UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – UFRGS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DANIELLE SANTOS AZEVEDO

ANÁLISE DE ERROS MATEMÁTICOS

interpretação das respostas dos alunos

PORTO ALEGRE

2009

DANIELLE SANTOS AZEVEDO

ANÁLISE DE ERROS MATEMÁTICOS

Interpretação das respostas dos alunos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador(a): Professora Marilaine de Fraga Sant'ana.

Porto Alegre

2009

DANIELLE SANTOS AZEVEDO

ANÁLISE DE ERROS MATEMÁTICOS

Interpretação das respostas dos alunos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, submetido à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

____

Marilaine de Fraga Sant'ana - UFRGS

____

Elisabete Zardo Búrigo – UFRGS

____

Marcus Vinicius de Azevedo Basso - UFRGS

Porto Alegre, 04 de dezembro de 2009.

Dedico esse trabalho a meus pais que me apoiaram em todos os momentos de minha formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me abençoado em toda minha jornada de estudos, sou muito grata a Ele por iluminar meu caminho. Agradeço a meus pais, João Araceli Gomes de Azevedo e Margarete dos Santos de Azevedo, os quais sempre me incentivaram a alcançar meus objetivos. Muito obrigada pelo carinho e amor sempre demonstrados por vocês. Sou eternamente grata por terem de ajudado a tornar possível minha formação universitária.

Agradeço a minha irmã e amiga, Aline Martins da Silva, que sempre teve paciência comigo em todos os momentos, bons e ruins. Muito obrigada por fazer parte da minha vida e dessa caminhada tão importante que estou trilhando.

Fico grata pelos ensinamentos de minha professora orientadora Marilaine de Fraga Sant'ana e, também, agradeço aos professores que aceitaram participar da banca examinadora, Elisabete Zardo Búrigo e Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

RESUMO

Muitos professores consideram o erro como um passo negativo e, muitas vezes, inaceitável por parte dos alunos. Em alguns casos, isso se deve ao fato de que durante o período escolar desses professores, a avaliação era realizada de uma forma classificatória e autoritária, não permitindo um acompanhamento diferenciado nas análises dos erros cometidos pelos alunos (HOFFMANN, 2006, p. 12). O erro jamais era visto como algo altamente necessário para o desenvolvimento de cada indivíduo. Quem já não escutou a frase "é errando que se aprende"? Pois é exatamente esse assunto que será abordado neste trabalho. Serão retratadas as distintas formas que os educadores podem analisar os erros que seus alunos fazem nas atividades desenvolvidas a fim de melhorar o ensino de matemática, tornando-o mais agradável. Além disso, devido a essa concepção negativa do erro que pode ser levada em conta por alguns professores e, também, a metodologias que privilegiam a memorização, a mecanização e a repetição, os alunos, muitas vezes, não gostam de estudar matemática, por não encontrarem sentido e significado nas atividades que realizam. Logo, a análise de erros precisa estar acompanhada de uma metodologia diversificada e dinâmica.

As ilustrações de erros que serão apresentadas ao longo deste trabalho foram coletadas durante minhas práticas docentes enquanto aluna da UFRGS. A Universidade, com algumas das disciplinas oferecidas, pode me proporcionar essa percepção, de como a análise de erros é importante para o ensino e aprendizagem de matemática. Com a compreensão do que levou determinado estudante a cometer o erro, torna-se mais fácil elaborar atividades que visem trabalhar melhor as dificuldades dos alunos, uma vez que há mais probabilidade de detectar qual parte do conteúdo em questão não está sendo entendido pelo aluno.

Palavras-chave: análise de erros, ensino de matemática.

ABSTRACT

Many teachers consider the error as a negative step and often unacceptable by the students. In some cases this is due to the fact that during the life school teachers, evaluation was performed in a graded and authoritarian, not closely monitored, allowing the analysis of mistakes made by students (HOFFMANN, 2006, p. 12). The error was never seen as much needed for the development of each individual. Who has not heard the sentence "is missing you learn? It is exactly this issue to be addressed in this final work. Be portrayed the different ways that educators can analyze the errors that their students do the undertaken to improve the teaching of mathematics, making it more enjoyable. Moreover, because of this negative conception of the error that can be taken into account by some teachers and also the methodologies that emphasize memorization, the mechanization and repetition, students often do not like to study mathematics, for not meeting sense and meaning in the activities they carry. Therefore, the error analysis must be accompanied by a diverse and dynamic methodology.

The illustrations of errors that will be presented throughout this final work were collected during my teaching practices as a student at UFRGS. The University, with some of the courses offered, can in the activities they carry, how the error analysis is important for teaching and learning of mathematics. With the understanding of that particular student took the mistake, it becomes easier to develop activities aimed at better addressing students' difficulties, since there are more likely to detect which part of the content in question is not understood by the student.

Keywords: analysis of errors, education of mathematics.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Canetas vermelhas, folhas com marcações de "X" nas respostas erradas, problemas de relacionamento entre professores e alunos e medo da matemática. Esse é um cenário, muitas vezes, clássico de uma aula de matemática nas escolas de Ensino Fundamental e Médio. Diante disso, questiono-me por que, na maioria das vezes, sinalizamos somente com um "X" uma resposta de um aluno que não era a esperada. O que se espera do aluno destacando sua resposta dessa forma? Estaremos, nós, corrigindo as atividades da melhor maneira possível? Corrigir, avaliar nunca foi e nunca será uma tarefa fácil para os professores, mas é algo indispensável para que se possa auxiliar os alunos no decorrer de seus estudos. Mas será que apenas marcando um "X" na resposta "errada" e, posteriormente, devolvendo as atividades com essas marcações estaremos auxiliando-os realmente? Esse sinal (X) não cria condições ao educando para que ele perceba seu erro, ele apenas verifica que a resposta dada não está correta, mas não sabe o porquê disso.

Cometer um erro após ter escutado todas as explicações do professor não necessita ser encarado como um fato grave. É preciso compreender que cada aluno tem seu ritmo de aprendizagem, cada aluno determina um foco diferente nas aulas, devido às suas vivências, ou seja, não se pode esperar que todo aluno receba as informações que estamos tratando em aula da mesma forma. Cada aluno devido às suas experiências, as suas singularidades, desenvolve diferentes raciocínios frente a determinados problemas, seja em sala de aula ou fora dela. Assim, na visão que será defendida no trabalho seria interessante tentar entender, através da análise dos erros dos estudantes, como cada um está pensando, como que se deu a construção do conhecimento de cada um deles.

Nessa concepção, a análise dos erros surge como um recurso para auxiliar os professores a compreender melhor os raciocínios dos alunos. O erro que o aluno comete é uma informação muito valiosa, no sentido que com ele podemos investigar se ele está ou não compreendendo o que está sendo ensinado e, caso não esteja entendendo, é possível verificar o que está provocando essa incompreensão. Essa forma de avaliação não se resume a uma prática rotineira e automatizada. Quando referimo-nos a analisar os erros, não estamos dizendo para o professor apenas marcar um "X" nas respostas que não são as esperadas e devolver a atividade ao aluno sem falar absolutamente nada sobre o equívoco, por exemplo. Pensamos que o papel do professor é auxiliar os alunos na construção do conhecimento e, para isso, seria importante tentar compreender o que aconteceu, o que o aluno pensou para chegar à resposta que não era a correta. Muitos podem alegar que não há tempo para corrigir dessa forma tão detalhada as atividades produzidas, uma vez que lecionam para muitas turmas e em mais de um turno, por exemplo. Porém, por mais que seja um trabalho que exija tempo, é um trabalho gratificante, pois dessa forma teremos a certeza que estaremos cumprindo nosso dever enquanto professor.

A análise dos erros é muito importante tanto para o ensino quanto para o aprendizado de matemática, pois, dessa maneira, investigamos e dinamizamos continuamente o processo de construção do conhecimento dos alunos. Baseado nisso, Hoffmann defende que

> A avaliação é essencial à educação. Inerente e indissociável enquanto concebida como problematização, questionamento, reflexão sobre a ação. 'Educar é fazer ato de sujeito, é problematizar o mundo em que vivemos para superar as contradições, comprometendo-se com esse mundo para recriá-lo constantemente'. (Gadotti, 1984) Um professor que não avalia constantemente a ação educativa, no sentido indagativo, investigativo do termo, instala sua docência em verdades absolutas, pré-moldadas e terminais (HOFFMANN, 2006, p.15).

Assim, a avaliação em uma perspectiva que leve em consideração a análise dos erros, pode ter um caráter questionador, no sentido de que podemos dialogar com o aluno a fim de descobrir e entender as suas dificuldades e, também, cabe a nós, educadores, nos indagar, refletir sobre como estamos lidando com essas dificuldades em sala de aula, sobre nosso papel enquanto professor, sobre a nossa maneira de avaliação,... Enfim, precisamos estar atentos ao que acontece nas aulas para que possamos, juntamente com os alunos, realizar um trabalho prazeroso e de qualidade. Assim como argumenta Hoffmann, essa reflexão que retratamos acima precisa ocorrer durante toda a prática docente, uma ação contínua e constante, isto é, é uma "reflexão permanente do educador sobre sua realidade, e acompanhamento de todos os passos do educando na sua trajetória de construção do conhecimento" (HOFFMANN, 2006, p. 17).

Ao analisar os erros dos alunos, o professor deixa de apenas dizer o que está certo e o que está errado para acompanhar o aluno no processo de construção do conhecimento, para auxiliá-lo nas suas dúvidas e inquietações. Mas, é claro que apenas essa análise não basta para fazer com que o aluno goste de matemática. Além disso, aulas dinâmicas, desafiadoras e problematizadas atraem muito mais a atenção e despertam o interesse do aluno para os conteúdos que devem ser ensinados. Com isso, devemos ter o cuidado de não planejar atividades mecânicas e repetitivas, pois elas estagnam o raciocínio dos alunos. Enfim, as atividades precisam ser problematizadas.

Além disso, é importante ressaltar a motivação para essa pesquisa. Durante toda a minha vida escolar, como educando, a avaliação para mim era como um "bicho de sete cabeças", sempre me sentia pressionada a tirar uma boa nota nas provas de cada trimestre, pois a avaliação era apenas baseada nessas provas e em alguns trabalhos, mas o que realmente importava, para os professores, eram as provas. Não descartaria sua necessidade, pois é um momento no qual o professor sabe que os alunos resolvem as questões individualmente. A prova não precisa representar a parte mais importante da avaliação. A avaliação é um conjunto de fatores e, por isso, acreditamos que aprovar ou reprovar um aluno apenas pelo seu resultado na prova não é o melhor método avaliativo. Alguns alunos ficam muito nervosos com a famosa prova e isso faz com que eles não produzam a mesma qualidade que mostram em sala de aula. Nesse sentido, realizando uma avaliação contínua há mais chances de saber se o aluno foi mal na prova porque não estudou ou se foi mal por motivos pessoais.

Ao começar a lecionar, meu primeiro objetivo era não fazer com que meus alunos sentissem o mesmo que eu, assim, realizei uma avaliação contínua e isso foi possível, principalmente, através da interpretação das respostas dos alunos. Durante as disciplinas de Laboratório de Prática de Ensino-aprendizagem em Matemática foram realizadas assessorias em duas escolas. Em uma delas, o projeto era realizado com alunos que estavam apresentando dificuldades em conteúdos anteriores ou até mesmo no conteúdo que estava sendo abordado em aula (o número de alunos era, em média, de 10 alunos). Na outra, o projeto era realizado no turno oposto ao turno normal dos alunos, pois assim aqueles que tivessem interesse poderiam participar (o número de alunos era, em média, de 20 alunos). As séries trabalhadas nas escolas variaram entre 6ª a 8ª série. O projeto era realizado em sala de aula, através de atividades que complementassem a formação estudantil, mas se o aluno quisesse esclarecer alguma dúvida que surgira com o professor titular, esse espaço também era oferecido. Além disso, durante a disciplina de Estágio em Educação Matemática III, também foram coletados materiais produzidos pelos alunos, sendo que nesses manuscritos era feita essa interpretação das respostas dos alunos, a qual será mostrada mais adiante.

Sempre me perguntei, durante minha graduação em Licenciatura em Matemática, se ter acertado uma questão equivalia a ter entendido, ou se errar significava que o aluno não havia compreendido o conteúdo. E, durante minhas experiências docentes, percebi que isso nem sempre era verdade. Muitos alunos não respondem o que se espera por terem construído um raciocínio próprio, diferente, para a resolução dos problemas, isto é, são erros coerentes com o raciocínio elaborado. Com isso, comecei a analisar as respostas dos alunos, interpretar o que os levou a dar determinada resposta, consequentemente meu interesse pelo assunto de análises de erros foi aumentando.

Tendo essa perspectiva de acompanhamento contínuo do desenvolvimento de cada aluno, de questioná-los quanto às respostas dadas, levantando alternativas diversificadas, nas minhas práticas de estágio, durante o último ano da faculdade, realizei essas ideias avaliativas de análise retratadas. Em cada aula eram fornecidas atividades aos alunos, mesmo que pequenas, para serem entregues na próxima aula ou então na próxima semana. Não vou dizer que não era trabalhoso corrigir todos os 35 temas da forma que estou defendendo, mas, dessa maneira, eu conseguia entender melhor o que cada aluno estava pensando a respeito do conteúdo que estava sendo ensinado e, por conseguinte, conseguia ajudá-los nas suas dificuldades.

A interpretação das respostas dos alunos difere de uma avaliação que evidencia uma norma, que tem um caráter classificatório e comparativo. Esse assunto sempre me chamou muito a atenção pelo fato de além de ser um ótimo tema para pesquisa é um excelente recurso se usado em sala de aula. Com a análise de erros, o professor abre espaço para questionamentos em sala de aula e assim como argumenta Hoffmann (2006, p. 19), a avaliação de "um momento terminal do processo educativo (como hoje é concebida) para se transformar na busca incessante de compreensão das dificuldades do educando e na dinamização de novas oportunidades de conhecimento".

Devido a esse meu interesse, comecei a ler obras escritas pela Doutora Helena Noronha Cury, o que me motivou ainda mais a estudar sobre esse assunto. As suas pesquisas estão centradas justamente na análise de erros, divulgadas através de publicações em periódicos, palestras e em eventos científicos. Cury (1988, 1990, 1992, 1994, 2007) defende, em uma visão geral, que a análise de erros além de ser uma abordagem de pesquisa é também uma metodologia de ensino que tem por objetivo levar os alunos a questionarem as suas próprias respostas, as suas soluções, ou seja, a análise das respostas dos estudantes gera uma verdadeira reflexão sobre o processo de aprendizagem.

Além disso, o que me motivou a trabalhar com atividades problematizadoras foi a percepção de que o professor não é um transmissor de informações e conteúdos de uma forma mecânica e automatizada, um dos papéis de um professor é interrogar-se sempre sobre o significado de suas aulas, no que elas estão, de fato, auxiliando os alunos e, principalmente, questionar-se sobre as respostas dadas por eles e, assim como afirma Cury (2007, p. 28), seria de grande valia "voltar ao aluno e auxiliá-lo a fazer uma análise da sua forma de aprender".

2. OBJETIVOS

A análise das respostas dos estudantes possibilita uma melhor compreensão das suas dificuldades didáticas, podendo, assim, encontrar as possíveis causas dos erros cometidos e se de fato quando o aluno acertou uma questão é porque houve um entendimento por parte dele. Dessa forma, podemos observar como se dá a aprendizagem deles em relação à matemática. Além disso, um dos propósitos do trabalho é verificar como a análise de erros é abordada em livros e em outras publicações, ou seja, será feita uma pesquisa bibliográfica sobre esse tema para assim debater como os educadores poderiam avaliar seus alunos quando a resposta dada em exercícios não é a esperada.

Todavia, esse não é o único objetivo do trabalho, não adiantaria defender a análise das respostas dos alunos sem instruir os educadores a entender esse processo de aprendizagem. Por isso, abordaremos questões sobre o ensino predominante de matemática, disciplina que ocupa um espaço importante nos currículos escolares, para tentar verificar se a análise de erros é um ótimo recurso para avaliar e auxiliar os alunos no seu desenvolvimento escolar. O ensino mecanizado, técnico, monótono e descontextualizado, na maioria das vezes, não motiva o aluno para o "aprender", ele encara as aulas apenas como algo obrigatório, deve estar na escola porque os responsáveis mandam, por exemplo. Por conseguinte, será abordada o ensino predominante da matemática para que fique mais clara a importância da aplicação da análise de erros em sala de aula.

Como a matemática, muitas vezes, é considerada uma ciência exata e pronta, os professores avaliam apenas a resposta final, ao invés de considerar o processo intermediário que o aluno teve para chegar àquela resposta, a interpretação do aluno não é levada em conta, pois, devido a essa concepção da matemática, pensa-se que a resposta final deve ser única. Enfim, revendo o ensino de Matemática, favoreceremos ainda mais o uso da criatividade dos estudantes.

Outro ponto importante que devemos ressaltar é que nessa maneira de avaliação, não cabe usarmos o termo "não deve ser", ao contrário, o que é mais plausível de ser dito aos alunos em termos de uma melhor avaliação é "ser melhor" (HOFFFMANN, 2006, p. 11). Ou seja, o erro não precisa e nem deve ser encarado como um fracasso escolar. Pensamos que não é preciso considerar apenas como resposta certa aquilo que definimos como ideal, o aluno pode ter tido um raciocínio diferente do correto, um raciocínio desenvolvido a partir de conceitos conhecidos, mas que o tenha levado a um erro coerente. Logo, na visão desse aluno, segundo o seu pensamento, a resposta que ele obteve está sim correta. Um exemplo disso é quando o aluno aprende que a raiz quadrada do produto de dois números reais é igual ao produto da raiz quadrada de um dos números pela raiz quadrada do outro e tenta generalizar esse fato para a raiz quadrada da soma de dois números. Não é um erro absurdo para quem está tentando definir e/ou generalizar para outros casos. Cabe ao professor orientador o aluno a fim de mostrar que essa propriedade não vale para a soma.

Todas essas questões a respeito da análise de erros não são estudadas para que permaneçam apenas no papel, a análise, assim como afirma Cury (2007, p. 13), é para ser empregada em sala de aula, pois, assim, a maioria dos alunos poderá questionar suas próprias opiniões, criando uma visão crítica sobre as coisas que o cercam. É extremamente útil na aprendizagem dos estudantes que o professor use os erros em sala de aula para debater as respostas dadas de uma maneira que trate os erros como uma etapa importante para a construção do conhecimento. E, baseado nisso, é objetivo do trabalho também analisar se a análise de erros foi útil para a construção do conhecimento dos alunos durante um dos meus estágios realizados em uma escola.

3. ALGUNS ACONTECIMENTOS E CONCEPÇÕES HISTÓRICAS DA MATEMÁTICA

Para compreender melhor o ensino de matemática, as concepções que embasam as atitudes dos professores perante o que deve ser ensinado, na maioria das escolas, para entender as tomadas de decisões dos educadores em sala de aula, é importante analisar os fatores sociais, econômicos, políticos e históricos da matemática. E, para isso, faremos um retrospecto histórico, verificaremos algumas influências na Matemática atual. Essas influências vêm desde os gregos, passam pelo racionalismo originado na Idade Média, pelas escolas filosóficas, terminando nos bourbakistas e na Reforma da Matemática Moderna (CURY, 1992, p. 15).

Platão influenciou muito os pensadores matemáticos de sua época (em 387 a.C. Platão fundou sua Academia), ele acreditava que a matemática era uma descoberta e não uma invenção, como alguns acreditavam. Platão deu origem a famosa "Matemática platônica" ou "Platonismo em Matemática". Sua crença era baseada na existência de entes matemáticos em um mundo à parte, a qual independia dos indivíduos e era assimilável pela razão. Cabia aos matemáticos descobrir tudo que temos na Matemática hoje, as verdades estão lá, prontas na natureza, restava encontrá-las e associá-las ao que era desejado (CURY, 1992, p. 16). Além do mais, Descartes, outro pensador matemático dessa época, parecia ter a mesma idéia de Platão, uma vez que ela defendia o fato da Matemática estar no desenvolvimento do hábito de pensar:

> E, considerando que, entre todos os que até aqui procuraram a verdade nas ciências, só os matemáticos puderam encontrar algumas demonstrações, isto é, algumas razões certas e evidentes, não duvidei de que deveria começar pelas mesmas que eles examinaram; embora não esperasse delas nenhuma outra utilidade a não ser habituarem o meu espírito a alimentar-se de verdades e a não se contentar com falsas razões (DESCARTES, apud CURY, 1992, p. 22).

