UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

ORIGAMÁTICA

O ORIGAMI NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Guilherme Nogueira da Silva

PORTO ALEGRE

2009/02

ORIGAMÁTICA

O ORIGAMI NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Monografia apresentada junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Guilherme Nogueira da Silva

PORTO ALEGRE

2009/02

ORIGAMÁTICA

O ORIGAMI NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Monografia apresentada junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Comissão examinadora:

___

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

___

Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald
FACULDADE DE EDUCAÇÃO – UFRGS

Porto Alegre, 18 de dezembro de 2009

“Por toda a parte existe Geometria.”

Platão

AGREDECIMENTOS

Ao professor Marcus Basso, pela orientação neste trabalho e pelo apoio e suporte ao longo de toda minha formação acadêmica.

Aos professores Francisco Egger e Eduardo Brietzke, por aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho e pelas valorosas contribuições para o mesmo.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul e a sociedade brasileira, como mantenedora desta instituição, por me possibilitarem uma formação gratuita e de qualidade.

À minha mãe, meu pai e meu irmão, pelo apoio e amor incondicionais ao longo de toda a minha vida, pelo exemplo que são e por tornarem todos os dias de minha vida mais felizes.

À minha namorada Daniela, pelo apoio e incentivo em todas minhas ações.

Aos colegas de curso pelo companheirismo ao longo de toda a caminhada acadêmica.

RESUMO:

O presente trabalho tem o objetivo de caracterizar o origami como possível ferramenta para utilização em sala de aula. Com este objetivo em mente, foi produzido um material para servir de base para nossas práticas analisadas, uma desenvolvida com professores, a fim de verificar a aceitação por parte dos mesmos do uso do material em sala de aula, e uma desenvolvida diretamente com o aluno, buscando comprovações quanto a possibilidade de desenvolvimento de atividades relacionadas a geometria com o auxilio do origami. Posteriormente, nosso objetivo passou a ser disponibilizar o material produzido para o presente trabalho a fim de que o mesmo seja utilizado por profissionais da Educação. Consta, no presente texto, um panorama histórico da Geometria, campo conceitual matemático no qual foi constatada uma maior concentração de relações entre Matemática e a arte de dobrar papel. Nesta perspectiva de correspondência, foram pontuados aspectos sobre as construções com régua e compasso como meio de visualização de conceitos geométricos e suas relações com as construções realizáveis via dobraduras. Também são abordados aspectos da história da arte do origami e das suas representações (sistemas de diagramação) utilizadas na literatura corrente sobre o assunto.

Palavras-chave:

Origami; Matemática; Ensino; Geometria; Régua e Compasso; Diagramas.

ABSTRACT:

The work presented here aims to show origami as a possible tool for Mathematics classes. With this objective in mind, we could produce a material to serve as base for our analyzed experiences: One of them was developed with teachers, in order to check the acceptability of the material produced, and another developed directly with students, in order to find evidences of the possibilities about the development of Geometry activities supported by Origami. After that, available the material produced for this work, in order to be used by professionals of Education, became our primal objective. Listed in this text, a historical overview of the geometry, mathematical field in which we observed a higher concentration of relations between Mathematics and the art of paper folding. At this perspective of correspondence, we could point some aspects of constructions made with compass and straightedge and this relations with the constructions achievable by folding. Aspects of the history of origami art and its representations made by diagramming systems, that are used in today's literature on this subject, are also discussed.

Keywords:

Origami; Mathematics; Teaching; Geometry; Compass and Straightedge; Diagramming.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Ao iniciar o trabalho com Origami, tive, em primeiro plano, um interesse focado simplesmente na arte de dobrar papel e construir figuras diversas. Tal processo me cativou pela beleza dos trabalhos que podem ser realizados através do Origami. Porém, ao desenvolver este trabalho, foi vislumbrada a possibilidade de aliar o conhecimento matemático com a visualização proposta pela construção de objetos por Origami. Tal união configura uma possível ferramenta para o uso em sala de aula de Matemática. Destes pensamentos, surgiu a ideia de criar um portal, na *Internet*, para hospedar materiais com os quais professores possam trabalhar em sala de aula de Matemática e, ao mesmo tempo, aprender um pouco mais sobre esta arte milenar.

Quando falamos em Origami, para a grande maioria das pessoas, o que vem à mente são formas de animais construídos através de dobraduras, encarando os processos realizados durante a confecção de um Origami como sendo um exercício meramente manual. Porém, durante o processo que gera a forma de um animal, por exemplo, foram utilizadas diversas dobraduras, e o acúmulo de todos estes passos é que gera o resultado final. Analisar tais passos, bem como as combinações destes, gerando novos padrões, é uma rica fonte para o raciocínio matemático, tendo em vista que podemos nos questionar sobre diversos aspectos de cada construção, assim como a ordem em que foram executados determinados passos, ou a relevância de um determinado passo para o resultado final, por exemplo.

Além destes primeiros exemplos, existe uma infinidade de Origamis que representam sólidos geométricos e que, por si só, tem um grande potencial para uma saudável contribuição para o ensino e aprendizagem em Matemática. Através destes, podemos investigar diversas relações entre sólidos, características de cada figura, e também visualizar diversos conceitos, que geralmente são definidos de forma mais abstrata, ou através de uma visualização mais precária, feita por uma representação plana de uma figura tridimensional.

1.1 Material Proposto

Ao mesmo tempo em que pensava nessas possíveis relações, imaginei um meio para divulgar este trabalho. Tendo em vista que a produção de material para utilização em sala de aula só se torna efetiva se for utilizada para a prática docente, pois ser utilizado é o objetivo principal de qualquer produção de material, divulgar a existência deste material se torna um ponto muito relevante para que se alcance o objetivo principal deste estudo: Contribuir com alternativas metodológicas para a prática de ensino e aprendizagem de Matemática nas escolas brasileiras. Assim surgiu a idéia de formular um portal on-line, no qual seriam divulgadas propostas para a utilização desta arte que envolvessem Matemática. Tendo em vista que, desta forma, o portal tem a capacidade de atingir um público muito maior e se tornar acessível para qualquer pessoa com *Internet* ao redor do mundo, trata-se de uma forma efetiva de elevar consideravelmente o potencial do material produzido.

Ao criar este ambiente para hospedagem de material didático diferenciado, pretende-se estabelecer um referencial, não somente para alunos que se interessem por Origami, mas principalmente para professores que, com o portal, têm uma fonte para auxílio em seus planos de aula que visam conteúdos matemáticos já contemplados pelas propostas publicadas neste ambiente. Outra importante função deste portal, já prevista para os primeiros meses de funcionamento do mesmo, é servir como um meio de divulgação de possíveis criações de usuários, sob esta perspectiva de contribuição quanto a alternativas para o ensino de Matemática.

Este portal consiste em um *website* que funciona como um banco para hospedagem de material que sirva, inicialmente, de suporte para a construção de Origamis e seu uso com vistas ao ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos. Nossa expectativa é que o portal alcance um número expressivo de usuários e que possamos, ao desenvolver este trabalho, hospedar outras propostas diferenciadas para inserção em sala de aula, bem como softwares e materiais manipulativos.

1.2 Disposição Geral dos Capítulos

No capítulo 2 do presente trabalho, intitulado *Origami – Um pouco sobre a Arte*, apresento um breve apanhado histórico do desenvolvimento da Arte das dobraduras. Para tal, o papel de principal referencial teórico foi desempenhado por Robert J. Lang[1].

No capítulo 3, *Sistemas de Diagramação*, apresento o sistema de diagramação de Akira Yoshizawa, um dos meios de se representar um conjunto de instruções para a confecção de uma

[1] Ver LANG, R. J. – 2003, no capítulo 10: Referências.

peça de Origami. Também consta um breve comentário sobre o objeto a ser representado: Quais tipos de dobra existem e, portanto, devem ser representadas por um sistema de diagramação. Além disso, anexado a este capítulo, temos os diagramas desenvolvidos por mim para representar os modelos escolhidos para a primeira versão do material proposto: *Caixa Simples*, *Módulo Sonobe*, *Cubo Sonobe* e *Tetraedro Estrutural*.

No capítulo 4, Vídeo – Uma alternativa aos sistemas de diagramação, temos uma justificativa para a opção que fizemos ao utilizar vídeos em nosso material, abandonando os diagramas confeccionados anteriormente e anexados ao capítulo 3. Nessa perspectiva, defendo os pontos fortes do vídeo enquanto meio de representação das instruções para confecção de Origamis, e acentuo os pontos fortes dos sistemas de diagramação que foram incorporados aos vídeos confeccionados para o portal, como as instruções verbais.

Uma descrição detalhada da estrutura e do funcionamento do portal Origamática é apresentada no capítulo 5, Portal Origamática. Nesse sentido, comento sobre como se utiliza o material e como foi concebido inicialmente, ou seja, que modelos de origami foram escolhidos para a primeira versão do portal, bem como as possibilidades de aplicação de cada modelo, característica pela qual cada um deles foi escolhido.

