

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Problema exterior de Dirichlet para a
equação das superfícies de curvatura média
constante no espaço hiperbólico**

Tese de Doutorado

Adilson da Silva Nunes

Porto Alegre, 28 de novembro de 2017

Tese submetida por Adilson da Silva Nunes¹, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll

Professora Co-Orientadora:

Profa. Dra. Patrícia Kruse Klaser

Banca examinadora:

Prof. Dr. Álvaro Krüger Ramos (UFRGS)

Prof. Dr. Ari João Aiolfi (UFSM)

Profa. Dra. Keti Tenenblat (UNB)

Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (UFRGS, ORIENTADOR)

Profa. Dra. Patrícia Kruse Klaser (UFSM, CO-ORIENTADORA)

¹Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por me conceder forças para superar todas as dificuldades e indicar os caminhos certos a trilhar nessa caminhada.

Agradeço imensamente a minha família por toda estrutura que me proporcionaram para que este momento se tornasse realidade. Vocês foram sempre meu apoio e motivação nos momentos mais difíceis.

Aos colegas da pós, não só pelos momentos de discussões matemáticas, mas também por todos momentos de descontração e companheirismo. Estendo esse agradecimento ao colegas da pós da UFSM que me receberam gentilmente em sua universidade na parte final deste trabalho.

Aos membros da banca por suas valiosas contribuições.

Aos meus orientadores, Jaime e Patrícia, por sempre se mostrarem solícitos em me ajudar e motivar quando necessário. Obrigado por todo aprendizado proporcionado com suas orientações e desafios. Vocês foram mais que orientadores, foram amigos.

A Rosane por estar sempre de portas abertas para nos ajudar no fosse preciso, suavizando nossas burocracias e nos alegrando com suas boas conversas.

Em especial a minha esposa, Juliana Nunes, que foi essencial para que tudo isso acontecesse. Você me apoiou nos momentos mais difíceis e sempre acreditou em mim me mantendo motivado e focado. Obrigado também pela ajuda com as discussões matemáticas e incansáveis revisões na conclusão do trabalho. Foste amiga, companheira de vida e profissional. Sou muito grato a Deus por ter feito meu caminho cruzar com o seu. Essa conquista é nossa.

Agradeço ao Cnpq e Capes pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho mostramos que dado um domínio exterior de classe C^0 contido em uma superfície umbílica de \mathbb{H}^3 , com curvatura média constante $H \in [0, 1)$, existe uma família de gráficos de Killing com curvatura média constante H . O bordo de cada um destes gráficos está contido nesta superfície umbílica e a norma do gradiente da função no bordo pode ser prescrita por um certo valor $s \geq 0$.

Palavras-chave: Superfícies de curvatura média constante. Espaço hiperbólico. Domínios Exteriores. Gráficos de Killing.

ABSTRACT

In this paper we show that given an exterior domain of class C^0 contained in an umbilical surface of \mathbb{H}^3 , with constant mean curvature $H \in [0, 1)$, there exists a family of Killing graphs with constant mean curvature H . The boundary of each of these graphs is contained in this umbilical surface and the norm of the gradient of the function in the boundary can be prescribed by a certain value $s \geq 0$.

Keywords: Constant mean curvature surfaces. Hyperbolic Space. Exterior domains. Killing graphs.

SUMÁRIO

1	Introdução	7
2	Gráficos de Killing em variedades riemannianas	14
2.1	Gráficos de Killing	14
2.2	Lemas de análise	25
3	Alguns aspectos da geometria hiperbólica	26
3.1	Espaço hiperbólico	26
3.1.1	Hipersuperfícies umbílicas	26
3.1.2	Modelo do semiespaço superior	28
3.2	Gráficos de Killing no espaço hiperbólico	30
4	Existência de soluções para o problema exterior de Dirichlet em \mathbb{H}^3	33
4.1	Superfícies de cmc radialmente simétricas	33
4.2	Gráficos mínimos	42
4.3	Gráficos de cmc $H \in (0, 1)$	48
	Referências Bibliográficas	57

Introdução

Uma das áreas da geometria que desperta um grande interesse de estudo é a da teoria das superfícies mínimas. O primeiro matemático, que temos conhecimento, a definir uma superfície mínima foi Lagrange, em 1760. Dizemos que uma superfície é mínima se localmente ela minimiza o funcional área. Isso é equivalente ao fato de sua curvatura média ser identicamente nula.

Superfícies mínimas permitem uma descrição física através das películas de sabão. Isso é feito mergulhando-se uma moldura formada por um arame, em um recipiente com água e sabão, e retirando-a em seguida. O que se mostra é que a película formada assume uma posição onde, em seus pontos regulares, a curvatura média é zero.

Essa conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão, motivou o problema de Plateau, que foi um físico belga que realizou experimentos com películas de sabão por volta de 1850. A formulação do problema pode ser escrita da seguinte forma: dada uma curva fechada $C \subset \mathbb{R}^3$, quer mostrar-se a existência de uma superfície S de área mínima tendo C como fronteira.

Colocando-se o problema considerado por Plateau no contexto de superfícies do tipo gráfico sobre um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, é possível mostrar, através do cálculo das variações, que dada uma função $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ temos que se uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é solução do seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_0(u) := \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} u}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} u|^2}} = 0 & u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}, \quad (1.1)$$

onde div e grad são, respectivamente, divergente e gradiente de \mathbb{R}^2 então o gráfico de u é uma superfície mínima de \mathbb{R}^3 .

Um dos primeiros grandes avanços no estudo desse problema é devido a Radó (1930). Ele mostrou, em [Ra], que se o domínio Ω for convexo então o problema admite solução para qualquer dado de fronteira contínuo φ . Mais tarde, ele mesmo construiu um exemplo de um domínio Ω não convexo para o qual existe uma função $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ que torna o problema (1.1) sem solução. Este exemplo é conhecido como tetraedro de Radó (ver [Ra1]).

Alguns anos após os estudos de Radó, R. Finn (veja [Fi1] e [Fi2]) mostrou a necessidade da convexidade do domínio Ω para que se tenha solução para toda $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Esses dois resultados mostram que se Ω é um domínio limitado de \mathbb{R}^2 , então o problema (1.1) possui solução para qualquer função $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ se e somente se Ω for convexo.

Intimamente relacionado ao problema das superfícies mínimas está o problema das superfícies de curvatura média constante (cmc). De forma análoga ao caso das mínimas, podemos obter o seguinte problema de Dirichlet associado: dados $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e H um número real, para cada $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ queremos encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, satisfazendo

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_H(u) := \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} u}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} u|^2}} + 2H = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}. \quad (1.2)$$

Nesse caso, Serrin (1970) mostrou que o problema admite solução para toda $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ se e somente se a curvatura do bordo de Ω é maior ou igual a $2H$.

No caso de domínios do plano que são ilimitados e convexos, R. Sa Earp e

H. Rosenberg [ER] provaram a existência de soluções para dados de fronteira limitados e contínuos, desde que Ω não seja o semiplano. Considerando que Ω é o semiplano, P. Collin e R. Krust [CK] mostraram a existência de soluções para dados de fronteira contínuos com crescimento linear.

Para domínios não convexos e ilimitados existem trabalhos de diversos autores, como por exemplo em [Ni], [ET], [KT] e [RT], onde esse problema é investigado nos chamados *domínios exteriores*, que são domínios cujo complementar é compacto. Em 2001, J. Ripoll [R] mostrou a existência de gráficos mínimos em domínios exteriores de classe C^0 para dados de fronteira nulos através do seguinte resultado, o qual enunciamos em um caso particular

Teorema 1.1. *Sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ curvas de Jordan que limitam os domínios fechados $G_i \subset \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, m$ tal que $G_i \cap G_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Defina*

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_m)$$

e seja $s \geq 0$ dado. Então existe uma função não negativa $u_s \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que é solução de (1.2), com $H = 0$ e $\varphi = 0$, tal que

$$\sup_{\Omega} |\nabla u_s| = s.$$

Segue que

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\max_{C_R} u_s}{R} < +\infty,$$

onde C_R é o círculo centrado na origem de raio R .

Observe que a condição $\sup_{\Omega} |\nabla u_s| = s$ mostra que a solução u_s não é, para $s \neq 0$, a solução trivial.

Com desenvolvimento da geometria riemanniana, esses problemas naturalmente começaram a ser investigados em variedades mais gerais que o espaço euclidiano. Uma generalização bem conhecida de gráficos euclidianos é a de gráficos em variedades do tipo $M \times \mathbb{R}$, que são chamados de gráficos

verticais. Nesse caso, dado um domínio $\Omega \subset M$ e uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, define-se o gráfico de u como $Gr(u) = \{(x, u(x)) \mid x \in \Omega\} \subset M \times \mathbb{R}$. Um resultado nesse contexto pode ser encontrado no trabalho de N. Espírito-Santo e J. Ripoll [EsR] onde os autores mostram o seguinte resultado para gráficos em variedades do tipo $M \times \mathbb{R}$:

Teorema 1.2. *Assuma que M é uma variedade simplesmente conexa e que a curvatura seccional K_M de M satisfaz $K_M \leq -k^2 < 0$ para alguma constante positiva k . Suponha que Ω é um domínio de M satisfazendo a condição da esfera exterior, a saber, dado $p \in \partial\Omega$ existe uma esfera geodésica de M passando por p , tangente a $\partial\Omega$ em p a qual é fronteira de uma bola geodésica contendo Ω^c .*

Dado um número real não negativo s , existe uma solução limitada $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{M}(u) := \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} u}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} u|^2}} = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}, \quad (1.3)$$

onde div e grad são, respectivamente, divergente e gradiente de M , tal que

$$\limsup_{x \rightarrow \partial\Omega} |\operatorname{grad} u(x)| = s$$

e

$$\max_{\Omega} |u| \leq \frac{2s}{k}.$$

Outra noção de gráfico bem conhecida na literatura é a de gráfico radial sobre uma esfera \mathbb{S}^2 . Dizemos que uma superfície suave $G \subset \mathbb{R}^3$ é gráfico radial sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{S}^2$, se existe uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G = \{u(x)x \mid x \in \Omega\}$. Nesse caso o operador de curvatura média é diferente dos anteriores (ver [FR] para a forma explícita). P. Fusieger e J. Ripoll mostraram, em 2003, que para qualquer domínio Ω contido em um hemisfério de \mathbb{S}^2 e φ uma função suave definida em $\partial\Omega$ existe um único gráfico radial com cmc $H \leq 0$ sobre Ω , desde que a curvatura geodésica do bordo, digamos

$k(q)$, satisfaça $k(q) \geq -2H\varphi(q)$ para todo $q \in \partial\Omega$.

Temos ainda o conceito de gráfico geodésico. Para defini-lo de forma mais geral, considere $N \subset M$ uma hipersuperfície totalmente geodésica de M , orientada com campo normal unitário η . Seja $\Omega \subset N$ um domínio de classe C^2 . Dada $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ o gráfico geodésico de u é o conjunto $\{\gamma_p(u(p)) \mid p \in \Omega\}$ onde $\gamma_p : [0, +\infty) \rightarrow M$ é a geodésica que satisfaz $\gamma_p(0) = p$ e $\gamma_p'(0) = \eta(p)$.

Foge ao escopo dessa introdução detalhar as diferenças entre o estudo do problema de Dirichlet para gráficos verticais e gráficos geodésicos. Porém, cabe salientar que uma das diferenças fundamentais consiste no fato de que do ponto de vista geométrico é natural que ao transladarmos verticalmente uma solução, ou seja, somarmos uma constante, isso não altere a geometria da solução. Embora esse fato seja verdadeiro para qualquer gráfico vertical, o mesmo não ocorre quando consideramos gráficos geodésicos no espaço hiperbólico por exemplo.

Em 2005, M. Dajczer e J. Ripoll, introduziram o conceito de gráficos de Killing (ver Capítulo 2). Além de generalizar a definição de gráfico euclidiano e gráfico em $M \times \mathbb{R}$, um dos pontos que torna esse trabalho de grande valia é justamente o fato de que ao considerar campos de Killing, a equação associada dependerá apenas das derivadas de u . Em particular, diferentemente do que ocorre em gráficos geodésicos, podemos transladar soluções que elas continuarão sendo soluções. Em [DR] os autores mostram uma generalização do Teorema de Serrin para uma ampla classe de variedades.

No caso do espaço hiperbólico, variedade riemanniana em que esta tese se concentra, existem diferentes noções de gráfico, tanto de Killing como mais gerais. Uma delas é a de gráfico geodésico sobre as horoesferas desse espaço. Aqui, a EDP associada depende de u , e não somente de suas derivadas como no caso dos gráficos de Killing. Nesse contexto, R. López e S. Montiel mostraram, em [LM], que para todo domínio compacto Ω contido em uma horoesfera com bordo convexo em média, isto é, curvatura média do

bordo $H_{\partial\Omega}$ não negativa, existe um gráfico sobre Ω com cmc $H \in \mathbb{R}$, desde que $-H_{\partial\Omega} < H \leq 1$.

Um outro tipo de gráfico que existe nesse espaço é aquele associado a campos de Killing hiperbólicos. Um campo de Killing X é chamado hiperbólico se suas trajetórias são hiperciclos ortogonais a uma hipersuperfície totalmente geodésica de \mathbb{H}^{n+1} . Considerando certos domínios limitados, em [ALR] os autores mostraram que se $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ é um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ e satisfaz a condição da H -hiperesfera exterior, então existe uma única $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, tal que $u|_{\partial\Omega} = 0$ e o X -gráfico de Killing de u orientado com vetor normal η tal que $\langle \eta, X \rangle \leq 0$ possui curvatura média constante H .

