UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

UMA POSSÍVEL INSERÇÃO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NO ENSINO MÉDIO

Marcelo Carvalho Antunes

PORTO ALEGRE

2009/02

UMA POSSÍVEL INSERÇÃO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr.Vilmar Trevisan

Marcelo Carvalho Antunes

PORTO ALEGRE

2009/02

UMA POSSÍVEL INSERÇÃO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Comissão examinadora:

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

Prof. Dr. Samuel Edmundo Lopez Bello
FACULDADE DE EDUCAÇÃO – UFRGS

Porto Alegre, 18 de dezembro de 2009

" Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta."

Gauss.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Vilmar Trevisan pela orientação deste trabalho e pelo incentivo com a matemática.

À Profa. Dra. Maria Cristina Varriale e ao Prof. Dr. Samuel Edmundo Lopez Bello, por aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela oportunidade de formação gratuita e de qualidade.

Aos professores Claus Doering, pelo entusiasmo que passou no estudo da matemática e Cydara C. Ripoll, pela exigência e preocupação com nossa formação nas disciplinas de matemática.

Aos meus colegas Bruno e Danielle pelo incentivo e companheirismo ao longo do curso.

À minha mãe, meu irmão e meu pai, que tornam todos os dias de minha vida possíveis.

Resumo:

Este trabalho pretende discutir a possibilidade de introduzir as Geometrias Não-Euclidianas no currículo escolar do Ensino Médio. Para isto, procuramos lembrar a forma e estrutura lógica que Euclides tentou dar à Geometria e em seguida apresentamos um texto introdutório sobre duas daquelas Geometrias: Geometria Hiperbólica e Elíptica, orbitando em torno do 5º Postulado de Euclides. Como produto final do trabalho, realizamos uma oficina em sala de aula sobre a Geometria Elíptica e analisamos algumas produções dos alunos.

Palavras-chave: Geometrias Não-Euclidianas; Geometria Hiperbólica ; Geometria Elíptica; 5º Postulado.

Abstract:

This work intends to discuss the possibility of introducing Non Euclidean Geometries in the high school's curriculum. For this, we recall the form and logical structure that Euclid tried to give to Geometry and then present an introductory text on two of these Geometries: Hyperbolic and Elliptical Geometry, orbiting around the 5th postulate of Euclid. As a final product of this work, a classroom workshop on Elliptic Geometry was implemented and some productions of the students were analyzed.

Keywords: Non Euclidean Geometries; Hyperbolic Geometry; Elliptc Geometry; 5th postulate of Euclid.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esse trabalho terá por objetivo investigar a possibilidade de inserir as Geometrias Não-Euclidianas no Ensino Médio. O texto inicia uma caminhada pela Geometria Euclidiana, destacando os aspectos formais e sistemáticos que Euclides propôs em Os Elementos. Segue com uma discussão em torno do 5º Postulado de Euclides e a busca de eminentes matemáticos por sua prova. Tentaremos apresentar ainda uma discussão sobre dois tipos de Geometrias Não-Euclidianas: Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica.

Ao seu final, será nosso objetivo propor uma oficina em uma turma de 3ª série do Ensino Médio sobre a Geometria Elíptica com a intenção de verificar se é viável a proposta de introduzir este conteúdo na escola básica.

A motivação para este trabalho teve início na participação em uma oficina, realizada no Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Na ocasião, a professora Simone Dias Cruz mostrou algumas propriedades dessas Geometrias e, para isto, foram utilizados conhecimentos matemáticos adquiridos na formação básica escolar. Posteriormente o interesse pelo assunto foi crescendo e apoiado na simples curiosidade fomos investigando que tipos de Geometrias poderiam existir. Imediatamente muitas perguntas surgiram, como por exemplo: Qual seria a “melhor” ou então a mais correta de todas as geometrias? Ou ainda: Por que este assunto não foi tratado (talvez com uma disciplina) no Curso de Licenciatura em Matemática, aqui nesta Universidade?

O assunto aqui abordado é, certamente, pouco conhecido – mesmo entre professores do Ensino Médio. Certamente isto se deve, entre outras coisas, à complexidade matemática que exige o tema, fazendo do mesmo, uma área bastante técnica – até mesmo no meio acadêmico. Esta talvez, seja uma resposta parcial a um questionamento de nossa parte sobre o motivo do tema não ser abordado neste curso de graduação. Porém, a história da educação nos mostra que muitos temas já foram considerados de difícil abordagem na escola e atualmente passeiam sem qualquer questionamento pelos nossos currículos. Parece-nos que o assunto apresenta-se como mais um degrau que devemos subir. Evidentemente, por questões de tempo e espaço, não nos propomos a discutir todos os aspectos relativos ao tema. Ainda assim, esperamos fornecer uma motivação para que as Geometrias Não-Euclidianas possam ser abordadas no Ensino Médio, vindo a integrar o currículo escolar.

Capítulo 1

Geometria Euclidiana

1.1 Considerações históricas

É muito difícil precisar em que época se originou a Geometria. Segundo Boyer (1974, p. 4) Aristóteles defendia que ela nasceu nas classes sacerdotais do Egito Antigo como atividade de lazer, enquanto o historiador grego Heródoto acreditava que ela teria surgido simplesmente da necessidade de medir terras. Notamos aqui um grande pragmatismo, pois, conta Doria (2004, p. 3) que o rei egípcio Sesostri III – por volta de 1900 a.C. - dividiu todas as terras no Egito de maneira igual entre os seus habitantes com o intuito de cobrar-lhes um aluguel anual. Mas devido as freqüentes enchentes do Nilo, inúmeras propriedades de terras foram inundadas, diminuindo as áreas produtivas e naturalmente gerando descontentamento dos proprietários de terras que haviam sido prejudicados, pois já não contavam com a mesma quantidade de terras produtivas que inicialmente haviam sido distribuídas pelo governo. Assim, o rei determinou que pessoas especializadas começassem a visitar as propriedades atingidas com o objetivo de recalcular o valor dos impostos a serem pagos. Mas é seguro afirmar que a Geometria teve seu início em uma época determinada no Egito?

Talvez seja preciso lembrar que o desenvolvimento humano – e a matemática não pode fugir disto – não ocorre linearmente. Diferentes estágios de desenvolvimento são notados quando se comparam diferentes períodos e diferentes regiões. Apenas algumas civilizações antigas (Egito, Babilônia, Índia e China) possuíam conhecimentos significativos de matemática, como sinaliza Kline (1962, p. 12). Mas o maior destaque ficou com o Egito e a Babilônia . O uso da matemática na Babilônia era relacionado com as questões práticas de medidas. A mensurabilidade chamava a atenção dos babilônios e é notável o uso da Geometria para tratar de problemas algébricos. No Egito, ela foi usada para a obtenção dos cálculos de áreas de terrenos, estimar colheitas e na construção de templos e pirâmides.

No entanto, defende Boyer (1974, p. 4 e 5), que basta recuar mais um pouco na história da humanidade e observar que o homem neolítico, através dos objetos e desenhos deixados em cavernas já possuía certa familiaridade com alguns aspectos que mais tarde seriam características da Geometria. Podemos citar a preocupação com as relações espaciais, simetrias e escala na construção de vasos, potes, cestas e desenhos nas paredes das cavernas.

Assim, acreditamos não ser possível datar um período específico e nem mesmo um lugar onde a Geometria tenha um marco inicial.

Seria razoável pensar que a Geometria começou a se desenvolver através da necessidade dos povos. Inicialmente ela serviu como ferramenta que auxiliou na vida cotidiana dos povos antigos através de atividades como medidas de distâncias, alturas, volume e áreas. Posteriormente, o pensamento matemático, principalmente através dos gregos, começou a ficar mais teórico e até mesmo abstrato e os primeiros esboços de provas matemáticas começam a surgir.

De fato, como comenta Eves (1964, p. 112) depois da Grécia ter sido conquistada pelo império Macedônico, em 332 a.C., Alexandre, O Grande, fundou a cidade de Alexandria no Egito, que viria a se tornar o grande centro cosmopolita do mundo antigo. Nesta cidade foi construída a Universidade de Alexandria, que reuniria por séculos todo o conhecimento do mundo grego. Reconhecidos homens de saber da época foram convidados a formar o corpo da Universidade de Alexandria, entre os quais, Euclides, que notabilizou-se na área da matemática.

Sobre a matemática grega, o que sabemos vem de fontes indiretas ou cópias muito posteriores aos escritos originais. Dessas fontes, a principal é o Sumário Eudemiano[1], que afirma, entre outras coisas, que Euclides era mais jovem que Platão e mais velho que Arquimedes. Pouco se sabe a respeito da vida de Euclides. O historiador H. Vogt acredita que ele nasceu por volta de 365 a.C. e escreveu Os Elementos entre 330 e 320 a.C.

Figura 1: *Euclides de Alexandria*

---

[1] Esse documento consiste em algumas poucas páginas do comentário sobre Euclides, Livro I, do filósofo neoplatônico Proclo (410-485). Proclo teve acesso a várias obras gregas que se perderam para nós. Entre elas, alguns escritos de Eudemo de Rodes (séc. III a. C.), um discípulo de Aristóteles (daí o nome Sumário Eudemiano).

1.2 Os Elementos

Os gregos antigos atribuíam o termo “elementos” a um estudo dedutivo com teoremas primordiais que alcançavam o uso geral dentro de um assunto. Segundo Eves (1995, p. 168), Hipócrates foi o primeiro a tentar organizar este tipo de obra, e mesmo a escola Platônica possuía seus Elementos, escrita por Teúdio. Parece que a obra de Teúdio infuenciou diretamente Euclides, principalmente se considerarmos os fortes indícios de que Euclides estudou na Escola de Platão.

A Universidade de Alexandria, onde Euclides trabalhou, certamente não se diferenciava muito das Universidades atuais, sendo formada por professores com os diferentes perfis. Euclides destacou-se pela sua capacidade de ensinar e não pela pesquisa ou qualquer outra atividade. De fato, Os Elementos de Euclides supera os anteriores demonstrando um arranjo e seleção de proposições numa sequência lógica e organizada. A obra caracteriza-se sobretudo pelo seu compromisso com a formalização tornando-se modelo de métodos demonstrativos rigorosos. Mais do que isso, a obra é encorpada pelo aspecto dedutivo, onde cada afirmação é uma consequência lógica de afirmações assumidas anteriormente. Estas afirmações, tomadas de antemão, chamam-se *axiomas* ou *postulados.*

Αἰτήματα.

αʹ. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

βʹ. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβαλεῖν.

γʹ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

δʹ. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

εʹ. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Figura 2: *Os 5 postulados de Euclides na versão original, em grego.*

A matemática moderna não faz distinção entre estes termos, mas na Grécia Antiga era comum os matemáticos se referirem a axioma como uma afirmação comum a todas as ciências, enquanto que postulado seria uma afirmação particular de um determinado campo de estudo. Segundo Coutinho (1989, p. 23), na matemática, uma teoria deve possuir o menor número possível de axiomas e estes, devem gozar de certas propriedades: *consistência, suficiência e independência*. Se os teoremas não forem contraditórios, dizemos que eles são consistentes. Quando uma teoria pode ser desenvolvida sem a ajuda de outros axiomas, eles são chamados de suficientes e independentes.

Não se sabe ao certo, mas algumas evidências apontam para que Euclides assumiu 10 afirmações: 5 axiomas ou noções comuns e 5 postulados geométricos.

Axiomas

A1: Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.

A2: Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.

A3: Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.

A4: Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.

A5: O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Postulados[2]

P1 - Pode-se traçar uma (única) reta (segmento) por quaisquer dois pontos.

P2 - Pode-se continuar (de modo único) uma reta indefinidamente.

P3 - Pode-se traçar uma circunferência com quaisquer centro e raio.

P4 - Todos os ângulos retos são iguais.

P5 – Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

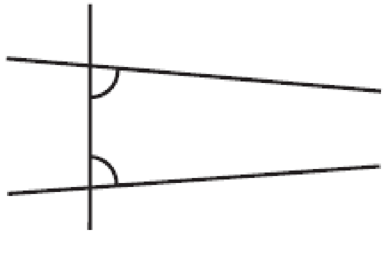


Figura 3: *Duas retas cortadas por uma terceira: o 5º Postulado de Euclides*

[2] Os termos entre parênteses são realmente necessários. As justificativas para tal encontram-se na seção 2.4.

Embora Euclides tenha alcançado fama e respeito com Os Elementos, ele escreveu pouco mais de uma dezena de outros livros, como conta Boyer (1974, p. 75), abordando temas como óptica e mecânica. Apenas 5 obras de Euclides sobreviveram: *Os Elementos, Os dados*[3], *A divisão de figuras, Os fenômenos e Óptica*.

Embora a obra de Euclides contenha mais trabalhos, é inegável que Os Elementos tenha sido o mais importante de todos. É composto de 465 proposições distribuídas em treze livros. Abaixo, uma tabela com um resumo da distribuição dos conteúdos do livro.