No capítulo 6, A Matemática por trás da Arte, faço um breve apanhado histórico da Geometria, área da Matemática na qual foi vislumbrada uma mais íntima conexão entre o Origami e a Matemática. Este capítulo tem o objetivo de pontuar aspectos do desenvolvimento da Geometria enquanto criação humana, e assim estabelecer uma conexão entre Origami e a Matemática da Geometria e, uma vez feita essa conexão, apresentar a rigorosidade matemática das dobraduras, apresentando os axiomas de Huzita-Hatori, que são os axiomas que descrevem todos os tipos de dobradura possíveis.

O capítulo 7, *A Arte por trás da Matemática*, mostra a arte como suporte a certas construções muito elegantes da Matemática, como a construção de triângulos pitagóricos (triângulos retângulos cujas medidas são ternas pitagóricas) através de dobraduras, e a interpretação, via teoria de dobraduras, destas construções. Um resultado muito elegante de uma dobra elementar, que é apresentado neste capítulo, é o Primeiro Teorema de Haga.

No capítulo 8, *Algumas práticas analisadas*, temos a análise de duas práticas realizadas ao longo da concepção do material. Uma delas foi feita com professores, buscando um retorno quanto à aceitação por parte dos mesmos do material enquanto alternativa viável em sala de aula de Matemática. A segunda foi realizada diretamente com alunos, utilizando-se uma versão preliminar do portal, a fim de verificar a possibilidade de estabelecer discussões sobre Geometria a partir da confecção de Origamis. Também consta no presente capítulo uma análise matemática, da resposta de um aluno à pergunta norteadora da segunda prática. Tal análise explicita a forte presença da Matemática nos processos de dobradura, ainda que tais processos não sejam dotados de grande complexidade.

Encerro o trabalho no capítulo 9, *Considerações finais*, onde faço uma reflexão sobre tudo que pude constatar ao longo do desenvolvimento do trabalho.

2. O ORIGAMI – UM POUCO SOBRE A ARTE

A arte japonesa de dobrar papel. A origem da palavra advém do japonês ori (dobrar) kami (papel) que, ao juntarmos as duas palavras, resulta na pronúncia "origami". Esta é a definição que encontramos ao procurar o significado da palavra origami. Mais profundamente falando, temos a definição de origami como sendo a arte de criar figuras diversas utilizando-se apenas papel e dobraduras. Sobre a definição do que é origami, Genova (2008, p. 14) escreve:

> Origami é uma forma de expressão. Quem manipula o papel abre uma porta de comunicação com o outro. Dobrar papéis valoriza o movimento das mãos, estimula as articulações e estimula o cérebro.

Segundo Lang (2003, p. 11), muito do fascínio que o origami proporciona às pessoas está na sua simplicidade. Trata-se de um quadrado de papel, e eu devo transformá-lo apenas com dobraduras, sem cortes, sem colagem. Ou seja, o origami se diferencia das outras artes nesse sentido: Ao trabalhar com origami, não devo adicionar, nem retirar nada. Ao contrário de artes como a pintura, por exemplo, na qual adicionamos cores à tela branca formando figuras que desejamos, ou a escultura, na qual retiramos matéria de um bloco para formar a figura que desejamos.

Como descreveu Robert J. Lang:

> Se você consegue pensar em um objeto, seja ele natural ou uma criação humana, alguém, em algum lugar, provavelmente já criou uma versão em origami deste objeto.(LANG, 2003, p.3, minha tradução).

Devido a sua origem, muitos dos modelos que encontramos foram criados no Japão, porém, os Estados Unidos, Inglaterra, França, Alemanha, Bélgica, Argentina, Singapura, Austrália e Itália, de acordo com Lang (2003, p. 3), são considerados grandes centros do trabalho com origami.

Existem de modelos[2] extremamente minimalistas, formados por duas ou três dobras, até modelos incrivelmente complexos, exigindo horas de dobradura. Sobre os modelos disponíveis hoje em dia, Robert J. Lang afirma:

> A maioria destes milhares de modelos tem uma característica em comum: Praticamente todos eles foram criados nos últimos 50 anos.

---

[2] Por modelo, entende-se uma obra criada em origami.

> Deste modo, origami pode ser encarado como uma arte milenar e nova ao mesmo tempo. Sua juventude é, de certo modo, surpreendente. Afinal, dobradura em papel tem sido considerada uma forma de arte há 15 séculos. É, portanto, antiga. O que não se poderia esperar é que 98 por cento do seu conteúdo fosse criado nos últimos 2 por cento do tempo de sua existência. (LANG, 2003, p. 3, minha tradução).

Fato que evidencia esse crescimento acentuado na quantidade de criações é que, segundo Lang (2003, p. 3), há cinqüenta anos, todos os modelos de origami existentes poderiam ser catalogados em uma única página, e nenhum destes modelos teria um corpo de instruções com mais de trinta passos. Além disso, segundo Lang (2003, p. 3), o número de modelos registrados passa dos milhares e, além disso, podemos encontrar modelos sofisticados, com instruções compostas por centenas de passos, que exigiriam horas para serem produzidos. Os últimos 60 anos no Japão, e 40 anos no resto do mundo, configura o renascimento no mundo do origami e uma enorme aceleração da evolução desta arte.

Muito dessa evolução se deve ao espalhamento desta arte ao redor do mundo, que só foi possível quando foi transcendida a barreira da língua, ao criar-se um sistema de diagramação. Este sistema nada mais é que uma gama de códigos formados por setas, linhas pontilhadas e outros símbolos, e foi criado pelo mestre japonês Akira Yoshizawa (1911 – 2005). Com esse sistema, iniciado em seus primeiros livros na década de 40, Yoshizawa proporcionou aos artistas um meio de ensinar sua criação. Um meio de escrever uma receita, passo a passo, de como recriar uma determinada obra, agregando mais um diferencial à prática desta arte. Sobre a criação deste sistema, Robert J. Lang afirma:

> Os modelos de origami se espalharam através de publicações de suas seqüências de dobraduras[3] - um conjunto de instruções, passo a passo, de como construir um determinado modelo. As seqüências de dobraduras, baseadas em um código[4] simples, formado por linhas tracejadas e pontilhadas, desenvolvido pelo grande mestre japonês Akira Yoshizawa, transcendem as barreiras de linguagem, levando a divulgação mundial desta arte. (LANG, 2004, p. 4, minha tradução).

Mais sobre este sistema de diagramação será comentado no capítulo que se segue.

[3] Seqüência de dobraduras é uma receita, contendo instruções para a elaboração de um determinado modelo. No presente trabalho utilizo a palavra diagrama para designar tal receita.

[4] Por código, entenda-se um conjunto de símbolos representando determinadas ações. No presente trabalho utilizo o termo sistema de diagramação para designar os códigos que tratam de representar seqüências de dobraduras.

3. SISTEMA DE DIAGRAMAÇÃO

3.1 Sistema de Diagramação de Yoshizawa

Para entendermos o sistema de diagramação de Yoshizawa, hoje utilizado internacionalmente, precisamos saber o que este sistema vai representar. Ou seja, que tipos de dobras existem e podem ser representadas por este sistema.

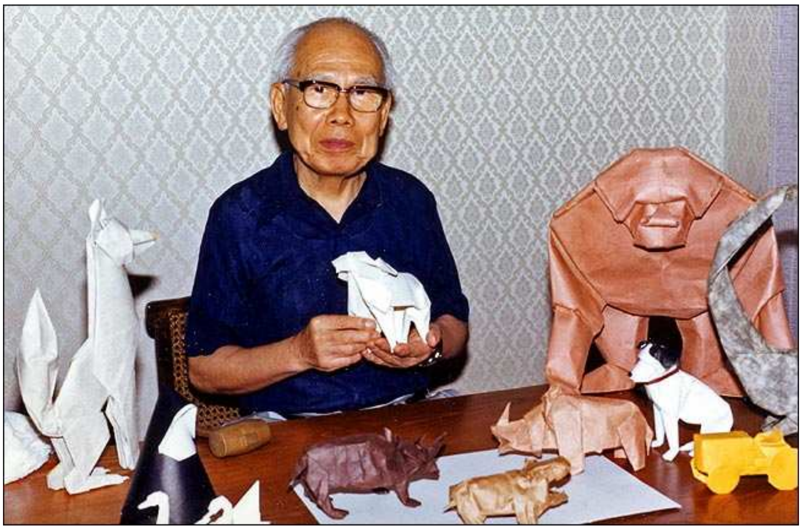


Figura 1: Akira Yoshizawa (Nytimes, 2009)

Segundo Lang (2003, p. 11), em origami, existem dois tipos básicos de dobras, denominadas dobras Montanha (Figura 2) e dobras Vale (Figura 3). Estes dois tipos são representados no sistema de Yoshizawa por linhas tracejadas diferentemente, sendo a dobra montanha representada por uma linha Pontilhada e tracejada simultaneamente (ponto – ponto – linha) e a dobra vale por uma linha tracejada comum (linha – linha).