Neste trabalho exibimos uma família de superfícies ilimitadas, do tipo gráfico, de curvatura média constante com bordo contido em superfícies totalmente umbílicas de \mathbb{H}^3 . Para isso, consideramos gráficos de Killing hiperbólicos e estudamos o problema exterior de Dirichlet para a equação da curvatura média. Um dos teoremas que provamos é:

Teorema 1.3. *Considere \mathbb{H}^2 uma hipersuperfície totalmente geodésica em \mathbb{H}^3 . Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ um domínio exterior de classe C^0 e γ uma geodésica orientada passando ortogonalmente por \mathbb{H}^2 , com X sendo o campo de Killing hiperbólico tangente a γ na orientação de γ . Então, dado um número real $s \geq 0$, existe uma função limitada, não negativa, $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, tal que $u|_{\partial\Omega} = 0$ e o X -gráfico de Killing de u é uma hipersuperfície mínima de \mathbb{H}^3 satisfazendo:*

$$i) \limsup_{x \rightarrow \partial\Omega} |\text{grad } u(x)| = s$$

$$ii) \sup_{\Omega} |u| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Além disso, para o caso em que a curvatura média é não nula obtemos:

Teorema 1.4. *Seja E_H uma superfície umbílica de curvatura $H \in (0, 1)$ contida em \mathbb{H}^3 . Considere $\Omega \subset E_H$ um domínio exterior de classe C^0 e γ uma geodésica orientada passando ortogonalmente por E_H , com $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^3)$ o*

campo de Killing hiperbólico tangente a γ na orientação de γ tal que $\langle X, \eta \rangle > 0$, onde η é o vetor normal a E_H . Então, dado um número real $s \geq 0$ existe uma função, não negativa, limitada $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tal que o $Gr_X u$ possui curvatura média constante H , $u|_{\partial\Omega} = 0$ e $\limsup_{x \rightarrow \partial\Omega} |\text{grad } u(x)| = s$.

Até onde os autores sabem, não se tem conhecimento de nenhum resultado para domínios exteriores em variedades, que não considere a noção de gráfico vertical.

O trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 são introduzidos gráficos de Killing em variedades e o operador curvatura média associado. Além disso, apresentamos alguns resultados que usamos nas demonstrações dos teoremas principais.

Depois, no capítulo 3, revisamos o espaço hiperbólico apresentando as superfícies umbílicas e comentando um modelo para tal espaço. Concluímos introduzindo o contexto de que nossos resultados tratam: gráficos de Killing hiperbólicos no espaço hiperbólico.

No capítulo 4 encontramos soluções do tipo radial para domínios exteriores cujo bordo seja um círculo. Após, fazemos uma análise de suas propriedades para que possamos utilizá-las nos teoremas seguintes. Por fim, mostramos resultados de existência em domínios mais gerais.

Gráficos de Killing em variedades riemannianas

Vamos usar (M, g) para denotar a variedade diferenciável M , munida da métrica riemanniana g . Além disso, denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ e por ∇ a conexão riemanniana associada a métrica g . Tais conceitos são tratados nos capítulos 1 e 2 de [dC].

2.1 Gráficos de Killing

Sabemos da teoria das equações diferenciais ordinárias, que todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ admite, para todo $p \in M$, uma aplicação $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow M$, onde U é uma vizinhança de p em M , satisfazendo $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, q)|_{t=0} = X(q)$, $q \in U$ e $\varphi(t, \cdot) := \varphi_t : U \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável. Denominamos essa família $\{\varphi_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ por *fluxo* do campo X . Com base nisso podemos dar a seguinte definição.

Definição 2.1. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores. Dizemos que X é um campo de Killing se cada elemento do fluxo de X é uma isometria.*

Exemplo 2.2. *Seja $M = \mathbb{R}^3$ munida da métrica euclidiana. Considere o campo $X = e_3 = (0, 0, 1)$. O fluxo associado a esse campo é dado por $\varphi_t(p) = p + te_3$, o qual é claramente uma isometria para cada $t \in \mathbb{R}$. Portanto, X é um campo de Killing.*

Proposição 2.3. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de Killing em M . Se M é completa então o fluxo de X , $\{\varphi_t\}$, está definido para todo t pertencente a \mathbb{R} .*

Demonstração. Seja $p \in M$ e $I \subset \mathbb{R}$ o intervalo maximal onde $\{\varphi_t(p)\}$ está definido. Suponha que $\sup I < \infty$ e considere $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ uma sequência convergindo a $\delta := \sup I$. Afirmamos que $\{\varphi_{t_n}(p)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, como φ_t é uma isometria, temos

$$\begin{aligned} d(\varphi_{t_n}(p), \varphi_{t_m}(p)) &\leq \int_{t_n}^{t_m} \left\| \frac{d}{dt} \varphi_t(p) \right\| dt = \int_{t_n}^{t_m} \|d\varphi_t(X(p))\| dt \\ &= \int_{t_n}^{t_m} \|X(p)\| dt \\ &= \|X(p)\| (t_m - t_n) \end{aligned}$$

de onde segue a afirmação. Como M é completa, a sequência $\{\varphi_{t_n}(p)\}$ converge, quando $n \rightarrow \infty$, a um certo ponto $q \in M$. Usando a continuidade de φ_t concluímos que $\varphi_\delta(p) = q \in M$. Com isso, para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, tal que o fluxo está definido numa vizinhança de q , temos que $\varphi_t(q) = \varphi_{t+\delta}(p)$, desde que $t \geq 0$. Assim, podemos estender $\varphi_t(p)$ para $[\delta, \delta + \epsilon]$, via a igualdade acima contradizendo a propriedade que definia I . De forma análoga mostramos que $\inf I = -\infty$ e concluímos que $\{\varphi_t\}$ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

□

Note que a aplicação $\varphi_{t_0} : U \rightarrow M$ dada por $\varphi_{t_0}(p) = \varphi(t_0, p)$ possui a seguinte propriedade: $\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$. Assim, a aplicação $F(t) = \varphi_t$ é um homomorfismo do grupo $(\mathbb{R}, +)$ em um subgrupo de $(Iso(M), \circ)$. Por isso, o conjunto $\{\varphi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ forma um subgrupo a 1-parâmetro de $Iso(M)$. Como a cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ podemos associar uma aplicação $F : \mathbb{R} \rightarrow Iso(M)$ dada por $F(t) = \varphi_t$, vamos nos referir a elas como subgrupo a 1-parâmetro de isometrias geradas por X .

Vamos agora à noção de gráfico que utilizamos ao longo do texto, que é uma extensão natural do conceito usual de gráfico no espaço euclidiano.

Para entender o que queremos dizer com natural, lembremos a definição de gráfico em \mathbb{R}^3 .

Dada uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definimos o gráfico de u como sendo o conjunto $\{(x, y, u(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}$. Podemos interpretar geometricamente o gráfico como o conjunto dos pontos de \mathbb{R}^3 que, partindo de Ω , percorreram uma certa distância na direção do vetor $(0, 0, 1)$. Tal distância é dada pelo valor que a função u assume nos pontos de Ω . Pelo exemplo 2.2, vimos que este campo tem associado o seguinte fluxo $\varphi_t(p) = p + te_3$ onde $p \in \mathbb{R}^3$. Por abuso de notação, podemos identificar $p \in \Omega$ com os pontos da forma $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ tais que $(x, y) \in \Omega$. Assim, podemos escrever a definição de gráfico, em termos do fluxo, da seguinte forma: $\{\varphi_{u(p)}(p) \mid p \in \Omega\}$. De fato,

$$\varphi_{u(p)}(p) = p + u(p)e_3 = (x, y, u(x, y)).$$

Isso motiva a seguinte definição.

Definição 2.4. *Seja M uma variedade riemanniana que admite um campo de Killing $X \in \mathfrak{X}(M)$ sem singularidades. Considere $N \subset M$ uma hipersuperfície transversal a X e $\{\varphi_t\}$ o fluxo associado ao campo X . Suponha que o fluxo está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Então dado um subconjunto $\Omega \subset N$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em Ω , definimos o X -gráfico de Killing de u por*

$$Gr_X(u) := \{\varphi_{u(p)}(p) \mid p \in \Omega\}.$$

Definição 2.5. *Nas mesmas condições acima definimos o X -cilindro de Killing sobre o domínio Ω por*

$$C_X(\Omega) = \{\varphi_t(p) \mid p \in \Omega, t \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 2.6. *Considere a variedade $M^2 \times \mathbb{R}$ munida da métrica produto. Considere o campo de Killing vertical $\frac{d}{dt}$, cujo fluxo associado é $\varphi_t(p, s) = (p, s + t)$. Seja $u : \Omega \subset M \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. O gráfico de Killing de u*

associado ao campo $\frac{d}{dt}$ é o

$$Gr(u) = \{\varphi_{u(p)}(p) = (p, u(p)) \mid p \in \Omega\}.$$

Exemplo 2.7 (Gráfico helicoidal). *Considere em \mathbb{R}^3 o campo de Killing helicoidal que é dado por $X(x, y, z) = (-by, bx, a)$ para dadas constantes $a, b \in \mathbb{R}$. O fluxo associado a este campo é dado por $\varphi_t(x, y, z) = (\cos(bt)x - \sin(bt)y, \sin(bt)x + \cos(bt)y, z + at)$. Nesse caso, o X -Killing gráfico de $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por*

$$Gr_X(u) = \{(\cos(bu(p))x - \sin(bu(p))y, \sin(bu(p))x + \cos(bu(p))y, au(p)) \mid p \in \Omega\}.$$

Vamos finalizar esta seção encontrando a Equação Diferencial Parcial (EDP) associada as hipersuperfícies de curvatura média constante em uma variedade completa, que são gráficos de Killing de alguma função u . Como comentamos na introdução, veremos que, diferentemente do caso dos gráficos geodésicos, o fato de considerarmos gráficos de Killing, faz com que a EDP fique em termos apenas das derivadas de primeira e segunda ordem da função u , o que sabemos é de grande utilidade no que se refere a aplicabilidade das técnicas conhecidas em EDP's elípticas de segunda ordem.

Teorema 2.8 ([DL]). *Seja M^{n+1} uma variedade completa com $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de Killing sem singularidades. Seja $N \subset M$ uma hipersuperfície transversal a X . Dada uma função $u : \Omega \subset N \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , temos que u possui X -gráfico de Killing com curvatura média constante H , na orientação dada pelo vetor normal η tal que $\langle X, \eta \rangle \geq 0$ se, e somente se, satisfaz*

$$\mathcal{M}_H(u) := \operatorname{div} \left(\frac{|X| \operatorname{grad} u}{\sqrt{1 + |X|^2 |\operatorname{grad} u|^2}} \right) + \frac{\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} (|X|) \rangle}{\sqrt{1 + |X|^2 |\operatorname{grad} u|^2}} - nH = 0, \quad (2.1)$$

onde div e grad são o divergente e gradiente de N .

Demonstração. Seja $\{\varphi_t\}$ o fluxo gerado por X . Como vimos na definição 2.5 dado $\bar{p} \in C_X(\Omega)$ temos que existem $t \in \mathbb{R}$ e $p \in \Omega$ tais que $\varphi_t(p) = \bar{p}$. Estamos interessados em encontrar uma EDP associada à curvatura média H de $Gr_X(u)$. Para isso, considere as seguintes funções auxiliares: $h : C_X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(\bar{p}) = t$, e $\pi : C_X(\Omega) \rightarrow N$ dada por $\pi(\bar{p}) = p$ onde t e p são tais que $\varphi_t(p) = \bar{p}$.

É fácil ver que se considerarmos a função $F : C_X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(\bar{p}) = h(\bar{p}) - u \circ \pi(\bar{p})$$

teremos

$$Gr_X(u) = F^{-1}(0).$$

Sendo assim, se considerarmos η como sendo um campo normal a $Gr_X(u)$ tal que $\langle \eta, X \rangle \geq 0$, temos que a curvatura média de $Gr_X(u)$ é dada por (veja em [dC] exercício 11 do capítulo 6)

$$nH == -\operatorname{div}_M \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}.$$

A fim de continuarmos os cálculos, precisamos de uma base conveniente em $T_{\bar{p}}M$. Vamos definir em $T_{\bar{p}}M$ uma métrica que torne π uma submersão riemanniana, permitindo assim uma boa relação entre o divergente em M e N .

Dados os vetores u e v em T_pN , sejam \bar{u}, \bar{v} os levantamentos horizontais de u e v , respectivamente, tais que sejam π -relacionados, i.e., $\bar{u}, \bar{v} \perp \pi^{-1}(p)$ e $d\pi_{\bar{p}}\bar{u} = u$, $d\pi_{\bar{p}}\bar{v} = v$.

Fixado $p \in \Omega$, seja $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial geodésico em p . Denotamos por $\{\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n\}$ campos de vetores π -relacionados com E_1, \dots, E_n . Considere em $\bar{p} \in C_X(\Omega)$ $\{\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n, \bar{E}_{n+1} := \frac{X}{|X|}\}$, onde $\bar{E}_i(\bar{p}) = d\varphi_t E_i(p) \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$, e $X(\bar{p}) = d\varphi_t(X(p))$ uma base ortonormal em \bar{p} .

Definindo em $T_{\bar{p}}M$ a métrica

$$\langle \langle \bar{E}_i, \bar{E}_j \rangle \rangle_{\bar{p}} := \langle E_i, E_j \rangle_p$$

teremos que π é uma submersão riemanniana. Por abuso de notação vamos utilizar \langle, \rangle para denotar ambas métricas.

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M \left(\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} \right) &= \sum_{i=1}^{n+1} \left\langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_i} \left(\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} \right), \bar{E}_i \right\rangle_{\bar{p}} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_i}(\operatorname{grad} F), \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} + \left\langle \bar{E}_i \left(\frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \right) \operatorname{grad} F, \bar{E}_i \right\rangle_{\bar{p}} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_i}(\operatorname{grad} h), \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} - \frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_i}(\operatorname{grad} \bar{u}), \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} \\ &\quad + \left\langle \bar{E}_i \left(\frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \right) \operatorname{grad} h, \bar{E}_i \right\rangle_{\bar{p}} - \left\langle \bar{E}_i \left(\frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \right) \operatorname{grad} \bar{u}, \bar{E}_i \right\rangle_{\bar{p}}, \end{aligned}$$

onde $\bar{u} := u \circ \pi$, $\bar{p} = \varphi_{u(p)}(p) \in \operatorname{Gr}_X(u)$ e $\bar{\nabla}$ é a conexão em M .

