

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Sincronização Parcial Causada pela
Heterogeneidade do Processo Migratório**

por

Simone Ossani

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutora em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Jacques Aveline Loureiro da Silva
Orientador

Porto Alegre, 04 de abril de 2018.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Ossani, Simone

Sincronização Parcial Causada pela Heterogeneidade do Processo Migratório / Simone Ossani.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2018.

105 p.: il.

Tese (Doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2018.

Orientador: Silva, Jacques Aveline Loureiro da

Tese: Matemática Aplicada

Metapopulação, Heterogeneidade Espacial, Sincronização Parcial, Estabilidade Transversal

Sincronização Parcial Causada pela Heterogeneidade do Processo Migratório

por

Simone Ossani

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutora em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Sistemas Não-Lineares e Biomatemática

Orientador: Prof. Dr. Jacques Aveline Loureiro da Silva

Banca examinadora:

Profa. Dra. Diomar Cristina Mistro
PPGMat/UFSM

Prof. Dr. Luiz Alberto Díaz Rodrigues
PPGMat/UFSM

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Vanderlei Manica
UFSM

Tese apresentada e aprovada em
04 de abril de 2018.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

A Deus;

À minha família;

Aos meus amigos;

Ao meu orientador;

Aos professores da banca examinadora;

Aos professores da UFRGS;

À Capes.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	xii
RESUMO	xiii
ABSTRACT	xiv
1 INTRODUÇÃO	1
2 FUNÇÕES DE DINÂMICA VITAL E MIGRAÇÃO	7
2.1 A Função de Ricker	7
2.2 A Função de Migração	10
3 REDES CONECTIVAS	12
3.1 Rede Global	14
3.2 Rede Global Ponderada	15
3.3 Rede Bipartida	17
3.4 Rede $1/2$	19
3.5 Rede Grupo Preferencial	20
4 MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO CONSTANTE	23
4.1 Análise de Estabilidade do Estado Síncrono	27
4.2 Análise para os Diferentes Tipos de Rede	40
4.2.1 Rede Global	40
4.2.2 Rede Global Ponderada	43
4.2.3 Rede Bipartida	44
4.2.4 Rede $1/2$	45

4.2.5	Rede Grupo Preferencial	46
4.3	Resultados Numéricos	48
4.3.1	Número de Lyapunov Transversal	49
4.3.2	Densidade Populacional	59
4.4	Conclusões do Capítulo	66
5	MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO DEPENDENTE DA DENSIDADE	68
5.1	Análise de Estabilidade do Estado Síncrono	71
5.2	Resultados Numéricos	80
5.2.1	Caso em que $\mu_f(x) = \mu_g(x)$	81
5.2.2	Caso em que $\mu_f(x) \neq \mu_g(x)$	89
5.2.2.1	Resultados para $h_f \neq h_g$ e $b_f = b_g$	89
5.2.2.2	Resultados para $h_f \neq h_g$ e $b_f \neq b_g$	93
5.3	Conclusões do Capítulo	95
6	MODELO COM TAXA DE MIGRAÇÃO CONSTANTE VERSUS MODELO COM TAXA DE MIGRAÇÃO DEPENDENTE DA DENSIDADE	97
7	CONCLUSÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	101
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	102

Lista de Figuras

Figura 1.1	Exemplos de como podem ser formadas as metapopulações homogêneas e metapopulações heterogêneas.	2
Figura 2.1	Diagrama de Bifurcação da função de Ricker (a) $0 \leq r \leq 4$ (b) $2, 8 \leq r \leq 4$	8
Figura 2.2	Número de Lyapunov em função de r para a função de Ricker.	9
Figura 2.3	Comportamento da função de migração $\mu(x)$ para $h = 0, 8$; $p = 1$ e (a) $b > 0$ (antiagregação) (b) $b < 0$ (agregação).	10
Figura 4.1	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede global e $r = 2, 8$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 160$ e $k = 40$ (c) $n = 20$ e $k = 10$ (d) $n = 160$ e $k = 80$	53
Figura 4.2	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede global e $r = 4, 0$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 20$ e $k = 10$	53
Figura 4.3	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede global ponderada (com $a = 0, 5$) e $r = 2, 8$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 160$ e $k = 40$ (c) $n = 20$ e $k = 10$ (d) $n = 160$ e $k = 80$	54
Figura 4.4	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede global ponderada (com $a = 0, 5$) e $r = 4, 0$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 20$ e $k = 10$	54
Figura 4.5	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede global ponderada (com $a = 2$) e $r = 2, 8$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 160$ e $k = 40$ (c) $n = 20$ e $k = 10$ (d) $n = 160$ e $k = 80$	55
Figura 4.6	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede global ponderada (com $a = 2$) e $r = 4, 0$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 20$ e $k = 10$	55
Figura 4.7	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede bipartida e $r = 2, 8$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 160$ e $k = 40$ (c) $n = 20$ e $k = 10$ (d) $n = 160$ e $k = 80$	56
Figura 4.8	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g , para a rede bipartida e $r = 4, 0$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 20$ e $k = 10$	56

Figura 4.9	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f para $\mu_g = 0, 15, r = 2, 8, n = 20$ e $k = 5$. (a) Rede global (b) Rede bipartida.	57
Figura 4.10	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede 1/2 e $r = 2, 8$. (a) $n = 8$ e $k = 2$ (b) $n = 20$ e $k = 5$ (c) $n = 8$ e $k = 4$ (d) $n = 20$ e $k = 10$.	57
Figura 4.11	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede 1/2 e $r = 4, 0$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 20$ e $k = 10$.	58
Figura 4.12	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede grupo preferencial e $r = 2, 8$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 160$ e $k = 40$ (c) $n = 20$ e $k = 10$ (d) $n = 160$ e $k = 80$.	58
Figura 4.13	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede grupo preferencial e $r = 4, 0$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 20$ e $k = 10$.	59
Figura 4.14	Para a rede global com $r = 2, 8, n = 40, k = 10, \mu_f = 0, 8$ e $\mu_g = 0, 2$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.	62
Figura 4.15	Para a rede global com $r = 2, 8, n = 40, k = 20, \mu_f = 0, 1$ e $\mu_g = 0, 2$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.	63
Figura 4.16	Para a rede global com $r = 3, n = 40, k = 30, \mu_f = 0, 5$ e $\mu_g = 0, 04$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.	63
Figura 4.17	Para a rede bipartida com $r = 2, 8, n = 40, k = 10, \mu_f = 0, 4$ e $\mu_g = 0, 6$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.	64
Figura 4.18	Para a rede bipartida com $r = 2, 8, n = 40, k = 15, \mu_f = 0, 4$ e $\mu_g = 0, 6$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.	64
Figura 4.19	Para a rede bipartida com $r = 2, 8, n = 40, k = 30, \mu_f = 0, 4$ e $\mu_g = 0, 6$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.	65
Figura 4.20	Para a rede bipartida com $r = 3, n = 40, k = 20, \mu_f = 0, 5$ e $\mu_g = 0, 3$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.	65

Figura 4.21	Para a rede 1/2 com $r = 4$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = 0,2$ e $\mu_g = 0,3$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.	66
Figura 4.22	Para a rede 1/2 com $r = 4$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = 0,9$ e $\mu_g = 0,1$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.	66
Figura 5.1	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global em função do parâmetro $r_g \in [2,5;4,0]$ e $r_f = 2,8$, $h = 0,1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$	83
Figura 5.2	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global em função do parâmetro $r_g \in [2,5;4,0]$ e $r_f = 2,8$, $h = 0,9$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$	84
Figura 5.3	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 2$) em função do parâmetro $r_g \in [2,5;4,0]$ e $r_f = 2,8$, $h = 0,1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$	84
Figura 5.4	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 2$) em função do parâmetro $r_g \in [2,5;4,0]$ e $r_f = 2,8$, $h = 0,9$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$	85
Figura 5.5	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 0,5$) em função do parâmetro $r_g \in [2,5;4,0]$ e $r_f = 2,8$, $h = 0,1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$	85
Figura 5.6	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 0,5$) em função do parâmetro $r_g \in [2,5;4,0]$ e $r_f = 2,8$, $h = 0,9$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$	86
Figura 5.7	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede bipartida em função do parâmetro $r_g \in [2,5;4,0]$ e $r_f = 2,8$, $h = 0,1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$	86
Figura 5.8	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede bipartida em função do parâmetro $r_g \in [2,5;4,0]$ e $r_f = 2,8$, $h = 0,9$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$	87

- Figura 5.9 Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede 1/2 em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$ 87
- Figura 5.10 Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede 1/2 em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 9$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$ 88
- Figura 5.11 Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede grupo preferencial em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$ 88
- Figura 5.12 Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede grupo preferencial em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 9$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$ 89
- Figura 5.13 Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $b_f = b_g = 1$ e $b_f = b_g = -1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $h_f = 0$ e $h_g = 1$ (b) $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$ 90
- Figura 5.14 Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 2$) em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $b_f = b_g = 1$ e $b_f = b_g = -1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $h_f = 0$ e $h_g = 1$ (b) $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$ 91
- Figura 5.15 Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 0, 5$) em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $b_f = b_g = 1$ e $b_f = b_g = -1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $h_f = 0$ e $h_g = 1$ (b) $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$ 91
- Figura 5.16 Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede bipartida em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $b_f = b_g = 1$ e $b_f = b_g = -1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $h_f = 0$ e $h_g = 1$ (b) $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$ 92
- Figura 5.17 Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede 1/2 em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $b_f = b_g = 1$ e $b_f = b_g = -1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $h_f = 0$ e $h_g = 1$ (b) $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$ 92
- Figura 5.18 Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede grupo preferencial em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $b_f = b_g = 1$ e $b_f = b_g = -1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $h_f = 0$ e $h_g = 1$ (b) $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$ 93

Figura 5.19	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b_f = 1$, $b_g = 100$ (b) $b_f = -1$, $b_g = -100$	94
Figura 5.20	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede bipartida em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b_f = 1$, $b_g = 100$ (b) $b_f = -1$, $b_g = -100$	94
Figura 5.21	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede 1/2 em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b_f = 1$, $b_g = 100$ (b) $b_f = -1$, $b_g = -100$	95
Figura 5.22	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede grupo preferencial em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b_f = 1$, $b_g = 100$ (b) $b_f = -1$, $b_g = -100$. . .	95
Figura 6.1	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0, 1$ e $\mu_g = h_g = 0, 9$. (a) $b = -1$ (b) $b = 1$	98
Figura 6.2	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 2$) em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0, 1$ e $\mu_g = h_g = 0, 9$. (a) $b = -1$ (b) $b = 1$	98
Figura 6.3	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 0, 5$) em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0, 1$ e $\mu_g = h_g = 0, 9$. (a) $b = -1$ (b) $b = 1$	99
Figura 6.4	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede bipartida em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0, 1$ e $\mu_g = h_g = 0, 9$. (a) $b = -1$ (b) $b = 1$	99
Figura 6.5	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede 1/2 em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0, 1$ e $\mu_g = h_g = 0, 9$. (a) $b = -1$ (b) $b = 1$	100
Figura 6.6	Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede grupo preferencial em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0, 1$ e $\mu_g = h_g = 0, 9$. (a) $b = -1$ (b) $b = 1$	100

Lista de Tabelas

Tabela 4.1	Números de Lyapunov para rede global, conforme parâmetros de cada figura.	62
Tabela 4.2	Números de Lyapunov para rede bipartida, conforme parâmetros de cada figura.	63
Tabela 4.3	Números de Lyapunov para rede 1/2, conforme parâmetros de cada figura.	65

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o desenvolvimento de dois modelos metapopulacionais heterogêneos para uma única espécie, onde em cada modelo trabalhamos com dois agrupamentos de sítios que se diferenciam pela taxa de migração (constante ou dependente da densidade) e dinâmica local. São apresentadas as condições necessárias para a ocorrência de dinâmicas parcialmente sincronizadas, ocasionando a formação de dois *clusters*, onde em cada *cluster* a dinâmica de todos os sítios é sincronizada. Com o propósito de analisar a estabilidade assintótica do estado parcialmente síncrono, obtemos uma expressão para o cálculo do número de Lyapunov transversal do atrator parcialmente sincronizado e simulamos numericamente esse número para diversas possibilidades de parâmetros e redes de conexão. Por fim, fazemos uma comparação entre ambos os modelos desenvolvidos.

ABSTRACT

In this work we present the development of two heterogeneous metapopulation models for a single specie, where in each model we work with two groups of patches that differ by the rate of migration (constant or density dependent) and by the local dynamics. The necessary conditions for the occurrence of partially synchronized dynamics are presented, resulting in the formation of two clusters, where in each cluster the dynamics of all the patches are synchronized. In order to analyze the asymptotic stability of the partially synchronous state, we obtain an expression for the calculation of the transverse Lyapunov number of the partially synchronized attractor and numerically simulate this number for several possibilities of parameters and connection networks. Finally, we make a comparison between both developed models.

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas houve um crescente interesse no estudo de modelos matemáticos que consideram os aspectos espaciais da população [25, 28]. Segundo [34], um dos motivos para esse interesse é a fragmentação da paisagem devido às atividades humanas e às consequências que isso traz para as espécies locais. A destruição de habitats naturais destacou a importância dos modelos ecológicos com inclusão do espaço [13].

A formação de padrões espaciais é uma das questões mais importantes em estudos ecológicos modernos. Os modelos metapopulacionais espacialmente explícitos, mesmo com regras simples de interação, são capazes de exibir dinâmicas espaciais complexas, formando uma importante classe de modelos que consideram o espaço e compõem uma poderosa ferramenta para o estudo de padrões espaciais [19, 28, 27]. Em tais modelos a população é formada por subpopulações ou populações locais, distribuídas em fragmentos de habitat que conectam-se através de movimentos migratórios e são adequados à reprodução e sobrevivência. Esses fragmentos são chamados de sítios ou “*patches*” e estão cercados por um ambiente inadequado à dinâmica vital¹ da população em questão. O conjunto de todas as populações locais formam uma metapopulação [13, 28].

O termo “metapopulação” foi usado pela primeira vez por Richard Levins no ano de 1970 para descrever “uma população de populações”. No entanto, ideias de dinâmicas metapopulacionais já eram utilizadas antes de Levins e com o tempo passaram a desempenhar um papel importante em assuntos relacionados à ecologia da paisagem e biologia da conservação [14]. Alguns dos estudos clássicos em metapopulações podem ser encontrados em [6, 24, 25, 32].

¹Neste trabalho, dinâmica vital inclui reprodução e sobrevivência, também denominada dinâmica local.

Uma metapopulação é chamada de homogênea se em todos os seus sítios a população possui a mesma dinâmica local, caso contrário ela é dita heterogênea. Na Figura 1.1 encontram-se exemplos destas duas formas de metapopulações.

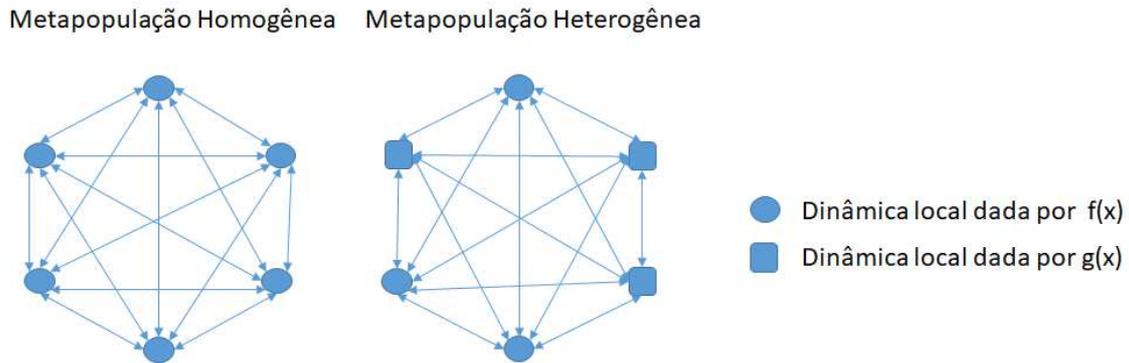


Figura 1.1: Exemplos de como podem ser formadas as metapopulações homogêneas e metapopulações heterogêneas.

Em se tratando de sistemas dinâmicos acoplados, uma das principais preocupações é saber se estes apresentarão o fenômeno da sincronização [4]. Nos termos deste estudo, uma dinâmica sincronizada ocorre quando todos os sítios, ou grupos de sítios da população, com condições iniciais diferentes, passam a ter o mesmo número de indivíduos num determinado instante de tempo t_0 , a partir do qual evoluem de maneira idêntica. Neste caso, diz-se que ocorre a formação de um (quando a sincronização é total ou perfeita) ou mais (quando a sincronização é parcial) *clusters* [17, 18, 27]. A sincronização da dinâmica temporal das populações pode ser causada por distúrbios globais e também pela migração. Diversos exemplos reais que versam sobre sincronização são encontrados em [16, 20].

Neste estudo estamos analisando a sincronização parcial em modelos metapopulacionais heterogêneos para uma única espécie, ou seja, metapopulações em que a função dinâmica local é a mesma para todos os sítios, porém, parâmetros da função diferem entre eles. Nos trabalhos de [21, 31, 33] temos alguns exemplos em que a sincronização parcial ocorre em modelos metapopulacionais homogêneos.

A relevância em se estudar o sincronismo nos modelos metapopulacionais é que ele é uma importante forma de padrão espacial encontrado na natureza, uma vez que tem relação direta com o processo de extinção de populações. Uma metapopulação em sincronia que chega a níveis de extinção populacional tem dificuldades em se restabelecer, pois, densidade populacional baixa em todos os sítios dificulta a recolonização daqueles que porventura tenham tido sua população extinta. Por outro lado, os trabalhos apresentados por [1, 7, 16] mostram que oscilações caóticas podem reduzir o grau de sincronismo entre os sítios, reduzindo também a probabilidade de extinção, pois se a população é extinta em um sítio enquanto os outros mantêm um número relevante de indivíduos, a extinção global pode ser evitada através do chamado efeito de resgate, quando habitantes de sítios vizinhos dispersam e colonizam um sítio vazio.

Um bom entendimento com respeito ao estado síncrono é de total interesse nos dias atuais, quando o planeta sofre dos mais diversos tipos de desequilíbrios naturais e o fenômeno da extinção de populações pode ser tanto indesejável, quando falamos de populações nativas e importantes para o equilíbrio de um ecossistema, como desejável, se pensarmos em populações invasoras, vírus causadores de epidemias, entre outros.

Encontramos na literatura diversos estudos relacionados ao sincronismo total de metapopulações homogêneas, como por exemplo em [4, 26] que apresentam modelos metapopulacionais com taxa de migração dependente da densidade, e também o caso em que o processo de migração depende do tempo, descrevendo assim uma dinâmica sazonal.

Modelos semelhantes também são utilizados em [23, 28], onde os autores observaram as condições para que um sistema no estado homogêneo estável possa tornar-se instável através do movimento migratório dependente da densidade.

Alguns dos estudos acerca de sincronização parcial em ambientes heterogêneos são encontrados no trabalho de [17], onde é apresentado um estudo sobre formação de *clusters* em um sistema presa-predador, concluindo que a forma de conexão entre os sítios é de grande importância para a dinâmica resultante. E também em [27], onde é desenvolvido um trabalho sobre o estado parcialmente síncrono em um modelo metapopulacional heterogêneo com taxa de migração constante e igual para todos os sítios.

Neste trabalho desenvolvemos dois de modelos metapopulacionais. O primeiro modelo trata de uma metapopulação heterogênea constituída por dois grupos distintos, que diferem entre si pela taxa de migração (constante) e pela dinâmica vital. No segundo modelo, em vez de taxa de migração constante, passamos a considerar em cada grupo de sítios uma taxa de migração dependente da densidade local, e assim, podemos investigar os efeitos causador pela adição dessa dependência.

De acordo com [12], na natureza, sítios que diferem pela localização nunca são completamente iguais em suas características. Levando isso em consideração, neste trabalho podemos considerar que ambientes fragmentados são heterogêneos, ou seja, com diferentes qualidades e disponibilidades de recursos, podendo causar diversidade quanto à migração da população, de acordo com a localização do sítio em que se encontra.

O principal objetivo deste trabalho é avaliar, em ambos os modelos, a influência do processo migratório na formação de *clusters*, ou seja, na sincronização parcial das metapopulações.

Além disso, não é qualquer topologia de rede que suporta a dinâmica parcialmente sincronizada. Assim, no decorrer do estudo temos também a preocupação de apresentar diferentes possibilidades de conexão entre os sítios, pois, diferentes redes conectivas geram diferentes resultados. Conforme [17], é de grande importância para a Ecologia entender como a mudança de conectividade

afeta a persistência e dinâmica de espécies que interagem. Embora aqui estejamos trabalhando com apenas uma espécie, temos interesse em saber o que acontece quando alteramos a topologia da rede de conexão entre os sítios da metapopulação. Para isso, apresentamos resultados para algumas redes conectivas clássicas e também desenvolvemos duas novas formas de conexão as quais chamamos de rede 1/2 e rede grupo preferencial.

Com relação às redes conectivas, trabalhamos com diversas possibilidades de conexão assimétrica, enquanto a maior parte dos estudos da área, entre eles [18, 23, 28, 26], utilizam apenas conexão simétrica.

O presente trabalho encontra-se estruturado da seguinte maneira: no segundo capítulo descrevemos detalhadamente a função de Ricker, utilizada como função de dinâmica local, e também a função de migração. No terceiro capítulo apresentamos as cinco formas de rede de conexão com as quais realizamos as simulações numéricas, bem como a motivação para a construção das duas novas redes. Finalmente, no quarto capítulo construímos passo a passo o modelo metapopulacional com taxa de migração constante. Obtemos a solução parcialmente sincronizada e analisamos a estabilidade assintótica da mesma, construindo uma expressão simples para o cálculo do número de Lyapunov transversal. Após uma análise da solução sincronizada e do número de Lyapunov transversal para cada uma das redes descritas no capítulo anterior, apresentamos os resultados numéricos e algumas conclusões preliminares para o modelo.

No quinto capítulo temos a construção do modelo metapopulacional com taxa de migração dependente da densidade. De forma semelhante ao quarto capítulo, obtemos a solução parcialmente sincronizada e analisamos a sua estabilidade assintótica que leva à obtenção do número de Lyapunov transversal para o modelo. Depois disso, apresentamos as simulações numéricas para diferentes casos e parâmetros. Terminamos o capítulo com algumas conclusões acerca do modelo.

O capítulo seis é destinado a uma comparação entre alguns dos resultados gerados pelos modelos desenvolvidos. Por fim, no capítulo sete descrevemos as conclusões gerais do trabalho e algumas ideias com relação a trabalhos futuros.

2 FUNÇÕES DE DINÂMICA VITAL E MIGRAÇÃO

Este capítulo destina-se a um breve estudo sobre as funções de dinâmica vital, denominadas por $f(x)$ e $g(x)$ e as funções de migração, $\mu_f(x)$ e $\mu_g(x)$, utilizadas no decorrer deste trabalho para o desenvolvimento dos resultados numéricos.

2.1 A Função de Ricker

Diversas funções podem ser utilizadas para descrever a dinâmica local de uma população, conforme exemplos que podem ser vistos em [2, 3, 9, 15, 22].

Em um modelo em tempo discreto, sendo x_t a população em um instante de tempo t , a dinâmica local pode ser descrita através de:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

onde f é uma função suave em $[0, \infty)$ com valores não-negativos.

Apesar da simplicidade aparente da dinâmica local, a escolha da função f pode ocasionar o aparecimento de dinâmicas bastante variadas e complexas, conforme referências citadas no início desta seção.

Neste trabalho, fazemos uso da função de Ricker, também conhecida por função exponencial logística, que é descrita por:

$$f(x) = xe^{r(1-x)}, \quad (2.2)$$

ou também, $f(x) = xe^r e^{-rx}$, onde e^r é o fator constante de reprodução e e^{-rx} é o fator de sobrevivência dependente da densidade.

O único ponto de equilíbrio positivo da função de Ricker é $x^* = 1$, estável para $0 < r < 2$. Quando tomamos $r > 2$ a dinâmica passa a ser um ciclo de

período 2 estável, que conforme aumentamos o valor de r torna-se instável, dando lugar a um ciclo de período 4, depois 8, e assim sucessivamente. Estas bifurcações formam uma sequência de ciclos com período 2^n , $\forall n \in \mathbb{N}$. Este comportamento é conhecido como uma cascata de bifurcações periódicas que termina com o surgimento de caoticidade, ou seja, um comportamento aleatório onde não há regularidade e apresenta dependência sensível das condições iniciais [3, 30]. Quando r torna-se ainda maior nos deparamos com a existência das chamadas janelas de periodicidade, ou seja, intervalos para os quais a dinâmica torna-se novamente periódica.

Na Figura 2.1 (a) podemos observar o Diagrama de Bifurcação da função de Ricker, onde visualiza-se a ocorrência de uma dinâmica complexa, que de acordo com o crescimento do valor do parâmetro r passa de ponto fixo para soluções periódicas e caos. Em (b) verificamos o comportamento da mesma função na região dos valores de r para os quais é possível ver com clareza a formação das janelas periódicas.

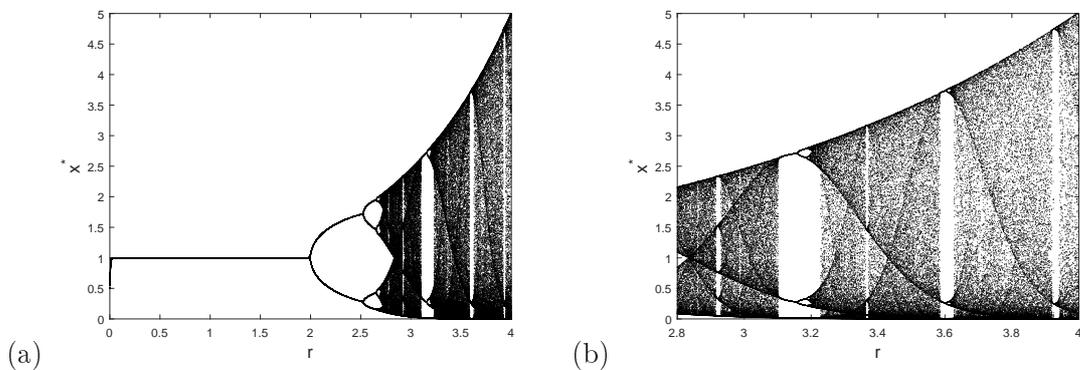


Figura 2.1: Diagrama de Bifurcação da função de Ricker (a) $0 \leq r \leq 4$ (b) $2,8 \leq r \leq 4$.

A existência do comportamento caótico pode ser comprovado através do cálculo do número de Lyapunov, que é um indicador de caoticidade por medir a velocidade média com que órbitas, para condições iniciais próximas, se separam. Assim, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , o número de Lyapunov da órbita

$\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ é dado por

$$L(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (|f'(x_0)| |f'(x_1)| \dots |f'(x_{\tau-1})|)^{\frac{1}{\tau}}, \quad (2.3)$$

se esse limite existir.

Tomando o logaritmo natural do número de Lyapunov, obtemos o expoente de Lyapunov, dado por

$$h(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} (\ln|f'(x_0)| + \ln|f'(x_1)| + \dots + \ln|f'(x_{\tau-1})|), \quad (2.4)$$

onde $h(x_0)$ existe se, e somente se, $L(x_0) \geq 0$ existe e $\ln(L(x_0)) = h(x_0)$.

Uma órbita apresenta um comportamento caótico se $L(x_0) > 1$ e $h(x_0) > 0$. Quando $L(x_0) < 1$ e $h(x_0) < 0$, então a órbita converge para um ponto fixo ou um ciclo periódico [3, 30].

Na Figura 2.2 podemos observar o cálculo numérico do número de Lyapunov para a função de Ricker, apresentando valores maiores que 1 nas regiões do parâmetro r em que a função descreve uma dinâmica caótica.

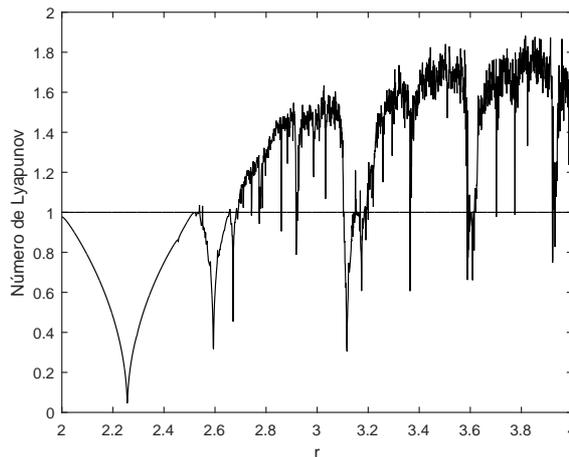


Figura 2.2: Número de Lyapunov em função de r para a função de Ricker.

2.2 A Função de Migração

Com a finalidade de simular numericamente o modelo metapopulacional com taxa de dispersão dependente da densidade, optamos por fazer uso da função de migração citada em [34] e descrita por:

$$\mu(x) = \frac{h}{1 + e^{b(p-x)}}, \quad (2.5)$$

onde h é a fração máxima de dispersão, b determina o quão abrupto é o crescimento na taxa de dispersão no caso de termos $b > 0$ ou decrescimento quando temos $b < 0$. Por último, p marca o ponto de inflexão da função $\mu(x)$, conforme pode ser visualizado na Figura 2.3. Desta forma, o ponto de inflexão é identificado por $(p, \frac{h}{2})$.

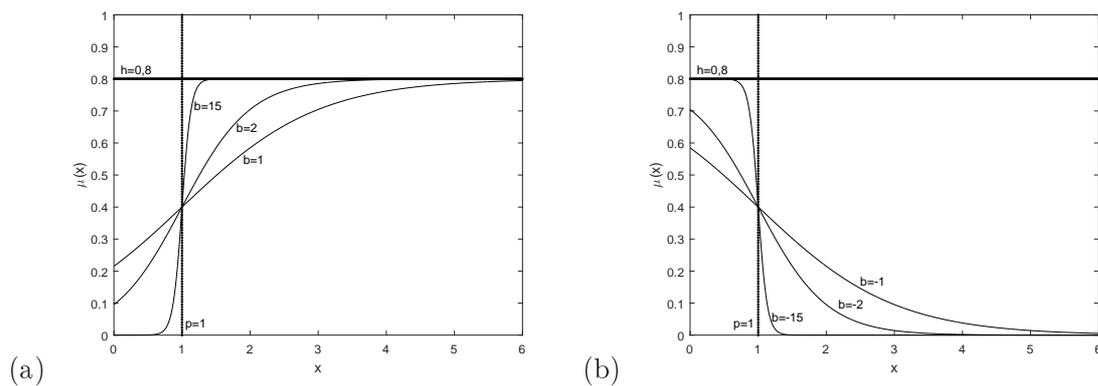


Figura 2.3: Comportamento da função de migração $\mu(x)$ para $h = 0,8$; $p = 1$ e (a) $b > 0$ (antiagregação) (b) $b < 0$ (agregação).