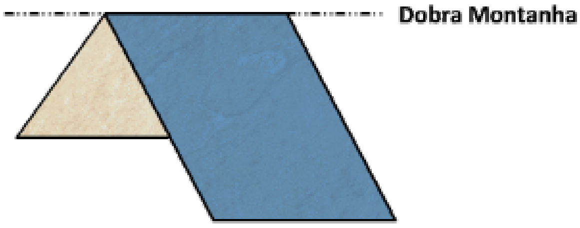


Figura2: Dobra montanha

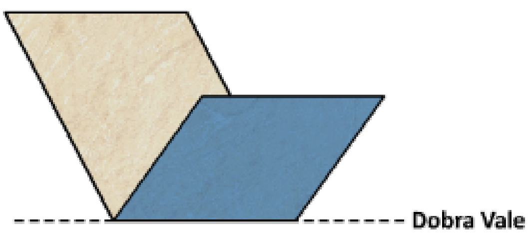


Figura 3: Dobra vale

Além destes dois tipos, temos as marcas (Figura 4), *creases* em inglês, que são dobras feitas visando à marcação de determinadas linhas no papel base, com o papel retornando para a posição anterior a dobra. Estas linhas servem para encontrarmos determinados pontos com certas propriedades, ou como uma linha de referência. Estas marcas são indicadas por linhas contínuas mais finas que as que representam a borda do papel, e geralmente não se prolongam até as bordas. O único aspecto que diferencia as três dobras mostradas acima é o ângulo da dobra. Todavia, consideraremos em nosso trabalho apenas os dois primeiros tipos como dobras.

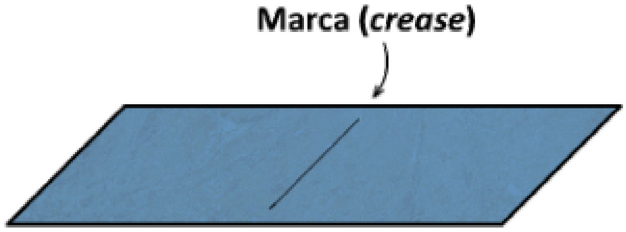


Figura 4: Marca

Além de representar o resultado final, a dobra em si, o sistema de diagramação deve ser capaz de comunicar o meio pelo qual obtemos determinada dobra ou marca. Devido ao método de criação, praticamente todas as dobras são de referência[5]. Para representar estas instruções, o sistema utiliza setas, contínuas quando nossa referência encontra-se visível (Figura 3), e tracejada quando devemos efetuar a dobra buscando uma referência não visível, seja ela no verso (Figura 6), ou no interior de alguma aba (Figura 7).

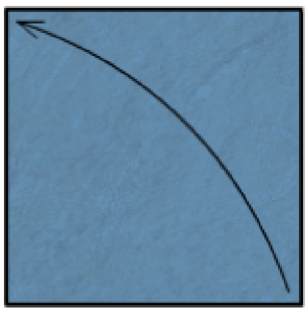


Figura 5: Dobra pela frente

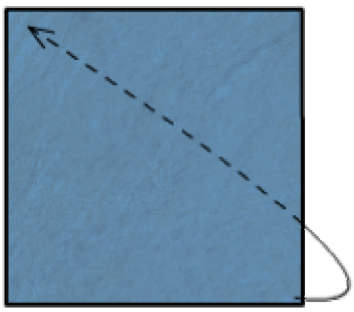


Figura 6: Dobra por trás

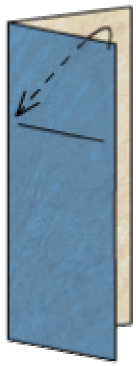


Figura 7: Dobra pelo meio

Existem ainda passos em que devemos efetuar diversas dobras ao mesmo tempo. Alguns autores dão um nomes específicos a estes passos. O mais comum deles, que é utilizado em

[5] Por dobra de referência entende-se uma dobra cuja instrução é dada em função de pontos específicos. Exemplo: Dobre o papel de modo a posicionar o ponto P_1 sobre a linha l_1. Sendo neste caso P_1 e l_1 as referências.

alguns dos modelos que propomos neste trabalho, é um passo denominado dobra reversa, que nada mais é do que inverter o sentido de uma dobra feita em um papel que já estava dobrado, e tem como símbolo indicativo uma seta vazada (Figura 8).

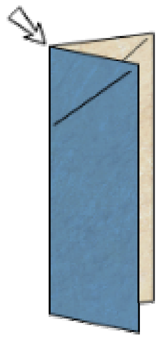


Figura 8: Dobra reversa

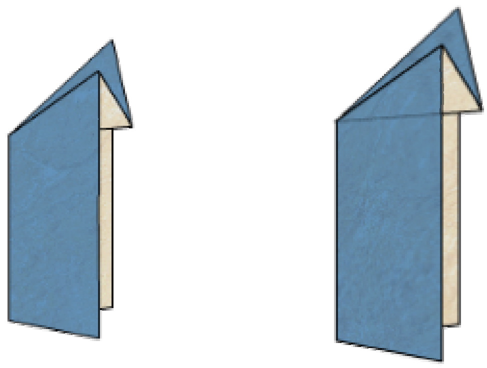


Figura 9: Linha raio-X

Além destes sinais básicos, ainda podemos utilizar outros recursos para melhorar a visualização. Um deles, que é chamado por Lang de linha raio-X, é muito utilizado para representações tridimensionais em um plano, como o quadro negro. Consiste em uma linha pontilhada representando uma parte do papel que fica escondida pelo próprio papel (Figura 9). Também se pode notar que representamos o papel como tendo duas cores distintas, uma em cada face, proporcionando assim uma melhor visualização do resultado final de uma dobra.

Existem ainda símbolos que não indicam dobras, mas movimentos que devemos fazer com toda a peça, mudando nosso referencial. Um deles, amplamente usado, indica que devemos virar o papel, ou seja, o que estava para baixo, apoiado na mesa, deve ser agora visualizado, e vice-versa (Figura 10). Outro, não menos importante, indica que devemos aplicar uma rotação ao papel, e um número racional indica o quanto devemos girar a peça (Figura 11).

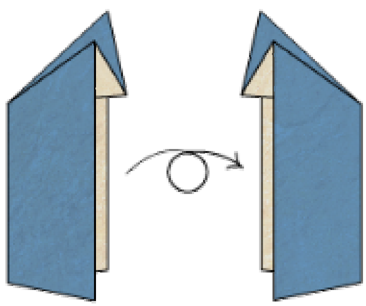


Figura 10: Virar a peça

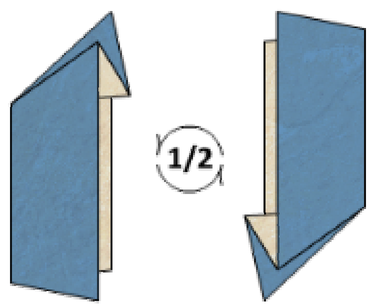
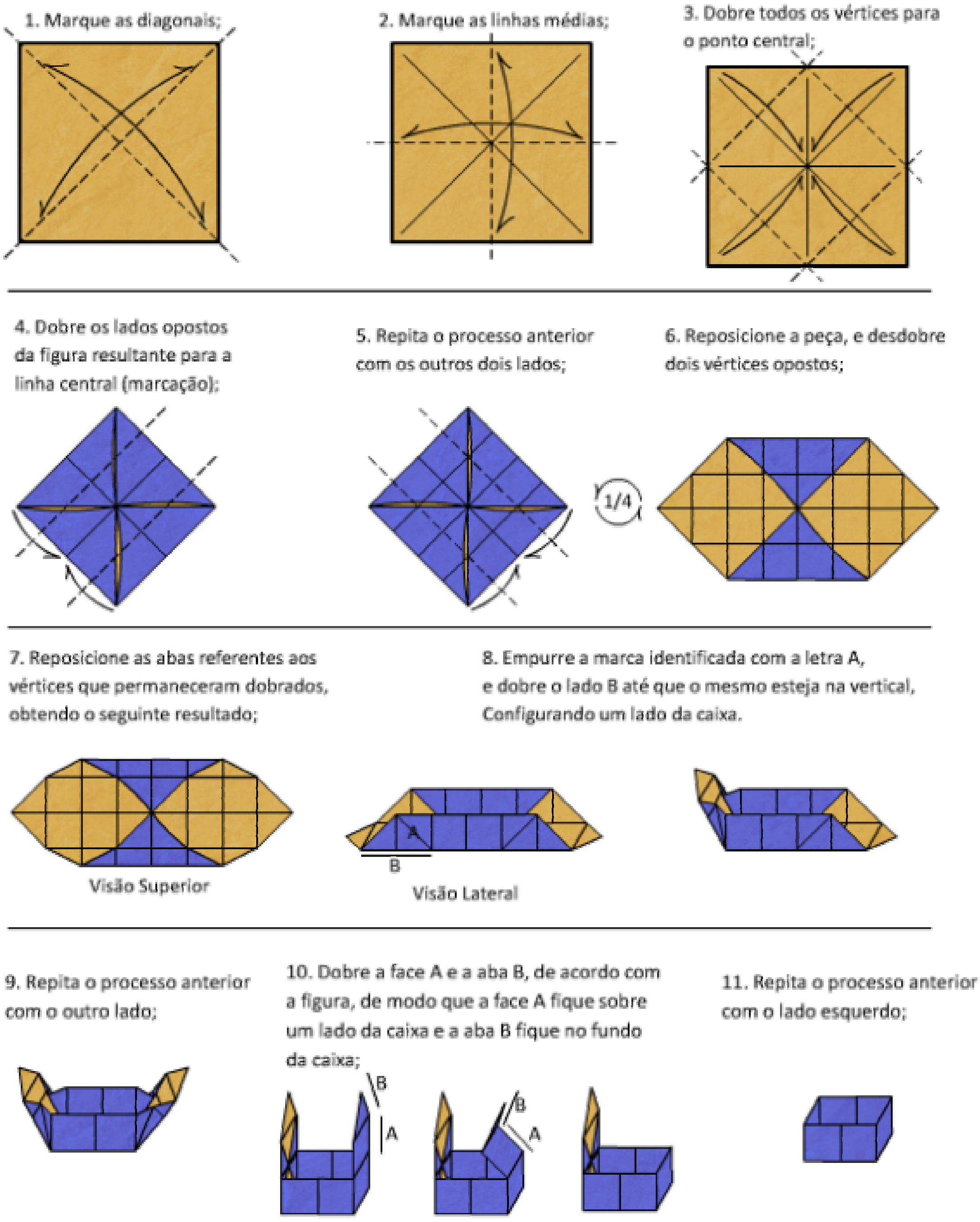


Figura 11: Meia volta na peça

Utilizando estes símbolos básicos, podemos representar, via diagramas, cada um dos modelos propostos em nosso portal. Desta maneira foram inicialmente concebidos os modelos escolhidos para nosso trabalho e, tais representações, estão anexadas a este capítulo na próxima sessão.