Mas nem todos os pensadores dessa época pensavam dessa forma, Aristóteles era um exemplo. Ele defendia uma filosofia que em alguns aspectos era contrária a de Platão. Para Aristóteles, a possibilidade de abstração não indica na existência independente do que foi abstraído. Assim, a Matemática era baseada nas abstrações, mas partindo de objetos do mundo palpável (CURY, 1988, p. 17).

Independentemente dessas idéias, o que elas tinham em comum era a "visão absolutista da Matemática", na qual a matemática é considerada como uma verdade suprema e representante de um domínio único do conhecimento, saber e entender matemática era sinônimo de inteligência na época de Platão.

Devido a essa concepção absolutista da Matemática, os matemáticos da época de Platão exigiam o uso da abstração, o pensamento que tomasse o concreto como ponto de partida era censurado. Cabe salientar que mesmo hoje, algumas escolas ou instituições não permitem o uso do material concreto como um meio de aprendizagem. Um exemplo disso é o método Kumon, no qual o aluno não pode contar com o auxílio dos dedos ao realizar qualquer operação elementar (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Em geral, a matemática era considerada difícil, um estudo apenas para aquelas pessoas mais aptas, para aqueles que têm condições de aprofundar esse conteúdo. A capacidade de aprender matemática foi, na maioria dos casos, considerada como uma das medidas principais da inteligência de uma pessoa, ou seja, ter um raciocínio matemático não desenvolvido era um estigma que marcava a pessoa por toda sua vida escolar. Certas disciplinas, como artes, não tinham tanto valor acadêmico como a matemática, uma vez que a "fraqueza" em artes não significava que o aluno não era dotado de inteligência (CURY, 1992, p. 19).

Mas essa concepção da Matemática como uma disciplina marcante para caracterizar quanto um aluno é ou não inteligente é relativa. Dizer que se um aluno é bom em matemática então ele, com certeza, entenderá com facilidade todas as outras disciplinas, nem sempre é verdade. Se o ensino de Matemática foi baseado na memorização de regras e conceitos e na mecanização e repetição de exercícios- padrão, o aluno terá grandes chances de compreender melhor as disciplinas que também trabalham com essa metodologia, mas se esse aluno encarar um professor que exija a utilização da criatividade, da capacidade de criar, analisar, criticar, muito provavelmente esse aluno enfrentará enormes dificuldades (CURY, 1992, p. 18).

No início do século XX, esta visão sobre a Matemática estava sendo abalada devido às contradições oriundas da lógica e da Teoria dos Conjuntos, surgindo, assim, a "crise dos fundamentos". Então, as três correntes filosóficas (Logicismo, Intuicionismo e Formalismo) foram uma tentativa de revigorar o absolutismo matemático (CURY, 1992, p. 25). O Logicismo, como o próprio nome já diz, é uma filosofia que defende que a Matemática é parte da lógica e que para assegurar a verdade matemática é preciso se basear em axiomas da Lógica. "Os conceitos matemáticos seriam definidos em termos dos conceitos lógicos e os enunciados matemáticos verdadeiros seriam demonstrados a partir dos princípios lógicos" (CURY, 1992, p. 26). Já o Intuicionismo leva em conta os axiomas baseados na intuição. Essa filosofia afirma que a Matemática não é totalmente certa e segura e que os elementos principais e básicos da Matemática precisam ser reconstruídos, uma vez que o Intucionismo considera que há aspectos equivocados na Matemática Clássica. Assim, o objetivo dessa corrente era reconstruir toda a base da Matemática Clássica, exceto a Matemática construída a partir dos números naturais (CURY, 1994, p. 54).

O Formalismo trata a matemática apenas como uma manipulação de símbolos. A base para a verdade da Matemática são os princípios incontestáveis da meta-matemática. Mas esse foco apenas na formalização tornou a matemática uma disciplina sem sentido para a maioria dos alunos. A partir de todas essas concepções, grande parte dos professores de Matemática sentia-se pressionada a exigir dos alunos um alto nível de formalização, o que ocasionou péssimas consequências na aprendizagem dos alunos (CURY, 1992, p. 26).

Mas essas caracterizações somente existiam devido às dificuldades encontradas em matemática por grande parte dos alunos e estudiosos. Estas dificuldades encontradas no ensino vêm sendo perpetuadas desde a "crise dos fundamentos" até a década de sessenta, época em que o ensino de matemática enfrentou uma grande, profunda e radical reforma, originando, assim, a chamada *Matemática Moderna* (ÁVILA, 1993, p. 1). A Matemática Moderna pretendia aproximar a Matemática desenvolvida na escola básica com a Matemática produzida por pesquisadores de matemática e no ensino superior. As pessoas que eram a favor dessa reforma confiavam que os alunos conseguiriam acompanhar e lidar com a tecnologia que estava surgindo.

> (...) a principal diferença entre a matemática clássica e a matemática moderna reside no fato de a primeira ter por base os **elementos simples** tais como os números inteiros, o ponto, a reta etc... e a segunda um **sistema operatório**, isto é, uma série de estruturas (Bourbaki), sobre as quais se assenta o edifício matemático, destacando-se entre elas as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas (SANGIORGI, apud VALENTE, 2008, p. 12).

Segundo Valente (2008, p.7), esse movimento se caracteriza pela elaboração de novas referências para a disciplina de Matemática. O objetivo principal da Matemática Moderna era internacionalizar a matemática escolar, uma matemática mais "científica", mais semelhante àquela estudada no ensino superior. Além disso, esse movimento eclodiu nos Estados Unidos e na Europa no início da década de cinqüenta, cujas origens eram a famosa "Crise dos Fundamentos" e as mudanças criadas na Matemática devido a Teoria dos Conjuntos (CURY, 1988, p. 12).

Bourbaki influenciou, de maneira decisiva, na *Reforma da Matemática Moderna* através da sua concepção formalista sobre a natureza da matemática. Porém, a implementação das ideias desta reforma, no Brasil, gerou bastantes contradições, já que dava uma supervalorização no rigor, na axiomatização, no conceito de estrutura e na unificação da Matemática através da Teoria dos Conjuntos, sendo que a maioria dos educadores não estava preparada para ensinar segundo essa nova teorização (CURY, 1992, p. 26). Alguns professores sofreram com essa reforma, pois não tiveram muito tempo para se adaptar com a mesma e, com isso, baseavam suas aulas apenas em livros didáticos adotados pelas escolas, os quais trabalhavam com as concepções da *Matemática Moderna*, consequentemente, as aulas que lecionavam estavam bastante envolvidas com uma metodologia de ensino formal (CURY, 1988, p. 15). Um trecho de Cury retrata melhor o que aconteceu no Brasil nessa época,

> No Brasil, considera Rodrigues (1978) que o ponto de partida para o movimento da reforma foi o 1º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática, realizado em 1955, em Salvador. Nas conclusões do plenário, foi sugerida a organização de novos programas para o ensino de Matemática em nível secundário. Em 1957, em Porto Alegre, realizou-se o 2º Congresso, no qual a professora Odila Barros Xavier, do Instituto de Educação General Flores da Cunha, propôs um programa de Matemática para o curso normal que incluía teoria dos conjuntos, correspondência biunívoca e diferentes sistemas de numeração. Outros professores propuseram modificações, como Ubiratan D'Ambrósio, que sugeria, para o curso secundário, o estudo de conjuntos e estruturas algébricas, bem como de transformações geométricas (CURY, 1988, p. 13).

Em 1959, houve o 3º Congresso, no Rio de Janeiro, no qual foi manifestado a ideia de que algumas escolas começassem a trabalhar de acordo com as concepções da reforma da *Matemática Moderna*. Assim, após a criação do GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática) em São Paulo, no 4º Congresso (1962), em Belém do Pará, esse grupo mostrou uma proposta de incorporação da reforma citada aos currículos dos cursos primários. Segundo Rodrigues, essa incorporação repentina nos currículos escolares provocou consequências desanimadoras para o Ensino de Matemática, pois não houve uma adequada preparação dos educadores para lecionar segundo essa nova tendência.

Os educadores, muitas vezes, devido à exigência de uma formalização considerada sem sentido para os alunos, avaliavam as provas com um rigor matemático que não utilizavam em suas aulas, davam como erradas algumas respostas dos estudantes, somente porque não estavam escritas com o simbolismo matemático desejado (CURY, 1992, p. 27).

No início, os reformistas tiveram apoio de muitas pessoas e poucos opositores. A maioria dos professores era adepta às mudanças propostas pela *Matemática Moderna*. Porém, com o passar do tempo, estas propostas não se mostraram eficientes, o que fez com que o número de opositores aumentasse, diferentemente do que aconteceu com o número de seguidores. Consequentemente, começaram a aparecer muitas críticas a essa tendência aliadas às evidencias da ineficácia dessa orientação educacional, logo, novas mudanças foram feitas com o intuito de corrigir os rumos que vinham sendo seguidos pela *Matemática Moderna* (ÁVILA, 1993, p. 1). Não obstante a essas novas reformas, no Brasil, ainda convivemos com resquícios das ideias que faziam da Matemática um estudo formalista e, até mesmo, desnecessário na visão dos alunos (ÁVILA, 1993, p. 2).

4. A PRÁTICA EDUCACIONAL E SUAS CONCEPÇÕES

As concepções dos professores quanto à natureza da Matemática estão intimamente ligadas às suas concepções e crenças sobre o ensino e aprendizagem da mesma. Um professor não precisa determinar qual tendência pedagógica seguirá por toda a sua profissão, qual metodologia de ensino aplicará em todas as aulas, ele pode mudar de opinião conforme a turma e a escola em que for lecionar. Também é possível que as visões filosóficas e pedagógicas de cada educador sejam referentes às qualidades encontradas em cada tendência.

Não está sendo defendido a ideia de que cada professor deva basear sua prática em apenas umas das tendências aqui explanada, ao contrário, acreditamos que os educadores podem avaliar cada uma delas e usar em sala de aula aquilo que cada uma tem de bom, não existe uma concepção de Matemática que se destaque das demais, uma complementa a outra em sua essência.

O ensino predominante atualmente, na maioria das vezes, está bastante relacionado com a Matemática Platônica, já que a vê como uma ciência puramente estática, pronta, acabada e unificada universalmente. Nesse modelo, acontece a transmissão dos conhecimentos, os quais devem ser acumulados pelos estudantes, independente da maneira como farão isso. Aqui, o professor deixa de ser um ser mediador, um orientador para o aprendizado e o aluno é encarado como um ser passivo, que aceita como verdade incondicional aquilo que o professor lhe transfere. Os conteúdos, na maioria das vezes, não são construídos pelos alunos e professores. E, não obstante a isso, a avaliação é, muitas vezes, objetiva e é realizada por meio, somente, de provas muito difíceis. Em relação a isso, Cury menciona que:

> Ao apresentar regras, siglas e desenhos prontos, o professor está impedindo o aluno de fazer suas próprias conjecturas e testá-las. Logicamente, o aluno errará algumas vezes, mas é a partir destes erros que se dará a construção do conhecimento. Portanto, quando a Matemática é considerada um corpo de conhecimento que deve ser ‘passado’ aos alunos, os erros são estigmatizados e só a correção absoluta das respostas é esperada. Por outro lado, se a Matemática é vista como um processo, uma caminhada plena de acertos e erros até atingir o conhecimento, os erros são aceitáveis como passos inevitáveis na obtenção das soluções dos problemas (CURY, 1990, p. 20).

Nesse ambiente de relações de poder, era solicitado que os alunos obedecessem muitas regras para não serem punidos, mas sim recompensados, como fazer silêncio durante toda a aula, esperar o professor terminar a explicação para depois interromper a aula com perguntas e fazer todos os deveres de casa de maneira impecável. Com essa visão, os erros eram considerados como um passo do meio escolar que deveria ser evitado.

Cabe, também, ressaltar o estilo tecnicista, o qual se caracteriza pelo uso de técnicas na resolução da maioria dos problemas matemáticos. O professor é encarado como um técnico que organiza e o estudante um ser passivo, que apenas recebe as informações. Esse estilo tenta mostrar que a Matemática pode ser reduzida a um conjunto de técnicas, sendo que o ideal é que os alunos consigam reproduzir de forma mecânica os conteúdos abordados. Não é exigido ao aluno que ele explique seu raciocínio e, além disso, o professor não é visto como algo central, nem os alunos, mas sim os objetivos instrucionais e nas técnicas de manipulação (HENDGES, Cléo Luiz; RAUPP, Evandro; FARIAS, Marcelo Luís, 2005, p. 4).

É uma pedagogia engajada na acumulação de conceitos, regras e procedimentos que, muitas vezes, não fazem sentido para os alunos. O aluno está na sala de aula apenas para receber, decorar e aplicar depois essas informações, quase nunca para questioná-las. Nessa abordagem, a avaliação, na maioria das vezes, é feita com uso de testes de múltipla escolha, repletos de pequenos erros (os famosos pega- ratões do senso comum) para que apenas os "melhores" alunos consigam resultados bons, portanto, o erro é tido com algo ruim, que afeta o desenvolvimento dos alunos. Todavia essa qualificação de melhor é relativa. Acredita-se que um aluno bom é aquele que pensa, que critica, que analisa as informações que recebe e não aquele que sabe decorar e produzir ordenadamente tudo o que o professor ensinou, sem se questionar sobre as informações recebidas. Todo professor, ao planejar suas aulas, sempre pensa em que cidadão deseja formar durante a sua prática.

A concepção apresentada no trabalho considera a matemática como uma criação do homem, que permanece constantemente se desenvolvendo. É dada grande ênfase na resolução de problemas, na construção do conhecimento e na análise crítica dos alunos, ou seja, eles são vistos como serem presentes, participantes e influentes na vida escolar e não apenas receptores de informações. Os alunos têm um papel ativo, autônomo e explorador. As avaliações são contínuas, não são momentos estanques dentro da sala de aula, e não realizadas apenas por intermédio de provas, mas sim através de observações diárias sobre o trabalho que cada aluno desenvolve e de relatórios orais e escritos. Dessa maneira, há uma forte interação entre os alunos com o professor.

O erro é considerado importante para a construção do conhecimento e a análise das respostas tem por finalidade observar, identificar e conhecer melhor os raciocínios dos alunos, oferecendo oportunidades e possibilidades para novas descobertas. O que pode ocasionar mais probabilidade do aluno sentir-se desafiado e não conformado com tudo que o cerca.

As práticas educacionais, em alguns casos, se opõem às visões e perspectivas dos professores. As exigências do sistema escolar, diversas vezes, fazem que os educadores ignorem suas crenças para poder se adaptar ao método de ensino solicitado pela escola. Muitos pais, devido ao ensino que obtiveram, pensam que cadernos repletos de exercícios e de conteúdos é o que realmente interessa, uma vez que esse é o único meio de ensino que grande parte conhece. Atividades diferenciadas se realizadas por um longo período de tempo geram conflitos no ambiente escolar, entre alunos, pais e professores. Defendendo essa mesma ideia, Cury afirma que

> Desta forma, por exemplo, um professor pode ter uma concepção construtivista, mas lecionar em uma escola tradicional, cujos alunos (e pais) solicitam um ensino eficiente, que apresente ótimos resultados em um mínimo de tempo. Como fica sua visão de erro? Ele poderá ter o tempo necessário para esperar que seus alunos partam dos erros cometidos e construam o conhecimento? Como a escola vai aceitar sua conduta? E os pais, acreditarão que aquele trabalho vai levar os seus filhos a competirem em condições de igualdade com outros alunos, 'treinados' para o vestibular, por exemplo? (CURY, 1992, p. 37).

Por conta dessas questões, a prática do professor merece ser sempre refletida, para que sua prática e suas concepções caminhem juntas. Os professores que se enquadram mais em uma visão platônica ou formalista da Matemática, na maioria das vezes, não possuem essa tomada de consciência, uma vez que os princípios matemáticos já estão definidos. Suas crenças são rígidas e imutáveis. Mas grande parte dos educadores que são mais adeptos da visão na qual o erro não é ruim para o crescimento e maturação do aluno, a qual é uma visão aberta a novas ideias, que considera a Matemática uma disciplina que evolui com o passar do tempo, têm mais consciência da reflexão que deve ser feita, ocasionando um freqüente questionamento sobre o ensino atual.

Enfim, podemos encontrar outras alternativas para as práticas do professor nas quais o erro possa ser considerado como fator fundamental para gerar melhores possibilidades para uma construção do conhecimento mais proveitosa.

5. REFLEXÕES SOBRE O ENSINO PREDOMINANTE DA MATEMÁTICA E OS ERROS DOS ALUNOS

No ensino de Matemática, há uma supervalorização de aspectos que acreditamos não ser os mais importantes. Por conta disso, nessa visão, pensamos que os educadores poderiam realizar algumas mudanças mais eficientes no ensino de Matemática, como mudar a metodologia que valoriza a ênfase em dizer aos alunos o que deve ou não ser feito, o que se deve ou não pensar. Necessitamos sempre nos indagar sobre o porquê de um determinado aluno responder uma questão de uma forma e porque não respondeu de outra, ao invés de termos em mente apenas uma possibilidade de resposta final.

Pensamos que seria importante construir com os alunos os significados e conceitos matemáticos, incorporar em nossas aulas elementos do meio externo, usar os conhecimentos e estruturas que o aluno possui. E um recurso para isso é a análise das respostas dos alunos, porém muitos educadores preferem não aderir a essa forma de avaliação por conta do medo que tem em relação aos questionamentos que podem surgir por parte dos alunos. Hoffmann (2006, p. 89) afirma que "a avaliação importa para uma educação libertadora, desde que seu papel não seja o de apresentar verdades autoritárias, mas investigar, problematizar e, principalmente, ampliar perspectivas".

> Se valorizarmos os 'erros' dos alunos, considerando-os essenciais para o 'vir a ser' do processo educativo, temos de assumir também a possibilidade das incertezas, das dúvidas, dos questionamentos que possam ocorrer conosco a partir da análise das respostas deles, favorecendo, então, a discussão sobre essas idéias novas ou diferentes (HOFFMANN, 2006, p. 53).

Baseada nisso, Hoffmann (2006, p. 30) apresenta um caso relatado por uma professora, cujo fato foi vivenciado por seu filho, Marcelo, estudante da 3ª série na época. A professora desse aluno fez à turma a seguinte solicitação oral: "Numerem as linhas do caderno de matemática de 1 a 10. Escrevam apenas os resultados das seguintes multiplicações (e ditou): 3 x 7; 4 x 7; 8 x 7; 9 x 7; 2 x 7; 6 x 7; 5 x 7; 1 x 7; 7 x 7 e 10 x 7". Marcelo respondeu no caderno da seguinte maneira:

1. 7
2.14
3.21
4.28

5.35

6.42

7.49

8.56

9.63

10.70

Olhando rapidamente as questões acima podemos pensar que apenas as do item 6 e 10 estão corretas, mas não é possível saber quais as razões que levaram esse aluno a não ter apresentado as respostas na ordem esperada pela professora. Diversas causas podem ser pensadas nesse exemplo, ele pode ter respondido ordenadamente porque decorou a tabuada nessa sequência ou, até mesmo porque ele pode ter relacionado os resultados aos itens que a professora mandou enumerar.

A professora de Marcelo concordou com a minha segunda indagação, o que é lamentável, pois ela tomou esta decisão baseada em uma observação rápida e instantânea. Não podemos concluir nenhuma dessas perguntas sozinhos, precisamos dialogar com o aluno e observar se a operação de multiplicação, neste caso, está tendo algum significado ao aluno, se ele entendeu o objetivo de tal operação ser introduzida nas atividades.