LIVRO	**CONTEÚDO**
I	Propriedades de triângulos e teoremas de congruência, teoria das paralelas e a prova de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Algumas proposições sobre paralelogramos, triângulos e quadrados e a demonstração do Teorema de Pitágoras (prop. 47).
II	Transformações de áreas e álgebra geométrica da Escola Pitagórica. Identidades algébricas como $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$ e a conhecida lei dos co-senos (prop. 12 e 13).
III	Teoremas sobre círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos.
IV	Construção com régua e compasso dos polígonos regulares.
V	Teoria das proporções de Eudoxo.
VI	Aplicação da teoria Eudoxiana geometria plana das proporções
VII	Teoria elementar dos números – processo que visa a de obtenção do máximo divisor comum entre dois ou mais números, e verifica se dois inteiros são primos entre si. Este processo é atualmente chamado de algoritmo euclidiano.
VIII	Teoria elementar dos números - Proporções contínuas e progressões geométricas.
IX	Teoria elementar dos números - Prova atribuída a Euclides da existência de infinitos números primos (prop. 20). Teorema Fundamental da Aritmética (prop. 14).
X	Estudo dos números irracionais.
XI, XII e XIIIII	Geometria sólida, teoremas sobre retas e planos no espaço, método da exaustão, construção visando os 5 poliedros regulares em uma esfera.

Eves (1995, p. 175), defende ser um equívoco pensar que Os Elementos foram uma tentativa de prolongar as discussões sobre os 5 poliedros regulares, ou mesmo que era uma obra a tratar apenas de Geometria Plana e Sólida conhecida na época. No entanto, Barbosa (2002, p. 1) admite o contrário. A concordância fica por parte de que Os Elementos foi um

[3] Foi uma espécie de manual ou guia a orientar o estudo dos primeiros seis volumes de Os Elementos.

texto que propunha uma introdução da matemática geral conhecida até então (e não somente de geometria) e provavelmente Euclides sabia muito mais matemática do que aquela que constava em sua obra.

1.3 O Quinto Postulado

De acordo com Coutinho (1989, p. 26), por mais de dois mil anos a Geometria de Euclides reinou de forma inquestionável, trazendo desde a Grécia Antiga conceitos considerados de fácil aceitação por nossos sentidos. No entanto, o 5º Postulado de Euclides, pelo fato de possuir uma redação mais complexa, extensa e menos intuitiva que os anteriores, levou alguns matemáticos a desconfiarem de sua validade (como postulado) e a sugerirem que ele pudesse ser uma conseqüência lógica dos outros quatro anteriores, isto é, seria o 5º Postulado um teorema. Isto gerou uma corrida em direção a uma prova para o 5º Postulado. Consequentemente, muito conhecimento foi gerado e mesmo aprimorado ao longo dos séculos. Muitos acreditaram que conseguiram prová-lo, mas na verdade produziram afirmações equivalentes ao 5º Postulado, denominadas *substitutos*. Nas palavras de Barbosa (2002, p.13):

> É importante que entendamos o que significa afirmar que uma determinada proposição P é um substituto do 5º postulado: quer dizer que a teoria desenvolvida utilizando os 4 primeiros postulados e mais a proposição P coincide com a Geometria de Euclides.

O mesmo autor reforça:

> A maneira de provar que uma proposição P é um substituto para o 5º postulado é a seguinte: primeiramente, devemos saber que P é uma proposição da Geometria Euclidiana. Depois, devemos demonstrar que, na teoria desenvolvida usando os 4 primeiros postulados e mais P, pode-se provar o 5º Postulado de Euclides como uma proposição.

Uma das formulações mais conhecidas do chamado Postulado das Paralelas é creditada ao geômetra Playfair, a saber:

“ *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada* ”.

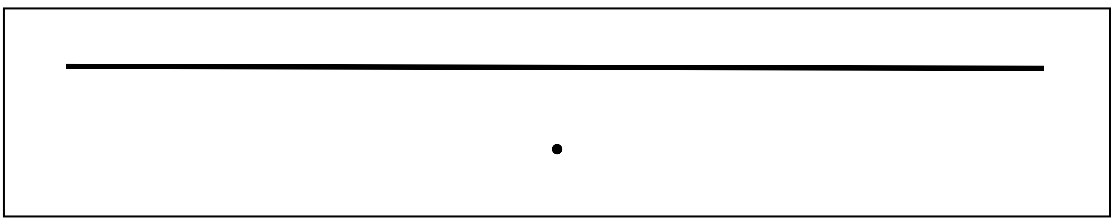


Figura 4: *Substituto de Playfair.*

Este substituto é bastante apropriado ao estudo do postulado das paralelas e pode ser provado utilizando-se de Geometria Analítica vista no Ensino Médio. Muitos outros substitutos são possíveis para o 5º Postulado[4]. Abaixo listamos alguns:

1- "A soma de dois ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos".

Uma prova deste substituto pode ser encontrada em Wolfe (1945, p. 22).

2- "Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes".

Uma prova pode ser encontrada em Barbosa (2002, p. 13).

3- "Existe um par de retas equidistantes".

Uma prova deste substituto pode ser encontrada em Wolfe (1945, p. 25).

Seguindo as idéias de Coutinho (1989, p. 26), a substituição do 5º Postulado leva à criação de novas Geometrias, tão bem fundamentadas quanto a Geometria Euclidiana. É a partir disto que são criados dois tipos clássicos de Geometrias chamadas Geometria Elíptica (ou Esférica) e Geometria Hiperbólica. Abaixo, um quadro que nos ajuda a organizar as idéias.

Geometria	**Postulado**
Euclidiana	*Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.*
Elíptica	*Por um ponto fora de uma reta não existe nenhuma reta paralela à reta dada.*
Hiperbólica	*Por um ponto fora de uma reta existe mais de uma reta paralela à reta dada.*

[4] Outro fato a respeito do 5º Postulado é de que ele só é utilizado na proposição 29 do livro I de Os Elementos. Isto também contribuiu para o pensamento de que ele pudesse ser provado recorrendo-se aos quatro postulados iniciais

Capítulo 2

Introdução às Geometrias Não-Euclidianas

2.1 Motivação

A geometria Euclidiana que aprendemos na escola funciona satisfatoriamente bem para resolver problemas em superfícies planas. No entanto, o mundo ao nosso redor não é perfeitamente plano e um vasto número de problemas exige que sejam utilizadas ferramentas que a Geometria de Euclides não fornece. Por exemplo, podemos citar o caso de um triângulo, que em um plano possui invariavelmente uma soma de 180º para seus ângulos internos. Em uma superfície curva isto não se verifica, implicando aqui a necessidade de se estabelecer uma nova Geometria que seja capaz de estudar quaisquer propriedades geométricas fora do plano. Pensando desta forma, a geometria Euclidiana a partir de então fica rotulada com uma geometria insatisfatória.

Não é difícil pensar em situações que as superfícies curvas mereçam atenção. Talvez um dos mais notáveis seja a prática da navegação, onde certamente a curvatura da terra não pode ser desprezada. Temos a ilusão de que um navio percorre linhas retas quando imaginamos um percurso entre dois pontos no mar. No entanto, analisando com um pouco mais de cuidado, verificamos (devido ao fato do navio acompanhar a curvatura da Terra) que a trajetória descrita é um *arco*, o que mostra que nem sempre a menor distância entre dois pontos é uma linha reta[5], como na geometria Euclidiana.

Pelo fato de a Geometria Euclidiana não ser a única possível, talvez seja plausível pensar que as diferentes Geometrias ocupem lugares próprios no universo matemático. Entendemos que elas sejam ferramentas diferentes que se ajustam a determinados problemas. Não podemos elencar qual delas é a melhor ou mais útil, mas podemos definir qual delas deve ser usada. De fato, esta é uma questão que deve ficar clara: - Por que precisamos de Geometrias Não-Euclidianas e em que casos podemos utilizá-las? Uma boa idéia seria observar que a Geometria de Euclides é adequada ao trabalho do pedreiro, o que não acontece com um marinheiro que deseja planejar longas travessias no oceano, e assim, utiliza uma outra forma de Geometria.

[5] A menor distância entre dois pontos é chamada de *geodésica* e no plano ela é uma reta.

Ao longo de vários séculos, todas as tentativas de provar o 5º Postulado fracassaram. No entanto, o conhecimento gerado e acumulado devido à insistência neste problema serviu para que alguns dos grandes matemáticos no século XIX descobrissem outras alternativas à Geometria de Euclides, mesmo que estas fossem contra o senso comum. O surgimento das Geometrias Não-Euclidianas deveu-se ao fato de que alguns matemáticos como Nikolai Lobachewski, János Bolyai, Carl Gauss e Bernhard Riemann passassem a investigar o que poderia acontecer se o *Postulado das Paralelas* fosse alterado. Nesta alteração considera-se os casos de poder passar mais do que uma ou então nenhuma reta paralela a um ponto P dado fora de uma reta r.

2.2 Os precursores

Segundo Barbosa (2002, p. 17), o historiador e matemático grego Próclus relata que desde a época de Euclides, os matemáticos tentaram provar o 5º Postulado como um teorema e que durante os séculos que se seguiram, as tentativas continuaram. Nas suas palavras:

> Para dar um exemplo, o livro Saggio di uma bibliografia Euclidea, Parte IV, Bolonha 1890, apresenta 24 páginas de títulos de monografias relativas ao quinto postulado publicadas entre os anos 1607 e 1887.

Ptolomeu

Teve a idéia de provar o 5º postulado utilizando os quatro primeiros. No entanto, perdeu-se em um ciclo de demonstrações, pois utilizou a proposição 29, do livro I, que é uma proposição equivalente ao próprio 5º Postulado. Proclus não reproduz a prova de Ptolomeu, mas, de acordo com Barbosa (2002, p. 18), os comentários do primeiro apontam para a direção apresentada a seguir, considerando a fig. 5 abaixo.

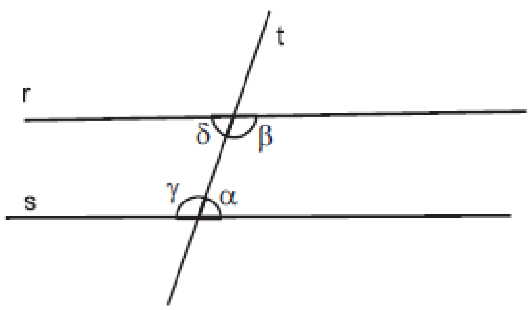


Figura 5: *A tentativa de Ptolomeu*

Demonstração[6]: *Sejam as retas r e s paralelas e a reta t transversal.*

Como, r//s temos $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ *. Logo, se* $\alpha + \beta > 180º$*, então* $\gamma + \delta > 180º$*. Isto gera uma contradição, pois* $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360º$*. Se* $\alpha + \beta < 180º$*, então* $\gamma + \delta < 180º$*. Contradição, pois* $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360º$*. Assim,* $\alpha + \beta = 180º$*. Mas* $r // s \Rightarrow \alpha + \beta \neq 180º \Leftrightarrow \alpha + \beta = 180º \Rightarrow r$ *não é paralela à s, e assim prova o 5º Postulado.*

Barbosa, (2002, p. 19), informa que o erro de Ptolomeu foi de assumir que paralelismo implica congruência de regiões, o que acontece apenas na Geometria Euclidiana.

Proclus

De acordo com Wolfe (1945, p. 27), foi Proclus quem apontou a falha na demonstração de Ptolomeu e, então propôs uma outra demonstração. Sua idéia consistiu na tentativa de provar que "se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta a outra". Esta afirmação nada mais é do que um substituto para o 5º Postulado.

A prova abaixo foi adaptada de Wolfe (1945, p. 27).

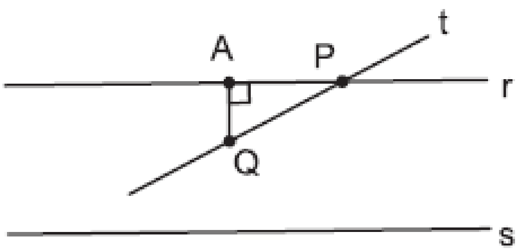


Figura 6: *A tentativa de Proclus*

Demonstração: *Sejam duas paralelas r e s com uma transversal t cortando r em P* $\in$ *t. Assuma que P se move em direção a Q. Então a distância de Q à r é uma função de Q que cresce à medida que QP cresce. Esta distância pode tornar-se maior que a distância entre as retas r e s, bastando que t corte s.*

Esta demonstração não apresenta problemas desde que admitamos de antemão que retas paralelas sejam equidistantes. Ora, mas isto é uma equivalência ao 5º Postulado.

[6] Esta prova é creditada a Arcari (2008, p. 33).

Nasiredin (1201-1274)

Foi um astrônomo e matemático persa (1201-1274). Seu raciocínio, como indica Barbosa (2002, p. 20) foi iniciado com a suposta validade da seguinte afirmação:

“Sejam duas retas *r* e *s* onde $A \in r$ e $B \in s$ e *AB* não é perpendicular a *r*. Então as perpendiculares baixadas a *s* partindo de *r* (do lado do ângulo agudo) são menores que *AB* e as que ficam do lado oposto são maiores”

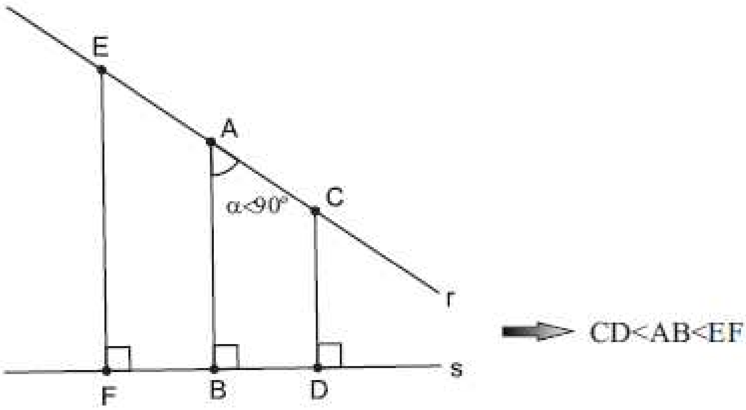


Figura 7: *A tentativa de Proclus*

Nasiredian usou o afirmação acima (sem fornecer uma prova para ela) e o método de *redução por absurdo*. Considere o retângulo da figura 2.4 e observe a prova[7] abaixo.