3.2 Diagramas dos modelos escolhidos para o portal

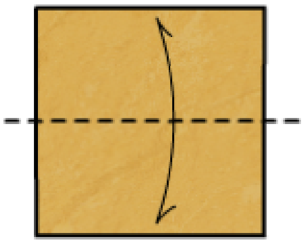
3.2.1 Caixa Simples



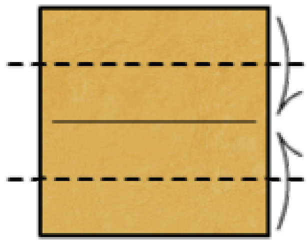
Link do vídeo referente a este diagrama: *http://www.youtube.com/watch?v=bbn0C7kqtpA*

3.2.2 Módulo Sonobe

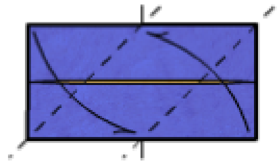
1. Dobre ao meio, marcando a linha central;



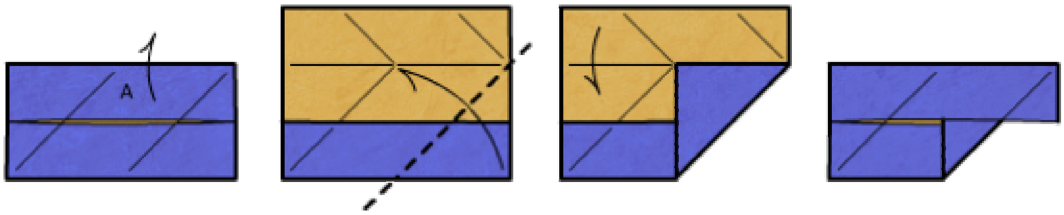
2. Dobre lados opostos sobre a linha central;



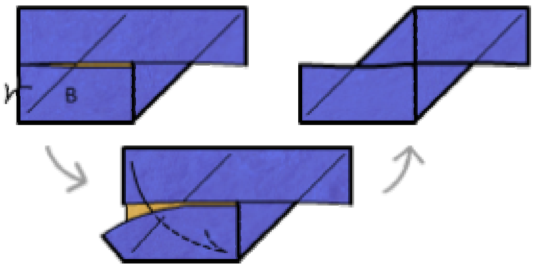
3. Dobre o vértice inferior direito sobre o ponto médio do lado superior e repita o processo de forma simétrica com o vértice superior esquerdo (marcação);



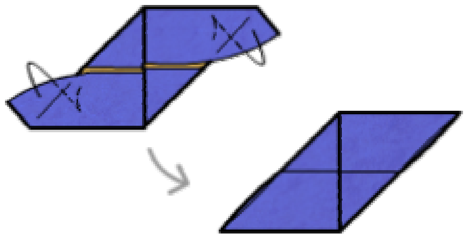
4. Desdobre a aba identificada com a letra A e volte a dobrar o vértice inferior direito para debaixo desta aba;



5. Levante levemente a aba indicada pela letra B, e dobre o vértice superior esquerdo sob ela;



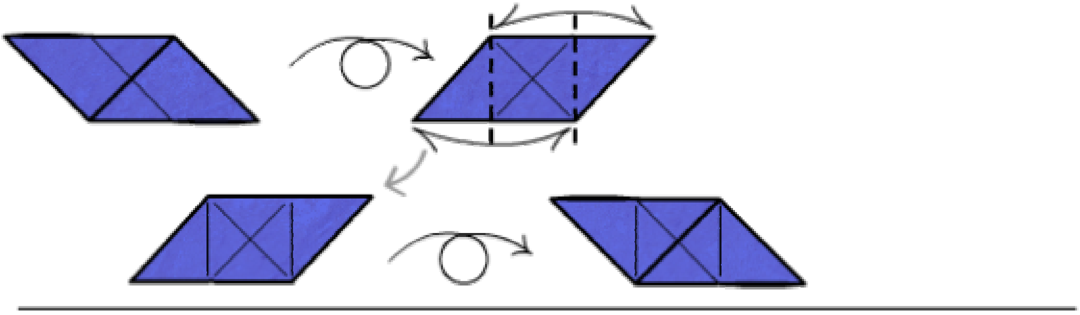
6. Dobra as abas indicadas pelas letar A e B para dentro delas mesmas;



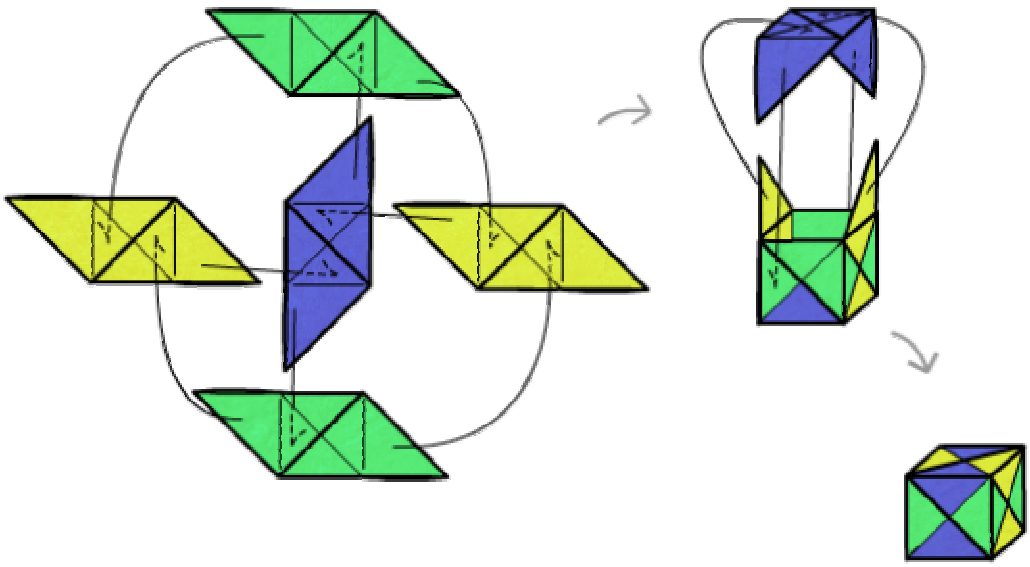
Link do vídeo referente a este diagrama: *http://www.youtube.com/watch?v=vK8__jFQ0_Q*

