o número de etapas ficamos mais próximo de 1, que é a área original do triângulo na primeira etapa de construção. Usando isso também podemos mostrar aos alunos que, nesse caso, na soma das áreas retiradas, temos a mesma ideia de limite do que na construção do triângulo de Sierpinski, só que aqui sabemos que nosso limite será 1.

Por fim, entreguei aos alunos uma folha para que respondessem novamente o que compreendem por limite, visto que desejamos construir um glossário com todas as respostas. As respostas que apareceram foram as seguintes:

Tabela 8 – Respostas finais

Limite		
Categorias	**Número de respostas**	**Respostas dos Alunos**
Identifica o limite como sendo o limite de algo	**8**	É quando se aproximarmos de um número se limitando a uma certa quantidade. Quando chega a 0. Limite é até onde algo pode ir. É algo que tem o fim determinado

		a certo lugar. É tudo aquilo que tem um limite. É quando parte de algo até outro ponto. É tudo aquilo que tem uma certa limitação. É o ponto de uma determinada coisa em que se tem uma pausa, porém tem continuação.
Identifica o limite como o fim de algo	**4**	É o fim de algo. É até onde eu posso chegar, mas sempre terá uma infinidade de coisas antes do limite. É quando algo acaba. É um ponto no qual uma determinada coisa chega ao fim.
Justifica o limite de forma parecida com a definição formal	**1**	Um ponto que se pode alcançar ou chegar cada vez mais mais próximo.
Limite como algo que não continua	**4**	É um ponto sem continuação. Quando você chega em um ponto onde não tem como continuar. A chegada a um certo ponto que não pode ter continuidade. Um ponto onde não se pode ter continuação.
Usa a matemática para justificar o limite	**1**	Na matemática o limite é você quem determina.

3.1 Análise dos Dados

Na tabela a seguir organizamos as categorias que foram formuladas a partir das respostas obtidas ao questionário aplicado no primeiro, terceiro e último encontros. Essas categorias surgiram baseadas na estrutura que Keene, Hall e Duca (2014) apresentam em seu trabalho, o qual está descrito nos trabalhos correlatos. Elas têm por objetivo agrupar as respostas dos alunos para que possamos analisar o que cada um escreveu e como essas respostas estão apresentadas, se sofreram influência ou não da atividade que foi desenvolvida e o que apareceu em cada uma delas, se foram gerais, de senso comum, ou se foram ligadas ao que estava sendo trabalhado em cada atividade. As categorias foram criadas para cada uma das vezes em que o questionário foi aplicado, ou seja, apesar de algumas categorias terem aparecido nas três vezes em que o questionário foi aplicado, não nos baseamos nas categorias feitas com relação às respostas dos alunos na primeira vez em que o questionário foi aplicado para fazer as categorias do segunda e terceira vezes. O foco dessa organização são as respostas com referência ao conceito de limite. O questionário utilizado foi:

O que você entende por:

Limite:
Infinito:

Tabela 9 – Categorias identificadas

Nº de respostas / Categorias	**Tabela 1**	**Tabela 3**	**Tabela 8**
Identifica o limite como sendo o limite de algo	**7**	**7**	**8**
Usa a matemática para argumentar que o limite não existe ou não tem fim	**2**	**5**	

Identifica o limite como o fim de algo	**11**	**5**	**4**
Justifica o limite de forma parecida com a definição formal		**2**	**1**
Limite como algo que não continua		**1**	**4**
Algo crescente e/ou contínuo		**2**	
Usa a matemática para justificar o limite	**1**		**1**
Limite como algo que aumenta	**1**		

Na primeira vez em que o questionário foi aplicado foram identificadas cinco categorias, num total de vinte e duas respostas. Na segunda vez em que o questionário foi aplicado foram identificadas seis categorias, num total de vinte e duas respostas e na última vez em que o questionário foi aplicado foram identificadas cinco categorias, num total de dezoito respostas. É importante relembrar que algumas das respostas dos alunos se enquadraram em mais de uma categoria e que nos encontros promovidos houve alunos diferentes que participaram, levando em conta aqueles que faltaram aula e acabaram não participando de todos os encontros.