Os erros, para a maioria das pessoas, são problemas, processos que devem ser evitados, são fatos desastrosos e desconcertantes (CURY, 1988, p. 33). Porém esse ponto de vista do senso comum está equivocado, uma vez que os erros têm um papel bastante importante na construção do conhecimento e na maturação do aluno enquanto cidadão. Hoffmann (2006, p. 56) diz que "a postura do professor frente às alternativas de solução construídas pelo aluno deveria estar necessariamente comprometida com tal concepção de erro construtivo".

Em uma de minhas práticas, foi percebido que existem professores que verbalmente defendem uma postura avaliativa baseada em analisar de forma mais subjetiva as atividades escolares, porém em sala de aula mostram uma postura oposta a isso. Isso se deve ao fato de que, na maior parte dos casos, não refletimos sobre nossa prática educativa e acabamos por desenvolver as mesmas atividades rotineiras. Os professores, muitas vezes, não consideram a avaliação como um recurso útil para observar melhor o processo de desenvolvimento dos alunos, mas sim como mais uma tarefa que deve ser cumprida. Acredita-se que a avaliação não se resume a apenas transmitir e corrigir. A avaliação é um processo contínuo e não algo que ocorre apenas em momentos isolados e determinados. Com a interpretação dos erros conseguimos realizar melhor essa avaliação. Avaliar não se limita a verificar o resultado final, mas sim todo o desenvolvimento do aluno, isto é, “observar e refletir para dar continuidade às ações educativas não é sinônimo de uma prática que se destina a julgar o valor de resultados alcançados pela criança ao término de determinados períodos de trabalho com ela” (HOFFMANN, 2006, p. 72).

Pelas experiências em escolas, percebeu-se que para auxiliar o processo de construção de conhecimento era preciso desvencilhar a trivial verificação do que está certo e o que está errado para uma interpretação dos erros, investigar e refletir sobre como e por que o erro sucedeu-se. Esperamos que um professor não alegue que sempre o que ele pensa e espera esteja correto, é necessário haver uma reorganização e uma troca de ideias entre alunos e professores.

Entendemos que um modo de se promover a aprendizagem consiste em colocar o aluno em confronto direto com um meio ou situações desafiadoras, em suas participações efetivas no processo, escolhendo suas próprias direções e formulando respostas que lhe dizem respeito, decidindo sobre a ação a ser seguida e vivenciando as consequências dessa escolha.

Em algumas experiências, nota-se que a maioria dos educadores está mais preocupada em apresentar aos alunos a linguagem, os simbolismos, as regras, os esquemas e os sistemas matemáticos do que mostrar aos mesmos as ideias, os porquês e os significados de determinado conteúdo, uma vez que os professores continuam voltados para o ensino formal e empírico da matemática. Com isso, alguns alunos se acostumam a ser conformistas, a tentar agradar o professor se adaptando a essas “regras”, isto é, eles procuram seguir “instruções sem sentido (muitas vezes)” que levem a respostas certas para serem recompensados com elogios e notas boas pelo professor. Mas espera-se que não seja por isso que tenhamos nos tornado professores, pois assim os alunos acumulam dúvidas e confusões sobre essas “regras” que lhes foram impostas sem compreensão.

É claro que a formalidade matemática é importante e necessária, porém deveriam ser introduzidas de forma gradativa e apenas quando houvesse necessidade. O descaso existente por parte dos alunos em Matemática ocorre, muitas vezes, pela falta de entendimento dos mesmos da linguagem matemática sofisticada. Os professores não precisam mascarar as afirmações matemáticas com essa linguagem quando existem outros métodos de explicar o mesmo conteúdo. Um exemplo disso ocorre na abordagem do fato que “a soma de dois números inteiros quaisquer é sempre um número inteiro”. Não há necessidade, aqui, de escrever essa frase para os alunos com uma linguagem formal, como $\forall a, b \in Z \Rightarrow (a+b) \in Z$. Os professores podem induzir os alunos a esta conclusão de uma maneira mais simples, sem muito simbolismo, pois, como no exemplo, o aluno além de se preocupar em entender a matemática presente na afirmação, precisa também compreender os significados dos símbolos presentes na mesma.

Mas não é essa a realidade presente em algumas de nossas escolas. Durante algumas experiências em escolas, percebeu-se que alguns educadores preferem apenas introduzir em suas aulas as regras e as fórmulas matemáticas alegando que devem lecionar todos os conteúdos programáticos contidos no currículo no decorrer de um ano, tempo considerado curto pelos professores. Além disso, muitos mencionaram que se tentam realizar atividades diferentes daquelas em que os alunos copiam o que o professor escreve no quadro-negro e depois resolvem uma lista com muitos exercícios (de repetição), os pais acabam reclamando com a direção escolar, devido "a falta de matéria presente no caderno de seus filhos".

É comum encontrarmos em livros os chamados "exercícios-modelo", exercícios que mostram como a atividade deve ser feita, seguidos de dezenas de exercícios semelhantes, nos quais o aluno só precisa repetir o que foi feito no modelo. Além disso, por "falta de tempo", alguns professores preferem dizer "é assim que se faz" (imitando o estilo do exercício-modelo) ao invés de dar liberdade para os estudantes pensarem por si próprios, ou seja, ao contrário de dizer-lhes "pense um pouco mais sobre isso". Isso nos mostra que essa ênfase dada ao "é assim que se faz" vem acompanhada de uma ênfase exagerada na repetição e imitação. Está certo que a repetição nos leva à fixação, mas, também, nos leva à automatização e a mecanizações "escuras" (com o tempo, o aluno não lembra mais o porquê do processo que realiza). Apesar de certa necessidade de automatização, um método mais favorável ao aluno seria aproveitar a curiosidade criativa e exploradora do mesmo, incentivando suas iniciativas de exploração e redescoberta de conceitos, leis e padrões de regularidades.

Assim, nessa perspectiva, fazer o aluno repetir tarefas para a fixação dos conteúdos não o motiva a observar o sentido e o significado do que está sendo estudado. Fazer atividades mecânicas e repetitivas, nas quais apenas é necessário aplicar o mesmo algoritmo em todas as questões, não ajuda, na maioria das vezes, na aprendizagem do aluno (HOFFMANN, 2006, p. 61). É importante problematizar as questões que serão abordadas, provocar o aluno para que tome consciência do que está realizando, isto é, aprender não é repetir e decorar os mecanismos, mas sim compreender todo o processo que o levou a chegar aos resultados finais. Para Hoffmann (2006, p. 60), "o fazer do aluno é uma etapa altamente significativa na sua construção do conhecimento, mas a sua compreensão das hipóteses situa-se no terreno das contradições e de suas ultrapassagens".

Além disso, muitos professores apresentam aos estudantes resultados importantes sem explicar o porquê de suas veracidades por conta da falta de tempo, dos vestibulares, dos concursos, entre outros. Consequentemente, eles exigem dos alunos uma emissão rápida e simultânea de respostas corretas, não importando como os alunos estão compreendendo essa mecanização.

Acreditamos que seria melhor trabalhar com uma perspectiva na qual o conhecimento deveria ser construído com os alunos e não apenas pelo professor e, ao mesmo tempo, democrática (no sentido de permitir que o aluno tenha meios de expressar suas opiniões). Acreditamos que é bastante necessário que o educador oriente e incentive as ideias e iniciativas dos estudantes. O professor não precisa ser considerado um ser ativo, que apenas transmite o conhecimento, enquanto os estudantes apenas meros seres passivos, os quais devem aceitar e seguir tudo o que o professor propõe. É de enorme relevância construir com os alunos cada conteúdo matemático, por meio de indagações, ao invés de dizermos a resposta final do exercício instantaneamente, por exemplo. Pois assim, provocaremos o lado crítico do aluno, despertaremos nos mesmos a curiosidade e o prazer pelos estudos.

O hábito de pensar, o cultivo de ideias, a compreensão dos conceitos e de suas propriedades, a beleza construtiva e dedutiva da Matemática, as interpretações geométricas de certos resultados, nessa perspectiva, podem receber maior ênfase do que a simples habilidade mecanizada de recitar a tabuada ou efetuar cálculos complicados.

Alguns educadores continuam a aplicar uma metodologia mais formalista, valorizando mais os símbolos do que o pensar matemático, pois ainda pensam que, como a Matemática é uma ciência exata, ela não admite meio certo, que a interpretação do aluno não faz a menor diferença quando ele não responde aquilo que era o desejado pelo professor. Isso, muitas vezes, gera nos estudantes um sentido punitivo, uma vez que o aluno não pode ficar em dúvida em alguma atividade, pensar muito ou, até mesmo, se equivocar em suas conclusões. É aconselhável que o professor analise o raciocínio do aluno nas respostas dadas em determinadas atividades e observe se o aluno entende os conceitos que eram o foco da questão. Muitas vezes, um aluno erra a resposta final, mas no desenvolvimento de seu raciocínio o professor pode analisar se ele compreendeu o que a questão estava a avaliar. Não seria coerente afirmar imediatamente, ao olhar a resposta final de um aluno, se de fato ele a compreendeu ou não. Uma resposta final correta nem sempre significa um pleno entendimento do aluno a respeito do conteúdo estudado. Referente a isso, Cury fala que sucesso e insucesso não deviam ser comparados a recompensa e a punição, respectivamente.

> Cabe salientar que , quando o insucesso do aluno é punido pelo professor, reduz-se a possibilidade de aproveitar o erro como fonte de informação sobre os processos mentais ou como instrumento para explorar o conhecimento. O erro, desta forma, deixa de exercer o papel fecundo na atividade intelectual (CURY, 1988, p. 34).

Cury (1990, p. 20) preocupa-se bastante com essas questões de erros e suas causas. O seu foco é analisar os erros cometidos em demonstrações de teoremas da geometria. Em uma de suas pesquisas, o erro referente à conceituação foi o que mais lhe chamou a atenção (nessa pesquisa os erros ganharam uma classificação em oito classes e suas possíveis causas foram discutidas com os alunos que participavam da pesquisa), sendo que a origem desse erro foi observada na representação de figuras geométricas feitas pelos professores e pelos livros didáticos utilizados. Duas das atividades apresentadas envolviam demonstrações de propriedades relacionadas com triângulos isósceles, as quais estão sendo mostradas nas figuras 1 e 2.

Sabendo que **M** é o ponto médio de AB, MD é perpendicular a AC, ME é perpendicular a BC e MD=ME, demonstre que ABC é um triângulo isósceles.

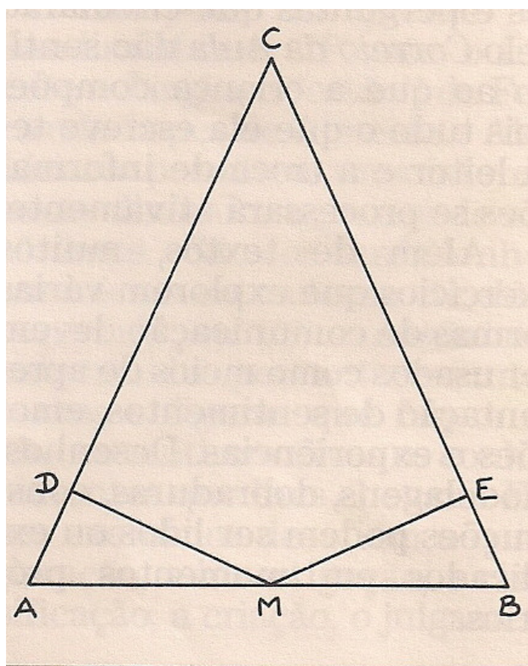


Figura 1: figura de uma atividade desenvolvida por Cury.

Se AKMJ e BKJM são paralelogramos, demonstre que ABC é um triângulo isósceles.

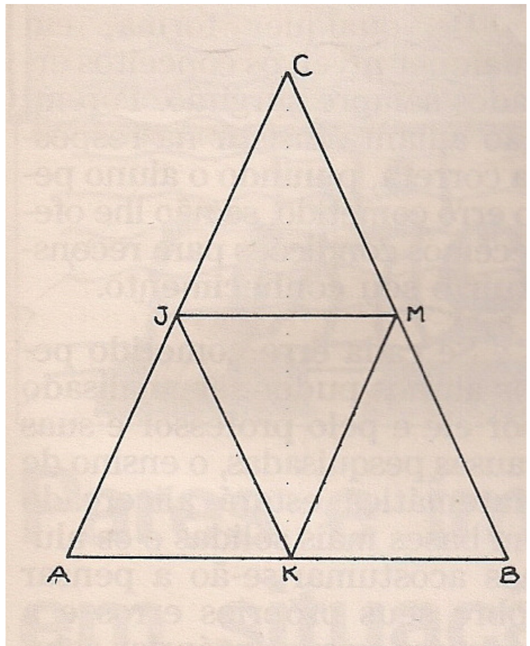


Figura 2: figura de outra atividade realizada por Cury

Portanto, para um aluno que entendeu o conceito de triângulo isósceles o esperado era que ele tentasse mostrar que cada um desses triângulos possuía dois lados ou dois ângulos congruentes. No entanto, três alunos participantes da pesquisa tentaram mostrar, além do que foi falado, que o terceiro lado teria tamanho diferente dos demais, mais precisamente, tentaram mostrar que o terceiro lado tinha medida menor que os outros dois. Com isso, os educadores foram conversar com esses alunos com o intuito de descobrir o que fez os alunos tomarem essa posição para demonstrar o que estava sendo solicitado. Nessa conversa, foi mostrado aos alunos que a base de um triângulo isósceles pode ser maior que os demais lados. Um dos alunos mostrou-se extremamente surpreso com esse resultado. Dialogando com eles sobre as causas dos problemas expostos, pode-se verificar que o fato dos professores apenas desenharem triângulos isósceles com a base menor que os outros lados (e os livros didáticos também) sem ao menos fazer uma menção ao fato da medida da base poder ter um tamanho maior foi o que gerou o conflito citado acima. É exatamente isso que podemos fazer com os alunos, é preciso utilizar o erro do aluno como algo que facilite seu processo de aprendizagem. Baseada em todas essas reflexões viáveis de serem realizadas com os alunos, Cury afirma que “certos erros são persistentes e a modificação do comportamento do aluno só se dará por uma tomada de consciência, por uma reflexão sobre sua própria reflexão” (1990, p. 22).

Confiamos que o erro pode ser visto como um recurso, um instrumento que auxilia os professores na identificação das possíveis causas dos problemas de aprendizagem que originaram os erros, além de ajudar a elaborar estratégias para superar estas dificuldades. O erro, segundo uma perspectiva behaviorista, era considerado um obstáculo ao processo de desenvolvimento do aluno, mas, como foi visto, o erro é um dos principais meios que devemos encarar e solucionar para se chegar a um resultado positivo.

6. CLASSIFICAÇÃO PARA A ANÁLISE DE ERROS

Cury (2007, p. 49) apresenta nove classificações para erros encontrados em uma pesquisa investigativa que foi realizada com 368 alunos calouros de nove instituições de Ensino Superior brasileiras. Esse projeto foi desenvolvido por 14 docentes de cursos da área de Ciências Exatas. O projeto foi intitulado de “Análise de Erros em Disciplinas Matemáticas de Curso Superiores”. Apresentamos uma classificação com o propósito de desenvolver estratégias de ensino a fim de auxiliar os alunos a suprir suas deficiências e dificuldades, pois com as classes podemos organizar melhor a análise de erros que será desenvolvida, verificando as possíveis causas dos erros. Abaixo, então, explicaremos essa classificação construída, baseada na análise de Cury e também nas ideias defendidas no trabalho:

Classe A: essa categoria contempla às resoluções corretas. Fazem parte dessa classe as questões nas quais os estudantes conseguem traduzir de uma forma coerente e clara, em linguagem matemática, as informações presentes nos enunciados.

Classe B: caracteriza os exercícios de alunos que desenvolvem grande parte do raciocínio que é esperado para uma determinada questão, mas ao final respondem de forma não satisfatória, pelo fato de não compreenderem o raciocínio que estão desenvolvendo. São erros oriundos de ações mecanizadas.

Classe C: corresponde aos exercícios de alunos que cometem “erros coerentes”, são erros de alunos que, quando não entendem o processo que deve ser realizado, partem das informações que possuem para deduzir o que deveria ser feito no exercício em questão.

Classe D: engloba as questões de alunos que erraram por não entenderem o conteúdo que está sendo abordado. Também reúne os exercícios de alunos que tentam fazer a questão de uma forma sem sentido apenas para não deixar a questão sem resposta, como por exemplo, operar de alguma maneira dois números quaisquer do enunciado de algum problema sem ao menos entender o que está sendo pedido.

Classe E: caracteriza-se pelos erros originados pela falta de atenção ou dificuldade em conteúdos anteriores ao que está sendo trabalhado, por exemplo, erros em operações com números reais, o qual compromete o resultado final do exercício que está sendo resolvido. Mas não significa que o aluno não esteja compreendendo o conteúdo que está sendo trabalhado no momento. Também podem ser chamados de erros coerentes (mais no sentido de aceitáveis), pois se não ocorresse o erro cometido o resultado final estaria correto.

Essa classificação foi desenvolvida segundo as informações coletadas pelas pesquisas realizadas por Cury e, também, devido aos erros cometidos pelos alunos observados durante meus estágios que foram analisados. Conforme foram sendo verificadas as possíveis causas dos erros dos alunos em questão é que se ia dando forma a essa categorização explanada acima. É relevante destacar que as classes não estão sendo colocadas aqui com o intuito de classificar o aluno, mas sim de dizer qual o tipo de equívoco que ele cometeu, ou seja, estamos classificando o seu erro. Afinal é natural que um mesmo aluno produza exercícios nos quais nem todos estarão na mesma classe, pois cada exercício pode estar analisando um conteúdo diferente. E, conforme o entendimento desse aluno nesse conteúdo é que saberemos em qual classe o seu erro vai se encontrar.

Cury (2007, p. 50) ela faz uma classificação para a pesquisa realizada com calouros de nove instituições de Ensino Superior brasileiras. A análise de Cury é feita por questão, ou seja, a cada exercício trabalhado com os alunos ela faz uma classificação diferente para os erros. Mostraremos um exemplo da análise feita na questão mais acertada pelos alunos. A questão dizia: Um produto foi revendido por R$ 1.035,00, com um lucro de 15% sobre o preço de compra. Esse produto foi adquirido por:

a) R$ 1.020,00 b) R$ 1.000,00 c) R$ 935,00 d) R$ 900,00
e) R$ 835,00

Então, entre todos os alunos que participaram da pesquisa, apenas 134 realizaram a questão com desenvolvimento, o restante apenas marcou a alternativa que pensavam ser a correta, e foi na resolução desses alunos que foi feita a classificação.

CLASSE A: corresponde às resoluções corretas. A maioria dos alunos apresentou a seguinte resolução: 1035 – 115

X – 100

X=900

Outros alunos encontraram o resultado utilizando proporção e escrevendo $\frac{1035}{115} = \frac{x}{100}$. Alguns também resolveram a questão por tentativa, utilizando as alternativas. Ainda tiveram alunos que fizeram x+x.0,15=1.035 e encontraram a mesma resposta.

CLASSE B: corresponde às questões nas quais os alunos fizeram o cálculo de 15 de R$ 1.035,00. Houve casos em que a porcentagem foi calculada corretamente, mas depois o aluno diminuía dos R$ 1.035,00 o valor encontrado, obtendo R$ 879,75 e como não havia essa resposta, marcava a mais “próxima”. Alguns escreveram essa observação. Alguns alunos fizeram o cálculo dos 10% de R$ 1035,00, dividiram por 2 e somaram com os 10% mas erraram nessa adição.

CLASSE C: corresponde às duas soluções em que os alunos efetuaram a divisão de R$ 1.0335,00 por 15. Um aluno diminuiu de R$ 1.035,00 o resultado encontrado, obtendo R$ 960,00, provavelmente por não ter essa alternativa, marcou R$ 935,00. Outro aluno errou a conta de divisão encontrando 9 como resposta, e assim a alternativa assinalada foi a R$ 900,00.