A interpretação biológica para o fato de estarmos considerando tanto b positivo como negativo é de que a migração pode ocorrer pelo excesso de indivíduos que causa escassez de recursos e competição entre eles ($b > 0$), ou pela dificuldade de encontrar parceiros que faz com que os indivíduos queiram se agrupar ($b < 0$).

Outra propriedade da função $\mu(x)$ é que ela se torna do tipo degrau quando temos $b \rightarrow +\infty$ ou $b \rightarrow -\infty$, ou seja, temos que

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < p \\ h, & \text{se } x > p \end{cases} \quad (2.6)$$

para $b \rightarrow +\infty$, e

$$\mu(x) = \begin{cases} h, & \text{se } x < p \\ 0, & \text{se } x > p \end{cases} \quad (2.7)$$

para $b \rightarrow -\infty$.

Neste trabalho utilizamos sempre $p = 1$, como no exemplo da Figura 2.3, tornando o ponto de inflexão $(1, \frac{h}{2})$ de $\mu(x)$ igual ao ponto de equilíbrio positivo da função de Ricker.

Interpretando biologicamente $\mu(x)$, se o número de indivíduos de um sítio for menor que o equilíbrio, então não há migração quando $b \rightarrow +\infty$ ou, a migração é constante e representada por h , quando $b \rightarrow -\infty$. Já se o número de indivíduos de um sítio for maior que o equilíbrio, temos então o caso contrário, ou seja, a migração é constante e igual a h para $b \rightarrow +\infty$ e não há migração para $b \rightarrow -\infty$.

3 REDES CONECTIVAS

Se pensarmos nas formas de conexão entre os sítios na natureza, podemos considerar uma infinidade de exemplos de redes de acoplamento plausíveis. Entretanto, neste trabalho, estamos interessados nas formas de conexão que possibilitam a ocorrência da sincronização parcial para os modelos metapopulacionais desenvolvidos. Aqui, em particular, estamos avaliando a formação de dois *clusters*.

Neste estudo, redes em forma de anéis cíclicos são utilizadas, com a vantagem de que condições de contorno periódicas evitam efeitos de fronteira. Mais sobre esse tipo de rede e alguns trabalhos que também utilizam anéis cíclicos podem ser vistos em [23, 25, 28].

Seja n o número total de sítio de uma metapopulação e $c_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, as entradas da matriz de interação ou conexão, matriz C , que é representada por:

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Considere agora uma metapopulação que se divide em dois grupos de sítios, onde k é o número de sítios que fazem parte do primeiro grupo. Desta forma,

a matriz de conexão C é reescrita, conforme segue:

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,k} & c_{1,k+1} & c_{1,k+2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,k} & c_{2,k+1} & c_{2,k+2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k,1} & c_{k,2} & \cdots & c_{k,k} & c_{k,k+1} & c_{k,k+2} & \cdots & c_{k,n} \\ \hline c_{k+1,1} & c_{k+1,2} & \cdots & c_{k+1,k} & c_{k+1,k+1} & c_{k+1,k+2} & \cdots & c_{k+1,n} \\ c_{k+2,1} & c_{k+2,2} & \cdots & c_{k+2,k} & c_{k+2,k+1} & c_{k+2,k+2} & \cdots & c_{k+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,k} & c_{n,k+1} & c_{n,k+2} & \cdots & c_{n,n} \end{array} \right]. \quad (3.2)$$

As exigências necessárias à matriz de conexão para a existência e estabilidade da solução parcialmente sincronizada são apresentadas com mais detalhes no próximo capítulo em (4.11) e (4.23). Para conhecimento, elas são definidas conforme abaixo, onde as condições para as linhas (separando as k primeiras, das demais) são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^k c_{i,j} = \alpha, \quad \sum_{j=k+1}^n c_{i,j} = \beta, \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^k c_{i,j} = \gamma, \quad \sum_{j=k+1}^n c_{i,j} = \delta, \quad i = k+1, k+2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

E, para as colunas (separando as k primeiras, das demais):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^k c_{i,j} = \alpha', \quad \sum_{i=k+1}^n c_{i,j} = \gamma', \quad j = 1, 2, \dots, k, \\ \sum_{i=1}^k c_{i,j} = \beta', \quad \sum_{i=k+1}^n c_{i,j} = \delta', \quad j = k+1, k+2, \dots, n, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma'$ e δ' são constantes não-negativas.

As restrições 3.3 e 3.4 sobre as linhas e colunas da matriz de conexão, possuem um significado biológico que obriga a população a comportar-se como dois grupos em relação à migração, ou seja, em cada grupo de sítios a população possui um comportamento comum quanto à forma de dispersão.

Ainda que com propriedades bastante limitadas, temos várias possibilidades para a construção das redes conectivas. Uma das redes mais conhecidas e utilizadas é a rede global. Outros exemplos também clássicos são a rede global ponderada e a rede bipartida.

Neste estudo, temos também o interesse em desenvolver algumas novas formas de conexão entre os sítios, além das tradicionais redes conectivas citadas acima e muito utilizadas em trabalhos como [10, 23, 27], por exemplo.

Assim, este capítulo é destinado à apresentação das redes de conexão utilizadas no desenvolvimento das simulações numéricas deste trabalho, que são as conhecidas redes global, global ponderada e bipartida e também as redes desenvolvidas e intituladas de rede 1/2 e rede grupo preferencial, conforme pode ser visualizado nas seções a seguir.

3.1 Rede Global

A rede global é um exemplo de rede simétrica. Nela, a conexão ocorre de forma homogênea entre todos os sítios, ou seja, todos os sítios estão interligados e a migração é igual para todos eles. Os coeficientes de conexão são $c_{i,j=\frac{1}{n-1}}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ e portanto a forma da matriz de conexão é dada conforme abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Em um exemplo para para a rede global, com dois grupos diferentes de sítios, onde $n = 10$ e $k = 3$, a matriz C adquire a forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \hline \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Note que para essa rede, as condições em (3.3) e (3.4) são satisfeitas para todo $k = 1, 2, \dots, n - 1$, e ainda

$$\begin{cases} \alpha = \frac{k-1}{n-1}, & \beta = \frac{n-k}{n-1}, \\ \gamma = \frac{k}{n-1}, & \delta = \frac{n-k-1}{n-1}. \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2 Rede Global Ponderada

É uma rede da mesma família que a rede global, apresentada anteriormente. Aqui também todos os sítios estão interligados, porém, as frações de migração para sítios de um mesmo *cluster* são diferentes das frações de migração de sítios de *clusters* diferentes. Este é um exemplo de rede assimétrica.

ou, $a = 1/2 < 1$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{2}{12} \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{2}{12} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{2}{12} \\ \hline \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} \end{array} \right]. \quad (3.11)$$

Note que se $a = 0$ a migração entre os sítios ocorre somente para grupos distintos, neste caso a rede também é chamada de bipartida, ela será apresentada a seguir. Sendo $a = 1$, então retornamos para o caso da rede global, vista anteriormente. Por último, se $a \rightarrow \infty$ então temos o caso contrário ao de $a = 0$, ou seja, a comunicação entre os sítios ocorre apenas dentro de seus respectivos grupos, os quais encontram-se isolados uns dos outros [27].

3.3 Rede Bipartida

Conforme já comentado anteriormente, quando $a = 0$ na rede global ponderada, temos a origem da rede bipartida.

Na rede bipartida a migração ocorre sempre entre sítios de grupos distintos, ou seja, não existe conexão entre sítios de um mesmo grupo. Vejamos

abaixo como fica a matriz C considerando esta rede:

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} \\ \hline \frac{1}{n-k} & \cdots & \frac{1}{n-k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n-k} & \cdots & \frac{1}{n-k} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right], \quad (3.12)$$

onde o primeiro bloco nulo é de ordem $k \times k$ e o segundo é de ordem $(n-k) \times (n-k)$.

Obtém-se facilmente para a matriz C acima, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{n-k}{k}$, $\gamma = \frac{k}{n-k}$ e $\delta = 0$.

No exemplo a seguir podemos verificar como é definida a matriz C para dois grupos de sítios, onde $n = 10$ e $k = 3$.

$$C = \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.13)$$

A rede bipartida em geral é assimétrica, a menos que tenhamos $n = 2k$, que é o caso em que ela se torna simétrica.

3.4 Rede 1/2

A ideia desta rede é de que ela seja assimétrica, onde os indivíduos migrantes tenham um sítio preferencial, que é o sítio mais próximo (diretamente subsequente, em uma rede em forma de anel cíclico) e sempre na mesma direção, dentro do grupo de sítios de que fazem parte, como se cada grupo formasse um anel cíclico. Nesse sentido, quando a migração ocorre, metade dos indivíduos migrantes se dirige para este sítio preferencial e a outra metade distribui-se igualmente entre o restante dos sítios de ambos os grupos. A definição desta rede em forma da matriz de acoplamento C é dada por:

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \frac{1}{2(n-2)} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2(n-2)} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2(n-2)} \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \frac{1}{2} & \ddots & \frac{1}{2(n-2)} & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2(n-2)} & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2(n-2)} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2(n-2)} \\ \hline \frac{1}{2(n-2)} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2(n-2)} & 0 & \frac{1}{2(n-2)} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \frac{1}{2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2(n-2)} \\ \frac{1}{2(n-2)} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2(n-2)} & \frac{1}{2(n-2)} & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right], \quad (3.14)$$

onde n é o número total de sítios e $n \geq 3$. Para $n = 3$ a rede 1/2 se torna igual à rede global.

Para a matriz C definida acima, a partir de alguns cálculos simples, obtemos que $\alpha = \frac{n+k-4}{2(n-2)}$, $\beta = \frac{n-k}{2(n-2)}$, $\gamma = \frac{k}{2(n-2)}$ e $\delta = \frac{2n-k-4}{2(n-2)}$.

Como exemplos da rede $1/2$, para $n = 8$ e $k = 5$ a matriz de conexão adquire a forma

$$C = \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \hline \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right], \quad (3.15)$$

para $n = 10$ e $k = 3$, obtemos

$$C = \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{16} \\ \hline \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]. \quad (3.16)$$

3.5 Rede Grupo Preferencial

O objetivo desta rede, além de fornecer mais um exemplo de acoplamento assimétrico, é descrever a situação de dois agrupamentos de sítios onde em um deles as condições ambientais são mais favoráveis e agradáveis aos indivíduos em que nele vivem, enquanto o outro agrupamento encontra-se em um território mais hostil e menos favorável à sobrevivência da espécie. Ou ainda, podemos

simplesmente considerar que os indivíduos podem ter preferência por alguns sítios, mesmo com boas condições de sobrevivência em todos eles.

Nesse sentido, consideramos que os indivíduos que se encontram no grupo preferencial não percebem a existência dos sítios com qualidades adversas, distribuindo-se igualmente entre todos os sítios da metapopulação durante o processo migratório. Os indivíduos que habitam os sítios menos favoráveis, migram em busca de um ambiente apropriado, distribuindo-se apenas pelos sítios que fazem parte do grupo preferencial.

Um melhor entendimento pode ser obtido na definição esquemática da matriz de conexão que é descrita a seguir:

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \hline \frac{1}{n-k} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-k} & 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \frac{1}{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-k} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-k} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right], \quad (3.17)$$

onde n é o número total de sítios e $n \geq 2$. A partir desses dados obtemos que $\alpha = 0$, $\beta = \frac{n-k}{n-1}$, $\gamma = \frac{k}{n-k}$ e $\delta = \frac{n-k-1}{n-1}$.

4 MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO CONSTANTE

Neste capítulo apresentamos a construção do modelo metapopulacional com taxa de migração constante, partindo do modelo mais simples até obter o modelo que desejamos trabalhar, com formação de dois agrupamentos de sítios distintos, onde os sítios de cada grupo possuem uma taxa de migração diferente.

Para a construção do modelo, considere uma metapopulação homogênea constituída por apenas uma espécie, distribuída em n sítios enumerados por $1, 2, \dots, n$. A cada geração, de forma ordenada, a população dos sítios passa pelo processo de reprodução e sobrevivência, que é também chamado de dinâmica local, e posteriormente ocorre a migração ou dispersão.

Seja $x_t^i \in \mathbb{R}$ a população no sítio i no tempo t . Na ausência de migração, a dinâmica local nos sítios é descrita por

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

onde f é uma função suave em $[0, \infty)$ com valores não-negativos. Estamos assumindo que todos os sítios oferecem condições iguais de reprodução e sobrevivência.

Dando continuidade à construção do modelo, agora vamos considerar que existe migração entre os sítios. Para isso denotamos por μ^1 , onde $\mu \in [0, 1]$, a probabilidade de um indivíduo deixar seu sítio. Já a probabilidade de um indivíduo partir do sítio j e se estabelecer no sítio i é representada por $c_{i,j}$, onde $0 \leq c_{i,j} \leq 1$, $c_{i,i} = 0$, pois não há migração de um sítio para ele mesmo, e ainda $\sum_{i=1}^n c_{i,j} \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Os elementos $c_{i,j}$ formam a matriz conexão, $C = [c_{i,j}]$, conforme definição em (3.2).

¹ μ é chamado de fração de dispersão ou migração

Dado o exposto acima, juntamente com a dinâmica local em (4.1), podemos escrever a equação da evolução temporal da metapopulação como

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \mu \sum_{j=1}^n c_{i,j}f(x_t^j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

O primeiro termo do lado direito de (4.2) representa os indivíduos que permanecem no sítio i no tempo t . O segundo termo representa os indivíduos que partem dos sítios vizinhos e chegam ao sítio i . Este modelo matemático e suas variações têm sido muito estudados por diversos autores e com diversos objetivos. Em [29] por exemplo, foi estudado o modelo (4.2) com comunicação entre os sítios ocorrendo apenas entre os dois vizinhos mais próximos, com o objetivo de deduzir as condições de estabilidade do estado síncrono da metapopulação.

Vamos agora supor que por algum motivo, como por exemplo condições climáticas e ambientais, tanto a função dinâmica vital como a fração de migração μ são diferentes para dois tipos de agrupamentos de sítios. Trata-se, portanto, de um modelo metapopulacional heterogêneo para uma única espécie.

Neste modelo, denotamos por μ_f a taxa de migração para a população dos sítios com índice em $1, 2, \dots, k$, onde a dinâmica vital é representada por f . Da mesma forma, designamos por μ_g a taxa de migração para a população dos sítios com índice em $k+1, k+2, \dots, n$, que possuem dinâmica vital representada por g . As demais hipóteses assumidas na formulação do modelo anterior também são válidas aqui.

Dessa forma, na ausência de migração, para $t = 0, 1, 2, \dots$, a dinâmica local dos sítios pode ser descrita por

$$\begin{cases} x_{t+1}^i = f(x_t^i), & i = 1, 2, \dots, k \\ x_{t+1}^i = g(x_t^i), & i = k+1, k+2, \dots, n \end{cases} \quad (4.3)$$

onde f e g são funções suaves em $[0, \infty)$ com valores não-negativos.

Considerando a existência da migração entre os diversos sítios e a dinâmica local descrita em (4.3), a equação que descreve a evolução temporal da metapopulação heterogênea é dada por

$$\begin{cases} x_{t+1}^i = (1 - \mu_f)f(x_t^i) + \mu_f \sum_{j=1}^k c_{i,j}f(x_t^j) + \mu_g \sum_{j=k+1}^n c_{i,j}g(x_t^j), & i = 1, 2, \dots, k, \\ x_{t+1}^i = (1 - \mu_g)g(x_t^i) + \mu_f \sum_{j=1}^k c_{i,j}f(x_t^j) + \mu_g \sum_{j=k+1}^n c_{i,j}g(x_t^j), & i = k + 1, k + 2, \dots, n. \end{cases} \quad (4.4)$$

Note que em (4.4), diferentemente da metapopulação em (4.2), a contribuição dos indivíduos migrantes para um determinado sítio i provém de dois grupos de sítios distintos. Olhando para o lado direito das igualdades em (4.4), o primeiro termo representa os indivíduos que permanecem no sítio i no tempo t . O segundo termo descreve os indivíduos que partem dos sítios vizinhos com índice em $1, 2, \dots, k$ e chegam ao sítio i . Por fim, no terceiro termo temos os emigrantes dos sítios com índice em $k + 1, k + 2, \dots, n$ para o sítio i . As condições de estabilidade para o estado síncrono de uma metapopulação heterogênea semelhante a esta foram apresentadas em [10, 27], porém, nesses estudos os autores consideram que todos os sítios possuem a mesma taxa de migração μ constante.

Trabalhar com o sistema (4.4) pode tornar o desenvolvimento do estudo complexo e de difícil manipulação, por isso utilizamos artifícios matemáticos de forma a simplificar os cálculos, representando matricialmente o sistema por

$$X_{t+1} = [I - (I - C)M]D(X_t), \quad (4.5)$$

onde $X_t \in \mathbb{R}^n$, $D(X_t) \in \mathbb{R}^n$ e são descritos respectivamente por

$$X_t = \left[x_t^1 \quad x_t^2 \quad \dots \quad x_t^k \quad x_t^{k+1} \quad \dots \quad x_t^n \right]^T, \quad (4.6)$$

e

$$D(X_t) = \left[f(x_t^1) \quad f(x_t^2) \quad \dots \quad f(x_t^k) \quad g(x_t^{k+1}) \quad \dots \quad g(x_t^n) \right]^T. \quad (4.7)$$

E ainda, I é a matriz identidade, C é a matriz de conexão e M é a matriz diagonal

$$M = \text{diag}(\overbrace{\mu_f, \mu_f, \dots, \mu_f}^k, \overbrace{\mu_g, \mu_g, \dots, \mu_g}^{n-k}), \quad (4.8)$$

todas de ordem $n \times n$.

Assumindo que no tempo t_0 o sistema entra em sincronia parcial, temos para todo $t \geq t_0$,

$$\begin{cases} x_t^i = x_t, & \text{para } i = 1, 2, \dots, k, \\ y_t^i = y_t, & \text{para } i = k + 1, k + 2, \dots, n. \end{cases} \quad (4.9)$$

Impondo a trajetória (4.9) no sistema (4.4), obtemos

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1 - \mu_f)f(x_t) + \mu_f \sum_{j=1}^k c_{i,j}f(x_t) + \mu_g \sum_{j=k+1}^n c_{i,j}g(y_t), & i = 1, 2, \dots, k, \\ y_{t+1} = (1 - \mu_g)g(y_t) + \mu_f \sum_{j=1}^k c_{i,j}f(x_t) + \mu_g \sum_{j=k+1}^n c_{i,j}g(y_t), & i = k + 1, k + 2, \dots, n. \end{cases} \quad (4.10)$$

Obviamente, em (4.10) não temos a garantia da existência da solução parcialmente sincronizada. No entanto, basta adicionar algumas hipóteses com relação à matriz C para obtermos o desejado. Tais hipóteses, também utilizadas em [10, 27], são descritas a seguir:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k c_{i,j} = \alpha, & \sum_{j=k+1}^n c_{i,j} = \beta, & i = 1, 2, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^k c_{i,j} = \gamma, & \sum_{j=k+1}^n c_{i,j} = \delta, & i = k + 1, k + 2, \dots, n, \end{cases} \quad (4.11)$$

onde α, β, γ e δ são constantes não-negativas.

Considerando (4.11) em (4.10), obtemos a equação de evolução temporal da solução parcialmente sincronizada (solução *2-clusters*):

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1 - \mu_f)f(x_t) + \mu_f\alpha f(x_t) + \mu_g\beta g(y_t), \\ y_{t+1} = (1 - \mu_g)g(y_t) + \mu_f\gamma f(x_t) + \mu_g\delta g(y_t). \end{cases} \quad (4.12)$$

É importante observar que mesmo tomando $\mu_f = \mu_g$ e $f(x) = g(x)$ nem sempre ocorre o retorno ao sistema homogêneo em (4.2), com formação de um *cluster* apenas (sincronização total ou perfeita), já que a garantia da existência da solução com formação de dois *clusters* (sincronização parcial) é dada pela partição da matriz de conexão em (4.11) e para a existência da solução com formação de um *cluster* (que envolve todos os sítios), conforme [4], é necessário ter uma matriz C duplamente estocástica, ou seja, é necessário que $c_{i,j} \geq 0$ e $\forall i, j, \sum_{i=1}^n c_{i,j} = \sum_{j=1}^n c_{i,j} = 1$.

Veremos na Seção 4.2 as redes trabalhadas neste estudo que possibilitam a solução 1-*cluster*. Na próxima seção apresentamos um estudo sobre as condições necessárias que garantem a estabilidade da solução em (4.12).

4.1 Análise de Estabilidade do Estado Síncrono

Queremos avaliar se órbitas iniciadas próximas do estado síncrono em (4.12) serão atraídas para esse estado, ou seja, estamos interessados na estabilidade assintótica da solução sincronizada. Para isso, precisamos analisar o sistema (4.3) linearizado em torno da órbita parcialmente sincronizada.

Seja $s_t \in \mathbb{R}^n$ a órbita parcialmente sincronizada da equação da metapopulação em (4.3), assim

$$s_t = (\overbrace{x_t, x_t, \dots, x_t}^k, \overbrace{y_t, y_t, \dots, y_t}^{n-k}), \quad (4.13)$$

onde x_t e y_t satisfazem (4.12).

Calculando a matriz Jacobiana (J) do sistema em (4.3), também representado por (4.5) e aplicando em (4.13), obtemos

$$J(s_t) = [I - (I - C)M]D_t, \quad (4.14)$$

onde D_t é a matriz diagonal de ordem $n \times n$,

$$D_t = \text{diag}(\overbrace{f'(x_t), \dots, f'(x_t)}^k, \overbrace{g'(y_t), \dots, g'(y_t)}^{n-k}). \quad (4.15)$$

Definição 4.1.1. *O subespaço de sincronização parcial, denotado por $S \subset \mathbb{R}^n$, é definido pelo conjunto*

$$S = \left\{ \left[\overbrace{a \ a \ \dots \ a}^k \ \overbrace{b \ b \ \dots \ b}^{n-k} \right]^T : a, b \in \mathbb{R}^+ \right\}, \quad (4.16)$$

onde $v_1 = \left[\overbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}^k \ \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^{n-k} \right]^T$ e $v_2 = \left[\overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^k \ \overbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}^{n-k} \right]^T$ formam uma base para S , ou seja, $B_S = \{v_1, v_2\}$.

A ideia agora é mostrar que ambos os subespaços S e S^\perp são $J(s_t)$ -invariantes. Com isso, sendo B_{S^\perp} uma base para o subespaço S^\perp , $B = B_S \cup B_{S^\perp}$ é uma base para $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$, e nessa nova base B , a matriz Jacobiana $J(s_t)$ assume uma forma mais simples, ou seja, a forma diagonal em blocos

$$J_B(s_t) = \begin{bmatrix} J_{B_S}(s_t) & 0 \\ 0 & J_{B_{S^\perp}}(s_t) \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

sendo $J_{B_S}(s_t)$ uma matriz de ordem 2×2 , $J_{B_{S^\perp}}(s_t)$ uma matriz de ordem $n-2 \times n-2$, onde a primeira responde pela evolução dos componentes paralelos da perturbação da órbita parcialmente sincronizada. De forma semelhante, $J_{B_{S^\perp}}(s_t)$ responde pelos componentes transversais, e portanto é alvo de nosso maior interesse, já que as perturbações transversais ao espaço de sincronia parcial precisam tender a zero para que haja estabilidade do estado síncrono.

Com o objetivo de obter o exposto no parágrafo anterior, o primeiro passo é mostrar que:

Proposição 4.1.1. *O subespaço S é $J(s_t)$ -invariante.*

Demonstração. De fato, com algumas contas simples, obtemos

$$Cv_1 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k c_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k c_{k,j} \\ \sum_{j=1}^k c_{k+1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k c_{n,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \\ \gamma \\ \vdots \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha v_1 + \gamma v_2 \in S. \quad (4.18)$$

Da mesma forma,

$$Cv_2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=k+1}^n c_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=k+1}^n c_{k,j} \\ \sum_{j=k+1}^n c_{k+1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=k+1}^n c_{n,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \vdots \\ \beta \\ \delta \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \beta v_1 + \delta v_2 \in S. \quad (4.19)$$

Temos também,

$$\begin{aligned} D_t v_1 &= f'(x_t) v_1 \in S, \\ D_t v_2 &= g'(y_t) v_2 \in S, \\ M v_1 &= \mu_f v_1 \in S, \\ M v_2 &= \mu_g v_2 \in S, \end{aligned} \quad (4.20)$$

e com isso obtemos,

$$\begin{aligned} J(s_t) v_1 &= [I - (I - C)M] D_t v_1 \\ J(s_t) v_1 &= f'(x_t) [I - (I - C)M] v_1 \\ J(s_t) v_1 &= f'(x_t) [v_1 - \underbrace{\mu_f(v_1 - Cv_1)}_{\in S}] \in S. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Seguindo os mesmos passos,

$$\begin{aligned}
J(s_t)v_2 &= [I - (I - C)M]D_tv_2 \\
J(s_t)v_2 &= g'(y_t)[I - (I - C)M]v_2 \\
J(s_t)v_2 &= g'(y_t)[v_2 - \underbrace{\mu_g(v_2 - Cv_2)}_{\in S}] \in S.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Portanto, dados os resultados em (4.21) e (4.22), concluimos que S é $J(s_t)$ -invariante. \square

Da mesma forma que para mostrar a C -invariância de S precisamos de algumas condições especiais sobre as linhas de C , agora vamos impor algumas hipóteses sobre as colunas da matriz de conexão para obter a C -invariância de S^\perp .

As hipóteses são:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k c_{i,j} = \alpha', & \sum_{i=k+1}^n c_{i,j} = \gamma', & j = 1, 2, \dots, k, \\ \sum_{i=1}^k c_{i,j} = \beta', & \sum_{i=k+1}^n c_{i,j} = \delta', & j = k+1, k+2, \dots, n, \end{cases} \tag{4.23}$$

onde α' , β' , γ' e δ' são constantes não-negativas.

Uma escolha para base de S^\perp é o conjunto

$$B_{S^\perp} = \{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, w_1, w_2, \dots, w_{n-k-1}\}, \tag{4.24}$$

onde

$$\begin{aligned}
u_i &= \left[\overbrace{[-1 \ 0 \ \dots \ 0]}^k \underbrace{1}_{i+1} \overbrace{[0 \ \dots \ 0]}^{n-k} \right]^T, & i = 1, 2, \dots, k-1, \\
w_i &= \left[\overbrace{[0 \ \dots \ \dots \ 0]}^k \underbrace{-1}_{k+1} \overbrace{[0 \ \dots \ 0]}^{n-k} \underbrace{1}_{k+1+i} \overbrace{[0 \ \dots \ 0]}^{n-k-i} \right]^T, & i = 1, 2, \dots, n-k-1.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Para um melhor entendimento, os vetores da base são dados explicitamente por:

$$\begin{array}{cccccc}
\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \hline -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \hline -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \hline -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u_1} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u_2} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u_{k-1}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{w_1} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{w_2} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{w_{n-k-1}}
\end{array} \tag{4.26}$$

Proposição 4.1.2. *O subespaço S^\perp é $J(s_t)$ -invariante.*

Demonstração. Considere a base B_{S^\perp} descrita em (4.24) e (4.25). A dificuldade aqui é mostrar que S^\perp é C -invariante, ou seja, devemos mostrar que para todo vetor $v \in S^\perp$, temos que $Cv \in S^\perp$. De fato, para $i = 1, 2, \dots, k-1$,

$$Cu_i \in S^\perp \Leftrightarrow Cu_i = a_{1,i}u_1 + a_{2,i}u_2 + \dots + a_{k-1,i}u_{k-1} + a_{k,i}w_1 + \dots + a_{n-2,i}w_{n-k-1}, \tag{4.27}$$

para coeficientes $a_{m,i} \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \dots, n-2$.

De (4.27) obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sum_{m=1}^{k-1} a_{m,i} = -c_{1,1} + c_{1,i+1} \\ a_{m,i} = -c_{m+1,1} + c_{m+1,i+1}, \quad m = 1, 2, \dots, k-1 \\ -\sum_{m=k}^{n-2} a_{m,i} = -c_{k+1,1} + c_{k+1,i+1} \\ a_{m,i} = -c_{m+2,1} + c_{m+2,i+1}, \quad m = k, k+1, \dots, n-2 \end{array} \right. \tag{4.28}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{m=1}^{k-1} (c_{m+1,1} - c_{m+1,i+1}) = -c_{1,1} + c_{1,i+1} \\ \sum_{m=k}^{n-2} (c_{m+2,1} - c_{m+2,i+1}) = -c_{k+1,1} + c_{k+1,i+1} \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{m=1}^{k-1} (c_{m+1,1} + c_{1,1}) = \sum_{m=1}^{k-1} (c_{m+1,i+1} + c_{1,i+1}) \\ \sum_{m=k}^{n-2} (c_{m+2,1} + c_{k+1,1}) = \sum_{m=k}^{n-2} (c_{m+2,i+1} + c_{k+1,i+1}) \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{m=1}^k c_{m,1} = \sum_{m=1}^k c_{m,i+1} \\ \sum_{m=k+1}^n c_{m,1} = \sum_{m=k+1}^n c_{m,i+1} \end{cases} \quad (4.31)$$

Usando as suposições em (4.23), para todo $i = 1, \dots, k-1$, verificamos

$$\sum_{m=1}^k c_{m,1} = \sum_{m=1}^k c_{m,i+1} = \alpha' \text{ e } \sum_{m=k+1}^n c_{m,1} = \sum_{m=k+1}^n c_{m,i+1} = \gamma'. \quad (4.32)$$

Portanto, existem constantes $a_{m,i} \in \mathbb{R}$, tais que $Cu_i \in S^\perp$, $\forall i = 1, 2, \dots, k-1$. Analogamente, basta seguir os passos anteriores para mostrar que $Cw_i \in S^\perp$, $\forall i = 1, 2, \dots, n-k-1$, ou seja,

$$Cw_i \in S^\perp \Leftrightarrow Cw_i = a_{1,k-1+i}u_1 + \dots + a_{k-1,k-1+i}u_{k-1} + a_{k,k-1+i}w_1 + \dots + a_{n-2,k-1+i}w_{n-k-1}, \quad (4.33)$$

para coeficientes $a_{m,i} \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \dots, n-2$.