Afirmamos que são válidas as seguintes igualdades:

- i) $\langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_i} \operatorname{grad} \bar{u}, \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} = \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} u, E_i \rangle_{\pi(\bar{p})} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- ii) $\left\langle \bar{\nabla}_{\frac{X}{|X|}} \operatorname{grad} \bar{u}, \frac{X}{|X|} \right\rangle_{\bar{p}} = \frac{\langle \operatorname{grad}(|X|), \operatorname{grad} u \rangle_{\pi(\bar{p})}}{|X|}$
- iii) $\langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_i} \operatorname{grad} h, \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$
- iv) $\left\langle \bar{E}_i \left(\frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \right) \operatorname{grad} h, \bar{E}_i \right\rangle_{\bar{p}} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- v) $\left\langle \frac{X}{|X|} \left(\frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \right) \operatorname{grad} h, \frac{X}{|X|} \right\rangle_{\bar{p}} = 0$
- vi) $\left\langle \bar{E}_i \left(\frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \right) \operatorname{grad} \bar{u}, \bar{E}_i \right\rangle_{\bar{p}} = \left\langle E_i \left(\frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \right) \operatorname{grad} u, E_i \right\rangle_{\pi(\bar{p})} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- vii) $\left\langle \frac{X}{|X|} \left(\frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \right) \operatorname{grad} \bar{u}, \frac{X}{|X|} \right\rangle_{\bar{p}} = 0,$

onde ∇ é a conexão em N .

Sendo assim, por (i – vii) temos

$$\begin{aligned}
nH &= \sum_{i=1}^n \frac{\langle \nabla_{E_i} \text{grad } u, E_i \rangle_p}{|\text{grad } F|} + \left\langle E_i \left(\frac{1}{|\nabla F|} \right) \cdot \text{grad } u, E_i \right\rangle_p + \frac{\langle \text{grad}(|X|), \text{grad } u \rangle_p}{|X| |\text{grad } F|} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{E_i} \left(\frac{\text{grad } u}{|\text{grad } F|} \right), E_i \right\rangle_p + \frac{\langle \text{grad}(|X|), \text{grad } u \rangle_p}{|X| |\text{grad } F|} \\
&= \text{div}_N \left(\frac{|X| \text{grad } u}{\sqrt{1 + |X|^2 |\text{grad } u|^2}} \right) + \frac{\langle \text{grad } u, \text{grad}(|X|) \rangle}{\sqrt{1 + |X|^2 |\text{grad } u|^2}},
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que $|\nabla F| = \frac{1}{|X|} \sqrt{1 + |X|^2 |\text{grad } u|^2}$. Para verificar essa igualdade usamos que

$$\text{grad } h = \frac{X}{|X|^2}$$

e $\text{grad } \bar{u}$ é ortogonal ao campo X , o que veremos no decorrer das demonstrações dos itens i) – vii), com os quais concluiremos a prova do teorema.

Para demonstrar i), observamos que segue da definição de gradiente

$$\langle \text{grad } u \circ \pi, \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} = \frac{d}{dt} (u \circ \pi(\alpha(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt} u(\beta(t))|_{t=0} = \langle \text{grad } u, E_i \rangle_p, \quad (2.2)$$

onde α é uma curva satisfazendo $\alpha(0) = \bar{p}$, $\alpha'(0) = \bar{E}_i$ e $\beta(t) = \pi \circ \alpha(t)$

donde decorre que $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = d\pi_t \cdot \bar{E}_i = E_i$. Além disso:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\bar{E}_i}(\text{grad } \bar{u})(\bar{p}) &= \frac{D}{dt} \text{grad } (\bar{u}(\alpha(t)))|_{t=0} \\
&= \frac{D}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \langle \text{grad } \bar{u}, \bar{E}_j \rangle \bar{E}_j(\alpha(t)) \right) |_{t=0} \\
&= \frac{D}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \langle \text{grad } u, E_j \rangle \bar{E}_j(\alpha(t)) \right) |_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \langle \text{grad } u, E_j \rangle \right) \bar{E}_j(\alpha(t))|_{t=0} \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \langle \text{grad } u, E_j \rangle \frac{D}{dt} \bar{E}_j(\alpha(t))|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\bar{E}_i}(\text{grad } \bar{u}), \bar{E}_i \rangle (\bar{p}) &= \left\langle \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \langle \text{grad } u, E_j \rangle \right) \bar{E}_j(\alpha(t))|_{t=0}, \bar{E}_i(p) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \sum_{j=1}^n \langle \text{grad } u, E_j \rangle \frac{D}{dt} \bar{E}_j(\alpha(t))|_{t=0}, \bar{E}_i(p) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \langle \text{grad } u, E_j \rangle \right) E_j(\beta(t))|_{t=0}, E_i(p) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \sum_{j=1}^n \langle \text{grad } u, E_j \rangle \nabla_{\bar{E}_i} \bar{E}_j(\bar{p}), \bar{E}_i(\bar{p}) \right\rangle. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\nabla_{\bar{E}_i} \bar{E}_j(\bar{p}) = d\varphi_t \cdot \nabla_{E_i} E_j(\pi(\bar{p}))$. De fato, seja f uma função diferenciável e $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_t(p) = \bar{p}$. Usando que $(d\varphi_t)E_i = \bar{E}_i$ obtemos:

$$\begin{aligned}
E_i(f)(p) &= E_i(f \circ \varphi_t^{-1} \circ \varphi_t)(p) \\
&= (d\varphi_t(E_i)f \circ \varphi_t^{-1})(\varphi_t(p)) \\
&= \bar{E}_i(f \circ \varphi_t^{-1})(\bar{p}) \\
&= \bar{E}_i(f \circ \pi)(\bar{p})
\end{aligned}$$

Assim, vemos que as seguintes igualdades são verificadas:

$$\begin{aligned}
d\varphi_t[E_i, E_j](f) &= d\varphi_t(E_i(E_j(f))) - d\varphi_t E_j(E_i(f)) \\
&= \bar{E}_i(E_j(f)) - \bar{E}_j((E_i(f))) \\
&= \bar{E}_i(\bar{E}_j(f \circ \pi)) - \bar{E}_j(\bar{E}_i(f \circ \pi)) \\
&= [\bar{E}_i, \bar{E}_j](f \circ \pi). \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Desse fato, e como escólio do Teorema 3.6 do capítulo 2 de [dC], segue que $\nabla_{\bar{E}_i} \bar{E}_j(p) = d\varphi_t \cdot \nabla_{E_i} E_j(\pi)$. Usando essa igualdade em (2.3), temos que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\bar{E}_i}(\text{grad } \bar{u}), \bar{E}_j \rangle_{\bar{p}} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \langle \text{grad } u, E_j \rangle \right) \langle E_i, E_j \rangle_p + \left\langle \sum_{j=1}^n \langle \text{grad } u, E_j \rangle \cdot \nabla_{E_i} E_j, E_i \right\rangle_p \\
&= \langle \nabla_{E_i} \text{grad } u, E_i \rangle_p, \tag{2.5}
\end{aligned}$$

o que mostra *i*).

Para mostrar *ii*), note que

$$0 = X \langle \text{grad } \bar{u}, X \rangle_{\bar{p}} = \langle \nabla_X(\text{grad } \bar{u}), X \rangle_{\bar{p}} + \langle \text{grad } \bar{u}, \nabla_X X \rangle_{\bar{p}},$$

o que implica em

$$\frac{1}{|X|^2} \langle \nabla_X \text{grad } \bar{u}, X \rangle_{\bar{p}} = - \frac{\langle \text{grad } \bar{u}, \nabla_X X \rangle_{\bar{p}}}{|X|^2}. \tag{2.6}$$

Sendo assim, basta mostrarmos que $\nabla_X X = -|X|\text{grad}|X|$ e *ii*) estará provado.

Usando que X é campo de Killing, temos

$$E_i \langle X, X \rangle = 2 \langle \nabla_{E_i} X, X \rangle = -2 \langle \nabla_X X, E_i \rangle.$$

Por outro lado, vemos que

$$E_i \langle X, X \rangle = 2|X|E_i(|X|).$$

Segue dessas duas igualdades que

$$- \langle \nabla_X X, E_i \rangle = |X|E_i(|X|),$$

donde

$$\nabla_X X = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla_X X, E_i \rangle E_i = - \sum_{i=1}^{n+1} |X|E_i(|X|)E_i = -|X|\text{grad}|X|.$$

Para analisarmos a parcela que envolve a função h , a saber: *iii*, *iv* e *v*, considere uma curva α em M satisfazendo $\alpha(0) = \bar{p}, \alpha'(0) = \bar{E}_i(\bar{p})$. Segue que

$$\langle \text{grad } h, \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} = dh_{\bar{p}} \bar{E}_i = \frac{d}{dt}(h(\alpha(t)))|_{t=0}, \quad (2.7)$$

portanto se $i \neq n+1$, podemos escolher a curva α de forma que ela seja ortogonal ao fluxo φ_t e satisfaça $\alpha'(0) = \bar{E}_i(\bar{p})$. Assim,

$$\frac{d}{dt}(h(\alpha(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(t_0) = 0, \quad (2.8)$$

onde $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_{t_0}(p) = \bar{p}$. Logo $\langle \text{grad } h, \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Além disso, para o caso $\langle \text{grad } h, X \rangle_{\bar{p}} = dh_{\bar{p}}(X) = \frac{d}{dt}(h(\alpha(t)))|_{t=0}$, podemos escolher $\alpha(t) = \varphi_t(p)$, pois $\alpha'(t) = \frac{d}{dt}(\varphi_t(p)) = X$. Como $h(\varphi_t(p)) = t$ te-

remos que $\frac{d}{dt}(h(\alpha(t)))|_{t=0} = 1$ donde $\langle \text{grad } h, X \rangle_{\bar{p}} = 1$. Assim $\text{grad } h(\bar{p}) = \frac{X}{|X|^2}$ e portanto, para $i \in \{1, \dots, n\}$, vale que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\bar{E}_i}(\text{grad } h), \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} &= \left\langle \nabla_{\bar{E}_i} \frac{X}{|X|^2}, \bar{E}_i \right\rangle_{\bar{p}} \\ &= \frac{1}{|X|^2} \langle \nabla_{\bar{E}_i} X, \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} + \left\langle \bar{E}_i \left(\frac{1}{|X|^2} \right) \cdot X, \bar{E}_i \right\rangle_{\bar{p}} \\ &= \bar{E}_i \left(\frac{1}{|X|^2} \right) \langle X, \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} = 0. \end{aligned}$$

Já para $i = n + 1$, tem-se

$$\bar{E}_i \left(\frac{1}{|X|^2} \right) \langle X, \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} = X \left(\frac{1}{|X|^2} \right) \langle X, X \rangle_{\bar{p}} = 0,$$

pois $X(|X|) = 0$. Assim temos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla_{\bar{E}_i}(\text{grad } h), \bar{E}_i \rangle_{\bar{p}} = 0,$$

mostrando assim o item *iii*) e *iv*). Este último seguindo do fato de $\text{grad } h = \frac{X}{|X|^2}$, o qual é ortogonal a \bar{E}_i para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

No caso de v , temos

$$\left\langle \bar{E}_i \left(\frac{1}{|\nabla F|} \right) \text{grad } h, \bar{E}_i \right\rangle_{\bar{p}} = 0, \text{ para todo } i \leq n \text{ e}$$

$$X \left(\frac{1}{|\nabla F|} \right) = X \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \bar{u}|^2}} \right) = 0.$$

Além disso, de forma análoga ao que foi mostrado em (2.2), temos

$$\left\langle \bar{E}_i \left(\frac{1}{|\nabla F|} \right) \nabla \bar{u}, \bar{E}_i \right\rangle_{\bar{p}} = \left\langle E_i \left(\frac{1}{|\nabla F|} \right) \nabla u, E_i \right\rangle_{\pi(\bar{p})}$$

e

$$\left\langle X \left(\frac{1}{|\nabla F|} \right) \cdot \nabla \bar{u}, X \right\rangle_{\bar{p}} = 0,$$

o que mostra *vi* e *vii*, finalizando a demonstração. \square

2.2 Lemas de análise

Os resultados dessa seção serão utilizados no próximo capítulo.

Lema 2.9. *Seja M uma variedade riemanniana completa. Considere $\Omega \subset M$ um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$ e $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma solução de $\mathcal{M}(u) = 0$ em Ω . Assuma que u é limitada em Ω e que $|\text{grad } u|$ é limitada em $\partial\Omega$. Então $|\text{grad } u|$ é limitado em Ω por uma constante que depende somente do $\sup_{\Omega} |u|$ e $\sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u|$.*

Uma prova do resultado acima pode ser encontrada no Lema 6 de [DL].

Teorema 2.10. *(Princípio da Tangência) Sejam M_1, M_2 duas hipersuperfícies do \mathbb{H}^n , $n \geq 3$, e seja $p \in M_1 \cap M_2$ um ponto de tangência, ou seja, $T_p M_1 = T_p M_2$. Suponha que M_1 e M_2 tenham curvatura média constante H com relação a vetores unitários normais η_1, η_2 tais que $\eta_1(p) = \eta_2(p)$.*

a) *(Princípio interior da tangência) Suponha que $p \in (M_1 \setminus \partial M_1) \cap (M_2 \setminus \partial M_2)$ e que existam uma vizinhança U de 0 em $T_p M_1$ e funções $u_1, u_2 \in C^2(\overline{U})$ cujos gráficos são vizinhanças V_1 de p em M_1 e V_2 de p em M_2 . Se $u_1 \leq u_2$ em U então $u_1 = u_2$; assim, M_1 e M_2 coincidem em uma vizinhança de p .*

b) *(Princípio da tangência no bordo) Suponha que $p \in \partial M_1 \cap \partial M_2$ e que existam uma vizinhança U de $T_p M_1$ com $0 \in \partial U$ e funções $u_1, u_2 \in C^2(\overline{U})$ cujos gráficos são vizinhanças V_1 de p em M_1 e V_2 de p em M_2 . Se $u_1 \leq u_2$ em U então $u_1 = u_2$; assim, M_1 e M_2 coincidem em uma vizinhança de p .*

Alguns aspectos da geometria hiperbólica

3.1 Espaço hiperbólico

Os resultados deste trabalho são teoremas de existência de superfícies de curvatura média constante no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 , que é, a menos de isometrias, a única variedade completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional -1 de dimensão 3.