CLASSE D: corresponde às duas soluções em que os alunos fizeram o cálculo de 1.035,00-0,15, pois no enunciado era dado 15%.

CLASSE E: corresponde às 10 soluções para as quais não foi identificado um mesmo padrão de erro.

Além disso, no exemplo citado por Hoffmann no capítulo anterior, por exemplo, se considerarmos que o aluno havia entendido as propriedades multiplicativas, mas não compreendeu a atividade (o estilo de um ditado), o desenvolvendo da questão estaria classificada na **classe A** por mim apresentada. Por outro lado, se de fato, o aluno não houvesse entendido a multiplicação então poderíamos localizar a questão na **classe D**.

No outro exemplo, da figura 1 e 2, manifestado por Cury, poderíamos dizer que ele se enquadra na **classe B**, uma vez que os estudantes analisados realizaram raciocínios para resolver a questão nos quais não entendiam o sentido do que estavam fazendo.

Baseado nessas classes vamos analisar os erros coletados em meu estágios.

7. ANÁLISE DOS RESULTADOS

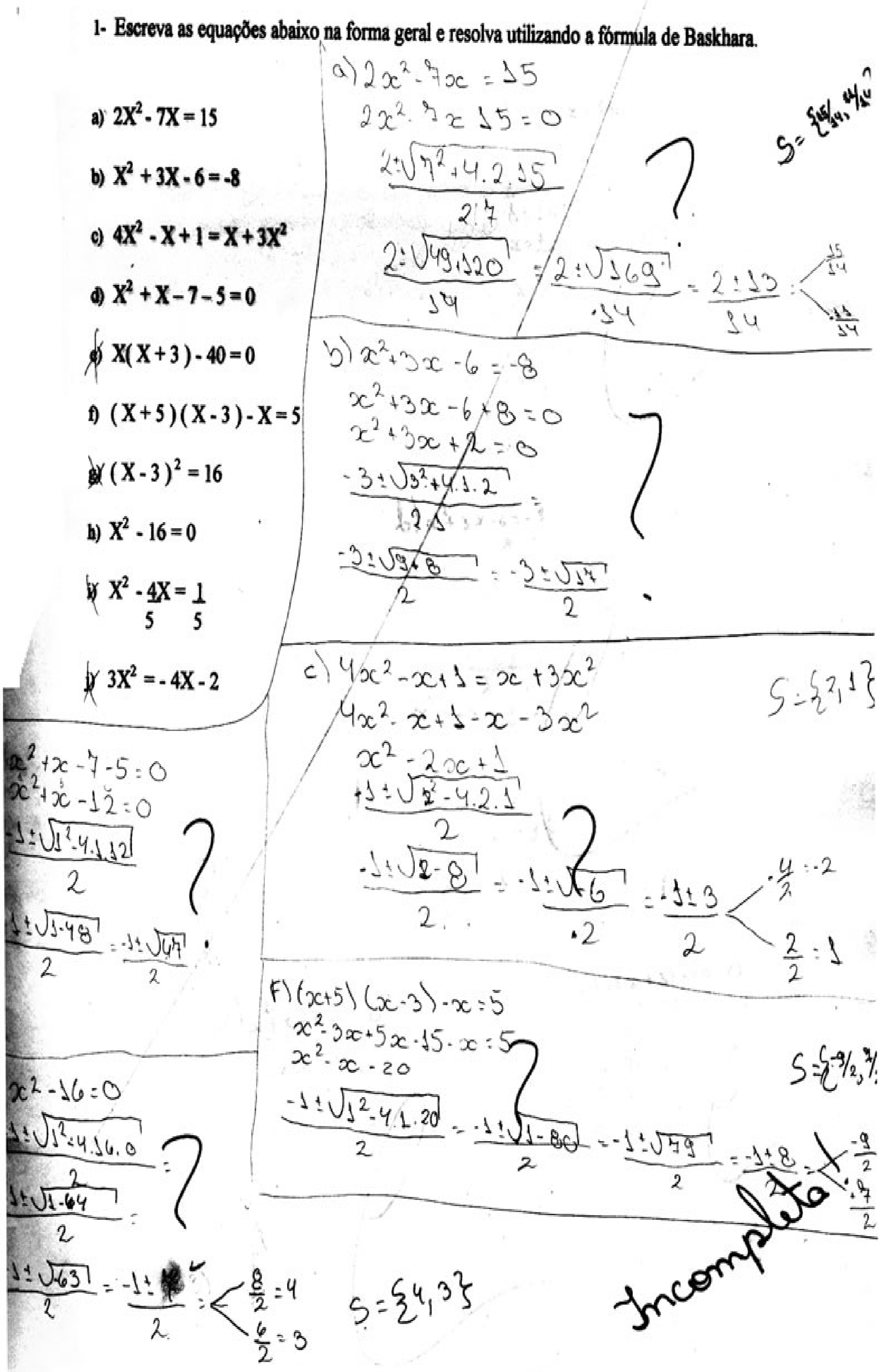
A análise das respostas dos alunos que será desenvolvida neste capítulo tem por objetivo trazer, tanto para o professor quanto para o aluno, a possibilidade de entender como acontece a construção do saber para cada aluno. Os erros foram coletados durante minhas experiências docentes realizadas na minha graduação, nas quais a análise de erros era vista como um meio que servia para esclarecer e não para punir os estudantes pelo manifesto do pensamento como alguns educadores fazem.

A análise dos erros é importante também porque nos auxilia a observar as causas que fizeram o aluno cometer o erro, um aluno pode, por exemplo, não ter respondido errado, ao contrário, ele pode ter resolvido outro problema no qual a resposta que foi dada seria considerada correta. Espera-se que um educador que está preocupado em oferecer um ensino adequado e qualificado para seus alunos encare o erro como um constituinte principal do conhecimento. Muitos estudantes respondem de maneira errônea por descuido ou desatenção, porém, descartando esse tipo de erro, na maioria dos casos, "os erros são hipóteses legítimas baseadas em concepções e crenças adquiridas ao longo da vida escolar" (CURY, 2007, p. 11).

Na figura 3, temos um exemplo, uma prova, no qual o erro foi utilizado de uma maneira que não condiz com a visão que estamos abordando nesse trabalho.

Essa prova foi encontrada em um trabalho da estudante Silvia Ulbrich do curso de Ciências e Matemática de 1º grau de uma faculdade de Porto Alegre. A aluna, no decorrer do seu estágio em uma escola, aplicou aos alunos de 8ª série essa prova de Matemática que explorava o conteúdo de equações a uma incógnita. Nessa prova, como podemos observar existia apenas uma questão com dez alternativas. A professora, então, decidiu que cada alternativa valeria um ponto. Além da abordagem da avaliação ser baseada em técnicas e repetições, se o aluno, por algum mínimo descuido, se equivocasse durante a resolução da questão, toda a alternativa era desconsiderada.

A prova avalia o modo de resolução trivial de uma equação do 2º grau, o uso da fórmula de Bhaskara. É importante destacar que, durante minhas experiências, percebeu-se que a maioria dos alunos ao se deparar com uma equação do 2º grau tem a tendência a aplicar a fórmula de Bhaskara, mesmo quando o exercício não solicita que se encontrem as raízes da equação. Isso como afirma Cury (2007, p.55), também ocorre muito nas avaliações da disciplina de Cálculo das Universidades.



1- Escreva as equações abaixo na forma geral e resolva utilizando a fórmula de Baskhara.

a) $2X^2 - 7X = 15$

b) $X^2 + 3X - 6 = -8$

c) $4X^2 - X + 1 = X + 3X^2$

d) $X^2 + X - 7 - 5 = 0$

e) $X(X + 3) - 40 = 0$

f) $(X + 5)(X - 3) - X = 5$

g) $(X - 3)^2 = 16$

h) $X^2 - 16 = 0$

i) $X^2 - \frac{4X}{5} = \frac{1}{5}$

j) $3X^2 = -4X - 2$

Incompleta

Figura 3: prova de um aluno avaliado pela professora em questão.

Essa avaliação não propicia ao aluno situações em que ele possa tomar decisões, ser crítico ou criativo, mas sim o incentiva a encarar a matemática com uma ciência puramente pronta e acabada, como se nada ainda pudesse ser construído, restando ao professor dominar os conteúdos matemáticos para poder transmiti-los. Penso que essa avaliação foi prejudicial ao desenvolvimento dos alunos, no sentido de que foi ineficaz para detectar a aprendizagem do estudante que está sendo analisado. Foi uma prova mecânica, pois o aluno somente precisava saber a fórmula de Baskhara para resolver todas as alternativas, o aluno não precisava pensar no que estava fazendo, no porque determinada forma de resolução funcionava. No momento em que o aluno sabe aplicar a fórmula mencionada, essa prova se torna repetitiva, o método de resolução é sempre o mesmo. Pensamos que essa maneira de "fixar" o conteúdo não seja a mais adequada, pois, com o passar do tempo, o aluno esquece tudo isso que sempre repetia.

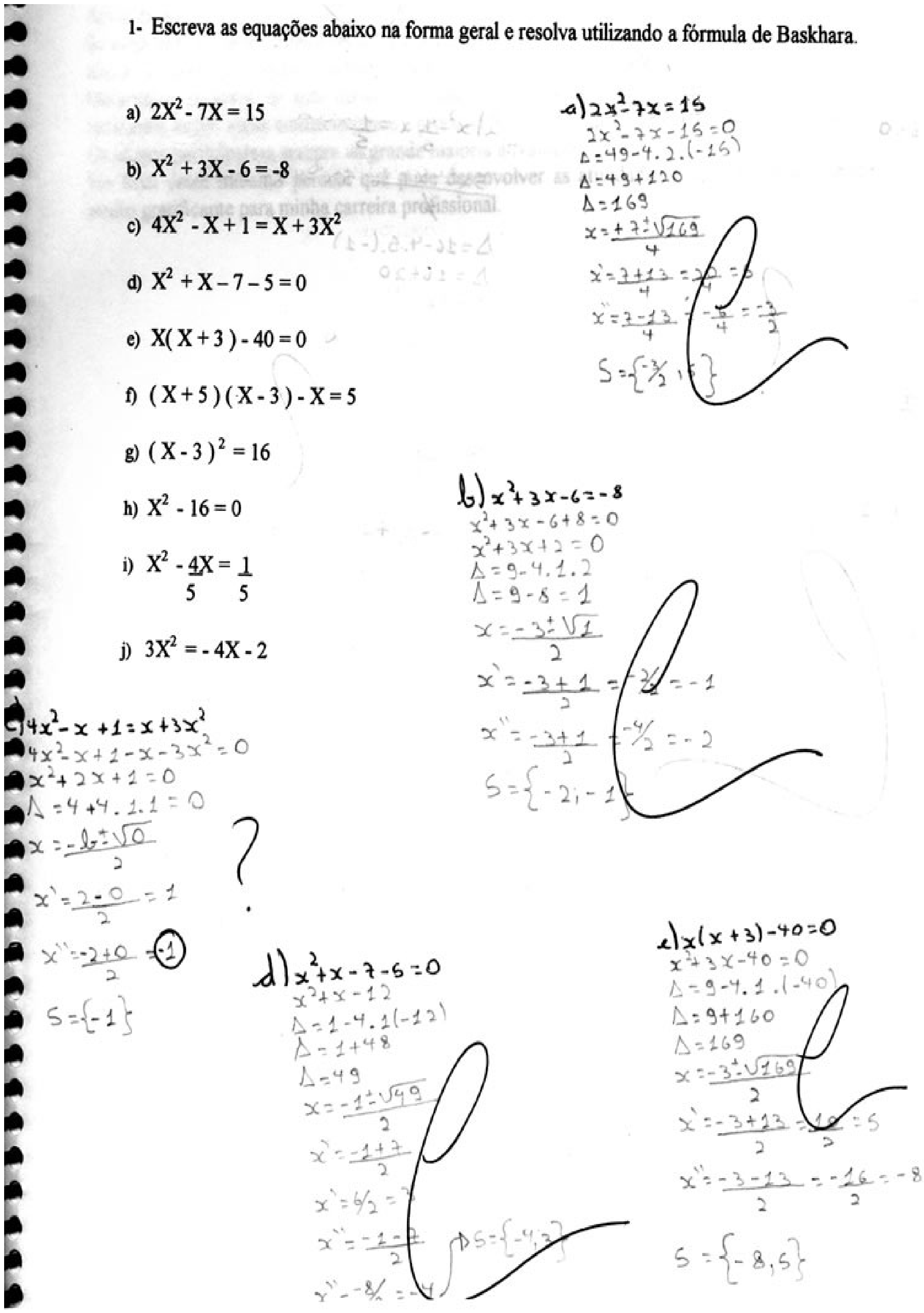
Observando a prova (figura 3), podemos ver que o aluno tem um pouco de dificuldade em descobrir quais são os números que correspondem às variáveis presentes na fórmula de Baskhara. Mas, em uma análise sem a presença do aluno, não é possível garantirmos que ele não sabe isso, pois em algumas alternativas ele fez a relação correta. Na alternativa a), ao subtrair 15 nos dois membros da equação, o aluno provavelmente esqueceu de colocar o sinal indicativo de menos, o que não significa que ele não saiba operar com os números reais, pois em todas as outras alternativas ele fez esse processo de forma correta. É possível analisar também que em algumas questões, quando um "lado" da equação se anula, o aluno ignora essa situação, não colocando o sinal de igual e o número zero.

Na alternativa b), a professora podia ter visto que o aluno apenas trocou um sinal representativo da subtração por um que representava a adição, consequentemente, chegou em uma resposta que não era a desejada pela professora, mas se o erro tivesse sido considerado, a professora veria que a resposta dada pelo aluno era coerente com o erro. O mesmo aconteceu na alternativa d), porém nessa questão o aluno considerou que ""1-48=47".

É fácil ver que este aluno está com certa dificuldade no conteúdo, é possível observar que ele não se acostumou ainda com a fórmula de Baskhara e não compreende como trabalhar com a adição e multiplicação de números inteiros.

Acreditamos que a professora, posteriormente à entrega das avaliações aos alunos, poderia conversar com eles a fim de entender o que os levou a cometer determinados erros e não apenas desconsiderar todo o raciocínio do estudante, uma vez que o mesmo pode ter se atrapalhado durante a resolução do problema. Como não temos uma aproximação com o aluno em questão, não é coerente indicarmos uma classe de erros para esse aluno, uma vez que apenas temos um exemplo do seu desenvolvimento em sala de aula. Porém caso fôssemos nos basear apenas nessa coleta desse aluno, poderia ser sugerido que a classe a qual melhor se enquadra aqui seria a **classe B**, pois há grandes evidências de que o aluno faz o processo da fórmula de Bhaskara sem entender o que está sendo feito.

Na figura 4, apresentamos a mesma prova realizada por outro aluno. Não concordamos que a nota dada ao aluno tenha sido a mais adequada, pois, percebe-se que o aluno em algumas questões, ao copiar novamente a relação entre as incógnitas, trocou um sinal representativo da subtração por um representativo da adição ou vice-e-versa ou somou erroneamente. O objetivo da prova (analisar se o aluno compreende a ideia de descobrir o valor que a incógnita pode assumir) foi alcançado por esse aluno. A dificuldade dele, talvez, esteja em conteúdos anteriores, como em operar com números inteiros, o que fica determinado pela **classe E**.



1- Escreva as equações abaixo na forma geral e resolva utilizando a fórmula de Baskhara.

a) $2X^2 - 7X = 15$

b) $X^2 + 3X - 6 = -8$

c) $4X^2 - X + 1 = X + 3X^2$

d) $X^2 + X - 7 - 5 = 0$

e) $X(X+3) - 40 = 0$

f) $(X+5)(X-3) - X = 5$

g) $(X-3)^2 = 16$

h) $X^2 - 16 = 0$

i) $X^2 - \frac{4X}{5} = \frac{1}{5}$

j) $3X^2 = -4X - 2$

a) $2x^2 - 7x = 15$
$2x^2 - 7x - 15 = 0$
$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)$
$\Delta = 49 + 120$
$\Delta = 169$
$x = \frac{+7 \pm \sqrt{169}}{4}$
$x' = \frac{7+13}{4} = \frac{20}{4} = 5$
$x'' = \frac{7-13}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$
$S = \{-3/2, 5\}$

b) $x^2 + 3x - 6 = -8$
$x^2 + 3x - 6 + 8 = 0$
$x^2 + 3x + 2 = 0$
$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2$
$\Delta = 9 - 8 = 1$
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$
$x' = \frac{-3+1}{2} = -2/2 = -1$
$x'' = \frac{-3+1}{2} = -4/2 = -2$
$S = \{-2, -1\}$

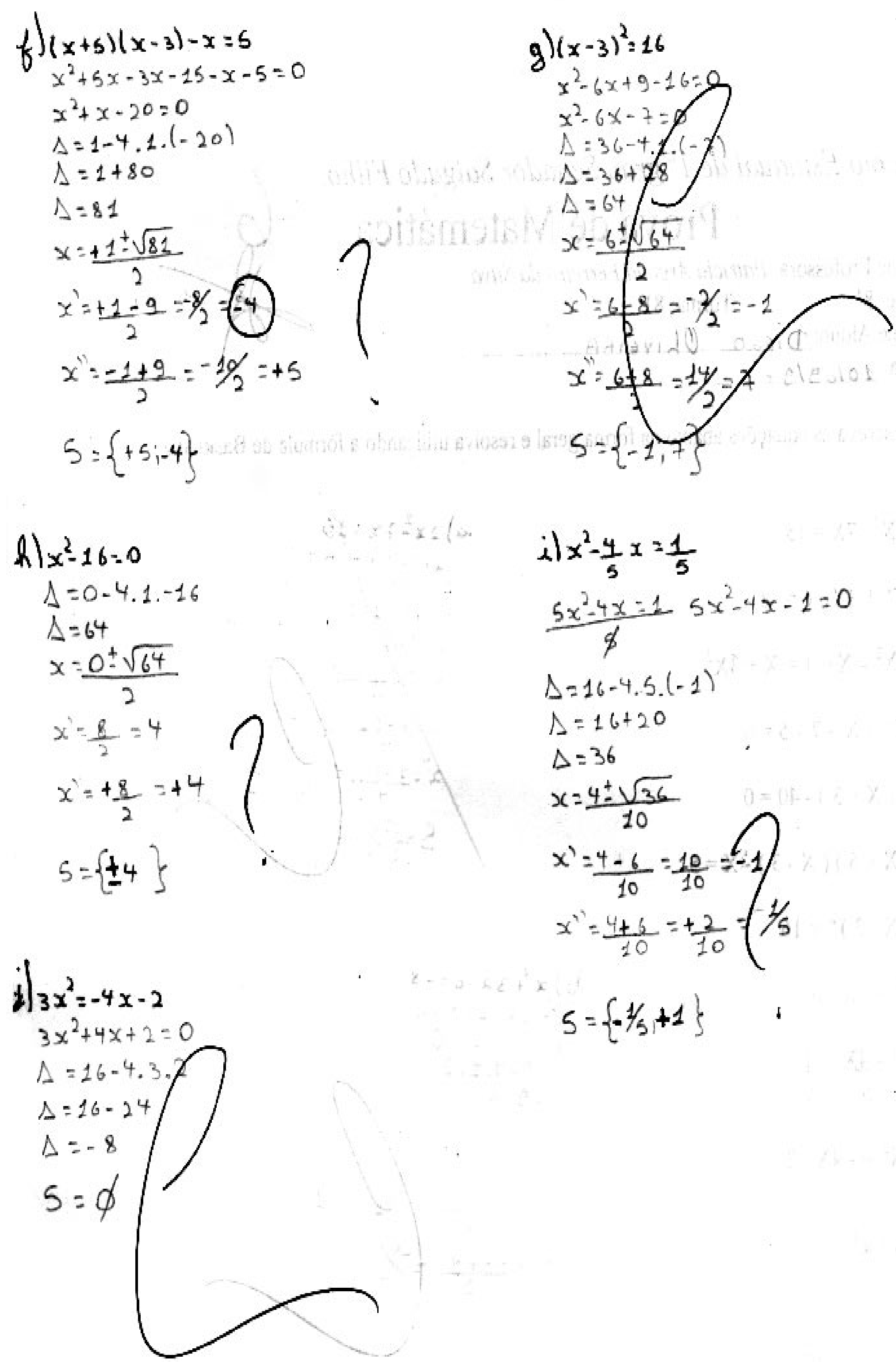
c) $4x^2 - x + 1 = x + 3x^2$
$4x^2 - x + 1 - x - 3x^2 = 0$
$x^2 + 2x + 1 = 0$
$\Delta = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2}$
$x' = \frac{2-0}{2} = 1$
$x'' = \frac{-2+0}{2} = -1$
$S = \{-1\}$

