Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Regularidade $C^{1,\alpha}$ de funções p-harmônicas

Dissertação de Mestrado

Matheus Frederico Stapenhorst

Porto Alegre, 09 de Março de 2018

Dissertação submetida por Matheus Frederico Stapenhorst * como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Diego Marcon Farias

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Marguit e Hilmar, e à minha irmã Martina, pelo inabalável apoio em todos os momentos de minha vida.
Aos meus queridos amigos Júlia e Arthur, pela paciência e por sempre me apoiarem em momentos de necessidade.
Aos meus colegas Vanusa, Eduardo, Tainara, Marcus, William, Leonardo, Daniel, Felix, Lucas, Filipe, e tantos outros, pela ajuda mútua e pela amizade.
Aos professores excelentes que tive, em especial a Eduardo Brietzke, Leonardo Bonorino, Miriam Telichevesky, Artur Lopes e Jairo Mengue.
Ao Felipe, cujas aulas me tornaram um enxadrista melhor.
À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, cujo ambiente me fez amadurecer durante os últimos seis anos.
Obrigado!

Resumo

Neste trabalho estudamos a regularidade de soluções do problema

$$\mathrm{div}|Du|^p Du = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{1}$$

onde $p > 0$ e Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$. Inicialmente, obtemos estimativas $C^{1,\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$ a priori para soluções suaves do problema aproximado

$$\mathrm{div}(|Du|^p + \epsilon)Du = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad (\epsilon > 0)$$

Depois, provamos que a equação acima possui solução suave para cada $\epsilon > 0$, que indicaremos por u^ϵ. Daí, conseguimos mostrar que existe uma subsequência, que continuará sendo denotada por (u^ϵ) tal que

$$u^\epsilon \to v$$

uniformemente em compactos de Ω. Provamos que $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ e que v é solução de (1).
Este trabalho é baseaado em [4].

Abstract

In this work we study the regularity of solutions of the problem

$$\text{div}|Du|^p Du = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{2}$$

where $p > 0$ and Ω is a bounded and open subset of $\mathbb{R}^n, n \geq 2$. Initially we obtain a priori $C^{1,\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$ estimates for smooth solutions of the approximate problem

$$\text{div}(|Du|^p + \epsilon)Du = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad (\epsilon > 0)$$

Afterwards, we prove that the problem above is solvable, and its solutions, which will be denoted by u^ϵ, are smooth for each $\epsilon > 0$. Then we can show that there is a subsequence(still denoted by u^ϵ), such that

$$u^\epsilon \to v$$

uniformly on compact subsets of Ω. We then show that $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ and that v solves (2).
This work is based on [4].

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Até os anos 50, a teoria de regularidade se baseava em argumentos de perturbação, como por exemplo as estimativas de Schauder, que garantem que soluções de equações lineares uniformemente elípticas com coeficientes Hölder contínuos são suaves. No entanto, essas estimativas não podem ser generalizadas para equações não-lineares. Posteriormente, no fim dos anos 50 e no início dos anos 60, De Giorgi ([2]), Nash ([10]) e Moser ([9]) descobriram argumentos que não usavam perturbações, e seus trabalhos serviram de base para o desenvolvimento da teoria de regularidade de EDP's elípticas, permitindo estender resultados para EDP's quasilineares, como por exemplo,

$$\operatorname{div}(|Du|^p Du) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad p > 0, \tag{1.1}$$

onde Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Esta é a equação de Euler-Lagrange associada ao problema de minimização do funcional

$$\Phi(v) \equiv \int_\Omega |Dv|^{p+2}\, dx \tag{1.2}$$

sobre toda $v \in W^{1,p+2}(\Omega)$ tal que $v = h$ em $\partial\Omega$ no sentido do traço para alguma função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sabe-se que se h for uma função suficientemente suave então Φ atinge mínimo em uma única função u, e que esta função é uma solução fraca da EDP (1.1), ou seja,

$$\int_\Omega |Du|^p \langle Du, D\eta\rangle\, dx = 0 \quad \text{para qualquer} \quad \eta \in W_0^{1,p+2}(\Omega). \tag{1.3}$$

A princípio, u é uma função que pertence apenas ao espaço $W^{1,p+2}(\Omega)$. O objetivo do nosso trabalho é desenvolver o paper [4], que consiste em provar que $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ para algum expoente $\alpha > 0$. Mais precisamente, provamos o seguinte resultado:
Suponha que $u \in W^{1,p+2}(\Omega)$ *é uma solução fraca de*

$$\operatorname{div}(|Du|^p Du) = 0 \quad em \quad \Omega.$$

Então existe uma constante $\alpha = \alpha(p, n) > 0$ *e, para cada* $\Omega' \subset\subset \Omega$*, existe uma constante* $C(\Omega') = C(\Omega', p, n, ||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)})$ *tal que*

$$\max_{\Omega'} |Du| \leq C(\Omega')$$

e

$$[Du]_{C^\alpha(\Omega')} \leq C(\Omega').$$

Uraltseva [13] e Uhlenbeck [12] provaram independentemente que $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$, e ambos os autores obtiveram regularidade para uma classe maior de problemas não lineares. Este resultado é o melhor possível, visto que existe exemplo, dado em [8], de função p-harmônica que não é C^2.
Nesse trabalho combinamos técnicas devidas a DeGiorgi [2] e a Moser [9] que investigam E.D.P's uniformemente elípticas escritas na forma da divergência, e a ideia é truncar funções testes em regiões onde $|Du|$ é pequeno. A partir daí, podemos estimar e cancelar os efeitos do termo $|Du|^p$, obtendo com isso estimativas "uniformes" mesmo em regiões onde $|Du|$ é pequeno.
Nos capítulos iniciais 2 e 3 damos algumas definições e resultados que serão utilizados posteriormente. No capítulo 4 inicialmente provamos Hölder continuidade de Du em torno de um ponto de degeneração (onde $Du = 0$). Posteriormente, obtemos uma estimativa Hölder de Du no interior de uma bola qualquer $B(R_0)$. No capítulo 5 indicamos como modificar os cálculos feitos no capítulo anterior para cobrir problemas aproximados, que possuem solução suave. Depois, obtemos uma limitação uniforme para o gradiente das soluções desses problemas aproximados. Ao juntar essa limitação uniforme com as estimativas a priori estudadas no capítulo 4 podemos estudar o que ocorre com a função limite, que descobrimos ser uma solução $C^{1,\alpha}_{loc}$ de (1.1).

Também notamos que as técnicas usadas nesse trabalho se estendem a problemas não lineares da forma

$$\operatorname{div}\,(\phi(|Du|)Du) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde ϕ possui propriedades apropriadas, conforme [12] e [13].
Observamos ainda que [11] obtém regularidade para problemas mais gerais, como por exemplo para equações do tipo

$$-\operatorname{div}(|Du|^p Du) = f,$$

que aparecem, por exemplo, na teoria de aplicações quasiregulares e quasiconformes, conforme [6].

Capítulo 2

Preliminares

Primeiro daremos algumas definições e notações

1. $A \subset\subset B$ se A for um subconjunto compacto de B.

2. Se $x \in \mathbb{R}$ então $\lceil x \rceil$ é igual ao menor inteiro maior que x.

3. Se $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ e $u : Y \to \mathbb{R}$ então

$$\text{osc}_X u = \sup_{x \in X} u(x) - \inf_{y \in X} u(y)$$

   é a oscilação de u em X.

4. Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, e sua fronteira é denotada por $\partial\Omega$.

5. $\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω.

6. $|\Omega|$ representa a medida do conjunto Ω.

7. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno.

8. $B(x, R)$ representa a bola aberta centrada no ponto x de raio R.

9. $C^\infty(\Omega)$ é o conjunto formado pelas funções infinitamente diferenciáveis em Ω.

10. $C_0^\infty(\Omega)$ é o conjunto formado pelas funções de suporte compacto e infinitamente diferenciáveis em Ω.

11. A distância entre dois conjuntos Ω e Ω' é dada por

$$\mathrm{dist}(\Omega, \Omega') = \inf\{|x-y| : x \in \Omega, \quad y \in \Omega'\}.$$

12. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}, x \in \Omega$. A função $u_{x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ representa a derivada parcial de u com respeito a x_i. Para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, com $\alpha_i \in \mathbb{N}$, definimos a α-ésima derivada de $\phi \in C^\infty(\Omega)$ por

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi.$$

13. Seja $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n, \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ uma função vetorial suave de classe $C^1(\Omega)$. Então definimos para cada $x \in \Omega$

$$(\mathrm{div}\, \mathbf{u})\,(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i(x).$$

Se $u \in C^2(\Omega)$, então definimos o laplaciano de u como sendo

$$\Delta u = \mathrm{div}\, Du = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}.$$

14. A média de u sobre o conjunto Ω é dada por

$$\fint_\Omega u\, dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u\, dx.$$

15. O espaço $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ é o espaço formado pelas funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$\int_\Omega |u|^p\, dx < \infty.$$

Podemos definir a seguinte norma em $L^p(\Omega)$:

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ é completo com respeito a essa norma.

16. Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, com $\alpha_i \in \mathbb{N}$. A função v é dita a α-ésima derivada parcial fraca de u, e escrevemos $v = D^\alpha u$ se

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi\, dx,$$

para toda função teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, onde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

17. $W^{1,p}(\Omega)$ é o espaço de Sobolev, formado pelas funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ pertencentes a $L^p(\Omega)$ que possuem derivada fraca de primeira ordem em Du em Ω tal que $Du \in L^p(\Omega)$. Definimos a seguinte norma em $W^{1,p}(\Omega)$:

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \, dx + \int_{\Omega} |Du|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

18. Definimos $W_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^{\infty}(\Omega)$ na norma de $W^{1,p}(\Omega)$. Mais precisamente, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se e somente se existir uma sequência de funções $u_k \in C_0^{\infty}(\Omega)$ tais que

$$u_k \to u \quad \text{em} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

19. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que

$$u = h \quad \text{em} \quad \partial\Omega$$

se $u - h \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

20. Defina $\rho \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\rho(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & \text{se} \quad |x| < 1, \\ 0, \quad \text{se} \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde a constante C é tomada de modo que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dx = 1$.
Além disso, para cada $\epsilon > 0$ defina

$$\rho_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Chamamos ρ de molificador usual. As funções ρ_ϵ são de classe $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon \, dx = 1 \quad \text{supp}(\rho_\epsilon) \subset B(0, \epsilon).$$

21. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável, defina a sua molificação por

$$f^\epsilon := \rho_\epsilon * f \quad \text{em} \quad \Omega_\epsilon,$$

onde

$$\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}.$$

Ou seja,

$$f^{\epsilon}(x) = \int_{\Omega} \rho_{\epsilon}(x-y) f(y)\, dy = \int_{B(0,\epsilon)} \rho_{\epsilon}(y) f(x-y)\, dy,$$

para todo $x \in \Omega_{\epsilon}$.

22. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita Hölder contínua em Ω se existem constantes $C > 0$ e $0 < \alpha < 1$ tais que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \quad \text{para quaisquer} \quad x, y \in \Omega.$$

O espaço formado pelas funções Hölder contínuas em Ω é denotado por $C^{\alpha}(\Omega)$ e nesse espaço podemos definir a seminorma

$$[u]_{C^{\alpha}(\Omega)} = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$$

e a norma

$$||u||_{C^{\alpha}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| + [u]_{C^{\alpha}(\Omega)} = ||u||_{C(\Omega)} + [u]_{C^{\alpha}(\Omega)}.$$

Munido dessa norma, $C^{\alpha}(\Omega)$ é de Banach.

23. Dizemos que $u \in W^{1,p+2}(\Omega)$ é solução fraca da equação

$$\operatorname{div}(|Du|^p Du) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega$$

se

$$\int_{\Omega} |Du|^p \langle Du, D\eta \rangle \, dx = 0$$

para cada $\eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

24. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R} \in W^{1,p+2}(\Omega)$. Considere a equação

$$\operatorname{div}(|Du|^p Du) + \epsilon \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.1}$$

Então,

(a) u é solução fraca de (2.1) se

$$\int_{\Omega} (|Du|^p + \epsilon) \langle Du, D\eta \rangle \, dx = 0$$

para cada $\eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

(b) u é subsolução fraca de (2.1) se

$$\int_\Omega (|Du|^p + \epsilon) \langle Du, D\eta \rangle \, dx \leq 0$$

para cada função não negativa $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

(c) u é supersolução fraca de (2.1) se

$$\int_\Omega (|Du|^p + \epsilon) \langle Du, D\eta \rangle \, dx \geq 0$$

para cada função não negativa $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

25. Suponhamos que cada $x \in \Omega$ esteja associado a uma matriz simétrica positiva definida $a_{ij}(x)$. Considere a equação

$$\sum_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij}(x) u_{x_j}(x)\big)_{x_i} = 0 \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.2}$$

Dizemos que essa equação é uniformemente elíptica se existir $\lambda > 1$ tal que

$$\lambda^{-1} ||\xi||^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda ||\xi||^2 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

26. Dizemos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (2.2) se

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} \, dx = 0$$

para toda $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.
Além disso, dizemos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é subsolução fraca de (2.2) se

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) u_{x_j} \eta_{x_i} \, dx \leq 0$$

para toda função não negativa $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.
Finalmente, dizemos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é supersolução fraca de (2.2) se

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) u_{x_j} \eta_{x_i} \, dx \geq 0$$

para toda função não negativa $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.
Note que u é supersolução fraca de (2.2), se e somente se $-u$ é subsolução fraca de (2.2).

27. Um operador Q é dito quasilinear se for da forma

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, Du)u_{x_i x_j} + b(x, u, Du), \quad a_{ij} = a_{ji},$$

onde x pertence a um aberto limitado Ω de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, e $u \in C^2(\Omega)$. Os coeficientes de Q, que são as funções $a_{ij}(x, z, p), b(x, z, p)$, estão definidas no conjunto $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Q é elíptico em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ se a matriz $[a_{ij}(x, z, p)]$ for positiva para cada $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Ou seja, se $\lambda(x, z, p)$ e $\Lambda(x, z, p)$ denotam respectivamente o menor e o maior autovalor de $[a_{ij}(x, z, p)]$, então

$$0 < \lambda(x, z, p)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, z, p)\xi_i \xi_j \leq \Lambda(x, z, p)|\xi|^2$$

para qualquer vetor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

28. Dizemos que o operador quasilinear Q está na forma da divergência se existem uma função vetorial diferenciável

$$\mathbf{A}(x, z, p) = (A_1(x, z, p), \ldots, A_n(x, z, p))$$

e uma função escalar $B(x, z, p)$ tais que

$$Qu = \operatorname{div} \mathbf{A}(x, u, Du) + B(x, u, Du), \quad u \in C^2(\Omega).$$

29. Sejam $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis.

    (a) Dizemos que

    $$f_k \to f \quad q.t.p \quad \Omega$$

    se existe um subconjunto $U \subset \Omega$ tal que $|\Omega - U| = 0$ e

    $$f_k(x) \to f(x) \quad \text{em} \quad U.$$

    (b) Dizemos que

    $$f_k \to f \quad \text{uniformemente em} \quad \Omega$$

    se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

    $$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \geq n_0.$$

(c) Dizemos que

$$f_k \to f \quad \text{em medida}$$

se para cada $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} |\{x \in \Omega : |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}| = 0.$$

(d) Se além disso $f_k, f \in L^p(\Omega)$, então

$$f_k \to f \quad \text{em} \quad L^p(\Omega)$$

se

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{L^p(\Omega)} = 0.$$

30. Sejam X e Y espaços de Banach tais que $X \subset Y$. Dizemos que X está compactamente mergulhado em Y e escrevemos

$$X \subset\subset Y,$$

se

(i) Existe uma constante C tal que

$$||x||_Y \leq C||x||_X \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

(ii) Toda sequência limitada em X possui uma subsequência convergente em Y.

31. Sejam X e Y espaços de Banach. Uma aplicação $A : X \to Y$ é um operador linear se

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda A(u) + \mu A(v).$$

O operador A é limitado se

$$||A|| \equiv \sup\{||Au||_Y : ||u||_X \leq 1\} < \infty.$$

Cada operador linear limitado $f : X \to \mathbb{R}$ é chamado de funcional linear limitado de X. Denotamos o conjunto formado por todos os funcionais lineares limitados de X por X^*, e o chamamos de espaço dual de X. Daí, se $f \in X^*$, temos que

$$||f|| \equiv \sup\{|f(u)| : ||u||_X \leq 1\}.$$

32. Um espaço de Banach X é reflexivo se $(X^*)^* \simeq X$. Mais precisamente, se para cada $\Phi : X^* \to \mathbb{R}$ existe um elemento $x \in X$ tal que

$$\Phi(f) = f(x) \quad \forall f \in X^*.$$

33. Seja $(X, ||\cdot||)$ um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ converge fracamente a $u \in X$ e escrevemos

$$u_k \rightharpoonup u$$

se

$$f(u_k) \to f(u)$$

para cada funcional linear limitado $f \in X^*$.

Agora, enunciemos alguns resultados que serão utilizados ao longo do texto.

1. A desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

2. A inequação de Cauchy

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são números reais então

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Consequentemente, vale a inequação de Cauchy com ϵ:

$$ab \leq \frac{\epsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\epsilon} \quad \forall a, b, \epsilon > 0.$$

Observação 2.1. *A inequação de Cauchy pode ser apresentada de várias formas. Por exemplo, vale que*

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \quad \forall a, b, \epsilon > 0.$$

3. A inequação de Young

Sejam $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Consequentemente, vale a inequação de Young com ϵ:

$$ab = (\epsilon a)\left(\frac{b}{\epsilon}\right) \leq \frac{\epsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{\epsilon^q q} \quad \forall a, b, \epsilon > 0.$$

4. A desigualdade de Hölder:
Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ então
$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq ||u||_{L^p(\Omega)}||v||_{L^q(\Omega)}.$$

5. O teorema de mudança de variáveis:
Sejam $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos limitados $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Se $X \subset U$ é tal que $|\partial X| = 0$, e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ é integrável, então $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ é integrável e
$$\int_{h(X)} f(y)\, dy = \int_X f(h(x))|\det h'(x)|\, dx.$$

6. O teorema da integração por partes:
Se Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ de fronteira C^1, então para cada $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ vale que
$$\int_\Omega u_{x_i} v\, dx = -\int_\Omega v_{x_i} u\, dx + \int_{\partial\Omega} uv\nu_i\, dS \quad (i = 1, \ldots, n),$$
onde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ é o vetor normal exterior de Ω.

7. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável e f^ϵ sua molificação. Então,

   (i) $f^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.

   (ii) $f^\epsilon \to f$ q.t.p em Ω_ϵ.

   (iii) Se $f \in C(\Omega)$, então $f^\epsilon \to f$ uniformemente em Ω_ϵ.

   Agora, enunciaremos as desigualdades de Sobolev para funções pertencentes aos espaços $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$.

8. Estimativa para funções C_0^1:
Sejam $1 \leq p < n$ e $p^* = \frac{np}{n-p}$ e suponha que Ω seja um aberto qualquer de $\mathbb{R}^n$. Se $u \in C_0^1(\Omega)$ então existe uma constante $C = C(n, p)$ tal que
$$||u||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)}.$$

9. Estimativa para funções $W^{1,p}$:
Sejam $1 \leq p < n$ e $p^* = \frac{np}{n-p}$ e suponha que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ cuja fronteira $\partial\Omega$ seja de classe C^1. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então $u \in L^{p^*}(\Omega)$ e vale a seguinte estimativa

$$||u||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

onde C depende apenas de p, n e Ω.

10. Estimativa para funções $W_0^{1,p}$:
Sejam $1 \leq p < n$ e $p^* = \frac{np}{n-p}$ e suponha que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ então vale a estimativa

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)}.$$

para cada $q \in [1, p^*]$, com a constante $C = C(n, p, q, \Omega)$. Em particular, para cada $1 \leq p \leq \infty$ temos que

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)},$$

onde C depende apenas de p, n e Ω.

Observação 2.2. *Essa estimativa às vezes é chamada de desigualdade de Poincaré. Em vista dessa estimativa, em $W_0^{1,p}(\Omega)$ a norma $||Du||_{L^p(\Omega)}$ é equivalente a $||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$.*

11. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $D(f \circ u) = f'(u)Du$.

12. Seja $1 < p < \infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então $u^+ = \max\{u, 0\} \in W^{1,p}(\Omega)$. Além disso,

$$Du^+ = \begin{cases} Du, & \text{q.t.p em} \quad \{u > 0\}, \\ 0, & \text{q.t.p} \quad \{u \leq 0\} \end{cases}$$

13. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se Ω é conexo e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é tal que

$$Du = 0 \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega$$

então $u = c$ é constante q.t.p em Ω.

14. O Teorema de Rellich-Kondrachov:
Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^1. Suponha que $1 \leq p < n$. Então
$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$
para cada $1 \leq q < p^* = \frac{np}{n-p}$.

15. O teorema de Arzelá-Ascoli:
Seja Ω subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $\Omega' \subset\subset \Omega$. Suponha que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ seja uma sequência de funções $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que
$$|f_k(x)| \leq M \quad (k = 1, 2, \dots, x \in \Omega).$$
Suponha ainda que a família $\{f_k(x)\}$ seja equicontínua, ou seja, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}.$$
Então existem uma subsequência $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que
$$f_{k_j} \to f \quad \text{uniformemente em} \quad \Omega'.$$

16. Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que a sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ seja limitada. Então existem uma subsequência $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $u \in X$ tais que
$$u_{k_j} \rightharpoonup u.$$

Observação 2.3. *Para cada $1 < p < \infty$, o espaço L^p é reflexivo, pois seu dual é o espaço L^q, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Além disso, o espaço $W^{1,p}$ é reflexivo.*

17. O teorema de Mazur:
Seja X um espaço de Banach e $C \subset X$ um subconjunto convexo de X. Então C é fechado na topologia forte se e somente se C é fechado na topologia fraca.

18. De fundamental importância serão os seguintes teoremas devidos a Moser, sendo os teoremas 8.17 e 8.22 em [5]:

Teorema 2.4. *Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma subsolução fraca da equação uniformemente elíptica (2.2), então, para qualquer bola $B(y, 2R) \subset \Omega$ e $p > 1$ temos que*

$$\sup_{B(y,R)} u \leq CR^{-n/p}||u^+||_{L^p(B(y,2R))}$$

onde $C = C(n, \lambda, p)$. Analogamente, se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma supersolução fraca de (2.2) em Ω então

$$\sup_{B(y,R)} (-u) \leq CR^{-n/p}||u^-||_{L^p(B(y,2R))}$$

onde $C = C(n, \lambda, p)$.