Embora a maioria das perguntas a respeito de superfícies de curvatura média constante sejam originadas no espaço euclidiano, a riqueza da geometria do espaço hiperbólico permite que muitas teorias existentes para o espaço euclidiano sejam transferidas e algumas vezes até mesmo ampliadas nesse espaço. Um exemplo disso pode ser visto nas hipersuperfícies umbílicas desse espaço, como veremos abaixo.

3.1.1 Hipersuperfícies umbílicas

As definições e comentários que veremos nessa seção, podem ser encontrados, quase em sua totalidade, em [dC]. Antes de definir o que é uma hipersuperfície umbílica, precisamos falar sobre a segunda forma fundamen-

tal. Para isso, considere M uma variedade completa de dimensão n e N uma hipersuperfície com vetor normal η no ponto $p \in N$. A *segunda forma fundamental* de N , com respeito ao vetor η , é a aplicação $S_\eta(p) : T_p M \rightarrow T_p M$

$$S_\eta(p)v = -(\nabla_v \tilde{\eta})^\top,$$

onde $\tilde{\eta}$ é uma extensão de η normal a N e ∇ é a conexão em M .

Se $S_\eta \equiv 0$ para todo $p \in N$, dizemos que N é uma subvariedade *totalmente geodésica* de M . Além disso, definimos como a *curvatura média de N no ponto p* o traço da aplicação $S_\eta(p)$ dividido pela dimensão de N . Usamos a notação H_p para indicar tal curvatura.

Dada uma imersão $f : N \rightarrow M$, dizemos que ela é *umbílica* se para todo $p \in f(N)$ existe $\lambda(p)$ tal que

$$\langle S_\eta(p)(v), w \rangle_p = \lambda(p) \langle v, w \rangle_p,$$

para todo $v, w \in T_p f(N)$ e para todo η vetor normal unitário a $f(N)$.

É possível mostrar (veja exercício 6 do capítulo 8 de [dC]) que se a curvatura seccional de M é constante, então $\lambda(p)$ é constante e conseqüentemente as curvaturas principais são iguais em todos pontos. Em particular, isso faz com que as hipersuperfícies umbílicas de \mathbb{H}^3 tenham curvatura média constante.

Enquanto em \mathbb{R}^3 qualquer imersão umbílica, de codimensão 1, está necessariamente contida em um plano ou esfera, temos que em \mathbb{H}^3 as hipersuperfícies umbílicas podem ser classificadas em 3 tipos descritos abaixo:

Esfera: A esfera de centro p e raio r é o conjunto de pontos de \mathbb{H}^3 que estão a uma distância r do centro $p \in \mathbb{H}^3$,

$$S_r(p) = \{q \in \mathbb{H}^3 ; d(p, q) = r\},$$

onde $d : \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, é a função distância riemanniana em \mathbb{H}^3 . A curvatura

dessa hipersuperfície é $\coth(r)$, se orientada de acordo com o vetor normal apontando para a região compacta limitada por S_r . Uma prova desse fato pode ser encontrada no exemplo 2.1.8 de [N].

Horoesfera: Fixado $p \in \mathbb{H}^3$, seja $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^3$, $|\gamma'(t)| = 1$ um raio geodésico de \mathbb{H}^3 tal que $\gamma(0) = p$. Seja

$$B_t(\gamma(t)) = \{q \in \mathbb{H}^3 \mid d(q, \gamma(t)) < t\}.$$

Uma *horoesfera* que contém p e está centrada em $\gamma(+\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t)$, é o conjunto

$$\partial \left\{ \bigcup_{t>0} B_t(\gamma(t)) \right\}.$$

A curvatura, nesse caso, pode ser calculada como limite das curvaturas das esferas com raio tendendo a infinito, ou seja, $H = \lim_{t \rightarrow \infty} \coth(t) = 1$, se orientamos a horoesfera com vetor normal apontando para dentro.

Hiperesfera: Dada $N \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície totalmente geodésica, temos que N separa \mathbb{H}^3 em duas componentes conexas, A e B , disjuntas. A *hiperesfera* equidistante r de N é o conjunto $E_H = \{p \in \mathbb{H}^3 \mid d(p, N) = r\} \cap A$ ou $E_H = \{p \in \mathbb{H}^3 \mid d(p, N) = r\} \cap B$ onde $H = \tanh(r)$. Tem-se que H é a curvatura média de E_H se este está orientado com vetor normal apontando para N .

3.1.2 Modelo do semiespaço superior

Este trabalho concentra-se na busca por funções, cujo gráfico seja uma subvariedade de \mathbb{H}^3 , de curvatura média constante. Um modelo interessante para esboçar tais gráficos é o chamado modelo do semiespaço superior, dado por

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$$

com a métrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2}.$$

Para vermos que este é um modelo para o espaço hiperbólico, precisamos mostrar que ele é simplesmente conexo, possui curvatura seccional -1 e é completo. Claramente \mathbb{R}_+^3 é simplesmente conexo. Além disso, é fácil ver que nesse modelo, as geodésicas em \mathbb{H}^3 são as interseções de círculos de \mathbb{R}^3 , centrados no plano $\{x_3 = 0\}$ com \mathbb{R}_+^3 ou interseção de retas ortogonais ao plano $x_3 = 0$, com \mathbb{R}_+^3 . Com alguns cálculos, mostra-se que $\gamma(t) = (x_1, x_2, e^t)$ e $\gamma(t) = R(0, \tanh(\frac{t}{R}), \operatorname{sech}(\frac{t}{R}))$ são, a menos de rotação, as geodésicas nesse modelo.

Portanto, dados dois pontos de \mathbb{R}_+^3 , existe uma geodésica minimizante γ que os liga, a partir do qual concluímos que ele é completo. O cálculo da curvatura seccional de $(\mathbb{R}_+^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ está feito no capítulo 8 de [dC]. Ele se baseia no fato de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ser conforme a métrica euclidiana como explicamos abaixo.

Dizemos que duas métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ em uma variedade diferenciável M são conformes se existe uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in M$ e quaisquer $u, v \in T_p M$ temos

$$\langle u, v \rangle_p = f(p) \langle \langle u, v \rangle \rangle_p.$$

Um fato que torna esse modelo bom para nossos propósitos é que essa métrica é conforme a do euclidiano. Para ver isso, basta tomar $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3^2}$.

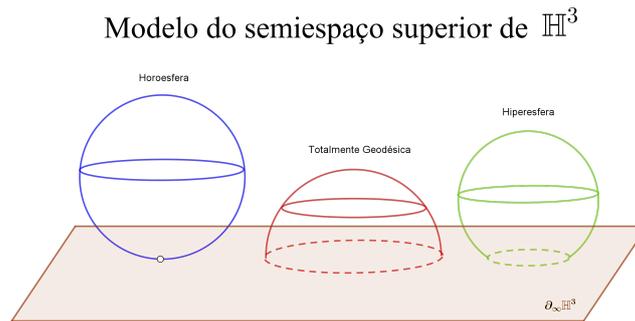
Ainda nesse modelo, as hipersuperfícies umbílicas ficam caracterizadas como descritas abaixo:

Esferas: São as esferas euclidianas contidas em \mathbb{R}_+^3 . Observamos que devido a métrica do hiperbólico não ser a mesma do euclidiano, o centro hiperbólico dessas esferas não é o mesmo que o centro euclidiano.

Horoesferas: São os planos horizontais ou as esferas de \mathbb{R}_+^3 que tangenciam $\{x_3 = 0\}$.

Totalmente geodésicas: São as semiesferas de \mathbb{R}^3 que intersectam ortogonalmente $\{x_0 = 0\}$ ou planos ortogonais a $\{x_0 = 0\}$.

Hiperesferas: São os planos que não são paralelos a $\{x_3 = 0\}$ ou as calotas esféricas de \mathbb{R}_+^3 que possuem como bordo um círculo em $\{x_3 = 0\}$.



3.2 Gráficos de Killing no espaço hiperbólico

Definição 3.1. Um campo de Killing X de \mathbb{H}^{n+1} é chamado hiperbólico se suas trajetórias são hiperciclos (curvas equidistantes de uma geodésica) ortogonais a uma hipersuperfície totalmente geodésica de \mathbb{H}^{n+1} .

A definição acima pode ser encontrada em [ALR].

Exemplo 3.2. Considere \mathbb{H}^{n+1} no modelo do semiespaço superior. Seja $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1, x_n > 0\}$. O campo de Killing $X(p) = p$ possui como fluxo associado $\varphi_t(p) = pe^t$, o qual é uma isometria para cada t fixo. Além disso, para cada $p \in \mathbb{H}^{n+1}$, $d(\varphi_t(p), \gamma) = d(p, \gamma)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde γ é a geodésica dada por $\gamma(t) = (0, \dots, e^t)$ e ortogonal a \mathbb{H}^n . Logo esse campo é hiperbólico.

Devido às isometrias existentes em \mathbb{H}^{n+1} , não existe perda de generalidade em escolhermos a totalmente geodésica $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1, x_{n+1} > 0\}$ pois existe uma isometria que leva esta totalmente geodésica em qualquer outra de tal forma que as propriedades intrínsecas dos gráficos obtidos sobre \mathbb{H}^n sejam mantidos. Sendo assim, sempre que necessário vamos escolher essa totalmente geodésica para esboçar algum gráfico ou fazer alguma conta específica que almejemos nos amparar no modelo.

Lema 3.3. *Seja \mathbb{H}^n uma hipersuperfície totalmente geodésica de \mathbb{H}^{n+1} . Considere γ uma geodésica passando ortogonalmente por \mathbb{H}^n e $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ um campo de Killing hiperbólico tangente a γ na direção de γ . Então, fixando a origem $o = \gamma \cap \mathbb{H}^n$, temos $\|X(p)\| = \cosh(r)$, onde $r = d(p, o)$ e $p \in \mathbb{H}^n$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos considerar o modelo do semiespaço superior para \mathbb{H}^{n+1} e que $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1, x_{n+1} > 0\}$, $X(p) = p$, e p pertence ao plano $x_n x_{n+1}$. Assim as geodésicas, parametrizadas por comprimento de arco, que passam pela origem e por p são da forma

$$\alpha(t) = (0, \dots, 0, R \tanh(t), R \operatorname{sech}(t)),$$

onde $\alpha(0) = o$ e $\alpha(r) = p$. Portanto

$$\|X(p)\| = \frac{\sqrt{R^2 \tanh^2(r) + R^2 \operatorname{sech}^2(r)}}{R \operatorname{sech}(r)} = \cosh(r).$$

□

Proposição 3.4. *Fixe \mathbb{H}^n uma totalmente geodésica em \mathbb{H}^{n+1} e γ uma geodésica passando ortogonalmente por \mathbb{H}^n . Seja $r : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a função dada por $r(p) = d(p, o)$, onde $o := \gamma \cap \mathbb{H}^n$ é a origem de \mathbb{H}^n e d é a função distância em \mathbb{H}^n . Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real, X o campo de Killing hiperbólico tangente a γ na direção de γ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função $u(\cdot) = f \circ r(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ é um domínio. Então, dado $H \in \mathbb{R}$, o X -gráfico de Killing, $Gr_X(u)$, possui curvatura média constante H se e*

somente se

$$\mathcal{M}_H(f \circ r) := \operatorname{div} \left(\frac{\cosh(r)f'(r)\operatorname{grad} r}{\sqrt{1 + \cosh^2(r)f'^2(r)}} \right) + \frac{f'(r)\sinh(r)}{\sqrt{1 + \cosh^2(r)f'^2(r)}} - nH = 0, \quad (3.1)$$

onde div e grad são o divergente e o gradiente, respectivamente, em \mathbb{H}^n .

Demonstração. Para demonstrar essa proposição basta calcularmos o gradiente da função u e utilizarmos o Teorema 2.8. Por definição, temos que $\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} f \circ r = f'(p) \cdot \operatorname{grad} r$. Além disso, usando o Lema 3.3,

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{grad}(\cosh(r)), \operatorname{grad} u \rangle &= \langle \operatorname{grad} \cosh(r), f'(r) \cdot \operatorname{grad} r \rangle \\ &= \langle \sinh(r) \cdot \operatorname{grad} r, f'(r) \cdot \operatorname{grad} r \rangle \\ &= \sinh(r) \cdot f'(r) \langle \operatorname{grad} r, \operatorname{grad} r \rangle = f'(r) \cdot \sinh(r), \end{aligned}$$

substituindo essa igualdade no Teorema 2.8, mostramos a proposição. \square

Existência de soluções para o problema exterior de Dirichlet em \mathbb{H}^3

O objetivo central deste trabalho é encontrar soluções para o problema exterior de Dirichlet para a equação das superfícies cmc no espaço hiperbólico. Começamos este capítulo encontrando soluções do tipo radial para domínios exteriores cujo bordo seja um círculo contido em \mathbb{H}^2 . Após, fazemos uma análise de suas propriedades para que possamos utilizá-las nos teoremas seguintes. Por fim, mostramos resultados de existência em domínios mais gerais.

4.1 Superfícies de cmc radialmente simétricas

Em nosso trabalho denominamos por *domínio exterior*, um domínio cujo complementar é compacto, não vazio e simplesmente conexo. Um exemplo de superfície mínima que é gráfico sobre um domínio exterior de \mathbb{R}^2 são os catenóides de \mathbb{R}^3 . Na verdade, para que sejam gráficos precisamos restringir a um dos ramos do catenóide. Mais precisamente, dado o disco unitário, $D_1(o)$, centrado na origem de $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ temos que existe, para cada $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, um pedaço de catenóide que é gráfico em $\mathbb{R}^2 \setminus D_1(o)$ e cujo ângulo

com plano $z = 0$ é θ .