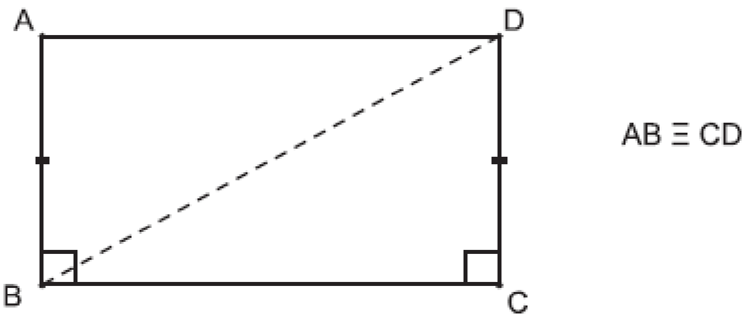


Figura 8: *Apoio para a tentativa de Proclus*

Se $\hat{A}$ é agudo, utilizamos a afirmação acima e concluímos que AB > CD. Se $\hat{D}$ é agudo, concluímos que AB < CD. Estas duas conclusões geram uma contradição. Logo, são $\hat{A}$ e $\hat{D}$ ângulos retos. Portanto, ABCD é um retângulo (possui quatro ângulos retos) e os triângulos ABD e CDB são congruentes. A conclusão de Nasiredian é de que existem triângulos cuja soma dos ângulos é de 180º. Esta conclusão é equivalente ao 5º Postulado.

[7] Esta demostração é creditada a Arcari (2008, p. 35)

Wallis (1616-1703)

Segundo Barbosa (2002, p. 22), Wallis rejeitou a idéia da equidistância, empregada até então pelos matemáticos que o precederam. Para propor uma “nova” demonstração, ele fez uso do seguinte axioma:

“Dado um triângulo, é possível construir qualquer outro triângulo semelhante a ele com lados de tamanhos quaisquer”.

O axioma assumido para a prova que posteriormente Wallis propõe é equivalente ao 5º Postulado.

Girolano Saccheri (1667-1733)

Saccheri foi um padre jesuíta professor da Universidade de Pavia. Conta Wolfe (1945, p. 31) que Saccheri teve contato com os Elementos de Euclides e ficou bastante impressionado com o método de *redução por absurdo* nas provas contidas no livro. Saccheri tinha bastante intimidade com a Lógica, chegando a lecionar disciplinas de Filosofia em Turim e Milão. Sua contribuição chama a atenção, pois foi o primeiro a tentar provar o 5º Postulado substituindo-o por uma afirmação contraditória (possivelmente fruto das leituras de Os Elementos e de seus estudos em Lógica). Seu raciocínio basicamente consistiu, segundo Arcari (2008, p. 36) no seguinte:

Considere o quadrilátero abaixo.

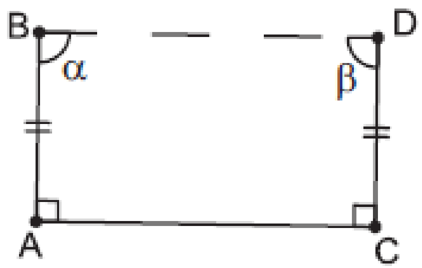


Figura 9: *Tentativa de Saccheri*

Pelo caso de congruência LAL, sabemos que o triângulo ABC é congruente ao triângulo CDA. Pelo mesmo motivo, o triângulo ABD é congruente ao triângulo CDB. Logo, $\alpha = \beta$.

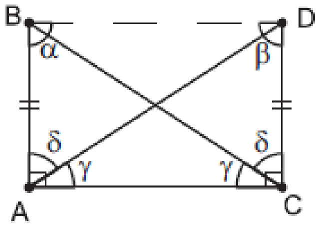


Figura 10: *Apoio à tentativa de Saccheri*

Como Saccheri sabia que a existência de um retângulo ($\alpha = \beta$ = 90º) é um equivalente do 5º Postulado, ele pretendia através do método da redução por absurdo considerar $\alpha = \beta > 90^{\circ}$ ou $\alpha = \beta < 90^{\circ}$ e, portanto, negar o Quinto Postulado.

Para $\alpha = \beta > 90^{\circ}$ (hipótese do ângulo obtuso) Saccheri concluiu que a reta seria limitada, contradizendo o segundo postulado.

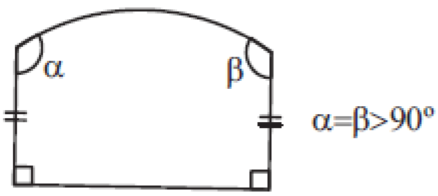


Figura 11: *Apoio para a tentativa de Saccheri*

Para $\alpha = \beta < 90^{\circ}$ (hipótese do ângulo agudo) Saccheri não conseguiu chegar a uma contradição utilizando os quatro primeiros postulados

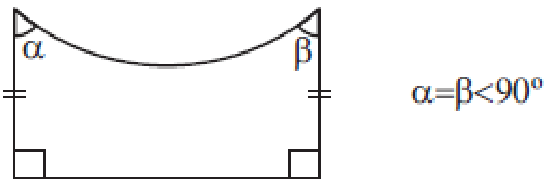


Figura 12: *Apoio para a tentativa de Saccheri*

Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

De acordo com Coutinho (1989, p. 45), Lambert fez sua tentativa de provar o Postulado das Paralelas também utilizando o método de redução por absurdo. A prova segue abaixo.

Considere o quadrilátero ABCD (figura 2.7) que possui três ângulos retos.

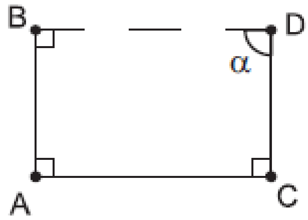


Figura 13: *Tentativa de Lampert*

A idéia é provar que o quarto ângulo do quadrilátero de Lambert é agudo. Para isto, divide-se o quadrilátero de Saccheri em dois quadriláteros de Lambert. Com isto, chega-se ao seguinte teorema:

"A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo é menor que 180º ". Outro teorema (ainda mais geral) a que Lambert chegou foi o seguinte: "A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor que 180º". A prova destes teoremas encontra-se em Coutinho (1989, p. 23)".

2.3 O surgimento de uma nova geometria

De acordo com Eves (1964, p. 542), é provável que Gauss tenha sido o primeiro a perceber que não era possível provar o Postulado das Paralelas. Em 1824, Gauss escreve ao amigo F.A. Taurinus, em Gottingen. Um trecho desta correspondência é encontrada em Barbosa (2002, p. 38), e apresentada abaixo.

> A hipótese que a soma dos ângulos é menor que 180º leva a uma geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente, a qual desenvolvi a um ponto que me satisfaz plenamente, no sentido de que posso resolver qualquer problema nela, com exceção da determinação de uma constante que não pode ser fixada a priori. Quão maior for esta constante, mais próximos nos encontramos da Geometria euclidiana, e se ela for escolhida infinitamente grande, as duas geometrias coincidem. ... Os teoremas dessa geometria parecem paradoxais e absurdos para um não iniciado; mas reflexão cuidadosa sobre o assunto revela que eles não contém nada de impossível. Por exemplo, os três ângulos de um triângulo tornam-se tão pequenos quanto se queira, se os lados são tomados arbitrariamente grandes; entretanto, a área de triângulo nunca pode exceder um limite definido, não importando quão grandes os lados sejam tomados, e de fato, nem alcançar este limite.

No entanto, Gauss nada publicou sobre este assunto. É compreensível que ele tenha se resguardado, pois a filosofia dominante na época era a de Kant, para a qual nosso conhecimento tem origem na experiência - o conhecimento empírico. No entanto, nem todo ele dela provém, pois há um conhecimento que independe da experiência, conhecimento este que Kant chama de *a priori*, de acordo com Dahmen (2006). O problema consistiu em serem as Geometrias Não-Euclidianas juízos analíticos a priori. Um exemplo disso está na obra mais famosa de Kant, *Crítica da razão pura*, publicada em 1781, onde ele chama o espaço euclidiano de uma “necessidade inevitável de pensamento”.

Conta Wolfe (1945, p. 48), que durante os anos de estudo em Gottingen, Gauss manteve no seu círculo de amizades o húngaro Wolfgan Bolyai (1775-1856). Mesmo depois dos tempos de Universidade os dois mantiveram correspondendo-se e frequentemente discutindo sobre o postulado das paralelas. Wolfgang era um homem culto e talentoso, atuando como professor, músico, dramaturgo, poeta e inventor, o que não o impediu de escrever um livro expondo suas idéias, chamado *Tentamen.* No entanto, foi seu filho, János Bolyai (1802-1860) quem conseguiu progredir verdadeiramente no problema.

Seguindo no mesmo raciocínio de Wolfe (2002, p. 50), János mergulhou na questão e acreditou na possibilidade da existência de uma Geometria geral, na qual a geometria euclidiana seria um caso particular. Seu raciocínio seguiu o caminho de negar o 5º postulado, ou seja, considerou dois caminhos: (1) Não existe qualquer reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora desta reta e (2) existe mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto. Rapidamente János percebeu que (1) é consequência direta dos quatro primeiros postulados. Restando a segunda hipótese, János chegou a conclusão de que a existência de mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto implica a existência de infinitas delas. Foi então, neste momento, que as fundações para a construção de uma nova Geometria foram consolidadas.

O jovem Bolyai estava empolgado com o fato de uma nova geometria nascer quando outras hipóteses fossem assumidas com relação ao 5º Postulado. Isto é notado em um trecho de uma carta enviada a seu pai, em 3 de novembro de 1823:

> Neste momento estou decidido a publicar um trabalho sobre as paralelas, logo que se apresente uma oportunidade e eu consiga organizar e completar o material ... do nada eu criei um novo e estranho universo. (Wolfe , 1945, p. 50)

János Bolyai publicou suas descobertas em 1832, como um apêndice do primeiro volume de *Tentamen*. Em março do mesmo ano, Gauss escreveu a Wolfgang, relatando sobre sua leitura nas páginas do apêndice dizendo que não poderia elogiar János, pois estaria elogiando a si mesmo, já que Gauss havia chegado a resultados praticamente iguais. Gauss diz ainda que estava surpreso de alguém chegar a tais resultados e feliz de ser o filho de um velho amigo[8]. János ficou desapontado com o fato de não ter sido o primeiro a ter tais idéias e nada mais publicou em vida. Ainda em 1848 foi informado de que a descoberta desta nova Geometria devia ser dividida com outro matemático.

É razoável pensar que em épocas um pouco distantes a comunicação entre os cientistas fosse bem complicada, pois a distância da era digital e a ausência da rede mundial de computadores impossibilitavam a comunicação (praticamente) instantânea entre as pessoas. Assim, cientistas separados por distâncias geográficas consideráveis (sem contar as barreiras linguísticas) demoravam meses e até anos para tomar conhecimento das descobertas que estavam se processando no momento. Certamente, como aconteceu no episódio envolvendo anteriormente Newton e Leibnitz, desta vez mais um campo da matemática é descoberto simultaneamente por dois matemáticos: János Bolyai e o russo Lobachevsky.

Nicolai Ivanovich Lobachewsky (1793 - 1856) estudou na Universidade de Kazan, onde mais tarde veio a se tornar reitor. De acordo com Boyer (1974, p. 397), seu primeiro trabalho sobre Geometria Não-Euclidiana foi publicado, em 1829 no Kasan Bulletin. Nas palavras do historiador:

> Este artigo marca oficialmente o nascimento da Geometria Não-Euclidiana, pois foi Lobachewsky o primeiro matemático a dar o passo revolucionário de publicar uma Geometria especificamente construída sobre uma hipótese em conflito direto com o Postulado das Paralelas: Por um ponto C fora de uma reta AB pode-se traçar mais de uma reta do plano que não encontra AB.

No entanto, seus escritos receberam pouquíssima atenção na Rússia e fora dela (por ter sido escrita somente em russo) praticamente nenhuma. Tentando contornar esta situação, Lobachewsky escreveu um livro em alemão com o *título Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien* (Investigações Geométricas da Teoria das Paralelas). Pouco antes de sua morte, escreveu uma nova versão do assunto, em francês, com o título de *Pangéométrie*, o que explica o fato da Geometria proposta por Lobachewsky ser conhecida também pelo nome de *Pangeometria*.

Na verdade, podemos concluir que Gauss, Bolyai e Lobachewsky desenvolveram a Geometria Não-Euclidiana ao mesmo tempo. No entanto, Lobachewsky foi o primeiro a publicar seus trabalhos, cabendo a si a honra da descoberta desta geometria que ele também chamou de *Imaginária*.

---

[8] Este trecho da carta pode ser encontrado em Wolfe (1945, p. 52).

2.4 Deficiências Lógicas dos Elementos de Euclides

A Axiomática é o ramo da matemática que estuda os sistemas de postulados e suas propriedades. Segundo Eves (1964, p. 695), seria de se surpreender que os Elementos de Euclides não apresentassem falhas lógicas, por ser este um texto muito antigo. Euclides admitiu muitas suposições sem basear-se nos postulados. O historiador aponta alguns exemplos dos deslizes cometidos por Euclides:

- De acordo com o 2º postulado, uma reta pode ser prolongada indefinidamente. Isto garante apenas que a reta é ilimitada. Não há uma garantia de que a reta é infinita. Isto fica ainda mais grave quando na proposição 16 do livro I Euclides assume a infinitude da reta.
- Um arco de circunferência máxima de uma esfera pode ser prolongado indefinidamente ao longo desta circunferência o que a exemplo da reta, o torna ilimitado e não infinito.
- O Postulado I garante a existência de pelo menos uma reta por dois pontos A e B, mas não garante a unicidade dessa reta.