Observando a Tabela 9 é possível verificar que duas categoriasapareceram apenas em uma das vezes que o questionário foi aplicado, porém, elas têm algo em comum que devemos analisar. Quando feitas as categorias que englobam as respostas dos alunos, verificamos que algumas das respostas podem ter sido resultado da atividade que estava sendo desenvolvida, isto é, as respostas dos alunos parecem ter sido influenciadas pelo que foi apresentado a eles. Por exemplo, a categoria "Limite como algo que aumenta" apareceu na primeira vez em que o questionário foi aplicado, no encontro em que foi apresentado o fractal para os alunos. Naquela ocasião, foi feita a construção de dois fractais e mostrado aos alunos que a cada etapa de construção o número de elementos do fractal aumenta o que pode ter influenciado a resposta do aluno. A categoria "Algo crescente e/ou contínuo" apareceu na segunda vez em que o questionário foi aplicado, no terceiro encontro, no qual organizamos em uma tabela osvaloresda área dos triângulos que estavam sendo desenhados a cada etapa no triângulo de Sierpinski. Apesar da área dos triângulos a cada etapa diminuir, o número de etapas cresce e, ao desenhar o gráfico que representa a função que dá a área dos triângulos a cada nova etapa, foi dito que o processo de construção dos mesmos continua, pois podemos desenhar tantas etapas quanto quisermos o que pode ter influenciado na resposta do aluno.

As categorias "Identifica o limite como sendo o limite de algo" e "Identifica o limite como sendo o fim de algo" foram as categorias que obtiveram o maior número de respostas nas três vezes em que o questionário foi aplicado, porém na segunda e na última vezes em que o questionário foi aplicado percebemos que três respostas dos alunos se aproximaram da definição do conceito de limite, o que nos mostra que a prática realizada pode ter tido algum resultado sobre a construção das imagens do conceito de limite.

Observando as respostas desses três alunos, podemos verificar que, dos três, um aluno não participou de todos os encontros e respondeu o questionário apenas duas vezes. Nas vezes em que ele respondeu o questionário definiu limite como sendo:

Tabela 10 – Respostas do primeiro aluno

Vez em que o questionário foi aplicado	Categoria da resposta	Resposta
1ª	Identifica o limite como sendo o limite de algo	É tudo que delimita algo. Quando não se pode acrescentar nada, quando se conclui alguma coisa. Exemplo: Noções de espaço (sua casa, seu estado, seu país); coisas que tem uma delimitação.
2ª	Identifica o limite como o fim de algo; Justifica o limite de forma parecida com a definição formal	Ele não tem fim (na matemática), você pode se aproximar ou se distanciar o quanto quiser dele.

Durante o desenvolvimento da prática, em um dos momentos de orientação da atividade, foi informado aos alunos que existe uma diferença entre o mundo físico e o mundo matemático, pois no mundo físico, o qual definimos como sendo o mundo em que vivemos, se pensarmos em nos aproximar de uma determinada parede da qual estamos distantes um metro, sempre caminhando metade daquilo que caminhamos anteriormente, em algum momento vamos chegar ao nosso objetivo, uma vez que não conseguimos caminhar em medidas muito pequenas, tal como 3,125centímetros, ou seja, em algum momento nosso pé tocaria a parede. Daí a segunda resposta do aluno, onde ele observa que na matemática o limite não tem fim. Porém, ao mesmo tempo, ele compreendeu que podemos nos aproximar ou nos distanciar do limite tanto quanto quisermos. Nosso entendimento é que esta compreensão pode estar embasada, em especial, no desenvolvimento da seguinte questão:

Se quisermos descobrir um triângulo com área próxima a um valor determinado, é possível? Por exemplo, se quisermos saber se existe uma etapa em que os triângulos têm sua área próxima do valor 0,00001, o que devemos fazer?

A segunda aluna, que teve sua resposta próxima da definição do conceito do limite, apresentou as seguintes respostas nas três vezes em que o questionário foi aplicado.

Tabela 11 – Respostas do segundo aluno

Vez em que o questionário foi aplicado	**Categoria da resposta**	**Resposta**
1ª	Identifica o limite como o fim de algo.	Algo que tenha fim, algo finito.
2ª	Justifica o limite de forma parecida com a definição formal	Quando você vai tentando se aproximar ainda mais do fim, mas não chega.
3ª	Limite como algo que não continua	Quando você chega em um ponto onde não tem como continuar.

Na resposta obtida na segunda vez em que o questionário foi aplicado, podemos observar que estávamos terminando a construção do triângulo de Sierpinski e havia sido comentado com os alunos que, devido a limitação do papel, não era possível continuar a construir novas etapas com novos triângulos, porém, se imaginássemos que o papel nunca se acabasse, poderíamos continuar construindo cada vez mais triângulos tanto quanto quiséssemos, o que sugere a ideia de que nos aproximamos cada vez mais do fim, mas nunca chegamos nele de fato. Por fim ela respondeu que o limite é quando tem um ponto onde não tem continuação, pois foi feita a verificação da soma das áreas retiradas e visto que se conseguíssemos somar todas as áreas dos triângulos retirados chegaríamos ao total de um, que é a área original do triângulo que foi construído, antes de serem feitas sucessivas divisões que resultaram na construção do triângulo de Sierpinski.