Consequentemente,

Corolário 2.5. *Caso u seja subsolução fraca de (2.2) temos que*

$$\sup_{B(y,R)} u \leq C \left(\fint_{B(y,2R)} |u^+|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Também podemos comparar $\sup_{B(y,R)} u$ com $||u^+||_{L^p(B(y,\theta R))}$, onde $1 < \theta < 2$, obtendo

$$\sup_{B(y,R)} u \leq C(p, n, \lambda, \theta) \left(\fint_{B(y,\theta R)} |u^+|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ainda vale o seguinte resultado:

Teorema 2.6. *Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ for uma solução fraca da equação uniformemente elíptica (2.2), então para qualquer bola $B(y, R_0)$ e $R \leq R_0$ existem constantes $\delta = \delta(n, \lambda)$ e $\alpha = \alpha(n)$ tais que*

$$osc_{B(y,R)} u \leq \delta \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\alpha} osc_{B(y,R_0)} u.$$

Daí, tomando $R = R_0/4$, por exemplo, temos que existe uma constante δ como acima tal que

$$osc_{B(y,R_0/4)} u \leq \delta \, osc_{B(y,R_0)} u.$$

Observação 2.7. *As demonstrações dos resultados acima usam apenas que a matriz a_{ij} satisfaz a condição de elipticidade e que a_{ij} é limitada. Daí, ao longo do texto aplicamos os resultados acima para equações da forma*

$$\mathrm{div}(a_{ij}(Du(x))u_{x_i}(x))_{x_j} = 0,$$

onde a_{ij} é limitada, depende apenas de Du, e satisfaz a condição de elipticidade

$$0 < \lambda(p)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(p)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(p)|\xi|^2$$

para quaisquer vetores $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}, p \in \mathbb{R}^n$.

19. Teorema de Existência para $EDP's$ quasilineares elípticas:

Teorema 2.8. *Seja $B(R_0)$ uma bola de raio R_0 contida em $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{B(R_0)})$ e suponha que o operador quasilinear Q, escrito na forma da divergência, seja elíptico em $\overline{B(R_0)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com coeficientes $a_{ij} \in C^1(\overline{B(R_0)}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se existe uma constante M independente de u e σ tal que toda solução de classe $C^{2,\alpha}(\overline{B(R_0)})$ dos problemas de Dirichlet*

$$\left\{ \begin{array}{c} Q(u) = 0, \quad em \quad B(R_0), \\ u = \sigma\varphi, \quad em \quad \partial B(R_0), \quad 0 \leq \sigma \leq 1 \end{array} \right.$$

satisfaça

$$||u||_{C^1(B(R_0))} = \sup_{B(R_0)} |u| + \sup_{B(R_0)} |Du| \leq M,$$

então segue que o problema

$$\left\{ \begin{array}{c} Q(u) = 0, \quad em \quad B(R_0), \\ u = \varphi, \quad em \quad \partial B(R_0), \end{array} \right.$$

é solúvel em $C^{2,\alpha}(\overline{B(R_0)})$.

Observação 2.9. *O teorema acima continua valendo se $a_{ij} \in C^{\alpha}(\overline{B(R_0)}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, com $0 < \alpha < 1$.*

O teorema acima se trata de um príncipio do tipo Leray-Schauder, e também vale para domínios limitados de fronteira $C^{2,\alpha}$. Este teorema pode ser generalizado para operadores elípticos quaisquer, e se trata do Teorema 13.8 em [5].

As demonstrações dos resultados deste capítulo se encontram em [3], [5] e [1].

Capítulo 3

Lemas Auxiliares

Nesse capítulo, provamos lemas que serão utilizados ao longo do trabalho. Os dois primeiros estão demonstrados em [7]

Lema 3.1. *Suponha que uma sequência y_l, para $l \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, de números não negativos satisfaça a relação de recorrência*

$$y_{l+1} \leq cb^l y_l^{1+\epsilon}, \qquad l \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \tag{3.1}$$

onde c, ϵ e b são constantes positivas, com $b > 1$. Então,

$$y_l \leq c^{\frac{(1+\epsilon)^l - 1}{\epsilon}} b^{\frac{(1+\epsilon)^l - 1}{\epsilon^2} - \frac{l}{\epsilon}} y_0^{(1+\epsilon)^l} \tag{3.2}$$

Em particular, se

$$y_0 \leq c^{-\frac{1}{\epsilon}} b^{-\frac{1}{\epsilon^2}} = \theta \tag{3.3}$$

Então

$$y_l \leq \theta b^{-\frac{l}{\epsilon}} \tag{3.4}$$

E portanto $y_l \to 0$ quando $l \to \infty$

Demonstração: Usando (3.1) para $l = 0$, temos que

$$y_1 \leq c y_0^{1+\epsilon}. \tag{3.5}$$

Portanto, (3.2) é verdadeira para $l = 1$.
Suponhamos agora que exista algum $l_0 \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ tal que (3.2) seja

verdadeira para $l = l_0$, ou seja,

$$y_{l_0} \leq c^{\frac{(1+\epsilon)^{l_0}-1}{\epsilon}} b^{\frac{(1+\epsilon)^{l_0}-1}{\epsilon^2} - \frac{l_0}{\epsilon}} y_0^{(1+\epsilon)^{l_0}}. \tag{3.6}$$

Então, usando a hipótese (3.1) concluímos que

$$\begin{aligned} y_{l_0+1} \leq c b^{l_0} y_{l_0}^{1+\epsilon} &\leq c b^{l_0} \left(c^{\frac{(1+\epsilon)^{l_0}-1}{\epsilon}} b^{\frac{(1+\epsilon)^{l_0}-1}{\epsilon^2} - \frac{l_0}{\epsilon}} y_0^{(1+\epsilon)^{l_0}} \right)^{1+\epsilon} \\ &= c^{1+\frac{(1+\epsilon)^{l_0+1}-(1+\epsilon)}{\epsilon}} b^{l_0 + \frac{(1+\epsilon)^{l_0+1}-(1+\epsilon)}{\epsilon^2} - \frac{l_0(1+\epsilon)}{\epsilon}} y_0^{(1+\epsilon)^{l_0+1}} \\ &= c^{\frac{(1+\epsilon)^{l_0+1}-1}{\epsilon}} b^{\frac{(1+\epsilon)^{l_0+1}-1}{\epsilon^2} - \frac{(l_0+1)}{\epsilon}} y_0^{(1+\epsilon)^{l_0+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, (3.2) é verdadeira para $l = l_0 + 1$. Logo, a afirmação (3.2) fica demonstrada. Substituindo (3.3) em (3.2), obtemos que

$$\begin{aligned} y_l &\leq c^{\frac{(1+\epsilon)^{l}-1}{\epsilon}} b^{\frac{(1+\epsilon)^{l}-1}{\epsilon^2} - \frac{l}{\epsilon}} \left(c^{-\frac{1}{\epsilon}} b^{-\frac{1}{\epsilon^2}} \right)^{(1+\epsilon)^l} \\ &= c^{-\frac{1}{\epsilon}} b^{-\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{l}{\epsilon}} = \theta b^{-\frac{l}{\epsilon}}. \end{aligned}$$

E portanto $y_l \to 0$ quando $l \to \infty$. ■

O seguinte lema, apesar de estar enunciado em [5] é provado e generalizado apenas em [7], página 68.

Lema 3.2. *Sejam* $\omega_1, \ldots \omega_M$ *e* $\overline{\omega_1}, \ldots, \overline{\omega_N}$ *funções não decrescentes em um intervalo* $(0, R_0]$. *Suponha que existam constantes* $\delta_0 > 0$, $0 < \sigma < 1$ *e* $0 < \eta < 1$ *tais que para cada* $0 < R < R_0$ *podemos encontrar* $r = r(R) \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *tal que*

$$\delta_0 \max_{1 \leq i \leq M} \omega_i(R) \leq \overline{\omega_r}(R) \quad e \tag{3.7}$$

$$\overline{\omega_r}(\eta R) \leq \sigma \overline{\omega_r}(R). \tag{3.8}$$

Então existem constantes positivas $C = C(N, M, \delta_0, \sigma, \eta)$ *e* $\beta = \beta(N, M, \delta_0, \sigma, \eta)$ *tais que para cada* $i \in \{1, 2, \ldots, M\}$

$$\omega_i(R) \leq C \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta} \max_{1 \leq i \leq N} \overline{\omega_i}(R_0) \quad (0 < R < R_0)$$

Demonstração: Seja $R_1 < R_0$. Das hipóteses do lema, obtemos $r_1 = r_1(R_1) \in \{1, 2, \ldots, N\}$ tal que valham (3.7) e (3.8). Portanto,

$$\overline{\omega_{r_1}}(\eta R_1) \leq \sigma \overline{\omega_{r_1}}(R_1)$$

Aplicando as hipóteses do lema para $R = \eta R_1$ obtemos que existe $r_2 \in \{1, 2, \ldots, N\}$ tal que

$$\overline{\omega_{r_2}}(\eta^2 R_1) \leq \sigma \overline{\omega_{r_2}}(\eta R_1).$$

Daí, obtemos uma sequência $(r_j) = (r_1, r_2, \ldots)$ formada por números naturais entre 1 e N tais que $\overline{\omega_{r_j}}(\eta^{j-1} R_1)$ satisfaça (3.7) para qualquer $j \in \mathbb{N}$ e

$$\overline{\omega_{r_j}}(\eta^j R_1) \leq \sigma \overline{\omega_{r_j}}(\eta^{j-1} R_1).$$

Fixemos $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $N_2 \geq 2N$. No conjunto de números $r_1, r_2, \ldots, r_{N_2-1}$ existem pelo menos $\lceil \frac{N_2}{N} \rceil$ que coincidem com o mesmo valor l. Denotemos esses por $r_{p_1} = r_{p_2} = \ldots = r_{p_m} = l$, onde $m \geq \lceil \frac{N_2}{N} \rceil$. Considerando apenas aqueles w_{r_j} tais que $j = p_k$ para algum $k \in \{1, \ldots, m\}$, concluímos que

$$\overline{\omega_{r_{p_k}}}(\eta^{p_k} R_1) \leq \sigma \overline{\omega_{r_{p_k}}}(\eta^{p_k - 1} R_1).$$

ou seja,

$$\overline{\omega_l}(\eta^{p_k} R_1) \leq \sigma \overline{\omega_l}(\eta^{p_k - 1} R_1).$$

Como as funções $\overline{w_l}$ são não decrescentes e $p_k - 1 \geq p_{k-1}$, temos que

$$\overline{\omega_l}(\eta^{p_k} R_1) \leq \sigma \overline{\omega_l}(\eta^{p_{k-1}} R_1).$$

Introduzindo a notação

$$\overline{v_k} \equiv \overline{\omega_l}(\eta^{p_k} R_1),$$

temos que

$$\overline{v_k} \leq \sigma \overline{v_{k-1}}.$$

Multiplicando os dois lados da equação acima por $\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N k}$, onde α é uma constante a ser determinada, obtemos

$$\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N k} \overline{v_k} \leq \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N k} \sigma \overline{v_{k-1}}.$$

Defina agora $y_k = \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N k} \overline{v_k}$. Então temos que

$$y_k \leq \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N k} \sigma \overline{v_{k-1}} = \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N (k-1+1)} \sigma \overline{v_{k-1}} = \sigma \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N} y_{k-1}. \tag{3.9}$$

Vamos escolher α de modo que

$$\sigma \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N} \leq 1,$$

ou seja,

$$\alpha \leq \frac{1}{N}\frac{\ln \sigma}{\ln \eta}.$$

Daí, tomando

$$\alpha = \frac{1}{N}\frac{\ln \sigma}{\ln \eta} > 0$$

concluímos, de acordo com (3.9) que

$$y_k \leq y_{k-1}$$

e consequentemente

$$y_k \leq y_1 = \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N} \overline{v_1} \leq \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N} \overline{\omega_l}(R_0).$$

Definindo

$$\omega_0 = \max_{i=1,\ldots N} \overline{\omega_i}(R_0),$$

temos que

$$y_k \leq \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N} \omega_0.$$

E portanto

$$\overline{v_k} \leq \left(\frac{1}{\eta}\right)^{-\alpha N k} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N} \omega_0.$$

Seja

$$C = \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N} \omega_0.$$

Então

$$\overline{v_k} \leq C \left(\frac{1}{\eta}\right)^{-\alpha N k}.$$

Mas por hipótese, cada $\overline{v_k}$ satisfaz a equação (3.7). Portanto,

$$\omega_i(\eta^{p_k} R_1) \leq \frac{\overline{\omega_l}(\eta^{p_k} R_1)}{\delta_0} \leq \frac{C}{\delta_0} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{-\alpha N k}.$$

Mas por construção $N_2 > p_m \geq \left\lceil \frac{N_2}{N} \right\rceil$, e ω_i é uma função não decrescente. Daí, usando a inequação acima, obtemos que

$$\omega_i(\eta^{N_2} R_1) \leq \omega_i(\eta^{p_m} R_1) \leq \frac{C}{\delta_0} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{-\alpha N p_m} \leq \frac{C}{\delta_0} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{-\alpha N \left\lceil \frac{N_2}{N} \right\rceil}.$$

Daí, como $\lceil \frac{N_2}{N} \rceil > \frac{N_2}{N} - 1$, obtemos que

$$\omega_i(\eta^{N_2} R_1) \leq \frac{C}{\delta_0} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{-\alpha N\left(\frac{N_2}{N}-1\right)} = \frac{C}{\delta_0} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{-\alpha N_2}.$$

E portanto,

$$\omega_i(\eta^{N_2} R_1) \leq \frac{C}{\delta_0} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N} \left(\frac{\eta^{N_2} R_1}{R_1}\right)^{\alpha}.$$

Esta inequação é válida para quaisquer $1 \leq i \leq M$ e para qualquer $N_2 \geq 2N_1$. Resta mostrar o resultado para valores de R que não sejam da forma $\eta^{N_2} R_1$. Vamos dividir em dois casos.

Primeiro, para $R \leq R_1 \eta^{2N_1}$, existe $k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2N_1$ tal que

$$\eta^{k+1} R_1 \leq R \leq \eta^k R_1,$$

ou seja,

$$\eta^{k+1} \leq \frac{R}{R_1} \leq \eta^k.$$

Daí,

$$\omega_i(R) \leq \omega_i(\eta^k R_1) \leq \frac{C}{\delta_0} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N} \left(\frac{\eta^k R_1}{R_1}\right)^{\alpha} = \frac{C}{\delta_0} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N} \eta^{\alpha k}.$$

Mas note que

$$\eta^{\alpha k} \leq \frac{R^\alpha}{\eta^\alpha R_1^\alpha}$$

pois, da construção de k temos que

$$\left(\eta^{k+1}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{R}{R_1}\right)^{\alpha}.$$

Portanto,

$$\omega_i(R) \leq \frac{C}{\delta_0} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N} \frac{R^\alpha}{\eta^\alpha R_1^\alpha} = \frac{C}{\delta_0} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\alpha N+1} \left(\frac{R}{R_1}\right)^{\alpha}. \tag{3.10}$$

Agora suponhamos que $R \geq R_1 \eta^{2N}$. Nesse caso, existe $r \in \{1, 2, \ldots N\}$ tal que

$$\omega_i(R) \leq \frac{\overline{\omega_r}(R)}{\delta_0} \leq \frac{\omega_0}{\delta_0}.$$

Note que nesse caso vale que

$$\left(\frac{R}{R_1}\right) \left(\frac{1}{\eta}\right)^{2N} \geq 1,$$

e portanto

$$\left(\left(\frac{R}{R_0}\right)\left(\frac{1}{\eta}\right)^{2N}\right)^{\alpha} \geq 1$$

e daí segue que

$$\omega_i(R) \leq \frac{\omega_0}{\delta_0}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{2N\alpha}\left(\frac{R}{R_1}\right)^{\alpha} \tag{3.11}$$

para cada $R_1\eta^{2N} < R \leq R_1 < R_0$. Juntando as inequações (3.10) e (3.11) obtemos que existe $C = C(\delta_0, \sigma, \eta, N, M)$ tal que para todo $R \leq R_1 < R_0$ vale que

$$\omega_i(R) \leq C\omega_0\left(\frac{R}{R_1}\right)^{\alpha}. \tag{3.12}$$

Daí, fixado $R < R_0$, podemos usar a inequação anterior tomando $R_1 = R_0^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}$. Note que $R < R_1 < R_0$. Assim, obtemos

$$\omega_i(R) \leq C\omega_0\left(\frac{R}{R_0^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}}\right)^{\alpha} = C\omega_0\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 3.3. *Sejam $0 < \theta, \mu < 1$ números positivos, e $B(1)$ a bola de centro na origem e raio 1, de volume ω_n. Analogamente, seja $B(\theta)$ a bola de centro na origem e raio θ. Seja $u \in W^{1,2}(B(1))$ tal que*

$$|\{x \in B(\theta) | u = 0\}| > \frac{\mu\omega_n}{2}. \tag{3.13}$$

Então existe $C = C(\mu, \theta, n) > 0$ tal que

$$\int_{B(\theta)} u^2\,dx \leq C\int_{B(\theta)} |Du|^2\,dx.$$

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que o resultado do teorema seja falso. Então, existe uma sequência de funções $u_k \in W^{1,2}(B_1)$ satisfazendo (3.13) e tais que

$$\int_{B(\theta)} u_k^2\,dx > k\int_{B(\theta)} |Du_k|^2\,dx.$$

Defina $v_k = \frac{u_k}{||u_k||_{L^2(B(\theta))}}$, que continua satisfazendo (3.13). Dividindo ambos os lados da inequação anterior por $||u_k||^2_{L^2(B(\theta))}$, concluímos que

$$1 > k\int_{B(\theta)} |Dv_k|^2\,dx.$$

Portanto,

$$\int_{B(\theta)} |Dv_k|^2 \, dx < \frac{1}{k}.$$

Portanto, $\{v_k\}$ forma uma sequência limitada com respeito à norma de Sobolev de $B(\theta)$. Daí, o teorema de Rellich-Kondrachov garante a existência de uma subsequência, que vamos continuar denotando por v_k, e de $v \in L^2(B(\theta))$ tais que

$$v_k \to v \quad \text{em} \quad L^2(B(\theta)).$$

Além disso, como $W^{1,2}(B(\theta))$ é de Hilbert, temos que toda sequência limitada possui subsequência fracamente convergente. Portanto, da unicidade do limite fraco, concluímos que $v \in W^{1,2}(B(\theta))$ e

$$v_k \to v \quad \text{em} \quad L^2(B(\theta)) \quad \text{e} \quad Dv_k \rightharpoonup Dv \quad \text{em} \quad L^2(B(\theta)).$$

Mas como $||Dv_k||_{L^2(B(\theta))} \to 0$, temos que $Dv = 0$ q.t.p, e daí v é constante. De fato, para cada $\phi \in C_0^\infty(B(\theta))$, vale

$$\begin{aligned}\left| \int_{B(\theta)} D\phi v \, dx \right| &= \left| \lim_{k\to\infty} \int_{B(\theta)} D\phi v_k \, dx \right| = \\ &= \left| \lim_{k\to\infty} \int_{B(\theta)} \phi D v_k \, dx \right| \leq \lim_{k\to\infty} \int_{B(\theta)} |\phi D v_k| \, dx.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder,

$$\left| \int_{B(\theta)} D\phi v \, dx \right| \leq \lim_{k\to\infty} ||\phi||_{L^2(B(\theta))} ||Dv_k||_{L^2(B(\theta))} = 0.$$

Portanto,

$$\int_{B(\theta)} D\phi v \, dx = 0 = \int_{B(\theta)} \phi 0 \, dx \quad \text{para toda} \quad \phi \in C_0^\infty(B(\theta)).$$

Logo, $Dv = 0$ q.t.p e daí $v = c$ é constante q.t.p. Mas como $v_k \to v$ em $L^2(B(\theta))$ e $||v_k||_{L^2(B(\theta))} = 1$, temos que $||v||_{L^2(B(\theta))} = 1$ e portanto $c \neq 0$. De fato, por um lado, pela desigualdade triangular,

$$||v||_{L^2(B(\theta))} \leq ||v - v_k||_{L^2(B(\theta))} + 1.$$

Fazendo $k \to \infty$ concluímos que

$$||v||_{L^2(B(\theta))} \leq 1.$$

Por outro lado,

$$1 = ||v_k||_{L^2(B(\theta))} \leq ||v - v_k||_{L^2(B(\theta))} + ||v||_{L^2(B(\theta))}.$$

Fazendo $k \to \infty$ concluímos que

$$1 \leq ||v||_{L^2(B(\theta))}.$$

E daí fica provado que

$$||v||_{L^2(B(\theta))} = 1$$

e que $c \neq 0$. Mas convergência em L^2 implica em convergência em medida. Daí, dado $0 < \epsilon < \frac{\mu\omega_n}{2}$, deve existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\{x \in B(\theta) : |v_k - v| > \frac{c}{2}\}\right| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad k \geq k_0.$$

Mas como $\{x \in B(\theta) | v_k = 0\} \subset \{x \in B(\theta) : |v_k - v| > \frac{c}{2}\}$, temos que

$$\epsilon < \frac{\mu\omega_n}{2} < |\{x \in B(\theta) | v_k = 0\}| \leq \left|\{x \in B(\theta) : |v_k - v| > \frac{c}{2}\}\right| < \epsilon,$$

o que é absurdo. ■

Corolário 3.4. *Sejam $0 < \theta, \mu < 1$ números positivos, e $B(R)$ a bola de centro na origem e raio R, de volume $\omega_n R^n$. Seja $u \in W^{1,2}(B(R))$ tal que*

$$|\{x \in B(\theta R) | u = 0\}| > \frac{\mu\omega_n R^n}{2}.$$

Então existe $C = C(\mu, \theta, n) > 0$ tal que

$$\int_{B(\theta R)} u^2 \, dx \leq C R^2 \int_{B(\theta R)} |Du|^2 \, dx.$$

Demonstração: Defina $v : B(1) \to \mathbb{R}$ por $v(x) = u(Rx)$. Vamos aplicar o lema anterior para v. Tomando $y = Rx$ e usando o teorema de mudança de variáveis, obtemos que

$$|\{x \in B(\theta) | v = 0\}| = \int_{\{x \in B(\theta) | v(x) = 0\}} 1 \, dx = \int_{\{y \in B(\theta R) | u(y) = 0\}} \frac{1}{R^n} \, dy > \frac{\mu\omega_n}{2}.$$

Daí, pelo teorema anterior,

$$\int_{B(\theta)} v^2 \, dx \leq C \int_{B(\theta)} |Dv|^2 \, dx.$$

Mas, pelo teorema de mudança de variáveis,

$$\int_{B(\theta)} v^2\,dx = \int_{B(\theta)} (u(Rx))^2\,dx = \int_{B(\theta R)} \frac{u(y)^2}{R^n}\,dy \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}\int_{B(\theta)} |Dv|^2\,dx &= \int_{B(\theta)} |D(u(Rx))|^2\,dx \\ = \int_{B(\theta)} |RD(u(Rx))|^2\,dx &= R^2 \int_{B(\theta R)} \frac{1}{R^n} |D(u(y))|^2\,dy.\end{aligned}$$

Daí, concluímos que

$$\int_{B(\theta R)} \frac{u(y)^2}{R^n}\,dy = \int_{B(\theta)} v^2\,dx \leq C \int_{B(\theta)} |Dv|^2\,dx = CR^2 \int_{B(\theta R)} \frac{1}{R^n} |D(u(y))|^2\,dy.$$

Logo,

$$\int_{B_{\theta R}} u(y)^2\,dy \leq CR^2 \int_{B_{\theta R}} |D(u(y))|^2\,dy,$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 3.5. *Suponha que u seja solução fraca e que v seja uma supersolução fraca da equação*

$$div(|Du|^p Du) + \epsilon \Delta u = 0 \quad em \quad \Omega$$

tais que $v \geq u$ em $\partial\Omega$. Se u e v forem contínuas em Ω, então $v \geq u$ em Ω.