?

d) $x^2 + x - 7 - 5 = 0$
$x^2 + x - 12$
$\Delta = 1 - 4 \cdot 1(-12)$
$\Delta = 1 + 48$
$\Delta = 49$
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$
$x' = \frac{-1+7}{2}$
$x' = 6/2 = 3$
$x'' = \frac{-1-7}{2}$
$x'' = -8/2 = -4$
$S = \{-4, 3\}$

e) $x(x+3) - 40 = 0$
$x^2 + 3x - 40 = 0$
$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)$
$\Delta = 9 + 160$
$\Delta = 169$
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$
$x' = \frac{-3+13}{2} = \frac{10}{2} = 5$
$x'' = \frac{-3-13}{2} = -\frac{16}{2} = -8$
$S = \{-8, 5\}$

Figura 4: prova de outro aluno também avaliado pela professora em questão.



f) $(x+5)(x-3)-x=5$

$x^2+5x-3x-15-x-5=0$

$x^2+x-20=0$

$\Delta=1-4.1.(-20)$

$\Delta=1+80$

$\Delta=81$

$x=\frac{+1\pm\sqrt{81}}{2}$

$x'=\frac{+1-9}{2}=-\frac{8}{2}=-4$

$x''=\frac{-1+9}{2}=-\frac{10}{2}=+5$

$S=\{+5;-4\}$

?

g) $(x-3)^2=16$

$x^2-6x+9-16=0$

$x^2-6x-7=0$

$\Delta=36-4.1.(-7)$

$\Delta=36+28$

$\Delta=64$

$x=\frac{6\pm\sqrt{64}}{2}$

$x'=\frac{6-8}{2}=-\frac{2}{2}=-1$

$x''=\frac{6+8}{2}=\frac{14}{2}=7$

$S=\{-1,7\}$

h) $x^2-16=0$

$\Delta=0-4.1.-16$

$\Delta=64$

$x=\frac{0\pm\sqrt{64}}{2}$

$x'=\frac{8}{2}=4$

$x'=+\frac{8}{2}=+4$

$S=\{\pm4\}$

?

i) $x^2-\frac{4}{5}x=\frac{1}{5}$

$\frac{5x^2-4x=1}{\cancel{5}}$ $5x^2-4x-1=0$

$\Delta=16-4.5.(-1)$

$\Delta=16+20$

$\Delta=36$

$x=\frac{4\pm\sqrt{36}}{10}$

$x'=\frac{4-6}{10}=\frac{10}{10}=-1$

$x''=\frac{4+6}{10}=+\frac{2}{10}=-\frac{1}{5}$

$S=\{-\frac{1}{5},+1\}$

j) $3x^2=-4x-2$

$3x^2+4x+2=0$

$\Delta=16-4.3.2$

$\Delta=16-24$

$\Delta=-8$

$S=\emptyset$

Figura 5: continuação da prova do segundo aluno analisado.

A análise da professora em questão é bastante formal, ela não coloca um “X” no sentido de estar errado, mas sim um ponto de interrogação, porém a interpretação é a mesma – não existe um meio termo ou alguma consideração com o erro cometido pelo aluno. Pensamos que a análise feita não é subjetiva.

Dessa forma, muitas vezes, a Matemática é encarada pelos alunos como algo inquestionável, uma verdade absoluta. Logo, pelo simples fato de não haver esse entrosamento entre os conteúdos e os pensamentos que os estudantes têm em relação aos conteúdos e essa falta de liberdade para se posicionar perante as informações dadas pelo professor são as razões pelas quais os alunos não compreendem o que e para que estão estudando determinados conteúdos matemáticos. Nessa linha de raciocínio, Zanchet coloca que

> Poucas vezes lhes são dadas oportunidades de empreenderem uma discussão que possibilite pensarem o ensino da Matemática numa outra visão. Assim, forma-se nesses professores a concepção de que a Matemática é um conhecimento pronto e acabado, restando ao professor dominá-lo para poder transmiti-lo (ZANCHET, 2001, p. 125).

Não podemos generalizar, há casos em que os professores que tinham as concepções tratadas acima modificaram suas crenças após suas experiências e os cursos que freqüentaram. Porém, se não houver uma problematização em relação à prática educacional, muitos professores podem não perceber que a estratégia que utilizam em sala de aula talvez não esteja sendo a mais adequada. Além do mais, não podemos dizer que um professor que não utiliza a análise de erros não está se preocupando com o oferecimento de uma melhor aprendizagem aos alunos. Com certeza, existem outras formas de auxiliá-los, claro que alguns educadores não pensam nesses aspectos pelo fato de acreditarem que o sua metodologia de ensino está oferecendo resultados positivos para os alunos.

Entretanto, utilizar atividades padrões com os alunos desvaloriza as suas singularidades e não trabalha diretamente as dificuldades de cada um. Não estamos defendendo a ideia de elaborar uma atividade diferente para cada aluno, mas sim que cada atividade contenha questões que possam auxiliar no amadurecimento de cada um em relação aos seus problemas.

O objetivo de avaliar os estudantes não pode ser interpretado como algo ruim, mas sim como algo natural e útil tanto para os educadores como para os educandos. A análise de erros leva ao crescimento da motivação dos alunos em relação ao estudo de Matemática, uma vez que, através deles, eles percebem que podem questionar e interpretar a Matemática, eles podem passar a ser críticos em relação às informações que lhes são transmitidas.

Outro exemplo (figura 6) em que podemos também utilizar a análise de erros é de um aluno que participava de aulas destinadas a trabalharem as dificuldades de cada um. Veja:

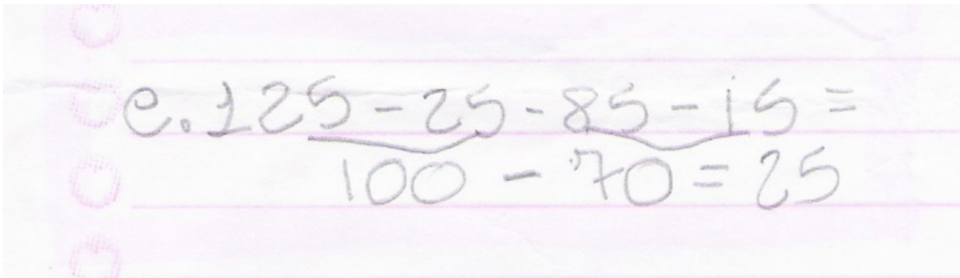


Figura 6: exercício feito por um aluno da 6ª série.

Ao tentar pensar como o aluno tinha raciocinado para chegar a esse resultado, foi observado que ele havia copiado o segundo sinal referente à subtração e depois havia operado 85-15=70. Logo, o seu cálculo final ficou sendo 100-70 o qual também foi respondida de forma errônea. Ao conversar com o aluno para saber se a primeira constatação estava de fato coerente com o que ele havia pensado, a resposta dele quanto a isso foi afirmativa. Em relação, ao resultado final encontrado, ele disse que estava entendendo como fazia para operar dois números, ele não se confundia na realização dessas manipulações, mas que, agora, juntando vários números ele não estava conseguindo compreender o que precisava ser feito. Então, usando um pouco do dia-a-dia desse aluno, como toda criança gosta de comprar bala e doces, fiz uma associação dos valores dos problemas com a quantidade de coisas que ele estaria comprando e vendendo. Vendo resultados positivos, após essa problematização, debatemos os possíveis erros que ele havia feito no problema acima, obtendo, assim, ótimos resultados. Assim, vemos que o aluno tentou resolver a atividade baseado nos seus conhecimentos, já que ele não havia entendido o processo que deveria ser feito. Logo, ele cometeu um erro coerente com a forma que ele havia deduzido que era para ser feita a atividade, o que enquadra isso na **classe C**.

De qualquer forma, é relevante lembrar que não adianta repetirmos a definição correta dos conceitos matemáticos ou falarmos para o aluno somente o que deve ser feito sem dizer o porquê, punindo o aluno pelo erro cometido. É necessário oferecer condições para que o aluno possa reconstruir seu conhecimento. Se cada equívoco do aluno puder ser analisado por ele e pelo professor, o ensino de Matemática se tornará mais proveitoso e sólido, consequentemente os alunos começarão a pensar sobre seus erros, procurando as suas próprias soluções. Uma frase de Piaget que destaca esse papel importante dos erros diz que

> (...) um erro corrigido (por ele mesmo) pode ser mais fecundo do que um acerto imediato, porque a comparação de uma hipótese falsa e suas conseqüências fornece novos conhecimentos e a comparação entre dois erros dá novas ideias" (PIAGET, apud CURY, 1994, p. 82).

Abaixo segue outro exemplo (figura 7), exercício de uma prova, na qual o erro pode ser usado como algo benéfico e útil. Essa prova – á qual tivemos acesso em um dos colégios no qual foi realizado o estágio – foi aplicada pelo professor titular da turma. Nela, foi possível observar que o professor procura o erro do aluno, ele marca na resolução do mesmo em qual parte foi cometido o engano, para que, assim, o estudante possa refletir sobre o que fez. O professor não analisa apenas a resposta final. Na figura 7, provavelmente o aluno tenha se esquecido de efetuar a divisão, já que nas outras questões da prova foi possível observar que ele entende esse conteúdo, por exemplo, em outra questão, o aluno fez todo o desenvolvimento correto, mas, no final, deixou a operação de adição apenas indicada. O professor considerou a questão correta indicando que a operação devia ser calculada. Devido a essas explicações sobre a situação desse aluno, pela classificação construída, esse aluno se enquadra na **classe E** (cometeu um pequeno erro por falta de atenção e sabia o conteúdo).

Ao olhar detalhadamente a questão abaixo, vemos que o aluno sublinha quando faz uma operação aritmética, o que ressalta mais ainda o fato de que ele esqueceu de realizar a operação circulada pelo professor.

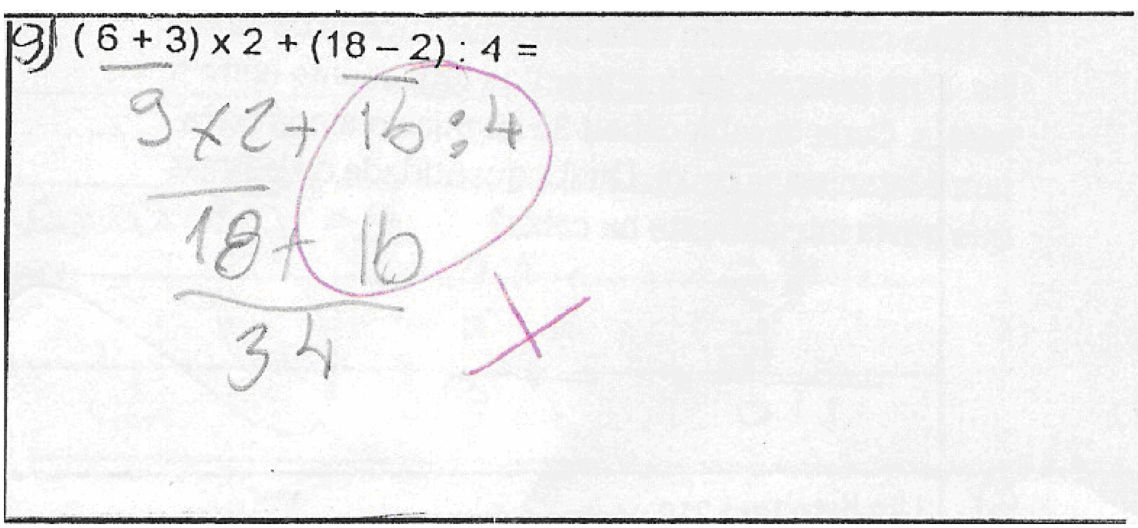


Figura 7: questão retirada de uma prova aplicada na 5ª série.

Em defesa da importância dos erros no processo de construção do conhecimento, Klüsener menciona que

> O professor deve procurar não se limitar simplesmente a corrigir exercícios, constatando resultados incorretos, mas deve-se ater ao *como* e *porquê* da atuação do aluno em uma determinada situação de ensino, além de preocupar-se em analisar as estratégias de solução, bem como as respostas, com a finalidade de buscar no erro as causas das dificuldades e dos obstáculos envolvidos no processo de aprendizagem desse aluno (KLÜSENER, 2001, p. 190).

Com todas as experiências vivenciadas, foi observado que aqueles cálculos em que cada número deve ser posto um abaixo do outro para então somar ou subtrair, por exemplo, é considerado monótono pela maioria das crianças, o que tende a levá-las ao erro. Por mais que ela se esforce, que tente mostrar tudo que sabe, enfim, que ela tenha vontade para mostrar que entendeu esse conteúdo, a repetição e a mecanização, muitas vezes, gera grandes possibilidades de erro. Com isso, mesmo que o raciocínio esteja correto, ao encontrar um resultado errado, a criança se desmotiva. É claro que pode acontecer do aluno errar nessa manipulação dos números por outro motivo, como o exemplo da figura 8:

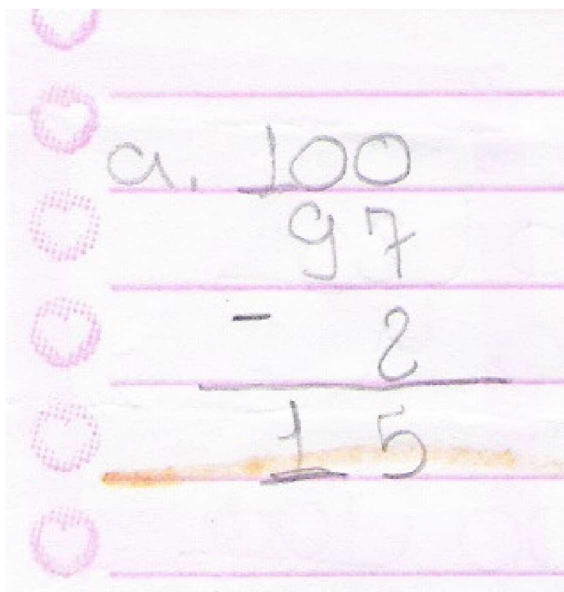


Figura 8: atividade realizada por um aluno que acompanhei durante um de meus estágios (6ª série).

Inicialmente, podemos pensar que esse aluno não entende absolutamente nada sobre a operação de subtração, pois como é possível retirar 97 unidades de 100 e depois retirar mais 2 unidades e ainda restar 15 e o aluno nem se dar conta que o resultado encontrado não tem como estar certo. Entretanto, o problema desse aluno é mais grave do que isso. O algoritmo para a subtração que foi ensinado a esse aluno não faz muito sentido para ele, ele não conseguiu relacionar essa organização dos números com o que a subtração representa. O aluno explicou o que havia pensado para encontrar o resultado final. Na coluna das unidades temos o número 0, 7 e 2, nessa mesma ordem. Ele ignorou o zero, já que ele não representa nenhuma quantidade e fez sete menos dois, o que resultou cinco. Depois operou: na primeira linha ainda temos o número 10 e na segunda o número 9. Então, o aluno fez dez menos nove, resultando em um. Juntando os dois resultados obtidos chegamos ao número quinze. Logo, pela lógica criada pelo aluno, a resposta encontrada faz todo sentido, se encaixando na **classe C**, uma vez que o aluno pensou nos conhecimentos que tinha para deduzir um algoritmo que não havia entendido. Nesse caso, com o erro, o professor pode retomar o significado da subtração e relacioná-lo com o algoritmo.

Um exemplo semelhante a esse, mas envolvendo a operação de adição, é mostrado na figura 9. Este aluno não sabia manipular o algoritmo da multiplicação e foi possível verificar isso através das análises das respostas dele. Na realização da multiplicação de 3 por 17, o aluno colocou, na quarta linha, o número um devido a unidade do resultado da multiplicação de 3 por 7. O número 3 é resultado de 3 vezes 1 e o número 2 que aparece no número 231 é relativo ao número 2 que "havia subido" quando o aluno multiplicou o 3 por 7 (isso tudo foi relatado pelo aluno). Além disso, ele falou que fez isso porque não sabia como deveria fazer e, então, fez "qualquer coisa", o que o caracteriza na **classe D**.

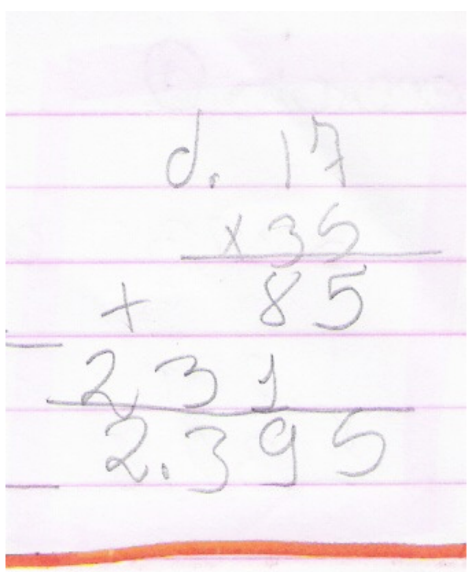


Figura 9: uma das atividades coletadas realizadas por outro aluno (6ª série).

Através da análise dos erros, é possível interagir melhor com os alunos e auxiliá-los a fazer uma análise dos raciocínios que eles mesmos desenvolveram. É aconselhável que o professor questione as respostas dos alunos para verificar como e o que eles pensam ao resolver as tarefas. A análise de erros serve para esclarecer as interpretações dos alunos sobre a natureza da Matemática ou de conteúdos específicos, pois só olhando a resposta final não temos acesso a isso.

Em um dos estágios realizados, o trabalho foi desenvolvido com alunos da sétima série com um conteúdo que envolvia expressões numéricas. Veja na figura 10, o que uma aluna fez:

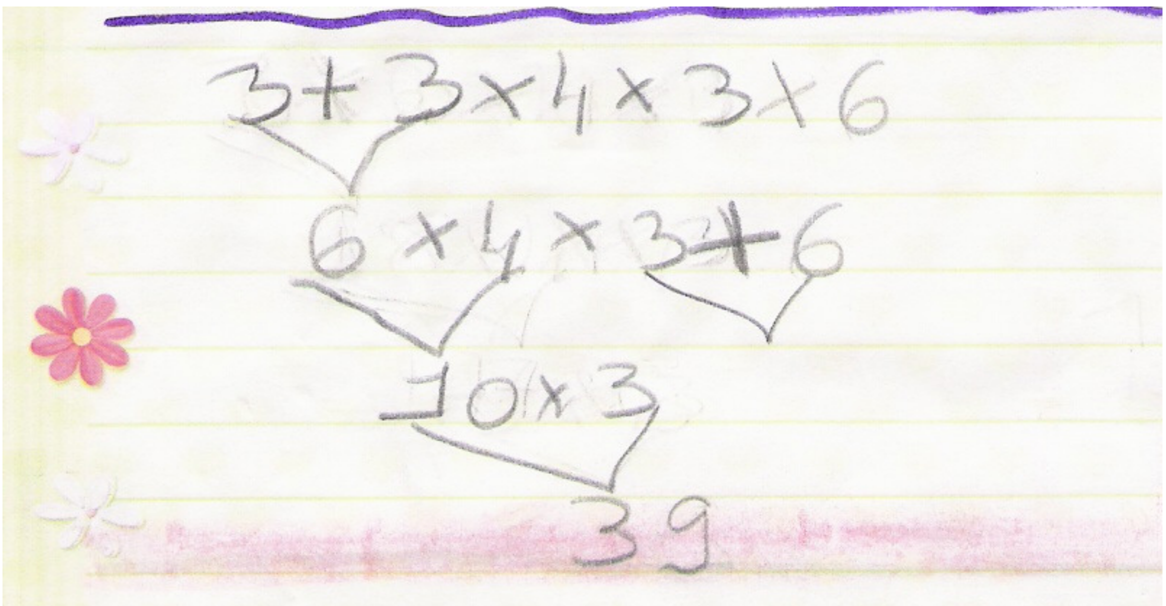


Figura 10: exercício desenvolvido por uma aluna que trabalhei em um dos meus estágios (6ª série).