O terceiro aluno que teve sua resposta próxima à definição do conceito de limite, respondeu em cada uma das vezes em que o questionário foi aplicado, o seguinte:

Tabela 12 – Respostas do terceiro aluno

Vez em que o questionário foi aplicado	Categoria da resposta	Resposta
1ª	Identifica o limite como o fim de algo.	O fim de algo. Um fim imposto a algo infinito.
2ª	Identifica o limite como sendo o limite de algo	Limite é a tentativa de chegar no zero fragmentando ainda mais a área dos triângulos.
3ª	Justifica o limite de forma parecida com a definição formal	Um ponto que se pode alcançar ou chegar cada vez mais mais próximo

A segunda resposta do aluno sobre o que ele entende por limite nos mostra que ele estava respondendo com base na construção do triângulo de Sierpinski, uma vez que fala das áreas dos triângulos, que para ele representam pequenos fragmentos até que fosse possível chegar a zero. Na terceira resposta ele define como sendo o ponto determinado, no qual podemos nos aproximar cada vez mais até alcançar esse ponto, o que se baseia no fato de termos visto a soma das áreas retiradas dos triângulos, pois chegamos a conclusão que quanto mais vezes somássemos as áreas retiradas chegaríamos ao total de um, que é a área do triângulo original.

Olhando novamente para as tabelas 1, 3 e 8, podemos perceber que houve uma mudança na definição das imagens do conceito de alguns alunos. Na tabela 1 é possível observar que a maioria dos alunos, muitos levados pela opinião dos outros, definiram o limite como sendo o fim de algo, como algo que simplesmente acaba. Esse pensamento, acreditamos, segue a mesma ideia dos alunos que definiram o limite como sendo o limite de algo, pensando na ideia de Tall (1981) sobre os modelos espontâneos em que os alunos tendem a definir a imagem do conceito a partir de suas experiências.

Podemos observar também as semelhanças e diferenças das categorias criadas por nós e as criadas por Keene, Hall e Duca (2014). Na ocasião, os autores referenciados criaram mais categorias do que nós e as fizeram baseados em mais detalhes observados nas respostas dos participantes do curso promovido. Dentre as categorias criadas pelos autores, podemos identificar uma parecida com uma de nossas categorias. A categoria denominada por "Discute o limite como um limite de alguma forma" no texto de Keene, Hall e Duca (2014) pode ser comparada com a nossa "Identifica o limite como sendo o limite de algo". Em ambas categorias são observadas as respostas dos alunos/participantes como limitações de situações que aparecem em nosso dia a dia, como mostram os exemplos a seguir.

Tabela 13 – Comparando as categorias

Dados retirados da tabela criada por Keene, Hall e Duca (2014)		
Categoria	Número de vezes em que aparece	Exemplo
Discute o limite como um limite de alguma forma	27	Temos que nos limitar a 8h de sono à noite
Dados retirados da nossa prática com os alunos		
Identifica o limite como sendo o limite de algo	8	Limite é até onde algo pode ir. É algo que tem o fim determinado a certo lugar.

Podemos observar também que algumas categorias divergem com relação às propostas apresentadas. Na tabela a seguir mostramos uma categoria que está na tabela feita por Keene, Hall e Duca (2014) e que não se enquadra em nossas verificações. Isso ocorre, possivelmente, devido as situações as quais os participantes do curso foram expostos, uma vez que a nossa prática não trabalhou com funções reais para que os nossos alunos identificassem o conceito de limite.

Tabela 14 – Categoria não encontrada em nossa prática

Dados retirados da tabela criada por Keene, Hall e Duca (2014)		
Categoria	Número de vezes em que aparece	Exemplo
Compara a assíntota	4	Você pode usar a assíntota vertical para encontrar o limite da equação

Retomando a análise das tabelas por nós elaboradas, observamos a partir da tabela 3 que muitos alunos mudaram de opinião, uma vez que constatamos seis categorias e não mais cinco como na primeira tabela. Nesta tabela observamos as respostas dos alunos tomando como base um olhar para o limite baseado no que foi discutido sobre a construção do triângulo de Sierpinski, e apareceram mais respostas usando a matemática para justificar que o limite não existe. Acreditamos que isso ocorreu porque foi discutido com os alunos o fato de termos a limitação física, em que no papel não conseguimos mais desenhar triângulos nas novas etapas, em virtude deles serem muito pequenos, porém, podemos pensar que podemos continuar a construção dos novos triângulos, pois conseguimos descobrir a área de novos triângulos, basta definir o número da etapa em que queremos verificar essa área.

Na tabela 8 apenas uma das respostas dos alunos usa a matemática para justificar que o limite não existe. Acreditamos que, depois da nova discussão sobre a soma das áreas retiradas dos triângulos, os alunos compreenderam que o limite é o limite de algo, que o limite é o fim de algo e que o limite é algo que não continua, ou seja, ele aparece como uma barreira, em que podemos nos aproximar e nos distanciar, ou chegar cada vez mais próximo, como justifica um dos alunos, onde nos diz que o limite é "um ponto que se pode alcançar ou chegar cada vez mais mais próximo".