Demonstração: Sejam $u, v \in W^{1,p+2}(\Omega)$ funções que satisfaçam as hipóteses do teorema. Além disso, seja $\delta > 0$ um número real qualquer. Seja D_δ o conjunto

$$D_\delta = \{x \in \Omega : u(x) > v(x) + \delta\}.$$

Como temos que $v \geq u$ em $\partial\Omega$, temos que $D_\delta \subset\subset \Omega$. Daí a função $\eta = (u - v - \delta)^+$ pertence ao conjunto $W_0^{1,p+2}(\Omega)$.

Como u é solução e v é supersolução, temos que

$$\int_\Omega (|Du|^p + \epsilon) \langle Du, D\eta \rangle\,dx = 0$$

e

$$\int_\Omega (|Dv|^p + \epsilon) \langle Dv, D\eta \rangle\,dx \geq 0.$$

Subtraindo essas equações obtemos

$$\int_\Omega \left(|Du|^p + \epsilon\right) \langle Du, D\eta\rangle \, dx - \int_\Omega \left(|Dv|^p + \epsilon\right) \langle Dv, D\eta\rangle \, dx \leq 0.$$

Mas como

$$D\eta = \begin{cases} Du - Dv, \quad \text{em} \quad D_\delta, \\ 0 \quad \text{em} \quad \Omega - D_\delta, \end{cases}$$

ficamos com

$$\int_{D_\delta} \left(|Du|^p + \epsilon\right) \langle Du, Du - Dv\rangle \, dx - \int_{D_\delta} \left(|Dv|^p + \epsilon\right) \langle Dv, Du - Dv\rangle \, dx \leq 0,$$

que se reescreve como

$$\int_{D_\delta} \langle |Du|^p Du - |Dv|^p Dv, Du - Dv\rangle \, dx + \epsilon \int_{D_\delta} \langle Du - Dv, Du - Dv\rangle \, dx \leq 0. \tag{3.14}$$

No entanto, o integrando acima à esquerda é sempre não negativo pois, pelas desigualdades de Schwarz e de Cauchy, temos que

$$\begin{aligned}
&\langle |Du|^p Du - |Dv|^p Dv, Du - Dv\rangle \geq |Du|^p |Du|^2 - (|Du|^p + |Dv|^p)|Du||Dv| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + |Dv|^p |Dv|^2 \\
&\geq |Du|^p|Du|^2 - (|Du|^p + |Dv|^p)\left(\frac{|Du|^2 + |Dv|^2}{2}\right) + |Dv|^p|Dv|^2 \\
&= \left(\frac{|Du|^p - |Dv|^p}{2}\right)|Du|^2 + \left(\frac{|Dv|^p - |Du|^p}{2}\right)|Dv|^2 \\
&= \left(\frac{|Du|^p - |Dv|^p}{2}\right)\left(|Du|^2 - |Dv|^2\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, as contas acima e a equação (3.14) implicam que

$$\int_{D_\delta} \langle |Du|^p Du - |Dv|^p Dv, Du - Dv\rangle + \epsilon ||Du - Dv||^2 \, dx = 0 \quad \text{em} \quad D_\delta.$$

E portanto $Du = Dv$ em D_δ. Logo, $D\eta \equiv 0$ em Ω. Segue daí que $\eta \equiv c$ é uma constante, e portanto

$$u(x) = v(x) + C \quad \text{em} \quad D_\delta.$$

Como em ∂D_δ temos que $u - v = \delta$, então $C = \delta$ e portanto

$$u(x) = v(x) + \delta \quad \text{em} \quad D_\delta.$$

Além disso, da construção de D_δ, temos que

$$u(x) \leq v(x) + \delta \quad \text{em} \quad \Omega - D_\delta.$$

Juntando as duas últimas equações, obtemos que

$$u(x) \leq v(x) + \delta \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Como δ é arbitrário,

$$u(x) \leq v(x) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

como queríamos provar. ■

O seguinte lema se encontra provado em [3], mas devido à sua importância nesse trabalho, daremos a demonstração.

Lema 3.6. *Sejam $1 \leq p < \infty$, $f : \Omega \to \mathbb{R} \in L^p_{loc}(\Omega)$ e f^ϵ sua molificação. Se $V \subset\subset \Omega$ então,*

(i) $||f^\epsilon||_{L^p(V)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)}$ *para ϵ suficientemente pequeno.*

(ii) $f^\epsilon \to f$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$.

Observação 3.7. *Observamos também que se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então*

$$D^\alpha u^\epsilon = \rho_\epsilon * D^\alpha u \quad em \quad \Omega_\epsilon.$$

Isso, assim como este lema, está demonstrado em [3].

Demonstração: Seja W um aberto de $\mathbb{R}^n$ tal que $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$. Note que para cada $x \in V$,

$$|f^\epsilon(x)| = \left| \int_{B(x,\epsilon)} \rho_\epsilon(x-y) f(y)\, dy \right| \leq \int_{B(x,\epsilon)} \rho_\epsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \rho_\epsilon^{\frac{1}{p}}(x-y) |f(y)|\, dy.$$

Usando a desigualdade de Hölder, concluímos que

$$|f^\epsilon(x)| \leq \left(\int_{B(x,\epsilon)} \rho_\epsilon(x-y)\, dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(x,\epsilon)} \rho_\epsilon(x-y) |f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $x \in V$. Como a integral $\int_{B(x,\epsilon)} \rho_\epsilon(x-y)\,dy = 1$, temos que

$$|f^\epsilon(x)| \leq \left(\int_{B(x,\epsilon)} \rho_\epsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Elevando ambos os lados da inequação acima na potência p e integrando em V, concluímos que

$$\int_V |f^\epsilon(x)|^p\,dx \leq \int_V \left(\int_{B(x,\epsilon)} \rho_\epsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy \right) dx.$$

Mas para ϵ suficientemente pequeno, $B(x,\epsilon) \subset W$ para todo $x \in V$. Logo,

$$\int_V |f^\epsilon(x)|^p\,dx \leq \int_V \left(\int_W \rho_\epsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy \right) dx.$$

Trocando a ordem das integrais, concluímos que

$$\int_V |f^\epsilon(x)|^p\,dx \leq \int_W \int_V \rho_\epsilon(x-y)|f(y)|^p\,dx\,dy.$$

E portanto,

$$\int_V |f^\epsilon(x)|^p\,dx \leq \int_W |f(y)|^p \left(\int_V \rho_\epsilon(x-y)\,dx \right) dy.$$

Logo,

$$\int_V |f^\epsilon(x)|^p\,dx \leq \int_W |f(y)|^p\,dy.$$

e portanto,

$$||f^\epsilon||_{L^p(V)} \leq ||f||_{L^p(W)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)}, \tag{3.15}$$

como queríamos provar. Para mostrar o segundo item, sejam $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$ como no item anterior e $\delta > 0$. Como $f \in L^p(W)$, existe uma função contínua $g \in C(W)$ tal que

$$||f-g||_{L^p(W)} < \delta.$$

Além disso, note que para $x \in V$ e ϵ suficientemente pequeno,

$$(f-g)^\epsilon(x) = \textstyle\int_W \eta_\epsilon(x-y)(f-g)(y)\,dy = f^\epsilon(x) - g^\epsilon(x).$$

Ou seja,

$$(f-g)^\epsilon = f^\epsilon - g^\epsilon \quad \text{em} \quad V.$$

Daí, de (3.15), temos que

$$||f^\epsilon - g^\epsilon||_{L^p(V)} = ||(f-g)^\epsilon||_{L^p(V)} \leq ||f-g||_{L^p(W)} < \delta.$$

Daí, pela desigualdade triangular, concluímos que

$$||f^\epsilon - f||_{L^p(V)} \leq ||f^\epsilon - g^\epsilon||_{L^p(V)} + ||g^\epsilon - g||_{L^p(V)} + ||f-g||_{L^p(V)}.$$

E portanto,

$$||f^\epsilon - f||_{L^p(V)} \leq 2\delta + ||g^\epsilon - g||_{L^p(V)}.$$

Mas como $g_\epsilon \to g$ uniformemente em V(esta propriedade foi citada no capítulo anterior), temos que

$$||g^\epsilon - g||_{L^p(V)} < \delta$$

para ϵ suficientemente pequeno. Daí,

$$||f^\epsilon - f||_{L^p(V)} \leq 3\delta.$$

Como $\delta > 0$ é qualquer, concluímos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} ||f^\epsilon - f||_{L^p(V)} = 0,$$

como queríamos provar. ■

Agora provamos uma desigualdade de Poincaré. No lema abaixo $B(R)$ indica a bola centrada na origem e de raio R.

Lema 3.8. *Seja A um número positivo e suponha que $u \in W^{1,1}(B(R))$. Existe uma constante $C = C(n,p,A)$ tal que*

$$\left(⨍_{B(R)} |u(y)|^{1^*} \, dy \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C \left(⨍_{B(R)} |u(y)| \, dy + ⨍_{B(R)} |Du(y)| \, dy \right) \tag{3.16}$$

para qualquer bola de raio $R \leq A$, onde $1^* = \frac{n}{n-1}$.

Demonstração: Esse lema é uma aplicação da desigualdade de Sobolev. Seja $v : B(1) \to \mathbb{R}$ dada por $v(x) = u(Rx)$. Aplicando a desigualdade de Sobolev para v, temos que existe uma constante $C = C(n,p,B(1)) = C(n,p)$ tal que

$$||v||_{L^{1^*}(B(1))} \leq C||v||_{W^{1,1}(B(1))}. \tag{3.17}$$

Mas usando o teorema de mudança de variáveis temos que

$$
\begin{aligned}
||v||_{L^{1^*}(B(1))} &= \left(\int_{B(1)} |v|^{1^*} \, dx \right)^{\frac{1}{1^*}} = \left(\int_{B(1)} |u(Rx)|^{1^*} \, dx \right)^{\frac{1}{1^*}} = \\
&= \left(\int_{B(R)} \frac{1}{R^n} |u(y)|^{1^*} \, dy \right)^{\frac{1}{1^*}} = \frac{1}{R^{n-1}} \left(\int_{B(R)} |u(y)|^{1^*} \, dy \right)^{\frac{1}{1^*}}.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
||v||_{L^1(B(1))} = \int_{B(1)} |v| \, dx = \int_{B(1)} |u(Rx)| \, dx = \frac{1}{R^n} \int_{B(R)} |u(y)| \, dy.
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
||Dv||_{L^1(B(1))} &= \int_{B(1)} |Dv| \, dx = \int_{B(1)} |Du(Rx)| \, dx = \int_{B(1)} R|Du_{Rx}(Rx)| \, dx \\
&= \int_{B(R)} \frac{1}{R^{n-1}} |Du(y)| \, dy = \frac{1}{R^{n-1}} \int_{B(R)} |Du(y)| \, dy.
\end{aligned}
$$

De modo que, substituindo em (3.17), obtemos que

$$
\frac{1}{R^{n-1}} \left(\int_{B(R)} |u(y)|^{1^*} \, dy \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C \left(\frac{1}{R^n} \int_{B(R)} |u(y)| \, dy + \frac{1}{R^{n-1}} \int_{B(R)} |Du(y)| \, dy \right).
$$

Ou seja,

$$
\left(⨍_{B(R)} |u(y)|^{1^*} \, dy \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C \left(⨍_{B(R)} |u(y)| \, dy + R ⨍_{B(R)} |Du(y)| \, dy \right).
$$

Mas como $R \leq A$, concluímos que

$$
\left(⨍_{B(R)} |u(y)|^{1^*} \, dy \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C \left(⨍_{B(R)} |u(y)| \, dy + ⨍_{B(R)} |Du(y)| \, dy \right),
$$

onde $C = C(n, p, A)$, como queríamos provar. ∎

Capítulo 4

Estimativas Hölder a priori

Ao longo deste capítulo, u é uma solução fraca suave de

$$\operatorname{div}(|Du|^p Du) = 0 \tag{4.1}$$

em alguma bola $B(R_0)$, que a partir de agora está fixada. Seja $K > 0$ uma constante positiva tal que

$$\max_{B(R_0)} |Du| \leq K. \tag{4.2}$$

O objetivo deste capítulo é mostrar que Du é uma função Hölder contínua na bola $B(R_0/2)$. A dificuldade se encontra em obter estimativas uniformes para Du em torno de pontos onde $|Du|$ é pequeno. Na seção seguinte provaremos um lema chave, o qual aplicaremos na seção posterior deste capítulo para obtermos tais estimativas. Na última parte do capítulo estendemos esse resultado para pontos quaisquer da bola $B(R_0/2)$. Mais precisamente, provamos o seguinte resultado:

Existem constantes $C_5 = C_5(R_0, p, n, K)$ e $\tau = \tau(p, n) > 0$ tais que

$$[Du]_{C^\tau(B(R_0/2))} \leq C_5.$$

Inicialmente, fixamos a seguinte notação, que será usada ao longo de todo o capítulo. Defina para $0 < R < R_0$

$$M(R) \equiv \max_{B(R)} |Du|$$

e

$$M_k^{\pm}(R) \equiv \max_{B(R)} \pm u_{x_k}, \quad \text{para} \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Então, fixado $0 < R < R_0$ deve existir algum índice i tal que

$$M_i^+(R) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M(R) \tag{4.3}$$

ou

$$M_i^-(R) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M(R). \tag{4.4}$$

Portanto, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$M_1^+(R) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M(R) > 0. \tag{4.5}$$

4.1 Dois lemas importantes

Conforme dito anteriormente, vamos estudar a regularidade de Du. O lema a seguir é importante pois garante que Du satisfaz certa E.D.P, para a qual vamos aplicar(na próxima seção) o método de iterações de Moser, enunciado nas preliminares.

Lema 4.1. *Seja u uma solução fraca e de classe C^1 da E.D.P dada em (4.1) em $B(R_0)$. Então para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ temos que a função $v = u_{x_k}$ é solução fraca da equação*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(|Du|^p a_{ij} v_{x_i}\right)_{x_j} = 0 \quad em \quad B(R_0), \tag{4.6}$$

onde os coeficientes a_{ij} dependem apenas da derivada de u e são dados por

$$a_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} + p\frac{u_{x_i} u_{x_j}}{|Du|^2}, & se \quad Du \neq 0, \\ \delta_{ij}, & se \quad Du = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Demonstração: Temos que

$$\int_{\Omega} |Du|^p \langle Du, D\eta \rangle \, dx = 0$$

para cada função $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$. Escrevendo $\Omega_1 = \{x \in \Omega : Du(x) = 0\}$ e $\Omega_2 = \{x \in \Omega : Du(x) \neq 0\}$, temos que

$$\int_{\Omega_2} |Du|^p \langle Du, D\eta\rangle \, dx = 0. \tag{4.8}$$

Queremos provar que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} |Du|^p a_{ij} v_{x_i} \eta_{x_j} \, dx = 0.$$

Ou seja,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega_2} |Du|^p a_{ij} v_{x_i} \eta_{x_j} \, dx = 0.$$

Como η é uma função de classe C^∞ de suporte compacto qualquer, podemos fixar $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e trocar η por η_{x_k} em (4.8), obtendo que

$$\int_{\Omega_2} |Du|^p \langle Du, D\eta_{x_k}\rangle \, dx = 0,$$

que se escreve como

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega_2} |Du|^p u_{x_j} \eta_{x_j x_k} \, dx = 0.$$

Integrando por partes, temos que

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega_2} \left(|Du|^p u_{x_j}\right)_{x_k} \eta_{x_j} \, dx = 0.$$

Ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega_2} \left(|Du|^p u_{x_j x_k} + p \sum_{i=1}^{n} |Du|^{p-2} u_{x_j} u_{x_i} u_{x_i x_k} \right) \eta_{x_j} \, dx = 0,$$

e portanto

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\delta_{ij} |Du|^p u_{x_i x_k} + p|Du|^{p-2} u_{x_j} u_{x_i} u_{x_i x_k} \right) \eta_{x_j} \, dx = 0,$$

e portanto $v = u_{x_k}$ satisfaz a equação

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega_2} \left(\delta_{ij} |Du|^p + p|Du|^{p-2} u_{x_j} u_{x_i} \right) v_{x_i} \eta_{x_j} \, dx = 0.$$

Pondo $|Du|^p$ em evidência, concluímos que v é solução de

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega_2} |Du|^p a_{ij} v_{x_i} \eta_{x_j}\, dx = 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

Note que a matriz a_{ij} satisfaz a condição de elipticidade: Se $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} + p\frac{u_{x_i}u_{x_j}}{|Du|^2}\right)\xi_i\xi_j = |\xi|^2 + p\left(\frac{\langle Du, \xi\rangle}{|Du|}\right)^2,$$

e portanto

$$|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq (1+p)|\xi|^2. \tag{4.9}$$

Também observe que a matriz a_{ij} é limitada:

$$|a_{ij}| \leq |\delta_{ij} + p\frac{u_{x_i u_{x_j}}}{|Du|^2}| \leq 1 + p\frac{|Du|^2}{|Du|^2} = 1 + p. \tag{4.10}$$

Agora estamos em condições de provar o seguinte lema, que é o objetivo da seção. Ele garante que se u_{x_1} fica em média próxima de seu máximo numa bola de raio R, então u_{x_1} deve ser grande ao longo da bola de raio $R/2$. Isso nos dá um controle sobre a oscilação de Du.

Lema 4.2. *Seja* $0 < R < R_0$ *e suponha que* $M_1^+(R)$ *satisfaça (4.5). Então existe uma constante* $\epsilon_0 = \epsilon_0(p, n) > 0$ *tal que se*

$$⨍_{B(R)} \left(M_1^+(R) - u_{x_1}\right)^{+^2} \leq \epsilon_0 M_1^+(R)^2$$

então

$$\min_{B(\frac{R}{2})} u_{x_1} \geq \frac{M_1^+(R)}{2}.$$

Demonstração: Seja $M_1 = M_1^+(R)$ e defina $v = M_1 - u_{x_1}$. Conforme o lema 4.1, temos que v é solução de (4.6). Seja ζ uma função de corte suave que se anula fora de $B(R)$ e seja

$$0 \leq k \leq \frac{M_1}{2} \tag{4.11}$$

uma constante a ser determinada. Vamos dividir a demonstração em vários passos.

Passo 1: Inicialmente, vamos mostrar que existe uma constante $C = C(n,p)$ tal que

$$\int_{B(R)\bigcap\{k<v<k+\frac{M_1}{4}\}} \zeta^2 |Dv|^2 dx \leq C \int_{B(R)} |D\zeta|^2 \left((v-k)^+\right)^2 dx.$$

Para isso, multiplicamos a equação(4.6) pela função teste adequada $\zeta^2(v-k)^+$ e integramos, concluindo que

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R_0)} \zeta^2 (v-k)^+ \left(a_{ij}|Du|^p v_{x_i}\right)_{x_j} \, dx = 0.$$

Usando que $\zeta \equiv 0$ fora de $B(R)$ e integrando por partes, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)} \left(\zeta^2 (v-k)^+\right)_{x_j} a_{ij}|Du|^p v_{x_i} \, dx = 0.$$

Logo,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)} \zeta^2 (v-k)^+_{x_j} a_{ij}|Du|^p v_{x_i} \, dx = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)} \zeta \zeta_{x_j} (v-k)^+ a_{ij}|Du|^p v_{x_i} \, dx. \tag{4.12}$$

Vamos estimar por baixo o lado esquerdo da equação acima. Lembrando que

$$(v-k)^+_{x_j} = \begin{cases} v_{x_j}, & \text{q.t.p se } v > k, \\ 0, & \text{q.t.p se } v \leq k \end{cases}$$

e usando que a matriz a_{ij} é uniformemente elíptica, conforme (4.9), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)} \zeta^2 (v-k)^+_{x_j} a_{ij}|Du|^p v_{x_i} \, dx &= \int_{B(R)\bigcap\{v>k\}} \zeta^2 |Du|^p \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \, dx \\ &\geq \int_{B(R)\bigcap\{v>k\}} \zeta^2 |Du|^p |Dv|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)} \zeta^2 (v-k)^+_{x_j} a_{ij}|Du|^p v_{x_i} \, dx \geq \int_{B(R)\bigcap\{v>k\}} \zeta^2 |Du|^p |Dv|^2 \, dx. \tag{4.13}$$

Agora vamos estimar por cima o lado direito de (4.12). Usando a desigualdade de Cauchy com ϵ temos que para cada $\epsilon > 0$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)\bigcap\{v>k\}} \zeta |D\zeta| (v-k)^+ |a_{ij}| |Du|^p |Dv| \, dx \leq$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)\bigcap\{v>k\}} \left(\frac{1}{4\epsilon} \left(|D\zeta| (v-k)^+ \right)^2 + \epsilon \left(|Dv| \zeta \right)^2 \right) |a_{ij}| |Du|^p \, dx.$$

Mas por (4.10), a matriz (a_{ij}) é limitada por $1+p$. Portanto,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)\cap\{v>k\}} \zeta |D\zeta| (v-k)^+ |a_{ij}| |Du|^p |Dv| \, dx \leq$$
$$\frac{(1+p)}{4\epsilon} \int_{B(R)\cap\{v>k\}} |D\zeta|^2 \left((v-k)^+ \right)^2 |Du|^p \, dx +$$
$$(1+p)\epsilon \int_{B(R)\cap\{v>k\}} \zeta^2 |Dv|^2 |Du|^p \, dx.$$

Assim, substituindo esta desigualdade e (4.13) em (4.12), concluímos que

$$(1-(1+p)\epsilon) \int_{B(R)\bigcap\{v>k\}} \zeta^2 |Dv|^2 |Du|^p \, dx \leq$$
$$\frac{1+p}{4\epsilon} \int_{B(R)\bigcap\{v>k\}} |D\zeta|^2 \left((v-k)^+ \right)^2 |Du|^p \, dx.$$

Assim, como $\epsilon > 0$ é arbritrário, podemos tomá-lo de modo que $1-(p+1)\epsilon > 0$. Tomando $\epsilon = \frac{1}{2(p+1)}$, concluímos que

$$\int_{B(R)\bigcap\{v>k\}} \zeta^2 |Dv|^2 |Du|^p \, dx \leq (1+p)^2 \int_{B(R)} |D\zeta|^2 \left((v-k)^+ \right)^2 |Du|^p \, dx. \tag{4.14}$$

Mas então

$$\int_{B(R)\bigcap\{v>k\}} \zeta^2 |Dv|^2 |Du|^p \, dx \leq (1+p)^2 M(R)^p \int_{B(R)} |D\zeta|^2 \left((v-k)^+ \right)^2 \, dx. \tag{4.15}$$

Note que

$$\int_{B(R)\bigcap\{k<v<k+\frac{M_1}{4}\}} \zeta^2 |Dv|^2 |Du|^p \, dx \leq \int_{B(R)\bigcap\{v>k\}} \zeta^2 |Dv|^2 |Du|^p \, dx. \tag{4.16}$$

Agora, note que se $v = M_1 - u_{x_1} < k + \frac{M_1}{4}$, então podemos usar (4.11) e (4.5) para obtermos

$$u_{x_1} > \frac{3M_1}{4} - k \geq \frac{M_1}{4} \geq \frac{1}{4\sqrt{n}} M(R).$$

E portanto existe uma constante $C = C(n,p) = \left(\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)^p > 0$ tal que

$$|Du|^p \geq CM(R)^p \quad \text{em} \quad \{k < v < k + \frac{M_1}{4}\}.$$

Substituindo (4.16) em (4.15) e usando a estimativa acima, concluímos que

$$\int_{B(R)\bigcap\{k<v<k+\frac{M_1}{4}\}} \zeta^2|Dv|^2 dx \leq C\int_{B(R)} |D\zeta|^2 \left((v-k)^+\right)^2 dx, \tag{4.17}$$

onde $C = C(n,p)$ é uma constante que depende apenas de n e de p.