Segue de (4.33) que,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sum_{m=1}^{k-1} a_{m,k-1+i} = -c_{1,k+1} + c_{1,k+i+1} \\ a_{m,k-1+i} = -c_{m+1,k+1} + c_{m+1,k+i+1}, \quad m = 1, 2, \dots, k-1 \\ -\sum_{m=k}^{n-2} a_{m,k-1+i} = -c_{k+1,k+1} + c_{k+1,k+i+1} \\ a_{m,k-1+i} = -c_{m+2,k+1} + c_{m+2,k+i+1}, \quad m = k, k+1, \dots, n-2 \end{array} \right. \quad (4.34)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{m=1}^{k-1} (c_{m+1,k+1} - c_{m+1,k+i+1}) = -c_{1,k+1} + c_{1,k+i+1} \\ \sum_{m=k}^{n-2} (c_{m+2,k+1} - c_{m+2,k+i+1}) = -c_{k+1,k+1} + c_{k+1,k+i+1} \end{cases} \quad (4.35)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{m=1}^k c_{m,k+1} = \sum_{m=1}^k c_{m,k+i+1} \\ \sum_{m=k+1}^n c_{m,k+1} = \sum_{m=k+1}^n c_{m,k+i+1} \end{cases} \quad (4.36)$$

Resulta da suposições em (4.23), para todo $i = 1, 2, \dots, n - k - 1$,

$$\sum_{m=1}^k c_{m,k+1} = \sum_{m=1}^k c_{m,k+i+1} = \beta' \text{ e } \sum_{m=k+1}^n c_{m,k+1} = \sum_{m=k+1}^n c_{m,k+i+1} = \delta'. \quad (4.37)$$

Portanto, basta tomar as constantes $a_{m,k-1+i}$, como em (4.34) para que se tenha $Cw_i \in S^\perp$, $\forall i = 1, 2, \dots, n - k - 1$.

Assim, pelo desenvolvimento acima, concluímos que S^\perp é C -invariante.

Como,

$$\begin{aligned} D_t u_i &= f'(x_t)u_i \text{ e } M u_i = \mu_f u_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, k - 1, \\ D_t w_i &= g'(y_t)w_i \text{ e } M w_i = \mu_g w_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n - k - 1, \end{aligned} \quad (4.38)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} J(s_t)u_i &= [I - (I - C)M]D_t u_i \\ J(s_t)u_i &= f'(x_t)[I - (I - C)M]u_i \\ J(s_t)u_i &= f'(x_t)[u_i - \underbrace{\mu_f(u_i - C u_i)}_{\in S^\perp}] \in S^\perp, \end{aligned} \quad (4.39)$$

e da mesma forma,

$$J(s_t)w_i = g'(y_t)[w_i - \underbrace{\mu_g(w_i - C w_i)}_{\in S^\perp}] \in S^\perp. \quad (4.40)$$

donde concluímos que S^\perp é $J(s_t)$ -invariante. \square

Portanto, dada por Q_B a matriz mudança de base da base canônica do \mathbb{R}^n para a base $B = B_S \cup B_{S^\perp}$, temos

$$Q_B = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{k-1} & w_1 & w_2 & \cdots & w_{n-k-1} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

e

$$J_B(s_t) = Q_B^{-1} J(s_t) Q_B, \quad (4.42)$$

onde $J_B(s_t)$ assume a forma em blocos, como descrito em (4.17).

Considerando $J(s_t) = [I - (I - C)M]D_t$, resulta de (4.42),

$$J_{B_S}(s_t) = [I - (I - \hat{C})\hat{M}]\hat{D}_t \quad (4.43)$$

onde

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{bmatrix} \mu_f & 0 \\ 0 & \mu_g \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{D}_t = \begin{bmatrix} f'(x_t) & 0 \\ 0 & g'(y_t) \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

E também

$$J_{B_{S^\perp}}(s_t) = [I - (I - \tilde{C})\tilde{M}]\tilde{D}_t, \quad (4.45)$$

onde os coeficientes $\tilde{c}_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, k-2$ da matriz \tilde{C} são dados pelos $a_{m,i}$'s descritos em (4.28) e (4.37), ou seja,

$$\tilde{C} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{c}_{i,j} = -c_{i+1,1} + c_{i+1,j+1} & \tilde{c}_{i,j} = -c_{i+1,k+1} + c_{i+1,k+j+1} \\ i = 1, 2, \dots, k-1 & i = 1, 2, \dots, k-1 \\ j = 1, 2, \dots, k-1 & j = 1, 2, \dots, n-k-1 \\ \hline \tilde{c}_{i,j} = -c_{i+2,1} + c_{i+2,j+1} & \tilde{c}_{i,j} = -c_{i+2,k+1} + c_{i+2,k+j+1} \\ i = k, k+1, \dots, n-2 & i = k, k+1, \dots, n-2 \\ j = 1, 2, \dots, k-1 & j = 1, 2, \dots, n-k-1 \end{array} \right]_{(n-2) \times (n-2)}. \quad (4.46)$$

Além disso,

$$\tilde{M} = \text{diag}(\overbrace{\mu_f, \dots, \mu_f}^{k-1}, \overbrace{\mu_g, \dots, \mu_g}^{n-k-1}) \quad (4.47)$$

e

$$\tilde{D}_t = \text{diag}(\overbrace{f'(x_t), \dots, f'(x_t)}^{k-1}, \overbrace{g'(y_t), \dots, g'(y_t)}^{n-k-1}). \quad (4.48)$$

Para verificar (4.43) e (4.44) basta calcular os produtos Jv_1 e Jv_2 . Dado (4.14), podemos escrever

$$\begin{aligned} Jv_1 &= [I - (I - C)M]D_tv_1 \\ &= [I - (I - C)M]f'(x_t)v_1 \\ &= f'(x_t)[v_1 - (I - C)Mv_1] \\ &= f'(x_t)[v_1 - (I - C)\mu_f v_1] \\ &= f'(x_t)v_1 - \mu_f f'(x_t)v_1 + \mu_f f'(x_t)Cv_1 \\ &= f'(x_t)v_1 - \mu_f f'(x_t)v_1 + \mu_f f'(x_t)(\alpha v_1 + \gamma v_2) \\ &= [1 - \mu_f(1 - \alpha)]f'(x_t)v_1 + \mu_f f'(x_t)\gamma v_2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} Jv_2 &= [I - (I - C)M]D_tv_2 \\ &= [I - (I - C)M]g'(y_t)v_2 \\ &= g'(y_t)[v_2 - (I - C)Mv_2] \\ &= g'(y_t)[v_2 - (I - C)\mu_g v_2] \\ &= g'(y_t)v_2 - \mu_g g'(y_t)v_2 + \mu_g g'(y_t)Cv_2 \\ &= g'(y_t)v_2 - \mu_g g'(y_t)v_2 + \mu_g g'(y_t)(\beta v_1 + \delta v_2) \\ &= \mu_g g'(y_t)\beta v_1 + [1 - \mu_g(1 - \delta)]g'(y_t)v_2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Por (4.49) e (4.50) temos,

$$J_{B_S} = \begin{bmatrix} [1 - \mu_f(1 - \alpha)]f'(x_t) & \mu_g g'(y_t)\beta \\ \mu_f f'(x_t)\gamma & [1 - \mu_g(1 - \delta)]g'(y_t) \end{bmatrix} = [I - (I - \hat{C})\hat{M}]\hat{D}_t, \quad (4.51)$$

com \hat{C} , \hat{M} e \hat{D}_t dados em (4.44).

Precisamos ainda verificar as afirmações em (4.45), (4.46), (4.47) e (4.48). Fazendo $J(s_t)u_i, i = 1, 2, \dots, k-1$ e $J(s_t)w_i, i = 1, 2, \dots, n-k-1$, obtemos as colunas da matriz $J_{B_{S^\perp}}(s_t)$.

Assim, para $i = 1, 2, \dots, k-1$,

$$\begin{aligned}
J(s_t)u_i &= [I - (I - C)M]D_t u_i \\
&= [I - (I - C)M]f'(x_t)u_i \\
&= f'(x_t)[u_i - (I - C)Mu_i] \\
&= f'(x_t)[u_i - (I - C)\mu_f u_i] \\
&= f'(x_t)u_i - \mu_f f'(x_t)u_i + \mu_f f'(x_t)Cu_i \\
&= (1 - \mu_f)f'(x_t)u_i + \mu_f f'(x_t) \left(\sum_{m=1}^{k-1} a_{m,i}u_m + \sum_{m=1}^{n-k-1} a_{k-1+m,i}w_m \right) \\
&= \mu_f a_{1,i}f'(x_t)u_1 + \dots + \mu_f a_{i-1,i}f'(x_t)u_{i-1} + [1 - \mu_f(1 - a_{i,i})]f'(x_t)u_i + \\
&\quad + \mu_f a_{i+1,i}f'(x_t)u_{i+1} + \dots + \mu_f a_{k-1,i}f'(x_t)u_{k-1} + \\
&\quad + \mu_f a_{k,i}f'(x_t)w_1 + \dots + \mu_f a_{n-2,i}f'(x_t)w_{n-k-1}. \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Em (4.52) obtemos $J(s_t)u_i$ como uma combinação linear dos elementos da base B_{S^\perp} , ou seja, para $i = 1, 2, \dots, k-1$,

$$J(s_t)u_i = b_{1,i}u_1 + b_{2,i}u_2 + \dots + b_{k-1,i}u_{k-1} + b_{k,i}w_1 + \dots + b_{n-2,i}w_{n-k-1}, \tag{4.53}$$

onde os coeficientes da combinação linear em (4.53) são dados por

$$b_{m,i} = \begin{cases} \mu_f a_{m,i}f'(x_t), & m = 1, 2, \dots, n-2 \text{ e } m \neq i \\ (1 - \mu_f(1 - a_{m,m}))f'(x_t), & m = i. \end{cases} \tag{4.54}$$

Seguindo os mesmos passos para $i = 1, 2, \dots, n - k - 1$, temos

$$\begin{aligned}
J(s_t)w_i &= [I - (I - C)M]D_t w_i \\
&= [I - (I - C)M]g'(y_t)w_i \\
&= g'(y_t)[w_i - (I - C)Mw_i] \\
&= g'(y_t)[w_i - (I - C)\mu_g w_i] \\
&= g'(y_t)w_i - \mu_g g'(y_t)w_i + \mu_g g'(y_t)Cw_i \\
&= (1 - \mu_g)g'(y_t)w_i + \mu_g g'(y_t) \left(\sum_{m=1}^{k-1} a_{m,k-1+i} u_m + \sum_{m=1}^{n-k-1} a_{k-1+m,i} w_m \right) \\
&= \mu_g a_{1,k-1+i} g'(y_t)u_1 + \dots + \mu_g a_{k-1,k-1+i} g'(y_t)u_{k-1} + \mu_g a_{k,k-1+i} g'(y_t)w_1 + \\
&\quad + \dots + [1 - \mu_g(1 - a_{k-1+i,k-1+i})]g'(y_t)w_i + \\
&\quad + \dots + \mu_g a_{n-2,k-1+i} g'(y_t)w_{n-k-1}. \tag{4.55}
\end{aligned}$$

Assim, para $i = 1, 2, \dots, n - k - 1$,

$$J(s_t)w_i = b_{1,k-1+i}u_1 + b_{2,k-1+i}u_2 + \dots + b_{k-1,k-1+i}u_{k-1} + b_{k,k-1+i}w_1 + \dots + b_{n-2,k-1+i}w_{n-k-1} \tag{4.56}$$

$$\Leftrightarrow b_{m,k-1+i} = \begin{cases} \mu_g a_{m,k-1+i} g'(y_t), & m = 1, 2, \dots, n - 2 \text{ e } m \neq k - 1 + i \\ (1 - \mu_g(1 - a_{m,m}))g'(y_t), & m = k - 1 + i. \end{cases} \tag{4.57}$$

Os coeficientes em (4.54) e (4.57) são as entradas da matriz $J_{B_{S^\perp}}$ (ver [5]). Em consequência disso podemos escrever $J_{B_{S^\perp}} = [I - (I - \tilde{C})\tilde{M}]\tilde{D}_t$, sendo $\tilde{C} = [\tilde{c}_{i,j}]$ conforme descrito em (4.46), \tilde{M} conforme (4.47) e \tilde{D}_t conforme (4.48).

Esta separação de $J_B(s_t)$ em $J_{B_S}(s_t)$ e $J_{B_{S^\perp}}(s_t)$ construída até aqui, como já descrito anteriormente, tem por objetivo identificar como o Jacobiano atua nos subespaços S e S^\perp , separadamente.

Como S é J -invariante, perturbações neste subespaço permanecem nele após a ação de J . A preocupação é com as perturbações em S^\perp , que como são

transversais ao subespaço de sincronia, devem tender a zero para que tenhamos garantia de estabilidade assintótica do estado parcialmente sincronizado.

Trabalhando na base B , através da linearização do sistema (4.4) em torno de s_t , obtemos a seguinte equação para a perturbação:

$$\Delta_{t+1} = J_B(s_t)\Delta_t, \quad (4.58)$$

onde $\Delta_t = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3 \ \dots \ \epsilon_n]^T$ é um vetor perturbação em \mathbb{R}^n .

Pela decomposição de $J_B = J_{B_S} \oplus J_{B_{S^\perp}}$, pode-se analisar como a perturbação se comporta em cada subespaço separadamente. É suficiente para os nossos objetivos analisar a evolução de um vetor perturbação $\Delta_t \in \mathbb{R}^{n-2}$ transversal à órbita sincronizada, ou seja, podemos trabalhar apenas com

$$\Delta_{t+1} = J_{B_{S^\perp}}(s_t)\Delta_t, \quad (4.59)$$

em lugar de (4.58).

Sendo Δ_0 a perturbação inicial, obtemos a partir de (4.59),

$$\Delta_t = J_{B_{S^\perp}}(s_{t-1})J_{B_{S^\perp}}(s_{t-2})\dots J_{B_{S^\perp}}(s_0)\Delta_0. \quad (4.60)$$

Desta forma, a perturbação tenderá a zero quando $t \rightarrow \infty$ se, e somente se

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \| P_{\tau-1}P_{\tau-2}\dots P_0 \|^{1/\tau} < 1, \quad (4.61)$$

onde $P_\tau = J_{B_{S^\perp}}(s_\tau)$, $\tau = 0, 1, 2, \dots$

Em resumo, podemos calcular a taxa média de crescimento transversal e paralelo da perturbação de uma trajetória parcialmente sincronizada. Tais taxas, são chamadas respectivamente de número de Lyapunov transversal, obtido a partir de (4.61) e representado por

$$L_\perp = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| J_{B_{S^\perp}}(s_{\tau-1})J_{B_{S^\perp}}(s_{\tau-2})\dots J_{B_{S^\perp}}(s_1)J_{B_{S^\perp}}(s_0) \|^{1/\tau}, \quad (4.62)$$

e o número de Lyapunov paralelo, que é obtido da mesma forma que L_{\perp} , e representado por

$$L_{//} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| J_{B_S}(s_{\tau-1})J_{B_S}(s_{\tau-2})\dots J_{B_S}(s_1)J_{B_S}(s_0) \|^{1/\tau}. \quad (4.63)$$

Seja A_s o atrator em S e seja ρ uma medida de probabilidade F -invariante com suporte em A_s , onde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação que descreve a dinâmica em (4.3). O teorema de Oseledec [8] pode ser usado para garantir a existência dos limites acima para todas as órbitas em A_s , exceto para um conjunto de medida ρ -nula. Se assumirmos ainda que ρ é ergódica, os números de Lyapunov L_{\perp} e $L_{//}$ são ρ -quase sempre constantes [27]. Os resultados obtidos até aqui encontram-se resumidos no seguinte teorema.

Teorema 1. *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação que descreve a dinâmica da metapopulação dada em (4.4). Supondo que a matriz de conectividade C satisfaz (4.11) e (4.23).*

1- *Existe uma base de \mathbb{R}^n , tal que, nessa base, C admite uma decomposição em blocos na forma $C = \hat{C} \oplus \tilde{C}$, onde \hat{C} é a matriz 2×2 descrita em (4.44), e \tilde{C} é a matriz $(n-2) \times (n-2)$ descrita em (4.46). Na mesma base, a matriz Jacobiana aplicada na trajetória parcialmente sincronizada $J(s_t) = DF(s_t)$, também admite uma decomposição em blocos, na forma $J(s_t) = J_{B_S}(s_t) \oplus J_{B_{S^{\perp}}}(s_t)$, onde*

$$J_{B_S}(s_t) = [I - (I - \hat{C})\hat{M}]\hat{D}_t, \text{ com } \hat{M} = \text{diag}(\mu_f, \mu_g) \text{ e } \hat{D}_t = \text{diag}(f'(x_t), g'(y_t)).$$

E ainda,

$$J_{B_{S^{\perp}}}(s_t) = [I - (I - \tilde{C})\tilde{M}]\tilde{D}_t,$$

$$\text{com } \tilde{M} = \text{diag}(\underbrace{\mu_f, \dots, \mu_f}_{k-1}, \underbrace{\mu_g, \dots, \mu_g}_{n-k-1}) \text{ e } \tilde{D}_t = \text{diag}(\underbrace{f'(x_t), \dots, f'(x_t)}_{k-1}, \underbrace{g'(y_t), \dots, g'(y_t)}_{n-k-1}).$$

2- *Se A_s é um atrator em S e ρ uma medida ergódica F -invariante com suporte em A_s , então os números de Lyapunov transversal e paralelo de uma órbita em A_s são ρ -quase sempre constantes, e são dados respectivamente por*

$$L_{\perp} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| J_{B_{S^{\perp}}}(s_{\tau-1})J_{B_{S^{\perp}}}(s_{\tau-2})\dots J_{B_{S^{\perp}}}(s_1)J_{B_{S^{\perp}}}(s_0) \|^{1/\tau}$$

e

$$L_{//} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| J_{B_S}(s_{\tau-1}) J_{B_S}(s_{\tau-2}) \dots J_{B_S}(s_1) J_{B_S}(s_0) \|^{1/\tau}.$$

4.2 Análise para os Diferentes Tipos de Rede

Nesta seção, obtemos uma expressão para a solução parcialmente sincronizada (4.12), e também para o número de Lyapunov transversal (4.62), para as redes apresentadas no Capítulo 3.

4.2.1 Rede Global

Conforme já vimos no Capítulo 3, os coeficientes de conexão da rede global são dados por $c_{i,j} = \frac{1}{n-1}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Nessa rede, a soma dos elementos de cada linha e de cada colunas da matriz C é igual a um, ou seja, $\sum_{j=1}^n c_{i,j} = 1, i = 1, 2, \dots, n$ e $\sum_{i=1}^n c_{i,j} = 1, j = 1, 2, \dots, n$. Portanto, para essa rede específica, caso tenhamos $\mu_f = \mu_g$ e $f(x) = g(x)$, então o sistema em (4.4) é igual ao sistema em (4.2).

Esse tipo de rede, de fácil manipulação algébrica, torna possível algumas conclusões a respeito do sistema metapopulacional. Como sabemos de (3.7) que $\alpha = \frac{k-1}{n-1}$, $\beta = \frac{n-k}{n-1}$, $\gamma = \frac{k}{n-1}$ e $\delta = \frac{n-k-1}{n-1}$, a solução parcialmente sincronizada, apresentada em (4.12), pode ser reescrita como

$$\begin{cases} x_{t+1} &= (1 - \mu_f)f(x_t) + \frac{\mu_f}{n-1}(k-1)f(x_t) + \frac{\mu_g}{n-1}(n-k)g(y_t), \\ y_{t+1} &= (1 - \mu_g)g(y_t) + \frac{\mu_f}{n-1}kf(x_t) + \frac{\mu_g}{n-1}(n-k-1)g(y_t). \end{cases} \quad (4.64)$$

Para o caso extremo em que $k = 1$, ou seja, apenas um sítio possui taxa de migração dada por μ_f , temos

$$\begin{cases} x_{t+1} &= (1 - \mu_f)f(x_t) + \mu_g g(y_t), \\ y_{t+1} &= (1 - \mu_g)g(y_t) + \frac{\mu_f}{n-1}f(x_t) + \frac{\mu_g}{n-1}(n-2)g(y_t). \end{cases} \quad (4.65)$$

Para o outro caso extremo em que apenas um sítio possui taxa de migração dada por μ_g , ou seja, $k = n - 1$, então a solução parcialmente sincronizada adquire a forma

$$\begin{cases} x_{t+1} &= (1 - \mu_f)f(x_t) + \frac{\mu_f}{n-1}(n-2)f(x_t) + \frac{\mu_g}{n-1}g(y_t), \\ y_{t+1} &= (1 - \mu_g)g(y_t) + \mu_f f(x_t). \end{cases} \quad (4.66)$$

Sendo a matriz \tilde{C} dada por (4.46) e considerando (3.5), obtemos

$$\tilde{C} = -\frac{1}{n-1}I. \quad (4.67)$$

Substituindo (4.67) em $J_{B_{S^\perp}} = [I - (I - \tilde{C})\tilde{M}]\tilde{D}_t$, resulta em

$$\begin{aligned} J_{B_{S^\perp}} &= \left[I - \left(I + \frac{1}{n-1}I \right) \tilde{M} \right] \tilde{D}_t \\ &= \left[I - \left(\frac{n}{n-1} \right) \tilde{M} \right] \tilde{D}_t. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Desta forma, por (4.62)

$$L_\perp = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\| \left[I - \left(\frac{n}{n-1} \right) \tilde{M} \right] \tilde{D}_{\tau-1} \dots \left[I - \left(\frac{n}{n-1} \right) \tilde{M} \right] \tilde{D}_0 \right\|^{1/\tau}. \quad (4.69)$$

Note que estamos trabalhando apenas com matrizes diagonais, e portanto podemos escrever (4.69) como

$$L_\perp = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\| \left[I - \left(\frac{n}{n-1} \right) \tilde{M} \right]^\tau \tilde{D}_{\tau-1} \dots \tilde{D}_1 \tilde{D}_0 \right\|^{1/\tau}. \quad (4.70)$$

A norma matricial utilizada é a norma espectral ou euclidiana, representada pelo maior valor singular da matriz, ou seja, dada uma matriz A , temos que $\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_{\max} A^T A}$, onde λ é autovalor de $A^T A$, conforme [11]. O fato de estarmos trabalhando com matrizes diagonais facilita muito os cálculos, pois nesse caso, a norma espectral é também o módulo do maior autovalor do produto de matrizes em (4.70). Portanto,

$$\begin{aligned} L_\perp &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\max \left(\left| \left(1 - \frac{n}{n-1} \mu_f \right)^\tau f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_0) \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| \left(1 - \frac{n}{n-1} \mu_g \right)^\tau g'(y_{\tau-1}) \dots g'(y_0) \right| \right) \right]^{\frac{1}{\tau}}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
L_{\perp} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \max \left(\left| \left(1 - \frac{n}{n-1} \mu_f \right)^{\tau} f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_0) \right|^{\frac{1}{\tau}}, \right. \\
&\quad \left. \left| \left(1 - \frac{n}{n-1} \mu_g \right)^{\tau} g'(y_{\tau-1}) \dots g'(y_0) \right|^{\frac{1}{\tau}} \right) \\
L_{\perp} &= \max \left(\left| 1 - \frac{n}{n-1} \mu_f \right| \lim_{\tau \rightarrow \infty} |f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_0)|^{\frac{1}{\tau}}, \right. \\
&\quad \left. \left| 1 - \frac{n}{n-1} \mu_g \right| \lim_{\tau \rightarrow \infty} |g'(y_{\tau-1}) \dots g'(y_0)|^{\frac{1}{\tau}} \right). \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Finalmente, de forma mais compacta, podemos designar o número de Lyapunov transversal para a rede global por

$$L_{\perp} = \max \left(\left| 1 - \frac{n}{n-1} \mu_f \right| L_x, \left| 1 - \frac{n}{n-1} \mu_g \right| L_y \right), \tag{4.73}$$

onde

$$L_x = \lim_{\tau \rightarrow \infty} |f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0)|^{\frac{1}{\tau}}, \tag{4.74}$$

e

$$L_y = \lim_{\tau \rightarrow \infty} |g'(y_{\tau-1}) \dots g'(y_1) g'(y_0)|^{\frac{1}{\tau}}. \tag{4.75}$$

Note que segundo (4.73), cada *cluster* possui o seu número de Lyapunov transversal e o maior deles é o L_{\perp} procurado. Ainda, a forma com que foi escrito (4.73) permite observar que, em cada *cluster*, o número de Lyapunov transversal é calculado como o produto de uma componente associada à rede e à taxa de migração, e outra componente dependente da dinâmica local. Se uma das taxas de migração for zero, então o número de Lyapunov transversal do seu respectivo *cluster* depende apenas da componente de dinâmica local.

É possível perceber também que se $n \rightarrow \infty$ e $\mu_{f,g} \rightarrow 1$ então $L_{\perp} \rightarrow 0$ e nesse caso sempre ocorre sincronização parcial. Esse resultado indica que quanto maior o número de sítios em uma metapopulação e mais intensa a migração entre os diversos sítios, maior é a chance de haver sincronização parcial, em uma rede do tipo global.

Vale lembrar que (x_t, y_t) é a trajetória dada por (4.64) e dessa forma, L_x e L_y não são os mesmos que o número de Lyapunov para a dinâmica local, no caso de um sítio isolado.

4.2.2 Rede Global Ponderada

Sendo dada por (3.8) a matriz de conexão para a rede global ponderada e considerando (3.9) e (4.12), podemos escrever a evolução temporal da dinâmica parcialmente sincronizada como

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1 - \mu_f)f(x_t) + \mu_f \frac{a(k-1)}{ak+n-k-a}f(x_t) + \mu_g \frac{n-k}{k+a(n-k)-a}g(y_t), \\ y_{t+1} = (1 - \mu_g)g(y_t) + \mu_f \frac{k}{ak+n-k-a}f(x_t) + \mu_g \frac{a(n-k-1)}{k+a(n-k)-a}g(y_t). \end{cases} \quad (4.76)$$

Ainda considerando (3.8) e seja \tilde{C} dada por (4.46), obtemos

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{ak+n-k-a} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\frac{a}{ak+n-k-a} & 0 & & 0 \\ 0 & & & -\frac{a}{k+a(n-k)-a} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -\frac{a}{k+a(n-k)-a} \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

Substituindo (4.77) em $J_{B_{S^\perp}} = [I - (I - \tilde{C})\tilde{M}]\tilde{D}_t$, resulta

$$J_{B_{S^\perp}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 f'(x_t) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \sigma_1 f'(x_t) & 0 & & 0 \\ 0 & & & \sigma_2 g'(y_t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \sigma_2 g'(y_t) \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

onde $\sigma_1 = [1 - \mu_f(1 + \frac{a}{ak+n-k-a})]$, $\sigma_2 = [1 - \mu_g(1 + \frac{a}{k+a(n-k)-a})]$ e (x_t, y_t) são dados por (4.76).

Dessa forma, utilizando (4.62), o número de Lyapunov transversal para a rede global ponderada é dado por

$$\begin{aligned}
L_{\perp} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| J_{B_{S^{\perp}}}(s_{\tau-1}) J_{B_{S^{\perp}}}(s_{\tau-2}) \dots J_{B_{S^{\perp}}}(s_1) J_{B_{S^{\perp}}}(s_0) \| ^{\frac{1}{\tau}} \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\max(|\sigma_1^{\tau} f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_0)|, |\sigma_2^{\tau} g'(y_{\tau-1}) \dots g'(y_0)|)]^{\frac{1}{\tau}} \\
&= \max(|\sigma_1| L_x, |\sigma_2| L_y),
\end{aligned} \tag{4.79}$$

com L_x e L_y já definidos anteriormente em (4.74) e (4.75), respectivamente.

Nessa rede não há possibilidade da existência da solução $1 - cluster$, já que a soma das linhas da matriz C são diferentes de um.

4.2.3 Rede Bipartida

Sendo que para a rede bipartida temos $\alpha = 0$, $\beta = \frac{n-k}{k}$, $\gamma = \frac{k}{n-k}$ e $\delta = 0$, a solução $2 - clusters$ descrita por (4.12) adquire a forma

$$\begin{cases} x_{t+1} &= (1 - \mu_f) f(x_t) + \mu_g \frac{n-k}{k} g(y_t), \\ y_{t+1} &= (1 - \mu_g) g(y_t) + \mu_f \frac{k}{n-k} f(x_t). \end{cases} \tag{4.80}$$

Para o caso em que $n = 2k$, então temos $\beta = \gamma = 1$ e a dinâmica (4.80) acima torna-se

$$\begin{cases} x_{t+1} &= (1 - \mu_f) f(x_t) + \mu_g g(y_t), \\ y_{t+1} &= (1 - \mu_g) g(y_t) + \mu_f f(x_t). \end{cases} \tag{4.81}$$

Neste caso específico temos a soma das linhas e colunas da matriz C iguais a um e portanto é possível a formação da solução $1 - cluster$, quando $\mu_f = \mu_g$ e $f(x) = g(x)$.

Considerando a matriz de conexão C dada por (3.12) e seja \tilde{C} definida em (4.46), obtemos $\tilde{C} = [0]$, ou seja, todos os elementos da matriz \tilde{C} são nulos.

Substituindo \tilde{C} em $J_{B_{S^\perp}} = [I - (I - \tilde{C})\tilde{M}]\tilde{D}_t$, resulta

$$\begin{aligned} J_{B_{S^\perp}} &= [I - (I - 0)\tilde{M}]\tilde{D}_t \\ &= [I - \tilde{M}]\tilde{D}_t. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Para o cálculo do número de Lyapunov transversal, utilizando (4.62), temos

$$\begin{aligned} L_\perp &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| J_{B_{S^\perp}}(s_{\tau-1})J_{B_{S^\perp}}(s_{\tau-2}) \dots J_{B_{S^\perp}}(s_1)J_{B_{S^\perp}}(s_0) \|^\frac{1}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| (I - \tilde{M})\tilde{D}_{\tau-1} \dots (I - \tilde{M})\tilde{D}_1(I - \tilde{M})\tilde{D}_0 \|^\frac{1}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| (I - \tilde{M})^\tau \tilde{D}_{\tau-1} \dots \tilde{D}_1 \tilde{D}_0 \|^\frac{1}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\max(|(1 - \mu_f)^\tau f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_0)|, |(1 - \mu_g)^\tau g'(y_{\tau-1}) \dots g'(y_0)|)]^\frac{1}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \max(|(1 - \mu_f)| |f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_0)|^\frac{1}{\tau}, |(1 - \mu_g)| |g'(y_{\tau-1}) \dots g'(y_0)|^\frac{1}{\tau}) \\ &= \max(|(1 - \mu_f)| \lim_{\tau \rightarrow \infty} |f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_0)|^\frac{1}{\tau}, |(1 - \mu_g)| \lim_{\tau \rightarrow \infty} |g'(y_{\tau-1}) \dots g'(y_0)|^\frac{1}{\tau}) \\ &= \max(|(1 - \mu_f)|L_x, |(1 - \mu_g)|L_y), \end{aligned} \quad (4.83)$$

com L_x e L_y definidos por (4.74) e (4.75), respectivamente.