Se tivéssemos que indicar causas imediatas desses equívocos, aquelas que são detectáveis através de uma simples observação, arriscaríamos a dizer que esta aluna está confundindo as operações, ou seja, ela não entendeu o significado de cada uma. É claro que isso somente se confirmou depois de uma conversa com ela. Ela estava confundindo o sinal que usamos para representar a multiplicação com o que utilizamos para representar a adição. Ela não sabia a ordem de prioridade de cada operação, na figura 10, ela fez o cálculo do que apareceu primeiro sem se preocupar com qual operação era. E, também, conversando com ela foi pedido que ela fosse dizendo os raciocínios que teve para chegar àquele resultado. Ela disse que primeiro fez 3+3= 6 e depois copiou o resto. Solicitou-se a ela que lesse o que tinha escrito na segunda linha e, com isso foi visto que o primeiro e o último sinal haviam sido trocados por sinais de adição. Na terceira linha, como ela tinha trocado os sinais ela fez

6+4=10. Então, ela disse que colocou o resultado (10) e copiou o que devia fazer depois (que era multiplicar pelo número depois do quatro, o três). Assim, ela chegou ao resultado 39, fazendo 10 x 3 = 30 e juntando com a conta que ainda não havia sido feita, no caso, 3 + 6=9. Perguntando a ela o porquê desse raciocínio, não obteve argumentos. Após um acompanhamento direto com essa aluna, foi apresentado a ela, novamente, a expressão numérica da figura 10 e, desta vez, ela conseguiu chegar ao resultado esperado. Antes do acompanhamento dado, podemos dizer que a aluna se encaixava na **classe B**, pois ela apenas fazia ações mecânicas sem encontrar sentido no que estava fazendo.

Aqui, temos outra expressão numérica resolvida por essa aluna.

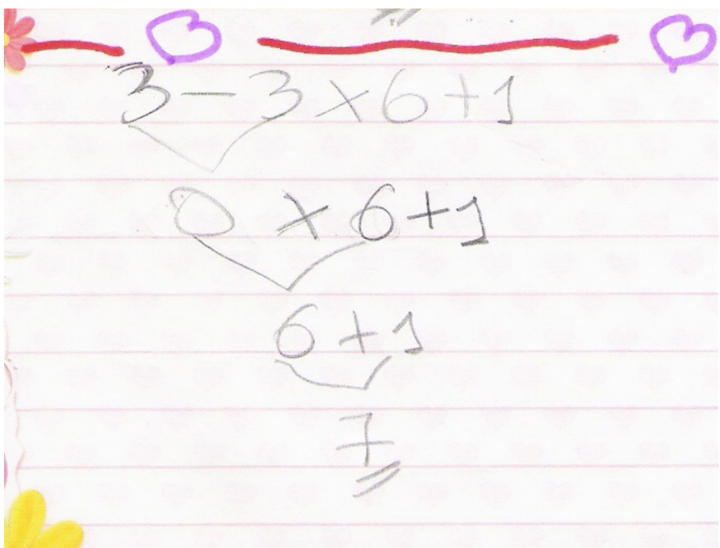


Figura 11: questão analisada da mesma aluna.

Com isto, percebeu-se que ela estava ainda com dúvidas nesta matéria. A aluna não sabia qual operação teria que ser feita primeiro na expressão numérica. Além disso, o significado da multiplicação não estava claro para essa aluna, pois ela não conseguiu ver que 0x6=6 vai contra a conceituação de multiplicação. A utilização inadequada dos erros dos alunos é um dos fatores que causa, na maioria das vezes, certa aversão dos alunos à Matemática. As formas como alguns educadores apresentam os erros matemáticos em sala de aula contribuem para uma visão distorcida da natureza desta área de conhecimento e do modo como ela tem sido produzida. Acreditamos que os professores tinham que ter como objetivo "desenvolver nos alunos atitudes favoráveis à elaboração de hipótese, à crítica e à criatividade" (CURY, 2007, p. 41).

Ao utilizar as análises de erros em sala de aula, os professores têm mais chances de entender o que cada aluno está de fato compreendendo de suas aulas. É importante esclarecer o que o aluno está aprimorando, o que ele está acrescentando em seus conhecimentos anteriores com o que está sendo ensinado, como determinadas experiências anteriores podem estar influenciando o prolongamento dessas dificuldades e o que as respostas "decoradas" dadas pelos alunos estão prejudicando o amadurecimento deles.

Na figura 12, temos outro exemplo no qual a análise de erro é favorável para a construção do conhecimento.

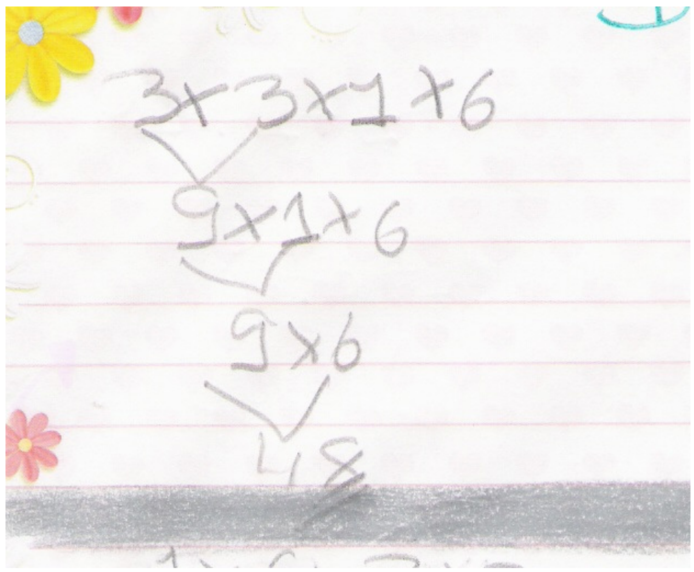


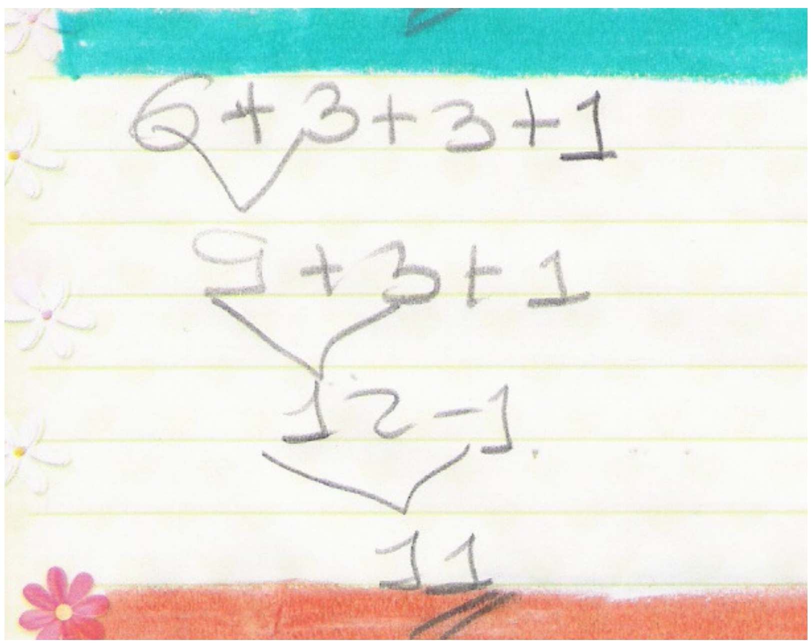
Figura 12: atividade da mesma aluna.

Dialogando com a aluna percebeu-se que ela entendeu um pouco melhor como se deve proceder quando deparada com uma expressão numérica. Ela equivocou-se com a multiplicação de 9x6. Foi perguntado a ela como ela fez para concluir que essa operação daria como resultado 48 e, ela respondeu que havia somado nove vezes o número seis. Então, somamos juntas novamente e ela percebeu o erro que havia cometido. Resumidamente, por falta de atenção a aluna não chegou à resposta que era a esperada pelo professor. Mas não é possível caracterizar a aluna na **classe E**, seria necessária uma análise mais prolongada e contínua para ver se, de fato, ela entendeu o processo de uma expressão numérica.

O mais importante é não esquecer que na análise das respostas não é o acerto ou o erro que devem ser destacados, mas sim as formas como cada aluno constrói os conhecimentos. Ao analisar as produções escritas deles podemos observar melhor as dificuldades dos alunos. Essa maneira de avaliar os alunos é constantemente defendida por Cury, para ela

> Na análise das respostas dos alunos, ao considerar apenas a classificação e a contagem do número de respostas de cada tipo, a investigação fica muito pobre, não trazendo benefícios a alunos e professores. No entanto, ao procurar entender as formas como o aluno produziu a resposta, certa ou errada, o trabalho pode contribuir para a construção de novos patamares de conhecimento (CURY, 2007, p. 63).

Tratar os erros em sala de aula é uma questão delicada porque é preciso ter cuidado para que o aluno não tema a reação do professor. O aluno, muitas vezes, fica com medo de não dizer a resposta certa, àquela esperada pelo professor, e ser discriminado. Apresentamos na figura 13 outros exemplos em que os alunos não chegaram à resposta esperada por descuido (**classe E**):



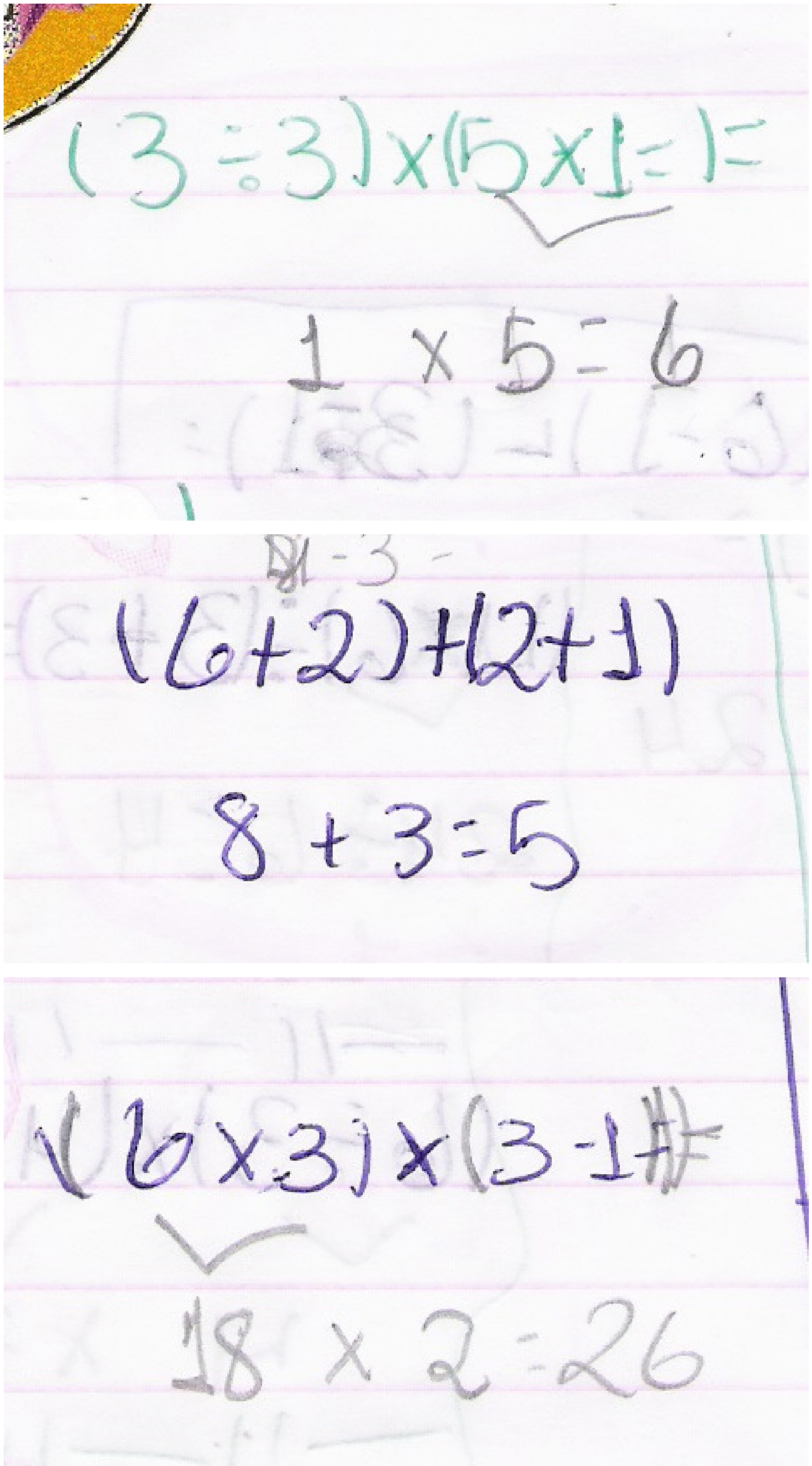
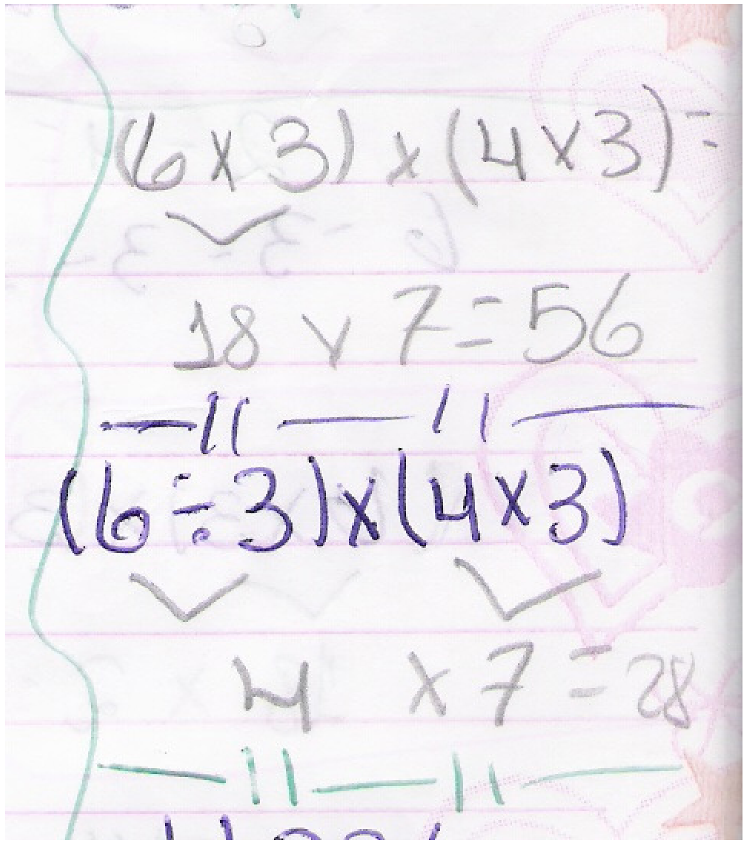


Figura 13: ilustrações de erros da classe E.

O erro cometido por esses alunos pode ser chamado de erro coerente, uma vez que, aceitando o fato deles terem trocado os sinais (o primeiro trocou o sinal representativo da adição por um representativo da subtração, o segundo trocou o sinal da multiplicação por um que representa a operação de adição, o terceiro escreveu corretamente, mas ao fazer a operação indicada fez uma subtração e o quarto, ao realizar a conta 18x2 em um papel separado, o aluno se esqueceu de escrever o número um que “sobe”) por desatenção, a resposta final está coerente com o descuido no decorrer das questões. É importante observar que apenas foi constatado que os erros foram realizados por falta de atenção, pois comparamos com outras atividades desses alunos e, também, por intermédio de conversas com os mesmos.

Como já foi falado, o uso equivocado dos erros pode causar desconforto e frustração aos alunos, pois eles se sentem acuados, com medo de tentar, de arriscar novos pensamentos e raciocínios. Alguns, ainda, sentem-se pressionados em acertar, ocasionando, muitas vezes, questões “em branco” – eles pensam que é melhor não escrever do que escrever algo que não é o mais apropriado. Ao encarar a avaliação apenas como uma burocracia, os alunos acabam se sentindo pressionados por este sistema escolar. Os erros cometidos por eles os frustram, já que o fazem perder tempo e esforços apenas na tentativa de evitar a reprovação e não na intenção de aprender os conteúdos. Digo perder tempo, pois se o tempo destinado para o estudo é apenas para decorar os conteúdos que serão analisados na prova, um tempo depois, o aluno esquecerá o que estudou e esse tempo dedicado a isso foi em vão. Entretanto, se a avaliação focar para o processo e não só para o produto final, existe a possibilidade de que os erros cometidos possam ser discutidos para, futuramente, virarem fontes de novas aprendizagens.

É claro que existem erros que só em uma pequena observação já é possível verificar que o aluno não está compreendendo todo o conteúdo (**classe D**). Mas é sempre importante conversar com o estudante para ver quais foram os seus raciocínios. Veja alguns exemplos na figura 14:



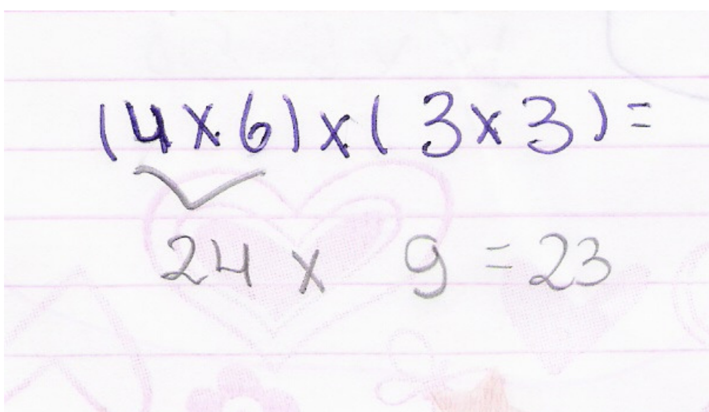


Figura 14: exemplos de erros da classe D.

No primeiro caso da figura, conversando com o aluno, ele relatou que havia multiplicado 3 por 6 e que depois somou 3 ao 4. Ao ser questionado do porquê disso, o aluno não respondeu. Mesmo assim, na continuação do cálculo, ao multiplicar 18 por 7, o aluno apenas operou o 8 com o 7. Solicitando ao aluno que mostrasse como havia chegado naquela resposta, ele apenas mencionou que havia feito o algoritmo e havia dado aquele número como resultado final.

No segundo caso, ainda do mesmo aluno, ao ser perguntado a ele do resultado encontrado na divisão de 6 por 3 (o resultado foi 4), o aluno se mostrava convicto ao dizer que “peguei o 6 e dividi por 3 , professora ”, o que reforço ainda mais a classificação sugerida.

Por fim, no último exemplo da figura 14, a aluna não sabia como dizer o que tinha raciocinado para encontrar 23 como resposta. Solicitada a fazer o algoritmo ela negou e disse que ela já havia feito e tinha encontrado 23 como resposta.

Muitas vezes, o erro é gerado, porque o aluno tenta criar uma alternativa de solução de acordo com a sua lógica, com a lógica de suas experiências, o que não ocorreu nos exemplos acima. Os alunos não estavam entendendo as operações e as expressões numéricas.

Há infelizmente exemplos de erros nos quais o aluno não faz corretamente o processo, mas no final consegue, surpreendentemente, alcançar o resultado correto. Por conta disso, reforçamos a importância da análise do processo e não apenas se a resposta final é igual a esperada pelo professor. Veja alguns casos na figura 15.