Passo 2: Considere as funções $\phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\phi_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < k, \\ x-k, & \text{se} \quad k \leq x \leq k + \frac{M_1}{4}, \\ \frac{M_1}{4}, & \text{se} \quad x > k + \frac{M_1}{4}. \end{cases}$$

Assim, podemos escrever (4.17) como

$$\int_{B(R)} \zeta^2 |D\phi_k(v)|^2\, dx \leq C\int_{B(R)} |D\zeta|^2 \left((v-k)^+\right)^2\, dx. \tag{4.18}$$

Aplicando a desigualdade de Sobolev para a função $\zeta\phi_k(v)$, obtemos uma constante $C = C(p,n)$ tal que

$$\begin{aligned}\left(\int_{B(R)} (\zeta\phi_k(v))^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}} &\leq C\int_{B(R)} |D(\zeta\phi_k(v))|^2 dx \\ &= C\int_{B(R)} |D\zeta\phi_k(v) + \zeta D(\phi_k(v))|^2 dx.\end{aligned}$$

Como $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, temos que

$$\left(\int_{B(R)} (\zeta\phi_k(v))^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq 2C\int_{B(R)} |D\zeta|^2\phi_k^2(v) + \zeta^2|D(\phi_k(v))|^2 dx.$$

Usando (4.18), temos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{B(R)} (\zeta\phi_k(v))^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}} &\leq 2C\int_{B(R)} |D\zeta|^2\phi_k^2(v)\, dx \\ &+ 2C\int_{B(R)} |D\zeta|^2 \left((v-k)^+\right)^2 dx.\end{aligned}$$

Como $\phi_k(v) \leq (v-k)^+$, concluímos que

$$\left(\int_{B(R)} (\zeta\phi_k(v))^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \max_{B(R)} |D\zeta|^2 C \int_{B(R)} \left((v-k)^+\right)^2 dx. \tag{4.19}$$

Passo 3: Até o momento nem k nem ζ foram determinados. Agora, escolhemos, para $m \in \{0,1,2,3,\ldots\}$

$$k_m \equiv \frac{M_1}{2}\left(1-\frac{1}{2^m}\right) < \frac{M_1}{2}$$
$$R_m \equiv \frac{R}{2}\left(1+\frac{1}{2^m}\right)$$

e escolhemos também funções de corte ζ_m tais que $0 \leq \zeta_m \leq 1$, $\zeta_m \equiv 1$ em $B(R_{m+1})$, $\zeta_m \equiv 0$ fora da bola $B(R_m)$ e $|D\zeta_m| \leq \frac{C2^m}{R}$. Reescrevendo (4.19) para $R = R_m$, $k = k_m$ e $\zeta = \zeta_m$, temos que

$$\left(\int_{B(R_m)} (\zeta_m\phi_{k_m}(v))^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \max_{B(R_m)} |D\zeta_m|^2 C \int_{B(R_m)} \left((v-k_m)^+\right)^2 dx. \tag{4.20}$$

Como $B(R_{m+1}) \subseteq B(R_m)$, $\quad \zeta_m\phi_{k_m}(v) \geq 0 \quad$ e $\quad \zeta_m \equiv 1$ em $B(R_{m+1})$, temos que

$$\left(\int_{B(R_{m+1})} (\phi_{k_m}(v))^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \left(\int_{B(R_m)} (\zeta_m\phi_{k_m}(v))^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}}. \tag{4.21}$$

Substituindo (4.21) em (4.20) obtemos a seguinte desigualdade, que será usada posteriormente:

$$\left(\int_{B(R_{m+1})} (\phi_{k_m}(v))^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C\frac{4^m}{R^2} \int_{B(R_m)} \left((v-k_m)^+\right)^2 dx. \tag{4.22}$$

Passo 4: A ideia é aplicar o lema 3.1 para a sequência definida por

$$J_m \equiv \int_{B(R_m)} \phi_{k_m}(v)^2 dx.$$

Para aplicarmos esse lema, precisamos verificar que J_m satisfaz uma relação de recorrência. Daí, precisamos estimar J_{m+1} por cima em função de J_m. Para isso, aplicamos a desigualdade de Hölder:

$$J_{m+1} = \int_{B(R_{m+1})} \phi_{k_{m+1}}(v)^2\,dx \leq \left(\int_{B(R_{m+1})} \phi_{k_{m+1}}(v)^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}}$$
$$\times \left|\{x \in B(R_{m+1}) | \phi_{k_{m+1}}(v) > 0\}\right|^{\frac{2}{n}}.$$

Mas como $\phi_{k_{m+1}} \leq \phi_{k_m}$, temos que

$$J_{m+1} \leq \left(\int_{B(R_{m+1})} \phi_{k_m}(v)^{\frac{2n}{n-2}}\, dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \times |\{x \in B(R_{m+1}) | \phi_{k_{m+1}}(v) > 0\}|^{\frac{2}{n}}. \tag{4.23}$$

Mas (4.22) nos dá uma estimativa para o termo à esquerda do lado direito da inequação acima. No entanto, ainda precisamos estimar por cima o termo

$$|\{x \in B(R_{m+1}) | \phi_{k_{m+1}}(v) > 0\}|^{\frac{2}{n}}.$$

Note que, como $k_{m+1} - k_m = \frac{M_1}{2^{m+2}}$, temos que

$$\begin{aligned}
&|\{x \in B(R_{m+1}) | \phi_{k_{m+1}}(v) > 0\}| = |\{x \in B(R_{m+1}) | v > k_{m+1}\}| = \\
&= \frac{1}{(k_{m+1} - k_m)^2} \int_{B(R_{m+1}) \bigcap \{v > k_{m+1}\}} (k_{m+1} - k_m)^2\, dx \leq \\
&\leq \frac{1}{(k_{m+1} - k_m)^2} \int_{B(R_{m+1}) \bigcap \{v > k_{m+1}\}} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx \leq \\
&\leq \frac{1}{(k_{m+1} - k_m)^2} \int_{B(R_m)} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx = \frac{4^{m+2}}{M_1^2} \int_{B(R_m)} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx
\end{aligned}$$

Substituindo a inequação acima e (4.22) em (4.23), concluímos que

$$J_{m+1} \leq C \frac{4^m}{R^2} \int_{B(R_m)} \left((v - k_m)^+\right)^2\, dx \left(\frac{4^{m+2}}{M_1^2} \int_{B(R_m)} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx \right)^{\frac{2}{n}}. \tag{4.24}$$

Agora, nos resta apenas estimar por cima o termo $\int_{B(R_m)} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx$ em função de J_m. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}
J_m &= \int_{B(R_m) \bigcap \{v < k_m + \frac{M_1}{4}\}} \phi_{k_m}(v)^2 dx + \int_{B(R_m) \bigcap \{v > k_m + \frac{M_1}{4}\}} \phi_{k_m}(v)^2 dx \\
&= \int_{B(R_m) \bigcap \{v < k_m + \frac{M_1}{4}\}} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx + \int_{B(R_m) \bigcap \{v > k_m + \frac{M_1}{4}\}} \left(\frac{M_1}{4}\right)^2 dx \\
&\leq \int_{B(R_m) \bigcap \{v < k_m + \frac{M_1}{4}\}} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx + \int_{B(R_m) \bigcap \{v > k_m + \frac{M_1}{4}\}} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx \\
&= \int_{B(R_m)} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx.
\end{aligned}$$

Ou seja, obtemos que

$$J_m \leq \int_{B(R_m)} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx. \tag{4.25}$$

Mas precisamos da desigualdade no sentido contrário. Para isso, observe que $|u_{x_1}| \leq M(R)$ e portanto temos que

$$-1 \leq \frac{u_{x_1}}{M(R)} \leq \frac{u_{x_1} + k_m}{M(R)}.$$

Logo,

$$1 - \frac{u_{x_1} + k_m}{M(R)} \leq 2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left((v - k_m)^+\right)^2 = \left((M_1 - u_{x_1} - k_m)^+\right)^2 \leq \left((M(R) - u_{x_1} - k_m)^+\right)^2 = \\ = \left(\left(M(R)\left(1 - \frac{u_{x_1} + k_m}{M(R)}\right)\right)^+\right)^2 \leq CM(R)^2.\end{aligned}$$

Usando (4.5) ainda concluímos que em $\{v > k_m + \frac{M_1}{4}\}$

$$\left((v - k_m)^+\right)^2 \leq CM(R)^2 \leq CM_1^2 \leq C\phi_{k_m}^2. \tag{4.26}$$

Substituindo (4.26) em (4.25), temos que

$$\begin{aligned}J_m &\leq \int_{B(R_m)} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx = \\ &= \int_{B(R_m)\bigcap\{v<k_m+\frac{M_1}{4}\}} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx + \int_{B(R_m)\bigcap\{v>k_m+\frac{M_1}{4}\}} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx \leq \\ &\leq \int_{B(R_m)\bigcap\{v<k_m+\frac{M_1}{4}\}} \phi_{k_m}(v)^2 dx + \int_{B(R_m)\bigcap\{v>k_m+\frac{M_1}{4}\}} C\phi_{k_m}(v)^2 dx \leq CJ_m.\end{aligned}$$

Ou seja, obtemos que

$$J_m \leq \int_{B(R_m)} \left((v - k_m)^+\right)^2 dx \leq CJ_m. \tag{4.27}$$

Portanto, substituindo em (4.24), concluímos que

$$J_{m+1} \leq C\frac{4^m}{R^2} J_m \left(C\frac{4^m}{M_1^2} J_m\right)^{\frac{2}{n}}.$$

E portanto

$$J_{m+1} \leq \frac{C4^{\left(1+\frac{2}{n}\right)m}}{R^2 M_1^{\frac{4}{n}}} \times J_m^{1+\frac{2}{n}}.$$

Ou seja existem constantes $C_1 = C$ e $C_2 = 4^{1+\frac{2}{n}}$ tais que

$$J_{m+1} \leq \frac{C_1 C_2^m}{R^2 M_1^{\frac{4}{n}}} \times J_m^{1+\frac{2}{n}}.$$

Portanto, a sequência J_m satisfaz as hipóteses do Lema 3.1 para $c = \frac{C_1}{R^2 M_1^{\frac{4}{n}}} \quad b = C_2 \quad$ e $\quad \epsilon = \frac{2}{n}$. Ou seja, se

$$\begin{aligned} J_0 &\leq \int_{B(R)} \left(v^+\right)^2 dx = \int_{B(R)} \left((M_1 - u_{x_1})^+\right)^2 dx \\ &\leq c^{-\frac{n}{2}} b^{-\frac{n^2}{4}} = \frac{R^n M_1^2}{C_1^{\frac{n}{2}}} . C_2^{-\frac{n^2}{4}} = \epsilon_0 M_1^2 |B(R)| \end{aligned}$$

então

$$\int_{B(\frac{R}{2})} \phi_{\frac{M_1}{2}}(v)^2 dx = \lim_{m \to \infty} J_m = 0.$$

Portanto, $\phi_{\frac{M_1}{2}}(v) \equiv 0$ em $B(\frac{R}{2})$ e consequentemente $\max_{B(R/2)} v \leq \frac{M_1}{2}$. Logo,

$$\max_{B(R/2)} (M_1 - u_{x_1}) \leq \frac{M_1}{2}.$$

E portanto,

$$\max_{B(R/2)} (-u_{x_1}) \leq -\frac{M_1}{2}.$$

Logo,

$$\min_{B(R/2)} (u_{x_1}) \geq \frac{M_1}{2},$$

o que conclui a demonstração. ■

4.2 Estimativas em torno de um ponto de degeneração

Nesta seção vamos supor que $B(R_0)$ seja centrada na origem e que

$$Du(0) = 0. \tag{4.28}$$

O nosso objetivo é estimar o crescimento de $M(R)$ à medida que R cresce.

Lema 4.3. *Supondo que valham as hipóteses (4.28) e (4.5), existem constantes* $0 < \lambda, \mu < 1$ *tais que*

$$|\{x \in B(R) | u_{x_1}(x) \leq \lambda M_1^+(R)\}| \geq \mu |B(R)|, \tag{4.29}$$

onde λ, μ *dependem apenas de* p *e* n.

Demonstração: De novo seja $M_1 = M_1^+(R)$ e suponha que (4.29) seja falsa para λ e μ a serem determinados. Então,

$$\fint_{B(R)} \left((M_1 - u_{x_1})^+\right)^2 dx = \frac{\int_{B(R)\bigcap\{u_{x_1} < \lambda M_1\}} \left((M_1 - u_{x_1})^+\right)^2 dx}{|B(R)|} + \\ + \frac{\int_{B(R)\bigcap\{\lambda M_1 \leq u_{x_1} \leq M_1\}} \left((M_1 - u_{x_1})^+\right)^2 dx}{|B(R)|}.$$

Note que se $x \in B(R)$ vale que

$$|M_1 - u_{x_1}(x)| = |\max_{B(R)} u_{x_1} - u_{x_1}(x)| \leq \max_{B(R)} u_{x_1} + |u_{x_1}(x)| \leq 2 \max_{B(R)} u_{x_1} = 2M_1.$$

Logo, para $C = 4$ vale que

$$\begin{aligned}\fint_{B(R)} \left((M_1 - u_{x_1})^+\right)^2 dx &\leq \frac{C}{|B(R)|} \int_{B(R)\bigcap\{u_{x_1} < \lambda M_1\}} M_1^2\, dx + \\ &+ \frac{1}{|B(R)|} \int_{B(R)\bigcap\{\lambda M_1 \leq u_{x_1} \leq M_1\}} \left((M_1 - \lambda M_1)^+\right)^2 dx \leq \\ &\leq \frac{C M_1^2 |\{u_{x_1} < \lambda M_1\}|}{\omega_n R^n} + (1-\lambda)^2 M_1^2.\end{aligned}$$

Portanto existe uma constante $C = C(n)$ tal que

$$\fint_{B(R)} \left((M_1 - u_{x_1})^+\right)^2 dx \leq C \left(\frac{M_1^2 |\{u_{x_1} < \lambda M_1\}|}{R^n} + (1-\lambda)^2 M_1^2 \right).$$

Assim, se escolhermos λ e μ tais que

$$C\left((1-\lambda)^2 + \mu\right) \leq \epsilon_0,$$

segue da falsidade de (4.29) que

$$\fint_{B(R)} \left((M_1 - u_{x_1})^+\right)^2 dx \leq C M_1^2 \left((1-\lambda)^2 + \mu\right) \leq \epsilon_0 M_1^2. \tag{4.30}$$

Aplicando o lema 4.2 e (4.5), concluímos que

$$\min_{B\left(\frac{R}{2}\right)} u_{x_1} \geq \frac{M_1^+(R)}{2} > 0,$$

contradizendo a hipótese (4.28) ■

Agora estamos em condições de mostrar o seguinte resultado, que, junto com o Lema 3.2 nos permite estimar por cima o crescimento de $M(R)$.

Lema 4.4. *Supondo que valham (4.28) e (4.5), existe uma constante positiva* $\gamma = \gamma(p, n) < 1$ *tal que*

$$M_1^+\left(\frac{R}{2}\right) \leq \gamma M_1^+(R).$$

Demonstração: Denovo seja $M_1 = M_1^+(R)$ e defina para $\delta > 0$ a função auxiliar

$$\phi(x) = \phi_\delta(x) \equiv \left(-\log\left(\frac{M_1 - x + \delta}{M_1(1-\lambda)}\right)\right)^+ \quad \text{para} \quad x \leq M_1.$$

Como

$$-\log\left(\frac{M_1 - x + \delta}{M_1(1-\lambda)}\right) > 0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{M_1(1-\lambda)}{M_1 - x + \delta}\right) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{M_1(1-\lambda)}{M_1 - x + \delta}\right) > 1 \Leftrightarrow x > \delta + M_1\lambda,$$

temos que $\phi(x) = 0$ se $x \leq \delta + M_1\lambda$.
Note também que se $\delta + M_1\lambda < x_1 \leq x_2 \leq M_1$, então

$$\phi(x_1) = \log\left(\frac{M_1(1-\lambda)}{M_1 - x_1 + \delta}\right) \leq \log\left(\frac{M_1(1-\lambda)}{M_1 - x_2 + \delta}\right) = \phi(x_2).$$

E portanto ϕ é não-decrescente.
Além disso, se $x > \delta + M_1\lambda$ temos que

$$\phi'(x) = \frac{M_1 - x + \delta}{M_1(1-\lambda)}\left(\frac{M_1(1-\lambda)}{M_1 - x + \delta}\right)' = \frac{M_1 - x + \delta}{M_1(1-\lambda)} \times \frac{M_1(1-\lambda)}{(M_1 - x + \delta)^2} = \frac{1}{M_1 - x + \delta}$$

e portanto

$$\phi''(x) = \left(\frac{1}{M_1 - x + \delta}\right)^2 = \phi'(x)^2.$$

E portanto $\phi''(x) \geq 0$ para todo $x \leq M_1, x \neq M_1\lambda + \delta$. Logo, ϕ é uma função convexa.

Agora seja

$$w = \phi(u_{x_1}).$$

Vamos dividir a demonstração em três passos relativamente independentes.

Passo 1: Note que

$$|\{x \in B(R)|w = 0\}| = |\{x \in B(R)|u_{x_1} \leq M_1\lambda + \delta\}| \geq |\{x \in B(R)|u_{x_1}(x) \leq \lambda M_1\}|.$$

Portanto, do lema 4.3, temos que

$$|\{x \in B(R)|w = 0\}| \geq \mu|B(R)|. \tag{4.31}$$

Agora vamos mostrar a seguinte afirmação: existe $\theta = \theta(\mu, n)$, $\quad \frac{3}{4} < \theta < 1$ tal que

$$|\{x \in B(\theta R)|w = 0\}| \geq \frac{1}{2}\mu|B(R)|. \tag{4.32}$$

De fato, se (4.32) for falsa, teríamos usando (4.31) que para qualquer $\frac{3}{4} < \theta < 1$

$$|\{x \in B(\theta R)|w = 0\}| < \frac{1}{2}\mu|B(R)| \leq \frac{1}{2}|\{x \in B(R)|w = 0\}|.$$

Então, tomando $\theta_m = \frac{m-1}{m}$, temos que

$$|\{x \in B(\theta_m R)|w = 0\}| < \frac{1}{2}|\{x \in B(R)|w = 0\}| \quad \text{para todo} \quad m. \tag{4.33}$$

Logo,

$$\int_{B(R)} f_m \, dx < \frac{1}{2} \int_{B(R)} f \, dx,$$

onde $f_m = \chi_{B(\theta_m R) \bigcap \{w=0\}}$ e $f = \chi_{B(R) \bigcap \{w=0\}}$. Mas note que $f_i \leq f_{i+1}$ para todo i. Logo, podemos aplicar o teorema da convergência Monótona e obter

$$\int_{B(R)} \lim_{m\to\infty} f_m dx = \lim_{m\to\infty} \int_{B(R)} f_m dx.$$

Ou seja

$$|\{x \in B(R)|w = 0\}| = \lim_{m\to\infty} |\{x \in B(\theta_m R)|w = 0\}.$$

Mas por (4.33) concluímos que

$$|\{x \in B(R)|w = 0\}| < \frac{1}{2}|\{x \in B(R)|w = 0\}|.$$

Segue que

$$|\{x \in B(R) | w = 0\}| < 0,$$

absurdo. Assim, a afirmação (4.32) fica provada. Daí, pelo Corolário 3.4 concluímos que

$$⨍_{B_{\theta R}} w^2 dx \leq CR^2 ⨍_{B_{\theta R}} |Dw|^2 dx, \quad C = C(\mu, \theta, n). \tag{4.34}$$

Passo 2: Como ϕ é convexa e $v = u_{x_1}$ satisfaz (4.6) em $B(R)$, temos que $w = \phi \circ v$ é subsolução fraca da equação (4.6). De fato, como $w_{x_i} = \phi'(v) v_{x_i}$, então para qualquer $\eta \in C_0^\infty(B(R))$, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)} a_{ij} |Du|^p w_{x_i} \eta_{x_j} \, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)} a_{ij} |Du|^p \phi'(v) v_{x_i} \eta_{x_j} \, dx. \tag{4.35}$$

Considere a função $\psi(x) = \phi'(v(x))\eta(x)$. Como η tem suporte compacto e $\phi'(v(x))$ é suave, temos que essa é uma função teste válida e

$$\psi_{x_j} = \phi''(v) v_{x_j} \eta + \eta_{x_j} \phi'(v).$$

Logo,

$$\eta_{x_j} \phi'(v) = \psi_{x_j} - \phi''(v) v_{x_j} \eta.$$

Substituindo em (4.35) temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)} a_{ij} |Du|^p w_{x_i} \eta_{x_j} \, dx = & \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)} a_{ij} |Du|^p v_{x_i} \psi_{x_j} \, dx - \\ & - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)} a_{ij} |Du|^p v_{x_i} \phi''(v) v_{x_j} \eta \, dx. \end{aligned}$$