Repare que diferentemente das redes anteriores, o número de Lyapunov transversal para a rede bipartida não depende do número de sítios, ou seja, não depende do parâmetro n , o que significa que o fato de haver ou não a sincronização parcial independe do número de sítios que compõem uma metapopulação. Já de forma semelhante às redes anteriores, aqui também quanto maior a intensidade da migração, maior é a possibilidade de haver sincronização parcial.

4.2.4 Rede 1/2

A rede 1/2 é mais um dos casos em que a soma das linhas e das colunas da matriz C são iguais a um e portanto, quando $\mu_f = \mu_g$ e $f(x) = g(x)$, o sistema em (4.4) torna-se igual ao sistema (4.2).

Como é possível fazer os cálculos e obter os parâmetros $\alpha = \frac{n+k-4}{2(n-2)}$, $\beta = \frac{n-k}{2(n-2)}$, $\gamma = \frac{k}{2(n-2)}$ e $\delta = \frac{2n-k-4}{2(n-2)}$, reescrevemos a solução parcialmente sincronizada como segue:

$$\begin{cases} x_{t+1} &= (1 - \mu_f)f(x_t) + \frac{\mu_f}{2(n-2)}(n+k-4)f(x_t) + \frac{\mu_g}{2(n-2)}(n-k)g(y_t), \\ y_{t+1} &= (1 - \mu_g)g(y_t) + \frac{\mu_f}{2(n-2)}kf(x_t) + \frac{\mu_g}{2(n-2)}(2n-k-4)g(y_t). \end{cases} \quad (4.84)$$

Diferentemente das redes trabalhadas anteriormente, para a rede 1/2 a matriz \tilde{C} não é uma matriz diagonal e nem nula, o que impede obter uma fórmula do número de Lyapunov transversal com separação entre a componente de dinâmica vital e o restante dos parâmetros. Neste caso, de forma um pouco mais trabalhosa, para as simulações numéricas calculamos o L_{\perp} diretamente da fórmula em (4.62).

4.2.5 Rede Grupo Preferencial

Para a rede grupo preferencial, apenas a soma das colunas da matriz C é igual a um, obtendo diferentes valores na soma das linhas.

Dados $\alpha = 0$, $\beta = \frac{n-k}{n-1}$, $\gamma = \frac{k}{n-k}$ e $\delta = \frac{n-k-1}{n-1}$, reescrevemos a solução *2-clusters* como:

$$\begin{cases} x_{t+1} &= (1 - \mu_f)f(x_t) + \frac{\mu_g}{n-1}(n-k)g(y_t), \\ y_{t+1} &= (1 - \mu_g)g(y_t) + \frac{\mu_f}{n-k}kf(x_t) + \frac{\mu_g}{n-1}(n-k-1)g(y_t). \end{cases} \quad (4.85)$$

Após alguns cálculos obtemos a matriz \tilde{C} que é diagonal e dada por

$$\tilde{C} = \text{diag} \left(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{k-1}, \overbrace{-\frac{1}{n-1}, -\frac{1}{n-1}, \dots, -\frac{1}{n-1}}^{n-k-1} \right). \quad (4.86)$$

Substituindo (4.86) em $J_{B_{S_{\perp}}} = [I - (I - \tilde{C})\tilde{M}]\tilde{D}_t$, podemos reescrever o número de Lyapunov transversal como

$$L_{\perp} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\| E\tilde{D}_{\tau-1} \dots E\tilde{D}_1 E\tilde{D}_0 \right\|^{1/\tau}, \quad (4.87)$$

onde,

$$E = \text{diag} \left(\overbrace{1 - \mu_f, 1 - \mu_f, \dots, 1 - \mu_f}^{k-1}, \overbrace{1 - \frac{n}{n-1}\mu_g, 1 - \frac{n}{n-1}\mu_g, \dots, 1 - \frac{n}{n-1}\mu_g}^{n-k-1} \right). \quad (4.88)$$

Continuando em (4.87), temos

$$L_{\perp} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\| E^{\tau} \tilde{D}_{\tau-1} \dots \tilde{D}_1 \tilde{D}_0 \right\|^{1/\tau}, \quad (4.89)$$

e ainda,

$$L_{\perp} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\max \left(|(1 - \mu_f)^{\tau} f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_0)|, \left| \left(1 - \frac{n}{n-1}\mu_g \right)^{\tau} g'(y_{\tau-1}) \dots g'(y_0) \right| \right) \right]^{\frac{1}{\tau}}, \quad (4.90)$$

ou,

$$L_{\perp} = \max \left(|1 - \mu_f| \lim_{\tau \rightarrow \infty} |f'(x_{\tau-1}) \dots f'(x_0)|^{\frac{1}{\tau}}, \left| 1 - \frac{n}{n-1}\mu_g \right| \lim_{\tau \rightarrow \infty} |g'(y_{\tau-1}) \dots g'(y_0)|^{\frac{1}{\tau}} \right). \quad (4.91)$$

E finalmente, o número de Lyapunov transversal para a rede grupo preferencial é dado por

$$L_{\perp} = \max \left(|1 - \mu_f| L_x, \left| 1 - \frac{n}{n-1}\mu_g \right| L_y \right), \quad (4.92)$$

com L_x e L_y definidos por (4.74) e (4.75), respectivamente.

Como era de se esperar pela definição da rede grupo preferencial, o número de Lyapunov transversal para o grupo com dinâmica vital dada por $f(x)$ é calculado da mesma forma que na rede bipartida. Já no grupo em que temos a função $g(x)$, o cálculo do número de Lyapunov transversal se dá como na rede global. Assim, podemos concluir que a rede grupo preferencial é uma fusão das redes global e bipartida.

4.3 Resultados Numéricos

As simulações numéricas são apresentadas de modo a demonstrar e exemplificar os resultados analíticos obtidos.

Nesta seção, em todas as simulações numéricas estamos utilizando $f(x) = g(x) = xe^{r(1-x)}$ com o objetivo de avaliar os efeitos de taxas de migração diferentes enquanto a dinâmica local é a mesma. Os resultados para $f(x) \neq g(x)$ são apresentados no Capítulo 6.

A diversidade nas simulações encontra-se nos diferentes tipos de matriz de conexão C , na variação dos parâmetros r , número de sítios e taxas de migração. Quando utilizamos a rede global ponderada, temos ainda a variação do parâmetro não negativo a , que pode ser $a > 1$ e nesse caso a migração é mais forte entre os sítios de um mesmo *cluster*, ou podemos ter $a < 1$ e assim a migração é mais intensa entre sítios de *clusters* distintos.

Com respeito ao parâmetro r , os valores escolhidos pertencem à região de dinâmica caótica da função de Ricker. Utilizamos $r = 2,8$ onde seu respectivo número de Lyapunov é dado por $L = 1,2712$, $r = 3,0$ onde $L = 1,4268$ e $r = 4,0$ onde $L = 1,6154$, lembrando que $L > 1$ indica caoticidade na dinâmica da função.

Para realizar os experimentos numéricos computacionais utilizamos o *software* MATLAB.

Nas próximas seções apresentamos os resultados gráficos das simulações juntamente com sua análise, lembrando que nossa atenção concentra-se na dinâmica parcialmente sincronizada, mais que isso, queremos avaliar o comportamento do sistema próximo ao estado síncrono, saber se ele é sensível ou não a pequenas perturbações.

4.3.1 Número de Lyapunov Transversal

Com o objetivo de monitorar em quais casos e sob que condições a sincronização parcial (no nosso trabalho, solução *2-clusters*) é estável, calculamos o número de Lyapunov transversal, representado por L_{\perp} , para diferentes parâmetros e conexões.

Nos gráficos construídos expondo o parâmetro μ_f no eixo horizontal e μ_g no eixo vertical, fixamos o valor de r , a matriz de conexão e o número de sítios, enquanto os valores de μ_f e μ_g variam de 0 até 1. Para uma série de valores de μ_f e μ_g é calculado o número de Lyapunov transversal e, quando o resultado obtido é $L_{\perp} > 1$, ou seja, quando para tal ponto (μ_f, μ_g) a solução parcialmente sincronizada é instável a uma pequena perturbação, então plotamos este ponto, fazendo com que a região de parâmetros para a qual é obtido instabilidade síncrona seja identificada pela região escura do gráfico. As condições iniciais são tomadas parcialmente sincronizadas, conforme equações em (4.12). Para cada valor (μ_f, μ_g) calcula-se o número de Lyapunov transversal utilizando 1.000 iterações, após descarte de 10.000 iterações transientes na órbita.

Em cada tipo de rede simulamos resultados utilizando $r = 2, 8$ e $r = 4, 0$ para um total de $n = 20$ sítios, para dois valores distintos de k , a saber, $k = \frac{20}{2} = 10$ (metade em cada grupo), e $k = \frac{20}{5}$ (um grupo com $\frac{1}{4}$ do total de sítios e outro grupo com $\frac{3}{4}$ do total de sítios). Com o objetivo de avaliar os efeitos causados pelo número total n de sítios, para $r = 2, 8$, aumentamos proporcionalmente os valores de n e k (mantendo constante a razão $\frac{n}{k}$, sendo 2 para o primeiro caso e 4 para o segundo) para os dois casos em estudo. A única exceção é a rede 1/2 que pela dificuldade de se trabalhar com números grandes de n , quando $r = 2, 8$ reduzimos proporcionalmente os valores de n e k ao invés de aumentarmos, conforme as outras redes.

Algumas conclusões podem ser obtidas através das Figuras 4.1 e 4.2 que dizem respeito às simulações utilizando a rede global. Observamos uma quantidade

muito maior de pontos de instabilidade para $r = 2,8$ do que para $r = 4,0$. Outra característica é que quanto menor o número de sítios, maior é região de estabilidade do estado síncrono para valores pequenos de μ_f e μ_g . Para $r = 2,8$, Figura 4.1, há uma concentração de pontos de instabilidade que se encontram nos valores de μ_f e μ_g menores de aproximadamente 0,45. Para $r = 4,0$, Figuras 4.2, não existe uma concentração notável de pontos de instabilidade para uma determinada faixa de valores de μ_f e μ_g , mas, ainda assim é possível perceber que o sistema é estável quando pelo menos uma das taxas de migração é maior que aproximadamente 0,65. Esses resultados são condizentes com os resultados analíticos obtidos para a rede global.

Quando simulamos metapopulações com a rede global ponderada, Figuras 4.3 a 4.6, também observamos uma pequena diferença aumentando o número de sítios de forma proporcional em cada *cluster*, novamente a região de instabilidade tornou-se um pouco maior. Comparando as Figuras 4.1 e 4.3, é notável a semelhança entre as regiões formadas pelos pontos de instabilidade para as redes global e global ponderada quando $a = 0,5$ e $r = 2,8$. Ainda para $a = 0,5$, em todos os casos simulados temos estabilidade síncrona quando pelo menos uma das taxas de migração é maior que aproximadamente 0,75.

Para $a = 2$, Figuras 4.5 e 4.6, é possível observar uma quantidade significativamente maior de pontos de instabilidade para $r = 2,8$ do que para $r = 4,0$, resultado este que é igual ao obtido para a rede global. A diferença aqui é que para $r = 4,0$, no caso em que não temos simetria na distribuição de sítios entre os dois grupos ($k = 5$), obtemos pontos de instabilidade mesmo quando μ_g assume valores próximos de 1. Porém, quando apenas μ_f , ou ambos μ_f e μ_g aproximam-se de 1, temos estabilidade.

As Figuras 4.7 e 4.8 exibem as simulações numéricas utilizando a rede bipartida. Para $r = 2,8$ o diferencial nesta rede é a observação de pontos de instabilidade do estado parcialmente síncrono quando uma das taxas de migração

assume valores próximos ou igual a 1, enquanto a outra taxa de migração tem seus valores próximos ou iguais a 0. Biologicamente, temos o caso em que na população de um grupo de sítios a migração é intensa, enquanto na população do outro grupo não ocorre migração ou ocorre mas é pouco intensa.

Para um melhor entendimento, a Figura 4.9 mostra o número de Lyapunov transversal calculado em função de μ_f para as redes global e bipartida quando $\mu_g = 0, 15$, $n = 20$, $k = 5$ e $r = 2, 8$. Ou seja, trata-se de uma comparação entre as Figuras 4.1 (a) e 4.7 (a), fixando mais um parâmetro, o μ_g . Nas Figuras 4.9 (a) e (b), a linha tracejada indica $L_{\perp} = 1$, ou seja, é o ponto onde ocorre a mudança na estabilidade da solução parcialmente sincronizada. Repare que para a rede global, Figura (a), o número de Lyapunov, entre pequenas oscilações, vai diminuindo gradativamente, começando maior que 1 até que em aproximadamente $\mu_f = 0, 4$ ele se torna menor que 1. Já para a rede bipartida, Figura (b), o número de Lyapunov transversal oscila entre valores maiores e menores que 1 várias vezes. Um resultado interessante é que, justamente ao contrário da rede global, temos $L_{\perp} < 1$ para os valores menores de μ_f , e, $L_{\perp} > 1$ para os valores maiores de μ_f .

Também ao contrário da rede global, na rede bipartida os pontos de instabilidade aumentam conforme o parâmetro r aumenta de $r = 2, 8$ para $r = 4, 0$. Outra diferença, de acordo com os resultados numéricos representados pela Figura 4.7 e outros que julgamos desnecessário exibir, esta rede não apresenta sensibilidade quanto ao número de sítios. Este resultado já era esperado, devido ao número de Lyapunov transversal que independe de n na rede bipartida.

É possível ainda observar, segundo resultados de simulações, que para $r = 4$ a rede bipartida é a rede que concentra a maior quantidade de valores de μ_f e μ_g para os quais temos instabilidade síncrona, quando comparada às outras redes.

Começando pela Figura 4.10 como representante da rede 1/2, sua análise trouxe a surpresa de ter aumentada a sua região de instabilidade no espaço

$\mu_f \mu_g$ (maior número de pontos nos quais o sistema é instável). Verificamos a possibilidade desta sensibilidade ao parâmetro n estar sendo causada pelo uso de um número reduzido de sítios, ou seja, apenas 8 sítios foram utilizados nas simulações numéricas (a) e (c). Para tirar essa dúvida, simulamos a mesma quantidade de sítios para a rede global, a qual não exibe a mesma sensibilidade quanto ao número de sítios. Dessa forma, é possível concluir que a rede 1/2 é a rede para a qual o número de Lyapunov transversal possui a maior dependência do número total de sítios, quando comparada às outras redes. Para $r = 4$, Figura 4.11, o número de pontos de instabilidade diminuem bastante.

Por último a rede grupo preferencial, Figuras 4.12 e 4.13, apresenta em seus gráficos um misto de resultados obtidos pelas redes bipartida e global, que condizem com a forma de construção desta rede e os resultados analíticos obtidos para ela.

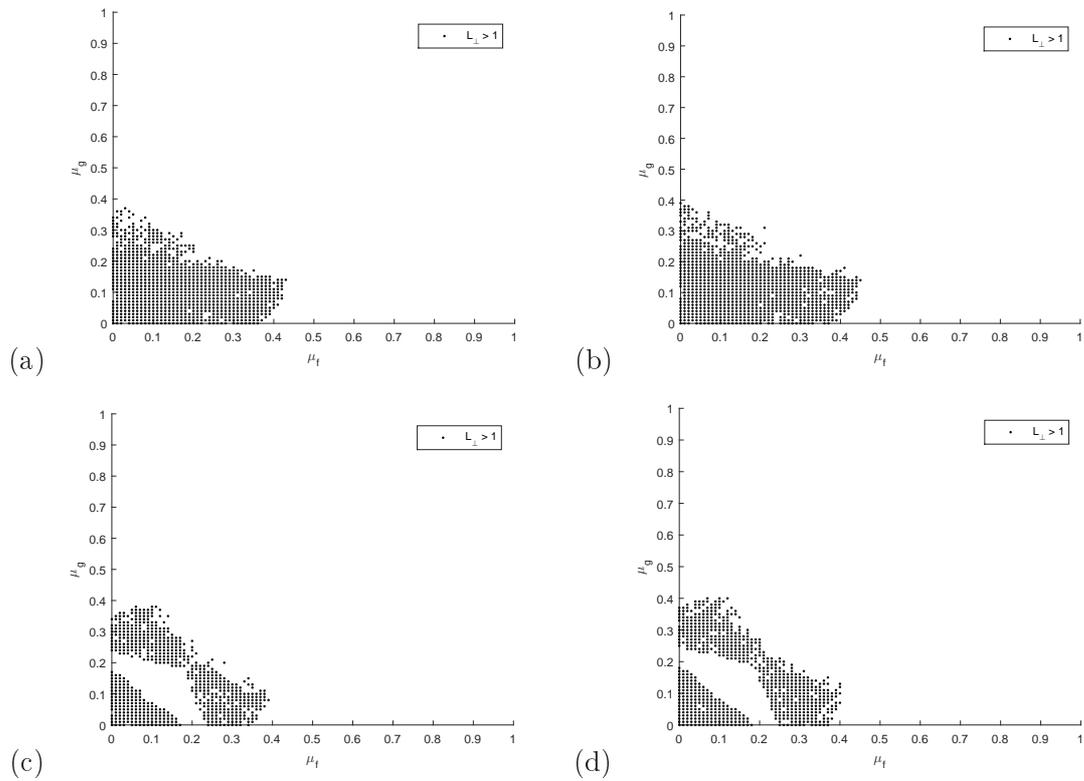


Figura 4.1: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede global e $r = 2, 8$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 160$ e $k = 40$ (c) $n = 20$ e $k = 10$ (d) $n = 160$ e $k = 80$.

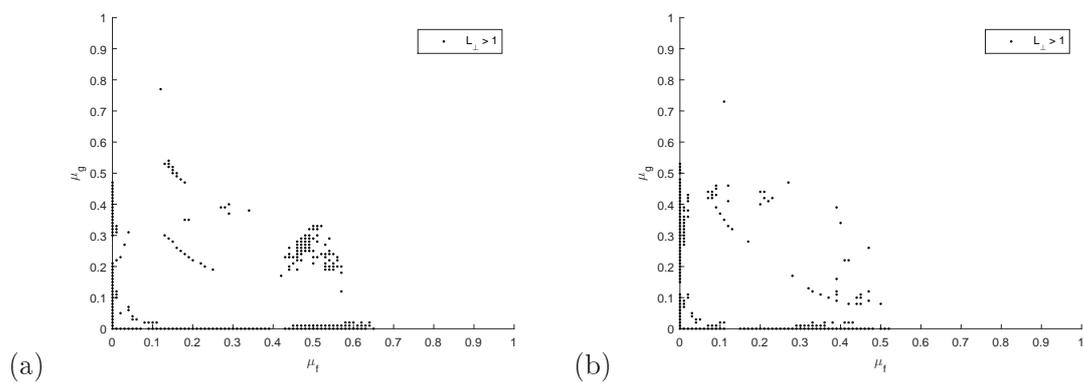


Figura 4.2: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede global e $r = 4, 0$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 20$ e $k = 10$.

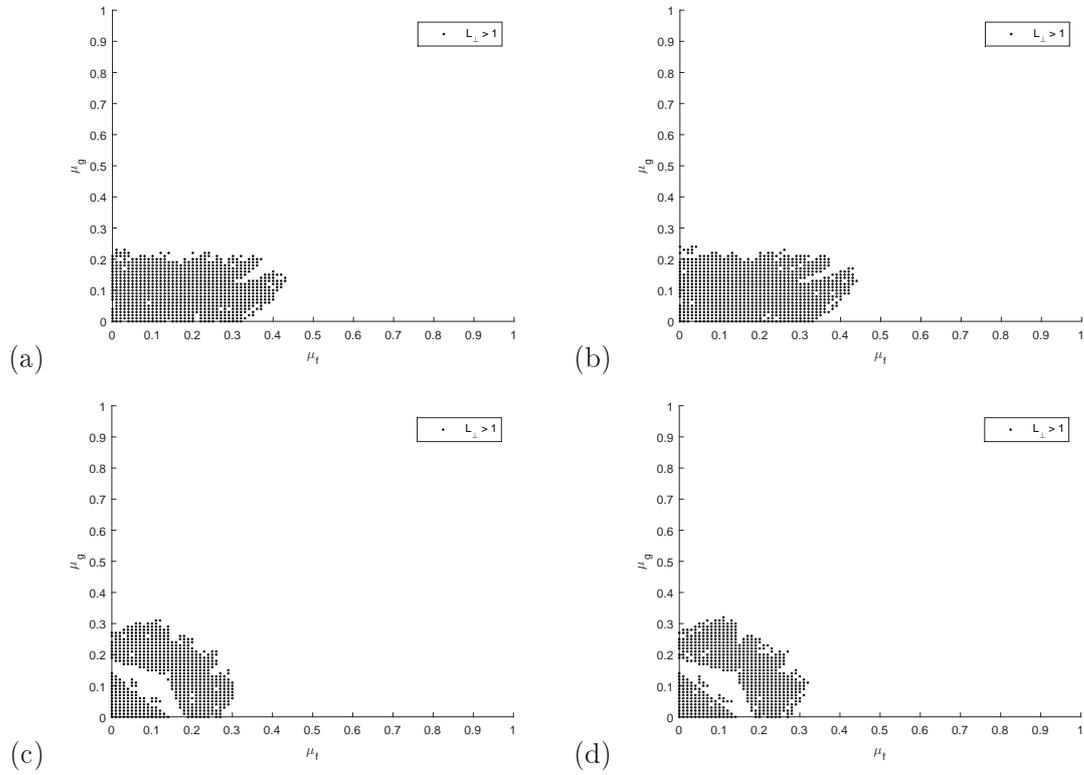


Figura 4.3: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede global ponderada (com $a = 0,5$) e $r = 2,8$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 160$ e $k = 40$ (c) $n = 20$ e $k = 10$ (d) $n = 160$ e $k = 80$.

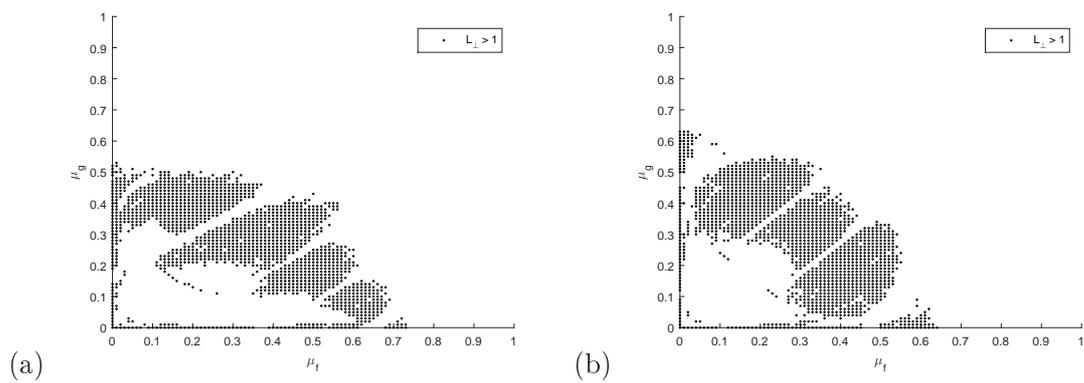


Figura 4.4: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede global ponderada (com $a = 0,5$) e $r = 4,0$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 20$ e $k = 10$.

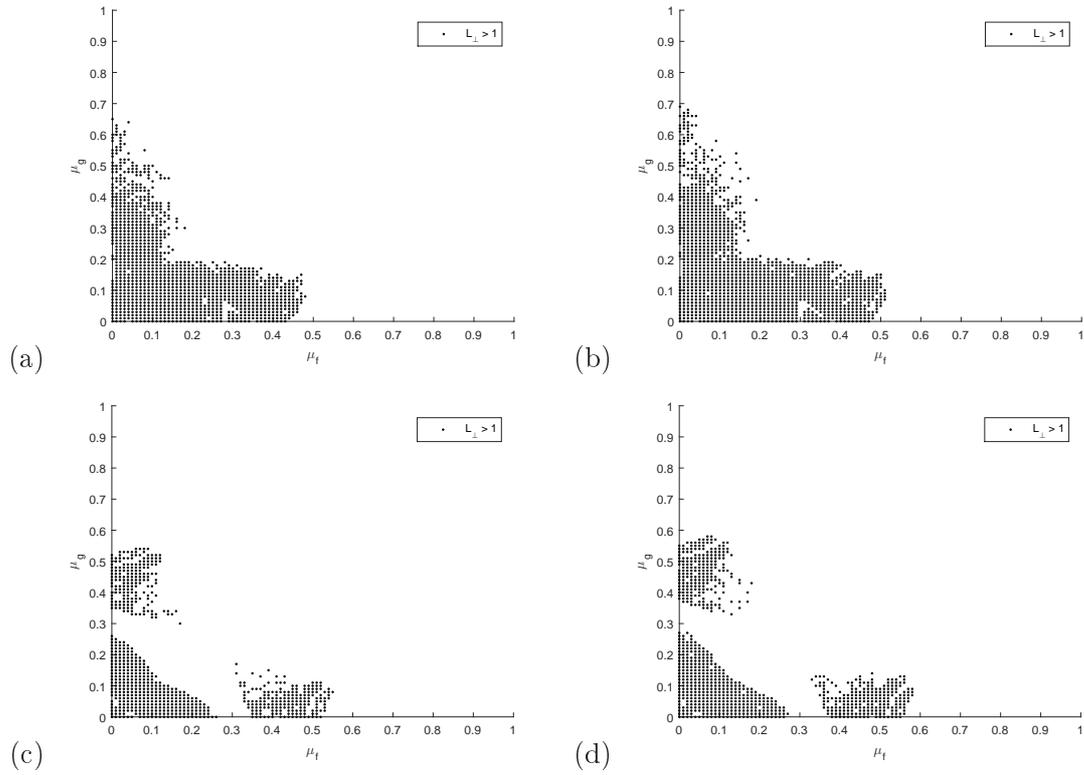


Figura 4.5: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede global ponderada (com $a = 2$) e $r = 2, 8$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 160$ e $k = 40$ (c) $n = 20$ e $k = 10$ (d) $n = 160$ e $k = 80$.

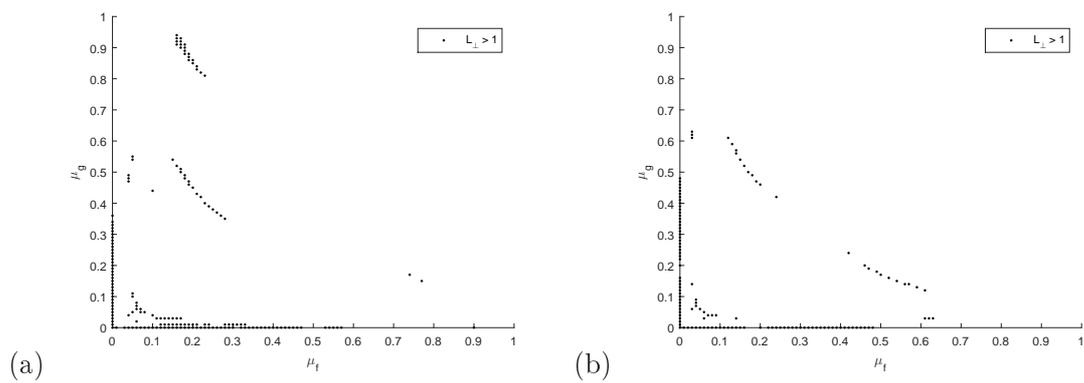


Figura 4.6: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede global ponderada (com $a = 2$) e $r = 4, 0$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 20$ e $k = 10$.

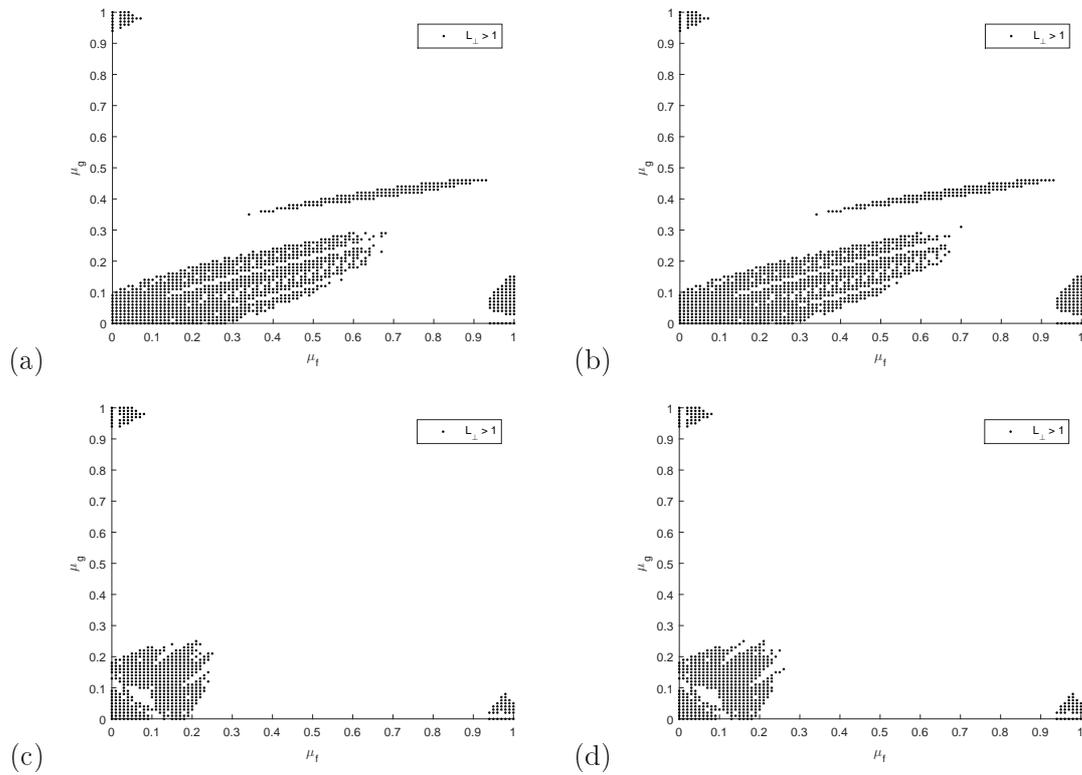


Figura 4.7: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede bipartida e $r = 2, 8$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 160$ e $k = 40$ (c) $n = 20$ e $k = 10$ (d) $n = 160$ e $k = 80$.