Buscamos um análogo em \mathbb{H}^3 no seguinte sentido: dado \mathbb{H}^2 uma totalmente geodésica de \mathbb{H}^3 e γ uma geodésica passando ortogonalmente por \mathbb{H}^2 , queremos encontrar uma superfície de curvatura média constante, que seja um X -gráfico de Killing, radialmente simétrica com domínio sendo o exterior de um disco centrado em $o = \gamma \cap \mathbb{H}^2$ onde X é o campo de Killing hiperbólico tangente a γ na direção de γ . Uma superfície com tal propriedade em \mathbb{H}^3 seria aquela que é imagem de uma função u satisfazendo a equação (3.1) para o domínio $\Omega = \mathbb{H}^2 \setminus D_\rho(o)$, onde $D_\rho(o)$ é o disco de \mathbb{H}^2 centrado na origem de raio ρ . Se, além disso, impormos a condição que o gráfico tenha o bordo contido em \mathbb{H}^2 e que tenha norma do gradiente constante igual a um certo $s \geq 0$ no bordo, então queremos $u(x) = f(r(x))$, onde r é a distância a origem o e $f : [\rho, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\rho) = 0$, $f'(\rho) = s$ e $\mathcal{M}_H(f \circ r) = 0$.

Se denominarmos $u = f \circ r$, pela Proposição 3.4 ficamos com

$$\mathcal{M}_H(u) := \operatorname{div} \left(\frac{\cosh(r)f'(r)\operatorname{grad} r}{\sqrt{1 + \cosh^2(r)f'^2(r)}} \right) + \frac{f'(r)\sinh(r)}{\sqrt{1 + \cosh^2(r)f'^2(r)}} - 2H = 0 \text{ em } \Omega.$$

Usando que $\Delta r = \operatorname{coth}(r)$ e $|\operatorname{grad} r| = 1$ a equação acima pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\cosh(r)f'(r)}{\sqrt{1 + \cosh^2(r)f'^2(r)}} \right)' + \left(\frac{\cosh(r)f'(r)}{\sqrt{1 + \cosh^2(r)f'^2(r)}} \right) \operatorname{coth}(r) + \frac{f'(r)\sinh(r)}{\sqrt{1 + \cosh^2(r)f'^2(r)}} - 2H = 0.$$

Buscamos então, uma função f que satisfaça o seguinte problema de valor

inicial:

$$\begin{cases} \left(\frac{\cosh(r)f'(r)}{\sqrt{1+\cosh^2(r)f'^2(r)}} \right)' + \left(\frac{\cosh(r)f'(r)}{\sqrt{1+\cosh^2(r)f'^2(r)}} \right) \coth(r) + \frac{f'(r) \sinh(r)}{\sqrt{1+\cosh^2(r)f'^2(r)}} - 2H = 0 \\ f'(\rho) = s \\ f(\rho) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Definindo

$$g(r) = \frac{\cosh(r)f'(r)}{\sqrt{1+\cosh^2(r)f'^2(r)}}, \quad (4.2)$$

obtemos o sistema abaixo, o qual é equivalente as duas primeiras linhas de (4.1)

$$\begin{cases} g'(r) + g(r)(\coth(r) + \tanh(r)) = 2H \text{ em } \Omega \\ g(\rho) = \frac{\cosh(\rho)s}{\sqrt{1+\cosh^2(\rho)s^2}} \end{cases} \quad (4.3)$$

Não é difícil ver que a função

$$g(r) = H \coth(2r) + C(\rho, s, H) \operatorname{cosech}(2r)$$

é solução de (4.3) onde

$$C(\rho, s, H) := -H \cosh(2\rho) + \frac{\sinh(2\rho) \cosh(\rho)s}{\sqrt{1+\cosh^2(\rho)s^2}}. \quad (4.4)$$

Usando (4.2), temos

$$f'^2(r) = \frac{g^2(r)}{\cosh^2 r(1-g^2(r))}.$$

Portanto, o PVI a ser resolvido agora é o seguinte:

$$\begin{cases} f'(r) = \frac{g(r)}{\cosh(r)\sqrt{1-g^2(r)}} \\ f(\rho) = 0, \end{cases}$$

donde concluimos que

$$f(r) = \int_{\rho}^r \frac{H \coth(2t) + C(\rho, s, H) \operatorname{cosech}(2t)}{\cosh(t) \sqrt{1 - (H \coth(2t) + C(\rho, s, H) \operatorname{cosech}(2t))^2}} dt. \quad (4.5)$$

Com isso, temos a seguinte Proposição.

Proposição 4.1. *Considere \mathbb{H}^2 uma totalmente geodésica de \mathbb{H}^3 . Sejam $\Omega = \mathbb{H}^2 \setminus D_{\rho}(o)$, γ uma geodésica passando ortogonalmente por \mathbb{H}^2 e $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^3)$ o campo de Killing hiperbólico tangente a γ na direção de γ . Então dado $s \geq 0$, existe uma função $v_{\rho, s, H} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v_{\rho, s, H}|_{\partial D_{\rho}} = 0$ e o X -gráfico de Killing de $v_{\rho, s, H}$ possui cmc $H \in (-1, 1)$. Além disso, $|\operatorname{grad} v_{\rho, s, H}|_{\partial D_{\rho}} = s$.*

Demonstração. Nossa candidata à solução é $v_{\rho, s, H}(x) = f(r(x))$, onde f é a função dada em (4.5). É suficiente mostrar que ela está bem definida em Ω o que passamos a fazer agora.

Inicialmente note que definindo $g(t) = H \coth(2t) + C(\rho, s, H) \operatorname{cosech}(2t)$ temos que se $s < +\infty$ então $\frac{g(t)}{\sqrt{1-g^2(t)}} < \cosh(\rho)s$, o que garante a integrabilidade de

$$\frac{H \coth(2t) + C(\rho, s, H) \operatorname{cosech}(2t)}{\cosh(t) \sqrt{1 - (H \coth(2t) + C(\rho, s, H) \operatorname{cosech}(2t))^2}}$$

em uma vizinhança de $\partial\Omega$.

Se $s = +\infty$ temos $\frac{g(\rho)}{\sqrt{1-g^2(\rho)}} = +\infty$. Nesse caso para mostrar a integrabilidade em uma vizinhança de $\partial\Omega$, vamos analisar a velocidade com que

$$H \coth(2t) + C(\rho, \infty, H) \operatorname{cosech}(2t) \rightarrow 1,$$

quando $t \rightarrow \rho$.

Considere o seguinte limite

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \rho} \frac{H \coth(2t) + C(\rho, \infty, H) \operatorname{cosech}(2t) - 1}{\rho - t} \\
&= \lim_{t \rightarrow \rho} \frac{-2H \operatorname{cosech}^2(2t) - 2C(\rho, \infty, H) \operatorname{cosech}(2t) \coth(2t)}{-1} \\
&= 2 \operatorname{cosech}(2\rho) [H \operatorname{cosech}(2\rho) + C(\rho, +\infty, H) \coth(2\rho)] \\
&= 2 \operatorname{cosech}(2\rho) [-H \sinh(2\rho) + \cosh(2\rho)] > 0.
\end{aligned}$$

Assim, vemos que $H \coth(2t) + C(\rho, s, H) \operatorname{cosech}(2t)$ se aproxima de 1 no máximo com velocidade linear, donde concluimos a boa definição de f , pelo menos em uma vizinhança de ρ .

Agora note que como $\frac{g(t)}{\sqrt{1-g^2(t)}} \rightarrow \frac{H}{\sqrt{1-H^2}}$ basta verificarmos que $g(t)$ está bem definida em $(\rho, +\infty)$ para garantir que a função é integrável. Observando a expressão (4.5) vemos que é suficiente que

$$-1 < H \coth(2t) + C(\rho, \infty, H) \operatorname{cosech}(2t) < 1.$$

Primeiramente verifiquemos que

$$H \coth(2t) + C(\rho, \infty, H) \operatorname{cosech}(2t) < 1. \quad (4.6)$$

Usando (4.4) é fácil ver que a expressão acima é equivalente a

$$H < \frac{\sinh(2t) - \sinh(2\rho)}{\cosh(2t) - \cosh(2\rho)}. \quad (4.7)$$

Para provar a última desigualdade, afirmamos que

$$h(t) := \frac{\sinh(2t) - \sinh(2\rho)}{\cosh(2t) - \cosh(2\rho)} \geq 1.$$

De fato, é decrescente em (ρ, ∞) , pois

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{2(\cosh(2t)[\cosh(2t) - \cosh(2\rho)] - \sinh(2t)[\sinh(2t) - \sinh(2\rho)])}{[\cosh(2t) - \cosh(2\rho)]^2} \\ &= \frac{2[1 - [\cosh(2t)\cosh(2\rho) - \sinh(2t)\sinh(2\rho)]]}{[\cosh(2t) - \cosh(2\rho)]^2} \\ &= \frac{2[1 - \cosh(2t - 2\rho)]}{[\cosh(2t) - \cosh(2\rho)]^2} < 0 \end{aligned}$$

donde segue que $h(t)$ é decrescente para todo $t > \rho$.

Com isso, inferimos que $h(t) \geq 1$ pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\sinh(2t) - \sinh(2\rho)}{\cosh(2t) - \cosh(2\rho)} \right] = 1.$$

Assim concluimos que vale (4.6). Agora falta mostrar que:

$$-H \coth(2t) - C(\rho, \infty, H) \operatorname{cosech}(2t) < 1. \quad (4.8)$$

Novamente substituindo $C(\rho, s, H)$ obtemos que (4.8) é equivalente a

$$-H < \frac{\sinh(2t) + \sinh(2\rho)}{\cosh(2t) - \cosh(2\rho)}.$$

Mas como vimos anteriormente, se $H \in (-1, 1)$ teremos:

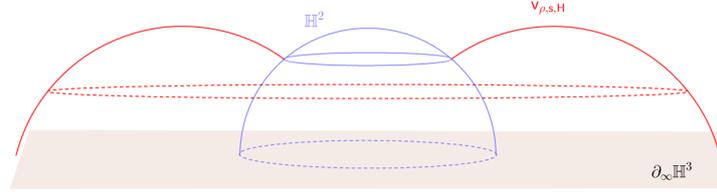
$$-H < 1 < \frac{\sinh(2t) - \sinh(2\rho)}{\cosh(2t) - \cosh(2\rho)} < \frac{\sinh(2t) + \sinh(2\rho)}{\cosh(2t) - \cosh(2\rho)},$$

o que mostra (4.8). Portanto para $H \in (-1, 1)$, temos que $v_{\rho, s, H}$ está bem definida em Ω .

Ademais,

$$|\operatorname{grad} v_{\rho, s, H}(x)||_{\partial\Omega} = f'(\rho) = \frac{H \coth(2\rho) + C(\rho, s, H) \operatorname{cosech}(2\rho)}{\cosh(\rho) \sqrt{1 - (H \coth(2\rho) + C(\rho, s, H) \operatorname{cosech}(2\rho))^2}} = s.$$

Hipersuperfície radialmente simétrica



□

Definição 4.2. Dizemos que o gráfico da função $v_{\rho,s,H}(x)$ é uma hipersuperfície radialmente simétrica com raio interno ρ , inclinação s e curvatura média $H \in (-1, 1)$, associada ao domínio $\mathbb{H}^2 \setminus D_\rho$, onde D_ρ é o disco centrado na origem de \mathbb{H}^2 e raio ρ . Além disso, no caso em que $s = +\infty$ teremos $C(\rho, \infty, H) = -H \cosh(2\rho) + \sinh(2\rho)$, e denotaremos a função apenas por v_ρ se $H = 0$ ou $v_{\rho,H}$ se $H \neq 0$.

Os dois lemas abaixo discorrem a respeito de propriedades destas hipersuperfícies radialmente simétricas.

Lema 4.3. Seja $v_{\rho,H}$ como definida acima. Então:

- Se $H \geq 0$, temos que $v_{\rho,H}$ é crescente
- Se $H < 0$, temos que $v_{\rho,H}$ é crescente em $(\rho, \bar{\rho})$ e decrescente em $(\bar{\rho}, +\infty)$, onde $\bar{\rho} = \ln \left[\cosh(2\rho) - \frac{\sinh(2\rho)}{H} + \sqrt{\left(\cosh(2\rho) - \frac{\sinh(2\rho)}{H} \right)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Note que o crescimento ou decréscimo da função depende apenas se o integrando será positivo ou negativo. Para o caso $H \geq 0$, concluímos, usando a definição de $C(\rho, +\infty, H)$, que $H \coth(2t) + C(\rho, \infty, H) \operatorname{cosech}(2t) \geq 0$ e portanto $v_{r,H}$ será crescente.

Quando $H < 0$, para que tenhamos

$$H \coth(2t) + C(\rho, \infty, H) \operatorname{cosech}(2t) \geq 0,$$

precisamos que

$$-H \left[-\cosh(2t) + \cosh(2\rho) \right] + \sinh(2\rho) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\cosh(2t) \leq \cosh(2\rho) - \frac{\sinh(2\rho)}{H} \Leftrightarrow$$

$$2t \leq \ln \left[\cosh(2\rho) - \frac{\sinh(2\rho)}{H} + \sqrt{\left(\cosh(2\rho) - \frac{\sinh(2\rho)}{H} \right)^2 - 1} \right].$$

Disso concluímos que o lema é verdadeiro. \square

Lema 4.4. *Nas mesmas condições do Lema 4.3, para $H \in [0, 1)$ tem-se que $v_{r,H}$ é uma função limitada.*

Demonstração. No caso $H = 0$ afirmamos que

$$\sup_{\tilde{R} \leq R} \sup_{x \in \Omega} v_{\tilde{R}}(x) \leq \frac{\pi}{4},$$

onde $\Omega = \mathbb{H}^2 \setminus B_R(o)$.