Verificamos que a metodologia de Resolução de Problemas nos auxiliou para que os alunos construíssem intuitivamente a imagem do conceito de limite. Corroboramos com Pereira, Melo e Bisognin (2014), quando consideram que metodologia de Resolução de Problemas possibilitou que os alunos estabelecessem as relações dos conteúdos matemáticos de forma clara. No desenvolvimento de nossa prática foi possível observar que essa metodologia foi apropriada para a construção das imagens do conceito de limite, pois os alunos tiveram que pensar sobre a situação problema apresentada para identificar o que estava ocorrendo, favorecendo assim o que destaca Onuchic (1999) quando diz que a metodologia de Resolução de Problemas deve ser favorável para que o aluno seja protagonista na construção de seu conhecimento. Através da resolução da situação problema apresentada, em que os alunos trabalharam com o que ocorre com as áreas dos triângulos, na construção do triângulo de Sierpinski, eles puderam construir seu próprio conhecimento acerca da imagem do conceito de limite.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho é constituído de uma prática desenvolvida em uma escola pública de ensino médio do município de Porto Alegre. Ao ser desenvolvida, a professora percebeu que os alunos tinham dificuldade com relação a alguns conteúdos básicos de matemática, como por exemplo, exponenciação e operações com frações, além de verificar que os alunos não sabiam como deveriam pensar para responder o questionário aplicado quanto ao que entendem por limite e infinito, uma vez que, se nunca feito, é compreensível que seja difícil pensar sobre tais conceitos. Mesmo com tais dificuldades, a atividade foi conduzida de forma que, conforme o assunto foi sendo abordado, a professora teve influência sobre como se deu a resolução do problema proposto, acontecendo que a mesma fez perguntas e considerações sobre o problema para auxiliar os alunos na elaboração de suas respostas, pois não foi possível que os alunos ficassem tanto tempo discutindo a situação problema, além de que alguns alunos nem o fizeram, devido a falta de interesse.

No capítulo 2 deste trabalho, nos trabalhos correlatos sobre o ensino de limite, verificamos no texto "Limites de sequência em cálculo: usando a pesquisa de design e baseando-se na intuição para apoiar a instrução" de Keene, Hall e Duca (2014), que os autores discutem a ideia de intuição como sendo algo difícil de medir, porque é algo que apenas aceitamos e que se baseia naquilo que sabemos porque sabemos. Também no texto sobre resolução de problemas de Onuchic (1999) se tem uma preocupação com a intuição sobre o que conhecemos, assim como Tall (1981) fala dos modelos espontâneos, que não deixam de ser uma "intuição" daquilo que pensamos sobre algo. Com essa ideia é que discutimos as imagens do conceito de limite que os alunos do terceiro ano do ensino médio têm para verificar se é possível identificá-las e se de alguma forma, com o uso da metodologia de Resolução de Problemas, é possível proporcionar aos alunos um ambiente em que eles sejam responsáveis pela construção do seu conhecimento e consigam identificar o conceito de limite, mesmo que nunca tenham trabalho com cálculo.

Retomando a pergunta diretriz desta pesquisa, "*Quais as imagens do conceito de limite alunos do terceiro ano do Ensino Médio mobilizam ao trabalhar com a resolução de um problema?*", podemos considerar que as três tabelas que construímos sintetizam uma possível resposta para a mesma. Inicialmente, observamos cinco imagens do conceito de limite: Identifica o limite como sendo o limite de algo; Usa a matemática para argumentar que o limite não existe ou não tem fim; Identifica o limite como o fim de algo; Usa a matemática para justificar o limite; Limite como algo que aumenta Em um segundo momento, identificamos seis imagens do conceito de limite sendo mobilizadas, sendo que três delas haviam aparecido no primeiro momento - Identifica o limite como sendo o limite de algo; Usa a matemática para argumentar que o limite não existe ou não tem fim; Identifica o limite como o fim de algo - e outras três foram novidade - Justifica o limite de forma parecida com a definição formal; Limite como algo que não continua; Algo crescente e/ou contínuo. Finalmente, em um terceiro momento, voltamos a identificar cinco imagens do conceito de limite sendo mobilizadas, sendo que todas já haviam aparecido no primeiro/segundo momento - Identifica o limite como sendo o limite de algo; Identifica o limite como o fim de algo; Usa a matemática para justificar o limite; Justifica o limite de forma parecida com a definição formal; Limite como algo que não continua . Ao analisarmos estas imagens do conceito podemos verificar que houve um avanço com relação ao que cada aluno pensou sobre o conceito de limite, o qual não era conhecido pelos alunos anteriormente.