Mas como v satisfaz a equação (4.6), temos que o termo à esquerda da equação acima se anula. Usando também que a matriz a_{ij} é uniformemente elíptica e que $\phi'' \geq 0$, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(R)} a_{ij} |Du|^p w_{x_i} \eta_{x_j} \, dx = - \int_{B(R)} |Du|^p \phi''(v) \eta \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \, dx \leq 0. \tag{4.36}$$

Ou seja, w é uma subsolução fraca da equação

$$-(a_{ij} |Du|^p v_{x_i})_{x_j} = 0, \quad \text{em} \quad B(R), \tag{4.37}$$

como queríamos provar. Agora observe que no conjunto onde $w > 0$, temos que $u_{x_1} > M_1\lambda$. Portanto,

$$M(R)^p \leq CM_1^p \leq C|Du|^p \leq CM(R)^p, \tag{4.38}$$

o que nos mostra que $|Du|^p$ é limitado por cima e por baixo por $CM(R)^p$ e $M(R)^p$. Como podemos cancelar os termos envolvendo $|Du|^p$ durante os cálculos, podemos aplicar o método de iteração de Moser à equação (4.37). Daí, pelo Corolário 2.5 obtemos que

$$\sup_{B(R/2)} w^2 \leq C \fint_{B(\theta R)} w^2\, dx, \quad C = C(p, n, \theta). \tag{4.39}$$

Passo 3: Usando a equação (4.36) e que $\phi'' = (\phi')^2$, temos que

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{B(R)} a_{ij}|Du|^p w_{x_i}\eta_{x_j}\, dx = -\sum_{i,j=1}^n \int_{B(R)} a_{ij}|Du|^p \phi'(v)v_{x_i}\eta\phi'(v)v_{x_j}\, dx.$$

Usando que $w_{x_i} = \phi'(v)v_{x_i}$, concluímos que

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{B(R)} a_{ij}|Du|^p w_{x_i}\eta_{x_j}\, dx = -\sum_{i,j=1}^n \int_{B(R)} a_{ij}|Du|^p \eta w_{x_i}w_{x_j}\, dx \tag{4.40}$$

para toda função teste $\eta \in C_0^\infty(B(R))$. Escolha uma função de corte suave ζ tal que $\zeta \equiv 1$ em $B(\theta R)$, $\zeta \equiv 0$ perto da fronteira de $B(R)$, $0 \leq \zeta \leq 1$ e $|D\zeta| \leq \frac{C}{(1-\theta)R}$. Então tomando $\eta = \zeta^2$ em (4.40) obtemos

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{B(R)} a_{ij}|Du|^p \zeta^2 w_{x_i}w_{x_j}\, dx = -\sum_{i,j=1}^n \int_{B(R)} a_{ij}|Du|^p w_{x_i}(\zeta^2)_{x_j}\, dx. \tag{4.41}$$

Agora vamos fazer estimativas do lado esquerdo e do lado direito da equação acima. De um lado,

$$-\sum_{i,j=1}^n \int_{B(R)} a_{ij}|Du|^p w_{x_i}(\zeta^2)_{x_j}\, dx = -2\int_{B(R)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}|Du|^p w_{x_i}\zeta\zeta_{x_j}\, dx.$$

Do outro, aplicamos a condição de elipticidade da matriz (a_{ij}), obtendo

$$\int_{B(R)} \sum_{i,j=1}^n \zeta^2 a_{ij}|Du|^p w_{x_i}w_{x_j}\, dx \geq \int_{B(R)} \zeta^2|Du|^p|Dw|^2\, dx.$$

Juntando essas duas estimativas em (4.41), concluímos que

$$-2\int_{B(R)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}|Du|^p w_{x_i}\zeta\zeta_{x_j}\,dx \geq \int_{B(R)}\zeta^2|Du|^p|Dw|^2\,dx.$$

Usando (4.38) podemos cortar os termos envolvendo $|Du|^p$. Logo,

$$-2\int_{B(R)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i}\zeta\zeta_{x_j}\,dx \geq C\int_{B(R)}\zeta^2|Dw|^2\,dx. \tag{4.42}$$

Agora, vamos estimar por cima o lado esquerdo da equação acima. Note que

$$-2\int_{B(R)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i}\zeta\zeta_{x_j}\,dx \leq 2\int_{B(R)}\zeta\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}|Dw||D\zeta|\,dx.$$

Como a matriz (a_{ij}) é limitada por $(1+p)$, conforme (5.9), temos que

$$-2\int_{B(R)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i}\zeta\zeta_{x_j}\,dx \leq 2(1+p)\int_{B(R)}\zeta|Dw||D\zeta|\,dx.$$

Agora, usando a desigualdade de Cauchy com ϵ a ser determinado, concluímos que

$$2(1+p)\int_{B(R)}\zeta|Dw||D\zeta|\,dx \leq (1+p)\int_{B(R)}\epsilon\zeta^2|Dw|^2 + \frac{|D\zeta|^2}{\epsilon}\,dx.$$

Usando essa estimativa em (4.42) obtemos

$$(1+p)\int_{B(R)}\epsilon\zeta^2|Dw|^2 + \frac{|D\zeta|^2}{\epsilon}\,dx \geq C\int_{B(R)}\zeta^2|Dw|^2\,dx.$$

Logo,

$$(1+p)\int_{B(R)}\frac{|D\zeta|^2}{\epsilon}\,dx \geq (C-(1+p)\epsilon)\int_{B(R)}\zeta^2|Dw|^2\,dx.$$

Daí, tomando $\epsilon > 0$ de modo que $C-(1+p)\epsilon > 0$, temos que existe uma constante $D > 0$ tal que

$$\int_{B(R)}|D\zeta|^2\,dx \geq D\int_{B(R)}\zeta^2|Dw|^2\,dx.$$

Mas da construção de ζ, temos que $|D\zeta| \leq \frac{C}{(1-\theta)R}$, e portanto

$$\int_{B(R)}\frac{C(\theta)}{R^2}\,dx \geq D\int_{B(R)}\zeta^2|Dw|^2\,dx.$$

Daí,

$$\frac{C(p,n,\theta)}{R^2} \geq \frac{1}{|B(R)|}\int_{B(R)} \zeta^2 |Dw|^2\, dx.$$

Mas como $\zeta \equiv 1$ em $B(\theta R)$ e $0 \leq \zeta \leq 1$ em $B(R)$, temos que

$$\frac{C(p,n,\theta)}{R^2} \geq \fint_{B(\theta R)} |Dw|^2\, dx. \tag{4.43}$$

Finalmente, juntando (4.39), (4.34) e (4.43) concluímos que

$$\sup_{B(\frac{R}{2})} w^2 \leq C_4, \quad C_4 = C(p,n,\theta,\mu). \tag{4.44}$$

Lembrando da definição de w, a equação acima siginifica que se $x \in B(R/2)$, temos que

$$w(x) = \phi(u_{x_1}) = \log\left(\frac{M_1(1-\lambda)}{M_1 - u_{x_1} + \delta}\right) \leq C_4.$$

Daí,

$$\frac{M_1(1-\lambda)}{M_1 - u_{x_1} + \delta} \leq e^{C_4}.$$

Logo,

$$u_{x_1} \leq M_1 - e^{-C_4} M_1(1-\lambda) + \delta = M_1(1 - e^{-C_4}(1-\lambda)) + \delta = \gamma M_1 + \delta,$$

onde $0 < \gamma \equiv (1 - e^{-C_4}(1-\lambda)) < 1$. Fazendo $\delta \to 0$ (note que as constantes acima não dependem de δ), obtemos que

$$M_1^+(\frac{R}{2}) \leq \gamma M_1^+(R).$$

■

Agora vamos usar o Lema 3.2 para obter o seguinte resultado, que é o objetivo dos lemas anteriores.

Proposição 4.5. *Existem constantes $C = C(p,n)$ e $\beta = \beta(p,n) > 0$ tais que*

$$M(R) \leq CK\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\beta} \quad (0 < R < R_0),$$

onde K é dado por (4.2).

Demonstração: Usando a notação do Lema 3.2 vamos tomar

$$\begin{aligned}
&w_1(R) = M(R), \quad \overline{w_i} = M_i^+(R) \quad (i = 1, \ldots, n)\\
&\overline{w_i} = M_{i-n}^-(R) \quad (i = n+1, \ldots, 2n), \quad M = 1, \quad N = 2n,\\
&\eta = \frac{1}{2}, \quad \delta_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sigma = \gamma \quad \text{(do Lema 4.4)}.
\end{aligned}$$

Inicialmente, vamos checar que essas funções de fato satisfazem as hipóteses do Lema 3.2. Do lema anterior e de (4.5), temos que para cada $0 < R < R_0$ existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ e uma constante γ tais que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} M(R) \leq M_i^{\pm}(R) \quad \text{para algum} \quad i = i(R) \in \{1, \ldots, n\}$$

e

$$M_i^{\pm}(\frac{R}{2}) \leq \gamma M_i^{\pm}(R) \quad \text{para} \quad i \quad \text{dado acima.}$$

Daí, as hipóteses do Lema 3.2 ficam satisfeitas. Aplicando esse lema, obtemos constantes positivas $C = C(n, p)$ e $\beta = \beta(n, p)$ tais que

$$M(R) \leq C \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta} \max_{1 \leq i \leq n} M_i^{\pm}(R_0) \quad (0 < R < R_0).$$

E portanto, da definição de K segue que

$$M(R) \leq CK \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta} \quad (0 < R < R_0),$$

como queríamos demonstrar. ■

4.3 Estimativas em torno de um ponto regular

Acabamos de conseguir uma estimativa para a oscilação de Du em bolas centradas em um ponto de degeneração, onde $Du = 0$. Agora, vamos combinar esse resultado com as estimativas de Moser para equações não degeneradas e obter uma estimativa Hölder a priori para Du em todos os pontos interiores de $B(R_0/2)$.
Suponhamos novamente que u seja uma solução suave da equação

$$\operatorname{div}(|Du|^p Du) = 0$$

em alguma bola $B(R_0)$ onde valha a estimativa

$$\max_{B(R_0)} |Du| \leq K.$$

Não vamos mais supor que necessariamente $Du(x_0) = 0$. Agora provamos o teorema enunciado no início do capítulo.

Teorema 4.6. *Existem constantes $C_5 = C_5(R_0, p, n, K)$ e $\tau = \tau(p, n) > 0$ tais que*

$$[Du]_{C^\tau(B(R_0/2))} \leq C_5.$$

Demonstração: De acordo com a Proposição 4.5, Du é Hölder contínua com expoente β em qualquer ponto $x_0 \in B(R_0/2)$ tal que $Du(x_0) = 0$. Suponhamos agora que $x_0 \in B(R_0/2)$ e

$$|Du(x_0)| > 0 \tag{4.45}$$

Defina para $k = 1, 2, \ldots, n$, $0 < R < R_0/2$

$$M(R) \equiv \max_{B(x_0,R)} |Du|,$$

$$M_k^{\pm}(R) \equiv \max_{B(x_0,R)} \pm u_{x_k},$$

$$\operatorname{osc}_{B(x_0,R)} u_{x_k} \equiv \max_{B(x_0,R)} u_{x_k} - \min_{B(x_0,R)} u_{x_k} = M_k^+(R) + M_k^-(R).$$

Seja $\gamma < 1$ a constante do Lema 4.4.
Seja R_1 o supremo do conjunto de números $0 < R \leq R_0/2$ tais que

$$M_k^\epsilon(\frac{R}{2}) \leq \gamma M_k^\epsilon(R) \tag{4.46}$$

FALHA para alguma escolha de $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\epsilon \in \{+, -\}$ tais que

$$M_k^\epsilon(R) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M(R) > 0. \tag{4.47}$$

Daí devemos ter $R_1 > 0$, visto que se tivéssemos $R_1 = 0$, então concluiríamos novamente(aplicando o lema 3.2) que

$$M(R) \leq C \left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \quad (0 < R \leq \frac{R_0}{2})$$

e daí $Du(x_0) = 0$, contradizendo a hipótese (4.45).
Daí, existe $\frac{R_1}{2} < R_2 \leq R_1$ tal que, digamos

$$M_1^+(R_2) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M(R_2) > 0 \tag{4.48}$$

mas (4.46) FALHA para $R = R_2$, $k = 1$, $\epsilon = +$. Daí, temos que vale a hipótese do Lema 4.2, isto é, existe uma constante $\epsilon_0 = \epsilon_0(p, n)$ tal que

$$⨍_{B(R_2)} \left(M_1^+(R_2) - u_{x_1}\right)^{+^2} \leq \epsilon_0 M_1^+(R_2)^2.$$

Isso acontece porque se a inequação acima for falsa, podemos provar o Lema 4.3, argumentando por absurdo de maneira análoga até concluir (4.30), que estamos supondo ser falsa. De posse do Lema 4.3 provamos o Lema 4.4 e concluímos que (4.46) é verdadeira, gerando um absurdo. Daí, podemos aplicar o Lema 4.2 e obter

$$\min_{B(x_0, \frac{R_2}{2})} u_{x_1} \geq \frac{M_1^+(R_2)}{2} = \frac{1}{2} \max_{B(x_0, R_2)} u_{x_1} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} M(R_2) > 0, \tag{4.49}$$

por (4.48). Agora, lembremos que $v = u_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$ satisfaz a equação

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} |Du|^p v_{x_i}\right)_{x_j} = 0, \quad \text{em} \quad B(x_0, R_2/2) \tag{4.50}$$

onde

$$a_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} + p \frac{u_{x_i} u_{x_j}}{|Du|^2}, & \text{se} \quad Du \neq 0, \\ \delta_{ij}, \quad \text{se} \quad Du = 0. \end{cases}$$

Usando (4.49) temos que

$$M(R_2)^p \geq |Du(x)|^p \geq \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^p M(R_2)^p \quad \text{em} \quad B(x_0, R_2/2),$$

e portanto

$$\sum_{i,j} a_{ij}|Du|^p\xi_i\xi_j = |Du|^p\left(|\xi|^2 + p\left(\frac{\langle Du,\xi\rangle}{|Du|}\right)^2\right) \geq |Du|^p|\xi|^2 \geq \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}M(R_2)\right)^p|\xi|^2.$$

Além disso,

$$\sum_{i,j} a_{ij}|Du|^p\xi_i\xi_j \leq M(R_2)^p\left(|\xi|^2 + p\left(\frac{|Du||\xi|}{|Du|}\right)^2\right) = M(R_2)^p(1+p)|\xi|^2.$$

Ou seja,

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}|Du|^p\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

para

$$\lambda \equiv \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}M(R_2)\right)^p$$

e

$$\mu \equiv M(R_2)^p(1+p).$$

Note que

$$\frac{\mu}{\lambda} = (1+p)2^p n^{\frac{p}{2}}$$

é uma constante dependendo apenas de n e de p, que independe de R_2. Daí podemos aplicar as estimativas de Moser (Teorema 2.6) para a equação (4.50) e obtermos uma constante $\delta = \delta(p,n) < 1$ tal que

$$\operatorname{osc}_{B(x_0,R/4)} u_{x_k} \leq \delta \operatorname{osc}_{B(x_0,R)} u_{x_k} \quad (0 < R < \frac{R_2}{2}), \quad k = 1,\ldots,n. \tag{4.51}$$

Agora, aplicamos o Lema 3.2 com

$$\begin{aligned}
&w_i(R) = \overline{w_i}(R) = \operatorname{osc}_{B(x_0,R)} u_{x_i}, \quad (i = 1,\ldots,n)\\
&\overline{w_i} = M^+_{i-n}(R) \quad (i = n+1, n+2, \ldots, 2n)\\
&\overline{w_i} = M^-_{i-2n}(R) \quad (i = 2n+1,\ldots,3n), \quad M = n, \quad N = 3n,\\
&\eta = \frac{1}{8}, \quad \delta_0 = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \sigma = \max\{\delta,\gamma\}.
\end{aligned}$$

Devemos checar que estamos nas hipóteses do Lema 3.2, independentemente dos valores de R_1 e R_2 para obtermos que se $0 < R \leq R_0/2$, então existem constantes positivas $C = C(p,n)$ e $\alpha = \alpha(p,n)$ tais que

$$\operatorname{osc}_{B(x_0,R)} u_{x_k} \leq C \max_{1\leq i\leq 3n} \overline{\omega_i}(R_0/2)\left(\frac{R}{R_0/2}\right)^\alpha \quad (k = 1,\ldots,n). \tag{4.52}$$

Para isso devemos checar que para cada $R \leq \frac{R_0}{2}$ existe $r = r(R) \in \{1, \ldots, 3n\}$ tal que

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{osc}_{B(x_0,R)} u_{x_i} \leq \overline{\omega_r}(R) \quad \text{e}$$
$$\overline{\omega_r}(\frac{R}{8}) \leq \max\{\delta, \gamma\} \overline{\omega_r}(R).$$

Vamos dividir em dois casos: Se $R^* < R_1$, então podemos tomar R_2 como anteriormente e de modo que $R^* < R_2 \leq R_1$. Daí obtemos de (4.51) que

$$\operatorname{osc}_{B(x_0,R/4)} u_{x_k} \leq \delta \operatorname{osc}_{B(x_0,R)} u_{x_k} \quad (0 < R < \frac{R_2}{2}), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Em particular, para $R = R^*/2$ temos que

$$\operatorname{osc}_{B(x_0,R^*/8)} u_{x_k} \leq \delta \operatorname{osc}_{B(x_0,R^*/2)} u_{x_k} \leq \delta \operatorname{osc}_{B(x_0,R^*)} u_{x_k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Ou seja

$$\overline{\omega_k}(R^*/8) \leq \delta \overline{\omega_k}(R^*), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Como a inequação acima é válida para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tome $k^* = k^*(R^*)$ tal que

$$\operatorname{osc}_{B(x_0,R^*)} u_{x_{k^*}} = \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{osc}_{B(x_0,R^*)} u_{x_i}.$$

Daí, temos que

$$\overline{\omega_{k^*}}(R^*/8) \leq \delta \overline{\omega_{k^*}}(R^*) \leq \sigma \overline{\omega_{k^*}}(R^*)$$

e

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{osc}_{B(x_0,R^*)} u_{x_i} \leq \overline{\omega_{k^*}}(R^*),$$

e estamos nas hipóteses do Lema 3.2.
Agora, se $R^* > R_1$, então existem $k \in \{1, \ldots, n\}$ e $\epsilon \in \{+, -\}$ tais que

$$M_k^\epsilon(R^*) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M(R^*) > 0$$

e

$$M_k^\epsilon(\frac{R^*}{2}) \leq \gamma M_k^\epsilon(R^*).$$

Note que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\operatorname{osc}_{B(x_0,R^*)} u_{x_i} = M_i^+(R^*) + M_i^-(R^*) \leq 2M(R^*) \leq 2\sqrt{n} M_k^\epsilon(R^*).$$

Logo, concluímos que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \mathrm{osc}_{B(x_0, R^*)} u_{x_i} \leq M_k^\epsilon(R^*).$$

Como também temos que

$$M_k^\epsilon(\frac{R^*}{8}) \leq M_k^\epsilon(\frac{R^*}{2}) \leq \gamma M_k^\epsilon(R^*) \leq \sigma M_k^\epsilon(R^*),$$

fica provado que estamos na hipótese do Lema 3.2, e concluímos que vale (4.52). Além disso, da definição de $\overline{\omega_i}$ e do fato que 2^α é uma constante que depende apenas de p e de n, segue que

$$\mathrm{osc}_{B(x_0,R)} u_{x_k} \leq C \max_{B(x_0, R_0/2)} |Du| \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \quad (0 < R < \frac{R_0}{2}) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Daí, para cada $x \in B(R_0/2)$ tal que $|Du(x)| \neq 0$ vale que

$$\mathrm{osc}_{B(x,R)} u_{x_k} \leq C \max_{B(R_0)} |Du| \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \quad (0 < R < \frac{R_0}{2}) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Pela Proposição 4.5 temos que nos pontos $x \in B(R_0/2)$ tais que $Du(x) = 0$ existem constantes $C = C(p, n)$ e $\beta = \beta(p, n) > 0$ tais que

$$\max_{B(x,R)} |Du| \leq C \max_{B(x, R_0/2)} |Du| \left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \quad (0 < R < R_0/2).$$

E portanto

$$\max_{B(x,R)} |Du| \leq C \max_{B(R_0)} |Du| \left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \quad (0 < R < R_0/2).$$

Para provar o Teorema 4.6, sejam $x, y \in B(R_0/2)$. Seja x_0 o centro da bola $B(R_0/2)$. Se $|x - y| < \frac{R_0}{2}$, então $y \in B(x, R_0/2) \subset B(x_0, R_0)$. Como podemos supor que $|Du(x)| > 0$ temos que

$$|u_{x_k}(x) - u_{x_k}(y)| \leq \mathrm{osc}_{B(x, |x-y|)} u_{x_k} \leq C \max_{B(R_0)} |Du| \left(\frac{|x-y|}{R_0}\right)^\alpha$$

e portanto

$$\frac{|u_{x_k}(x) - u_{x_k}(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(p, n, K, R_0). \tag{4.53}$$

Caso $|x - y| \geq \frac{R_0}{2}$ e $|Du(x_0)| > 0$, então para $R_3 = \max\{|x - x_0|, |y - x_0|\} < \frac{R_0}{2} \leq |x - y|$ temos que

$$|u_{x_k}(x) - u_{x_k}(y)| \leq \mathrm{osc}_{B(x_0, R_3)} u_{x_k} \leq C \max_{B(R_0)} |Du| \left(\frac{R_3}{R_0}\right)^\alpha.$$

Logo,

$$|u_{x_k}(x) - u_{x_k}(y)| \leq C \max_{B(R_0)} |Du| \left(\frac{|x-y|}{R_0} \right)^{\alpha}.$$

Consequentemente,

$$\frac{|u_{x_k}(x) - u_{x_k}(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C(p, n, K, R_0). \tag{4.54}$$

Finalmente, caso $|x - y| \geq \frac{R_0}{2}$ e $|Du(x_0)| = 0$, então para R_3 como acima temos que

$$|u_{x_k}(x) - u_{x_k}(y)| \leq 2 \max_{B(x_0, R_3)} |Du| \leq C \max_{B(R_0)} |Du| \left(\frac{R_3}{R_0} \right)^{\beta},$$

e portanto

$$\frac{|u_{x_k}(x) - u_{x_k}(y)|}{|x-y|^{\beta}} \leq C(p, n, K, R_0). \tag{4.55}$$

Juntando as estimativas (4.53), (4.54) (4.55) obtemos o resultado desejado para $\tau = \min\{\alpha, \beta\}$. ■

Capítulo 5

O problema aproximado

No capítulo anterior obtivemos estimativas Hölder para soluções suaves da equação

$$\mathrm{div}|Du|^p Du = 0 \quad \text{em} \quad B(R_0), \quad p > 0$$

No entanto, não conseguimos garantir a existência de soluções suaves dessas equações, conforme [8]. Felizmente, podemos considerar problemas aproximados, cujas soluções denotaremos por u^ϵ, para os quais as estimativas feitas no capítulo anterior se aplicam de maneira análoga. Na primeira seção deste capítulo enunciamos esses resultados, e na seguinte provamos que tais problemas aproximados realmente possuem soluções suaves u^ϵ. Finalmente, obtemos estimativas uniformes para u^ϵ, que nos permitem estudar, no capítulo seis, a função limite $v = \lim_{\epsilon\to 0} u^\epsilon$.
Seja $B(R_0)$ uma bola de raio R_0, como no capítulo anterior. Dado $\epsilon > 0$, o objetivo desse capítulo é estudar o comportamento das soluções u^ϵ do problema aproximado

$$\mathrm{div}\left(|Du^\epsilon|^p Du^\epsilon\right) + \epsilon\Delta u^\epsilon = 0 \quad \text{em} \quad B(R_0) \tag{5.1}$$

que se escreve alternativamente como

$$\mathrm{div}\left((|Du^\epsilon|^p + \epsilon)Du^\epsilon\right) = 0 \quad \text{em} \quad B(R_0). \tag{5.2}$$

A E.D.P acima é quasilinear e uniformemente elíptica, e portanto é possível provar a existência de soluções suaves para essas equações, conforme feito em [5]. Assim como no capítulo anterior, vamos começar mostrando que as derivadas parciais de u^ϵ satisfazem uma E.D.P.