No entanto, não são apenas as suposições adotadas por Euclides que apresentam problemas. Algumas definições primitivas, como Ponto (aquilo que não tem partes) e Reta (um comprimento sem largura) são falhas, justamente por conduzirem a círculos viciosos.

Foi somente no final do século XIX que surgiram conjuntos de postulados satisfatórios do ponto de vista da Lógica. Muitos matemáticos contribuíram para isto, dentre os quais, David Hilbert (1862 – 1943), que propôs uma nova axiomática.

Hilbert criou, a partir dos 5 Postulados de Euclides, 5 grupos de axiomas. São eles[9]:

1- Axiomas de Incidência;
2- Axiomas de Ordem;
3-Axiomas de Congruência;
4-Axiomas de Continuidade;
5-Axioma das Paralelas.

Como exemplo desses axiomas citamos os seguintes – Axiomas de Incidência:

1i - Dados dois pontos distintos, existe uma *única* reta contendo-os.

1ii - Qualquer reta contém *pelo menos* dois pontos distintos.

1iii - Existem pelo menos três pontos distintos com a propriedade de que nenhuma reta os contêm.

Como é objeto de nosso estudo, também citamos o Axioma das Paralelas:

"Seja *s* uma reta e A um ponto não em *l*. Então existe no máximo uma reta no plano que passa por A e não intercepta *l*".

---

[9] Um maior aprofundamento sobre os postulados de Hilbert pode ser feito em Moreira (2005).

Capítulo 3

Geometria Hiperbólica

3.1 O Postulado de Lobachewsky

Assim como na Geometria Euclidiana, nesta nova Geometria, ponto, reta e plano não são definidos, ou seja, serão tomados como conceitos primitivos. A Geometria Hiperbólica admite todos os postulados da Geometria Euclidiana, à exceção do Postulado das Paralelas. Se substituirmos o postulado das paralelas pelo chamado Postulado de Lobachewsky, teremos um novo sistema axiomático que origina a Geometria Hiperbólica.

Postulado de Lobachewsky:

"Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada." Wolfe (1945, p. 66)

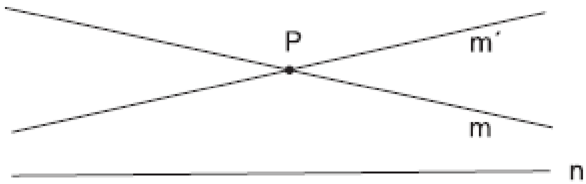


Figura 14: *Postulado de Lobachewky*

Segundo Barbosa (2002, p. 47), é possível observar (figura 14) que existem duas retas (*m* e *m'*) passando por um ponto (*P*) e não interceptando uma dada reta (*n*). Note que as retas *m* e *m'* dividem o plano hiperbólico em 4 regiões angulares, onde as retas traçadas por *P* e contidas nos pares de ângulos opostos pelo vértice (desde que não contenham *n*) são exemplos de retas que também não interceptam a reta *n*.

Podemos nos valer de nossa intuição geométrica e conjecturar que são muitas as retas que passam por *P* e certamente não interceptam a reta *n*, mas seriam elas uma infinidade? Precisamos de argumentos matemáticos que possam nos convencer deste fato, pois diante de tal suspeita, talvez fosse conveniente mudarmos a definição de retas paralelas

Faremos aqui, uma leve adaptação da prova fornecida por Arcari (2008, p. 60), a qual segue um raciocínio muito similar a quase uma dezena de livros consultados na literatura.

Proposição 3.1

"Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a r: Então, existem infinitas retas que passam por P e não interceptam r."

Pelo Postulado de Lobachewsky, existem *m* e *m'* passando por *P* de tal forma que elas não interceptam *n*. Assim, *m* e *m'* dividem o plano hiperbólico em 4 regiões angulares, como podemos ver na figura 15, abaixo.

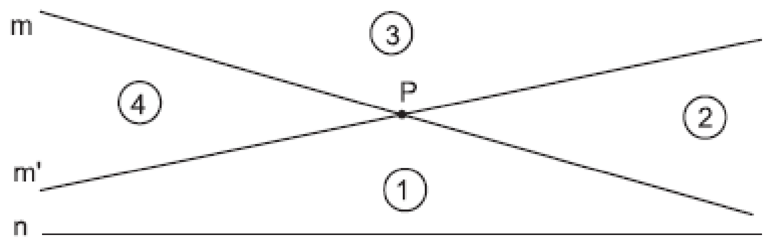


Figura 15: *m e n dividem o plano em 4 regiões angulares*

Seja $\overleftrightarrow{PQ}$ perpendicular a *n* tal que $\overline{PQ} \cap n = Q$. Considere α e β com vértice comum em *P*. Seja *R* o ponto contido em uma das regiões angulares (2) tal que $\hat{\gamma}$ esteja contido na região angular formada por $\hat{\beta}$ mas não esteja contida na região formada por $\hat{\alpha}$.

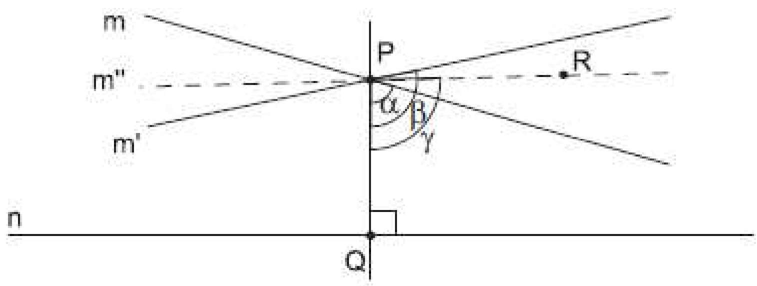


Figura 16: *Apoio à proposição 3.1*

Veja que $m'' \neq m$, pois *m''* passa por *P* e *R*. Assim, *m''* está contida nas regiões opostas pelo vértice *P* que não contém *n*. Apoiados pelo axioma de Pasch[10] e no fato de que há infinitos pontos *R* que podem ser escolhidos concluímos que existem infinitas retas que passam por *P* e não interceptam *n*.

[10] Axioma de Pasch: sejam A, B e C três pontos não colineares e r uma reta que não contém nenhum destes pontos. Se r corta o segmento AB então ela também corta o segmento BC ou o segmento AC.

3.2 Modelos para a Geometria Hiperbólica

Fazendo uso das palavras de Arcari (2008, p. 53):

> Um modelo para um sistema axiomático é um ambiente no qual podemos representar (ou interpretar) os conceitos primitivos em relação aos quais os axiomas passam a ser afirmações aceitas como verdadeiras.

O plano é utilizado como modelo de representação da Geometria Euclidiana porque nele é possível fazer afirmações nas quais o sistema axiomático proposto tem validade. Existem outros modelos que possibilitam o estudo da Geometria Hiperbólica e a consequente afirmação do postulado de Lobachewsky. A superfície representada pela figura 17 é chamada de pseudo-esfera e pode ser usada para o estudo da Geometria Hiperbólica.

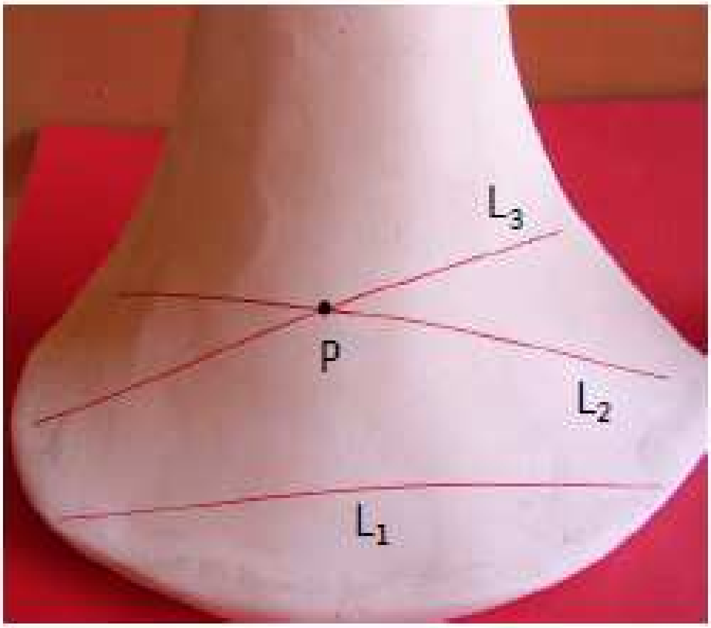


Figura 17: *Pseudo-Esfera*

Foi o italiano Eugênio Beltrami quem propôs este modelo. Ela pode ser definida, segundo Arcari (2008, p. 56) como a superfície obtida pela rotação de uma curva denominada *tratriz* em torno de um eixo y. Podemos obtê-la considerando um segmento AB perpendicular a um eixo y. À medida que o extremo A é tracionado deslocando-se pelo eixo y; o extremo A descreve uma curva no plano, chamada tratriz. A pseudo-esfera permite interpretar os fatos da nova Geometria em termos da própria Geometria Euclidiana. Beltrami mostrou que a pseudo-esfera apresenta as propriedades requeridas pela Geometria Hiperbólica, ou seja, em qualquer ponto da pseudo-esfera, curvas se cruzam com curvaturas em sentidos opostos. No entanto, ela não é uma superfície completamente adequada, formando “ponto singulares”, em que as “retas hiperbólicas” são impedidas de serem prolongadas.

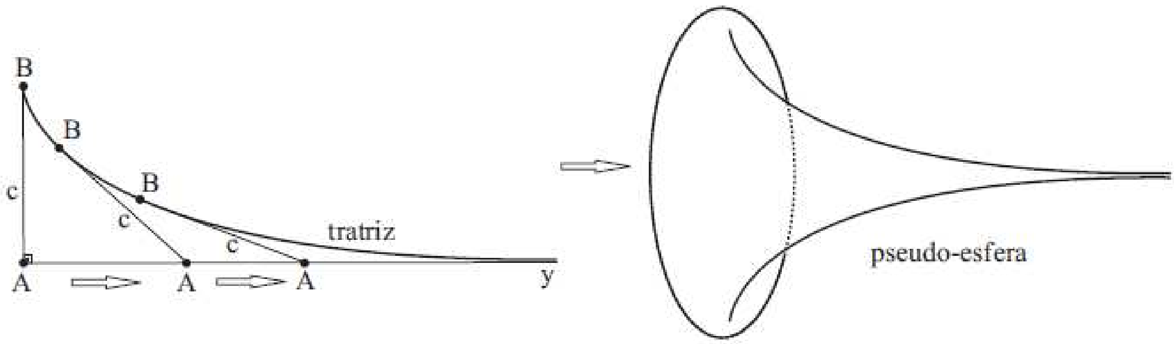


Figura 18: *Construção da pseudo-esfera.*

Outro modelo para a representacão da Geometria Hiperbólica foi desenvolvido pelo matemático francês Henry Poincaré, denominado *disco de Poincaré*.[11] Segundo Coutinho (1989, p. 34), neste modelo as retas são arcos de círculos perpendiculares ao círculo que representa o plano hiperbólico e os pontos são os mesmos considerados na Geometria Euclidiana.

Na figura 19, abaixo, as “retas” *r* e *n* se cortam e ao mesmo tempo são paralelas à reta *m*. Podemos, inclusive medir as distâncias entre dois pontos quaisquer (na figura 20 os pontos U e T) com a fórmula: $d(UT) = k \cdot \ln\left(\frac{RT}{TS}\right) / \left(\frac{RU}{US}\right)$, onde k é um parâmetro e *RT*, *TS*, *RU* e *US* são os segmentos de reta, ligados à distância de interesse.

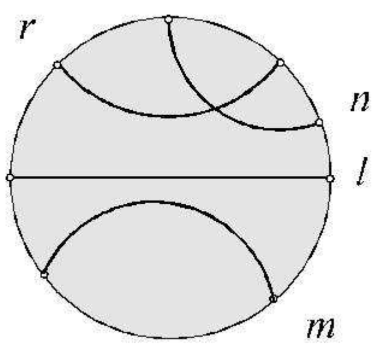


Figura 19: *Modelo de Poincaré.*

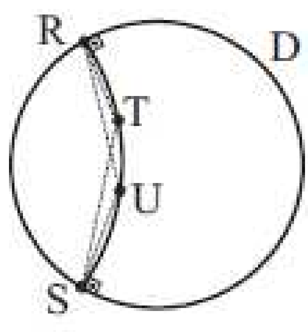


Figura 20: *Distância entre dois pontos.*

[11] Veja como produzir um mosaico do disco de Poincaré usando construções da Geometria Hiperbólica e Euclidiana em: http://classes.yale.edu/fractals/Labs/NonLinTessLab/NonLinTess.html.

3.3 Propriedades elementares das paralelas

Barbosa (2002, p. 52), enumera alguns teoremas da Geometria Hiperbólica que são válidos também na Geometria Euclidiana.

Teorema 3.1 - *propriedade reflexiva*

“Se uma reta é paralela, passando por um ponto e em um determinado sentido, a uma reta dada, então, ela é em cada um de seus pontos, paralela no mesmo sentido à reta dada”.

Teorema 3.2 – *propriedade simétrica*

“ Se a reta s é paralela à reta r, então a reta r é paralela à reta s”.

Teorema 3.3 – *propriedade transitiva*

“Se duas retas são paralelas a uma terceira, na mesma direção, então, são paralelas entre si”.