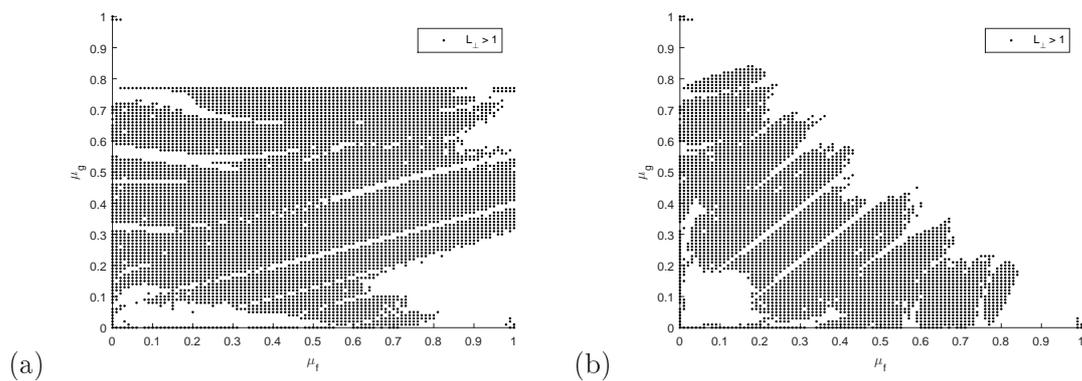


Figura 4.8: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g , para a rede bipartida e $r = 4, 0$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 20$ e $k = 10$.

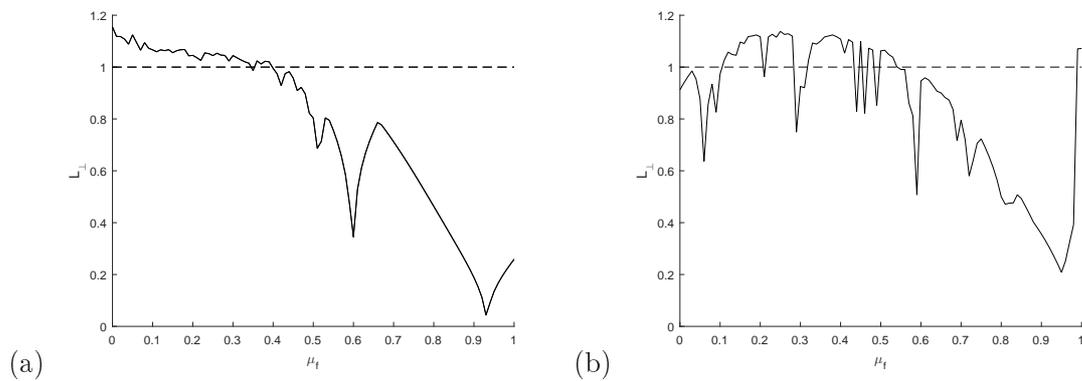


Figura 4.9: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f para $\mu_g = 0, 15$, $r = 2, 8$, $n = 20$ e $k = 5$. (a) Rede global (b) Rede bipartida.

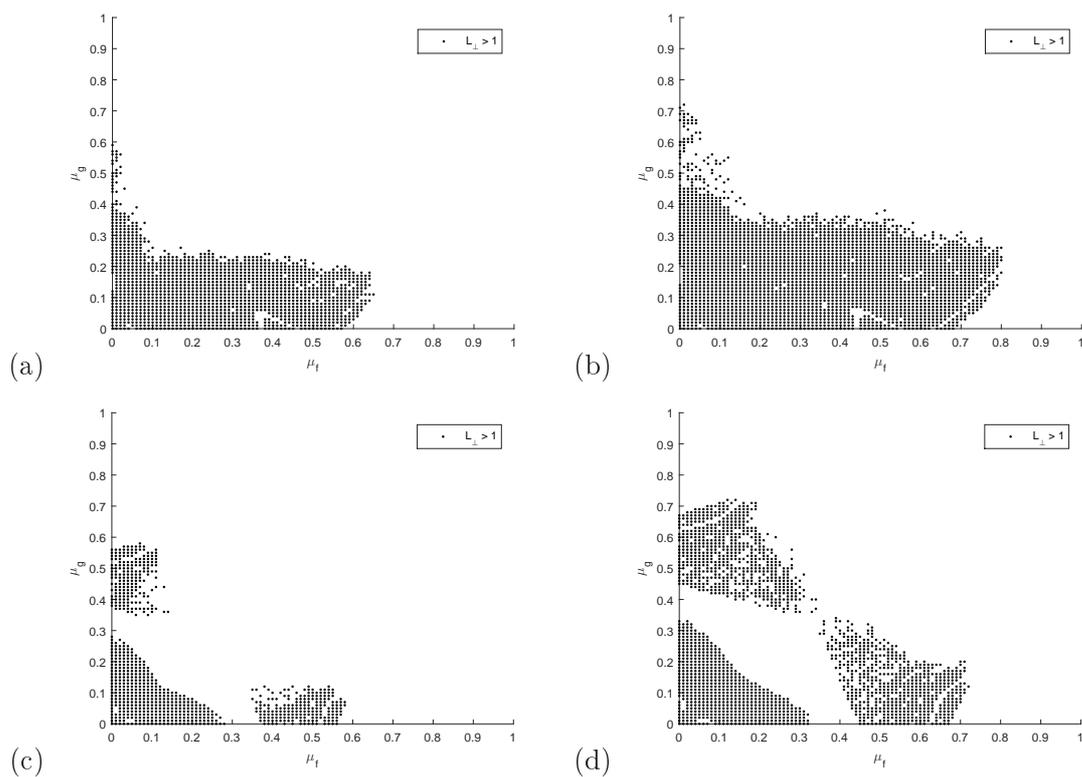


Figura 4.10: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede 1/2 e $r = 2, 8$. (a) $n = 8$ e $k = 2$ (b) $n = 20$ e $k = 5$ (c) $n = 8$ e $k = 4$ (d) $n = 20$ e $k = 10$.

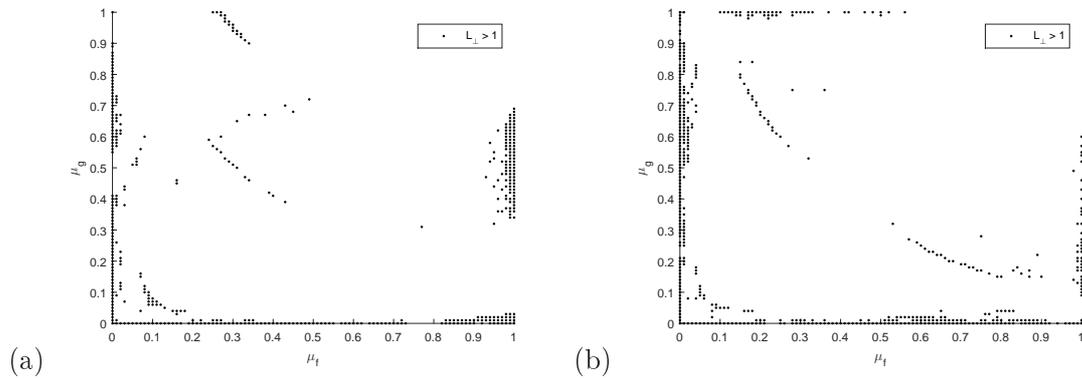


Figura 4.11: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede 1/2 e $r = 4, 0$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 20$ e $k = 10$.

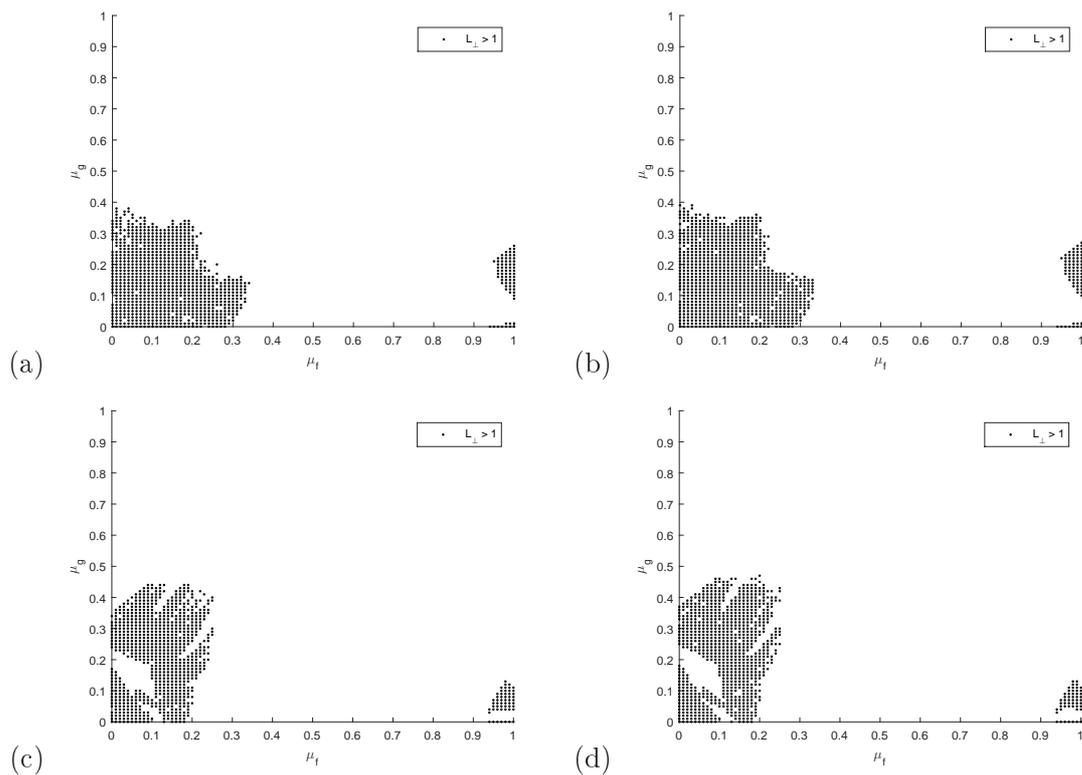


Figura 4.12: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede grupo preferencial e $r = 2, 8$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 160$ e $k = 40$ (c) $n = 20$ e $k = 10$ (d) $n = 160$ e $k = 80$.

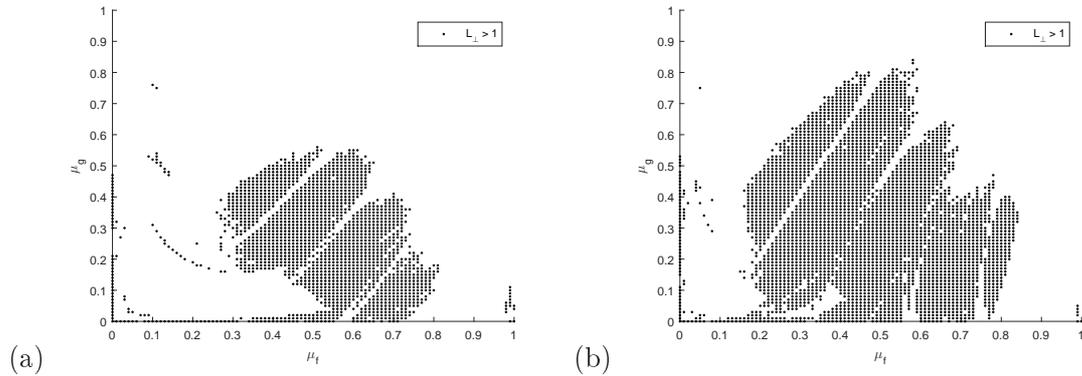


Figura 4.13: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) em função de μ_f e μ_g para a rede grupo preferencial e $r = 4, 0$. (a) $n = 20$ e $k = 5$ (b) $n = 20$ e $k = 10$.

4.3.2 Densidade Populacional

Nesta seção os resultados das simulações são descritos através de dois tipos de gráficos: 1) Densidades x_t^i em cada sítio $i = 1, 2, \dots, 40$ (eixo vertical), e em cada instante de tempo $t = 1, 2, \dots, 30$ (em exceção, para a rede 1/2 trabalhamos com um total de $n = 20$ sítios); 2) Séries temporais para a densidade x_t^i , em um sítio i específico, em função de $t = 1, 2, \dots, 30$. Em ambos os gráficos, $t = 1$ corresponde ao primeiro instante de tempo, após descartar 9970 transientes. Queremos com isso verificar a evolução da população nos sítios com o passar do tempo, os possíveis padrões formados pelas densidades e a sensibilidade da órbita parcialmente sincronizada com relação a pequenas perturbações.

As condições iniciais são tomadas próximas ao estado síncrono representado pela equação (4.12), ou seja, da forma

$$X_0 = (x_0 + \epsilon_1, \dots, x_0 + \epsilon_k, y_0 + \epsilon_{k+1}, \dots, y_0 + \epsilon_n), \quad (4.93)$$

onde $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ representa uma pequena perturbação à órbita parcialmente sincronizada e $\epsilon_i, i = 1, \dots, n$ são valores aleatórios pertencentes ao intervalo $(0; 0,01)$.

Para o primeiro tipo de gráfico, as células são pintadas em seis tonalidades que variam de branco até preto, conforme a densidade aumenta.

Para os sítios específicos do segundo tipo de gráfico, escolhemos aleatoriamente $i = 3$ do primeiro grupo e $i = 38$ do segundo grupo (em exceção, para a rede 1/2 temos $i = 18$ no segundo grupo de sítios). Nestes gráficos podemos observar o que acontece na dinâmica local dos sítios em cada grupo, queremos descobrir se houve a formação de padrões na dinâmica local ou se ela continua sendo caótica, já que as simulações são realizadas para valores do parâmetro r em que a dinâmica local é caótica.

Alternadas entre os resultados gráficos, encontram-se tabelas construídas com o objetivo de relacionar os números de Lyapunov com os resultados de cada figura. Nas tabelas, indicamos o valor do parâmetro r e calculamos o número de Lyapunov para a função de Ricker relacionado a r (L), o número de Lyapunov paralelo para o modelo metapopulacional ($L_{//}$), o número de Lyapunov transversal (L_{\perp}), o número de Lyapunov transversal para os primeiros k sítios, e por último, o número de Lyapunov transversal para os $k + 1$ até n sítios do modelo metapopulacional, lembrando que para a rede 1/2 os dois últimos não podem ser escritos explicitamente.

Começamos descrevendo alguns resultados interessantes quando a rede global é utilizada, como nas Figuras 4.14 e 4.15. Nos dois casos apresentados, apesar de estarmos trabalhando com parâmetros r para os quais a dinâmica local é caótica, através do acoplamento a dinâmica local da metapopulação tornou-se periódica, porém, cada caso apresentou alguma particularidade. Na Figura 4.14 a densidade populacional em cada *cluster* oscila com o mesmo período e fase, porém com amplitudes diferentes. Já na Figura 4.15 temos apenas a igualdade de período entre os grupos, ou seja, a dinâmica descreve um ciclo de período 4 em ambos os grupos, com diferença de fase e amplitude entre eles.

Nas figuras descritas anteriormente observamos a tendência da migração em estabilizar a dinâmica local caótica. Porém, de acordo com a Figura 4.16, podemos afirmar que este resultado nem sempre ocorre, já que tal figura exhibe resultados em que é obtida a sincronização parcial da metapopulação enquanto que a dinâmica local dos sítios continua sendo caótica.

Em relação à rede bipartida, as Figuras 4.17, 4.18 e 4.19 mostram simulações numéricas nas quais alteramos apenas o valor do parâmetro k , gerando resultados bem diferentes em cada uma delas.

Na Figura 4.17, para $k = 10$ temos uma metapopulação parcialmente sincronizada em que a migração tornou a dinâmica local um ponto fixo, ou seja, não há variação na densidade populacional dentro de cada agrupamento de sítios. Quando aumentamos o valor de k para 15, Figura 4.18, o estado síncrono continua estável, porém as dinâmicas locais começam a oscilar de forma periódica, em períodos e fases iguais, mas, amplitudes diferentes em cada *cluster*. E finalmente, quando passamos para $k = 30$ ocorre a perda da estabilidade da órbita parcialmente sincronizada, conforme Figura 4.19.

Na Figura 4.20 temos dinâmicas locais caóticas que oscilam da mesma forma nos dois *clusters*, porém com densidades diferentes. Neste exemplo também temos o caso em que o acoplamento não estabilizou a dinâmica local, ela continua sendo caótica.

Na Figura 4.21 visualizamos os resultados para a rede $1/2$ utilizando $r = 4, 0$. Aqui novamente obtemos a tendência estabilizadora causada pelo acoplamento. As dinâmicas locais de cada *cluster* passaram de caóticas para periódicas de período 2 após o acoplamento. É interessante notar que em cada *cluster* as oscilações da densidade ocorrem em fases contrárias, ou seja, quando em um *cluster* a população atinge a sua densidade máxima, no outro ela atinge densidade mínima, e vice-versa.

Apesar dos resultados mostrados na Figura 4.21, temos a Figura 4.22 que mostra que para a rede $1/2$ também é possível obter sincronização parcial onde a dinâmica local dos sítios é caótica, ou seja, é o caso em que o acoplamento não estabiliza a dinâmica local dos sítios.

Com relação aos resultados das Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 podemos concluir que, conforme já mostrado analiticamente, para $L_{\perp} > 1$ temos instabilidade local do estado parcialmente síncrono e para $L_{\perp} < 1$ temos estabilidade local. Além disso, através dos números de Lyapunov paralelo podemos concluir que assegurada a estabilidade da solução síncrona, temos caos sincronizado quando $L_{//} > 1$ e periodicidade sincronizada quando $L_{//} < 1$.

Tabela 4.1: Números de Lyapunov para rede global, conforme parâmetros de cada figura.

	r	L	$L_{//}$	L_{\perp}	$ 1 - \frac{n}{n-1}\mu_f L_x$	$ 1 - \frac{n}{n-1}\mu_g L_y$
Figura 4.14	2,8	1,2712	0,8333	0,5566	0,2003	0,5566
Figura 4.15	2,8	1,2712	0,8740	0,8265	0,7699	0,8265
Figura 4.16	3,0	1,4268	1,4086	0,8200	0,7713	0,8200

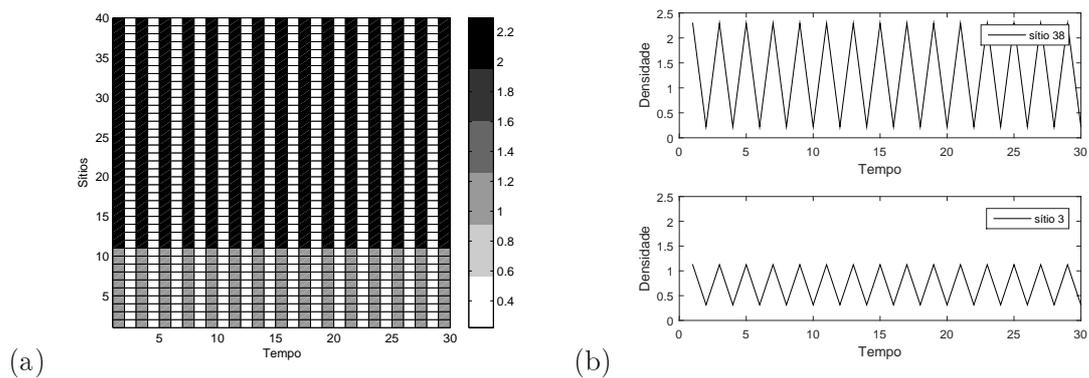


Figura 4.14: Para a rede global com $r = 2,8$, $n = 40$, $k = 10$, $\mu_f = 0,8$ e $\mu_g = 0,2$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.

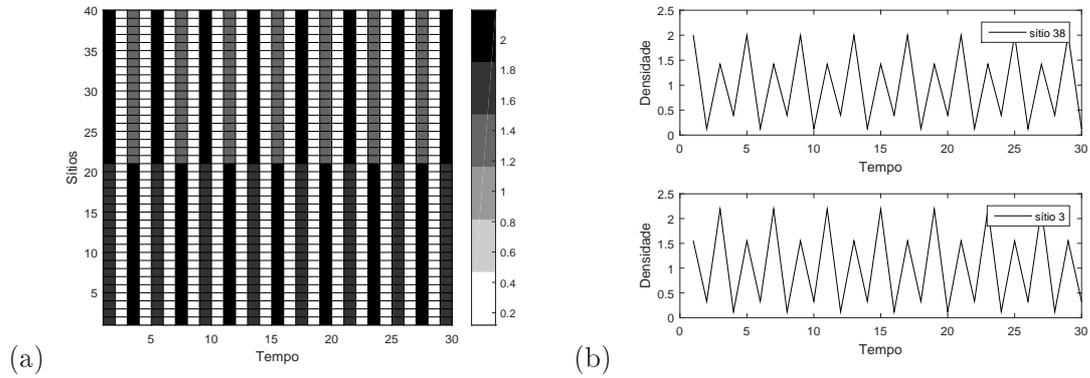


Figura 4.15: Para a rede global com $r = 2,8$, $n = 40$, $k = 20$, $\mu_f = 0,1$ e $\mu_g = 0,2$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.

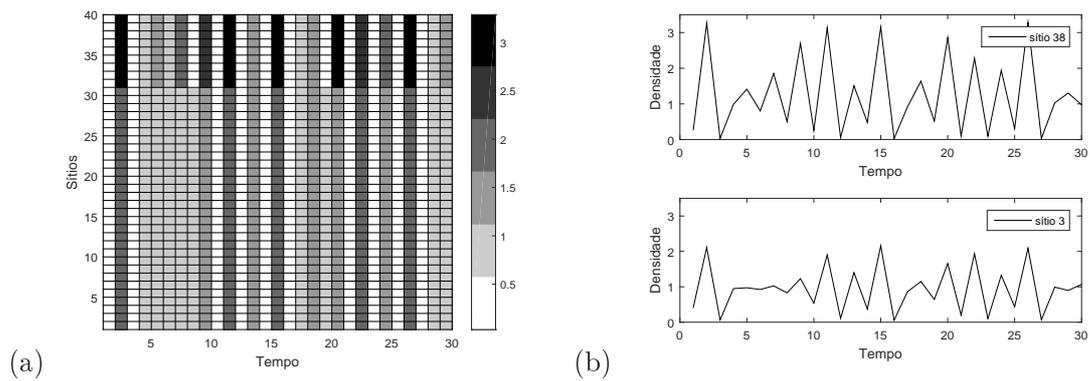


Figura 4.16: Para a rede global com $r = 3$, $n = 40$, $k = 30$, $\mu_f = 0,5$ e $\mu_g = 0,04$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.

Tabela 4.2: Números de Lyapunov para rede bipartida, conforme parâmetros de cada figura.

	r	L	$L_{//}$	L_{\perp}	$(1 - \mu_f)L_x$	$(1 - \mu_g)L_y$
Figura 4.17	2,8	1,2712	0,9000	0,8859	0,1465	0,8859
Figura 4.18	2,8	1,2712	0,4260	0,6873	0,1275	0,6873
Figura 4.19	2,8	1,2712	0,9891	1,0317	1,0317	0,0457
Figura 4.20	3,0	1,4268	1,4017	0,9737	0,9737	0,6279

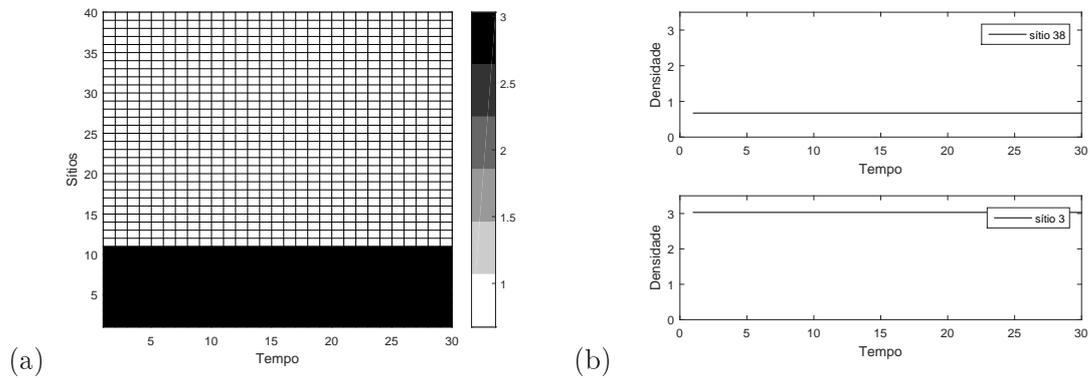


Figura 4.17: Para a rede bipartida com $r = 2,8$, $n = 40$, $k = 10$, $\mu_f = 0,4$ e $\mu_g = 0,6$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.

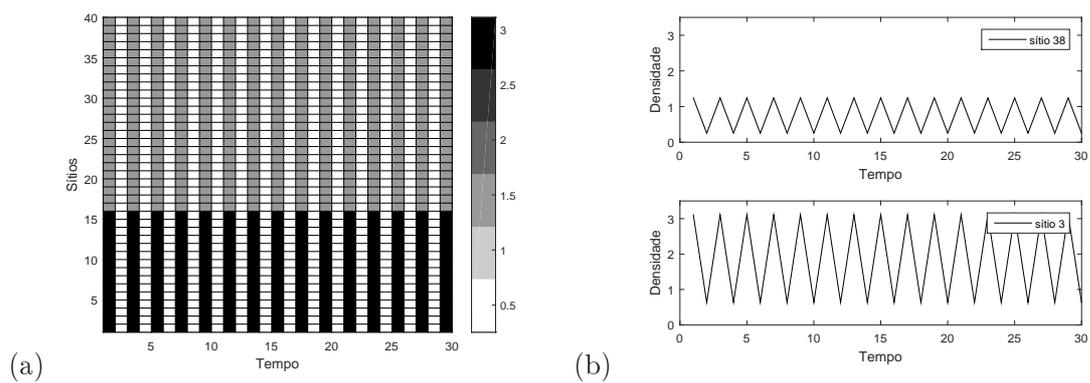


Figura 4.18: Para a rede bipartida com $r = 2,8$, $n = 40$, $k = 15$, $\mu_f = 0,4$ e $\mu_g = 0,6$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.

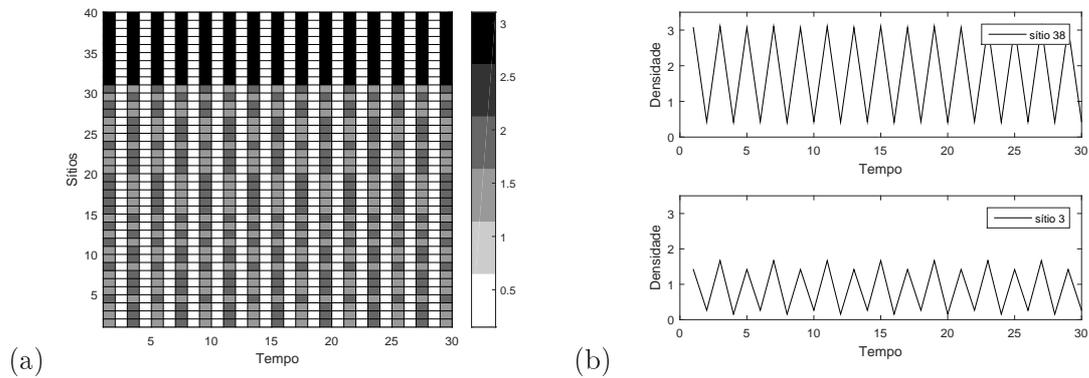


Figura 4.19: Para a rede bipartida com $r = 2, 8$, $n = 40$, $k = 30$, $\mu_f = 0,4$ e $\mu_g = 0,6$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.

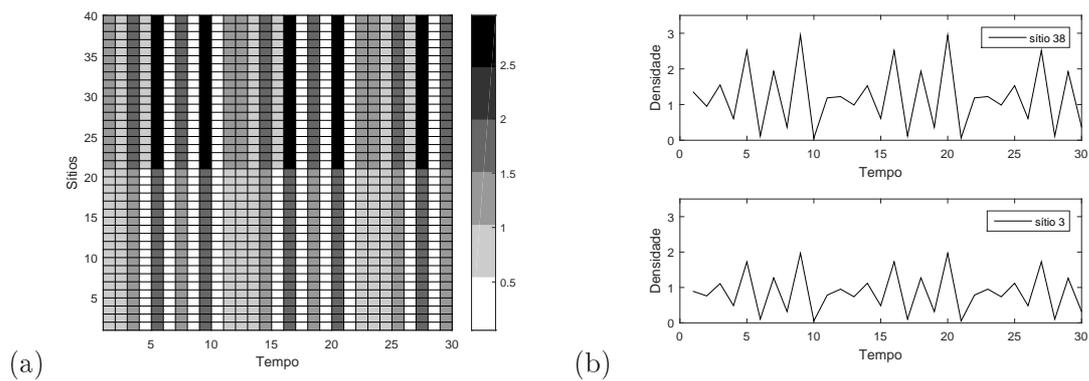


Figura 4.20: Para a rede bipartida com $r = 3$, $n = 40$, $k = 20$, $\mu_f = 0,5$ e $\mu_g = 0,3$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.

Tabela 4.3: Números de Lyapunov para rede 1/2, conforme parâmetros de cada figura.

	r	L	$L_{//}$	L_{\perp}
Figura 4.21	4,0	1,6154	0,0230	0,0201
Figura 4.22	4,0	1,6154	1,7407	0,8485

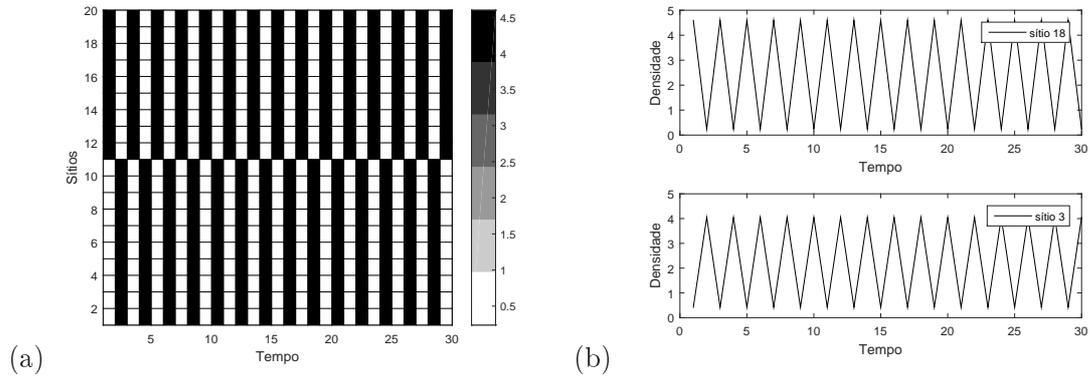


Figura 4.21: Para a rede $1/2$ com $r = 4$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = 0,2$ e $\mu_g = 0,3$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.