As categorias encontradas e formuladas a partir das respostas dos alunos são o principal resultado desta pesquisa, pois sugerem que, ao trabalhar com resolução de problemas, os alunos são capazes de desenvolver seu próprio conhecimento a partir de suas experiências e de sua intuição. Nelas vemos o reflexo das ideias que os alunos mobilizaram ao longo da prática docente. É possível verificar que o argumento dos alunos girou em torno dos resultados que foram aparecendo ao longo da prática, uma vez que não conheciam o limite como conteúdo matemático. Assim, foi possível observar que, conforme o avanço da prática, os alunos começaram a construir dinamicamente sua imagem do conceito de limite.

Enquanto docente esta experiência proporcionou a visão de que é preciso me preocupar cada vez mais com o meu conhecimento acerca dos conceitos matemáticos, pois se eles estiverem claros para mim fica mais fácil auxiliar e resolver as pequenas dúvidas que podem surgir dos alunos enquanto eles estão construindo seu próprio conhecimento, seja através da metodologia de Resolução de Problemas ou com qualquer outra metodologia que possa estar sendo usada.

Foi possível verificar que os alunos são o reflexo da prática dos professores e que quando este se coloca enquanto pesquisador os papéis se confundem, uma vez que o professor deseja que sua atividade atinja os alunos e alcance seu objetivo, enquanto que o pesquisador deseja que os alunos extrapolem e façam da atividade um impulso para buscar cada vez mais diferentes fontes que alimentem sua curiosidade e proporcionem um avanço de seu conhecimento. Apesar de ter atingido o objetivo de verificar as diferentes imagens do conceito que os alunos criaram ao trabalhar com a situação problema apresentada, fica a dúvida de que os resultados teriam sido diferentes se a professora fosse professora titular da turma e não tivesse feito apenas a intervenção dos quatro encontros, uma vez que já conhecendo a turma poderia ter solucionado com antecedência os problemas que apareceram ao longo da prática.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. Limites e Derivadas no Ensino Médio?. Revista Professor de Matemática 60, 2006, p. 30-32.

ÁVILA, Geraldo. O Ensino de Cálculo no 2° Grau. Revista Professor de Matemática 18, p. 1-2.

Concept Image and Concept Definition, *Senior Secondary Mathematics Education*, (ed. Jan de Lange, MichielDoorman), OW&OC Utrecht, 37– 41.

DE MELLO, Guiomar Namo. CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL: *concepções e políticas*. Disponível em: http://movimentopelabase.org.br/wp-content/uploads/2017/08/guiomar_pesquisa.pdf. Acessado em: 02/10/2017, às 10h46.

Keene, KA, Hall, W. &Duca, A. ZDM Educação Matemática (2014) 46: 561. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0597-8

OLIVEIRA, Fernando Rodrigues de. UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE NOÇÕES DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO. Trabalho de Conclusão de Curso - Graduação em Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

ONUCHIC, L. De La R. *Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.* In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-2018.

PEREIRA, Caroline Conrado; MELO, Charles Bruno da Silva; BISOGNIN, Vanilde. *Construção do conceito de limites no Ensino Médio por meio da metodologia de Resolução de Problemas*. 2º ENEM - Encontro Nacional Pibid Matemática - Educação Matemática para o Século XXI: *trajetória e perspectivas*. 2014, p.1-11.

SANTOS, Marcelo de Souza. UM ESTUDO SOBRE A INTRODUÇÃO DE CONCEITOS DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO. Trabalho de Conclusão de Curso - Graduação em Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SILVA, Guilherme Porto da. *PENSANDO NO INFINITO PARA ENTENDER CÁLCULO:* UMA VISÃO DE PROFESSORES SOBRE A INTRODUÇÃO AO CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO. Trabalho de Conclusão de Curso - Graduação em Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

APÊNDICES

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu,____, R.G.___________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____, da turma __________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada IMAGENS DO CONCEITO DE LIMITE: UMA VISÃO DOS ALUNOS DO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO, desenvolvida pela pesquisadora Kristine Sheila Schuster. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela professora da UFRGS Débora da Silva Soares, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (51) 33086202 ou e-mail debora.soares@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

Analisar a possibilidade de trabalhar conceitos de Cálculo Diferencial no Ensino Médio;

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela letra E seguida de um número (ex: E1. E2,...) e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de questionário escrito etc, bem como da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço Avenida Bento Gonçalves, 8300 e-mail schuster353@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, 13 de novembro de 2017.