5.1 Estimativas a priori do problema aproximado

Começamos com o seguinte lema.

Lema 5.1. *Sejam $\epsilon > 0$ e u^ϵ uma solução suave da E.D.P dada em (5.1). Então para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ temos que a função $v = u^\epsilon_{x_k}$ é solução da equação*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left((|Du|^p + \epsilon)a^\epsilon_{ij}v_{x_i}\right)_{x_j} = 0 \quad em \quad B(R_0), \tag{5.3}$$

onde os coeficientes a^ϵ_{ij} dependem apenas de ϵ e da derivada de u e são dados por

$$a^\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + p\frac{|Du|^{p-2}u_{x_i}u_{x_j}}{|Du|^p + \epsilon}. \tag{5.4}$$

Demonstração: Para não carregar a notação, vamos omitir o superescrito ϵ. Derivando (5.2) com respeito a k-ésima coordenada, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{n}((|Du|^p + \epsilon)u_{x_j})_{x_j}\right)_{x_k} = 0 \quad \text{em} \quad B(R_0) \tag{5.5}$$

e portanto

$$\sum_{j=1}^{n}(((|Du|^p + \epsilon)u_{x_j})_{x_k})_{x_j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left((|Du|^p + \epsilon)\, u_{x_jx_k} + (|Du|^p + \epsilon)_{x_k} u_{x_j}\right)_{x_j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left((|Du|^p + \epsilon)\, u_{x_jx_k} + p|Du|^{p-2}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}u_{x_ix_k}u_{x_j}\right)_{x_j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{ij}\,(|Du|^p + \epsilon)\, u_{x_ix_k} + p|Du|^{p-2}u_{x_i}u_{x_j}u_{x_ix_k}\right)\right)_{x_j} = 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left((|Du|^p + \epsilon)\left(\delta_{ij} + p\frac{|Du|^{p-2}u_{x_i}u_{x_j}}{|Du|^p + \epsilon}\right)u_{x_ix_k}\right)_{x_j} = 0$$

em $B(R_0)$ e portanto $v = u_{x_k}$ satisfaz a equação

$$\sum_{i.j=1}^{n} \left(\left(|Du|^p + \epsilon\right) a_{ij} v_{x_i}\right)_{x_j} = 0, \tag{5.6}$$

como queríamos demonstrar. ■

Note que a matriz a_{ij}^{ϵ} satisfaz a condição de elipticidade, com constantes que não dependem de ϵ: Se $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\epsilon} \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} + p\frac{|Du|^{p-2} u_{x_i} u_{x_j}}{|Du|^p + \epsilon}\right) \xi_i \xi_j = |\xi|^2 + p\left(\frac{|Du|^{p-2}\langle Du, \xi\rangle^2}{|Du|^p + \epsilon}\right) \tag{5.7}$$

e portanto, por Cauchy-Schwarz,

$$|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \leq |\xi|^2 + p\frac{|Du|^p}{|Du|^p + \epsilon} |\xi|^2 \leq (1+p)|\xi|^2. \tag{5.8}$$

Também observe que a matriz a_{ij}^{ϵ} é uniformemente limitada em ϵ:

$$|a_{ij}^{\epsilon}| \leq |\delta_{ij} + p\frac{|Du|^{p-2} u_{x_i} u_{x_j}}{|Du|^p + \epsilon}| \leq 1 + p\frac{|Du|^p}{|Du|^p + \epsilon} = 1 + p. \tag{5.9}$$

Este lema e o fato das matrizes (a_{ij}^{ϵ}) serem uniformemente limitadas em ϵ indica que as estimativas feitas no capítulo anterior se repetem de maneira análoga para a E.D.P (5.3). Daí, é natural esperar que as funções u^{ϵ} sejam Hölder-contínuas em $B(R_0)$ com expoentes $\alpha = \alpha_{\epsilon}$. No entanto, conseguimos estimativas independentes de ϵ, conforme as contas acima já indicam, de modo que α não dependa de ϵ. Vejamos agora lemas análogos aos do capítulo anterior. Analogamente ao que foi feito no capítulo anterior, defina para $0 < R < R_0$

$$M_{\epsilon}(R) \equiv \max_{B(R)} |Du^{\epsilon}|$$

e

$$M_{\epsilon,k}^{\pm}(R) \equiv \max_{B(R)} \pm u_{x_k}^{\epsilon}, \quad \text{para} \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Então, fixado $0 < R < R_0$ deve existir algum índice i tal que

$$M_{\epsilon,i}^{+}(R) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M_{\epsilon}(R) \tag{5.10}$$

ou

$$M_{\epsilon,i}^{-}(R) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M_{\epsilon}(R). \tag{5.11}$$

Portanto, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$M^+_{\epsilon,1}(R) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M_\epsilon(R) > 0. \tag{5.12}$$

Lema 5.2. *Seja $0 < R < R_0$. Então existe uma constante $\epsilon_0 = \epsilon_0(p,n) > 0$, tal que se*

$$\fint_{B(R)} \left(M^+_{\epsilon,1}(R) - u^\epsilon_{x_1}\right)^{+^2} \leq \epsilon_0 M^+_{\epsilon,1}(R)^2$$

então

$$\min_{B(\frac{R}{2})} u^\epsilon_{x_1} \geq \frac{M^+_{\epsilon,1}(R)}{2}$$

para qualquer $\epsilon > 0$ tal que $M^+_{\epsilon,1}(R)$ satisfaça (5.12).

Demonstração: Seja $M_1 = M^+_{\epsilon,1}(R)$ e defina $v = M_1 - u^\epsilon_{x_1}$. Conforme o lema 5.1, temos que v é solução de (5.3). Seja ζ uma função de corte suave que se anula fora de $B(R)$ e seja

$$0 \leq k \leq \frac{M_1}{2} \tag{5.13}$$

uma constante a ser determinada. Multiplicando (5.3) por $\zeta^2(v-k)^+$ e integrando, concluímos fazendo contas idênticas às da demonstração do lema 4.2 que

$$\int_{B(R)\bigcap\{v>k\}} \zeta^2 |Dv|^2 \left(|Du^\epsilon|^p + \epsilon\right) dx \leq (1+p)^2 \left(M_\epsilon(R)^p + \epsilon\right) \int_{B(R)} |D\zeta|^2 \left((v-k)^+\right)^2 dx. \tag{5.14}$$

Note que

$$\int_{B(R)\bigcap\{k<v<k+\frac{M_1}{4}\}} \zeta^2 |Dv|^2 (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, dx \leq \int_{B(R)\bigcap\{v>k\}} \zeta^2 |Dv|^2 (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, dx. \tag{5.15}$$

Agora, note que se $v = M_1 - u^\epsilon_{x_1} < k + \frac{M_1}{4}$, então podemos usar (5.13) e (5.12) para obtermos

$$u^\epsilon_{x_1} > \frac{3M_1}{4} - k \geq \frac{M_1}{4} \geq \frac{1}{4\sqrt{n}} M_\epsilon(R).$$

E portanto existe uma constante $C = C(n,p) = \left(\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)^p > 0$ tal que

$$|Du^\epsilon|^p \geq C M_\epsilon(R)^p \quad \text{em} \quad \{k < v < k + \frac{M_1}{4}\}.$$

Substituindo (5.15) em (5.14) e usando a estimativa acima, concluímos que

$$\int_{B(R)\bigcap\{k<v<k+\frac{M_1}{4}\}} \zeta^2|Dv|^2dx \leq C\int_{B(R)}|D\zeta|^2\left((v-k)^+\right)^2dx, \tag{5.16}$$

onde $C = C(n,p)$ é uma constante que depende apenas de n e de p. Como ϵ sumiu, a partir daqui a demonstração do Lema 5.2 é idêntica à do Lema 4.2. ■

De posse do lema 5.2, provamos o seguinte lema:

Lema 5.3. *Supondo que $B(R_0)$ esteja centrada na origem, que valha a hipótese (5.12) e que*

$$Du^\epsilon(0) = 0, \tag{5.17}$$

existem constantes $0 < \lambda, \mu < 1$ dependendo apenas de p e n tais que

$$|\{x \in B(R)|u^\epsilon_{x_1}(x) \leq \lambda M^+_{\epsilon,1}(R)\}| \geq \mu|B(R)|, \tag{5.18}$$

para cada $0 < R < R_0$.

Demonstração: Idêntica à do Lema 4.3. ■

E de posse de Lema 5.3 provamos que

Lema 5.4. *Existe uma constante positiva $\gamma = \gamma(p,n) < 1$ tal que*

$$M^+_{\epsilon,1}\left(\frac{R}{2}\right) \leq \gamma M^+_{\epsilon,1}(R)$$

para qualquer $\epsilon > 0$ tal que Du^ϵ satisfaça as hipóteses (5.17) e (5.12).

Demonstração: Idêntica à do Lema 4.4. A única diferença é que o termo $M(R)^p + \epsilon$ cancela ao longo das contas, ao invés do termo $M(R)^p$. ■

Daí usamos o Lema 3.2 para obter

Proposição 5.5. *Existem constantes $C = C(p,n)$ e $\beta = \beta(p,n) > 0$ tais que*

$$M_\epsilon(R) \leq CK_\epsilon\left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \quad (0 < R < R_0),$$

onde

$$K_\epsilon = \sup_{B(R_0)}|Du^\epsilon|.$$

para qualquer $\epsilon > 0$ tal que Du^ϵ satisfaça a hipótese (5.17).

Demonstração: Idêntica à da Proposição 4.5. ■

Finalmente, enunciamos o

Teorema 5.6. *Existem constantes* $C_5 = C_5(R_0, p, n, K_\epsilon)$ *e* $\alpha = \alpha(p, n) > 0$ *tais que*

$$[Du^\epsilon]_{C^\alpha(B(R_0/2))} \leq C_5$$

para qualquer $\epsilon > 0$.

Demonstração: Idêntica a prova do Teorema 4.6. ■

5.2 Existência de solução suave do problema aproximado

Sejam $B(R_0)$ uma bola centrada na origem e compactamente contida em um aberto limitado Ω de $\mathbb{R}^n$, $u \in W^{1,p+2}(\Omega)$ solução fraca da equação

$$\operatorname{div}|Du|^p Du = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{5.19}$$

e defina

$$g = g_\delta = \rho_\delta * u, \quad \delta > 0$$

onde ρ_δ é o molificador usual, definido nas preliminares. Vamos supor que

$$B(R_0) \subset\subset \Omega_\delta = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$$

e portanto

$$g \in C^\infty(\overline{B(R_0)}).$$

Fixado $\epsilon > 0$ considere a E.D.P

$$\begin{cases} \operatorname{div}|Du^\epsilon|^p Du^\epsilon + \epsilon\Delta u^\epsilon = 0 \quad \text{em} \quad B(R_0), \\ u^\epsilon = g, \quad \text{em} \quad \partial B(R_0). \end{cases} \tag{5.20}$$

O nosso objetivo é provar que essa equação possui uma (única) solução suave. Para isto, considere o problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}|Du^\epsilon|^p Du^\epsilon + \epsilon\Delta u^\epsilon = 0 \quad \text{em} \quad B(R_0), \\ u^\epsilon = \sigma g, \quad \text{em} \quad \partial B(R_0), \end{cases} \tag{5.21}$$

onde $0 \leq \sigma \leq 1$. O primeiro passo para isso, é obter a seguinte estimativa a priori.

Lema 5.7. *Existe uma constante $C = C(R_0, \delta)$ tal que*

$$\max_{B(R_0)} |Du^\epsilon| \leq C$$

se u^ϵ for uma solução suave de (5.21). C não depende de ϵ nem de σ.

Demonstração: Durante essa prova, para simplificar a notação, vamos abandonar o superescrito ϵ. Inicialmente, vamos provar que

$$\max_{\partial B(R_0)} |Du| \leq C_1 = C_1(R_0, \delta).$$

Para isso, escolha um ponto qualquer $x^* \in \partial B(R_0)$. Por meio de uma rotação, podemos supor que $x^* = (0, 0, \ldots, -R_0)$. Defina, para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(R_0)$,

$$w(x) = \sigma g(x^*) + \sigma \sum_{i=1}^{n-1} g_{x_i}(x^*) x_i + \sigma \max_{B(R_0)} |D^2 g| \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \mu(x_n + R_0) - \lambda(x_n + R_0)^2,$$

com μ e λ a serem determinados. Note que

$$\operatorname{div}(|Dw|^p Dw) = \sum_{i=1}^{n} (w_{x_i} |Dw|^p)_{x_i} = |Dw|^p \Delta w + \sum_{i,j=1}^{n} p|Dw|^{p-2} w_{x_i} w_{x_j} w_{x_j x_i}$$

e portanto, pela definição de w,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(|Dw|^p Dw) + \epsilon \Delta w =& 2(|Dw|^p + \epsilon)((n-1)\sigma \max_{B(R_0)} |D^2 g| - \lambda) + \\ & p|Dw|^{p-2} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left(\sigma w_{x_j}^2 2 \max_{B(R_0)} |D^2 g| \right) - 2\lambda (w_{x_n})^2 \right). \end{aligned}$$

Assumindo por enquanto que

$$|w_{x_n}| \geq 1,$$

e notando que cada w_{x_j} é limitado para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, obtemos que existe $\lambda > 0$(suficientemente grande) tal que

$$\operatorname{div}(|Dw|^p Dw) + \epsilon \Delta w \leq 0.$$

De fato, basta tomar λ de modo que $\lambda > (n-1)\max_{B(R_0)} |D^2 g|$ e

$$2\lambda(w_{x_n})^2 > 2\lambda > \sigma \sum_{j=1}^{n-1} w_{x_j}^2 2 \max_{B(R_0)} |D^2 g|.$$

Como

$$w_{x_j} = \sigma g_{x_j}(x^*) + 2\sigma x_j \max_{B(R_0)} |D^2 g| \leq \max_{B(R_0)} |Dg| + 2R_0 \max_{B(R_0)} |D^2 g| = C,$$

basta tomar

$$\lambda > (n-1)C^2 \max_{B(R_0)} |D^2 g|.$$

Note que nem ϵ nem σ influem na escolha de λ. Com λ fixado, escolhemos $\mu > 0$ de modo que

$$|w_{x_n}| = |\mu - 2\lambda(x_n + R_0)| \geq 1,$$

e de modo que

$$w \geq \sigma g \quad \text{em} \quad \partial B(R_0). \tag{5.22}$$

Vejamos que de fato, (5.22) é satisfeita para μ suficientemente grande. Para isso, lembremos da expansão de Taylor com resto de Lagrange de σg: para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(R_0)$, existe $\overline{x} = x^* + t(x^* - x)$ para algum $t < 1$ tal que

$$\sigma g(x) = \sigma g(x^*) + \sigma \sum_{i=1}^{n} g_{x_i}(x^*)(x_i - x_i^*) + \frac{\sigma}{2}\langle D^2 g(\overline{x})(x - x^*), (x - x^*)\rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\sigma g(x) &\leq \sigma g(x^*) + \sigma \sum_{i=1}^{n} g_{x_i}(x^*)(x_i - x_i^*) + \sigma \max_{B(R_0)} |D^2 g| \, ||x - x^*||^2 \\
&= \sigma g(x^*) + \sigma \sum_{i=1}^{n-1} g_{x_i}(x^*) x_i + \sigma g_{x_n}(x^*)(x_n + R_0) + \\
&+ \sigma \max_{B(R_0)} |D^2 g| \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \sigma \max_{B(R_0)} |D^2 g| (x_n + R_0)^2 \\
&= w(x) + (\sigma g_{x_n}(x^*) - \mu)(x_n + R_0) + (\sigma \max_{B(R_0)} |D^2 g| + \lambda)(x_n + R_0)^2.
\end{aligned}$$

Como λ já está fixado, basta tomar μ de modo que

$$(\sigma g_{x_n}(x^*) - \mu)(x + R_0) + (\sigma \max_{B(R_0)} |D^2 g| + \lambda)(x + R_0)^2 \leq 0 \quad \forall -R_0 \leq x \leq R_0,$$

ou seja,

$$(-\sigma g_{x_n}(x^*) + \mu)x \geq (\sigma \max_{B(R_0)} |D^2 g| + \lambda)x^2 \quad \forall 0 \leq x \leq 2R_0,$$

o que é possível(note que fixados $b, \alpha > 0$ vale que $at > bt^2$ para todo $t \in [0, \alpha]$, desde que $a > b\alpha$). Daí nesse caso,

$$(-\sigma g_{x_n}(x^*) + \mu) \geq 2(\sigma \max_{B(R_0)} |D^2 g| + \lambda)R_0$$

e portanto devemos tomar μ de modo que

$$\mu \geq 2(\sigma \max_{B(R_0)} |D^2 g| + \lambda)R_0 + \sigma g_{x_n}(x^*).$$

Portanto, basta escolher

$$\mu \geq 2(\max_{B(R_0)} |D^2 g| + \lambda)R_0 + \max_{B(R_0)} |Dg|$$

para termos que

$$w \geq \sigma g \quad \text{em} \quad \partial B(R_0)$$

e

$$\operatorname{div}(|Dw|^p Dw) + \epsilon \Delta w \leq 0.$$

Daí, pelo teorema 3.5 , temos que $w \geq u$ em $B(R_0)$. Logo, como $w(x^*) = \sigma g(x^*) = u(x^*)$, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x^*) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x^* + he_n) - u(x^*)}{h} \leq \frac{\partial w}{\partial x_n}(x^*).$$

Mas como o vetor normal aponta no sentido contrário, obtemos que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x^*) \geq \frac{\partial w}{\partial \eta}(x^*) = -\mu.$$

Como $-u$ é solução da equação

$$\begin{cases} \operatorname{div}|Du^\epsilon|^p Du^\epsilon + \epsilon \Delta u^\epsilon = 0 \quad \text{em} \quad B(R_0), \\ u^\epsilon = -\sigma g, \quad \text{em} \quad \partial B(R_0), \end{cases}$$

o mesmo método se aplica, e obtemos uma outra constante, μ_2 tal que

$$-\frac{\partial u}{\partial \eta}(x^*) \geq \frac{\partial w_2}{\partial \eta}(x^*) \geq -\mu_2$$

e portanto

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x^*) \leq \mu_2.$$

Como $x^* \in \partial B(R_0)$ é arbitrário, conseguimos uma limitação por cima e por baixo para $\frac{\partial u}{\partial \eta}$. Como as derivadas tangenciais de u coincidem com as derivadas tangenciais de g, concluímos que existe $C_1 = C_1(R_0, \delta)$ tal que

$$\max_{\partial B(R_0)} |Du| \leq C_1 = C_1(R_0, \delta).$$

Para obter uma estimativa global, vamos derivar a equação (5.21) com respeito a k-ésima ordenada, obtendo, pelo Lema 5.1, que u_{x_k} satisfaz a equação

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left((|Du|^p + \epsilon) a_{ij}^{\epsilon} u_{x_k x_i}\right)_{x_j} = 0 \quad \text{em} \quad B(R_0),$$

onde

$$a_{ij}^{\epsilon} = \delta_{ij} + p\frac{|Du|^{p-2} u_{x_i} u_{x_j}}{|Du|^p + \epsilon}.$$

Ou seja,

$$-\sum_{i=1}^{n} \left((|Du|^p + \epsilon) u_{x_k x_i}\right)_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(p|Du|^{p-2} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_k x_i}\right)_{x_j} = 0 \quad \text{em} \quad B(R_0)$$

e daí ficamos com

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} |Du|^p u_{x_k x_i} + p|Du|^{p-2} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_k x_i}\right)_{x_j} - \epsilon \Delta u_{x_k} = 0 \quad \text{em} \quad B(R_0),$$

concluindo que

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} |Du|^p u_{x_k x_i}\right)_{x_j} - \epsilon \Delta u_{x_k} = 0, \quad \text{em} \quad B(R_0). \tag{5.23}$$

onde os coeficientes a_{ij} foram definidos no lema 4.1 e são dados por

$$a_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} + p\frac{u_{x_i} u_{x_j}}{|Du|^2}, & \text{se} \quad Du \neq 0, \\ \delta_{ij}, & \text{se} \quad Du = 0. \end{cases}$$

Multiplicando (5.23) por $v = (u_{x_k} - C_1)^+$, onde C_1 é dado pela afirmação que acabamos de provar, e integrando, obtemos (note que $v = 0$ em $\partial B(R_0)$)

$$-\int_{B(R_0)} \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} |Du|^p u_{x_k x_i}\right)_{x_j} v \, dx - \epsilon \int_{B(R_0)} v \Delta u_{x_k} \, dx = 0.$$

E daí, integrando por partes,

$$\int_{B(R_0)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}|Du|^p u_{x_k x_i} v_{x_j}\, dx + \epsilon \int_{B(R_0)} \sum_{i=1}^{n} u_{x_k x_i} v_{x_i}\, dx = 0.$$