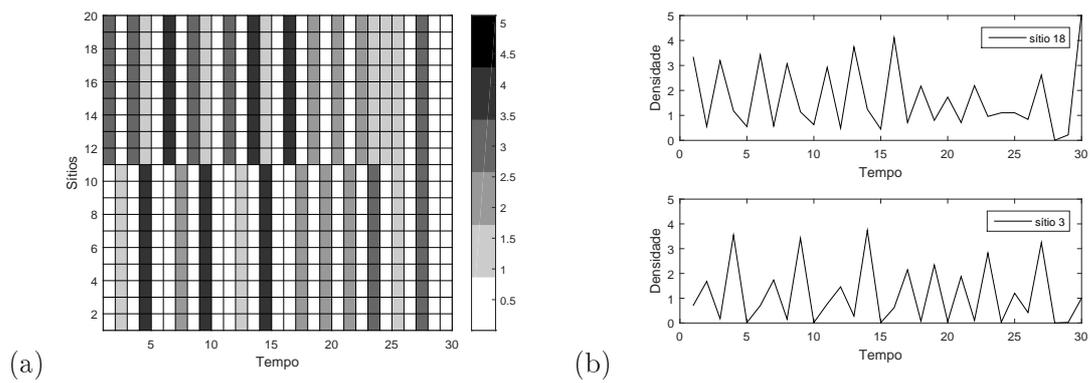


Figura 4.22: Para a rede $1/2$ com $r = 4$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = 0,9$ e $\mu_g = 0,1$: (a) Densidade populacional (b) Séries temporais para dois sítios específicos.

4.4 Conclusões do Capítulo

Nesse capítulo buscou-se salientar os efeitos do processo migratório heterogêneo na formação de *clusters*. Estabelecemos as condições necessárias para garantir a existência do estado parcialmente síncrono para o modelo metapopulacional com taxa de migração constante descrito por (4.3).

Estudamos um critério para a análise assintótica da estabilidade local da solução parcialmente sincronizada do sistema, definindo o número de Lyapunov transversal, através do qual concluimos que para $L_{\perp} < 1$ ocorre estabilidade local da órbita parcialmente sincronizada e para $L_{\perp} > 1$ ocorre instabilidade local. Concluimos ainda que quando $L_{\perp} < 1$ está combinado com $L_{//} > 1$ obtemos caos sincronizado para a dinâmica dos grupos, e quando temos $L_{\perp} < 1$ juntamente com $L_{//} < 1$ obtemos então periodicidade síncrona, inclusive a de período 1, que corresponde a ponto fixo.

Para as redes global e global ponderada, observamos nas simulações que quanto mais intenso é o movimento migratório, maior é a possibilidade de formação de *clusters*, mesmo que a migração seja intensa em apenas um deles. O mesmo resultado nem sempre ocorre para as outras redes.

Percebemos também que a migração pode alterar a dinâmica local dos sítios, de caótica para periódica (inclusive ponto fixo).

5 MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO DEPENDENTE DA DENSIDADE

No capítulo anterior desenvolvemos um modelo metapopulacional heterogêneo com taxa de migração constante, obtivemos a expressão que descreve a solução parcialmente sincronizada para o sistema e analisamos a sua estabilidade. Neste capítulo, faremos novamente todo este desenvolvimento para um modelo metapopulacional heterogêneo onde em cada grupo de sítios a taxa de migração é dada por uma função dependente da densidade local.

Novamente, como no capítulo anterior, para $t = 1, 2, \dots$, consideramos que a dinâmica local dos sítios é dada por

$$\begin{cases} x_{t+1}^i = f(x_t^i), & i = 1, 2, \dots, k \\ x_{t+1}^i = g(x_t^i), & i = k+1, k+2, \dots, n \end{cases} \quad (5.1)$$

onde f e g são funções suaves em $[0, \infty)$ com valores não-negativos e $x_t^i \in \mathbb{R}$ é a população do sítio i no tempo t .

Considere a dinâmica local descrita em (5.1), que a cada passo de tempo é seguida pela migração. Como agora queremos incluir uma migração dependente da densidade local, temos que ao final de cada passo de tempo uma fração $\mu_f(f(x_t^i))$ da população do sítio i , com $i = 1, 2, \dots, k$ parte deste sítio para sítios vizinhos. Da mesma forma, uma fração $\mu_g(g(x_t^i))$ da população do sítio i , com $i = k+1, k+2, \dots, n$ também parte deste sítio para seus vizinhos, sendo $0 \leq \mu_f(x), \mu_g(x) \leq 1$.

Desta forma, considerando o descrito acima e a dinâmica em (5.1), o modelo metapopulacional heterogêneo com migração dependente da densidade local

é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1}^i = [1 - \mu_f(f(x_t^i))]f(x_t^i) + \sum_{j=1}^k c_{i,j}\mu_f(f(x_t^j))f(x_t^j) + \sum_{j=k+1}^n c_{i,j}\mu_g(g(x_t^j))g(x_t^j), \\ \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ x_{t+1}^i = [1 - \mu_g(g(x_t^i))]g(x_t^i) + \sum_{j=1}^k c_{i,j}\mu_f(f(x_t^j))f(x_t^j) + \sum_{j=k+1}^n c_{i,j}\mu_g(g(x_t^j))g(x_t^j), \\ \quad \quad \quad i = k + 1, k + 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

A interpretação do sistema (5.2) é a mesma que já descrita para o sistema em (4.4).

Definimos por $\phi_f(f(x_t^i)) = \mu_f(f(x_t^i))f(x_t^i)$ a densidade da população que parte do sítio i , $i = 1, 2, \dots, k$ no fim do passo de tempo t e por $\phi_g(g(x_t^i)) = \mu_g(g(x_t^i))g(x_t^i)$ a densidade da população que parte do sítio i , $i = k+1, k+2, \dots, n$ ao fim do passo do mesmo tempo t . Desta forma, o sistema em (5.2) pode ser reescrito como

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1}^i = f(x_t^i) - \phi_f(f(x_t^i)) + \sum_{j=1}^k c_{i,j}\phi_f(f(x_t^j)) + \sum_{j=k+1}^n c_{i,j}\phi_g(g(x_t^j)), \\ \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ x_{t+1}^i = g(x_t^i) - \phi_g(g(x_t^i)) + \sum_{j=1}^k c_{i,j}\phi_f(f(x_t^j)) + \sum_{j=k+1}^n c_{i,j}\phi_g(g(x_t^j)), \\ \quad \quad \quad i = k + 1, k + 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Como já temos o modelo, vamos passar agora para o estágio de avaliar se existe e quais são as condições necessárias que possibilitam o aparecimento da solução parcialmente sincronizada.

Supondo que no tempo t_0 o sistema entrou em sincronia parcial, para todo $t \geq t_0$ temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_t^i = x_t, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k, \\ x_t^i = y_t, \quad \text{para } i = k + 1, k + 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Assim, dados (5.3) e (5.4), obtemos para $t \geq t_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = f(x_t) - \phi_f(f(x_t)) + \sum_{j=1}^k c_{i,j} \phi_f(f(x_t)) + \sum_{j=k+1}^n c_{i,j} \phi_g(g(y_t)), \\ \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ y_{t+1} = g(y_t) - \phi_g(g(y_t)) + \sum_{j=1}^k c_{i,j} \phi_f(f(x_t)) + \sum_{j=k+1}^n c_{i,j} \phi_g(g(y_t)), \\ \quad \quad \quad i = k+1, k+2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Novamente, basta olhar para o sistema em (5.5) para perceber que precisamos de condições especiais sobre as linhas da matriz de conexão C para garantir a existência da solução parcialmente sincronizada. Concluimos que necessitamos das mesmas hipóteses descritas no modelo do capítulo anterior, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^k c_{i,j} = \alpha, \quad \sum_{j=k+1}^n c_{i,j} = \beta, \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^k c_{i,j} = \gamma, \quad \sum_{j=k+1}^n c_{i,j} = \delta, \quad i = k+1, k+2, \dots, n, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

onde α , β , γ e δ são constantes não-negativas.

Finalmente, podemos descrever a equação da solução parcialmente sincronizada, que devido a (5.6) é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = f(x_t) - \phi_f(f(x_t)) + \alpha \phi_f(f(x_t)) + \beta \phi_g(g(y_t)), \\ y_{t+1} = g(y_t) - \phi_g(g(y_t)) + \gamma \phi_f(f(x_t)) + \delta \phi_g(g(y_t)), \end{array} \right. \quad (5.7)$$

ou,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = f(x_t) + (\alpha - 1) \phi_f(f(x_t)) + \beta \phi_g(g(y_t)), \\ y_{t+1} = g(y_t) + \gamma \phi_f(f(x_t)) + (\delta - 1) \phi_g(g(y_t)). \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Veremos a seguir a análise detalhada com respeito à estabilidade assintótica do estado parcialmente sincronizado da metapopulação heterogênea descrita neste capítulo.

5.1 Análise de Estabilidade do Estado Síncrono

Com o objetivo de avaliar se órbitas iniciadas próximas ao estado parcialmente síncrono serão atraídas ou repelidas por ele, vamos analisar o sistema (5.3) linearizado em torno da órbita parcialmente sincronizada, que é representada por $s_t = (\underbrace{x_t, \dots, x_t}_k, \underbrace{y_t, \dots, y_t}_{n-k})$, onde x_t e y_t satisfazem (5.7).

A matriz Jacobiana do sistema (5.5), aplicada em s_t , é dada por

$$J(s_t) = \begin{bmatrix} [1 - \phi'_f(f(x_t))]f'(x_t) & c_{1,2}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t) & \cdots & c_{1,k}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t) \\ c_{2,1}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t) & [1 - \phi'_f(f(x_t))]f'(x_t) & \cdots & c_{2,k}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k,1}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t) & c_{k,2}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t) & \cdots & [1 - \phi'_f(f(x_t))]f'(x_t) \\ c_{k+1,1}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t) & c_{k+1,2}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t) & \cdots & c_{k+1,k}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t) & c_{n,2}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t) & \cdots & c_{n,k}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t) \\ \\ c_{1,k+1}\phi'_g(g(y_t))g'(y_t) & \cdots & c_{1,n}\phi'_g(g(y_t))g'(y_t) \\ c_{2,k+1}\phi'_g(g(y_t))g'(y_t) & \cdots & c_{2,n}\phi'_g(g(y_t))g'(y_t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k,k+1}\phi'_g(g(y_t))g'(y_t) & \cdots & c_{k,n}\phi'_g(g(y_t))g'(y_t) \\ [1 - \phi'_g(g(y_t))]g'(y_t) & \cdots & c_{k+1,n}\phi'_g(g(y_t))g'(y_t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,k+1}\phi'_g(g(y_t))g'(y_t) & \cdots & [1 - \phi'_g(g(y_t))]g'(y_t) \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

ou, de forma mais compacta, podemos escrever $J(s_t) = [\alpha_{i,j}(s_t)]$, onde

$$\alpha_{i,j}(s_t) = \begin{cases} (1 - \phi'_f(f(x_t)))f'(x_t), & \text{se } i = j \text{ e } j = 1, 2, \dots, k, \\ (1 - \phi'_g(g(y_t)))g'(y_t), & \text{se } i = j \text{ e } j = k + 1, k + 2, \dots, n, \\ c_{i,j}\phi'_f(f(x_t))f'(x_t), & \text{se } i \neq j \text{ e } j = 1, 2, \dots, k, \\ c_{i,j}\phi'_g(g(y_t))g'(y_t), & \text{se } i \neq j \text{ e } j = k + 1, k + 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5.10)$$

Para simplificar os cálculos que faremos a seguir, é importante representar a matriz em (5.9) da seguinte forma:

$$J(s_t) = [I - (I - C)M_t]D_t, \quad (5.11)$$

onde I é a matriz identidade de ordem $n \times n$ e $C = [c_{i,j}]$ é a matriz de conexão do sistema, também de ordem $n \times n$. As matrizes M_t e D_t são ambas diagonais, definidas respectivamente por

$$M_t = \text{diag}(\overbrace{\phi'_f(f(x_t)), \dots, \phi'_f(f(x_t))}^k, \overbrace{\phi'_g(g(y_t)), \dots, \phi'_g(g(y_t))}^{n-k}), \quad (5.12)$$

e

$$D_t = \text{diag}(\overbrace{f'(x_t), \dots, f'(x_t)}^k, \overbrace{g'(y_t), \dots, g'(y_t)}^{n-k}). \quad (5.13)$$

A ideia para mostrar a estabilidade do estado parcialmente síncrono é a mesma utilizada no Capítulo 4, ou seja, primeiramente precisamos concluir que os subespaços de sincronização parcial S e S^\perp são $J(s_t)$ -invariantes. Assim, sendo $B_S = \{v_1, v_2\}$ como na Definição 4.1.1 uma base para S e $B_{S^\perp} = \{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, w_1, w_2, \dots, w_{n-k-1}\}$ uma base para o subespaço S^\perp definida em (4.25) temos que $B = B_S \cup B_{S^\perp}$ é uma base para $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$, e nesta nova base B , a matriz Jacobiana $J(s_t)$ assume a forma diagonal em blocos, como já descrito em (4.17).

Por se tratar de um processo semelhante ao detalhado no Capítulo 4, alguns cálculos são simplificados no decorrer deste capítulo.

Proposição 5.1.1. *O subespaço S é $J(s_t)$ -invariante.*

Demonstração. De fato, já mostramos em (4.18) que

$$Cv_1 = \alpha v_1 + \gamma v_2 \in S, \quad (5.14)$$

e em (4.19) que

$$Cv_2 = \beta v_1 + \delta v_2 \in S. \quad (5.15)$$

Com algumas contas simples obtemos também que

$$M_t v_1 = \begin{bmatrix} \phi'_f(f(x_t)) \\ \vdots \\ \phi'_f(f(x_t)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \phi'_f(f(x_t)) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \phi'_f(f(x_t)) v_1 \in S, \quad (5.16)$$

e

$$M_t v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi'_g(g(y_t)) \\ \vdots \\ \phi'_g(g(y_t)) \end{bmatrix} = \phi'_g(g(y_t)) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \phi'_g(g(y_t)) v_2 \in S. \quad (5.17)$$

Da mesma forma, é fácil ver que

$$\begin{aligned} D_t v_1 &= f'(x_t) v_1 \in S, \\ D_t v_2 &= g'(y_t) v_2 \in S. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(s_t) v_1 &= [I - (I - C) M_t] D_t v_1 \\ J(s_t) v_1 &= f'(x_t) [I - (I - C) M_t] v_1 \\ J(s_t) v_1 &= f'(x_t) [v_1 - \underbrace{\phi'_f(f(x_t)) (v_1 - C v_1)}_{\in S}] \in S. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Seguindo os mesmos passos, obtemos também

$$\begin{aligned} J(s_t) v_2 &= [I - (I - C) M_t] D_t v_2 \\ J(s_t) v_2 &= g'(y_t) [I - (I - C) M_t] v_2 \\ J(s_t) v_2 &= g'(y_t) [v_2 - \underbrace{\phi'_g(g(y_t)) (v_2 - C v_2)}_{\in S}] \in S. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Portanto, por (5.19) e (5.20), mostramos que S é $J(s_t)$ -invariante. \square

Proposição 5.1.2. *Desde que assumidas as hipóteses em (4.23) sobre as colunas da matriz C , o subespaço S^\perp é $J(s_t)$ -invariante.*

Demonstração. Com efeito, dada a base de S^\perp , $B_{S^\perp} = \{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, w_1, w_2, \dots, w_{n-k-1}\}$ como em (4.25), já mostramos na Proposição 4.1.2 que S^\perp é C -invariante, ou seja, já mostramos que para todo vetor $u_i \in B_{S^\perp}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, podemos escrever Cu_i como uma combinação linear dos elementos da base B_{S^\perp} ,

$$Cu_i = a_{1,i}u_1 + a_{2,i}u_2 + \dots + a_{k-1,i}u_{k-1} + a_{k,i}w_1 + \dots + a_{n-2,i}w_{n-k-1}, \quad (5.21)$$

onde os coeficientes $a_{m,i} \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \dots, n-2$, são dados por

$$\begin{cases} a_{m,i} = -c_{m+1,1} + c_{m+1,i+1}, & m = 1, 2, \dots, k-1 \\ a_{m,i} = -c_{m+2,1} + c_{m+2,i+1}, & m = k, k+1, \dots, n-2, \end{cases} \quad (5.22)$$

e assim, $Cu_i \in S^\perp$.

Analogamente, $Cw_i \in S^\perp$, $i = 1, 2, \dots, n-k-1$, ou seja, podemos escrever Cw_i como combinação linear dos elementos da base,

$$Cw_i = a_{1,k-1+i}u_1 + \dots + a_{k-1,k-1+i}u_{k-1} + a_{k,k-1+i}w_1 + \dots + a_{n-2,k-1+i}w_{n-k-1}, \quad (5.23)$$

para coeficientes $a_{m,i} \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \dots, n-2$ dados por

$$\begin{cases} a_{m,k-1+i} = -c_{m+1,k+1} + c_{m+1,k+i+1}, & m = 1, 2, \dots, k-1 \\ a_{m,k-1+i} = -c_{m+2,k+1} + c_{m+2,k+i+1}, & m = k, k+1, \dots, n-2. \end{cases} \quad (5.24)$$

Obtemos facilmente também,

$$\begin{aligned} D_t u_i &= f'(x_t)u_i \quad e \quad M_t u_i = \phi'_f(f(x_t))u_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k-1, \\ D_t w_i &= g'(y_t)w_i \quad e \quad M_t w_i = \phi'_g(g(y_t))w_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-k-1. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(s_t)u_i &= [I - (I - C)M_t]D_t u_i \\ J(s_t)u_i &= f'(x_t)[I - (I - C)M_t]u_i \\ J(s_t)u_i &= f'(x_t)[u_i - \underbrace{\phi'_f(f(x_t))(u_i - Cu_i)}_{\in S^\perp}] \in S^\perp. \end{aligned} \quad (5.26)$$

e da mesma forma,

$$J(s_t)w_i = g'(y_t)[w_i - \phi'_g(g(y_t))(w_i - \underbrace{Cw_i}_{\in S^\perp})] \in S^\perp. \quad (5.27)$$

donde concluimos que S^\perp é $J(s_t)$ -invariante. \square

Em resumo, podemos escrever o espaço vetorial \mathbb{R}^n como uma soma direta de dois subespaços $J(s_t)$ -invariantes, ou seja, $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$, onde $B = B_S \cup B_{S^\perp}$ é uma base de \mathbb{R}^n .

Neste caso a restrição $J_B(s_t)$ a cada um destes subespaços é um operador linear, e portanto, podemos escrever a matriz $J_B(s_t)$ usando os blocos das matrizes destas restrições, como em (4.17) (ver [5]).

É importante observar que a escolha das bases B_S e B_{S^\perp} interfere apenas na formação dos elementos dentro de cada bloco não-nulo da matriz $J_B(s_t)$, já que a formação dos blocos provém da $J(s_t)$ -invariância dos subespaços S e S^\perp , sendo esta independente das bases.

Assim, dada por $Q_B = [v_1 \ v_2 \ u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{k-1} \ w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{n-k-1}]$ a matriz mudança de base da base canônica do \mathbb{R}^n para a base B , temos $J_B(s_t) = Q_B^{-1}J(s_t)Q_B$, com $J(s_t) = [I - (I - C)M_t]D_t$.

Vamos verificar agora como são formados os blocos da matriz $J_B(s_t)$, ou seja, veremos explicitamente quem são $J_{B_S}(s_t)$ e $J_{B_{S^\perp}}(s_t)$.

Começando por $J_{B_S}(s_t)$, precisamos calcular os produtos $J(s_t)v_1$ e $J(s_t)v_2$. Podemos escrever

$$\begin{aligned}
J(s_t)v_1 &= [I - (I - C)M_t]D_tv_1 \\
&= [I - (I - C)M_t]f'(x_t)v_1 \\
&= f'(x_t)[v_1 - (I - C)M_tv_1] \\
&= f'(x_t)[v_1 - (I - C)\phi'_f(f(x_t))v_1] \\
&= f'(x_t)v_1 - \phi'_f(f(x_t))f'(x_t)v_1 + \phi'_f(f(x_t))f'(x_t)Cv_1 \\
&= f'(x_t)v_1 - \phi'_f(f(x_t))f'(x_t)v_1 + \phi'_f(f(x_t))f'(x_t)(\alpha v_1 + \gamma v_2) \\
&= [1 - \phi'_f(f(x_t))(1 - \alpha)]f'(x_t)v_1 + \phi'_f(f(x_t))f'(x_t)\gamma v_2. \tag{5.28}
\end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned}
J(s_t)v_2 &= [I - (I - C)M_t]D_tv_2 \\
&= [I - (I - C)M_t]g'(y_t)v_2 \\
&= g'(y_t)[v_2 - (I - C)M_tv_2] \\
&= g'(y_t)[v_2 - (I - C)\phi'_g(g(y_t))v_2] \\
&= g'(y_t)v_2 - \phi'_g(g(y_t))g'(y_t)v_2 + \phi'_g(g(y_t))g'(y_t)Cv_2 \\
&= g'(y_t)v_2 - \phi'_g(g(y_t))g'(y_t)v_2 + \phi'_g(g(y_t))g'(y_t)(\beta v_1 + \delta v_2) \\
&= \phi'_g(g(y_t))g'(y_t)\beta v_1 + [1 - \phi'_g(g(y_t))(1 - \delta)]g'(y_t)v_2. \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Por (5.28) e (5.29) temos,

$$J_{B_S}(s_t) = \begin{bmatrix} [1 - \phi'_f(f(x_t))(1 - \alpha)]f'(x_t) & \phi'_g(g(y_t))g'(y_t)\beta \\ \phi'_f(f(x_t))f'(x_t)\gamma & [1 - \phi'_g(g(y_t))(1 - \delta)]g'(y_t) \end{bmatrix}, \tag{5.30}$$

ou,

$$J_{B_S}(s_t) = [I - (I - \hat{C})\hat{M}_t]\hat{D}_t, \tag{5.31}$$

onde I é a matriz identidade de ordem 2×2 , e

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad \hat{M}_t = \begin{bmatrix} \phi'_f(f(x_t)) & 0 \\ 0 & \phi'_g(g(y_t)) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{D}_t = \begin{bmatrix} f'(x_t) & 0 \\ 0 & g'(y_t) \end{bmatrix}. \tag{5.32}$$

Agora, fazendo $J(s_t)u_i, i = 1, 2, \dots, k - 1$ e $J(s_t)w_i, i = 1, 2, \dots, n - k - 1$, vamos obter as colunas da matriz $J_{B_{S^\perp}}(s_t)$.

Para $i = 1, 2, \dots, k - 1$,

$$\begin{aligned}
J(s_t)u_i &= [I - (I - C)M_t]D_t u_i \\
&= [I - (I - C)M_t]f'(x_t)u_i \\
&= f'(x_t)[u_i - (I - C)M_t u_i] \\
&= f'(x_t)[u_i - (I - C)\phi'_f(f(x_t))u_i] \\
&= f'(x_t)u_i - \phi'_f(f(x_t))f'(x_t)u_i + \phi'_f(f(x_t))f'(x_t)Cu_i \\
&= f'(x_t)u_i - \phi'_f(f(x_t))f'(x_t)u_i + \\
&\quad + \phi'_f(f(x_t))f'(x_t) \left(\sum_{m=1}^{k-1} a_{m,i}u_m + \sum_{m=1}^{n-k-1} a_{k-1+m,i}w_m \right) \\
&= \phi'_f(f(x_t))a_{1,i}f'(x_t)u_1 + \dots + \phi'_f(f(x_t))a_{i-1,i}f'(x_t)u_{i-1} + \\
&\quad + [1 - \phi'_f(f(x_t))(1 - a_{i,i})]f'(x_t)u_i + \\
&\quad + \phi'_f(f(x_t))a_{i+1,i}f'(x_t)u_{i+1} + \dots + \phi'_f(f(x_t))a_{k-1,i}f'(x_t)u_{k-1} + \\
&\quad + \phi'_f(f(x_t))a_{k,i}f'(x_t)w_1 + \dots + \phi'_f(f(x_t))a_{n-2,i}f'(x_t)w_{n-k-1}. \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Em (5.33) obtemos $J(s_t)u_i$ como uma combinação linear dos elementos da base B_{S^\perp} , ou seja, para $i = 1, 2, \dots, k - 1$,

$$J(s_t)u_i = b_{1,i}u_1 + b_{2,i}u_2 + \dots + b_{k-1,i}u_{k-1} + b_{k,i}w_1 + \dots + b_{n-2,i}w_{n-k-1}, \quad (5.34)$$

onde os coeficientes são dados por

$$b_{m,i} = \begin{cases} \phi'_f(f(x_t))a_{m,i}f'(x_t), & m = 1, 2, \dots, n - 2 \text{ e } m \neq i \\ (1 - \phi'_f(f(x_t))(1 - a_{m,m}))f'(x_t), & m = i. \end{cases} \quad (5.35)$$

Da mesma forma, para $i = 1, \dots, n - k - 1$, temos

$$\begin{aligned}
J(s_t)w_i &= [I - (I - C)M_t]D_t w_i \\
&= [I - (I - C)M_t]g'(y_t)w_i \\
&= g'(y_t)[w_i - (I - C)M_t w_i] \\
&= g'(y_t)[w_i - (I - C)\phi'_g(g(y_t))w_i] \\
&= g'(y_t)w_i - \phi'_g(g(y_t))g'(y_t)w_i + \phi'_g(g(y_t))g'(y_t)Cw_i \\
&= g'(y_t)w_i - \phi'_g(g(y_t))g'(y_t)w_i + \\
&\quad + \phi'_g(g(y_t))g'(y_t) \left(\sum_{m=1}^{k-1} a_{m,k-1+i}u_m + \sum_{m=1}^{n-k-1} a_{k-1+m,i}w_m \right) \\
&= \phi'_g(g(y_t))a_{1,k-1+i}g'(y_t)u_1 + \dots + \phi'_g(g(y_t))a_{k-1,k-1+i}g'(y_t)u_{k-1} + \\
&\quad + \phi'_g(g(y_t))a_{k,k-1+i}g'(y_t)w_1 + \\
&\quad + \dots + [1 - \phi'_g(g(y_t))(1 - a_{k-1+i,k-1+i})]g'(y_t)w_i + \\
&\quad + \dots + \phi'_g(g(y_t))a_{n-2,k-1+i}g'(y_t)w_{n-k-1}. \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Portanto, para $i = 1, 2, \dots, n - k - 1$,

$$J(s_t)w_i = b_{1,k-1+i}u_1 + b_{2,k-1+i}u_2 + \dots + b_{k-1,k-1+i}u_{k-1} + b_{k,k-1+i}w_1 + \dots + b_{n-2,k-1+i}w_{n-k-1} \tag{5.37}$$

$$\Leftrightarrow b_{m,k-1+i} = \begin{cases} \phi'_g(g(y_t))a_{m,k-1+i}g'(y_t), & m = 1, 2, \dots, n - 2 \text{ e } m \neq k - 1 + i \\ (1 - \phi'_g(g(y_t))(1 - a_{m,m}))g'(y_t), & m = k - 1 + i. \end{cases} \tag{5.38}$$

Os coeficientes em (5.35) e (5.38) são as entradas da matriz $J_{B_{S^\perp}}(s_t)$, conforme [5]. Em consequência disso podemos escrever

$$J_{B_{S^\perp}}(s_t) = [I - (I - \tilde{C})\tilde{M}_t]\tilde{D}_t, \tag{5.39}$$

onde os coeficientes \tilde{c}_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, k - 2$ da matriz \tilde{C} são dados pelos $a_{m,i}$'s descritos em (5.22) e (5.24), ou seja, \tilde{C} é dada como em (4.46).

Além disso, I é a matriz identidade de ordem $n - 2 \times n - 2$,

$$\tilde{M}_t = \text{diag}(\overbrace{\phi'_f(f(x_t)), \dots, \phi'_f(f(x_t))}^{k-1}, \overbrace{\phi'_g(g(y_t)), \dots, \phi'_g(g(y_t))}^{n-k-1}) \quad (5.40)$$

e

$$\tilde{D}_t = \text{diag}(\overbrace{f'(x_t), \dots, f'(x_t)}^{k-1}, \overbrace{g'(y_t), \dots, g'(y_t)}^{n-k-1}). \quad (5.41)$$

Como já vimos, para haver estabilidade do estado parcialmente síncrono é necessário que as perturbações no subespaço S^\perp estejam tendendo a zero com o passar do tempo. Para verificar quando isso ocorre analisamos separadamente a evolução de um vetor perturbação $\Delta_t \in \mathbb{R}^{n-2}$ transversal à órbita sincronizada, ou seja, precisamos avaliar a equação da perturbação dada por $\Delta_{t+1} = J_{B_{S^\perp}}(s_t)\Delta_t$.

Sendo Δ_0 a perturbação inicial, obtemos

$$\Delta_t = J_{B_{S^\perp}}(s_{t-1})J_{B_{S^\perp}}(s_{t-2})\dots J_{B_{S^\perp}}(s_0)\Delta_0. \quad (5.42)$$

Olhando para (5.42) é possível perceber que a perturbação tenderá a zero para $t \rightarrow \infty$ se, e somente se,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \| P_{\tau-1}P_{\tau-2}\dots P_0 \|^{1/\tau} < 1, \quad (5.43)$$

onde $P_\tau = J_{B_{S^\perp}}(s_\tau)$, $\tau = 0, 1, 2, \dots$

Em (5.43) temos a definição do número de Lyapunov transversal (L_\perp), estabelecendo um critério para a análise de estabilidade do estado parcialmente sincronizado. De forma semelhante obtemos também o número de Lyapunov paralelo ($L_{//}$), conforme descreve o teorema a seguir.