Assinatura do Responsável:
Assinatura do(a) pesquisador(a):
Assinatura do Orientador da pesquisa:

TERMO DE CONSENTIMENTO DA ESCOLA

A Escola Estadual de Ensino Médio Baltazar de Oliveira Garcia, escola da rede pública estadual de ensino, neste ato representada pela direção por intermédio do presente instrumento, autoriza Rafael Marques Gonçalves, brasileiro, estudante, CPF 039.635.039-98, a aplicar a proposta de ensino: "Imagens do conceito de limite: uma visão dos alunos do terceiro ano do ensino médio" na turma 301. A escola está ciente de que a referida proposta de ensino é base para o trabalho de conclusão de curso (TCC) de Kristine, o qual é uma exigência parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, e que é orientado pela ProfªDrª Débora da Silva Soares.

A autorizada, por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes da escola que participarão da aplicação da proposta de aula.

Porto Alegre, 13 de novembro de 2017.

____

Kristine Sheila Schuster

____

Profª Débora da Silva Soares

____

Direção da Escola

Porto Alegre, 13 de novembro de 2017.

Senhor(a) Diretor(a):

Vimos apresentar o(a) discente **Kristine Sheila Schuster** regularmente matriculado(a) na disciplina **Trabalho de Conclusão de Curso** do curso de Licenciatura em Matemática desta Universidade, e solicitar permissão para que realize a prática do Trabalho de Conclusão de Curso em turma(s) do Ensino Médio de seu Estabelecimento de Ensino neste semestre letivo.

De acordo com os interesses da Escola, sugerimos que os planos de aula, correspondentes a prática sejam previamente testados e elaborados pela discente com o apoio e a supervisão do(a) professor(a) regente da disciplina. A elaboração, a revisão e a reformulação de tais planos e do projeto contarão com a orientação dos professores da disciplina, na Universidade, ao longo do semestre.

Colocamo-nos, juntamente com o Instituto de Matemática e Estatística desta Universidade, à disposição de seu estabelecimento de ensino para esclarecer dúvidas e fornecer informações. Desde já agradecemos a oportunidade de formação que seu estabelecimento está possibilitando a nossos(as) discentes.

____

Débora da Silva Soares (Professora Orientadora) – debora.soares@ufrgs.br

Planos de organização das Aulas

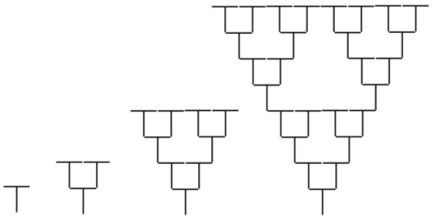
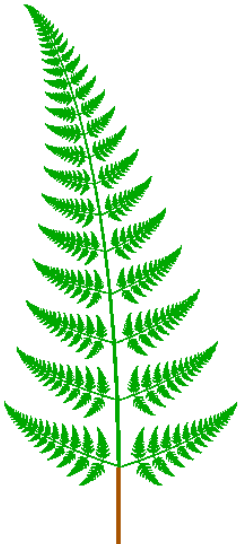
1º Encontro - Construindo o glossário e conhecendo um fractal

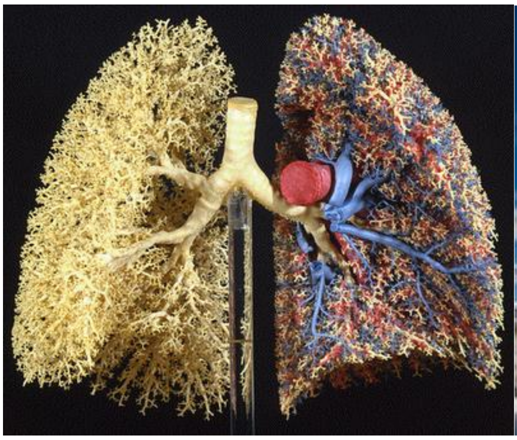
- Os alunos deverão escrever o que entendem com relação a limite e infinito.

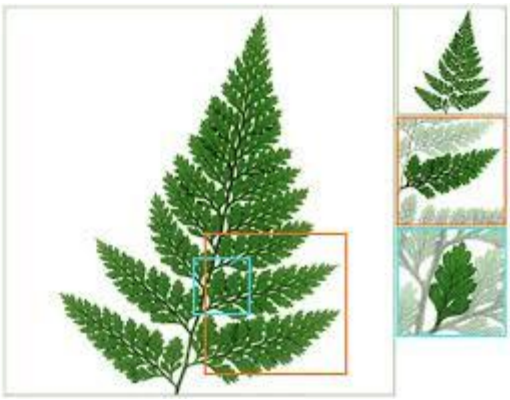
O que você entende por:

Limite:
Infinito:

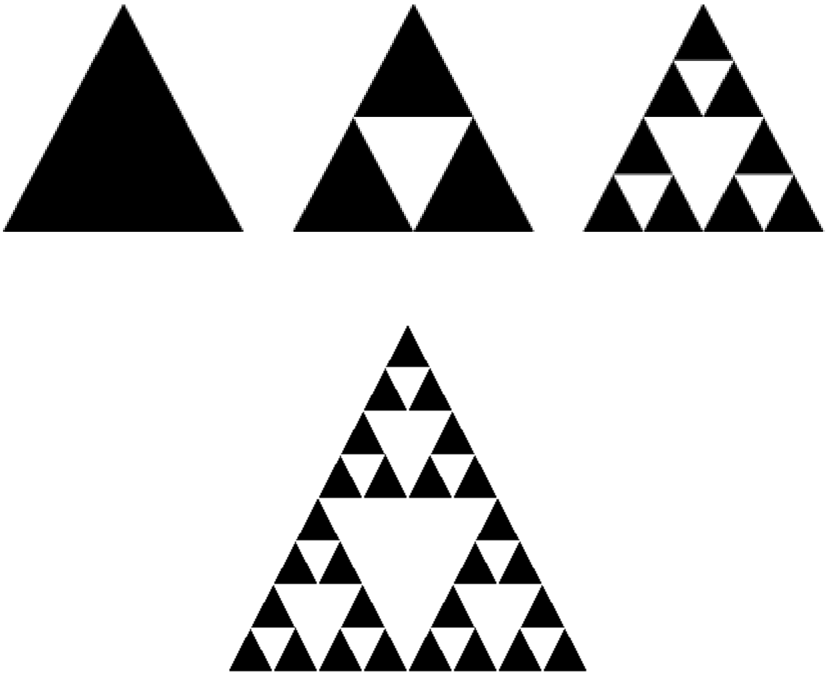
- Apresentarei aos alunos um fractal, mostrarei onde podemos encontrar exemplos de fractais na natureza;





- Mostrarei a construção do triângulo de Sierpinski.



2º Encontro - Construção do triângulo de Sierpinski e apresentação da situação problema

Será fornecido aos alunos uma folha para que os alunos possam construir o triângulo de Sierpinski e identificar o que acontece com a área do triângulo maior conforme forem sendo construídos mais níveis.

Os alunos deverão se reunir em grupos de até três integrantes para construção do triângulo e discutir uma estratégia para resolução do problema.

Situação problema:

Dado o triângulo Sierpinski, o que acontece com a sua área conforme avançamos cada etapa de construção?

3º Encontro - Socialização da resolução do problema e definição do conceito de limite.

Na última aula não foi possível terminar a construção dos triângulos. Iniciaremos a aula terminando a construção e em seguida será apresentada para os alunos a situação problema.

Situação problema:

Dado o triângulo Sierpinski, o que acontece com a sua área dos novos triângulos conforme avançamos cada etapa de construção?

Será fornecido um tempo para que eles pensem na resolução do problema, em seguida será apresentada a seguinte resolução.

ETAPA	ÁREA INICIAL	ÁREA DE CADA TRIÂNGULO
1ª	1	$\frac{1}{4}$
2ª	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
3ª	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
4ª	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{108}$
5ª	$\frac{1}{108}$	$\frac{1}{324}$
6ª	$\frac{1}{324}$	$\frac{1}{972}$
7ª	$\frac{1}{972}$	$\frac{1}{2916}$
↓	↓	↓
13ª	$\frac{1}{16.777.216}$	$\frac{1}{67.108.864}$
↓	↓	↓
21ª	$\frac{1}{1.099.511.627.776}$	$\frac{1}{4.398.046.511.104}$
↓	↓	↓

Nesta aula os alunos deverão apresentar para os colegas a resolução que encontraram para o problema e, na sequência, retomar o glossário para reescrever o que cada um entende por limite e infinito. Com base nas apresentações será feita um fechamento da atividade com os alunos, buscando-se um consenso com relação ao conceito de limite.

4º Encontro - Fechamento

Será feito um fechamento da prática com os alunos. Construiremos juntos o gráfico formado pelos dados da tabela construída com as áreas dos triângulos, onde discutiremos o que ocorre com a função quando colocamos mais pontos no gráfico.