Como

$$v_{x_j} = \begin{cases} 0, & \text{em} \quad \{u_{x_k} \leq C_1\}, \\ u_{x_k x_j}, & \text{em} \quad \{u_{x_k} > C_1\}, \end{cases}$$

temos que

$$\int_{\{u_{x_k} > C_1\}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}|Du|^p u_{x_k x_i} u_{x_k x_j}\, dx + \epsilon \int_{\{u_{x_k} > C_1\}} |Du_{x_k}|^2\, dx = 0.$$

Mas usando a condição de elipticidade de a_{ij}, obtemos que

$$0 = \int_{\{u_{x_k} > C_1\}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}|Du|^p u_{x_k x_i} u_{x_k x_j}\, dx + \epsilon \int_{\{u_{x_k} > C_1\}} |Du_{x_k}|^2\, dx \geq$$

$$\int_{\{u_{x_k} > C_1\}} |Du|^p |Du_{x_k}|^2\, dx + \epsilon \int_{\{u_{x_k} > C_1\}} |Du_{x_k}|^2\, dx = 0.$$

Ou seja,

$$\int_{\{u_{x_k} > C_1\}} |Du_{x_k}|^2\, dx = 0$$

e portanto,

$$|\{u_{x_k} > C_1\}| = 0, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Tomando a função teste $v = -u_{x_k} + C_1$, concluímos de modo análogo que

$$|\{-u_{x_k} > C_1\}| = 0, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Portanto $-C_1 \leq u_{x_k} \leq C_1$ em $B(R_0)$, como queríamos provar. ■

De posse dessa estimativa, podemos finalmente provar o

Lema 5.8. *O problema (5.20) possui uma única solução suave.*

Demonstração: Note que o problema (5.20) pode ser escrito como

$$\sum_{j=1}^{n}((|Du|^p+\epsilon)u_{x_j})_{x_j}=0$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left(|Du|^p+\epsilon\right)u_{x_jx_j}+\left(|Du|^p+\epsilon\right)_{x_j}u_{x_j}=0$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left(|Du|^p+\epsilon\right)u_{x_jx_j}+p|Du|^{p-2}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}u_{x_ix_j}u_{x_j}=0$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{ij}\left(|Du|^p+\epsilon\right)u_{x_ix_j}+p|Du|^{p-2}u_{x_i}u_{x_j}u_{x_ix_j}\right)\right)=0$$
$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left(|Du|^p+\epsilon\right)\left(\delta_{ij}+p\frac{|Du|^{p-2}u_{x_i}u_{x_j}}{|Du|^p+\epsilon}\right)u_{x_ix_j}\right)=0.$$

Ou seja, estamos lidando com a equação quasilinear

$$\begin{cases} Q(u)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(Du)u_{x_ix_j}=0 \quad \text{em} \quad B(R_0), \\ u^{\epsilon}=g, \quad \text{em} \quad \partial B(R_0), \end{cases} \tag{5.24}$$

onde

$$a_{ij}(\mathbf{p})=\left(|\mathbf{p}|^p+\epsilon\right)\left(\delta_{ij}+p\frac{|\mathbf{p}|^{p-2}p_ip_j}{|\mathbf{p}|^p+\epsilon}\right)$$

para cada $\mathbf{p}=(p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{R}^n$. A matriz $[a_{ij}]$ satisfaz a condição de elipticidade. De fato,

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{p})\xi_i\xi_j=\left(|\mathbf{p}|^p+\epsilon\right)|\xi|^2+p|\mathbf{p}|^{p-2}\langle\mathbf{p},\xi\rangle^2\geq\epsilon|\xi|^2>0,$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{p})\xi_i\xi_j\leq(|\mathbf{p}|^p+\epsilon)|\xi|^2+p|\mathbf{p}|^p|\xi|^2=((p+1)|\mathbf{p}|^p+\epsilon)|\xi|^2,$$

e portanto o operador Q é elíptico em $\mathbb{R}^n$. Note que os coeficientes $a_{ij}\in C^p(\mathbb{R}^n)$ se $0<p<1$ e $a_{ij}\in C^1(\mathbb{R}^n)$ caso $p>1$, e que pelo lema anterior podemos aplicar o teorema 2.8 para a E.D.P quasilinear elíptica dada por (5.24). Daí fica provado que o problema (5.20) possui solução suave. Segue da teoria de Cálculo Variacional que esta solução é única (esse problema é a equação de Euler-Lagrange associada a um funcional estritamente convexo). ■

5.3 Estimativas uniformes para soluções do problema aproximado

O seguinte teorema será um dos pilares da demonstração do teorema final. É ele que nos dá boas propriedades para a função limite $v = \lim_{\epsilon \to 0} u^\epsilon$. O primeiro item deste teorema garante que as normas L^{p+2} das funções Du^ϵ são uniformememente limitadas. Isso vai ajudar a mostrar que a sequência $\{u^\epsilon\}$ é uniformemente limitada na norma de Sobolev. Já o segundo item garante que $K_\epsilon = \max_{B(R_0/2)} |Du^\epsilon|$ (definido na Proposição 5.5) é uniformemente limitado, de modo que a constante C_5 do Teorema 5.6 seja uniformemente limitada em ϵ. Note que as estimativas a seguir não dependem de g, e portanto, de δ.

Teorema 5.9. *Sejam u solução fraca da equação (5.19) e u^ϵ solução da equação (5.20). Então,*

(i)

$$\int_{B(R_0)} |Du^\epsilon|^{p+2}\, dx \leq C \left(\int_\Omega |Du|^{p+2}\, dx + 1 \right) \tag{5.25}$$

para alguma constante $C = C(R_0)$.

(ii) Existe uma constante $C_7 = C_7(R_0)$ tal que

$$\max_{B(R_0/2)} |Du^\epsilon| \leq C_7$$

para alguma constante $C_7 = C_7(R_0)$. As constantes aqui não dependem de ϵ nem de δ.

Demonstração: Como u^ϵ é solução de (5.20), temos que

$$\int_{B(R_0)} \langle (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, Du^\epsilon, D\eta \rangle\, dx = 0$$

para qualquer $\eta \in W_0^{1,p}(B(R_0))$. Escolhendo $\eta = u^\epsilon - g$ obtemos que

$$\int_{B(R_0)} \langle (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, Du^\epsilon, Du^\epsilon - Dg \rangle\, dx = 0.$$

E portanto

$$\int_{B(R_0)} (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, |Du^\epsilon|^2\, dx = \int_{B(R_0)} (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, \langle Du^\epsilon, Dg\rangle\, dx. \tag{5.26}$$

Agora, vamos estimar por cima o lado direito da equação acima.

$$\int_{B(R_0)} (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, \langle Du^\epsilon, Dg\rangle\, dx \leq \int_{B(R_0)} (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, |Du^\epsilon||Dg|\, dx.$$

Mas como $|Du^\epsilon||Dg| \leq \frac{|Du^\epsilon|^2}{2} + \frac{|Dg|^2}{2}$, temos que

$$\int_{B(R_0)} (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, |Du^\epsilon||Dg|\, dx \leq \int_{B(R_0)} (|Du^\epsilon|^p + \epsilon) \left(\frac{|Du^\epsilon|^2}{2} + \frac{|Dg|^2}{2} \right) dx.$$

Daí, substituindo em (5.26), temos que

$$(1 - \frac{1}{2}) \int_{B(R_0)} (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, |Du^\epsilon|^2\, dx \leq \frac{1}{2} \int_{B(R_0)} (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, |Dg|^2\, dx.$$

E portanto

$$\int_{B(R_0)} (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, |Du^\epsilon|^2\, dx \leq \int_{B(R_0)} (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, |Dg|^2\, dx. \tag{5.27}$$

Mas note que pela desigualdade de Hölder temos que

$$\int_{B(R_0)} |Du^\epsilon|^p |Dg|^2\, dx \leq \left(\int_{B(R_0)} |Du^\epsilon|^{p+2}\, dx \right)^{\frac{p}{p+2}} \left(\int_{B(R_0)} |Dg|^{p+2}\, dx \right)^{\frac{2}{p+2}}.$$

Daí, pela desigualdade de Young com ϵ, para $\gamma > 0$ a ser determinado temos que

$$\int_{B(R_0)} |Du^\epsilon|^p |Dg|^2\, dx \leq \frac{p\gamma^{\frac{p+2}{p}}}{p+2} \int_{B(R_0)} |Du^\epsilon|^{p+2}\, dx + \frac{2}{(p+2)\gamma^{\frac{p+2}{2}}} \int_{B(R_0)} |Dg|^{p+2}\, dx.$$

Substituindo em (5.27) obtemos que

$$\int_{B(R_0)} (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, |Du^\epsilon|^2\, dx \leq \frac{p\gamma^{\frac{p+2}{p}}}{p+2} \int_{B(R_0)} |Du^\epsilon|^{p+2}\, dx +$$
$$\frac{2}{(p+2)\gamma^{\frac{p+2}{2}}} \int_{B(R_0)} |Dg|^{p+2}\, dx + \epsilon \int_{B(R_0)} |Dg|^2\, dx.$$

Portanto,

$$(1 - \frac{p\gamma^{\frac{p+2}{p}}}{p+2}) \int_{B(R_0)} |Du^\epsilon|^{p+2}\, dx + \int_{B(R_0)} \epsilon |Du^\epsilon|^2\, dx \leq$$
$$\frac{2}{(p+2)\gamma^{\frac{p+2}{2}}} \int_{B(R_0)} |Dg|^{p+2}\, dx + \epsilon \int_{B(R_0)} |Dg|^2\, dx.$$

Tomando $\gamma = \gamma(p)$ de modo que

$$1 - \frac{p\gamma^{\frac{p+2}{p}}}{p+2} = \frac{1}{2},$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{B(R_0)} |Du^\epsilon|^{p+2}\,dx + \int_{B(R_0)} \epsilon|Du^\epsilon|^2\,dx \leq & C(p)\int_{B(R_0)} |Dg|^{p+2}\,dx + \\ & \epsilon\int_{B(R_0)} |Dg|^2\,dx.\end{aligned}$$

Como $C(p)$ certamente é maior que 1, e como $\epsilon > \epsilon/2$, temos que

$$\begin{gathered}\int_{B(R_0)} |Du^\epsilon|^{p+2}\,dx + \int_{B(R_0)} \epsilon|Du^\epsilon|^2\,dx \leq \\ 2C(p)\left(\int_{B(R_0)} |Dg|^{p+2}\,dx + \epsilon\int_{B(R_0)} |Dg|^2\,dx\right).\end{gathered}$$

Logo,

$$\int_{B(R_0)} \left(|Du^\epsilon|^p + \epsilon\right)|Du^\epsilon|^2\,dx \leq C\int_{B(R_0)} \left(|Dg|^p + \epsilon\right)|Dg|^2\,dx. \tag{5.28}$$

Agora, note que pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{B(R_0)} |Dg|^2\,dx \leq \left(\int_{B(R_0)} \left(|Dg|^2\right)^{\frac{p+2}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{p+2}} |B(R_0)|^{\frac{p}{p+2}}.$$

Logo,

$$\int_{B(R_0)} |Dg|^2\,dx \leq \left(\int_{B(R_0)} |Dg|^{p+2}\,dx\right)^{\frac{2}{p+2}} |B(R_0)|^{\frac{p}{p+2}}.$$

Substituindo em (5.28), obtemos que (como podemos supor $\epsilon < 1$, ele acaba sendo absorvido pela constante)

$$\begin{aligned}\int_{B(R_0)} \left(|Du^\epsilon|^p + \epsilon\right)|Du^\epsilon|^2\,dx &\leq C\int_{B(R_0)} |Dg|^{p+2}\,dx + C\epsilon\int_{B(R_0)} |Dg|^2\,dx \\ &\leq C\int_{B(R_0)} |Dg|^{p+2}\,dx + D\left(\int_{B(R_0)} |Dg|^{p+2}\,dx\right)^{\frac{2}{p+2}} \\ &= C\left(||Dg||_{L^{p+2}}^{p+2} + D||Dg||_{L^{p+2}}^2\right).\end{aligned}$$

Estudando o comportamento da função $f(t) = t^{p+2} + Ct^2$, vemos que $f(t) \leq t^{p+2} + C$ se $0 \leq t \leq 1$ e $f(t) \leq C_2 t^{p+2}$ se $t > 1$. Daí, seja qual for o valor de t, temos que $f(t) \leq C(t^{p+2} + 1)$. Daí concluímos que

$$\int_{B(R_0)} \left(|Du^\epsilon|^p + \epsilon\right)|Du^\epsilon|^2\,dx \leq C\left(\int_{B(R_0)} |Dg|^{p+2}\,dx + 1\right).$$

Mas como $Dg = \eta_\delta * Du$, temos do Lema 3.6 que

$$\int_{B(R_0)} (|Du^\epsilon|^p + \epsilon)\, |Du^\epsilon|^2 \, dx \leq C \left(\int_\Omega |Du|^{p+2} \, dx + 1 \right),$$

como queríamos demonstrar. Agora provemos o item (ii). Vamos dividir a demonstração em alguns passos. Inicialmente, da equação (5.23), temos que

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} |Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k x_i} \right)_{x_j} - \epsilon \Delta u^\epsilon_{x_k} = 0, \quad \text{em} \quad B(R_0),$$

ou seja,

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} |Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k x_i} + \epsilon \delta_{ij} u^\epsilon_{x_k x_i} \right)_{x_j} = 0, \quad \text{em} \quad B(R_0).$$

Gostaríamos de escrever que

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(\left(a_{ij} + \frac{\epsilon}{|Du^\epsilon|^p} \delta_{ij} \right) |Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k x_i} \right)_{x_j} = 0,$$

mas o termo $\frac{\epsilon}{|Du^\epsilon|^p}$ fica ilimitado perto dos pontos tais que $|Du^\epsilon| = 0$. Com isso em mente, definimos

$$W = W_\epsilon = \{ x \in B(R_0) : |Du^\epsilon(x)| > 1 \},$$

e temos que $u^\epsilon_{x_k}$ satisfaz a equação

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(b^\epsilon_{ij} |Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k x_i} \right)_{x_j} = 0 \quad \text{em} \quad W, \tag{5.29}$$

onde

$$b_{ij} = b^\epsilon_{ij} \equiv a_{ij} + \frac{\epsilon}{|Du^\epsilon|^p} \delta_{ij} = p \frac{u^\epsilon_{x_i} u^\epsilon_{x_j}}{|Du^\epsilon|^2} + \left(\frac{\epsilon}{|Du^\epsilon|^p} + 1 \right) \delta_{ij}.$$

Daí note que

$$|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} b_{ij} \xi_i \xi_j = p \frac{\langle Du^\epsilon, \xi \rangle^2}{|Du^\epsilon|^2} + \left(\frac{\epsilon}{|Du^\epsilon|^p} + 1 \right) |\xi|^2 \leq (p + \epsilon + 1) |\xi|^2 \tag{5.30}$$

em W. Note que, apesar dos coeficientes b_{ij} naturalmente dependerem de ϵ, as estimativas acima não dependem (podemos tomar $\epsilon < 1$ na desigualdade à direita). Também note que

$$|b_{ij}| \leq p + \epsilon + 1 \quad \text{em} \quad W. \tag{5.31}$$

Defina agora a função auxiliar

$$w(x) = w_\epsilon(x) = |Du^\epsilon(x)|^{p+2}.$$

Daí,

$$w_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} (p+2)|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k}. \tag{5.32}$$

Portanto,

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij} w_{x_i})_{x_j} = -(p+2) \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij} |Du^\epsilon|^p \sum_k u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k} \right)_{x_j}. \tag{5.33}$$

Daí, passando o somatório em k para fora e derivando com respeito a x_j , temos que

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij} w_{x_i})_{x_j} = -(p+2) \sum_k \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} |Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k x_j} u^\epsilon_{x_i x_k} + u^\epsilon_{x_k} \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij} |Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_i x_k} \right)_{x_j} \right).$$

Mas como $u^\epsilon_{x_k}$ satisfaz (5.29), temos que a parcela direita da equação acima se anula, e daí obtemos

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij} w_{x_i})_{x_j} = -(p+2) \sum_k \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} |Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k x_j} u^\epsilon_{x_i x_k} \right). \tag{5.34}$$

Mas pela condição de elipticidade (5.30), concluímos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} |Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k x_j} u^\epsilon_{x_i x_k} \geq |Du^\epsilon|^p |Du^\epsilon_{x_k}|^2. \tag{5.35}$$

Somando em k, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} |Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k x_j} u^\epsilon_{x_i x_k} \right) \geq |Du^\epsilon|^p |D^2 u^\epsilon|^2 \geq 0.$$

E portanto, por (5.34)

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij} w_{x_i})_{x_j} \leq 0 \quad \text{em} \quad W.$$

Defina daí $v = (w-1)^+$. Da definição de W, temos que $v \equiv 0$ fora de W. Além disso,

$$v_{x_i} = \begin{cases} 0, & \text{q.t.p em} \quad \{w \leq 1\} = \{|Du^\epsilon(x)|^{p+2} \leq 1\} = \{|Du^\epsilon(x)| \leq 1\}, \\ w_{x_i}, & \text{q.t.p em} \quad \{w > 1\}. \end{cases}$$

Dai $v_{x_i} = 0$ q.t.p fora de W, e portanto

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij} v_{x_i}\right)_{x_j} \leq 0 \quad \text{em} \quad B(R_0)$$

no sentido fraco, ou seja, para cada $\eta \in C_0^\infty(B(R_0))$ com $\eta \geq 0$ em $B(R_0)$ vale que

$$\int_{B(R_0)} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} v_{x_i} \eta_{x_j}\, dx \leq 0 \quad \text{em} \quad B(R_0).$$

Daí, podemos aplicar o método da iteração de Moser para essa equação e obter, do Corolário 2.5, que

$$\max_{B(R_0/2)} v \leq C(q) \left(⨍_{B(3R_0/4)} v^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{para todo} \quad q > 1. \tag{5.36}$$

Daí, tomemos

$$q = 1^* = \frac{n}{n-1}.$$

Aplicando o Lema 3.8 (com $A = \operatorname{diam} \Omega$) temos que

$$\left(⨍_{B(3R_0/4)} v^{1^*}\, dx \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C ⨍_{B(3R_0/4)} |Dv| + v\, dx, \tag{5.37}$$

onde $C = C(n)$. Mas da equação (5.32), temos que

$$w_{x_i} \leq \frac{(p+2)}{2} |Du^\epsilon|^p \sum_{k=1}^{n} \left(u^\epsilon_{x_k}\right)^2 + \left(u^\epsilon_{x_i x_k}\right)^2 = \frac{(p+2)}{2} |Du^\epsilon|^p \left(|Du^\epsilon|^2 + |Du^\epsilon_{x_i}|^2\right).$$

E portanto,

$$|Dw| \leq \frac{(p+2)}{2} |Du^\epsilon|^p \left(|Du^\epsilon|^2 + |D^2 u^\epsilon|^2\right).$$

Como $|Dv| \leq |Dw|$ em $B(3R_0/4)$ e $v = \max\{|Du^\epsilon|^{p+2} - 1, 0\} \leq |Du^\epsilon|^{p+2}$, temos, usando (5.37) que

$$\left(⨍_{B(3R_0/4)} v^{1^*}\, dx \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C ⨍_{B(3R_0/4)} \frac{(p+2)}{2} |Du^\epsilon|^p \left(|Du^\epsilon|^2 + |D^2 u^\epsilon|^2\right) + |Du^\epsilon|^{p+2}\, dx,$$

ou seja,

$$\left(⨍_{B(3R_0/4)} v^{1^*}\, dx \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C ⨍_{B(3R_0/4)} |Du^\epsilon|^{p+2} + |Du^\epsilon|^p |D^2 u^\epsilon|^2\, dx. \tag{5.38}$$

Por último, juntando as equações (5.34) e (5.33), obtemos que

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \left(b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k}\right)_{x_j} = \left(\sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k x_j} u^\epsilon_{x_i x_k}\right) \quad \text{em} \quad W. \quad (5.39)$$

Multiplicando a equação (5.39) por ζ^2, onde ζ uma função de corte suave tal que $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 1$ em $B(3R_0/4)$, $\zeta \equiv 0$ perto de $\partial B(R_0)$ e $|D\zeta| \leq \frac{C}{R_0}$, obtemos

$$\int_W \zeta^2 \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k}\right)_{x_j} dx = \int_W \zeta^2 \left(\sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k x_j} u^\epsilon_{x_i x_k}\right) dx. \quad (5.40)$$

Vamos estimar as integrais acima. Comecemos pelo lado direito. Pela equação (5.35), temos que

$$\int_W \zeta^2 \left(\sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k x_j} u^\epsilon_{x_i x_k}\right) dx \geq \int_W \zeta^2 |Du^\epsilon|^p |D^2 u^\epsilon|^2 \, dx. \quad (5.41)$$

Agora, estimemos o lado esquerdo. Integrando por partes, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_W \zeta^2 \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k}\right)_{x_j} dx &= -2\int_W \sum_{i,j,k=1}^{n} \zeta\zeta_{x_j} b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k} \, dx \\ &\quad + \int_{\partial W \cap B(R_0)} \zeta^2 \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k} \nu^j \, dS \\ &\quad + \int_{\partial W \cap \partial B(R_0)} \zeta^2 \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k} \nu^j \, dS,\end{aligned}$$

onde $\nu = (\nu^1, \ldots, \nu^n)$ é o vetor normal unitário que aponta para o exterior de W. Como em $\partial B(R_0)$ temos que $\zeta \equiv 0$, a integral sobre $\partial W \cap \partial B(R_0)$ acima se anula.