Como descreve Wolfe (1945, p. 71), é interessante neste momento introduzir o conceito de *ponto ideal.*

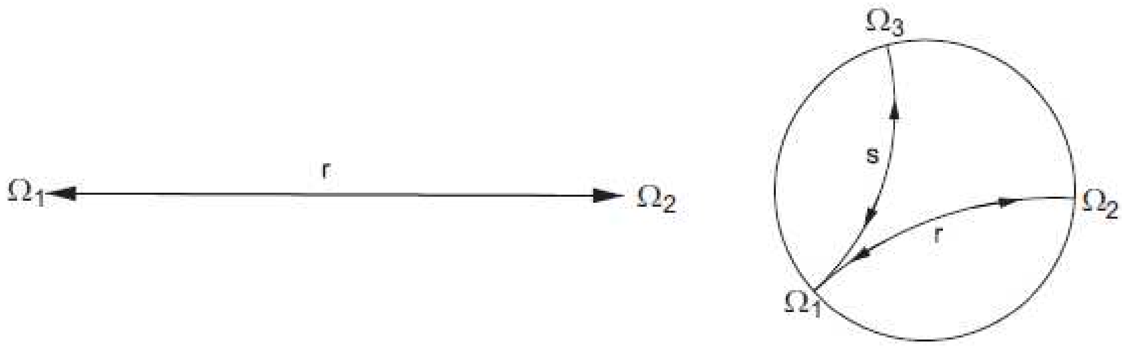


Figura 21: *Ponto ideal.*

Para isto, basta pensarmos em uma reta no plano e acrescentarmos dois pontos a ela, um “antes” e outro “depois” dela. Estes pontos são denominados pontos ideais, e podem ser pensados – analogamente – como o $+\infty$ e o $-\infty$ no estudo da reta real. Assim, podemos tomar a afirmação de que duas retas paralelas tem um ponto ideal em comum na mesma direção de paralelismo. Deste modo, duas retas são paralelas se tem um ponto ideal em comum. É conveniente observar que pontos ideais não são pontos do plano hiperbólico (assim como $+\infty$ não é um ponto da reta real). Para distingui-los é comum chamar os pontos do plano hiperbólico de pontos ordinários.

Capítulo 4

Geometria Elíptica

4.1 Postulado de Riemann

Era de se esperar que depois do surgimento da Geometria Hiperbólica, outras formas de geometria fossem pensadas. De acordo com Coutinho (1989, p. 65), o matemático alemão Georg Bernhard Riemann, estabeleceu as bases de uma nova geometria, chamada Elíptica. Quando substituirmos o postulado das paralelas pelo postulado de Riemann, temos um novo sistema axiomático. Este é o ponto de partida para a Geometria Elíptica.

Postulado de Riemann:

"Não existem paralelas a uma reta dada" (Coutinho, 1989, p. 65)

Tal geometria foi considerada por Riemann pela primeira vez em 1851 na aula inaugural para sua admissão como professor-adjunto na Universidade de Göttingen.

4.2 Modelo Esférico para a Geometria Elíptica

O modelo adotado por Riemann foi de uma superfície esférica. Nela, dados dois pontos *A* e *B,* denomina-se reta à circunferência máxima que passa por esses dois pontos. As retas seriam os círculos máximos, também chamados de *geodésicas*. Na esfera, quaisquer dois círculos máximos se interceptam em mais de um ponto. Dados dois pontos sobre a esfera, podem se encontrar infinitas retas que passam por esses dois pontos. Na figura 22, os círculos máximos, ou seja, as "retas" *AEA'* e *ADA'* interceptam-se nos pontos antípodas *A* e *A'*, ditos

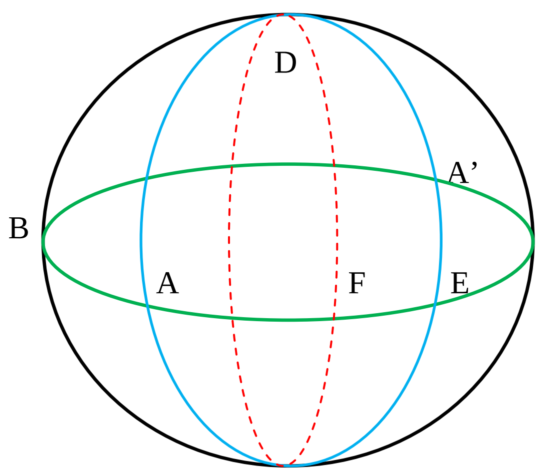


Figura 22: *Modelo Esférico.*

extremidades de um mesmo diâmetro da esfera. Os pontos *A* e *A'* são ditos pólos da "reta" *BAFE* e a distância de *A* ou *A'* a qualquer ponto da "reta" *BAFE* é constante. Portanto, segundo Coutinho (1989, p. 67), uma reta tem um comprimento finito que é de quatro vezes a distância polar.

Algumas características da Geometria Elíptica, como aponta Prestes (2006, p. 45), merecem nossa atenção:

i) Os círculos são máximos quando os planos que interceptam a esfera passam pelo centro da esfera. Pode-se observar que o centro do círculo máximo coincide com o centro da esfera correspondente. A reta é a circunferência deste círculo e quaisquer outros círculos serão considerados menores.

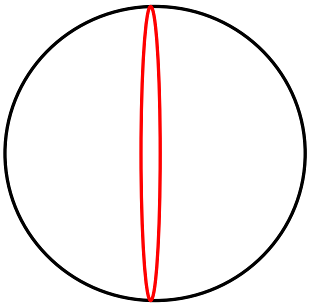


Figura 23: *Círculos máximos*

ii) Na esfera quaisquer duas circunferências máximas se interceptam em mais de um ponto.

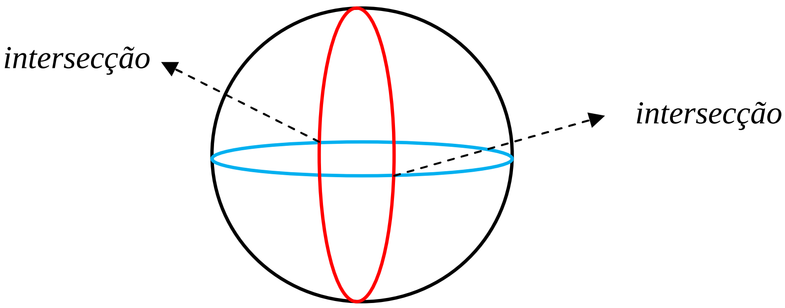


Figura 24: *Intersecção de pontos entre "retas".*

iii) Dados dois pontos sobre a esfera, podem se encontrar infinitas retas que passam por esses dois pontos.

Figura 25: *Infinitas "retas".*

iv) Dados dois pontos distintos *A* e *B* sobre uma circunferência máxima, a distância entre esses pontos é a menor porção da circunferência que os contém. Embora, por *A* e *B* outros círculos possam ser considerados, a distância entre eles é sempre medida sobre o único círculo máximo determinado por *A* e *B*.

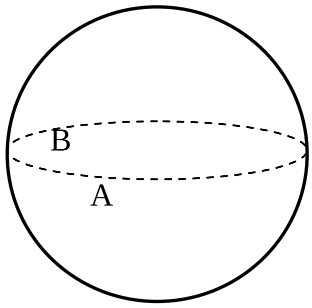


Figura 26: *Distância entre pontos*

v) O ângulo sobre a esfera, também chamado de ângulo esférico, é intersecção de duas retas (circunferências máximas) e a sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes tiradas do ponto de intersecção.

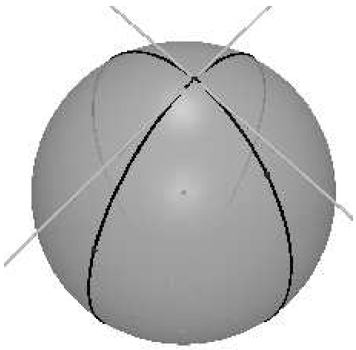


Figura 27: *Ângulo esférico*

vi) Dados três pontos, *A*, *B* e *C*, distintos e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima, a figura formada pelos arcos de circunferências máximas, que unem esses pontos dois a dois, chama-se triângulo esférico.

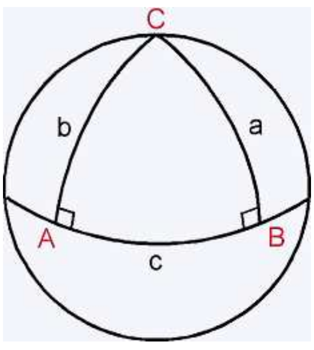
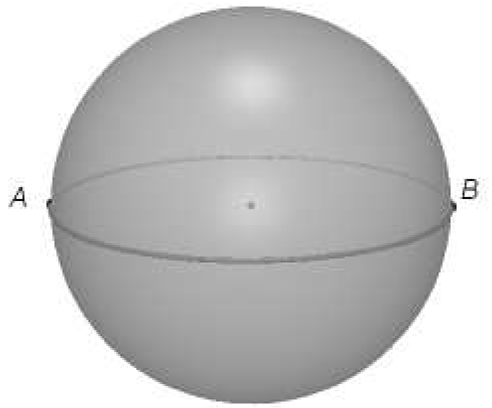
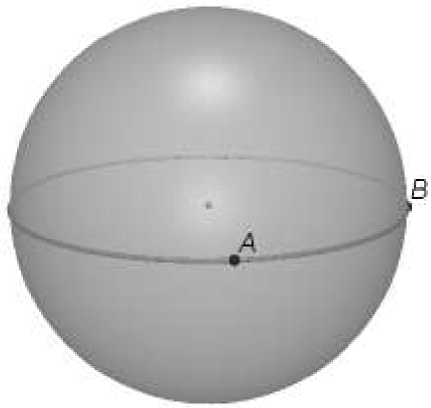


Figura 28: *Triângulo esférico*

Diferentemente da Geometria de Euclides, na Geometria Elíptica os triângulos não possuem um valor constante para a soma dos seus ângulos internos, podendo variar de 180° a 540º. Eles ainda podem ter os três ângulos retos (trirretângulos), dois ângulos retos (birretângulos) ou um ângulo reto (retângulo).

Uma propriedade interessante do triângulo trirretângulo é a de que se ele possuir seus lados medindo 90º, sua área será equivalente a um oitavo da superfície esférica, de acordo com Coutinho (1989, p. 79).

vii) Dois pontos *A* e *B* dividem a reta esférica em dois arcos. Esses dois arcos podem ser:

 Figura 29: *Arcos iguais*	 Figura 30: *Arcos diferentes*
Iguais se A e B forem extremos de um mesmo diâmetro da esfera.	Um maior e o outro menor.

Capítulo 5

Experimentando a Geometria Elíptica

5.1 Transposição Didática

Os professores, de uma maneira geral, tencionam esforços no sentido de buscar novas alternativas para ensinar. O objeto de ensino escolar é uma espécie de conhecimento sistematizado e organizado proposto pela escola, muitas vezes escolhido com o intuito de satisfazer o sistema político da época. Quando tratamos deste assunto, estamos nos referindo às questões curriculares, ou seja, o que deve ser ensinado (estudado) na escola, e às relações de poder envolvidas nestas escolhas. Mais objetivamente, isto nos leva a pensar em quais conhecimentos queremos que façam parte do currículo escolar, devendo-se obrigatoriamente pensar em qual seria o objetivo de ensinar um conteúdo, em detrimento de outro.

No que caracteriza a discussão sobre que conteúdos devem fazer parte do currículo escolar, lembramos o que diz o documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> Para a escolha de conteúdos, é importante que se leve em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (Orientações Curriculares para o Ensino Médio 2002, p. 69)

Provavelmente não encontraremos em todos os conteúdos que compõem a grade curricular de matemática das escolas brasileiras as orientações do documento citado acima. Por exemplo, a resolução de problemas práticos do quotidiano não pode ser relacionada de forma direta a conteúdos como Números Complexos, Polinômios, e tantos outros presentes no ensino de matemática.

É possível perceber que o conhecimento escolar depende de uma prévia seleção de assuntos que farão parte do currículo. Esta seleção do currículo escolar é tratada por Santos & Moreira (1995, p.53), como um processo que define o tipo de conhecimento, para quem ele é oferecido e em que seqüência e estrutura ele é abordado.

Para Michel Young (1971, apud Santos & Moreira, 1995, p. 54), assim como o conhecimento, o currículo é uma invenção social, o que torna importante a busca pelo entendimento referente às razões que determinam a inclusão ou a exclusão de alguns conteúdos.

Neste trabalho estamos propondo apenas uma análise da possibilidade de inserção das Geometrias Não-Euclidianas no currículo do ensino médio, conteúdo este que não está presente na escola atualmente e, para isto, consideramos importante analisar a proximidade do conhecimento científico e do conhecimento escolar. A sociologia da educação traz a discussão sobre as diferenças desses dois tipos de "saberes", como pode ser observado nas idéias de Philippe Perrenoud que discute como o conhecimento é apropriado pela escola. Perrenoud usa a perspectiva da "transposição didática" e comenta:

> Ensinar é, antes de mais nada, fabricar artesanalmente os saberes, tornando-os ensináveis, exercitáveis e passíveis de avaliação no quadro de uma turma, de um ano, de um horário, de um sistema de comunicação e trabalho. (Perrenoud, 1993, apud Santos, 1994, p.163)

Por transposição didática, entendem Santos & Moreira (1995, p. 61):

> ... processo de reorganização dos saberes e dos materiais disponíveis em uma sociedade de modo a torná-los transmissíveis e assimiláveis pelos aprendizes. Nesse processo de segmentação do conhecimento escolar, a transposição didática envolve segmentação de conteúdo, cortes, simplificações, organização progressiva do conteúdo e sua transformação em lições, exercícios e questões de avaliação. Ao se discutir o processo de transposição didática, o que se quer realçar é que os saberes escolares estão claramente marcados pela forma como são estruturados o tempo e o espaço escolar.