Tabela:

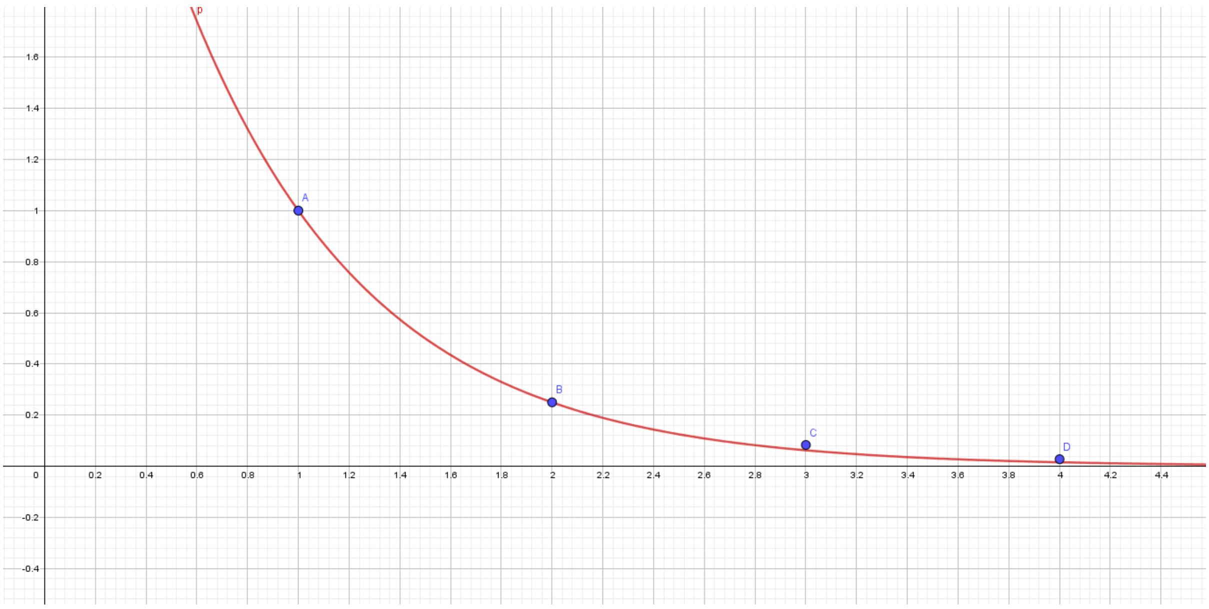
ETAPA	**ÁREA DOS TRIÂNGULOS**
1ª	1
2ª	$\frac{1}{4}$
3ª	$\frac{1}{16}$
4ª	$\frac{1}{64}$
5ª	$\frac{1}{256}$
6ª	$\frac{1}{1.024}$
7ª	$\frac{1}{4.096}$
8ª	$\frac{1}{16.384}$
9ª	$\frac{1}{65.536}$
10ª	$\frac{1}{262.144}$

↓	↓
15ª	$\frac{1}{268.435.456}$
↓	↓
20ª	$\frac{1}{274.877.906.944}$

Função:

$$f(x) = \frac{1}{4^{x-1}}$$

Gráfico:



Será discutido com os alunos:

1. O que ocorre com a área dos triângulos?
2. É possível descobrir a "regra" que determina a área dos triângulos, sem que seja preciso fazer o desenho? Que "regra" é essa?
3. O que ocorre conforme aumentamos o número de etapas?
4. E no infinito? Se pensarmos em uma etapa muito grande, o que ocorre com a área dos triângulos?

5. Se quisermos descobrir um triângulo com área próxima a um valor determinado, é possível? Por exemplo, se quisermos saber se existe uma etapa em que os triângulos têm sua área próxima do valor 0,00001, o que devemos fazer?

$$0{,}00001 = \frac{1}{4^{x-1}}$$

$$log(0{,}00001) = log(\frac{1}{4^{x-1}})$$

$$log(0{,}00001) = -5$$

$$log(1) = 0$$

$$log(4) = 0{,}602$$

$$-5 = log(1) - log(4^{x-1})$$

$$-5 = 0 - (x-1)log(4)$$

$$-5 = -(x-1)0{,}602$$

$$-5 = -0{,}602x + 0{,}602$$

$$x = \frac{-5 - 0{,}602}{-0{,}602}$$

$$x = \frac{-5{,}602}{-0{,}602}$$

$$x = 9{,}305$$

$$\frac{1}{4^{x-1}} = \frac{1}{4^{9-1}}$$

$$\frac{1}{4^{8}} = 0{,}0000152587890625$$

6. Alguns responderam que o limite não existe na matemática e outros responderam que existe. Ele existe ou não?
7. Por fim, podemos verificar o que ocorre com as áreas retiradas?

Tabela

ETAPA	**SOMA DA ÁREA DOS TRIÂNGULOS RETIRADOS**
1ª	0
2ª	$\frac{1}{4} = 0{,}25$

3ª	$\frac{3}{12} * \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0{,}31125$
4ª	$\frac{9}{36} * \frac{3}{12} * \frac{1}{4} + \frac{3}{12} * \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0{,}328125$
5ª	$\frac{27}{108} * \frac{9}{36} * \frac{3}{12} * \frac{1}{4} + \frac{9}{36} * \frac{3}{12} * \frac{1}{4} + \frac{3}{12} * \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0{,}033203125$