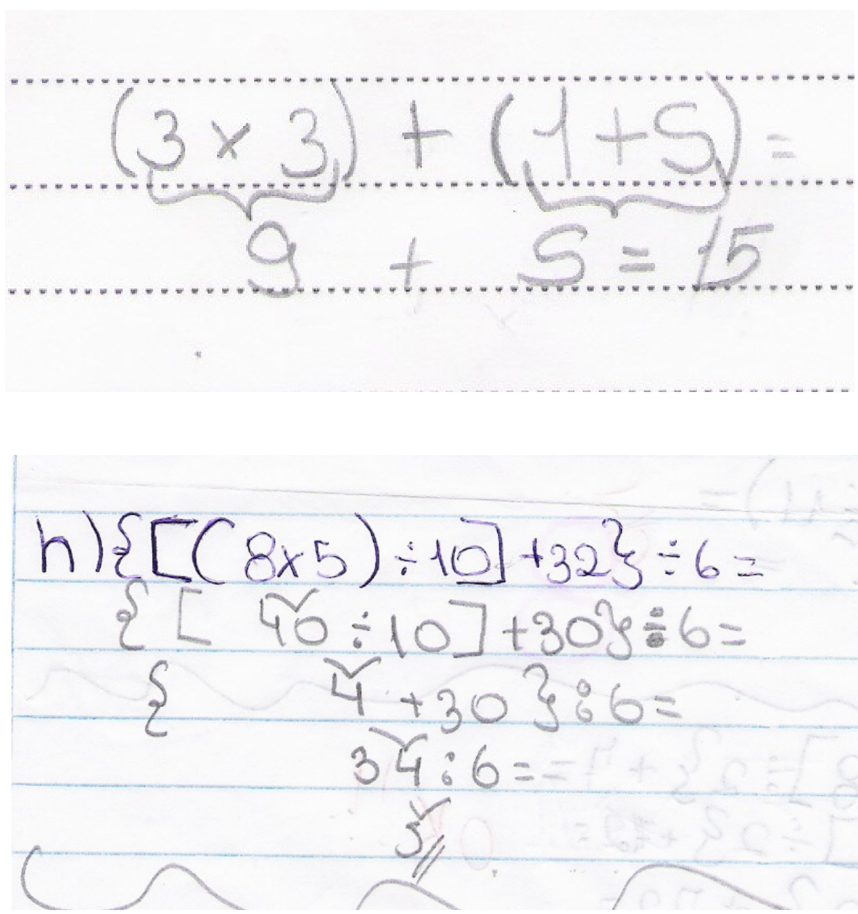


Figura 15: ilustrações de erros cometidos pelos alunos.

Conversando com os alunos, perguntamos o que eles haviam pensado para chegar nesses resultados. O aluno do primeiro exemplo disse que foi resolvendo a expressão conforme havia entendido, mas que para colocar a resposta final pediu que o colega ao lado lhe informasse qual seria o resultado correto. Já a segunda aluna, disse que não havia entendido porque não tinha chegado em 36 : 6 como sua colega, mas como haviam muitos exercícios, ela não tentou encontrar o seu erro e apenas copiou a resposta final dessa colega, sem compreender porque não havia chegado no resultado correto. Ou seja, os alunos ainda encaram o erro de uma forma negativa, eles tentaram realizar o raciocínio correto, mas não quiseram arriscar na resposta final, colocando o que acreditavam ser a resposta certa. Além de conversar com esses dois alunos, dialogamos com os estudantes que falaram a resposta que julgavam correta, sem ao menos explicar o porquê do resultado encontrado. O diálogo entre alunos para resolver as atividades é um processo interessante para a interação entre eles e porque, muitas vezes, a linguagem que os alunos usam é mais compreensível do que a usada pelo professor. Em relação à preocupação da segunda aluna com o grande número de exercícios, explicamos para ela que o importante não é fazer todas as questões de qualquer forma, mas sim fazer corretamente o número de questões que conseguir. O que mais importa é estar entendendo o que se está fazendo.

Uma forma positiva de considerar os erros motiva os alunos a melhorar certos comportamentos, valores, atitudes e habilidades de pensamento que os possibilitem aprender a planejar e criar algoritmos.

Os erros podem ser usados para desenvolver nos alunos a capacidade de generalizar e pesquisar novos pressupostos para a solução de problemas. Pensa-se que os educadores poderiam repensar a forma que trabalham com os erros. O importante é desenvolver, com os erros, nos alunos, processos reflexivos que o levem a resgatar a sua capacidade analítica, crítica e reflexiva, inclusive para enfrentar os desafios contemporâneos da era tecnológica. Devemos tentar compreender os erros que os alunos cometem, para que os estudantes aprendam a escolher soluções em situações novas e imprevisíveis.

Por fim, apresentamos atividades desenvolvidas por alguns alunos durante um dos estágios obrigatórios da Faculdade a fim de observar como a valorização do erro foi estabelecida. Quando um aluno errava, eram escritos comentários para que o aluno refizesse a tarefa considerando aquilo que havia sido destacado.

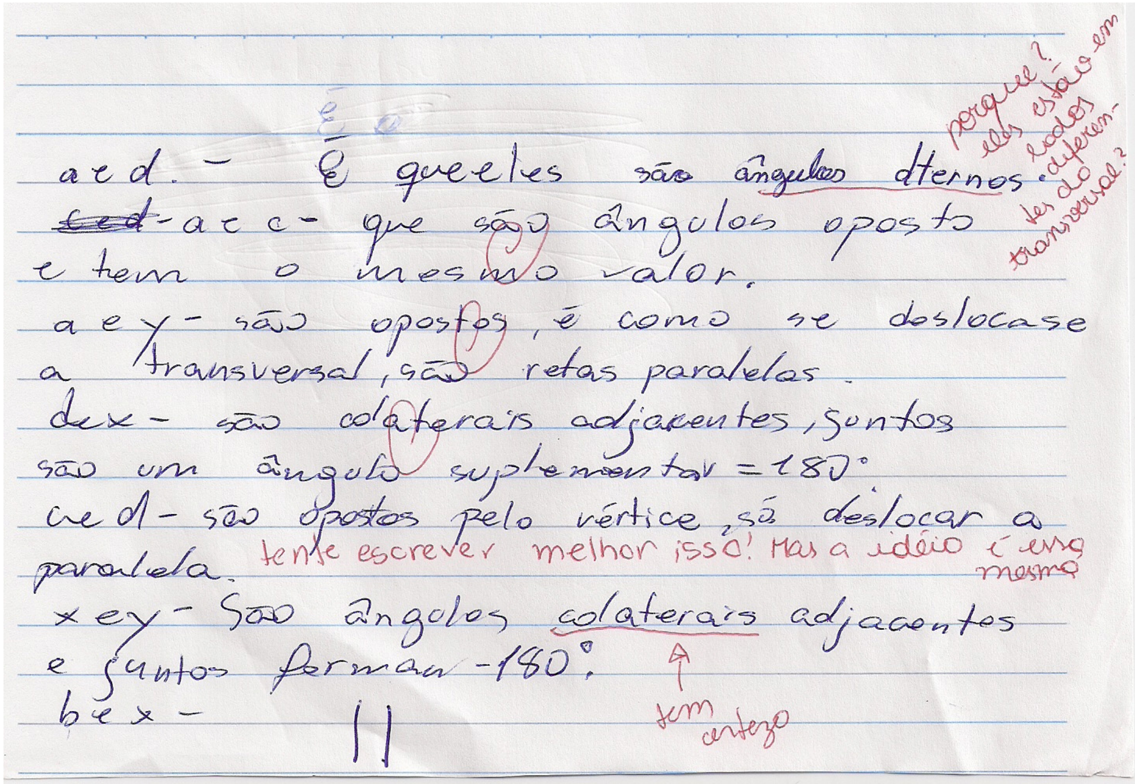
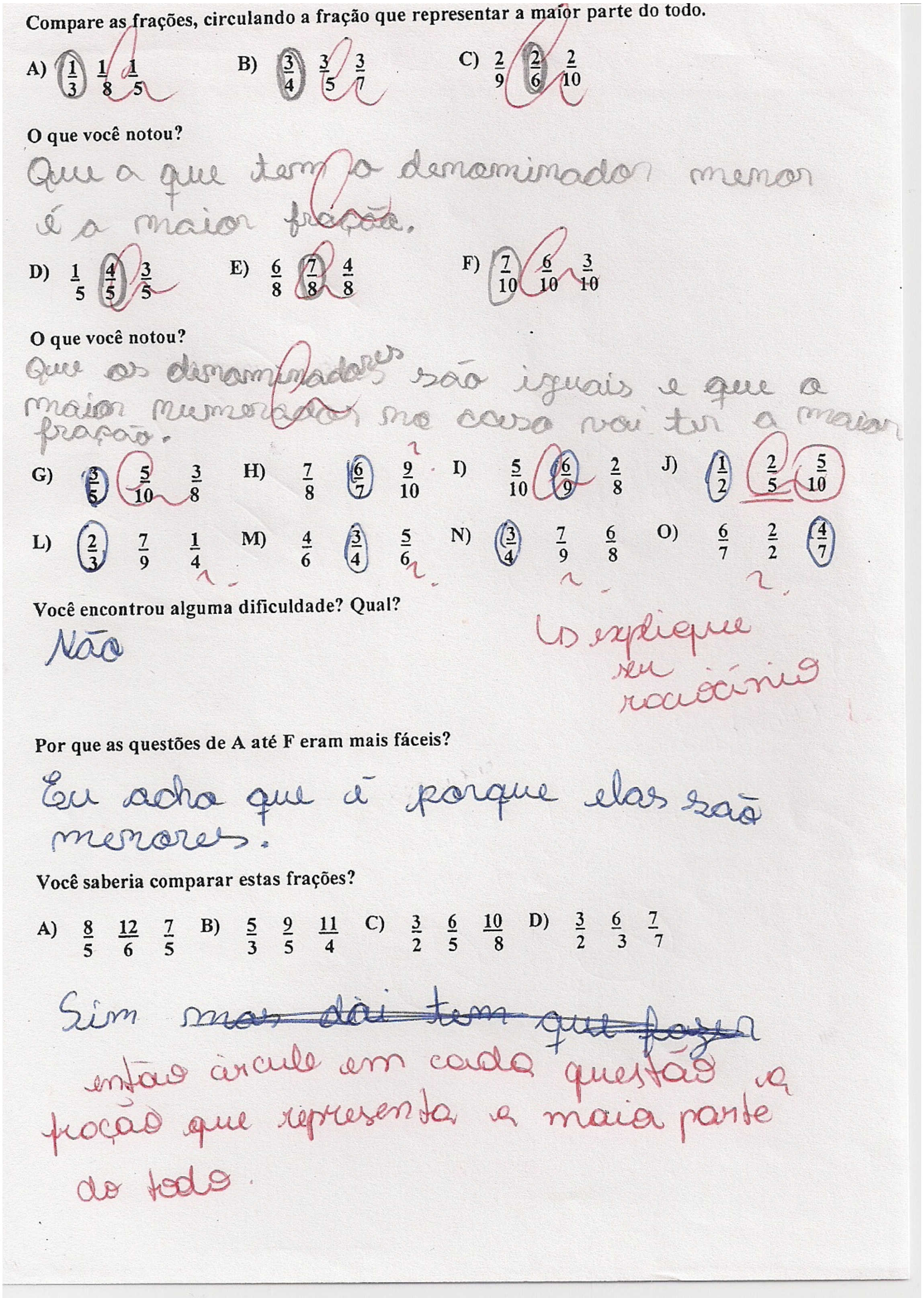

a e d. – É que eles são ângulos alternos.
~~c e d~~ - a e c - que são ângulos oposto
e tem o mesmo valor.
a e y - são opostos, é como se deslocase
a transversal, são retas paralelas.
d e x - são colaterais adjacentes, juntos
são um ângulo suplementar = 180°
c e d - são opostos pelo vértice, só deslocar a
paralela.
tente escrever melhor isso! Mas a idéia é essa mesmo
x e y - São ângulos colaterais adjacentes
e juntos formam -180°.
tem certeza
b e x -
porque? eles estão em lados diferentes da transversal?

Figura 16: análise de erros em sala de aula.

As atividades que os alunos entregavam eram sempre corrigidas de forma a analisar todo o raciocínio feito por eles (esse método de avaliação foi explicado aos alunos, o que os fez escrever o que pensavam para resolver os problemas). Logo, as partes nas quais havia erros, era destacado ao aluno com indagações a fim de que o mesmo aprimorasse seu pensamento sobre aquilo. Toda atividade que tivesse alguma consideração a ser analisada novamente pelo aluno deveria ser entregue (a mim) novamente para que, assim, pudéssemos ir “conversando” sobre suas dificuldades. Isso foi bem útil, pois, como sabemos o tempo para fazer isso em sala de aula é muito curto, então essa avaliação contínua possibilitava um aprendizado melhor tanto para o aluno que refletia sobre seus erros quanto para mim que pude perceber a importância de não enxergar o erro como uma fracasso.

Essa forma de avaliação mostrou aos alunos que não era preciso copiar dos outros para poder ganhar a nota pela atividade. Sempre foi ressaltado a eles que a nota seria dada pelo empenho em tentar mostrar nas questões aquilo que sabia afinal meu objetivo ao desenvolver tarefas para serem feitas em casa era poder analisar melhor o que cada aluno não estava entendendo. Os estudantes entenderam qual era o propósito e reagiram muito bem a isso, não tendo medo de manifestar suas opiniões e dúvidas, como mostra as figuras 17 e 18.



Compare as frações, circulando a fração que representar a maior parte do todo.

A) $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{7}$ C) $\frac{2}{9}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{10}$

O que você notou?

Que a que tem o denominador menor é a maior fração.

D) $\frac{1}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$ E) $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{4}{8}$ F) $\frac{7}{10}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{3}{10}$

O que você notou?

Que os denominadores são iguais e que o maior numerador no caso vai ter a maior fração.

G) $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{8}$ H) $\frac{7}{8}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{9}{10}$ I) $\frac{5}{10}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{2}{8}$ J) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{10}$

L) $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{1}{4}$ M) $\frac{4}{6}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ N) $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{6}{8}$ O) $\frac{6}{7}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{4}{7}$

Você encontrou alguma dificuldade? Qual?

Não

Explique seu raciocínio

Por que as questões de A até F eram mais fáceis?

Eu acho que é porque elas são menores.

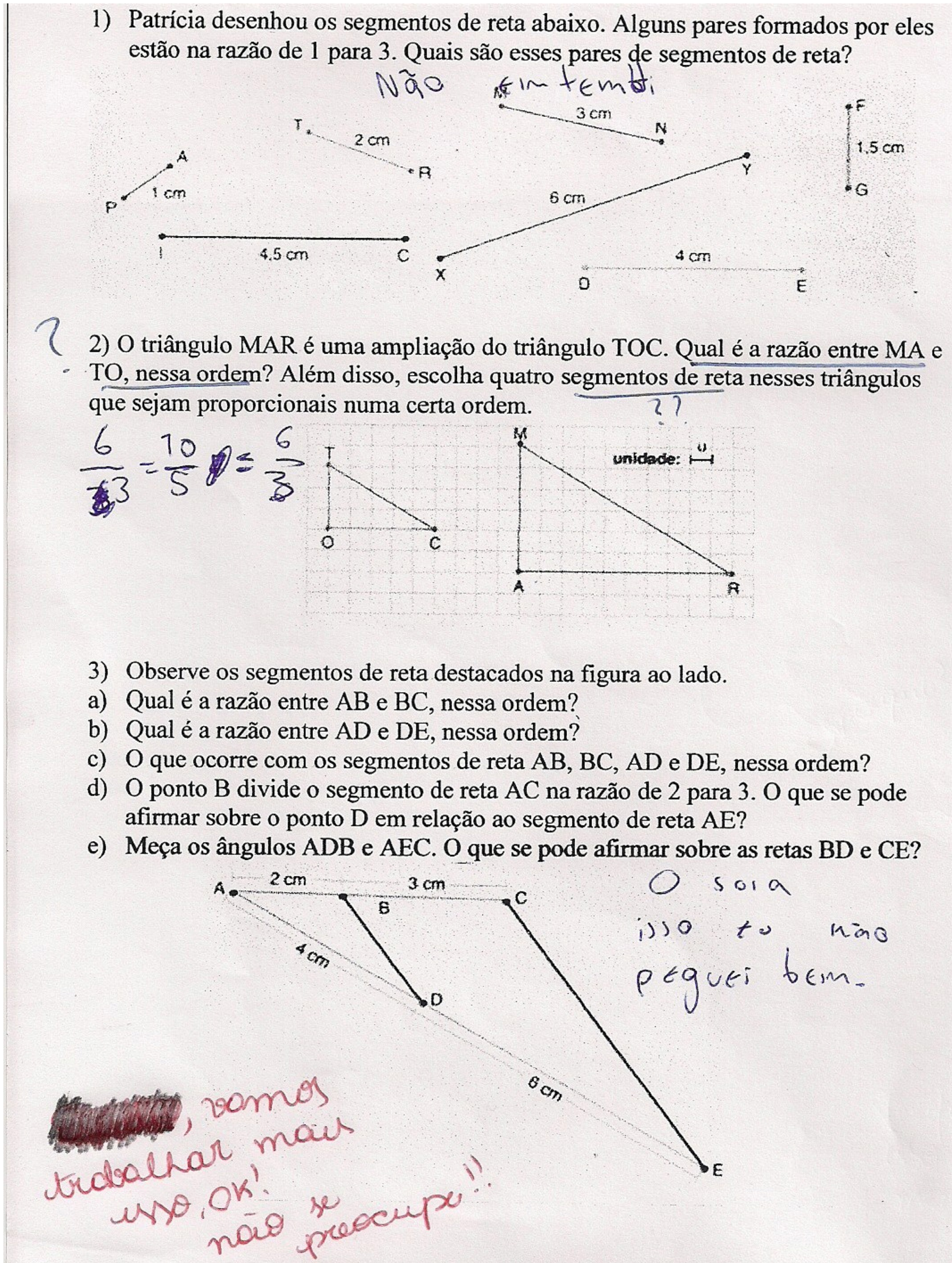
Você saberia comparar estas frações?

A) $\frac{8}{5}$ $\frac{12}{6}$ $\frac{7}{5}$ B) $\frac{5}{3}$ $\frac{9}{5}$ $\frac{11}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{10}{8}$ D) $\frac{3}{2}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{7}{7}$

Sim ~~mas dai tem que fazer~~

então circule em cada questão a fração que representa a maior parte do todo.

Figura 17: valorização do erro.



1) Patrícia desenhou os segmentos de reta abaixo. Alguns pares formados por eles estão na razão de 1 para 3. Quais são esses pares de segmentos de reta?

Não entendi

?

2) O triângulo MAR é uma ampliação do triângulo TOC. Qual é a razão entre MA e TO, nessa ordem? Além disso, escolha quatro segmentos de reta nesses triângulos que sejam proporcionais numa certa ordem.

??

$\frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{6}{3}$

3) Observe os segmentos de reta destacados na figura ao lado.

a) Qual é a razão entre AB e BC, nessa ordem?

b) Qual é a razão entre AD e DE, nessa ordem?

c) O que ocorre com os segmentos de reta AB, BC, AD e DE, nessa ordem?

d) O ponto B divide o segmento de reta AC na razão de 2 para 3. O que se pode afirmar sobre o ponto D em relação ao segmento de reta AE?