Teorema 2. *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação que descreve a dinâmica da metapopulação heterogênea dada em (5.3). Supondo que a matriz de conectividade C satisfaz (4.11) e (4.23).*

1- *Existe uma base de \mathbb{R}^n , tal que, nesta base, C admite uma decomposição em*

blocos na forma $C = \hat{C} \oplus \tilde{C}$, onde \hat{C} é a matriz 2×2 descrita em (4.44), e \tilde{C} é a matriz $(n-2) \times (n-2)$ descrita em (4.46). Na mesma base, a matriz Jacobiana aplicada na trajetória parcialmente sincronizada $J(s_t) = DF(s_t)$, também admite uma decomposição em blocos, na forma $J(s_t) = J_{B_S}(s_t) \oplus J_{B_{S^\perp}}(s_t)$, onde

$$J_{B_S}(s_t) = [I - (I - \hat{C})\hat{M}_t]\hat{D}_t \quad e \quad J_{B_{S^\perp}}(s_t) = [I - (I - \tilde{C})\tilde{M}_t]\tilde{D}_t,$$

com

$$\begin{aligned} \hat{M}_t &= \text{diag}(\phi'_f(f(x_t)), \phi'_g(g(y_t))), \\ \tilde{M}_t &= \text{diag}(\overbrace{\phi'_f(f(x_t)), \dots, \phi'_f(f(x_t))}^{k-1}, \overbrace{\phi'_g(g(y_t)), \dots, \phi'_g(g(y_t))}^{n-k-1}), \\ \hat{D}_t &= \text{diag}(f'(x_t), g'(y_t)) \quad e \quad \tilde{D}_t = \text{diag}(\overbrace{f'(x_t), \dots, f'(x_t)}^{k-1}, \overbrace{g'(y_t), \dots, g'(y_t)}^{n-k-1}). \end{aligned}$$

2- Se A_s é um atrator em S e ρ uma medida ergódica F -invariante com suporte em A_s , então os números de Lyapunov transversal e paralelo de uma órbita em A_s são ρ -quase sempre constantes, e são dados respectivamente por

$$L_\perp = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| J_{B_{S^\perp}}(s_{\tau-1}) J_{B_{S^\perp}}(s_{\tau-2}) \dots J_{B_{S^\perp}}(s_1) J_{B_{S^\perp}}(s_0) \|^{1/\tau}$$

e

$$L_{//} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \| J_{B_S}(s_{\tau-1}) J_{B_S}(s_{\tau-2}) \dots J_{B_S}(s_1) J_{B_S}(s_0) \|^{1/\tau}.$$

5.2 Resultados Numéricos

A apresentação dos resultados numéricos está dividida em dois casos. No primeiro caso consideramos os efeitos da taxa de migração dependente da densidade onde as funções de migração μ_f e μ_g são iguais, ou seja,

$$\mu_f(x) = \frac{h_f}{1 + e^{b_f(1-x)}} = \frac{h_g}{1 + e^{b_g(1-x)}} = \mu_g(x), \quad (5.44)$$

tendo portanto $h_f = h_g$ e $b_f = b_g$, podemos escrever simplesmente

$$\mu(x) = \frac{h}{1 + e^{b(1-x)}}. \quad (5.45)$$

No segundo caso abordamos os efeitos de $h_f \neq h_g$, $b_f \neq b_g$ e assim $\mu_f \neq \mu_g$.

Em ambos os casos fazemos uma comparação entre os resultados obtidos considerando-se que a dispersão pode ocorrer pelo excesso de indivíduos que provoca a escassez de recursos naturais (movimento antiagregação, $b > 0$) ou pela escassez de indivíduos que tentam se agrupar na dificuldade de encontrar parceiros (movimento de agregação, $b < 0$) [23]. Também comparamos os resultados para os diferentes tipos de redes conectivas.

Ademais, continuamos utilizando a dinâmica local de Ricker, com os parâmetros r_f e r_g variando dentro do intervalo $[2, 5; 4]$, sendo $f(x) = xe^{r_f(1-x)}$ e $g(x) = xe^{r_g(1-x)}$.

Como h_f e h_g representam taxas máximas de migração, seus valores podem variar dentro do intervalo $[0; 1]$.

Trabalhamos com redes em forma de anéis cíclicos onde um total de vinte sítios encontram-se interconectados de acordo com as redes global, global ponderada, bipartida, $1/2$ e grupo preferencial, sendo $k = 10$.

Desta forma, apresentamos, a seguir, as simulações numéricas para o modelo metapopulacional com taxa de migração dependente da densidade.

5.2.1 Caso em que $\mu_f(x) = \mu_g(x)$

Para os resultados numéricos obtidos nesta seção, consideramos que em ambos os grupos de sítios a função de migração é a mesma e dada conforme (5.45).

Para enfatizar a influência dos parâmetros b e h na formação de *clusters*, calculamos o número de Lyapunov transversal em função de $r_g \in [2, 5; 4, 0]$, para valores de b iguais a $-100, -1, 1$ e 100 , de h iguais a $0, 1$ e $0, 9$, mantendo

$r_f = 2,8$ fixo. Lembrando que tomar valores grandes, em módulo, para o parâmetro b (como $b = 100$ por exemplo), tem por objetivo transformar a função $\mu(x)$ em uma função degrau, conforme explicado em detalhes no Capítulo 2.

Analisando as figuras apresentadas a seguir, iniciamos descrevendo as semelhanças encontradas nas diferentes redes, exceto na rede $1/2$. De modo geral, quando $h = 0,1$ e $b = 1$ ou $h = 0,1$ e $b = 100$ (Figuras 5.1, 5.3, 5.5, 5.7 e 5.11), temos valores do parâmetro r_g para os quais existe sincronização parcial e também valores para os quais não existe, estes por sua vez são em menor número e normalmente concentrados nos valores menores de r_g (apenas a rede bipartida, Figura 5.7, é uma exceção ao último fato comentado).

Uma semelhança compartilhada por todas as redes é o fato de praticamente não haver possibilidade de sincronização quando tomamos $h = 0,1$ e $b = -100$ (Figuras 5.1, 5.3, 5.5, 5.7, 5.9 e 5.11). Podemos concluir aqui que uma migração pouco intensa entre os sítios vizinhos motivada pela procura de parceiros não é uma situação favorável à formação de *clusters*, independentemente da forma de conexão entre os sítios e dos valores de r_g . Contrária a esta situação temos uma dispersão intensa causada pela competição entre os indivíduos e pela procura por recursos. Esta conclusão é obtida pelo fato de haver sincronização parcial para todas as redes e todos os valores do parâmetro r_g (Figuras 5.2, 5.4, 5.6, 5.8, 5.10 e 5.12) quando tomamos para as simulações numéricas $h = 0,9$ e $b = 1$ ou, com exceção da rede $1/2$, $h = 0,9$ e $b = 100$.

Temos apenas alguns casos de diferenças acentuadas nos resultados quando alternamos entre $b = 1$ e $b = 100$ ou $b = -1$ e $b = -100$. Um deles ocorre de forma semelhante nas redes global e global ponderada para $a = 0,5$, Figuras 5.2 e 5.6, respectivamente. Neste caso, quando $h = 0,9$ e $b = -1$ temos uma quantidade considerável de valores de r_g para os quais $L_{\perp} > 1$. Já quando $b = -100$ obtemos apenas $L_{\perp} < 1$ para todos os valores de r_g .

O caso mais notável provavelmente seja o ocorrido com a rede 1/2, Figura 5.10. Nele, para $h = 0,9$ e $b = 1$ temos $L_{\perp} < 1$ para todos os valores de r_g . Quando trocamos $b = 1$ para $b = 100$ obtemos $L_{\perp} > 1$ para a maior parte dos valores de r_g .

Por último, temos uma diferença ocorrida para a rede grupo preferencial, também quando $h = 0,9$, Figura 5.12. Nesta simulação numérica, para $b = -1$ a sincronização parcial se dá para os valores maiores do parâmetro r_g e para $b = -100$ a sincronização ocorre nos valores menores de r_g .

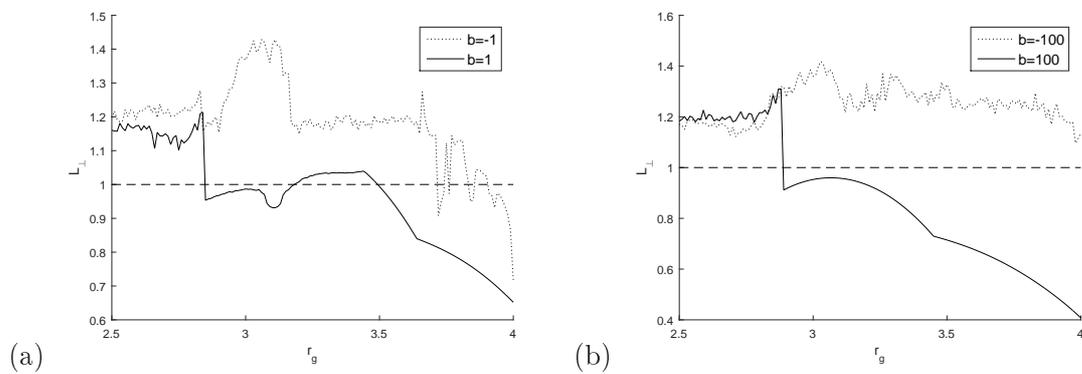


Figura 5.1: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$.

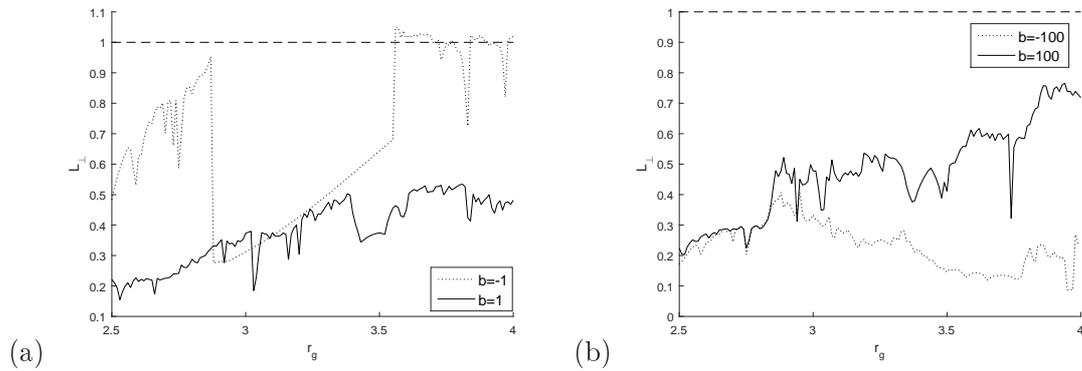


Figura 5.2: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 9$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$.

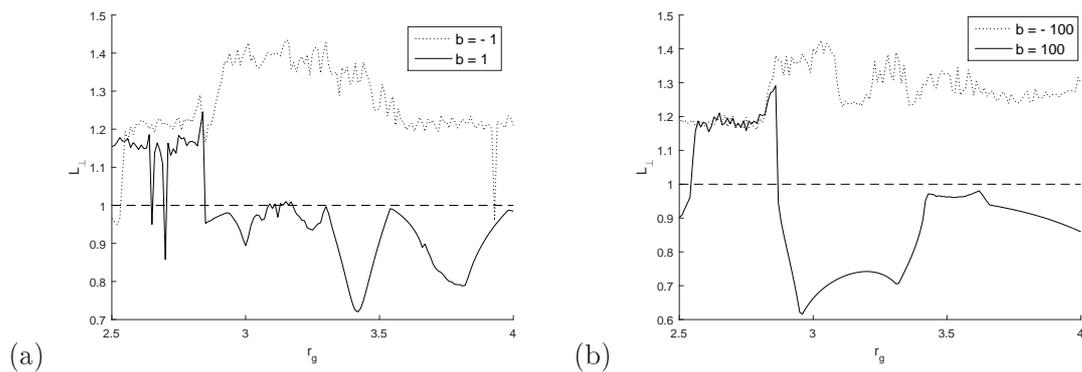


Figura 5.3: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 2$) em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$.

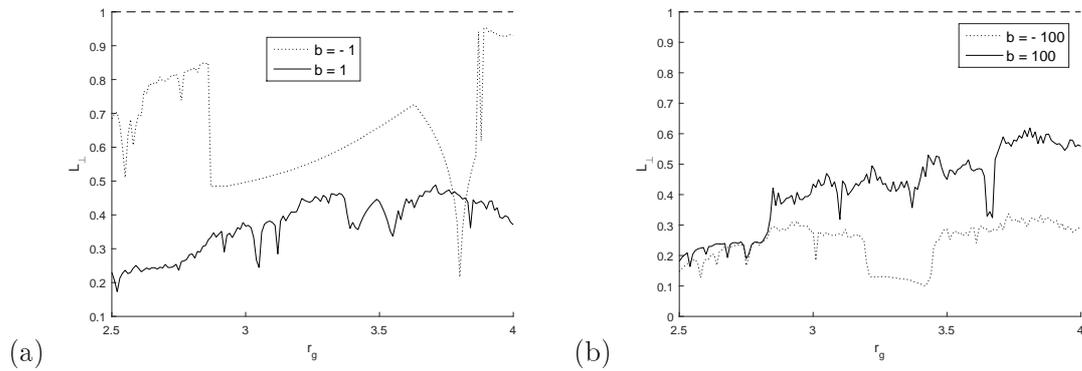


Figura 5.4: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 2$) em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 9$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$.

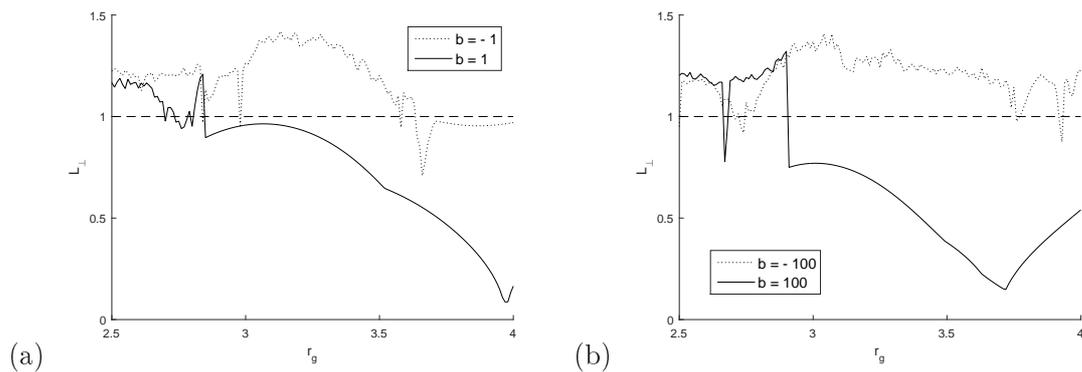


Figura 5.5: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 0, 5$) em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$.

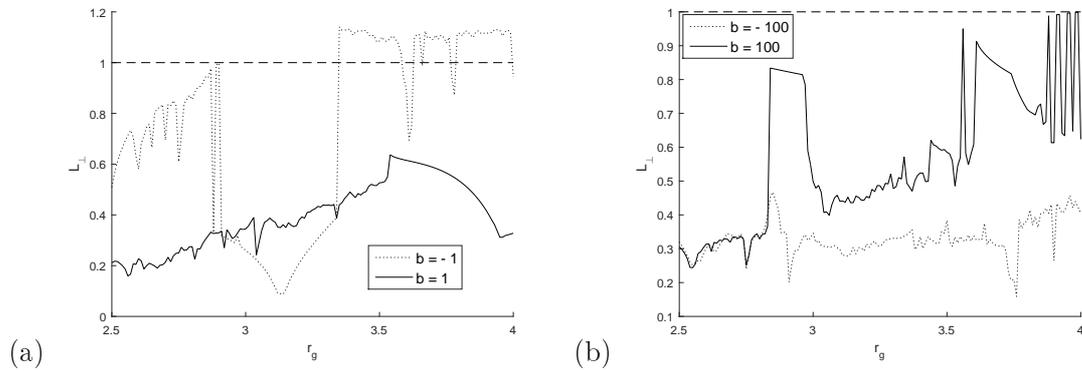


Figura 5.6: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 0,5$) em função do parâmetro $r_g \in [2,5;4,0]$ e $r_f = 2,8$, $h = 0,9$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$.

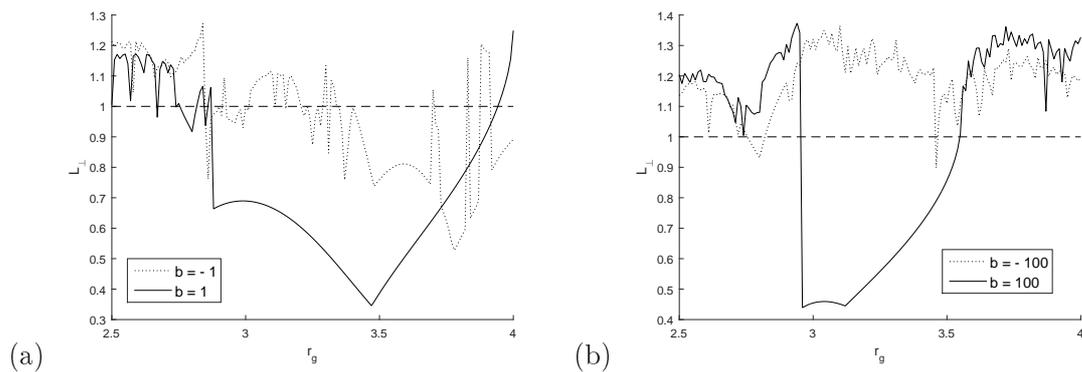


Figura 5.7: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede bipartida em função do parâmetro $r_g \in [2,5;4,0]$ e $r_f = 2,8$, $h = 0,1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$.

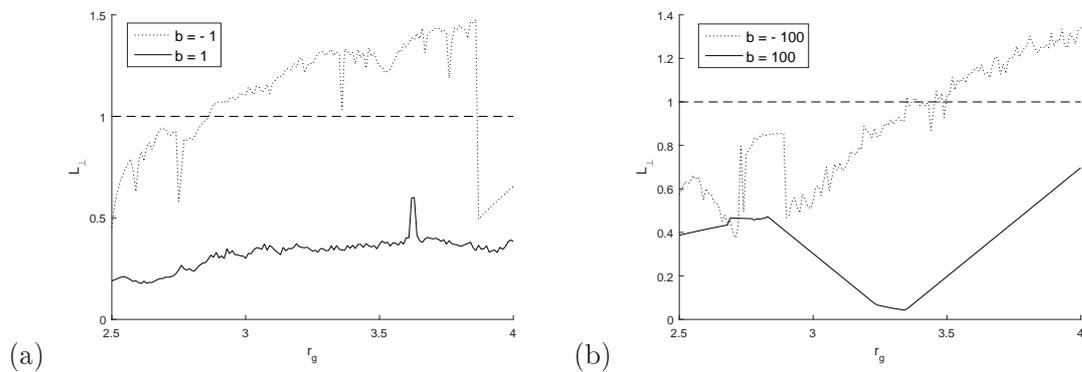


Figura 5.8: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede bipartida em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 9$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$.

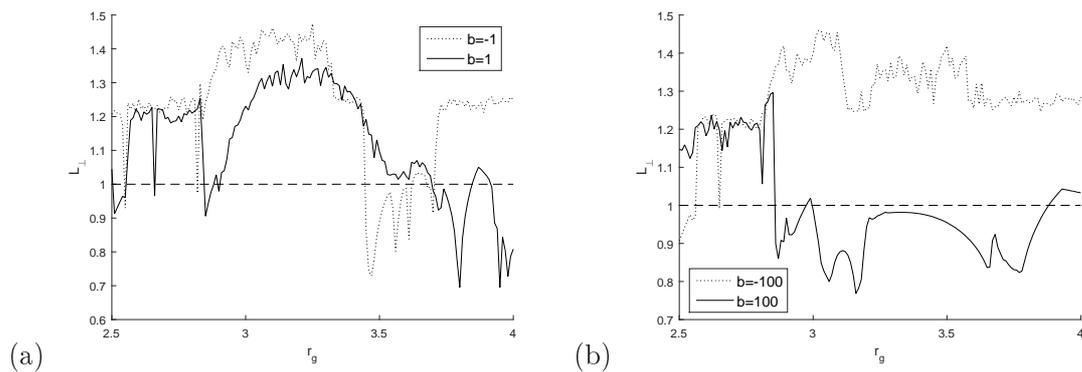


Figura 5.9: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede 1/2 em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$.

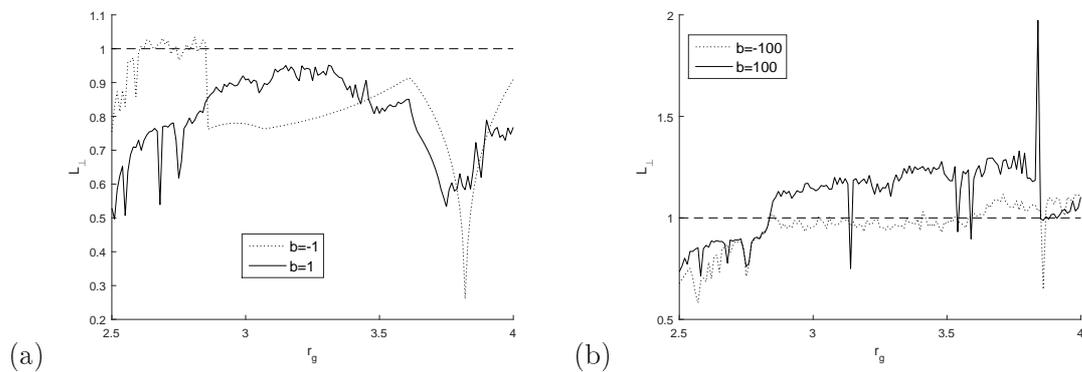


Figura 5.10: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede 1/2 em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 9$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$.

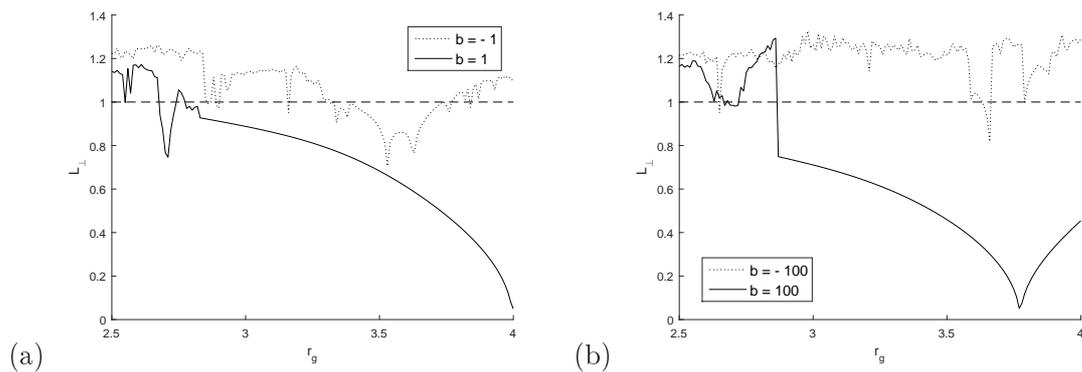


Figura 5.11: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede grupo preferencial em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$.

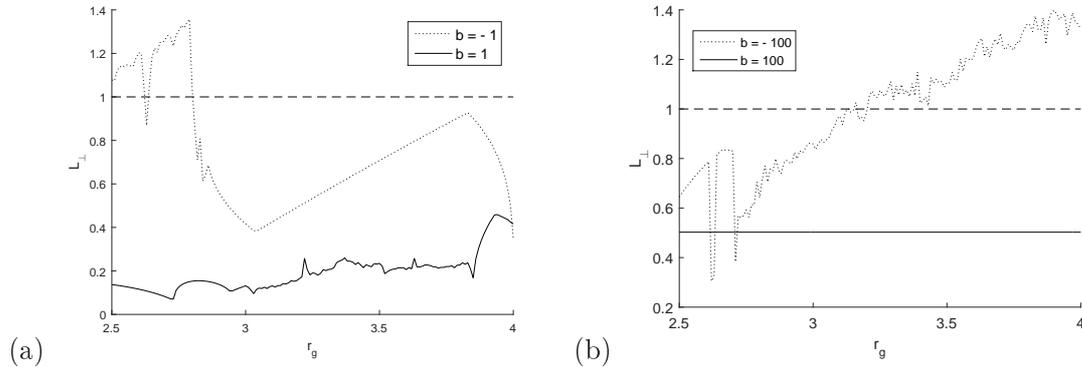


Figura 5.12: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede grupo preferencial em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $h = 0, 9$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b = -1$ e $b = 1$ (b) $b = -100$ e $b = 100$.

5.2.2 Caso em que $\mu_f(x) \neq \mu_g(x)$

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos quando consideramos $\mu_f(x) \neq \mu_g(x)$, ou seja,

$$\mu_f(x) = \frac{h_f}{1 + e^{b_f(1-x)}} \neq \frac{h_g}{1 + e^{b_g(1-x)}} = \mu_g(x). \quad (5.46)$$

5.2.2.1 Resultados para $h_f \neq h_g$ e $b_f = b_g$

Para valores do parâmetro b iguais a -1 e 1 calculamos o número de Lyapunov transversal em função de r_g , quando $r_f = 2, 8$, $h_f = 0$ e $h_g = 1$ ou $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$. O primeiro caso, $h_f = 0$ e $h_g = 1$, descreve a situação dada por uma metapopulação onde em um grupo de sítios não há migração, enquanto que no outro grupo a migração pode atingir a taxa máxima, ou seja, $h_g = 1$. No segundo caso, o grupo de sítios para o qual anteriormente não havia migração passa a dispersar com pouca intensidade, ou seja, h_f passa de 0 para $0, 1$. No outro grupo apenas diminuimos um pouco a taxa máxima de migração, passando h_g de 1 para $0, 9$.

Para todas as simulações numéricas descritas pelas Figuras 5.13 a 5.18, a migração dependente da densidade devido à competição e à procura por recursos ($b > 0$) é mais favorável à estabilidade do estado parcialmente síncrono que a migração dependente da densidade causada pela busca por parceiros ($b < 0$).

Com exceção da rede global ponderada, $a = 2$ (Figura 5.14), quando $b < 0$ temos um aumento muito significativo de valores do parâmetro r_g para os quais ocorre o estado parcialmente sincronizado, alterando os parâmetros $h_f = 0$ e $h_g = 1$ para $h_f = 0,1$ e $h_g = 0,9$. Isso mostra que a formação de *clusters* na situação em que $b < 0$ é muito sensível às mudanças na taxa máxima de migração. A alteração, de inexistência de migração em um grupo de sítios, para o estado onde a migração ocorre em intensidade bastante baixa, já é suficiente para aumentar muito a possibilidade de sincronização.

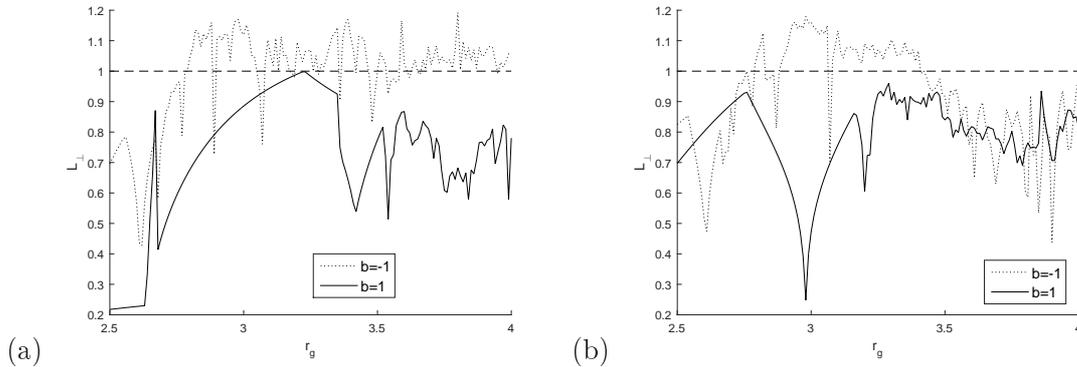


Figura 5.13: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $b_f = b_g = 1$ e $b_f = b_g = -1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $h_f = 0$ e $h_g = 1$ (b) $h_f = 0,1$ e $h_g = 0,9$.

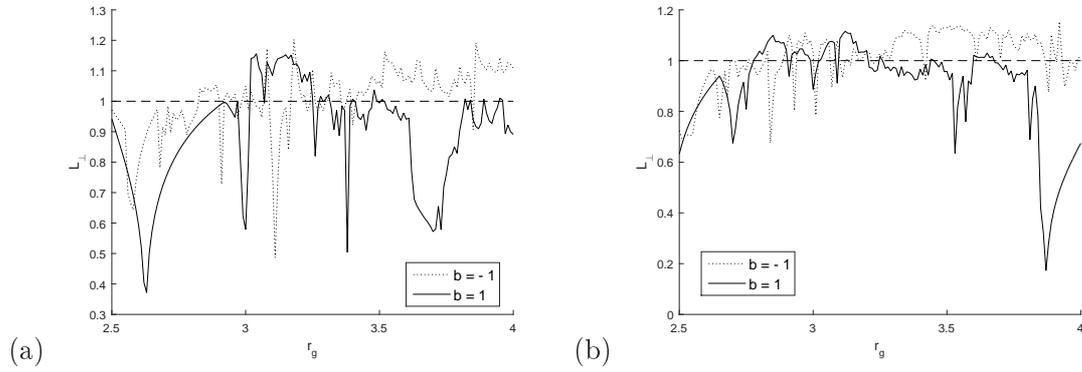


Figura 5.14: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 2$) em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $b_f = b_g = 1$ e $b_f = b_g = -1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $h_f = 0$ e $h_g = 1$ (b) $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$.

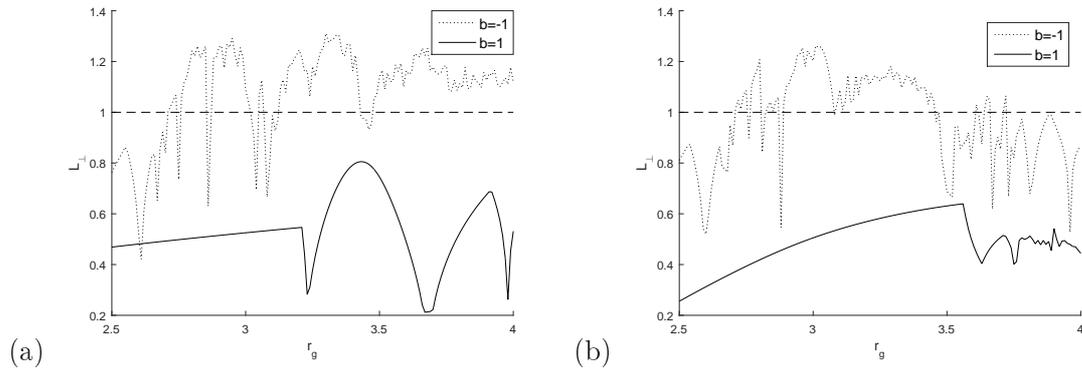


Figura 5.15: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 0, 5$) em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $b_f = b_g = 1$ e $b_f = b_g = -1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $h_f = 0$ e $h_g = 1$ (b) $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$.