3.2.3 Cubo Sonobe

1. Dobrar cada um dos 6 módulos (2 de cada cor) da seguinte maneira:

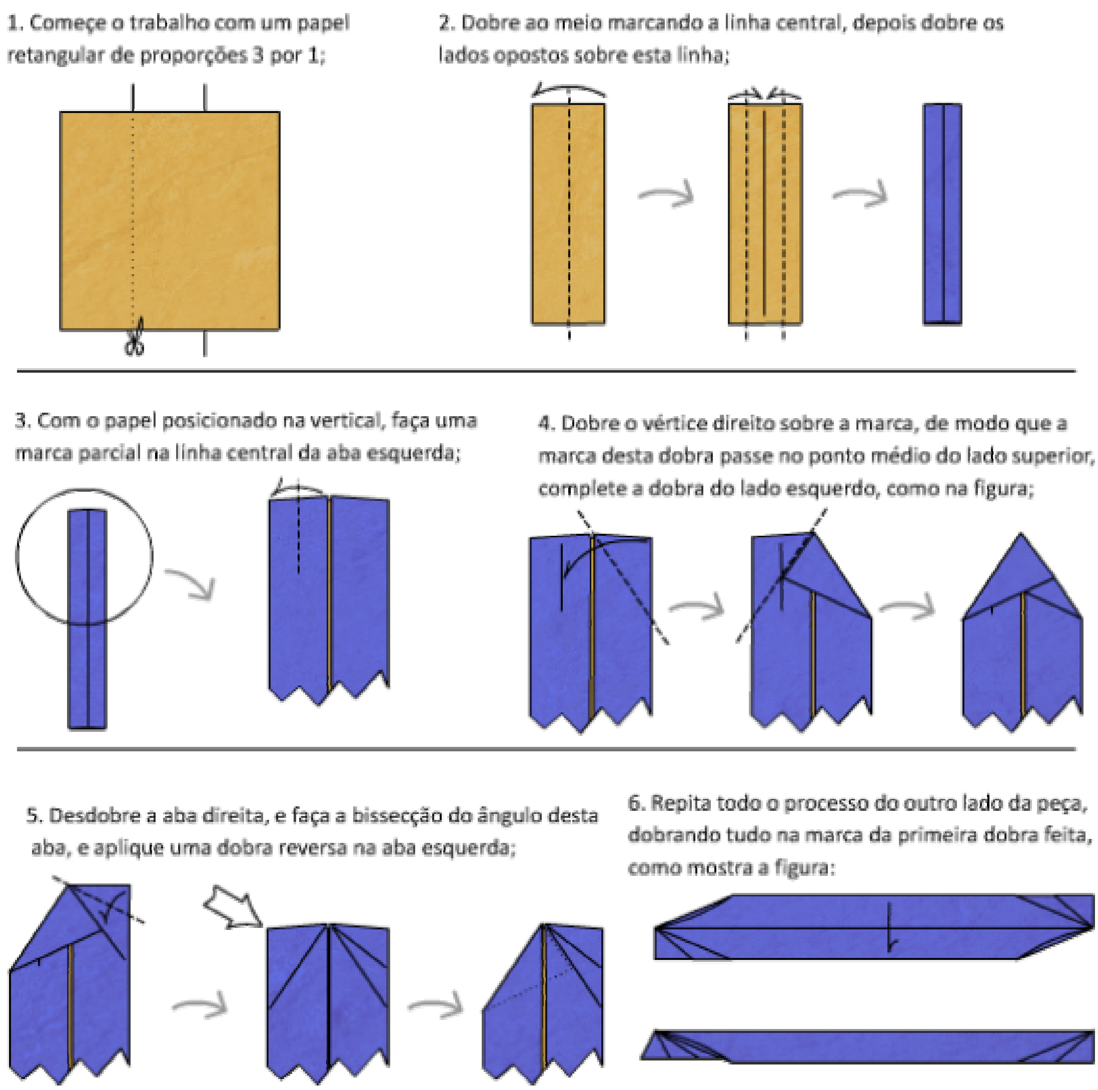


2. Cada módulo deve encaixar-se onde o outro não tem abas, como na figura abaixo:



Link do vídeo referente a este diagrama: *http://www.youtube.com/watch?v=8t5sD3tWd3c*

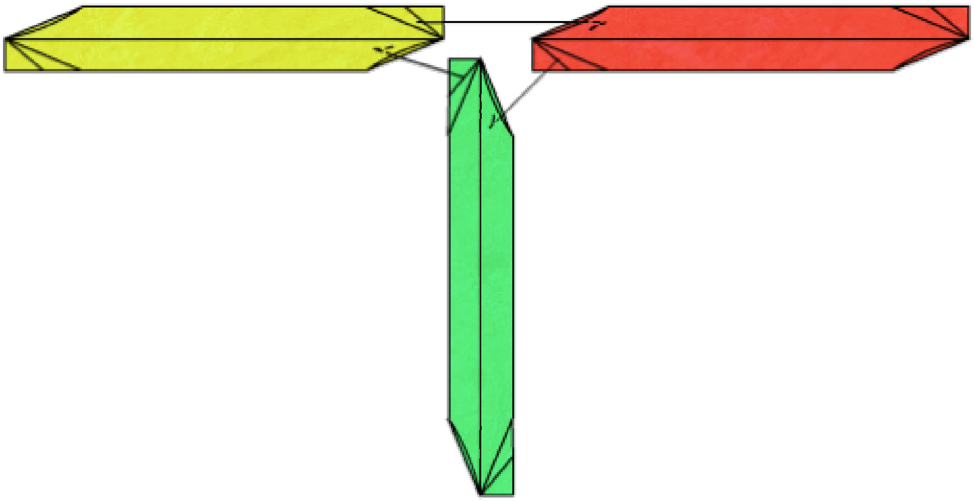
3.2.4 Tetraedro Estrutural - Módulo



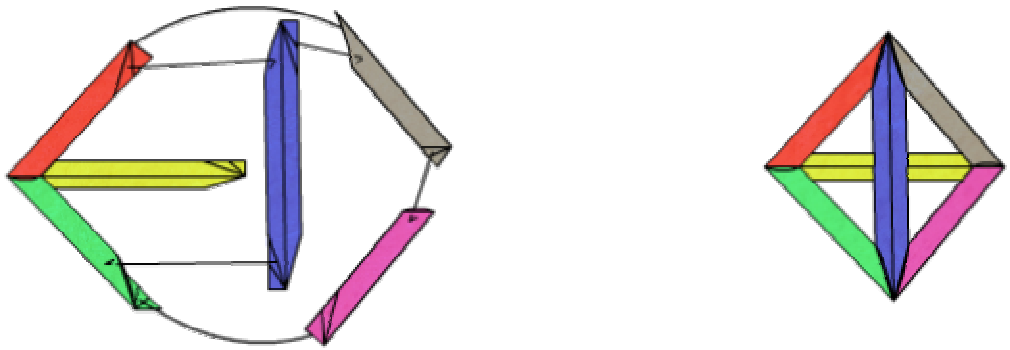
Link do vídeo referente a este diagrama: *http://www.youtube.com/watch?v=et_y98wfrJo*

3.2.5 Tetraedro Estrutural - Montagem

1. Encaixe 3 módulos, formando um vértice;



2. Em cada uma das abas livres, encaixe mais 2 módulos da mesma maneira, formando os demais vértices.



Link do vídeo referente a este diagrama: *http://www.youtube.com/watch?v=kREV98RkHf8*

4. VÍDEO – UMA ALTERNATIVA AOS SISTEMAS DE DIAGRAMAÇÃO

Em nossas práticas iniciais, constatamos algumas desvantagens no trabalho com diagramas. Para pessoas iniciantes, muitos dos códigos utilizados não são compreendidos. Além disso, uma reclamação freqüente por parte dos alunos dos cursos que pude ministrar é de que os desenhos não são muito claros e, em parte, não passam a idéia de posicionamento corretamente. Creio que isso ocorre pela dificuldade que encontramos ao representar, em um plano, uma figura tridimensional.

Um pouco de reflexão sobre o contexto no qual foi inserido o sistema de diagramação nos leva a uma justificativa do mesmo. Devido à época em que foi criado, o sistema de diagramação de Yoshizawa foi revolucionário, pois, através dos livros, meio pelo qual a cultura e o conhecimento eram compartilhados para com a humanidade, o mesmo servia perfeitamente.

Porém, vivemos em um mundo globalizado, em uma era dita digital. Temos a nossa disposição uma ferramenta de integração intercontinental, com a qual podemos compartilhar informações de naturezas diversas, em tempo real, com pessoas ao redor do mundo. A *Internet* revolucionou a vida do homem moderno, e creio que esta revolução deve refletir na sua maneira de criar e divulgar suas criações.

Com estes dois pensamentos como base, procurei um meio de utilizar as novas tecnologias gráficas para sanar dificuldades de entendimento dos diagramas selecionados e, ao mesmo tempo, utilizar a *Internet* para divulgar a criação do material. Com essa idéia em mente, fui convidado para ministrar um minicurso sobre Origami na aprendizagem matemática e, na produção do material referente a este curso, tive a idéia de filmar os passos.

O processo de filmagem da produção de origamis propõe uma melhor dinâmica na visualização das peças, uma vez que esta peça está em constante movimento durante a filmagem, dando uma melhor idéia da disposição geral de suas partes. Além disso, temos um ganho no processo de dobra. Isso se dá porque, ao dobrarmos um papel, produzimos uma marca, mudamos a memória do mesmo, de modo que o papel tende a permanecer dobrado. Sendo assim, quando efetuamos um passo diante do aluno que ele não pôde compreender, ao refazemos este passo, nosso papel tende a se dobrar praticamente sozinho, enquanto o do aluno não. Mas se o aluno está assistindo a um vídeo com aquele mesmo passo, se não compreendeu pode repetir o vídeo, e nesta repetição o papel do professor estará exatamente igual ao do aluno, sem marcas pré-estabelecidas.

Uma das vantagens do sistema de diagramação que foi incorporada ao sistema de filmagem é ter um conjunto de instruções verbais. Em um primeiro momento, essas instruções foram concebidas como sendo colocados via áudio, com um locutor narrando os detalhes de cada passo filmado. Porém, para efeito de inclusão de alunos e professores surdos, decidimos por atribuir aos vídeos legendas dinâmicas (Figura 12), substituindo essa locução.

Figura 12: Tela de reprodução de vídeo

Com os vídeos, havíamos superado o problema de visualização por parte dos alunos. Porém, hospedar vídeos na internet requer muita capacidade de memória, uma vez que estes vídeos são pesados (40 *megabytes* em média). Além disso, o publico teria que fazer download destes vídeos, o que seria impraticável para quem não possui internet banda larga. Para nos livrarmos destas adversidades, utilizamos um portal muito popular da internet que hospeda vídeos, podendo estes serem visualizados por usuários deste ambiente ao redor de todo o mundo diretamente *online*, sem necessidade de download. Assim, além de podermos utilizar o sistema de hospedagem e visualização já prontos, atingiríamos um publico muito maior, de então usuários deste portal que se interessassem por origami.