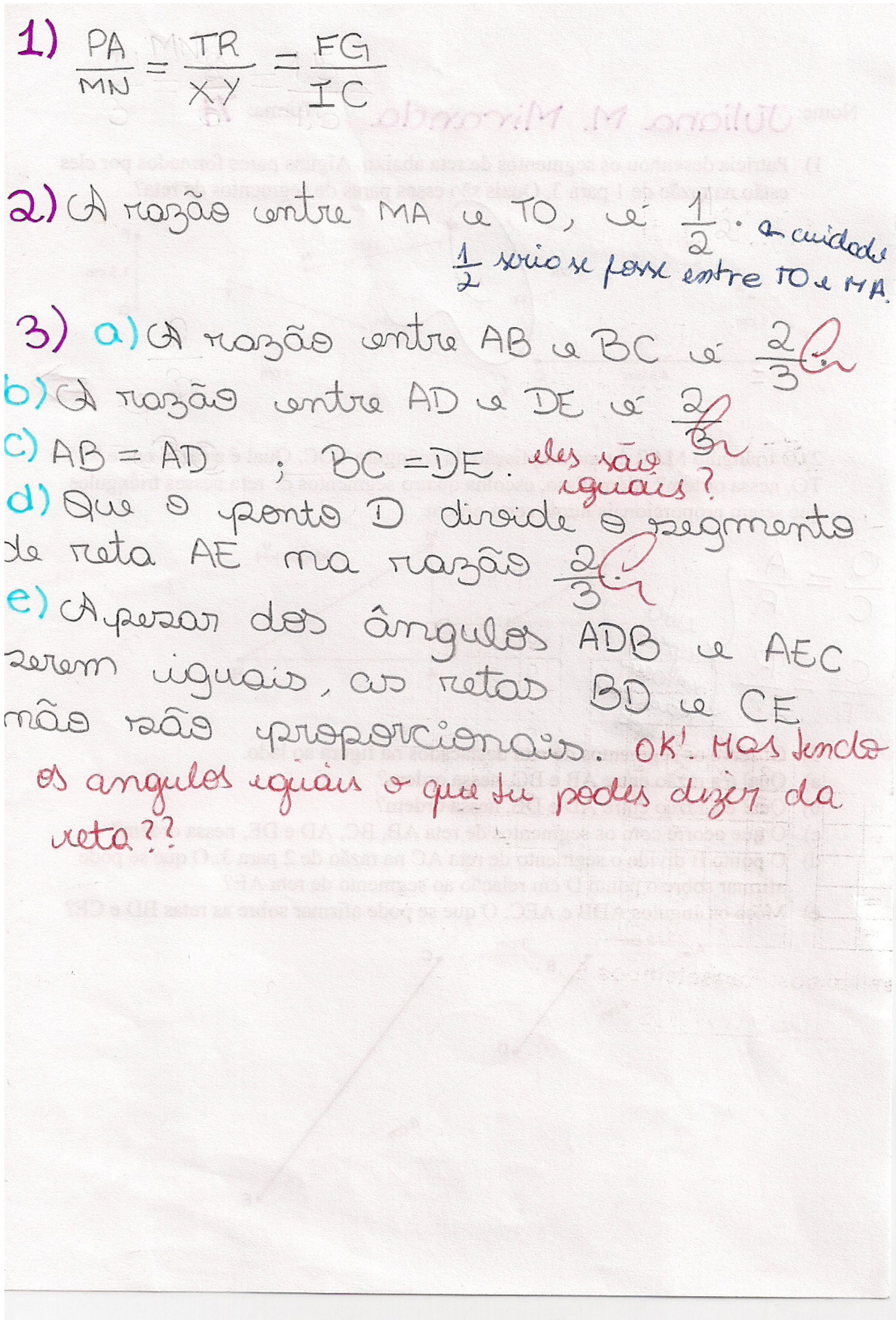
e) Meça os ângulos ADB e AEC. O que se pode afirmar sobre as retas BD e CE?

O sora isso eu não peguei bem.

[redacted], vamos trabalhar mais isso, OK! não se preocupe!!

Figura 18: aluno manifestando sua opinião sem receio.

Nas figuras 19 e 20 mostramos alguns exemplos de como era destacado nas atividades dos alunos o que deveria ser estudado novamente.


1) $\frac{PA}{MN} = \frac{TR}{XY} = \frac{FG}{IC}$

2) A razão entre MA e TO, é $\frac{1}{2}$. cuidado $\frac{1}{2}$ seria se fosse entre TO e MA.

3) a) A razão entre AB e BC é $\frac{2}{3}$

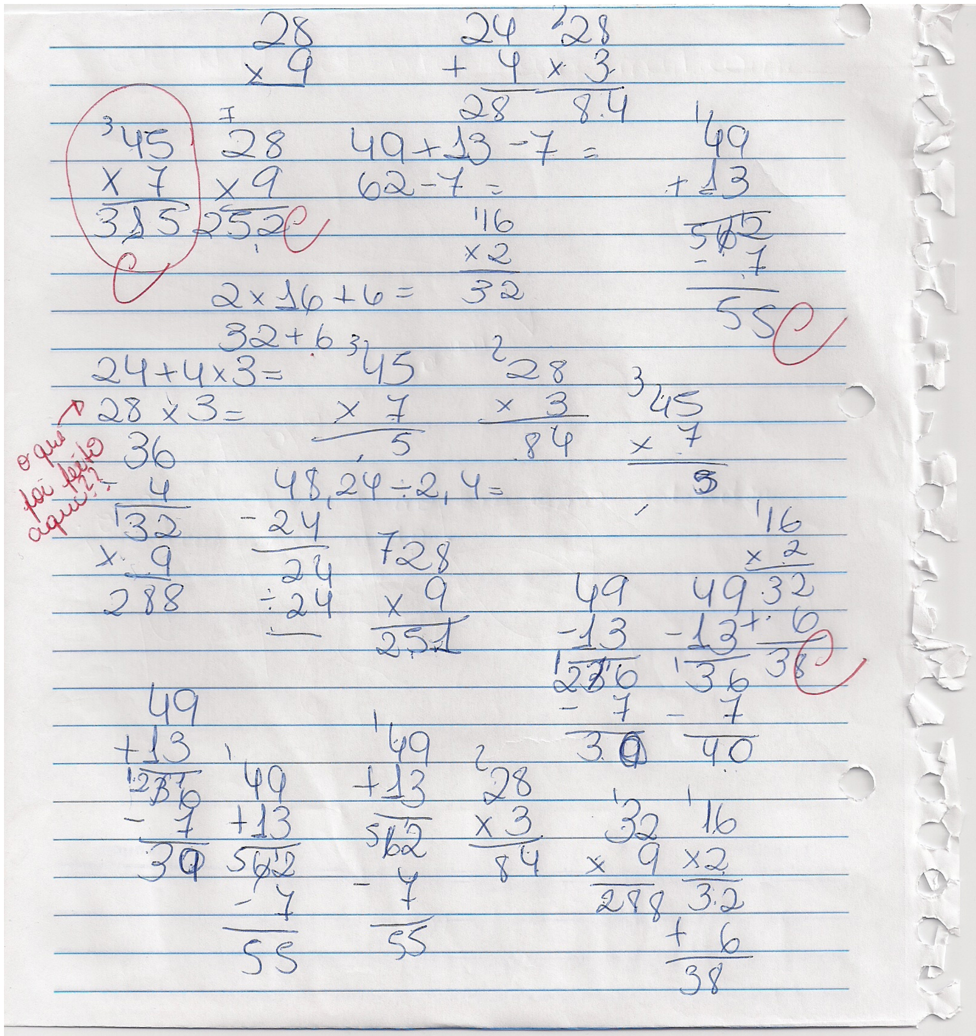
b) A razão entre AD e DE é $\frac{2}{3}$

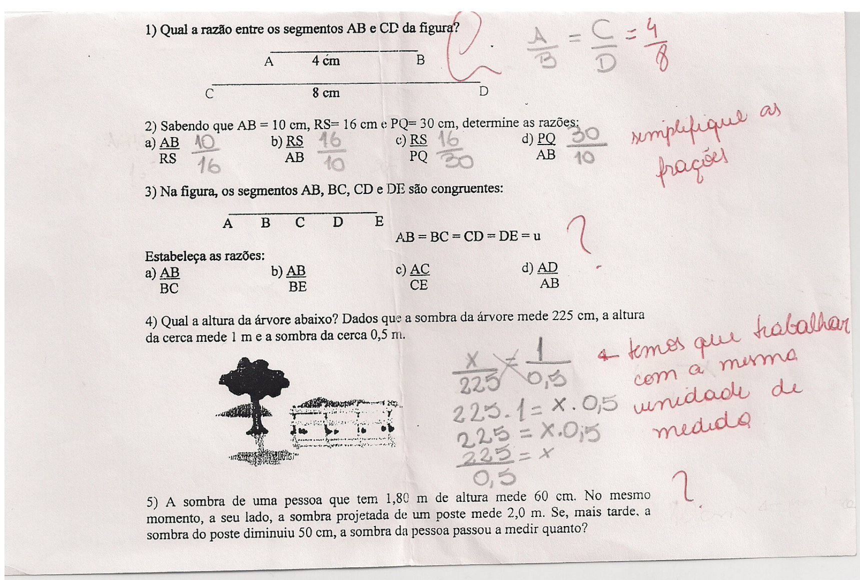
c) AB = AD ; BC = DE. eles são iguais?

d) Que o ponto D divide o segmento de reta AE na razão $\frac{2}{3}$

e) A pesar dos ângulos ADB e AEC serem iguais, as retas BD e CE não são proporcionais. OK! Mas sendo os angulos iguais o que tu podes dizer da reta??

Figura 19: correção da atividade baseada nas ideias defendidas.




1) Qual a razão entre os segmentos AB e CD da figura?

A 4 cm B

C 8 cm D

2) Sabendo que AB = 10 cm, RS= 16 cm e PQ= 30 cm, determine as razões:

a) $\frac{AB}{RS}$ b) $\frac{RS}{AB}$ c) $\frac{RS}{PQ}$ d) $\frac{PQ}{AB}$

3) Na figura, os segmentos AB, BC, CD e DE são congruentes:

A B C D E

AB = BC = CD = DE = u

Estabeleça as razões:

a) $\frac{AB}{BC}$ b) $\frac{AB}{BE}$ c) $\frac{AC}{CE}$ d) $\frac{AD}{AB}$

4) Qual a altura da árvore abaixo? Dados que a sombra da árvore mede 225 cm, a altura da cerca mede 1 m e a sombra da cerca 0,5 m.

5) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,0 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir quanto?

Figura 20: ilustrações de como valorizar o erro.

Os destaques feitos nas atividades dos alunos eram desenvolvidos com o intuito de identificar as causas dos erros cometidos para assim poder planejar como desdobraríamos os pensamentos errôneos que se construiu em cada aluno. Assim, os erros foram aproveitados em sala de aula a fim de que as concepções dos estudantes em relação aos conceitos e aos procedimentos abordados fossem, de fato, as mais corretas possíveis. Se os erros não fossem trabalhados com os alunos, seria mais provável que eles permanecessem durante os outros anos, ocasionando mais problemas em conteúdos mais complexos. Nessa concepção Brousseau (página 171, 1983) considera que

> O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos (BROUSSEAU, apud CURY, 2007, p. 33).

Um dos objetivos da análise de erros é entender os erros cometidos pelos alunos e, assim, tentar descobrir as causas dos mesmos a fim de solucioná-los e aproveitá-los para a construção de novos conhecimentos. Assim, pensamos que seria interessante que o professor trabalhasse com seus alunos, partindo dos erros dos mesmos. Mas independente da atividade que for elaborada, o professor tem que abandonar a simples transmissão de conhecimentos e tentar, com experiências em sala de aula, mostrar coragem aos alunos para que eles explorem e opinem mais durante as aulas. Os alunos precisam ter a liberdade para raciocinar e argumentar sobre suas ideias.

Acreditamos que o professor ao elaborar suas aulas precisa tentar desenvolver atividades que explorem as dificuldades de cada aluno. Para tal objetivo, as atividades não podem ser baseadas na realização de operações de uma mesma forma (como aqueles exercícios de “siga o modelo”), em perguntas padronizadas, sem sentido e sem significado. Além disso, ao trabalhar com qualquer atividade que deva ser entregue ao professor em alguma aula seguinte é aconselhável que o professor corrija-as quando elas forem entregues e devolva aos seus alunos com comentários que os auxiliem a refletir (se questionar) sobre os erros. Por conseguinte, pode-se solicitar aos alunos que refaçam e expliquem os motivos pelos quais os erros foram criados. Além disso, outra sugestão indicada pela professora Cury é que devemos estar atentos para a amplitude do erro:

> Pode-se ter uma resposta incorreta dada por um aluno ao ser questionado em aula. Nesse caso, é necessário verificar se há muitos estudantes com a mesma dificuldade

(e aproveitar o momento para criar uma estratégia) ou se ela é pontual e pode ser atendida individualmente, em outro momento. Se vários estudantes mostrarem estar com a mesma dúvida, podem-se sugerir novos dados para o problema, de modo que a insistência no erro leve a um absurdo (CURY, 2007, p. 80).

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise de erros propicia uma avaliação muito rica e, ao mesmo tempo, complexa, ela é bastante relevante para verificar as respostas dadas pelos alunos, sem tentar apenas remediar a situação dizendo o que está certo e o que está errado. Percebemos que o erro é um constituinte essencial do conhecimento dos alunos, que foi construído devido às suas experiências anteriores. Assim, podemos perceber, também, que é extremamente benéfico desenvolver atividades didáticas que provoquem questionamentos nos alunos sobre seus posicionamentos.

Não estamos afirmando que o ensino de Matemática apenas é bem qualificado quando os educadores lecionam através da forma mencionada. Com certeza, existem professores que realizam excelentes trabalhos com os alunos mesmo adotando outra metodologia de ensino. Mas, o presente trabalho foi voltado para os professores que tenham interesse em aplicar a concepção de ensino que está sendo defendida com os indivíduos que trabalham.

Durante o trabalho foram pesquisadas diversas bibliografias que tratam sobre a análise de erros, especialmente as publicações de Helena Cury. Ela defende que a análise de erros é uma possibilidade de sucesso para uma melhor aprendizagem, pois ao ser empregada em sala de aula os alunos começam a se questionar sobre suas próprias soluções. E, pelo o que foi desenvolvido, concordamos com Cury em todos os aspectos apresentados por ela em suas análises. Cury ainda argumenta que faltam discussões sobre a análise de erros em cursos de formação de professores, ideia a qual também sou favorável. Observar como os alunos resolvem os exercícios, discutindo as soluções feitas por eles é um passo importante para que os futuros professores reflitam sobre o processo de aprendizagem e como lidarão com isso em duas práticas.

Um dos objetivos do trabalho era verificar se a análise de erros é um recurso que pode ajudar na aprendizagem dos alunos, o que de fato foi comprovado ao longo da pesquisa, pois os alunos começaram a se questionar quanto às suas respostas, proporcionando subsídios para discussões sobre a resolução das questões. Percebemos que os alunos analisados passaram a deduzir as respostas esperadas partindo das suas respostas anteriormente formuladas. Essa forma de avaliação e, essa consequente atitude dos alunos analisados, mostrou que a análise de erros possibilita uma melhor construção do conhecimento. Não foi dito que apenas essa estratégia motiva e auxilia os estudantes, mas confirmamos que a análise dos erros provoca indagações nos educandos e promove um ensino mais integrador. É importante destacar que para analisar os erros dos alunos, foram criadas cinco categorias para classificar os erros cometidos por eles. Elas foram utilizadas para organizar a análise dos resultados observados.

Além disso, ao aplicar a análise de erros em minhas experiências docentes foi notado que isso possibilitou uma troca de experiência muito motivadora tanto para mim como para os alunos. As diferentes visões foram enriquecendo o nosso ambiente de estudo porque a maioria dos estudantes se envolvia nas discussões, debatendo as próprias concepções de erro.

Outro fato interessante foi que, ao longo das investigações e experiências, notou-se que grande parte dos alunos apresentava dificuldades na regra da mudança de sinal em uma equação quando se mudava de membro. Isso ocorre, muitas vezes, pois a explicação dessa regra foi dada a partir de regras e esquemas mecanizados, os quais não trazem aos alunos nenhuma ideia expressiva do porquê se deve realizar esse tipo de processo. Observou-se que muitos professores ensinavam que "o sinal de igual era um transformador de sinais: converte o + em – e vice-versa" ou ensinavam que "quando passamos um termo para outro lado da igualdade, a operação se inverte". Acreditamos que um método muito mais criativo e inteligível para os alunos é o de relacionar equações com uma balança de dois pratos, ela ensina a ideia correta da preservação do equilíbrio representado pelo sinal de igual. Essa atividade também pode explorar outras interpretações, por exemplo, o fato de que a subtração é a operação inversa da adição.

Por conseguinte, na perspectiva da análise de erros, estamos considerando a possibilidade de transformar o erro em problemas para serem abordados pelos alunos e professores na tentativa de encontrar soluções que promovam e facilitem o aprendizado em Matemática. O essencial é que as aulas possam auxiliar os alunos a organizarem seus raciocínios de tal forma que seja possível testar, verificar suas próprias respostas. Além do mais, percebemos que é muito importante que o professor, em suas aulas, enfatize mais a análise do processo como um todo e não apenas o resultado final obtido, como a resposta final em uma prova formal ou na alternativa que foi assinalada em um teste de múltipla escolha. Observamos que a análise das respostas dos estudantes gera resultados positivos se vier, também, acompanhada de uma profunda discussão entre alunos sobre as dificuldades que eles encontram. Logo, os erros podem ser utilizados para criar questionamentos e auxiliar os alunos na (re) construção do conhecimento.

Sugerimos que os professores considerem o pensamento problematizador do aluno, incentivem o mesmo com perguntas e proponham que eles resolvam uma determinada questão de várias formas distintas, justificando todos os passos que realizaram para chegar a determinada conclusão. Os professores podem também relacionar a Matemática com outras áreas do conhecimento (para, assim, não termos um ensino isolado no currículo) e pedir trabalhos de pesquisas aos alunos para, assim, incentivar e valorizar o lado curioso e crítico deles.

9. REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **O Ensino de Matemática.** Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 23. 1993.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Ed. 70, 1979. 225p.

CREPALDI, Celi V.; WODEWOTZKI, Maria Lúcia L.. **A avaliação da aprendizagem matemática através da análise de erros.** Didática. São Paulo, v. 24, p. 87-99. 1988.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros.** *O que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica. 2007.

CURY, Helena Noronha. **Análise de Erros em Demonstrações de Geometria Plana: Um Estudo com Alunos de 3º Grau.** Dissertação de Mestrado em Educação – UFRGS. Novembro de 1988.

CURY, Helena Noronha. **As Concepções de Matemática dos Professores e suas Formas de Considerar os Erros dos Alunos.** Tese de Doutorado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, Porto Alegre, novembro de 1994.

CURY, Helena Noronha. **As concepções sobre erros matemáticos e sua relação com as concepções sobre a natureza da matemática.** Cadernos de Educação. Porto Alegre, RS: Faculdade de Educação – PUCRS, v. 13, n. 18/19. 1990.

CURY, Helena Noronha. **Contradições entre a prática do professor de matemática, suas concepções de matemática e formas de considerar o erro.** Projeto de tese de doutorado – UFRGS. Porto Alegre, dezembro de 1992.

CURY, Helena Noronha. **Erros no ensino de Matemática.** *Como aproveitá-los para aprender*. Revista do Professor. Porto Alegre, v. 6, n. 23, jul/set. 1990.

HENDGES, Cléo Luiz; RAUPP, Evandro; FARIAS, Marcelo Luís. **Tendência Tecnicista.** São Leopoldo- RS. 2005.

HOFFMANN, Jussara. **Mito & Desafio.** *Uma perspectiva construtivista.* Porto Alegre. 37ª edição. 2006.

KLÜSENER, Renita. **Ler, escrever e compreender a matemática, ao invés de tropeçar nos símbolos.** Educação Continuada: Ler e escrever, compromisso de todas as áreas. 4ª edição.2001.

MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias de Aprendizagem.** São Paulo: EPU, 1999.

ULBRICH, Silvia. **Relatório de Estágio.** FAPA –RS. 1999.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **O movimento da Matemática Moderna: suas estragégias no Brasil e em Portugal.** A matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: novos estudos. Porto Alegre: Redes Editora, 2008.

ZANCHET, Beatriz Maria Boéssio Atrib. **Desenvolvimento de processos algébricos na perspectiva de uma aprendizagem significativa.** Cadernos de Educação. Pelotas, RS: UFPel, v. 10, n. 17, jul/dez. 2001.