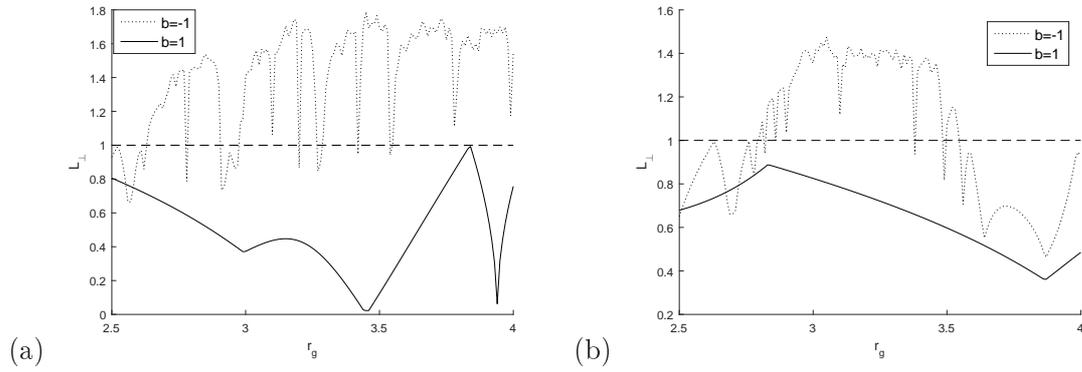


Figura 5.16: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede bipartida em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $b_f = b_g = 1$ e $b_f = b_g = -1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $h_f = 0$ e $h_g = 1$ (b) $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$.

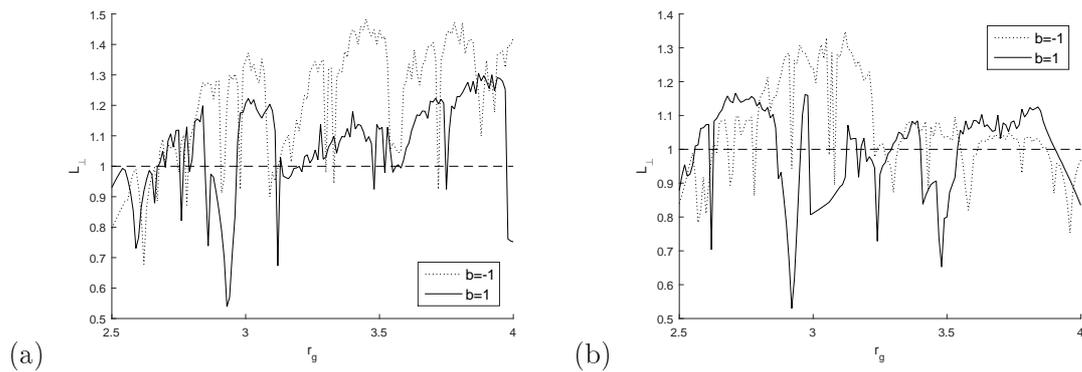


Figura 5.17: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede 1/2 em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $b_f = b_g = 1$ e $b_f = b_g = -1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $h_f = 0$ e $h_g = 1$ (b) $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$.

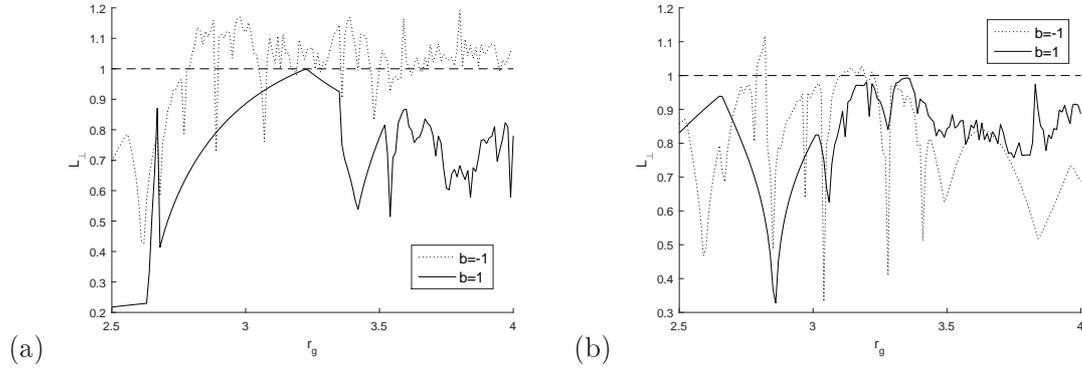


Figura 5.18: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede grupo preferencial em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $b_f = b_g = 1$ e $b_f = b_g = -1$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $h_f = 0$ e $h_g = 1$ (b) $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$.

5.2.2.2 Resultados para $h_f \neq h_g$ e $b_f \neq b_g$

Aqui apresentamos os resultados das simulações numéricas considerando que em cada grupo de sítios a função de migração é composta por parâmetros h e b diferentes do outro grupo, ou seja, temos $h_f \neq h_g$ e $b_f \neq b_g$.

Para cada uma das redes global, bipartida, $1/2$ e grupo preferencial, fazemos as seguintes combinações de parâmetros: para $b_f = 1$, $b_g = 100$ e $b_f = -1$, $b_g = -100$ tomamos primeiramente $h_f = 0, 1$ e $h_g = 0, 9$ e depois invertemos os valores de h fazendo $h_f = 0, 9$ e $h_g = 0, 1$.

De modo geral não ocorrem grandes diferenças (do tipo, em um caso ocorre sincronização e no outro caso não ocorre) nos resultados das simulações numéricas quando alternamos entre os parâmetros $h_f = 0, 1$; $h_g = 0, 9$ e $h_f = 0, 9$; $h_g = 0, 1$, tanto para $b > 0$ como para $b < 0$ (Figuras 5.19 a 5.22).

As diferenças mais notáveis ocorrem em relação à variação do parâmetro b entre positivo e negativo. Em exceção da rede $1/2$ (Figura 5.21), para $b > 0$ temos

sincronização parcial para todos os valores do parâmetro r_g . No caso em que $b < 0$, temos mais valores de r_g para os quais não ocorre sincronização parcial, do que valores para os quais $L_{\perp} < 1$.

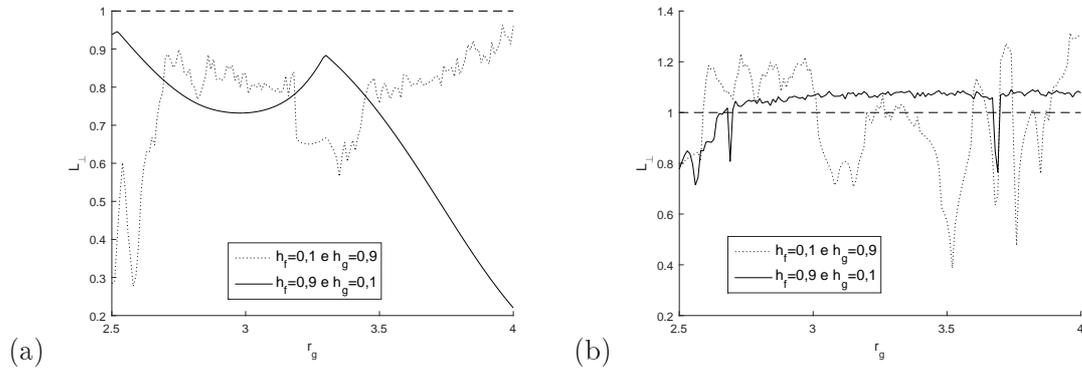


Figura 5.19: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b_f = 1$, $b_g = 100$ (b) $b_f = -1$, $b_g = -100$.

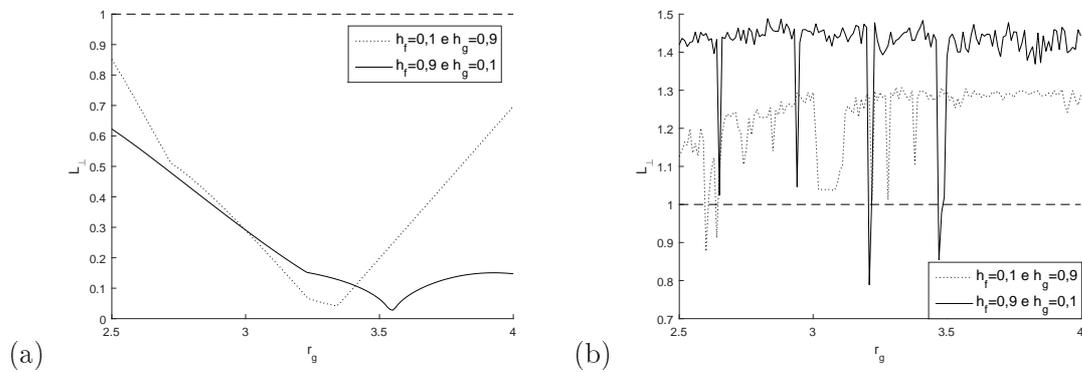


Figura 5.20: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede bipartida em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b_f = 1$, $b_g = 100$ (b) $b_f = -1$, $b_g = -100$.

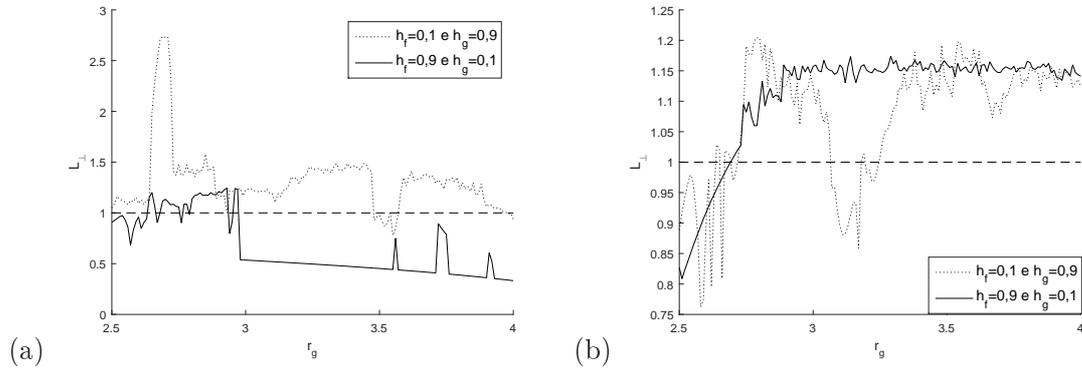


Figura 5.21: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede 1/2 em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b_f = 1$, $b_g = 100$ (b) $b_f = -1$, $b_g = -100$.

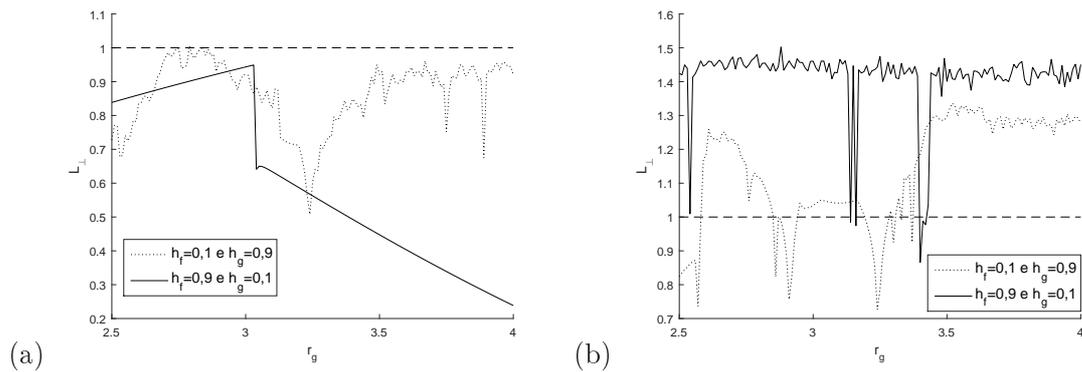


Figura 5.22: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede grupo preferencial em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$. (a) $b_f = 1$, $b_g = 100$ (b) $b_f = -1$, $b_g = -100$.

5.3 Conclusões do Capítulo

Neste capítulo construímos um modelo metapopulacional heterogêneo com taxa de migração dependente da densidade, obtemos a solução parcialmente sincronizada e analisamos sua estabilidade.

Além das conclusões já descritas no decorrer do capítulo, algumas são descritas a seguir.

Em relação à influência do parâmetro h sobre a sincronização, podemos concluir que, para a maior parte dos casos analisados, a sincronização é mais propensa a ocorrer quando h representa a existência de migração intensa entre os sítios, ou seja, quando comparamos os resultados de $h = 0,1$ e $h = 0,9$, a probabilidade de ocorrer sincronização parcial é maior para $h = 0,9$, na maior parte dos casos.

Ressaltando agora a influência do parâmetro b , é possível perceber, na maioria dos casos, que o estado parcialmente sincronizado tem maior chance de ocorrer para $b > 0$ do que para $b < 0$. Ainda, para $b < 0$ os resultados são mais sensíveis à alteração do parâmetro h que para $b > 0$.

A rede $1/2$ é a rede que possui maior diferença de comportamento em relação às outras redes, que normalmente possuem várias conclusões comuns.

6 MODELO COM TAXA DE MIGRAÇÃO CONSTANTE VERSUS MODELO COM TAXA DE MIGRAÇÃO DEPENDENTE DA DENSIDADE

Neste capítulo fazemos uma comparação a partir de resultados numéricos obtidos para o modelo com taxa de migração constante e para o modelo com taxa de migração dependente da densidade, com o objetivo de verificar qual dos modelos é mais propenso a ocorrência da sincronização parcial, para alguns parâmetros escolhidos.

Para tal, em ambos os modelos calculamos o número de Lyapunov transversal em função de valores de r_g que variam de 2,5 até 4. Além disso, tomamos $r_f = 2,8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0,1$, $\mu_g = h_g = 0,9$, $b = -1$ e $b = 1$. Ou seja, para possibilitar a comparação, trabalhamos com a taxa de migração constante igual à taxa máxima de migração no modelo com dispersão dependente da densidade. A comparação é feita para ambos os casos em que no modelo com taxa de migração dependente da densidade temos $b < 0$ e $b > 0$.

De acordo com os resultados gráficos das simulações apresentados a seguir, uma diferença bem marcante entre os modelos é que, para os parâmetros escolhidos, nas redes global (Figura 6.1), global ponderada (Figuras 6.2 e 6.3), bipartida (Figura 6.4) e grupo preferencial (Figura 6.6), obtemos sincronização parcial para todos os valores dos parâmetros r_g quando simulamos o modelo com taxa de migração constante. O mesmo resultado não é obtido para o modelo com taxa de migração dependente da densidade. Reafirmamos também uma conclusão já obtidas nas simulações do capítulo anterior, de que temos mais valores do parâmetro r_g para os quais a sincronização parcial existe quando trabalhamos com $b > 0$.

A única exceção a estes resultados é a rede 1/2 (Figura 6.5), em que o modelo com taxa de migração constante apresentou alguns poucos valores de r_g para os quais a solução parcialmente sincronizada é instável, ainda assim ela compartilha a conclusão de que para este modelo a probabilidade de haver sincronização parcial é muito maior. Em relação aos casos em que $b > 0$ e $b < 0$ as conclusões são semelhantes às das outras redes, porém, o que difere é que em ambos os casos temos muito mais valores de r_g para os quais não há sincronização parcial.

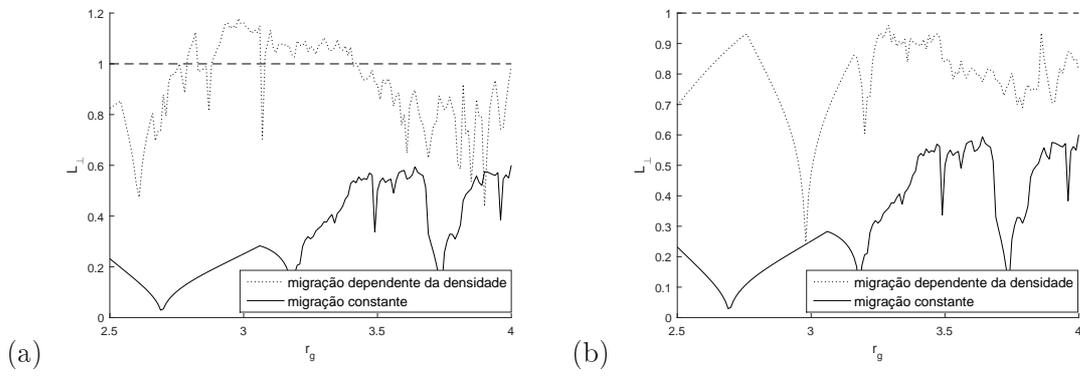


Figura 6.1: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0, 1$ e $\mu_g = h_g = 0, 9$. (a) $b = -1$ (b) $b = 1$.

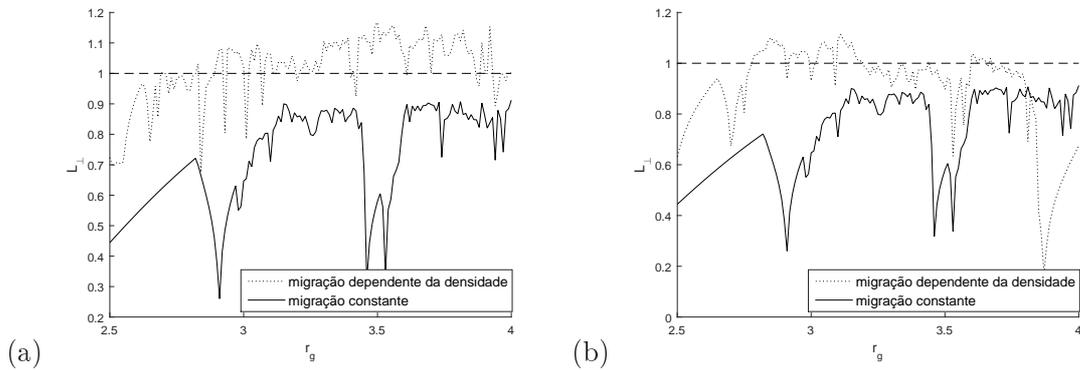


Figura 6.2: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 2$) em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0, 1$ e $\mu_g = h_g = 0, 9$. (a) $b = -1$ (b) $b = 1$.

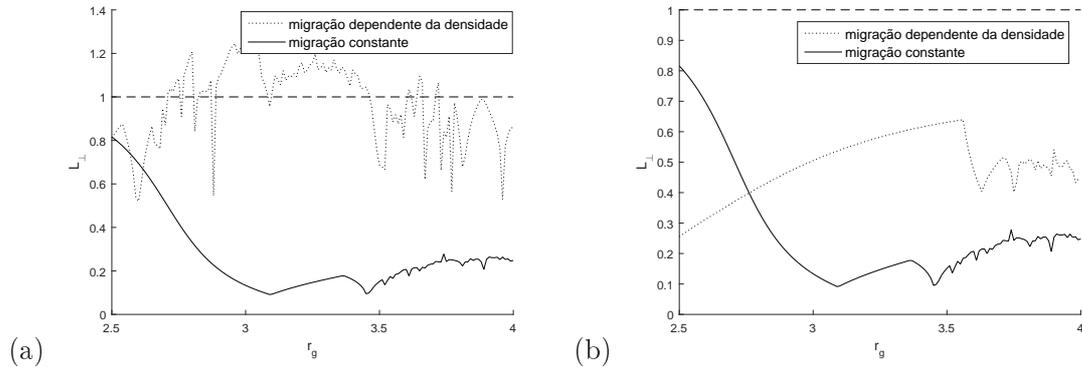


Figura 6.3: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede global ponderada (com $a = 0,5$) em função do parâmetro $r_g \in [2,5; 4,0]$ e $r_f = 2,8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0,1$ e $\mu_g = h_g = 0,9$. (a) $b = -1$ (b) $b = 1$.

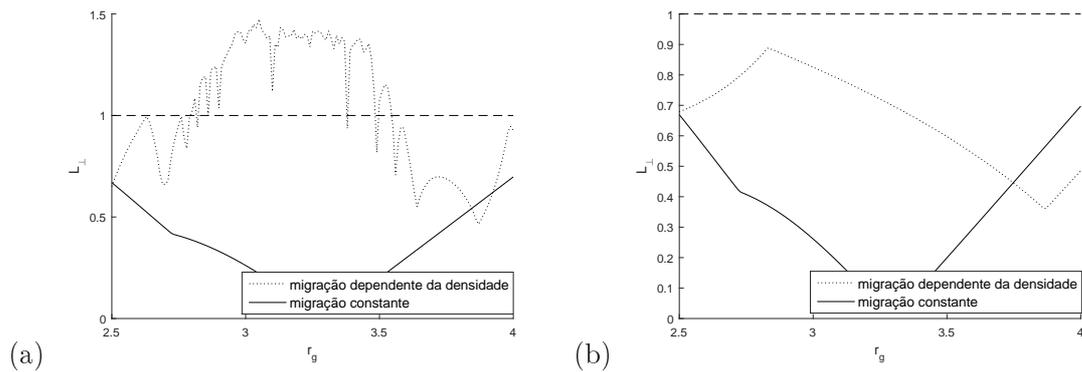


Figura 6.4: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede bipartida em função do parâmetro $r_g \in [2,5; 4,0]$ e $r_f = 2,8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0,1$ e $\mu_g = h_g = 0,9$. (a) $b = -1$ (b) $b = 1$.

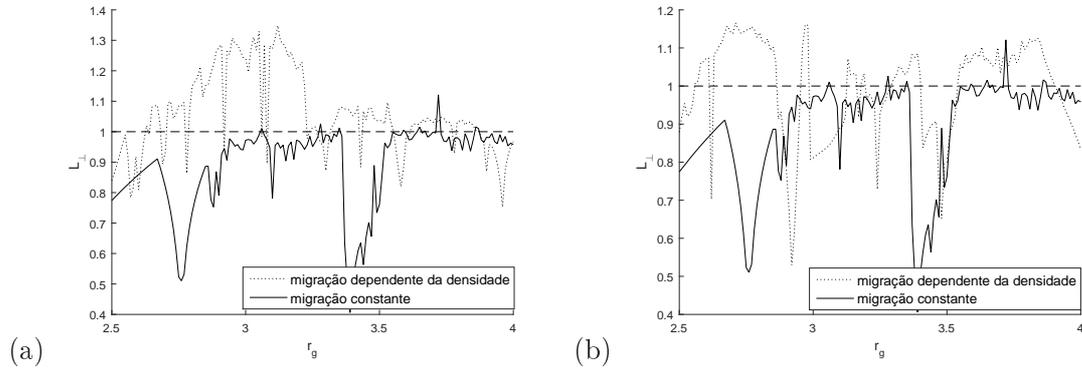


Figura 6.5: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede 1/2 em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0, 1$ e $\mu_g = h_g = 0, 9$. (a) $b = -1$ (b) $b = 1$.

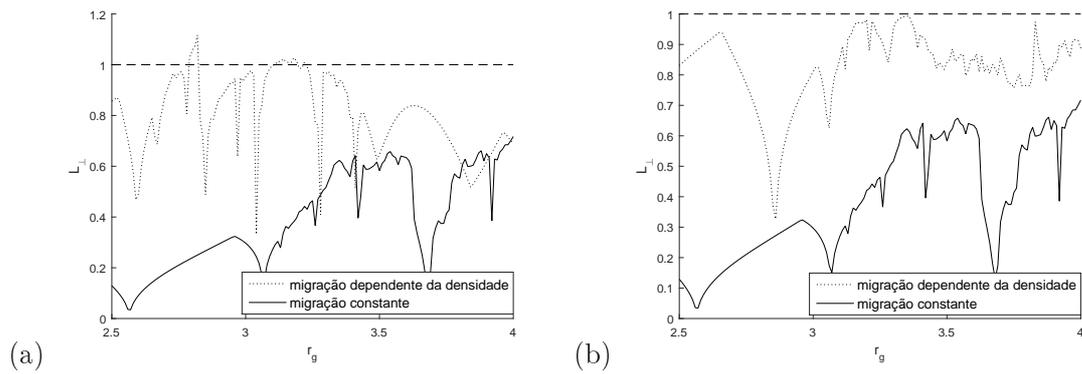


Figura 6.6: Número de Lyapunov transversal (L_{\perp}) para a rede grupo preferencial em função do parâmetro $r_g \in [2, 5; 4, 0]$ e $r_f = 2, 8$, $n = 20$, $k = 10$, $\mu_f = h_f = 0, 1$ e $\mu_g = h_g = 0, 9$. (a) $b = -1$ (b) $b = 1$.

7 CONCLUSÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho desenvolvemos detalhadamente a construção de dois modelos metapopulacionais heterogêneos, um deles com taxa de migração constante e o outro com taxa de migração dependente da densidade.

Combinando métodos numéricos e analíticos, provamos a existência do estado parcialmente sincronizado para ambos os modelos propostos.

Além disso, construímos um critério para a análise de estabilidade da solução parcialmente síncrona, dado pelo número de Lyapunov transversal, que garante a formação de *clusters* quando $L_{\perp} < 1$.

Determinamos a estrutura dos *clusters* e descrevemos como ocorre a dinâmica dentro de cada um deles, que é dada através do cálculo dos números de Lyapunov transversal e paralelo.

Comparamos os modelos desenvolvidos concluindo que a sincronização parcial é mais propensa a ocorrer no modelo com taxa de migração constante, quando comparado ao modelo com taxa de migração dependente da densidade.

Um das possibilidades acerca da continuação deste trabalho é a generalização dos resultados obtidos para n *clusters*, uma vez que aqui trabalhamos apenas com dois *clusters*. Também existe a ideia de trabalhar mais casos na comparação entre os dois modelos metapopulacionais desenvolvidos.

Referências Bibliográficas

- [1] ALLEN, J., SCHAFFER, W., AND ROSKO, D. Chaos reduces species extinction by amplifying local population noise. *Nature* 364, 6434 (1993), 229–232.
- [2] ALLEN, L. J. S. *An Introduction to Mathematical Biology*. Pearson Education, New Jersey, 2007.
- [3] ALLIGOOD, K. T., SAUER, T. D., AND YORKE, J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, New York, 1996.
- [4] BARRIONUEVO, J. A., AND SILVA, J. A. Stability and synchronism of certain coupled dynamical systems. *Journal on Mathematical Analysis* 40, 3 (2008), 939–951.
- [5] COELHO, F. U., AND LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. Edusp, 2005.
- [6] DOEBELI, M. Dispersal and dynamics. *Theoretical population biology* 47, 1 (1995), 82–106.
- [7] EARN, D. J., LEVIN, S. A., AND ROHANI, P. Coherence and Conservation. *Science* 290, 5495 (2000), 1360–1364.
- [8] ECKMANN, J. P., AND RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics* 57, 3 (1985), 617–656.
- [9] EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical models in biology*. Random House, New York, 1988.
- [10] GENERALI, D. T. Sincronização em metapopulações heterogêneas. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2010.

- [11] GOLUB, G. H., AND VAN LOAN, C. F. *Matrix Computations*, vol. 3. JHU Press, 2012.
- [12] GYLLENBERG, M., SÖDERBACKA, G., AND ERICSSON, S. Does migration stabilize local population dynamics? analysis of a discrete metapopulation model. *Mathematical Biosciences* 118, 1 (1993), 25–49.
- [13] HANSKI, I. Metapopulation dynamics. *Nature* 396, 6706 (1998), 41–49.
- [14] HANSKI, I., AND GILPIN, M. Metapopulation dynamics: brief history and conceptual domain. *Biological journal of the Linnean Society* 42, 1-2 (1991), 3–16.
- [15] HASSELL, M. Density-dependence in single-species populations. *The Journal of animal ecology* (1975), 283–295.
- [16] HEINO, M., KAITALA, V., RANTA, E., AND LINDSTRÖM, J. Synchronous dynamics and rates of extinction in spatially structured populations. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences* 264 (1997), 481–486.
- [17] HOLLAND, M. D., AND HASTINGS, A. Strong effect of dispersal network structure on ecological dynamics. *Nature* 456 (2008), 792–794.
- [18] KANEKO, K. Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 41, 2 (1990), 137–172.
- [19] KANEKO, K., AND TSUDA, I. *Complex systems: chaos and beyond*. Springer, Heidelberg, 2001.
- [20] LIEBHOLD, A., KOENIG, W. D., AND BJØRNSTAD, O. N. Spatial synchrony in population dynamics. *Annu. Rev. Ecol. Evol. Syst.* 35 (2004), 467–490.

- [21] MCGRAW, P. N., AND MENZINGER, M. Clustering and the synchronization of oscillator networks. *Physical Review E* 72, 1 (2005), 015101.
- [22] MURRAY, J. D. *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [23] REMPEL, A. L. Instabilidade de Turing e sincronismo em redes de populações acopladas. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2007.
- [24] ROHANI, P., MAY, R. M., AND HASSELL, M. P. Metapopulation and equilibrium stability: the effects of spatial structure. *Journal of Theoretical Biology* 181, 2 (1996), 97–109.
- [25] RUXTON, G. D. Density-dependent migration and stability in a system of linked populations. *Bulletin of Mathematical Biology* 58, 4 (1996), 643–660.
- [26] SILVA, J. A., BARRIONUEVO, J. A., AND GIORDANI, F. T. Synchronism in population networks with non linear coupling. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 11, 2 (2010), 1005–1016.
- [27] SILVA, J. A. L. Cluster formation in a heterogeneous metapopulation model. *Journal of Mathematical Biology* 72, 6 (2015), 1531–1553.
- [28] SILVA, J. A. L., CASTRO, M. L., AND JUSTO, D. A. R. Stability in a Metapopulation Model with Density-Dependent Dispersal. *Bulletin of Mathematical Biology* 63, 3 (2001), 485–505.
- [29] SILVA, J. A. L., DE CASTRO, M. L., AND JUSTO, D. A. R. Synchronism in a metapopulation model. *Bulletin of mathematical biology* 62, 2 (2000), 337–349.
- [30] STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview press, 1994.

- [31] TABOROV, A., MAISTRENKO, Y. L., AND MOSEKILDE, E. Partial synchronization in a system of coupled logistic maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 10, 5 (2000), 1051–1066.
- [32] TAYLOR, A. D. Metapopulations, dispersal, and predator-prey dynamics: an overview. *Ecology* 71, 2 (1990), 429–433.
- [33] YANCHUK, S., MAISTRENKO, Y., AND MOSEKILDE, E. Partial synchronization and clustering in a system of diffusively coupled chaotic oscillators. *Mathematics and Computers in Simulation* 54, 6 (2001), 491–508.
- [34] YLIKARJULA, J., ALAJA, S., LAAKSO, J., AND TESAR, D. Effects of patch number and dispersal patterns on population dynamics and synchrony. *Journal of Theoretical Biology* 207, 3 (2000), 377–387.