De fato, considere

$$v_\rho(x) = \int_\rho^{r(x)} \frac{\sinh(2s) \operatorname{cosech}(2t)}{\cosh(t) \sqrt{1 - (\sinh^2(2s) \operatorname{cosech}^2(2t))}} dt.$$

Já que

$$\frac{\sinh(2s) \operatorname{cosech}(2t)}{\cosh(t) \sqrt{1 - (\sinh^2(2s) \operatorname{cosech}^2(2t))}} > 0,$$

temos que $v_s(x)$ cresce a medida que $r(x)$ aumenta, temos que

$$v_\rho(r) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} v_\rho(r) =: f(\rho).$$

Portanto

$$\sup_{\bar{R} \leq R} \sup_{x \in \Omega} v_{\bar{R}}(x) \leq \sup f(\rho).$$

Logo, se mostrarmos que $f(s)$ é limitada, a afirmação estará provada.

Fazendo a mudança de variável $u = \frac{\sinh(2s)}{\sinh(2t)}$, teremos $dt = -\frac{1}{2u} \tanh(\bar{s}) du$, onde $\bar{s} = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sinh(2s)}{u}\right)$. Logo,

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \int_1^0 \frac{-\tanh(\bar{s})}{2 \cosh(\frac{\bar{s}}{2}) \sqrt{1-u^2}} du = \int_0^1 \frac{\tanh(\bar{s})}{2 \cosh(\frac{\bar{s}}{2}) \sqrt{1-u^2}} du \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-u^2}} du = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

O caso em que $H > 0$ é análogo ao $H = 0$. De fato, usando a mesma mudança de variável obtemos

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \int_1^0 \frac{[H \coth(\bar{s}) + u] \left[-\frac{\tanh(\bar{s})}{2u}\right]}{\cosh(\frac{\bar{s}}{2}) \sqrt{1 - (H \coth(\bar{s}) + u)^2}} du \\ &\leq \int_0^1 \frac{[H \coth(\bar{s}) + u] \left[\frac{1}{u}\right]}{\cosh(\frac{\bar{s}}{2}) \sqrt{1 - (H \coth(\bar{s}) + u)^2}} du \\ &= \int_0^1 \frac{[H \coth(\bar{s}) + u]}{\sqrt{1 - (H \coth(\bar{s}) + u)^2}} \frac{1}{u \cosh(\frac{\bar{s}}{2})} du < +\infty, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da limitação de $H \coth(\bar{s}) + u$ no intervalo $[0, 1]$. □

4.2 Gráficos mínimos

Nas próximas duas seções, usaremos argumentos de análise e do nosso conhecimento sobre as hipersuperfícies radialmente simétricas para demonstrar a existência de gráficos de Killing com curvatura média constante em domínios exteriores mais gerais. Começamos pelo caso $H = 0$.

Teorema 4.5. *Considere \mathbb{H}^2 uma hipersuperfície totalmente geodésica em \mathbb{H}^3 . Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ um domínio exterior de classe C^0 e γ uma geodésica orientada passando ortogonalmente por \mathbb{H}^2 , com X sendo o campo de Killing hiperbólico tangente a γ na orientação de γ . Então, dado um número real $s \geq 0$, existe uma função não negativa, limitada $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, tal que $u|_{\partial\Omega} = 0$ e o X -gráfico de Killing de u é uma hipersuperfície mínima de \mathbb{H}^3 satisfazendo:*

$$i) \limsup_{x \rightarrow \partial\Omega} |\text{grad } u| = s$$

$$ii) \sup_{\Omega} |u| \leq \frac{\pi}{4},$$

Demonstração. Vamos começar fixando $s \geq 0$ e assumindo que Ω é um domínio de classe C^∞ . Pelo Teorema 2.8 temos que encontrar uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que se anule em $\partial\Omega$ satisfazendo

$$\mathcal{M}(u) := \text{div} \left(\frac{|X| \text{grad } u}{\sqrt{1 + |X|^2 |\text{grad } u|^2}} \right) + \frac{\langle \text{grad } u, \text{grad} (|X|) \rangle}{\sqrt{1 + |X|^2 |\text{grad } u|^2}} = 0, \quad (4.9)$$

e ainda as propriedades *i)* e *ii)* no enunciado do acima.

Fixando a origem de \mathbb{H}^2 em $\gamma \cap \mathbb{H}^2$, considere D_0 o menor disco centrado na origem de \mathbb{H}^2 com raio R_0 tal que $\Omega^c \subset D_0$.

Agora, para cada $m \in \mathbb{N}$, seja D_m o disco geodésico de raio $R_m > R_{m-1}$, onde R_m será precisado mais tarde. Definindo $\Omega_m = D_m \cap \Omega$, vamos mostrar que existe uma solução $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega_m})$ de $\mathcal{M} = 0$ em Ω_m com $u_m|_{\partial\Omega} = 0$ e

tal que $\sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u_m| = s$. O fato de

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Omega_m = \Omega$$

irá nos gerar uma sequência de funções, $\{u_m\}$, que nos permitirá mostrar a existência da função u procurada. Primeiramente, observe que $\Omega^c \subset D_0$, juntamente com o fato que $R_m > R_0$ implicam que Ω_m é conexo, compacto e $\partial\Omega_m$ possui duas componentes conexas.

Agora fixando $m \in \mathbb{N}$, defina o conjunto

$$T_m = \{t \geq 0 \mid \exists u_t \in C^\infty(\overline{\Omega_m}), \text{ tal que } \mathcal{M}(u_t) = 0, u_t|_{\partial\Omega} = 0, \\ u_t|_{\Gamma_m} = t, \sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u_t| \leq s\},$$

onde $\Gamma_m = \partial\Omega_m \setminus \partial\Omega$.

Afirmamos que a função procurada é dada por u_{t_m} , onde $t_m := \sup T_m$. Uma forma de verificarmos que tal afirmação é verdadeira é mostrando que :

- 1) T_m é não vazio
- 2) T_m é limitado
- 3) $\sup T_m \in T_m$
- 4) Se $t_m := \sup T_m$, então $\limsup_{x \rightarrow \partial\Omega} |\text{grad } u_{t_m}(x)| = s$.

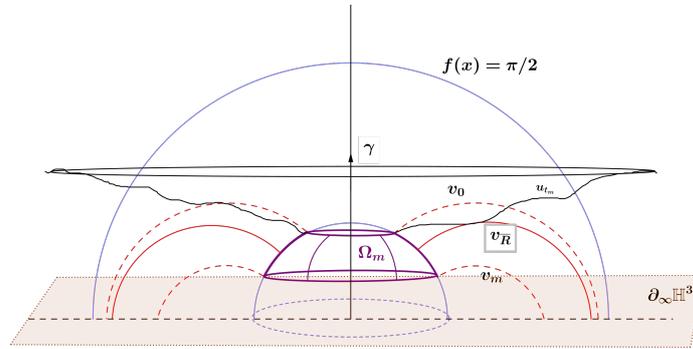
Note que $0 \in T_m$, pois $u_0 \equiv 0$ satisfaz todas as propriedades necessárias e com isso, vale 1). Para mostrarmos o item 2), vamos utilizar o princípio do máximo. Vimos em 4.2 que para cada domínio $\mathbb{H}^2 \setminus D_m$, existe uma hipersuperfície radialmente simétrica associada que é gráfico da função

$$v_m(x) := v_{R_m}(r(x)) = \int_{R_m}^{r(x)} \frac{C_0 \text{cossech}(2t)}{\cosh(t) \sqrt{1 - C_0 \text{cossech}^2(2t)}} dt,$$

onde $r : \mathbb{H}^2 \setminus D_m \rightarrow \mathbb{R}$ é a função distância à origem de \mathbb{H}^2 e $C_0 = \sinh(2R_m)$. Essa hipersuperfície, que possui curvatura média $H = 0$, é gráfico de uma função, cujo gradiente é infinito no bordo e se anula em ∂D_m .

Suponhamos, por absurdo, que T_m é ilimitado. Geometricamente, isso significa que podemos encontrar uma função que assuma em Γ_m um valor tão grande quanto se queira. Vimos que se $\sup_{\bar{R} \leq R_m} \sup_{x \in \Omega_m} v_{\bar{R}}(x) \leq \frac{\pi}{4}$, logo podemos considerar $t \in T_m$ tal que $t > \frac{\pi}{4}$. Já que os domínios de u_t e v_m são disjuntos, temos

$$Gr_X(v_m) \cap Gr_X(u_t) = \emptyset.$$



Considerando a família de hipersuperfícies radialmente simétricas que são gráficos de v_R , com $R \leq R_m$, definidas na definição 4.2 temos que quando R tende a R_0 haverá um primeiro $\bar{R} \in [R_0, R_m)$ tal que $Gr_X(v_{\bar{R}})$ toca o $Gr_X u_t$. Assumindo que $\varphi_{u_t(x)}x$ é o ponto onde ocorre tal toque, mostremos que $u_t(x)$ não pertence a $\partial Gr_X(u_t)$ e portanto é ponto de tangência interior. Levando em conta que $\partial Gr_X(u_t) = \partial \Omega \cup \varphi_t(\Gamma_m)$, temos que x não pertence a Γ_m , pois

$$u_t|_{\Gamma_m} = t > v_{\bar{R}}|_{\Gamma_m}.$$

Se x pertencesse ao bordo de Ω teríamos $u_t(x) = 0$. A função, da família v_R , que satisfaz $v_R(x) = 0$, se $x \in \partial \Omega$, é $v_0 : \mathbb{H}^2 \setminus D_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Porém

$$|\text{grad } v_0|_{\partial D_0} = \infty > s \geq \sup_{\partial \Omega} |\text{grad } u_t|.$$

Sendo assim v_0 seria uma função que em uma vizinhança de ∂D_0 está por cima da função u_t . Entretanto

$$u_t|_{\Gamma_m} = t > k > v_0|_{\Gamma_m}.$$

Logo, por continuidade, deve existir um $\tilde{R} \in (R_0, R_m)$, tal que

$$Gr_X v_{\tilde{R}} \cap Gr_X u_t \neq \emptyset,$$

o que contradiz o fato de x ser a pré-imagem do primeiro ponto de contato. Logo, x não pode pertencer a $\partial\Omega$, donde concluímos que pertence ao interior de Ω_m . Isso implica que x é um ponto de tangência interior de tal forma que uma superfície está totalmente de um lado da outra e pelo Teorema 2.10, teríamos que as funções coincidem, o que é um absurdo. Logo, T_m é um conjunto limitado.

Mostremos agora que $t_m := \sup T_m \in T_m$ e $\sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u_{t_m}| = s$. Começemos mostrando que se $t \in T_m$ então $\sup_{\partial\Omega_m} |\text{grad } u_t| \leq s$. Para isso, vamos definir um raio R_m adequado para nosso disco D_m .

Primeiramente, note que

$$C_0 \text{cossech}^2(2t) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

donde

$$\frac{C_0 \text{cossech}(2t)}{\cosh(t) \sqrt{1 - C_0 \text{cossech}^2(2t)}} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$. Logo

$$\lim_{r(x) \rightarrow \infty} |\text{grad } v_0(x)| = \lim_{r(x) \rightarrow \infty} \frac{\sinh(2R_0) \text{cossech}(2r(x))}{\cosh(r(x)) \sqrt{1 - \sinh^2(2R_0) \text{cossech}(2r(x))}} = 0.$$

Isso nos permite escolher R_1 , tal que

$$|\text{grad } v_0(x)|_{\Gamma_1} < \frac{s}{2}.$$

Recursivamente podemos definir $R_{m+1} = R_m + 1$.

Se $t \in T_m$ temos que $\mathcal{M}(u_t) = 0$ e $u_t|_{\partial\Omega_m} \geq 0$. Isso implica, pelo princípio do máximo, que $u_t \geq 0$. Sendo assim, podemos supor, transladando v_0 para baixo pelo cilindro de Killing gerado por ∂D_0 se necessário, que

$$Gr_X(v_0) \cap Gr_X(u_t) = \emptyset.$$

Agora, subindo $Gr_X(v_0)$ até obter um ponto de tangência entre os gráficos vemos que tal ponto será em $\varphi_t(\Gamma_m)$, pelo mesmo argumento dado quando provamos a limitação do conjunto. Usando isso e o fato de que $u_t \leq t$, pelo princípio do máximo, concluímos (veja figura 4.1) que

$$|\text{grad } u_t|_{\Gamma_m} \leq |\text{grad } v_0|_{\Gamma_m} \leq \frac{s}{2}.$$

Segue que $|\text{grad } u_t|_{\partial\Omega_m} \leq s$.

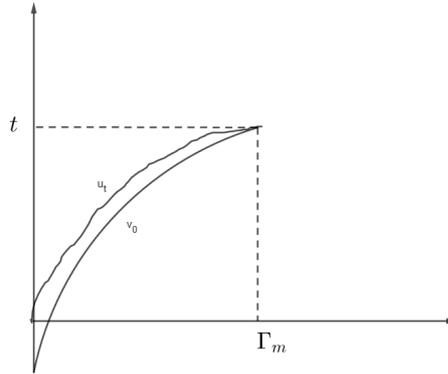


Figura 4.1: Limitação do gradiente

Agora considere $\{\tau_j\} \subset T_m$ uma sequência convergindo a t_m . Cada τ_j possui uma função $u_j \in C^\infty(\overline{\Omega_m})$ associada tal que: u_j é solução de (4.9),

$u_j|_{\partial\Omega} = 0$ e $u_j|_{\Gamma_m} = \tau_j$. Pelo princípio do máximo

$$\sup_{\Omega_m} |u_j| \leq \tau_j \leq t_m. \quad (4.10)$$

Além disso, como vimos acima,

$$\sup_{\partial\Omega_m} |\text{grad } u_j| \leq s, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

Segue de (4.10), (4.11), e do Lema 2.9, que a sequência $\{u_j\}$ tem norma C^1 uniformemente limitada em $\overline{\Omega_m}$. Como $\overline{\Omega_m}$ é um domínio compacto de classe C^∞ , pela teoria de EDP's elípticas, garante-se que a sequência $\{u_{\tau_j}\}$ possui norma C^∞ limitada em compactos donde decorre que $\{u_{\tau_j}\}$ possui uma subsequência convergindo uniformemente em $C^\infty(\overline{\Omega_m})$, para uma solução $w_m \in C^\infty(\Omega_m)$ de $\mathcal{M} = 0$ em $\overline{\Omega_m}$. Por continuidade, temos que $w_m|_{\partial\Omega} = 0$, $w_m|_{\Gamma_m} = t_m$ e $\sup_{\partial\Omega_m} |\text{grad } w_m| \leq s$, donde concluímos que $t_m \in T_m$, ou seja, $w_m = u_{t_m}$.