Utilizando-se da transposição didática, podemos pensar que o conhecimento acadêmico cunhado nas Universidades difere (e muito) do conhecimento escolar. Até chegar aos estudantes, os conteúdos devem passar por uma série de transformações. Nestas, eles devem ser modificados, adaptados e colocados, sobretudo em uma linguagem acessível ao nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos. No caso da matemática, precisa-se levar em conta a estrutura de caráter formal, lógica, sistemática e dedutiva que constitui esta disciplina.

Seguindo esta linha de raciocínio, é possível dizer que a transposição didática trabalha no sentido de transformar conhecimento técnico-científico em conhecimento escolar. Ora, isto naturalmente nos leva a pensar que:

1) a escola não produz conhecimento sozinha;

2) a seleção de conteúdos aprendidos na escola depende necessariamente da facilidade em se processar a transposição didática;

No primeiro caso, trabalhamos com a ideia de que todo o conhecimento é produzido além dos muros da escola, desconsiderando qualquer possibilidade de geração de conhecimento por esta instituição. A escola apenas se apropria do conhecimento gerado, ela é decididamente passiva e dependente de um mundo acadêmico-científico.

No segundo caso, a escolha dos conteúdos a integrarem o currículo escolar está intimamente ligada à possibilidade de adaptação destes entre os mundos científico e escolar. Como exemplo de transposição didática, podemos falar no exemplo do conceito de distância. Estudado desde os tempos de Euclides, este conceito só foi formalmente estudado pelo matemático Fréchet em 1906. Após passar por algumas transformações, essa noção foi inserida no currículo escolar francês, deixando de ser unicamente uma ferramenta pertencente aos matemáticos. Quando este tipo de transformação ocorre – analisando um conceito específico – trata-se de uma transposição didática *stricto sensu*. De um modo inverso, se o conceito é transformado de uma forma ampla, é denominado transposição didática *latu sensu.* A transposição didática pode ainda ser analisada com base em três tipos de saberes: o *saber científico,* o *saber a ensinar* e o *saber ensinado*. O primeiro está amarrado à vida acadêmica e encontra-se presente em dissertações, teses e artigos. O saber a ensinar é constituído por um trabalho didático efetivo por parte do professor, onde este assume o papel de agente responsável pelas transformações. O terceiro é o saber que chega como produto ao aluno.

5.2 Procedimentos e aplicação da oficina

Neste capítulo, pretendemos fazer um relato sobre a experiência obtida na aplicação de uma oficina sobre a Geometria Elíptica. Tal atividade desenvolveu-se em 16 de novembro de 2009 com uma turma de 3ª série de ensino médio diurno, na Escola Estadual de Ensino Médio Baltazar de Oliveira Garcia, situada em Porto Alegre. Estavam presentes 25 alunos, aos quais foi exposto que a atividade referia-se a um trabalho de conclusão de curso.

O principal objetivo do trabalho foi de verificar se é possível inserir um tipo de Geometria Não-Euclidiana no Ensino Médio. Em razão do tempo que nos foi ofertado, tivemos que fazer uma escolha por uma das Geometrias Não-Euclidianas. Optamos pela Geometria Elíptica, pois ela oferece algumas facilidades por utilizar como modelo a esfera, que é familiar à maioria dos alunos.

Inicialmente começamos falando de aspectos históricos da Geometria Euclidiana. Foi feito um breve relato sobre o livro Os Elementos de Euclides e, em seguida, conversamos de uma forma bastante informal sobre o significado de um postulado. O objetivo era introduzir o 5º Postulado de Euclides. Esta atividade introdutória foi breve e durou cerca de 10 minutos. Logo em seguida, os alunos receberam as folhas com o questionário e o material (esferas de isopor, borrachinhas e percevejos) que serviu de apoio.

Abaixo, seguem as atividades e o questionário proposto aos alunos.

ATIVIDADE 1

1 – O problema do barco pesqueiro.

Um barco pesqueiro deseja cercar uma região na qual acredita que existam mais peixes. Para isto, ele parte de algum ponto sobre a linha do Equador e percorre 20 Km em direção ao Norte, em seguida gira 90º e navega mais 20 Km em direção ao Leste, depois gira 90º e navega mais 20 Km no sentido Sul.

a) Utilize uma folha plana e posteriormente as esferas de isopor para responder qual a distância percorrida pelo barco. Existe diferença nas distâncias medidas no plano e na esfera? O deslocamento é o mesmo medido no plano e na esfera? Explique:

OBJETIVOS: A atividade 1 (a) tem por objetivo que os alunos observem que as distâncias percorridas e os deslocamentos no plano e na esfera são idênticos (60 km no exemplo), apesar da diferença nos formatos de suas superfícies. Os alunos foram lembrados das diferenças entre distância percorrida e deslocamento (diferença entre o ponto inicial e final). Aqui, o importante era observar que o deslocamento também é o mesmo.

b) Imagine que existem dois barcos pesqueiros unidos por uma corda esticada medindo 200 km de comprimento próximos ao mar. A reta forma uma reta euclidiana, como a reta feita no plano? Explique.

OBJETIVO: conhecer o conceito de geodésica ou mais especificamente, diferenciar uma reta no plano e uma “reta” em uma superfície esférica.

ATIVIDADE 2

2 – Retas paralelas.

Imagine dois barcos pesqueiros A e B navegando lado a lado (paralelamente).

a) Desenhe em uma folha de papel o caminho percorrido pelos dois barcos.

b) Desenhe sobre as esferas os caminhos percorridos pelos barcos A e B.

c) É possível traçar retas paralelas para representar o caminho percorrido pelos dois barcos na folha de papel e na bola de isopor?

e) Isto contraria o 5º Postulado de Euclides? Quais suas conclusões?

OBJETIVOS: esta atividade deve permitir que os alunos percebam que não é possível traçar retas paralelas na superfície esférica e que quaisquer duas “retas” na esfera sempre se interceptam em no mínimo dois pontos. Como as paralelas não podem (por definição) se interceptar, é importante concluir que não podemos obter “retas” paralelas na superfície esférica. Isto contraria o 5º Postulado.

ATIVIDADE 3

3 – Triângulo Esférico

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano é 180º.

a) Na superfície esférica os triângulos possuem uma soma de ângulos internos menores, iguais ou maiores que na superfície plana? Qual o limite máximo do 3º ângulo, se os outros dois forem ângulos retos? Existe algum limite para a soma dos ângulos neste caso?

OBJETIVOS: gostaríamos que os alunos percebessem que quando o triângulo esférico diminui em tamanho ele se aproxima do triângulo euclidiano (soma dos ângulos internos de 180º) e quando ele aumenta de tamanho o somatório dos ângulos internos tem um valor limite, a saber, 540º.

Figura 31: *Ângulos no triângulo esférico*

b) O primeiro postulado de Euclides diz que por dois pontos pode passar apenas uma única reta. Isto se verifica também na superfície esférica? Nesta superfície as retas são infinitas e ilimitadas como na superfície plana?

OBJETIVOS: notar o fato de que quando tomamos dois pontos opostos no globo por eles passam infinitas retas. As retas continuam sendo ilimitadas, porém na superfície esférica elas são finitas.

ANÁLISE DAS RESPOSTAS

Para analisar as respostas fornecidas pelos alunos, optamos por elencar algumas categorias, nas quais procuramos classificar as respostas dos alunos. Estas categorias são baseadas no livro Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos, da pesquisadora Helena Cury. São elas:

CATEGORIA 1 - O aluno parece compreender o que está sendo abordado no exercício e, embora ainda não demonstre familiaridade com o conteúdo, consegue chegar a conclusões corretas.

CATEGORIA 2 - Os alunos conseguem perceber que existem diferenças entre as propriedades geométricas no plano e na esfera, porém, as suas respostas ainda não são corretas. Em alguns casos ocorre uma confusão ou desconhecimento de conceitos matemáticos básicos.

CATEGORIA 3 - O aluno acerta parcialmente a questão, respondendo de forma correta, mas justificando de forma incorreta.

CATEGORIA 4 - Não há entendimento da mudança de ambiente, onde os alunos não conseguiram perceber que existem diferenças no estudo das propriedades geométricas entre o plano e a esfera.

CATEGORIA 5 - Não há compreensão do que está sendo pedido. Isto fica claro quando as respostas parecem não se referirem às perguntas feitas.

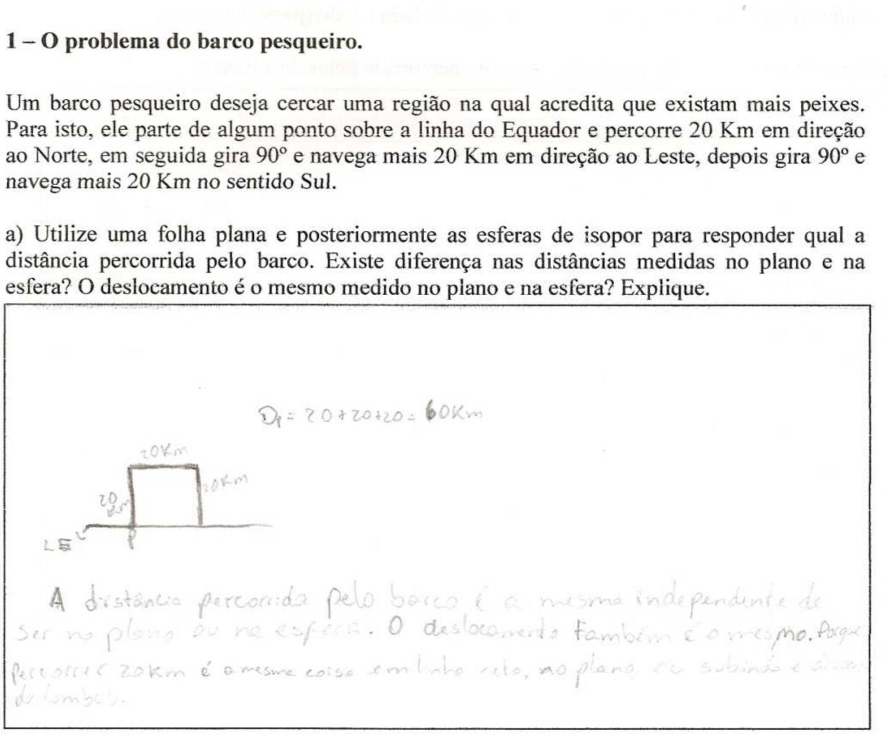
ATIVIDADE 1

1. O problema do barco pesqueiro.

a) A maior parte dos alunos não teve dificuldades em perceber que as trajetórias no plano e na esfera são diferentes. Esta foi a principal característica das respostas: a preocupação em descrever as trajetórias nos dois tipos de superfície. No entanto, as respostas, de uma maneira geral, não apresentaram um alto nível de acertos.

Como exemplo de resposta que pode ser enquadrado na categoria 1, citamos o aluno que responde:

"Não existe diferença nas medidas das distâncias no plano e na esfera. O deslocamento também é o mesmo no plano como na esfera". Ele ainda faz o desenho de um quadrado com lado 20 km indicando o sentido (horário) de movimentação do barco. Um outro exemplo da categoria 1 é o seguinte:


1 – O problema do barco pesqueiro.

Um barco pesqueiro deseja cercar uma região na qual acredita que existam mais peixes. Para isto, ele parte de algum ponto sobre a linha do Equador e percorre 20 Km em direção ao Norte, em seguida gira 90º e navega mais 20 Km em direção ao Leste, depois gira 90º e navega mais 20 Km no sentido Sul.

a) Utilize uma folha plana e posteriormente as esferas de isopor para responder qual a distância percorrida pelo barco. Existe diferença nas distâncias medidas no plano e na esfera? O deslocamento é o mesmo medido no plano e na esfera? Explique.

$D_1 = 20 + 20 + 20 = 60$ Km

20Km

20 Km

20Km

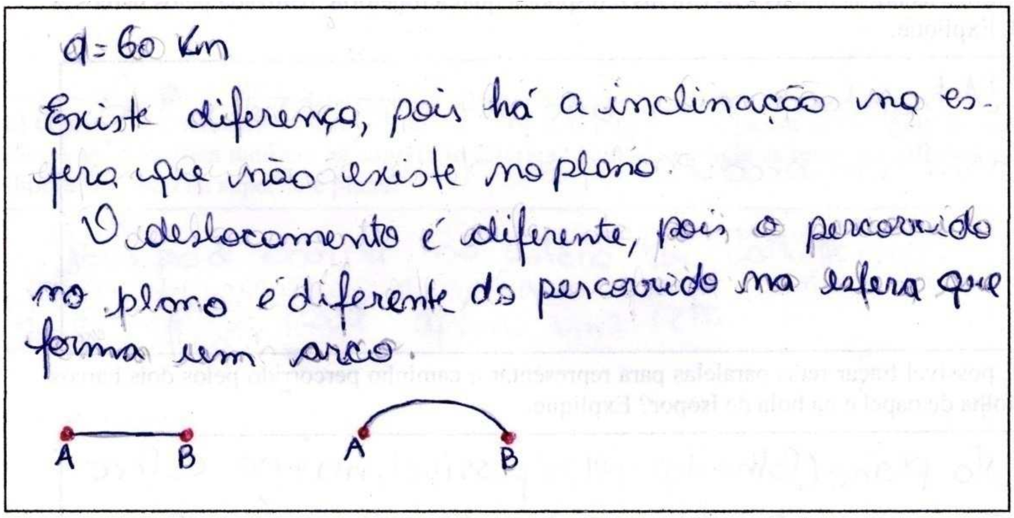
LE

A distância percorrida pelo barco é a mesma independente de ser no plano ou na esfera. O deslocamento também é o mesmo. Porque percorrer 20Km é a mesma coisa em linha reta, no plano ou subindo e descendo de lombadas.