5. PORTAL ORIGAMÁTICA

Uma vez decidida a maneira como iríamos trabalhar, ainda faltava decidir quais modelos e qual a estrutura geral do portal. Neste capítulo, fazemos um apanhado geral sobre as principais características do material produzido como objeto deste estudo.

5.1 Estrutura do Portal

Com isso as facilidades das ferramentas disponíveis na *web* em mente, foi criada gratuitamente uma conta de usuário em um famoso site que hospeda vídeos e por esta conta foi criado um canal, intitulado ORIGAMÁTICA (Figura 13).

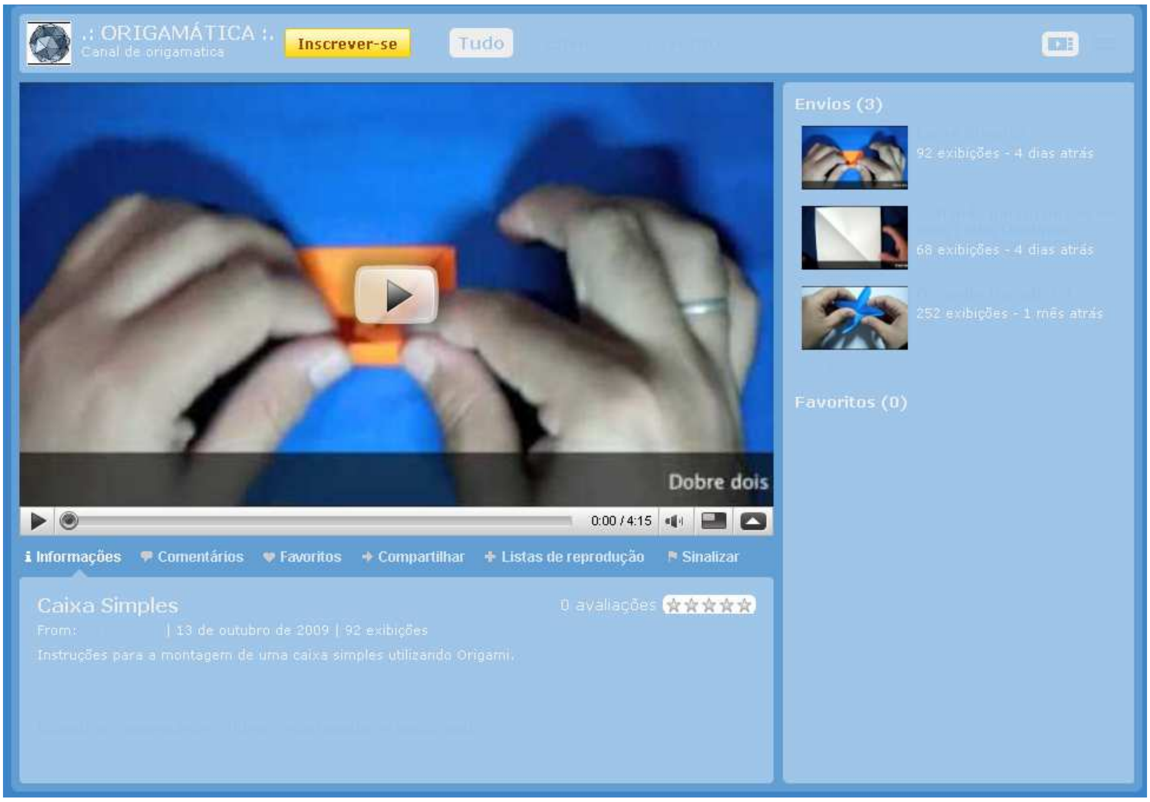


Figura 13: Portal Origamática

Também na Figura 13, podemos ver que há um botão identificado como “Inscrever-se”. Se um usuário cadastrado neste site clicar neste botão, ele automaticamente será cadastrado como filiado a este canal, e receberá notificações via e-mail sobre as postagens de vídeos neste canal.

Assim, um professor que tenha se interessado no material proposto em nosso portal, pode se inscrever em nosso canal, e será avisado sempre que postarmos novidades.

Cada vídeo postado em nossa conta possui um link único, e este link pode ser copiado e indicado ao aluno. Assim, o mesmo pode entrar diretamente no vídeo que interessa ao professor trabalhar sem precisar procurar dentre todas nossas postagens. Também é permitido avaliar cada vídeo postado de zero a cinco estrelas. Isso é importante no sentido de termos um retorno, por parte de nossos usuários, quanto à qualidade do material produzido.

Em nosso endereço próprio na internet, *linkamos*[6] os vídeos postados no ambiente comentado anteriormente e trabalhamos com algumas sugestões de atividade para cada vídeo postado. É importante frisar que se trata de uma sugestão e que o professor, quando em contato com nosso material, tem total liberdade na utilização do mesmo, podendo inclusive propor ou relatar diferentes usos dados aos vídeos do portal.

5.2 Modelos Propostos

O portal que propomos começará contendo os vídeos explicativos dos seguintes modelos:

1. Caixa Simples;
2. Módulo Sonobe;
3. Cubo Sonobe;
4. Tetraedro Estrutural.

Estes modelos foram escolhidos por atenderem a características específicas e serão direcionados, em nossas sugestões de propostas, para que estas sejam mais bem aproveitadas. É importante frisar que não desejamos induzir o professor a utilizar nosso material apenas com a idéia inicial que tivemos e sim que nosso material consiga se adaptar à prática do professor.

O primeiro deles, a Caixa Simples, foi escolhido como sendo um modelo de iniciação ao trabalho com origami. Como o próprio nome já diz, trata-se de um modelo simples, acessível para o iniciante na arte do origami. Assim, nosso objetivo principal com este modelo é acostumar o aluno com este novo tipo de atividade. Porém, como pode ser visto nas próximas sessões deste

[6] Por *linkar* entende-se produzir um atalho para um determinado endereço, um botão no qual o usuário clica e é imediatamente remetido ao endereço em questão.

capítulo, é nossa sugestão possível trabalhar com os conceitos de área e volume utilizando-se este origami.

O segundo modelo escolhido é, na verdade, uma parte de diversos modelos. Trata-se de um módulo, uma peça, que serve para construirmos diversos sólidos. Desta forma, nosso objetivo com este módulo é auxiliar o professor que não pretende dedicar muito tempo de sua prática na confecção dos origamis, mas sim na utilização da peça pronta. Nessa perspectiva, é necessário que o aluno aprenda apenas um tipo de dobradura para que possa montar diversos sólidos que serão devidamente explorados pelo professor. Desta construção, passamos a confecção de um cubo, nosso terceiro modelo, utilizando-se seis destes módulos. Nosso objetivo com este modelo é propor uma transição do conceito de área para o conceito de volume, estender um conceito bidimensional para uma dimensão a mais. Nesse sentido, partimos de uma peça plana para uma peça tridimensional formada por um conjunto de peças planas, promovendo um ambiente propenso para trabalhar conceitos presentes na geometria espacial que não podiam ser abordados na geometria plana, como, por exemplo, o conceito de volume.

Nosso quarto modelo, o Tetraedro Estrutural, é um modelo que representa um tetraedro, porém, ao contrário de nossos outros modelos, o sólido resultante de nossa construção é formado apenas por suas arestas. Ou seja, é um modelo em que retiramos as faces. Assim sendo, denominaremos este tipo de modelo de Modelo Estrutural. Com este mesmo tipo de módulo podemos criar diversos modelos estruturais, que serão postados futuramente no portal.

Para a iniciação do trabalho, também foi postado um vídeo que explica como cortar um quadrado de uma folha qualquer. O objetivo deste vídeo é fazer com que o aluno tenha a construção da peça inicial tão criteriosa quanto possível e que ele(a) possa produzi-la com qualquer papel que esteja disponível no momento da atividade. Sugerimos iniciar o trabalho com este vídeo.

5.3 Possibilidades para Aplicação em Sala de Aula

Nossa proposta define o papel do professor como o criador das atividades, e nosso portal como uma fonte de material que este professor pode utilizar como bem entender. Porém, tendo em vista que cada modelo escolhido acima, assim o foi por algum motivo, pode-se evidenciar que tipo de possibilidade foi vislumbrada com cada modelo. Sendo assim, as possibilidades e sugestões de aplicação estarão postadas em uma sessão à parte em nosso portal, a fim de não influenciar o usuário quanto ao tipo de prática que o mesmo pode realizar com um determinado vídeo.