Por fim, para mostrar 4), suponha $\sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u_{t_m}| < s$ e considere a função

$$T : [0, 2] \times C_0^\infty(\overline{\Omega_m}) \rightarrow C^\infty(\overline{\Omega_m})$$

dada por

$$T(l, w) = \mathcal{M}(w + l\phi),$$

onde escolhemos $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega_m})$ tal que $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ e $\phi|_{\Gamma_m} = t_m$.

Note que $T(1, \omega) = 0$, onde $\omega_m = u_{t_m} - \phi$. Como T é um operador elíptico que satisfaz $\partial_2 T(1, \omega_m)$ ser um isomorfismo, temos pelo teorema da função implícita que existe uma função contínua $i : (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \rightarrow C_0^\infty(\overline{\Omega_m})$ com $i(1) = u_{t_m} - \phi$ tal que $T(l, i(l)) = 0$, $l \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$. Sendo assim, como $\sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u_{t_m}| < s$ e $u_{t_m} = i(1) + \phi$ existe $l \in (1, 1 + \epsilon)$ com $|\text{grad } i(l) + l\phi| < s$. Como $0 = T(l, i(l)) = \mathcal{M}(i(l) + l\phi)$, $i(l) + l\phi = 0$ em $\partial\Omega$ e $i(l) + l\phi = lt_m$ em Γ_m teremos que $lt_m \in T_m$. Mas isto é uma contradição pois $lt_m > t_m = \sup T_m$.

Portanto, $\sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u_{t_m}| = s$. Assim mostramos que existe solução de 4.9 para o domínio Ω_m satisfazendo *i*) e *ii*).

Agora vamos mostrar que existe solução para o domínio Ω . Dada a sequência $\{u_{t_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$, onde cada u_{t_m} é a solução associada a um domínio Ω_m temos $\sup_{\partial\Omega_m} |\text{grad } u_{t_m}| \leq s$. Ainda, usando (4.10) temos que $\sup_{\Omega_m} |u_{t_m}| = t_m \leq \frac{\pi}{4}$. Assim vemos que as estimativas da sequência não dependem de m , donde segue que a sequência possui norma C^1 uniformemente limitada sobre compactos de Ω , o que implica a existência de uma subsequência de $\{u_{t_m}\}$ convergindo uniformemente $C^{2,\alpha}$ para uma solução $u_s \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, satisfazendo $u_s|_{\partial\Omega} = 0$ e $\sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u_s| = s$. Estimativas padrões de EDP elíptica garantem que $u_s \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Para o caso em que Ω é somente de classe C^0 , existe uma sequência de domínios de classe C^∞ , digamos U_j tal que $\bar{\Omega} \subset U_{j+1} \subset U_j$ e $\Omega = \bigcap U_j$. Para cada U_j seja $u_j \in C^\infty(U_j)$ uma solução de $\mathcal{M} = 0$, satisfazendo $u_m|_{\partial U_j} = 0$ e $\sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u_j| = s$. Pelo que vimos acima $|u_j|_1 \leq C(\rho, +\infty, 0)$. Isso nos permite aplicar o teorema de Arzela-Ascoli e concluir que u_m converge uniformemente em compactos de $\bar{\Omega}$ para uma função $u_s \in C^0(\bar{\Omega})$ tal que $u_s|_{\partial\bar{\Omega}} = 0$. Se $\bar{U} \subset \Omega$ é compacto, U aberto, então temos estimativas uniformes C^1 de $u_j|_U$ e pela teoria de EDP's elípticas, $u_j|_U$ contém uma subsequência convergindo C^∞ para $u_s|_U \in C^\infty(U)$. Através do método da diagonal, ou mais precisamente, considerando uma subsequência v_m que associa a cada $m \in \mathbb{N}$, o limite u_s obtido acima, teremos que v_m converge para a solução u desejada.

□

4.3 Gráficos de cmc $H \in (0, 1)$

Lema 4.6. *Seja E_H uma hipersuperfície umbílica com curvatura $H \in [0, 1)$ de \mathbb{H}^3 e γ uma geodésica de \mathbb{H}^3 ortogonal a E_H , com X sendo o campo de Killing hiperbólico tangente a γ na direção de γ . Então $X(p)$ é transversal a*

E_H .

Demonstração. Dado $p \in E_H$ queremos mostrar que $X(p) \notin T_p E_H$. Isso é equivalente a mostrar que $\langle X(p), \eta(p) \rangle_p \neq 0$, onde $\eta(p)$ é o vetor normal a E_H . Sem perda de generalidade, podemos supor o modelo do semiespaço superior para \mathbb{H}^3 e $X(p) = p$. Nesse caso, $E_H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - c)^2 = r^2, x_3 > 0, \}$. Nesse caso, teremos que $\eta(p) = (\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{(x_3 - c)}{r})$. Assim, considerando a métrica euclidiana, vemos que $\langle X(p), \eta(p) \rangle_p > 0$. Como a métrica euclidiana é equivalente a que estamos considerando nesse modelo do espaço hiperbólico, o resultado segue. \square

Antes de demonstramos o teorema de existência de gráficos de Killing, sobre domínios exteriores, de curvatura média constante, vamos relacionar as funções definidas sobre o gráfico de uma função w com as funções definidas sobre um domínio da função w . Embora a demonstração abaixo se aplique a gráficos em geral, vamos fazê-la em nosso contexto.

A figura 4.2 auxilia nas demonstrações da Proposição 4.7 e do Teorema 4.9.

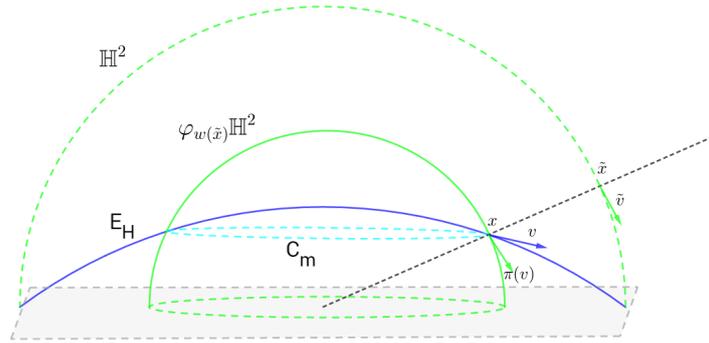


Figura 4.2:

Proposição 4.7. *Sejam $E_H \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície umbílica de \mathbb{H}^3 , com curvatura média constante H , equidistante de \mathbb{H}^2 e $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^3)$ um campo de*

Killing hiperbólico, que seja ortogonal a \mathbb{H}^2 . Considere $w : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função tal que $Gr_X w = E_H$. Então, dada uma função $u : E_H \rightarrow \mathbb{R}$ temos que $\tilde{u} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(\varphi_{w(\tilde{x})}\tilde{x}) + w(\tilde{x})$ é tal que $Gr_X(\tilde{u}) = Gr_X(u)$ e

$$\text{grad } \tilde{u}(\tilde{x}) = \langle \text{grad } u(x), X(x) \rangle_x \text{grad } w(\tilde{x}) + D_2^{-1}(\varphi(w(\tilde{x}), \tilde{x}))\pi(\text{grad } u(x)) + \text{grad } w(\tilde{x}),$$

onde $\pi : T_x E_H \rightarrow T_x(\varphi_{w(\tilde{x})}\mathbb{H}^2)$ é a projeção entre esses espaços, φ_t o fluxo associado ao campo X e $x = \varphi_{w(\tilde{x})}\tilde{x}$.

Demonstração. Vamos começar mostrando que $Gr_X(\tilde{u}) = Gr_X(u)$. De fato, denotando $x = \varphi_{w(\tilde{x})}\tilde{x}$ temos

$$\begin{aligned} Gr_X \tilde{u} &= \{\varphi_{\tilde{u}(\tilde{x})}\tilde{x} \mid \tilde{x} \in \mathbb{H}^2\} = \{\varphi_{u(x)+w(\tilde{x})}\tilde{x} \mid \tilde{x} \in \mathbb{H}^2\} = \{\varphi_{u(x)} \circ \varphi_{w(\tilde{x})}\tilde{x} \mid \tilde{x} \in \mathbb{H}^2\} \\ &= \{\varphi_{u(x)}x \mid x \in \mathbb{H}^2\} = Gr_X u. \end{aligned}$$

Para calcular $\text{grad } \tilde{u}(\tilde{x})$, considere $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$ e $\tilde{\alpha}'(0) = \tilde{v}$. Então

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}(\tilde{\alpha}(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}u(\alpha(t))|_{t=0} + \frac{d}{dt}w(\tilde{\alpha}(t))|_{t=0} \quad (4.12)$$

onde $\alpha(t) = \varphi_{w(\tilde{\alpha}(t))}\tilde{\alpha}(t) := \varphi(w(\tilde{\alpha}(t)), \tilde{\alpha}(t))$. Utilizando a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= D_1(\varphi(w(\tilde{\alpha}(t)), \tilde{\alpha}(t))) \cdot (w \circ \tilde{\alpha})'(t) + D_2(\varphi(w(\tilde{\alpha}(t)), \tilde{\alpha}(t))) \cdot \tilde{\alpha}'(t) \\ &= \frac{d}{dt}\varphi_{w(\tilde{\alpha}(t))}\tilde{\alpha}(t) \cdot (w \circ \tilde{\alpha})'(t) + D_2\varphi_{w(\tilde{\alpha}(t))}\tilde{\alpha}(t) \cdot \tilde{\alpha}'(t) \\ &= X(\alpha(t)) \cdot (w \circ \tilde{\alpha})'(t) + D_2\varphi_{w(\tilde{\alpha}(t))}(\tilde{\alpha}(t)) \cdot \tilde{\alpha}'(t). \end{aligned}$$

Aplicando em $t = 0$, segue que

$$\alpha'(0) = \langle \text{grad } w(\tilde{x}), \tilde{v} \rangle_{\tilde{x}} X(x) + D_2 \varphi_{w(\tilde{x})}(\tilde{x}) \cdot \tilde{v}. \quad (4.13)$$

Usando (4.12) e (4.13) chegamos na seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } \tilde{u}(\tilde{x}), \tilde{\alpha}'(0) \rangle_{\tilde{x}} &= \langle \text{grad } u(x), \alpha'(0) \rangle_x + \langle \text{grad } (w)(\tilde{x}), \tilde{\alpha}'(0) \rangle_{\tilde{x}} \\ \langle \text{grad } \tilde{u}(\tilde{x}), \tilde{v} \rangle_{\tilde{x}} &= \langle \text{grad } u(x), \langle \text{grad } w(\tilde{x}), \tilde{v} \rangle_{\tilde{x}} X(x) \rangle_x \\ &\quad + \langle \text{grad } u(x), D_2 \varphi_{w(\tilde{x})}(\tilde{x}) \cdot \tilde{v} \rangle_x + \langle \text{grad } w(\tilde{x}), \tilde{v} \rangle_{\tilde{x}} \\ &= \langle \text{grad } u(x), X(x) \rangle_x \langle \text{grad } w(\tilde{x}), \tilde{v} \rangle_{\tilde{x}} \\ &\quad + \langle D_2^{-1}(\varphi_{w(\tilde{x})}(\tilde{x})) \pi(\text{grad } u(x)), \tilde{v} \rangle_x + \langle \text{grad } w(\tilde{x}), \tilde{v} \rangle_{\tilde{x}}, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato de $\varphi(t, x)$ ser uma isometria na segunda coordenada.

Segue daí a conclusão da proposição.

□

Corolário 4.8. *Nas condições da proposição 4.7 temos que:*

- i) Se $r(\tilde{x}) \rightarrow \infty$, onde r é a função distância ao centro de \mathbb{H}^2 , então $|\text{grad } \tilde{u}(\tilde{x})| \rightarrow 0$ se e somente se $|\text{grad } u(x)| \rightarrow 0$*
- ii) $|\text{grad } \tilde{u}(\tilde{x})| \rightarrow +\infty$ se e somente se $|\text{grad } u(x)| \rightarrow +\infty$.*

Demonstração. Usando a relação obtida para o gradiente das funções na proposição 4.7, basta mostrar que $|\text{grad } w(\tilde{x})| \rightarrow 0$, quando $r(\tilde{x}) \rightarrow \infty$ e concluímos o resultado do corolário. Para ver isso, note que a função w pode ser obtida da mesma forma que encontramos $v_{\rho, s, H}$, ou seja, usando (4.1). Porém vamos exigir que $f'(0) = 0$ e ao invés de fixar $f(0)$ igual a um certo valor, vamos fixar a curvatura H . Seguindo as mesmas contas, chegaremos em uma expressão para w que se diferencia de $v_{\rho, s, H}$ apenas pela constante $C(\rho, s, H)$ dada em (4.4). Segue disso, e do fato de $|\text{grad } v_{\rho, s, H}(\tilde{x})| \rightarrow 0$, que $|\text{grad } w(\tilde{x})| \rightarrow 0$ quando $r(\tilde{x}) \rightarrow +\infty$. □

Teorema 4.9. *Seja E_H uma superfície umbílica de curvatura $H \in (0, 1)$ contida em \mathbb{H}^3 . Considere $\Omega \subset E_H$ um domínio exterior de classe C^0 e γ uma geodésica orientada passando ortogonalmente por E_H , com $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^3)$ o campo de Killing hiperbólico tangente a γ na orientação de γ tal que $\langle X, \eta \rangle > 0$, onde η é o vetor normal a E_H . Então, dado um número real $s \geq 0$ existe uma função, não negativa, limitada $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tal que o $Gr_X u$ possui curvatura média constante H , $u|_{\partial\Omega} = 0$ e $\limsup_{x \rightarrow \partial\Omega} |\text{grad } u(x)| = s$.*

Demonstração. Seja \mathbb{H}^2 uma superfície totalmente geodésica de \mathbb{H}^3 equidistante de E_H . Por ser equidistante, se γ é perpendicular a \mathbb{H}^2 , também será a E_H .