Ambos tentaram representar através de um desenho a situação que estava sendo proposta.

O exemplo abaixo mostra a resolução de um aluno que pode ser colocada na categoria 2, pois mostra que existe uma preocupação com as trajetórias no plano e na esfera (propriedades geométricas). Veja que ele representa essas trajetórias com o início e fim.

Todavia, os conceitos de deslocamento e de “inclinação da esfera” parecem confusos e inadequados.


d = 60 Km
Existe diferença, pois há a inclinação na esfera que não existe no plano.
O deslocamento é diferente, pois o percorrido no plano é diferente do percorrido na esfera que forma um arco.

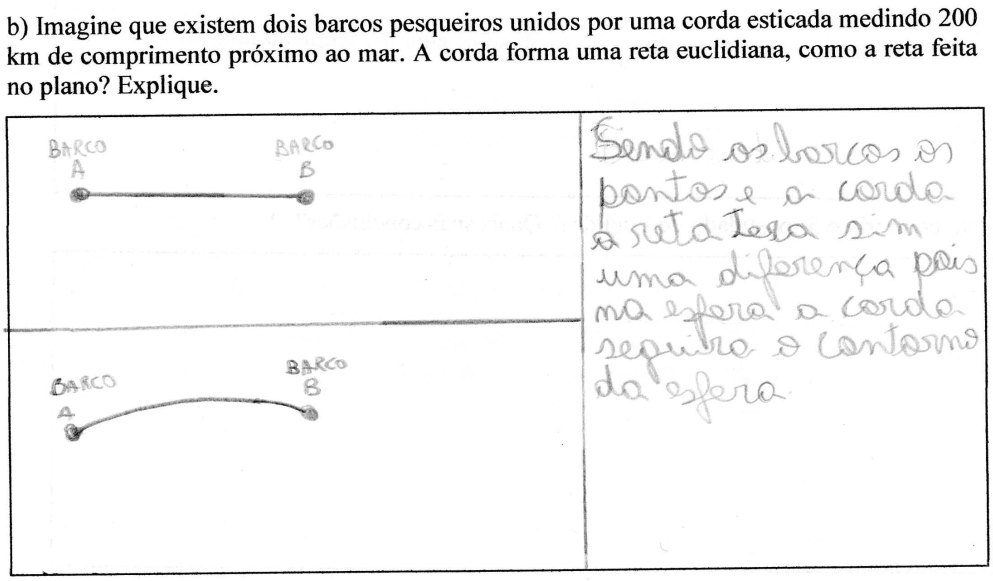
Um outro aluno responde que: “*o deslocamento não é o mesmo porque no plano é uma linha reta, e já na esfera não será mais uma reta*”. Ele faz uma confusão entre deslocamento e trajetória no plano, o que coloca sua resposta na categoria 2.

Na coleta de dados apresentamos os seguintes resultados quantitativos:

Categoria 1	Categoria 2	Categoria 3	Categoria 4	Categoria 5
7	3	9	1	5

b) O exercício 1.a foi importante para que os alunos pudessem ter um pouco de familiarização com a superfície esférica. Certamente, a exploração e o uso que se fez da nova superfície, colaboraram para um maior entendimento das questões posteriores, como por exemplo, o elevado número de acertos na questão 2.

Os alunos perceberam – de um modo geral – que esta geodésica obedece à curvatura da Terra (forma esférica). Vejamos, a seguir o que respondeu um dos alunos:



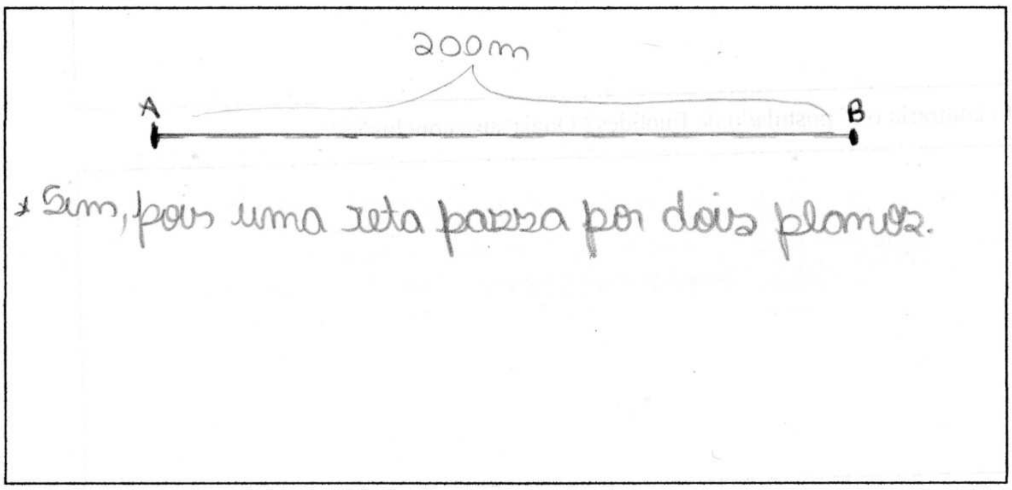
b) Imagine que existem dois barcos pesqueiros unidos por uma corda esticada medindo 200 km de comprimento próximo ao mar. A corda forma uma reta euclidiana, como a reta feita no plano? Explique.

Podemos pensar que esta resposta se aproxima bastante da classificação proposta na categoria 1. Outros alunos responderam de modo bastante semelhante. Cito aqui dois casos:

Aluno A: *“ Não, pois como os barcos estão sobre o mar e um está puxando o outro acredito que forme-se uma certa inclinação entre eles”.*

Aluno B: *“Não, pois se os barcos estão no mar, logo, a reta está numa esfera e se está numa esfera fará uma linha mais curva ...”.* Aqui o aluno utiliza a palavra reta para se referir à corda que une os barcos. Há certamente uma transposição desta situação para uma linguagem matemática.

Um outro colega apresentou a resposta que podemos ver abaixo.



Podemos colocar este tipo de resposta na categoria 4. Notamos também que o estudante parece tentar tomar afirmações conhecidas como *"uma reta passa por dois pontos"* e jogá-las na resposta, e ainda assim, confundindo ponto com plano.

Observando a tabela abaixo podemos perceber o alto número de acertos obtidos.

Categoria 1	Categoria 2	Categoria 3	Categoria 4	Categoria 5
12	5	6	2	0

2. Retas paralelas.

a) O objetivo deste exercício era servir de apoio para responder aos itens **c** e **d**. Ele não ofereceu qualquer espécie de dificuldade aos estudantes, visto que o índice de acertos (categoria 1) foi de 96%. As conversas em sala de aula com os alunos vieram a comprovar o que foi citado na página 19: o fato da grande maioria dos estudantes (se não todos!) definirem retas paralelas pela equidistância das mesmas. Isto foi anteriormente falado e lembramos que na verdade esta é uma consequência do 5º Postulado.

b) Nesta atividade os alunos também apresentaram alto índice de acertos. Eles mesmos vinham demonstrando desde o primeiro exercício uma preocupação com a trajetória das curvas percorridas tanto no plano quanto na esfera. Mais de 50% das respostas continham a palavra arco para nomear a curva percorrida pelos barcos. A seguir, algumas respostas que podem ser colocadas na categoria 1:

Aluno A: *"Eles fazem a trajetória de uma reta inclinada".*

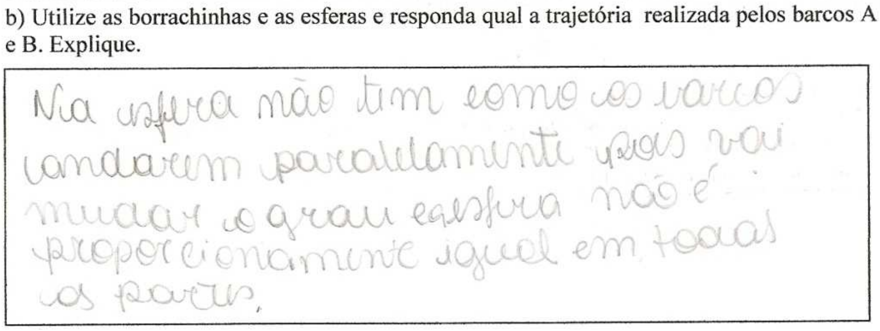
Aluno B: *"O barco A vai percorrer uma distância maior".*

Aluno C: *"Eles fazem a trajetória de uma curva".*

Nestas respostas podemos notar que o raciocínio está correto, apesar dos termos não serem os ideais. Por exemplo, quando o aluno A faz referência a uma "reta inclinada", provavelmente está falando do arco. O mesmo acontece com o aluno C que fala em "curva". Quando o aluno B fala em "distância maior", ele provavelmente quer dizer que as "retas" da esfera estão em latitudes[12] diferentes.

Abaixo, o exemplo de resolução de uma questão que pode se enquadrar na categoria 5.

[12] Utilizamos o termo latitude pela proximidade do conceito de latitude terrestre no globo.



b) Utilize as borrachinhas e as esferas e responda qual a trajetória realizada pelos barcos A e B. Explique.

Na esfera não tem como os barcos andarem paralelamente pois vai mudar o grau esfera não é proporcionamente igual em todas as partes.

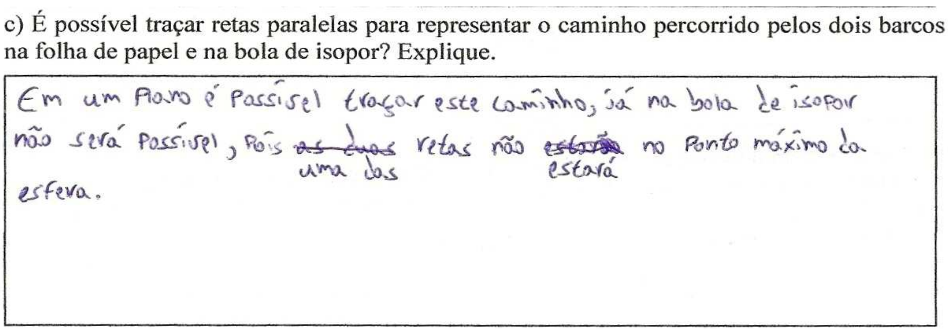
A pergunta referia-se tão somente à trajetória dos barcos. O aluno parece não ter entendido a questão, pois ele não falou sobre o nome de qualquer curva, e sim, sobre elas serem paralelas, além de mencionar “... o grau da esfera ...”.

Para esta atividade, a tabela de acertos está apresentada abaixo.

Categoria 1	Categoria 2	Categoria 3	Categoria 4	Categoria 5
11	3	7	2	2

c) Para a folha de papel (plano) já havíamos visto que era possível (item a). Também já havíamos definido que uma reta na esfera deveria ser qualquer círculo máximo sobre a superfície esférica. O objetivo maior agora era de que os alunos percebessem que não é possível traçar retas paralelas na superfície esférica seguindo a definição dada. Assim, o 5º Postulado estaria sendo colocado à prova.

Inicialmente, comecemos observando a resposta de um aluno, na figura abaixo.



c) É possível traçar retas paralelas para representar o caminho percorrido pelos dois barcos na folha de papel e na bola de isopor? Explique.

Em um Plano é Passível traçar este caminho, já na bola de isopor não será Passível, Pois ~~as duas~~ uma das retas não ~~estarão~~ estará no Ponto máximo da esfera.

A categoria 1 parece ser a mais apropriada a este tipo de resposta, pois quando o aluno se refere ao “ponto máximo da esfera”, possivelmente quer dizer círculo máximo. Isto denota uma ausência de familiaridade com o conteúdo e seus termos peculiares. O conceito de círculo máximo não é trivial e os alunos demonstraram dificuldade para entendê-lo. Para sublinhar este fato, citaremos mais alguns exemplos:

Aluno A: *"No plano há possibilidade de traçar retas paralelas já na esfera não pois as duas não estarão no extremo"*. Entendemos que o raciocínio está na direção correta, no entanto, há uma pequena confusão com os conceitos relacionados a círculo máximo. O aluno usa a palavra "extremo", talvez, para mostrar que se traçamos mais do que um círculo máximo sobre a esfera, eles devem se cruzar.

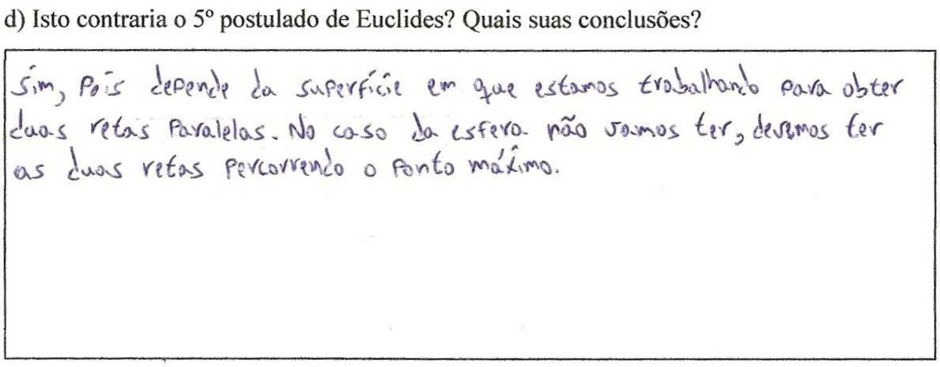
Aluno B: *"No plano é possível traçar retas paralelas, porém no isopor não, pois uma estará no extremo e outra não. Logo não são paralelas"*. Mais uma vez aparece a palavra "extremo" com a finalidade de falar de círculo máximo. Isto vem a confirmar a suspeita de que este conceito não foi compreendido de maneira satisfatória.