5.3.1 Caixa Simples

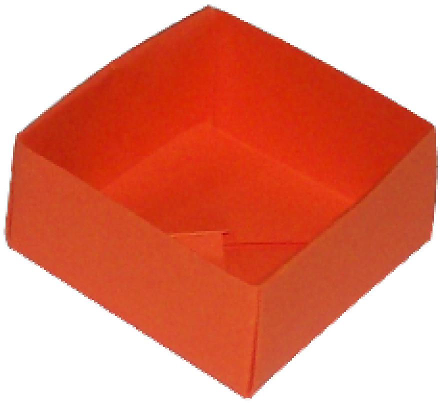


Figura 14: Caixa Simples

Mesmo sendo um modelo no qual focamos a iniciação aos processos de dobradura, pudemos notar possibilidades de investigar relações de área entre a peça inicial (papel quadrado) e o resultado final (caixa), bem como uma possibilidade de trabalharmos com comparação de volumes entre duas peças produzidas a partir de papéis de dimensões diferentes. A primeira possibilidade foi posta em prática com alunos do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, prática comentada e analisada no capítulo 8 do presente trabalho.

Usado como tal (modelo introdutório), também serviu para construirmos um vocabulário Matemático, estabelecendo a necessidade da criação do mesmo para utilização em instruções verbais que complementam os diagramas e vídeos. Esta possibilidade era esperada, uma vez que o origami enquanto recurso didático prevê a construção de um vocabulário geométrico segundo Genova(2008, p.15).

Além dos conceitos matemáticos que podem ser discutidos, segundo Genova (2008, p. 15), pode-se aplicar este trabalho com crianças sem discutir tais conceitos. Desta forma, utilizamos outra característica do Origami, utilizado agora para desenvolver questões externas à Matemática, mas também necessários ao seu fazer, como concentração, memória e coordenação.

5.3.2 Módulo Sonobe

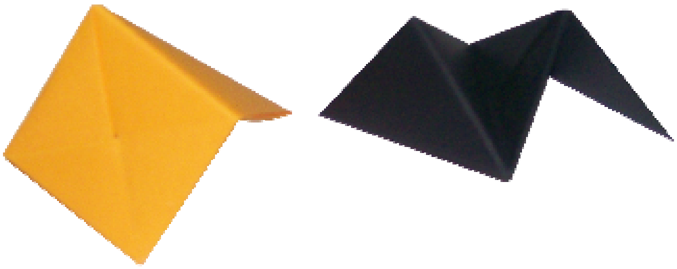


Figura 15: Duas configurações de Módulos Sonobe

Por ser o primeiro módulo proposto em nosso trabalho, há uma gama de reflexões que podem ser feitas sobre o formato de um módulo. Podemos nos questionar sobre que tipo de sólido se pode construir com um determinado módulo e como moldá-lo para que tenhamos o resultado que desejamos. Também podemos explorar a influência de cada passo para o resultado final de um módulo, se é possível criar módulos diferentes alterando a ordem destes passos e se esses novos módulos criados acarretam em novas possibilidades de representação de sólidos geométricos ou planificações diferentes para um mesmo sólido montado com módulos diferentes.

Questões referentes à simetria podem ser abordadas na construção de quaisquer módulos pois, no momento de encaixá-los, é preciso que se observe se estes módulos devem ser todos exatamente iguais ou não. Podemos ter modelos cuja receita prevê que tenhamos módulos que são reflexões uns dos outros.

5.3.3 Cubo Sonobe

Figura 16: Cubo Sonobe

Neste modelo, há um potencial para a transição do pensamento geométrico bidimensional para o tridimensional, uma vez que o aluno enxerga claramente que uma figura tridimensional foi criada através da união de diversas figuras planas. Além disso, este módulo também configura um bom meio para o raciocínio e visualização de planificações de sólidos uma vez que foi partindo da planificação que o aluno construiu o sólido. A planificação, a qual me refiro acima, não se trata obrigatoriamente das planificações clássicas que fazemos partindo de um sólido ideal, mas de uma planificação possível, obtida via junção de diferentes planos, representados pelos módulos (peças) de nosso Origami.

5.3.4 Tetraedro Estrutural

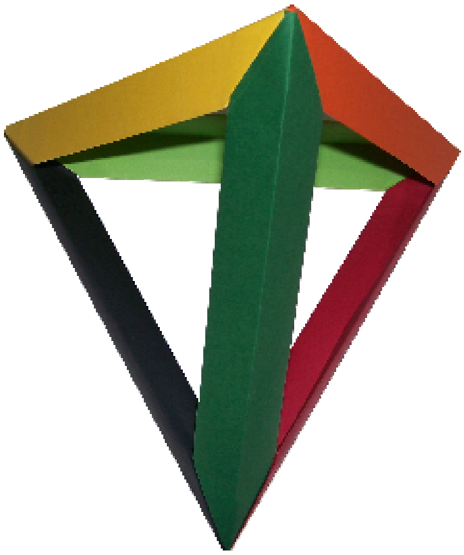


Figura 17: Tetraedro Estrutural

Pelo seu caráter estrutural, podemos utilizar este modelo, e outros, nesta mesma linha, para investigar conceitos internos de um determinado sólido. Como exemplo, temos a diagonal de um cubo, ou a própria altura do tetraedro pode ser definida mais facilmente, uma vez que não há faces escondendo o interior do sólido construído. Além disso, questões envolvendo número de arestas ou o ângulo entre as mesmas podem ser abordadas, e nessa abordagem podemos comparar diferentes modelos estruturais nos referidos aspectos.

6. A MATEMÁTICA POR TRÁS DA ARTE

6.1 Um Pouco Sobre Geometria

Castrucci (1978, p. 1) atribui o inicio da Geometria aos povos do Egito e Babilônia, e classifica a Geometria desenvolvida nesta época como intuitiva e não sistemática. De fato, segundo Eves (1996, p. 60-61), a Geometria babilônica tem uma intima relação com a mensuração prática. Também segundo este autor, a geometria estava muito presente na Matemática egípcia e era objeto de diversos problemas do papiro de Rhind[7] (Figura 18), por exemplo.

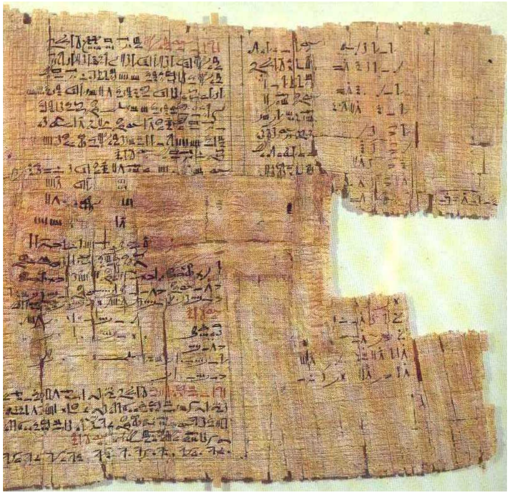


Figura 18: Papiro de Rhind – Problemas 61 a 64 (Malhatlantica, 2009)

Segundo Castrucci (1978, p. 1), na Grécia antiga, com Tales de Mileto (640 – 546 a. C.) e Pitágoras (580 – 500 a. C.), a Geometria passou a ser trabalhada de forma dedutiva, apoiada em proposições. Posteriormente, foi aprimorada com obras de Eudoxo (390 – 338 a. C.) e Arquimedes, além da famosa obra de Euclides, Os Elementos. De fato, Eves (1995, p. 94) define

[7] Papiro de Rhind é um documento egípcio datado como sendo de cerca de 1650 a. C. e, segundo Eves (1995, p. 69) “é um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas... é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga... sua solução para o problema da determinação da área de um círculo...”. Este documento encontra-se no Museu Britânico, em Londres.

a Matemática Pitagórica como "o berço da Matemática demonstrativa". Sobre Tales, Eves comenta:

> Segundo a tradição a Geometria demonstrativa começou com Takes de Mileto, um dos "sete sábios" da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a. C. (EVES, 1995, p. 94)

Segundo Eves (1995 p. 167), Euclides teve diversos trabalhos adimiráveis, porém sua fama se dá principalmente por sua obra Elementos. Sobre esta obra, Eves comenta:

> Contrariamente à impressão muito difundida, os Elementos de Euclides não tratam apenas de Geometria – contém também bastante teoria dos números e Álgebra elementar (geométrica). (EVES, 1995, p. 169)

Figura 19: Fragmento dos *Elementos*, encontrado no século XIX (Wikipédia, 2009)

Segundo Heath (1956, p. 153) Euclides, em sua obra, baseou o desenvolvimento de sua geometria em 23 definições, cinco postulados[8] e cinco, assim denominadas, *noções comuns*, que são definidas como sendo princípios aceitos por todos os ramos do conhecimento. Estas dez

[8] Segundo Castrucci (1978, p. 2), "Durante muito tempo, distinguiu-se axioma de postulado. Os axiomas eram proposições evidentes por si mesmas, e postulados , proposições que se pediam fossem aceitas sem demonstração."

afirmações[9], 5 postulados e 5 noções comuns, que formam os fundamentos da teoria de Euclides, estão respectivamente elencadas abaixo:

P_1 - É Possível traçar uma reta ligando dois pontos;

P_2 - Sempre é possível traçar um segmento finito em uma reta;

P_3 - É sempre possível descrever um círculo, dado um ponto qualquer (centro) e uma distância (raio);

P_4 - Todos os ângulos retos são iguais entre si;

P_5 - Se uma reta intercepta duas outras retas de tal modo que a soma dos dois ângulos internos de um dos lados seja inferior a soma de dois ângulos retos, então essas retas, se prolongadas indefinidamente, se interceptam neste lado;

NC_1 - Duas coisas que são iguais a uma terceira coisa, são iguais entre si;

NC_2 - Se adicionarmos iguais a coisas iguais, os resultados serão iguais;

NC_3 - Se retirarmos iguais de iguais, os resultados serão iguais;

NC_4 - Coisa que coincidem entre si são iguais entre si;

NC_5 - O todo é maior que a parte.