Estimemos a integral sobre $\partial W \cap B(R_0)$. Como $\partial W \cap B(R_0) = \{x \in B(R_0) : |Du^\epsilon| = 1\} = \{x \in B(R_0) : w = 1\}$, temos que

$$\nu = -\frac{\nabla w}{|\nabla w|}.$$

O sinal negativo se justifica pois o vetor gradiente aponta na direção de maior crescimento da função. Portanto, ∇w aponta para o interior de W, e o sinal negativo fica justificado. Daí,

$$\int_{\partial W \cap B(R_0)} \zeta^2 \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k} \nu^j \, dS = -\int_{\partial W \cap B(R_0)} \frac{\zeta^2}{|Dw|} \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ij} u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k} w_{x_j} \, dS. \quad (5.42)$$

Mas por (5.32) temos que

$$w_{x_i} = \sum_{k=1}^{n}(p+2)|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k} = \sum_{k=1}^{n}(p+2)u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k} \quad \text{em} \quad W,$$

e portanto a equação (5.42) se reduz a

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial W\cap B(R_0)} \frac{\zeta^2 b_{ij} w_{x_j}}{|Dw|}\sum_{k=1}^{n} u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k}\, dS = -\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial W\cap B(R_0)} \frac{\zeta^2 b_{ij} w_{x_j}}{|Dw|}\left(\frac{w_{x_i}}{p+2}\right) dS.$$

Mas de (5.30), temos que

$$-\int_{\partial W\cap B(R_0)} \frac{\zeta^2}{(p+2)|Dw|}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} w_{x_i} w_{x_j}\, dS \leq -\int_{\partial W\cap B(R_0)} \frac{\zeta^2}{(p+2)}|Dw|\, dS \leq 0.$$

Concluímos que

$$\int_{\partial W\cap B(R_0)} \zeta^2 \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k}\nu^j\, dS \leq 0,$$

de modo que

$$\int_W \zeta^2 \sum_{i,j,k=1}^{n}\left(b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k}\right)_{x_j} dx \leq -2\int_W \sum_{i,j,k=1}^{n} \zeta\zeta_{x_j} b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k}\, dx.$$

Daí, tomando o módulo do lado direito e usando (5.31) obtemos

$$\int_W \zeta^2 \sum_{i,j,k=1}^{n}\left(b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k}\right)_{x_j} dx \leq 2(1+p+\epsilon)\int_W \zeta|D\zeta||Du^\epsilon|^p|Du^\epsilon||D^2u^\epsilon|\, dx.$$

Supondo que $\epsilon < 1$ temos que $(1+p+\epsilon) < 2+p$. Ainda note que

$$\begin{aligned} &2(2+p)\int_W \zeta|D\zeta||Du^\epsilon|^p|Du^\epsilon||D^2u^\epsilon|\, dx = \\ &2(2+p)\int_W (\zeta|Du^\epsilon|^{\frac{p}{2}}|D^2u^\epsilon|)(|D\zeta||Du^\epsilon|^{\frac{p}{2}}|Du^\epsilon|)\, dx. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy com ϵ, temos, para $\beta > 0$ a ser determinado, que

$$\begin{aligned} &2(2+p)\int_W (\zeta|Du^\epsilon|^{\frac{p}{2}}|D^2u^\epsilon|)(|D\zeta||Du^\epsilon|^{\frac{p}{2}}|Du^\epsilon|)\, dx \\ &\leq (2+p)\int_W \beta(\zeta^2|Du^\epsilon|^p|D^2u^\epsilon|^2)\, dx + (2+p)\int_W \frac{1}{\beta}(|D\zeta|^2|Du^\epsilon|^p|Du^\epsilon|^2)\, dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_W \zeta^2 \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(b_{ij}|Du^\epsilon|^p u^\epsilon_{x_k} u^\epsilon_{x_i x_k}\right)_{x_j} dx \leq \beta(2+p)\int_W (\zeta^2|Du^\epsilon|^p|D^2u^\epsilon|^2)\,dx +$$
$$\frac{(2+p)}{\beta}\int_W (|D\zeta|^2|Du^\epsilon|^p|Du^\epsilon|^2)\,dx.$$

Substituindo a estimativa acima e (5.41) em (5.40) concluímos que

$$(1-(2+p)\beta)\int_W \zeta^2|Du^\epsilon|^p|D^2u^\epsilon|^2\,dx \leq$$
$$\frac{2+p}{\beta}\int_W |D\zeta|^2|Du^\epsilon|^{p+2}\,dx.$$

Tomando $\beta > 0$ de modo que $1-(2+p)\beta = \frac{1}{2}$, ou seja,

$$\beta = \frac{1}{2(2+p)},$$

temos que

$$\int_W \zeta^2|Du^\epsilon|^p|D^2u^\epsilon|^2\,dx \leq 4(2+p)^2\int_W |D\zeta|^2|Du^\epsilon|^{p+2}\,dx.$$

Daí, da definição de ζ, temos que

$$\int_{W\cap B(3R_0/4)} |Du^\epsilon|^p|D^2u^\epsilon|^2\,dx \leq \frac{4(2+p)^2}{R_0^2}\int_{W\cap B(R_0)} |Du^\epsilon|^{p+2}\,dx. \tag{5.43}$$

Reunindo (5.36) e (5.38), e usando que $v \equiv 0$ fora de W, concluímos que

$$\max_{B(R_0/2)} |Du^\epsilon|^{p+2} \leq C\left(\fint_{B(3R_0/4)} v^{1^*}\,dx\right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C\fint_{B(3R_0/4)} |Dv| + v\,dx =$$
$$= \frac{C}{R_0^n}\int_{W\cap B(3R_0/4)} |Dv| + v\,dx \leq \frac{C}{R_0^n}\int_{W\cap B(3R_0/4)} |Du^\epsilon|^{p+2} + |Du^\epsilon|^p|D^2u^\epsilon|^2\,dx.$$

Portanto, por (5.43),

$$\max_{B(R_0/2)} |Du^\epsilon|^{p+2} \leq \frac{C}{R_0^{n+2}}\int_{W\cap B(R_0)} |Du^\epsilon|^{p+2}\,dx$$

e portanto,

$$\max_{B(R_0/2)} |Du^\epsilon|^{p+2} \leq \frac{C}{R_0^{n+2}}\int_{B(R_0)} |Du^\epsilon|^{p+2}\,dx.$$

Usando o primeiro item do lema 5.9, temos que

$$\max_{B(R_0/2)} |Du^\epsilon|^{p+2} \leq \frac{C}{R_0^{n+2}}\left(\int_\Omega |Du|^{p+2}\,dx + 1\right) = C_7.$$

Daí o teorema fica provado. ■

Capítulo 6

O teorema final

Finalmente, podemos provar o principal teorema da dissertação.

Teorema 6.1. *Suponha que $u \in W^{1,p+2}(\Omega)$ é uma solução fraca de*

$$\operatorname{div}(|Du|^p Du) = 0 \quad em \quad \Omega.$$

Então existe uma constante $\alpha = \alpha(p,n) > 0$ e, para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe uma constante $C(\Omega') = C(\Omega', p, n, ||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)})$ tal que

$$\max_{\Omega'} |Du| \leq C(\Omega')$$

e

$$[Du]_{C^\alpha(\Omega')} \leq C(\Omega').$$

Demonstração: Seja $B(R_0)$ uma bola compactamente contida em Ω. Sejam $\epsilon > 0$ e u^ϵ solução suave do problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}|Du^\epsilon|^p Du^\epsilon + \epsilon \Delta u^\epsilon = 0 \quad \text{em} \quad B(R_0), \\ u^\epsilon = g = \rho_\epsilon * u, \quad \text{em} \quad \partial B(R_0). \end{cases}$$

Do Teorema 5.9, temos que

$$\max_{B(R_0/2)} |Du^\epsilon| \leq C = C(p, n, R_0, ||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)}).$$

Daí, do Teorema 5.6, concluímos que

$$[Du^\epsilon]_{C^\alpha(B(R_0/4))} \leq C(p, n, R_0, ||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)}),$$

sendo que a constante acima não depende de ϵ. Agora, tomemos $\Omega'' \subset\subset B(R_0)$, e defina $d = \text{dist}(\partial\Omega'', \partial B(R_0))$. Seja $0 < R < d$ e considere a cobertura de Ω'' dada por

$$\Omega'' \subset \bigcup_{x \in \Omega''} B(x, R/8).$$

Como $\overline{\Omega''}$ é compacto, existe uma subcobertura finita $\{B_{R/8}(x_i)\}_{i=1}^N$ tal que

$$\Omega'' \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, R/8).$$

Mas cada $B(x_i, R)$ é uma bola compactamente contida em $B(R_0)$. Daí,

$$\max_{B(x_i, R/2)} |Du^\epsilon| \leq C_i = C_i(p, n, R, ||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)}),$$

e portanto,

$$[Du^\epsilon]_{C^\alpha(B(x_i, R/4))} \leq C_i(p, n, R, ||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)}).$$

Seja $C = \max_{i=1,\ldots,N} C_i$. Então, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$,

$$||Du^\epsilon||_{C^\alpha(B(x_i, R/4))} \leq C = C(p, n, R, ||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)})$$

e, em particular,

$$||Du^\epsilon||_{C^\alpha(B(x_i, R/8))} \leq C = C(p, n, R, ||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)}).$$

Agora, mostremos que

$$||Du^\epsilon||_{C^\alpha(\Omega'')} \leq C(\Omega'').$$

É claro que

$$\max_{\Omega''} |Du^\epsilon| \leq \max_{\cup B(x_i, R/8)} |Du^\epsilon| \leq C(\Omega'').$$

Resta provar que

$$[Du^\epsilon]_{C^\alpha(\Omega'')} = \sup_{x, y \in \Omega''} \frac{|Du^\epsilon(x) - Du^\epsilon(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(\Omega'').$$

Daí, sejam $x, y \in \Omega''$. Vamos dividir em três casos: Primeiramente, se existe $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ tal que $x, y \in B(x_i, R/8)$ então

$$\frac{|Du^\epsilon(x) - Du^\epsilon(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C.$$

No segundo caso, $|x-y| < R/8$ mas não existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tal que $x, y \in B(x_i, R/8)$. Nesse caso, existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tal que $x, y \in B(x_i, R/4)$ Daí,

$$\frac{|Du^\epsilon(x) - Du^\epsilon(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq ||Du^\epsilon||_{C^\alpha(B_{R/4}(x_i))} \leq C$$

No terceiro caso, $|x-y| > R/8$ e não existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tal que $x, y \in B(x_i, R/8)$. Daí,

$$\frac{|Du^\epsilon(x) - Du^\epsilon(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|Du^\epsilon(x) - Du^\epsilon(y)|}{(R/8)^\alpha} \leq 2\frac{\max_{\Omega''}|Du^\epsilon|}{(R/8)^\alpha} = C_0.$$

Daí, a afirmação fica provada. Portanto,

$$||Du^\epsilon||_{C^\alpha(\Omega'')} \leq C(\Omega'').$$

Dito de outra forma,

$$\max_{\Omega''}|Du^\epsilon| + [Du^\epsilon]_{C^\alpha(\Omega'')} \leq C(\Omega'').$$

Como

$$\max_{\Omega''}|Du^\epsilon| \leq C(\Omega''),$$

temos que a família de funções $\{u^\epsilon\}$ é equicontínua. De fato, pelo teorema do valor médio, temos que para cada $x, y \in \Omega''$ vale

$$|u^\epsilon(x) - u^\epsilon(y)| \leq C|x-y| \leq C\,\mathrm{diam}(\Omega''). \tag{6.1}$$

Como C independe de ϵ, a inequação acima à esquerda nos permite concluir que a família de funções $\{u^\epsilon\}$ é equicontínua. Provemos que ela é uniformemente limitada em ϵ. Note que

$$u^\epsilon - \rho_\epsilon * u \in W_0^{1,p+2}(B(R_0)). \tag{6.2}$$

Daí, pela desigualdade de Sobolev, existe uma constante $C = C(n, p, B(R_0))$ tal que

$$||u^\epsilon - \rho_\epsilon * u||_{L^{p+2}(B(R_0))} \leq C||Du^\epsilon - D(\rho_\epsilon * u)||_{L^{p+2}(B(R_0))}.$$

Usando essa inequação e a desigualdade triangular, obtemos que

$$\begin{aligned}||u^\epsilon||_{L^{p+2}(B(R_0))} &\leq ||u^\epsilon - \rho_\epsilon * u||_{L^{p+2}(B(R_0))} + ||\rho_\epsilon * u||_{L^{p+2}(B(R_0))} \\ &\leq C||Du^\epsilon - D(\rho_\epsilon * u)||_{L^{p+2}(B(R_0))} + ||\rho_\epsilon * u||_{L^{p+2}(B(R_0))}.\end{aligned}$$

Daí, pelo item (i) do Teorema 5.9 e do Lema 3.6, temos que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$
\begin{aligned}
||u^\epsilon||_{L^{p+2}(B(R_0))} &\leq C\left(||Du^\epsilon||_{L^{p+2}(B(R_0))} + ||\rho_\epsilon * Du||_{L^{p+2}(B(R_0))}\right) + ||u||_{L^{p+2}(\Omega)} \\
&\leq C||Du^\epsilon||_{L^{p+2}(B(R_0))} + C||Du||_{L^{p+2}(\Omega)} + ||u||_{L^{p+2}(\Omega)} \\
&= C(||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)}, p, n, B(R_0)) = C.
\end{aligned}
$$

As contas acima, junto com (6.1) garante que a sequência $\{u^\epsilon\}$ é uniformemente limitada em ϵ.
Observe que o item (i) do Teorema 5.9 garante que

$$||Du^\epsilon||_{L^{p+2}(B(R_0))} \leq C(||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)}, p, n, B(R_0)),$$

de modo que a sequência (u^ϵ) é uma sequência limitada na norma de Sobolev. Daí, deve existir uma função $\overline{v}$ tal que, a menos de subsequência,

$$u^\epsilon \rightharpoonup \overline{v} \quad \text{fracamente em} \quad W^{1,p+2}(B(R_0)).$$

Pelo teorema de Arzelá-Ascoli, existem uma função v e uma subsequência da família $\{u^\epsilon\}$, que denotaremos por (u^ϵ) tal que

$$u^\epsilon \to v \quad \text{uniformemente em } \Omega'' \quad \text{à medida que} \quad \epsilon \to 0.$$

Por outro lado, como

$$[Du^\epsilon]_{C^\alpha(\Omega'')} \leq C(\Omega''),$$

temos que a família de funções $\{Du^\epsilon\}$ é equicontínua. Isso ocorre pois para cada $x, y \in \Omega''$

$$|Du^\epsilon(x) - Du^\epsilon(y)| \leq C|x-y|^\alpha \leq C\,\mathrm{diam}(\Omega'')^\alpha$$

e portanto, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, existe uma função vetorial $\overrightarrow{w}$ tal que, a menos de subsequência,

$$Du^\epsilon \to \overrightarrow{w} \quad \text{uniformemente em } \Omega'' \quad \text{à medida que} \quad \epsilon \to 0.$$

Segue que $\overrightarrow{w} = Dv$. Ou seja, temos que, a menos de subsequência,

$$u^\epsilon \to v \quad \text{uniformemente em } \Omega''$$

$$Du^\epsilon \to Dv \quad \text{uniformemente em } \Omega''.$$

Agora, vamos mostrar que existe uma subsequência (u^ϵ) que converge a v em qualquer conjunto compacto de $B(R_0)$. Para isso, considere uma sequência de conjuntos $\{\Omega_1, \Omega_2, \ldots\}$ compactamente contidos na bola $B(R_0)$ e tais que

$$\Omega_i \subset \Omega_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$$

e

$$B(R_0) = \cup_{i=1}^\infty \Omega_i.$$

Então, o que fizemos até aqui nos permite afirmar que existe uma subsequência (u_1^ϵ) de $\{u^\epsilon\}$

$$(u_1^\epsilon) = (u_{11}^\epsilon, u_{12}^\epsilon, \ldots)$$

que converge uniformemente a v em Ω_1 e cujas derivadas convergem a Dv em Ω_1. Feito isso, podemos aplicar o teorema de Arzelá Ascoli para a sequência (u_1^ϵ), de modo que obtemos uma subsequência (u_2^ϵ)

$$(u_2^\epsilon) = (u_{21}^\epsilon, u_{22}^\epsilon, \ldots)$$

de (u_1^ϵ) que converge a v uniformemente em Ω_2 e cujas derivadas convergem uniformemente a Dv em Ω_2. Indutivamente, dada a sequência (u_{n-1}^ϵ) conseguimos uma subsequência (u_n^ϵ)

$$(u_n^\epsilon) = (u_{n1}^\epsilon, u_{n2}^\epsilon, \ldots)$$

de (u_{n-1}^ϵ) que converge uniformemente a v em Ω_n e cujas derivadas convergem uniformemente a Dv em Ω_n. Segue daí que a sequência (u^ϵ) dada por

$$(u^\epsilon) = (u_{11}^\epsilon, u_{22}^\epsilon, \ldots, u_{nn}^\epsilon, \ldots)$$

obtida pelo método da diagonal converge uniformemente para v em qualquer subconjunto compacto de $B(R_0)$. Daí,

$$u^\epsilon \to v \quad \text{uniformemente em cada} \quad \Omega' \subset\subset B(R_0)$$

$$Du^\epsilon \to Dv \quad \text{uniformemente em cada} \quad \Omega' \subset\subset B(R_0).$$

Mas cada função u^ϵ é solução fraca da equação

$$\begin{cases} \text{div}|Du^\epsilon|^p Du^\epsilon + \epsilon \Delta u^\epsilon = 0 & \text{em} \quad B(R_0), \\ u^\epsilon = g_\epsilon = \rho_\epsilon * u, & \text{em} \quad \partial B(R_0). \end{cases}$$

Ou seja, para cada $\eta \in C_0^\infty(B(R_0))$ vale que

$$\int_{B(R_0)} |Du^\epsilon|^p \langle Du^\epsilon, D\eta\rangle\, dx + \epsilon \int_{B(R_0)} \langle Du^\epsilon, D\eta\rangle\, dx = 0. \tag{6.3}$$

Mas como η tem suporte compacto, digamos Ω_η, e como a convergência de u^ϵ e Du^ϵ a v e Dv respectivamente é uniforme em Ω_η, concluímos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Omega_\eta} |Du^\epsilon|^p \langle Du^\epsilon, D\eta\rangle\, dx = \int_{\Omega_\eta} |Dv|^p \langle Dv, D\eta\rangle\, dx$$

e

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Omega_\eta} \langle Du^\epsilon, D\eta\rangle\, dx = \int_{\Omega_\eta} \langle Dv, D\eta\rangle\, dx.$$

E portanto,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \int_{\Omega_\eta} \langle Du^\epsilon, D\eta\rangle\, dx = 0.$$

Daí, aplicando o limite em (6.3), obtemos que v é solução da equação

$$\int_{\Omega_\eta} |Dv|^p \langle Dv, D\eta\rangle\, dx = 0,$$

ou seja, v é solução fraca da equação

$$\operatorname{div}(|Du|^p Du) = 0 \quad \text{em} \quad B(R_0).$$

Mas como $u^\epsilon \to v$ uniformemente em compactos de $B(R_0)$, concluímos que $\overline{v} = v$, ou seja,

$$u^\epsilon \rightharpoonup v \quad \text{fracamente em} \quad W^{1,p+2}(B(R_0)).$$

Mas do Lema 3.6 temos que

$$\rho_\epsilon * u \to u \quad \text{em} \quad W^{1,p+2}(B(R_0)).$$

E portanto,

$$u^\epsilon - \rho_\epsilon * u \rightharpoonup v - u \quad \text{em} \quad W^{1,p+2}(B(R_0)).$$

Mas o conjunto $W_0^{1,p+2}(\Omega)$ é um subconjunto fechado e convexo de $W^{1,p+2}(\Omega)$, e portanto $W_0^{1,p+2}(\Omega)$ é fechado com respeito à topologia fraca. Daí, por causa de (6.2) devemos ter que

$$v - u \in W_0^{1,p+2}(\Omega).$$

E portanto, $v = u$ em $\partial\Omega$ no sentido do traço. Daí, por unicidade, $u = v$. Daí, concluímos que $u \in C^1(B(R_0))$. Conforme o item (b) do Teorema 5.9 anterior, temos que

$$\max_{B(R_0/2)} |Du^\epsilon| \leq C_7$$

para alguma constante $C_7 = C_7(R_0)$ que não depende de ϵ. Das estimativas a priori, concluímos que

$$||Du^\epsilon||_{C^\alpha(B(R_0/4))} \leq C.$$

Como Du^ϵ converge a Du uniformemente em $B(R_0/4)$, temos que

$$||Du||_{C^\alpha(B(R_0/4))} \leq C. \tag{6.4}$$

E daí o teorema fica provado para bolas compactamente contidas em Ω. Agora, tomemos $\Omega' \subset\subset \Omega$, e defina $d' = \text{dist}(\partial\Omega', \partial\Omega)$. Seja $0 < R' < d'$ e considere a cobertura de Ω' dada por

$$\Omega' \subset \bigcup_{y \in \Omega'} B(y, R'/8).$$

Como $\overline{\Omega'}$ é compacto, existe uma subcobertura finita $\{B(y_i, R'/8)\}_{i=1}^M$ tal que

$$\Omega' \subset \bigcup_{i=1}^M B(y_i, R'/8).$$

Mas cada $B(y_i, R')$ é uma bola compactamente contida em Ω. Daí, por (6.4) temos que

$$[Du]_{C^\alpha(B(y_i,R'/4))} \leq C_i(p, n, R', ||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)}),$$

Seja $C = \max_{i=1,\ldots,N} C_i$. Então, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, M\}$,

$$||Du||_{C^\alpha(B(y_i,R'/4))} \leq C = C(p, n, R', ||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)})$$

e, em particular,

$$||Du||_{C^\alpha(B(y_i,R'/8))} \leq C = C(p, n, R', ||u||_{W^{1,p+2}(\Omega)}).$$

Daí, pelo mesmo argumento usado anteriormente, concluímos que

$$||Du||_{C^\alpha(\Omega')} \leq C(\Omega')$$

e o teorema fica provado. ∎

Referências Bibliográficas

[1] H. Brezis, “Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations”, Springer, 2011.

[2] E. De Giorgi, “ Sulla differenziabilità e l’analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari”, *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3)*, **3**, (1957), 25-43 (Italiano)

[3] L.C Evans, “Partial Differential Equations”, American Mathematical Society, Berkeley, 2000.

[4] L.C Evans, “A new proof of local $C^{1,\alpha}$ regularity for solutions of certain degenerate elliptic P.D.E.”, *Journal of Differential Equations* **45** (1982), pp. 356-373.

[5] D. Gilbarg and N.S Trudinger, “Elliptic Partial Differential Equations of Second Order”, Springer-Verlag, New York, 1977.

[6] S. Granlund, P. Lindqvist and O. Martio “Conformally Invariant Variational Integrals”, AMS **277**, Number 1 (1983), 43-73

[7] O. Ladyzhenskaya and N. Uraltseva, “Linear and Quasilinear Elliptic Equations”, Academic Press, New York, 1968.

[8] J. L Lewis, “Smoothness of certain degenerate elliptic equation”, Proc. AMS, **80** (1980), 259-265

[9] J. Moser, “A new proof of DeGiorgi’s theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations”, *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 457-468.

[10] J. Nash, "Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations", *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 931-954.

[11] P. Tolksdorf, "Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations", Journal of Differential Equations, **51** (1984), 126-150.

[12] K. Uhlenbeck, "Regularity for a class of nonlinear elliptic systems", *Acta Math* **138** (1977), 219-240.

[13] N.N Ural'ceva, "Degenerate quasilinear elliptic systems", *Zap. Nauen. Sem. Leningrado. Otdel. Mat. Inst. Steklov* **7** (1968), 184-222. (em Russo)