Observe na tabela abaixo o número de acertos nas questões.

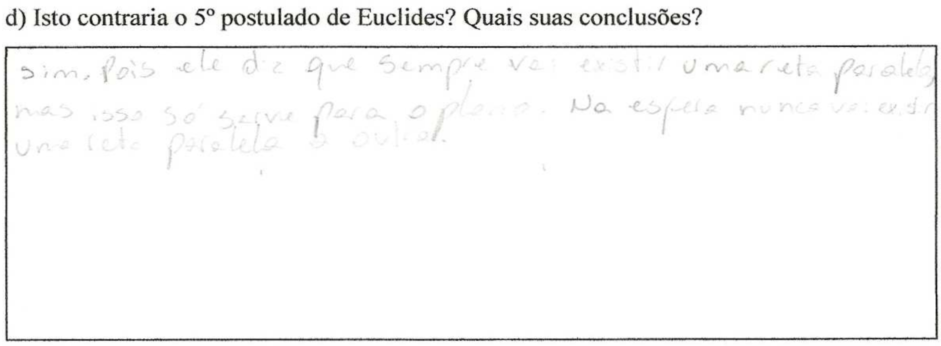
Categoria 1	Categoria 2	Categoria 3	Categoria 4	Categoria 5
9	5	6	4	1

d) Esta pergunta (Isto contraria o 5º Postulado de Euclides?) refere-se ao item anterior e sinaliza o momento maior do trabalho. Entendemos que os alunos fizeram exercícios em número suficiente para sentirem-se confortáveis a responder tal questão. Muito foi debatido em voz alta entre os grupos e mesmo conosco. A palavra postulado, neste momento, já era usada corriqueiramente e com boa compreensão.

Alguns alunos demonstraram um bom entendimento da questão, explicando em voz alta e debatendo o assunto entre os grupos. A seguir, reproduzimos algumas dessas respostas:

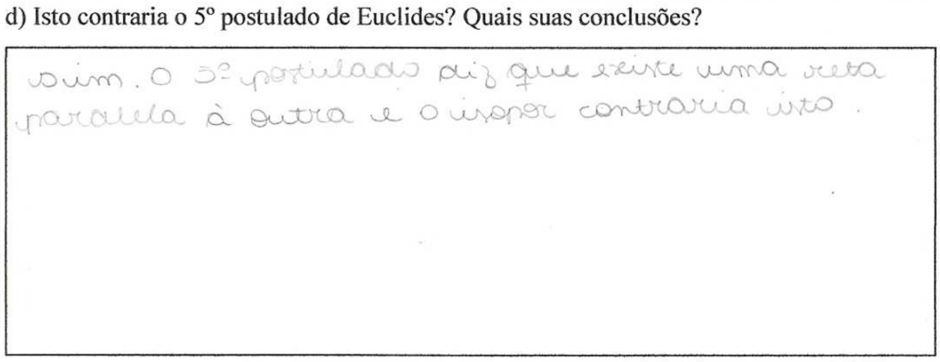

d) Isto contraria o 5º postulado de Euclides? Quais suas conclusões?

Sim, Pois depende da superfície em que estamos trabalhando para obter duas retas Paralelas. No caso da esfera não vamos ter, devemos ter as duas retas Percorrendo o Ponto máximo.



d) Isto contraria o 5º postulado de Euclides? Quais suas conclusões?

sim, Pois ele diz que sempre vai existir uma reta paralela
mas isso só serve para o plano. Na esfera nunca vai existir
uma reta paralela à outra.



d) Isto contraria o 5º postulado de Euclides? Quais suas conclusões?

sim. O 5º postulado diz que existe uma reta
paralela à outra e o isopor contraria isto.

Estas respostas se aproximam da categoria 1, porém, os alunos superaram o grau de entendimento proposto pela categoria. A tabela abaixo ajuda a pensar desta maneira.

Categoria 1	Categoria 2	Categoria 3	Categoria 4	Categoria 5
15	3	6	1	0

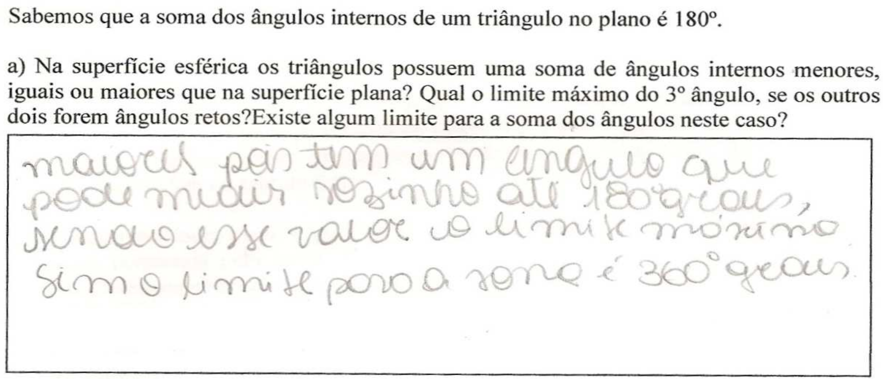
3. Triângulo esférico.

a) Nesta atividade, os alunos surpreenderam-se com o fato de que há triângulos cuja soma dos ângulos internos não resultam em 180º. Foi gerada uma discussão em aula sobre esta possibilidade e sob quais circunstâncias isto poderia acontecer. Alguns alunos chegaram a perguntar se existiam superfícies onde a soma dos ângulos poderia ser menor que 180º.

Foi interessante a maneira como a turma encarou esta atividade, pois todos mostraram-se muito curiosos e surpresos.

Neste momento os grupos já estavam quase todos misturados e as discussões eram partilhadas por praticamente todos os alunos. Isto colaborou para que houvesse um elevado índice de acertos.

O bom nível de entendimento pode ser representado pela resposta que mostramos abaixo.


Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano é 180º.

a) Na superfície esférica os triângulos possuem uma soma de ângulos internos menores, iguais ou maiores que na superfície plana? Qual o limite máximo do 3º ângulo, se os outros dois forem ângulos retos?Existe algum limite para a soma dos ângulos neste caso?

maiores pois tem um angulo que pode medir pertinho até 180 graus, sendo esse valor o limite máximo
Sim o limite para a soma é 360° graus.

Alguns dos alunos mostraram que não conseguiram perceber as diferenças quanto as propriedades geométricas em diferentes superfícies. Como exemplo, um dos alunos citou como resposta que ao limite máximo do 3º ângulo o valor 90º, justificando que o triângulo retângulo deve ter um dos ângulos retos, e que o mesmo está em oposição ao maior lado, a hipotenusa. Podemos classificar esta resposta na categoria 4. Quanto aos limites dos ângulos que poderiam ser obtidos com triângulos esféricos, as respostas foram bastante satisfatórias, principalmente se considerarmos as conversas entre os grupos. A tabela abaixo informa os dados quantitativos da atividade.

Categoria 1	Categoria 2	Categoria 3	Categoria 4	Categoria 5
14	2	4	4	1

b) Apesar do cansaço, os alunos se prontificaram a responder com calma o último exercício. Foi surpreendente que nenhum dos 25 alunos acertou completamente este item. Muitos fizeram confusão com os termos infinito e ilimitado, o que não é de se estranhar.

Em torno de 50% das respostas poderiam ser encaixadas nas categorias 3 e 5. Como exemplo, mostramos uma delas.

Categoria 1	Categoria 2	Categoria 3	Categoria 4	Categoria 5
5	2	8	4	6

b) O primeiro postulado de Euclides diz que por dois pontos pode passar apenas uma única reta. Isto se verifica também na superfície esférica? Nesta superfície as retas são infinitas e ilimitadas como na superfície plana?

Não, pois na esfera passam infinitas retas no mesmo ponto. Na plana não são infinitas, pois sempre por dois pontos passam só uma reta.

O aluno mostrou que não entendeu o enunciado, pois respondeu “...no mesmo ponto...” quando a pergunta se referia a apenas um ponto. Isto é visível também quando ele responde acerca da superfície plana (“Na plana não são infinitas...”), quando na verdade é questionado sobre a superfície esférica.

Talvez se explorássemos os significados de retas limitadas e infinitas pudéssemos obter melhores resultados.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final do trabalho apontamos alguns tipos de produções realizadas por alunos do Ensino Médio. Não foi objetivo nosso fazer um estudo de qualquer teoria que pudesse comprovar se era ou não possível propor o assunto tratado na escola, mas apenas contribuir no sentido de fornecer mais ferramentas para esta decisão. Tínhamos o sentimento inicial de que era possível que os estudantes conseguissem compreender alguns dos conceitos básicos da Geometria Elíptica, tais como o significado de um postulado e as possíveis mudanças nas propriedades geométricas causadas por uma superfície que não seja a plana. Esta sensação originou-se de algumas impressões advindas da participação em uma oficina de Geometria Não-Euclidiana no Colégio de Aplicação da UFRGS no ano de 2008. No entanto, é visível que a maior parte dos estudantes não domina de forma satisfatória os conceitos da própria Geometria de Euclides. Basta um rápido olhar pelas produções dos alunos para conferirmos este fato. Grande parte das respostas mostraram equívocos quanto aos conceitos mais básicos da matemática.

Se desconsiderarmos os equívocos cometidos em partes básicas da Geometria Euclidiana, podemos dizer que fomos surpreendidos por diversas respostas que indicaram um nível de aprendizado satisfatório. Nas conversas com os grupos de alunos e, posteriormente, utilizando o material para a análise dos dados, somos direcionados a concluir que é possível fazer uma inserção das Geometrias Não-Euclidianas no Ensino Médio. Lembramos que nossa conclusão é pautada em mais aspectos que a simples análise do material produzido pelos estudantes. Destacamos o "feeling" que tivemos na sala de aula durante a realização da oficina, pois observamos que houve empolgação, reações de surpresa, perguntas denotando interesse pelo tema e conversas entre os grupos.

Falamos de uma maneira geral, mesmo que tenhamos realizado um trabalho – na oficina – com apenas um tipo destas Geometrias, pois acreditamos que, por exemplo, a Geometria Hiperbólica teria um nível de compreensão muito semelhante ao da Geometria Elíptica. Cabe destacar, no entanto, que o modelo esférico parece ser mais apropriado a uma introdução do assunto – razão esta por optarmos pela Geometria Esférica – por ser mais familiar ao estudante.

Deste modo, entendemos que se faz necessário mobilizar um ensino de matemática que torne possível a apresentação deste tema que ainda é desconhecido da grande maioria dos estudantes – e até mesmo dos professores. A partir da análise do material produzido pelos alunos, pensamos que propostas nesse sentido são possíveis de serem realizadas em nossas escolas, mais precisamente no nível médio.

Porém, não é fácil encontrarmos sugestões ou propostas consistentes e sistemáticas que possam servir de orientação para a introdução do tema. A literatura sobre o assunto – tratada aqui como possibilidade de inserção e não como área matemática – se reduz a poucos artigos e livros que trazem propostas bastante parecidas e em nada podem garantir nosso sucesso em sala de aula. Entretanto, acreditamos que isto deva servir de motivação para trabalharmos em uma área que ainda tem muito a ser explorada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARCARI, I. **Um texto de Geometria Hiperbólica.** Dissertação de mestrado.Campinas, São Paulo, 2008

BARBOSA, J. **Publicações matemáticas – Geometria Hiperbólica.** Rio de janeiro, IMPA, 2002.

BOYER, C. B. **History of mathematics**. Ed. Blücher, São Paulo, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_01_internet.pdf. Acesso em 29 de setembro de 2009.

CURY, H. Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte, Ed. Autêntica, Coleção Tendências em Educação Matemática, 2007.

DAHMEN, S. R. **Einstein e a Filosofia.** Rev. Bras. Ensino Fís. Vol.28 no.1 2006, Disponível http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172006000100002&script=sci_arttext#tx05

DORIA, C. M. **Geometria Não-Euclidiana.Exemplos**;BienaldeMatemática;UFBA;Salvador; 2004.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** SP : Ed. UNICAMP, c2004.

KLINE, M. **Mathematics A cultural Approach.** Reading: Addison-Wesley, 1962.

MOREIRA, A.C. **Geometrias sob a Axiomática de Hilbert.** Campinas, 2006. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/sobhilbert.pdf

RICHTER,LOPEZ,FREITAS. **Currículo, formação de professores e o uso de imagens no ensino**. Disponível em http://www.ufsm.br/gpforma/2senafe/PDF/006e5.pdf

SANTOS, L. História das disciplinas escolares: outras perspectivas de análise, in **ANAIS Conferências, mesas-redondas e simpósios. Vol. II,** Ed. S.M. Chaves, F. A. Tiballi. Goiânia, 1994.

SANTOS L. e MOREIRA F. Currículo: Questões de Seleção e de Organização do Conhecimento, in **Currículo, Conhecimento e Sociedade.** Série Idéias,26. Ed. D. Tozzi, FDE, São Paulo, 1995.

WOLFE, H. **Introdution to Non-Euclidean Geometry.** New York, 1945.