Seja $w : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Gr_X w = E_H$, ou seja,

$$E_H = \{\varphi_{w(\tilde{x})}\tilde{x} \mid \tilde{x} \in \mathbb{H}^2\}.$$

Dado $p \in E_H$, vamos denotar por \tilde{p} o ponto de \mathbb{H}^2 tal que $p = \varphi_{w(\tilde{p})}\tilde{p}$. Também, dado o disco $D_\rho = \{p \in E_H \mid d(p, o) < \rho\}$ definimos x_0 como um ponto de ∂D_ρ . Seja $\tilde{\rho} = d(\tilde{x}_0, \tilde{o})$. Associado a D_ρ temos o disco $D_{\tilde{\rho}} = \{\tilde{p} \in \mathbb{H}^2 \mid d(\tilde{p}, \tilde{o}) < \tilde{\rho}\}$ onde $\tilde{\rho} = d(\tilde{x}_0, \tilde{o})$. O fato de E_H ser visto como um gráfico sobre \mathbb{H}^2 , permite que toda função, com domínio em E_H tenha associada a ela uma função \tilde{u} , com domínio em \mathbb{H}^2 , cujo gráfico é o mesmo. De fato, como vimos na Proposição 4.7, dada uma função $u : \Omega \subset E_H \rightarrow \mathbb{R}$, temos que $\tilde{u} : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = u(x) + w(\tilde{x})$$

possui o mesmo gráfico de Killing de u , onde $x = \varphi_{w(\tilde{x})}\tilde{x}$

Já que a curvatura média é algo intrínseco da superfície, independente da função que estejamos considerando, seja \tilde{u} ou u , o gráfico de ambas terá a mesma curvatura média. Entretanto já que possuem domínios em espaços diferentes, a expressão do operador curvatura média será diferente. Nosso objetivo é encontrar uma família de superfícies cmc em \mathbb{H}^3 com bordo contido

em uma hipersfera, não compactas do tipo gráfico e com gradiente prescrito no bordo. Embora estejamos trabalhando sobre domínios exteriores em E_H , sempre que necessário, ao longo da demonstração, vamos recorrer aos domínios associados em \mathbb{H}^2 .

Começemos então fixando $s \geq 0$ e supondo Ω um domínio exterior de classe C^∞ . Sejam D_0, \dots, D_m, \dots discos de E_H centrados na origem $o = \gamma \cap E_H$, com raio R_m , de tal forma que D_0 seja o menor disco satisfazendo $\Omega^c \subset D_0, D_i \subset D_{i+1}$ e $E_H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i$. Seja $C_m := \partial D_m$, vamos denotar por \mathbb{H}_m^2 a totalmente geodésica que contém C_m . Nesse caso temos que para um certo t^* que $\mathbb{H}_m^2 = \varphi_{t^*}(\mathbb{H}^2)$. Ver figura 4.2.

Note que como \mathbb{H}_m^2 é uma translação de \mathbb{H}^2 , pelo fluxo do campo X , as propriedades citadas acima para \mathbb{H}^2 também serão válidas para \mathbb{H}_m^2 . Defina $\Omega_m = D_m \cap \Omega$.

Considere o conjunto

$$T_m = \{t \geq 0 \mid \exists u_t \in C^\infty(\overline{\Omega_m}), \tilde{\mathcal{M}}_H(\tilde{u}_t) = 0, u_t|_{\partial\Omega} = 0, u_t|_{\Gamma_m} = t, \limsup_{x \rightarrow \partial\Omega} |\text{grad } u_t(x)| \leq s\},$$

onde $\Gamma_m = \partial\Omega_m \setminus \partial\Omega$ e $\tilde{\mathcal{M}}_H$ é o operador curvatura média em \mathbb{H}^2 . Como observamos anteriormente, o fato de $\tilde{\mathcal{M}}_H(\tilde{u}_t) = 0$ é equivalente a dizer que o gráfico de \tilde{u}_t (portanto o gráfico de u_t) possui curvatura média constante H . Vamos mostrar que:

- 1) T_m é não vazio
- 2) T_m é limitado
- 3) $\sup T_m \in T_m$
- 4) Se $t_m = \sup T_m$ então $\limsup_{x \rightarrow \partial\Omega} |\text{grad } u_{t_m}| = s$.

Primeiramente note que $0 \in T_m$ pois se $u_0 \equiv 0$ teremos

$$\tilde{u}_0(\tilde{x}) = u_0(x) + w(\tilde{x}) = w(\tilde{x}),$$

e portanto $\tilde{\mathcal{M}}_H(\tilde{u}_0) = 0$, dado que $E_H = Gr_X(w)$ possui cmc H . Além disso, $u_t|_{\partial\Omega} = 0$ e $|\text{grad } u_t|_{\partial\Omega} = 0 \leq s$.

Para mostrarmos a limitação de T_m vamos usar o princípio da tangência. Suponha que T_m não é limitado. Considere a função $v_{m,H} : E_H \setminus D_m \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $v_{m,H}(x) = \tilde{v}_{\tilde{m},H}(\tilde{x}) - w(\tilde{x})$, onde $\tilde{v}_{\tilde{m},H}$ é a função definida em $\mathbb{H}_m^2 \setminus D_{\tilde{m}}$ cujo gráfico é uma superfície radialmente simétrica de curvatura H , se anula em $\partial D_{\tilde{m}}$ e o gradiente em $\partial D_{\tilde{m}}$ é infinito. Como vimos $v_{m,H}$ e $\tilde{v}_{\tilde{m},H}$ possuem o mesmo gráfico. Note que $Gr_X(v_{m,H}) \cap Gr_X(u_t) = \emptyset$.

Considerando a família de hipersuperfícies radialmente simétricas que são gráficos de $v_{R,H} : E_H \setminus D_R \rightarrow \mathbb{R}$, $v_{R,H}(x) = \tilde{v}_{\tilde{R},H}(\tilde{x}) - w(\tilde{x})$, vemos que diminuindo o raio R teremos que haverá um primeiro $\bar{R} \in [0, R_m)$ tal que $Gr_X(v_{\bar{R},H})$ toca $Gr_X(u_t)$. Vamos mostrar que esse primeiro ponto de contato é interior, chegando assim em uma contradição.

No Lema 4.4 mostramos que $v_{R,H}$ é uniformemente limitada. Por isso, supondo que T_m é ilimitado podemos considerar u_t de tal forma que $u_t|_{\Gamma_m} = t > \sup_{R \leq \bar{R}} v_{R,H}$, o qual é limitado pelo Lema (4.4), donde vemos que a tangência não ocorre em Γ_m .

Se o primeiro ponto de tangência fosse em $\partial\Omega$ teríamos $\bar{R}_0 = 0$, mas $v_{0,H}$ é tal que

$$|\text{grad } v_{0,H}|_{\partial D_0} = \infty > s > \sup_{\partial\Omega} |\text{grad } u_t|.$$

Sendo assim, ao menos em uma vizinhança de ∂D_0 o gráfico da função $\tilde{v}_{0,H}$ está por cima da função \tilde{u}_t e o mesmo vale para $v_{0,H}$ e u_t .

Porém, como $u_t|_{\Gamma_m} = t > v_{0,H}|_{\Gamma_m}$ temos, por continuidade que existe um outro $R > 0$ tal que $Gr_X v_R \cap Gr_X u_t \neq \emptyset$, o que contraria o fato do primeiro ponto de contato ser em $\partial\Omega$. Com isso concluímos que o ponto de tangência é interior, o que é um absurdo pelo princípio da tangência. Logo se $t \in T_m$ temos

$$t \leq \frac{\pi}{4} \tag{4.14}$$

ou seja, T_m é um conjunto limitado.

Passemos agora a mostrar que $\sup T_m \in T_m$. Começemos mostrando que se $t \in T_m$ então $\sup_{\partial\Omega_m} |\text{grad } u_t| \leq s$. Temos que $|\text{grad } v_{0,H}| \rightarrow 0$ quando $r(x) \rightarrow \infty$. Sendo assim escolhemos R_1 tal que $|\text{grad } v_{0,H}|_{\Gamma_1} < \frac{s}{2}$.

Recursivamente, definimos $R_{m+1} = R_m + 1$. Podemos supor, transladando $v_{0,H}$ para baixo na direção do campo X , se necessário, que $Gr_X v_0 \cap Gr_X u_t = \emptyset$. Agora subindo o $Gr_X v_0$ até obter o primeiro ponto de contato vemos que tal ponto não pode ser interior, pelo princípio da tangência e nem em $\partial\Omega$ pelo mesmo argumento usado na prova da limitação de T_m . Sendo assim tal toque ocorre em $\varphi_t(\Gamma_m)$ ou seja $t = u_t|_{\Gamma_m} = v_{0,H}|_{\Gamma_m}$. Ainda, pelo princípio do máximo temos que $u_t \leq t$ em Ω_m . Usando esses fatos obtemos

$$|\text{grad } u_t|_{\Gamma_m} \leq |\text{grad } v_{0,H}|_{\Gamma_m} \leq \frac{s}{2}.$$

Segue que $|\text{grad } u_t|_{\partial\Omega_m} \leq s$.

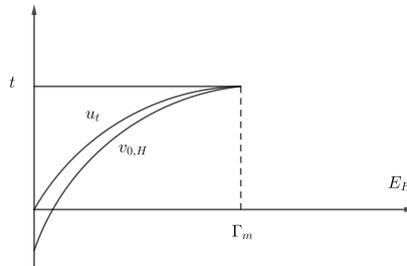


Figura 4.3: Limitação do gradiente

O restante da demonstração segue as mesmas linhas do caso das mínimas, desde que façamos uma adaptação adequada do operador. Mais precisamente, queremos encontrar um operador $\mathcal{M}_H : C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que dada uma função $u : \Omega \subset E_H \rightarrow \mathbb{R}$ tenha-se $\mathcal{M}_H(u) = 0$ se e somente se $Gr_X(u)$ tenha cmc H . Vimos que $Gr_X u$ possui cmc H se e somente se $Gr_X \tilde{u}$ tem cmc H , o qual por sua vez satisfaz $\tilde{\mathcal{M}}_H(\tilde{u}) = 0$, onde \tilde{u} é dado no

enunciado da Proposição 4.7. Logo definimos

$$\mathcal{M}_H(u) := \tilde{\mathcal{M}}_H(\tilde{u} - w).$$

Com isso podemos concluir os passos 3 e 4.

A exaustão do domínio Ω e o caso em que ele é apenas de classe C^0 , são feitas da mesma forma que o teorema anterior.

□

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ALR] Alías, L., López, R., Ripoll, J.: “*CMC Hypersurfaces with Boundary in Hyperbolic Space*” *J Geom Anal*, 23:2177–2187 (2013).
- [CK] Collin, P., Krust, R.: “*Le problème de Dirichlet pour l’équation des surfaces minimales sur de domaines non bornés*”, *Bull. Soc. Math. de France*, 119, p.443-462 (1991).
- [dC] do Carmo, M.: “*Geometria Riemanniana*” 3ed. IMPA, (2005).
- [DL] Dajczer, M., Lira, J.: “*Killing graphs with prescribed mean curvature and Riemannian submersions*” *Ann. I. H. Poincaré – AN* 26 763–775, (2009).
- [DR] Dajczer, M., Ripoll, J., “*An Extension of a Theorem of Serrin to Graphs in Warped Products*” *The Journal of Geometric Analysis* Volume 15, Number 2, (2005).
- [ER] Earp, R., Rosenberg, H.: “*The Dirichlet problem for the minimal surface equation on unbounded planar domains*”, *Journal des Math. Pures et Appliquées*, 68, 163-183, (1989).
- [EsR] Espírito-Santo, N., Ripoll, J.: “*Some existence results on the exterior Dirichlet problem for the minimal hypersurface equation*” *Ann. I. H. Poincaré- AN* 28 385-393, (2011).
- [ET] Earp, R., Toubiana, E.: “*Some applications of maximum principle to hypersurface in euclidean and hyperbolic space*”. In: Rassias, T.M. (ed.)

- New Approaches in Nonlinear Analysis, pp. 183–202. Harmonic Press (1999).
- [Fi1] Finn, R.: “*On Equations of Minimal Surface Type*”, Annals of Mathematics, v.60, p.397-416, (1954).
- [Fi2] Finn, R.: “*Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature* J. d’Analyse Mathématique, v.14, p. 139-160, (1965).
- [FR] Fusieger, P., Ripoll, J.: “*Radial Graphs of Constant Mean Curvature and Doubly Connected Minimal Surfaces with Prescribed Boundary* Annals of Global Analysis and Geometry 23: 373–400, (2003).
- [GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.: “*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*”, Springer-Verlag (1998).
- [KT] Kutev, N., Tomi, F.: “*Existence and Nonexistence in the Exterior Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in the Plane*”, the Journal of Differential and Integral Equations. 11 , no. 6, 917-928 (1998).
- [LM] López, R., Montiel, S.: “*Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space*”, Calc. Var. 8, 177–190 (1999).
- [Ni] Nitsche, J.C.C.: “*Lectures on Minimal Surfaces*”, Vol. I, Cambridge University Press, (1989).
- [N] Nunes, A.: “*Teoremas de comparação e uma aplicação a estimativa do primeiro autovalor*”, Dissertação de Mestrado, UFRGS (2014).
- [Ra] Radó, T.: “*The problem of the least area and the problem of Plateau*”, Math. Z,v.82, p. 763-796 (1930).
- [Ra1] Radó, T.: “*Contributions to the theory of minimal surface*”, Acta Litt. Sci. Univ. Szeged, v.6, p. 1-20, (1932).

- [R] Ripoll, J.: “*Some existence and gradient estimates of solutions of the Dirichlet problem for the constant mean curvature equation in convex domains*”, *Journal of Differential Equations* 181, 230–241 (2002).
- [RT] Ripoll, J., Tomi.F.: “*On solutions to the exterior Dirichlet problem for the minimal surface equation with catenoidal ends*” *Adv. Calc. Var.*, v. 7, p. 205, (2014).