Segundo Borsuk e Szmielew (1960), propor uma teoria axiomática é como se aproximar da realidade por uma forma abstrata, de modo a permitir o nível máximo de rigor. Euclides buscou esse rigor com sua obra, aproximando-se da realidade já observada pelos egípcios e babilônios. Porém, algumas liberdades de interpretação dessas afirmações deram origem a novas geometrias e a diferentes propostas de sistemas de axiomas para a construção da Geometria Euclidiana.

Segundo Costa (2009, p. 12), a formalização mais feliz e de maior influência se deu por parte de David Hilbert (1862 – 1943). Hilbert tomou como primitivos os conceitos de ponto, reta e plano, seguindo a linha de Mortiz Pasch (1843 – 1930) que, segundo Costa (2009, p. 12), foi o responsável pelo primeiro grande passo na busca por um corpo axiomático suficientemente rigoroso para a Geometria Euclidiana.

[9] Estas proposições foram apresentadas por HEATH, 1956, p. 154-155. minha tradução.

Figura 20: David Hilbert (Wikipédia,2009)

A teoria de Hilbert (Figura 20) admite 21 axiomas que foram divididos por ele em cinco categorias. A seguir, apresento os Axiomas da Geometria Euclidiana Plana, propostos por Hilbert, segundo a perspectiva de Moreira (2006):

I. Termos Indefinidos:

TI_1 - Ponto;

TI_2 - Reta;

TI_3 - Plano;

TI_4 - Pertence;

TI_5 - Está entre;

TI_6 - Congruente.

II. Axiomas da Incidência:

AI_1 - Para cada dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém;

AI_2 - Toda reta contém pelo menos dois pontos;

AI_3 - Existem pelo menos três pontos que não pertencem a mesma reta.

III. Axiomas de Ordem;

AO_1 - Se B está entre A e C, então os três pontos pertencem a uma mesma reta e B está entre C e A;

AO_2 - Para quaisquer pontos distintos A e C, existe pelo menos um ponto B pertencente à reta $\overleftrightarrow{AC}$, tal que B está entre A e C;

AO_3 - Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois;

AO_4 - (Pasch) Sejam A, B e C pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Se l intercepta o segmento $\overline{AB}$, então l também intercepta o segmento $\overline{AC}$ ou o segmento $\overline{BC}$.

IV. Axiomas de Congruência;

ACg_1 - Se A e B são dois pontos distintos de uma reta l e A' um ponto de uma reta l', não necessariamente distinta de l, é sempre possível encontrar um ponto B' em (um dado lado de) l' tal que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ sejam congruentes;

ACg_2 - Se segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{A''B''}$ São congruentes a um mesmo segmento $\overline{AB}$, então $\overline{A'B'}$ e $\overline{A''B''}$ são congruentes entre si;

ACg_3 - Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ segmentos de uma mesma reta l cujo único elemento em comum é B e $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ segmentos de uma mesma reta l', não necessariamente igual a l, cujo único elemento em comum é B'. Se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$;

ACg_4 - Seja $\angle ABC$ um ângulo e $\overrightarrow{B'C'}$ um raio, então existe exatamente um raio $\overrightarrow{A'B'}$ em cada lado de $\overrightarrow{B'C'}$, tal que $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$. Além disso cada ângulo é congruente a si mesmo.

ACg_5 - Se para dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são satisfeitas as congruências $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ a congruência $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ é satisfeita.

V. Axiomas de Continuidade;

ACt_1 - Axioma de Arquimedes: Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos, então existe um número natural n tal que n cópias de $\overline{CD}$ construídas continuamente em A ao longo do raio $\overrightarrow{AB}$ passará além do ponto B;

ACt_2 - Axioma da Completude da Reta: Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma reta com suas relações de congruência e ordem que poderiam preservar as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de congruência e ordem que seguem os axiomas acima é impossível.

VI. Axiomas das Paralelas;

I – Seja l uma reta e A um ponto fora dela, então existe no máximo uma reta no plano que passe por A e que não intercepte l.

6.2 Construções com Régua e Compasso

Um meio clássico de provar teoremas da Geometria Euclidiana é o uso de construções com régua e compasso. Isso se deve ao fato destas construções estarem baseadas nos três primeiros postulados de Euclides, o que as faz também conhecidas por Construções Euclidianas.

A régua é utilizada para traçar segmentos a partir de dois pontos distintos, e o compasso para descrever circunferências a partir de seu centro e um ponto da mesma. A partir destes procedimentos, podemos generalizar processos como a transferência de medidas com o compasso e o prolongamento indefinido (quão longo quanto de deseje) de segmentos com a régua.

Alguns problemas desafiaram gerações de matemáticos que utilizavam esta técnica. Estes são conhecidos como os Três Problemas Clássicos. São eles:

I – A quadratura do círculo: dada uma circunferência, construir um quadrado com a mesma área desta circunferência.

II – A duplicação do cubo: dado um cubo, construir um novo cubo com volume igual ao dobro do volume do primeiro.

III – A tri-secção do ângulo: dado um determinado ângulo, construir um novo ângulo com um terço de sua amplitude.

A impossibilidade dos gregos em resolver estes problemas, segundo Carneiro (1993, p. 92), atesta sua perspicácia quanto ao domínio desta teoria, uma vez que perceberam o problema, mas não dispunham da matemática necessária para provar a impossibilidade da resolução de tais problemas.

Sobre a formalização das construções realizáveis via régua e compasso, Carneiro (1993, p. 92) diz:

> A história do completo esclarecimento deste problema é uma das mais interessantes e instrutivas da história da Matemática, passando pela "consolidação" dos números complexos, com o grande Gauss (1777-1855), e pela criação da teoria dos grupos com o genial Galois (1811-1832).

A teoria de Galois é um ramo da Álgebra Abstrata que, em um nível básico, usa grupos de permutações para descrever as relações entre as diversas raízes e os coeficientes de uma equação polinomial. O nascimento desta teoria foi motivado pela seguinte questão, conhecida por teorema de Abel-Rufini: "Não há uma solução geral através de radicais para equações polinomiais de grau igual ou superior a 5". Em resumo, a questão que norteou Galois ao criar sua teoria consistia em provar este teorema, ou seja, provar que não há uma fórmula, assim como a fórmula de Bháskara para polinômios de grau dois, utilizando-se apenas operações básicas, para encontrar raízes de polinômios de grau superior ou igual a 5.

Figura 21: Évariste Galois (Wikipédia, 2009)

Sua teoria explica essa afirmação, e também nos permite entender porque polinômios, de grau inferior a cinco, têm raízes encontradas pela maneira descrita anteriormente (solução através de radicais) e porque elas têm esta forma. Mas a maior contribuição da teoria de Galois para o presente trabalho é que esta teoria descreve, as possibilidades de construções geométricas via régua e compasso. Tal teoria nos fornece uma maneira elegante e de se provar a impossibilidade de resolver os Três Problemas Clássicos da Geometria via régua e compasso.

Essa teoria relacionou a Álgebra à Geometria, através do plano Cartesiano. Desta forma, pontos poderiam ser representados por vetores, e estes vetores, por sua vez, representados por números complexos. Unindo-se este pensamento às equações de retas e circunferências, que são os procedimentos realizáveis via régua e compasso, foi possível criar o conceito de número ou distância construtível. Também foi provado que o corpo de números construtíveis é fechado para a operação de raiz quadrada e, portanto, contém todos os pontos que podem ser obtidos por uma sequência finita de extensões quadráticas

De posse deste conceito, foi possível provar quais ângulos são construtíveis, através de uma bijeção entre o conjunto de números construtíveis e ângulos construtíveis. Esta bijeção foi feita por Gauss e prova que todo ângulo, cuja tangente (ou seno, ou cosseno) seja um número construtível, é também construtível. Dessa relação, temos o procedimento de ângulo equivalente à raiz quadrada, que é a bi-secção. Ou seja, se o corpo de números construtíveis é fechado para raiz quadrada, o corpo de ângulos construtíveis é fechado para a bi-secção. Desta forma, é possível provar que os únicos ângulos de ordem finita que podem ser construídos são aqueles cuja ordem seja, ou uma potência de 2, ou o produto de uma potência de 2 por um produtório de distintos Números de Fermat[10]. Além disso, existe um conjunto denso de ângulos de ordem infinita que também são construtíveis.

Figura 22: Carl Friedrich Gauss (Wikipédia, 2009)

---

[10] Números de Fermat: É todo número inteiro positivo que assume a forma $F_n = 2^{2^n} + 1$. Pierre de Fermat (1601 – 1665) lançou a conjectura de que estes números eram primos, sendo mais tarde refutada por Leonard Euler (1707 - 1783). Euler mostrou que F_5 não é primo.

6.3 Origami: Uma Ferramenta Ainda Mais Poderosa

Estendendo-se o corpo de construções possíveis, temos as construções que podem ser feitas via régua e compasso com régua marcada. Já na antiguidade, Arquimedes (287 – 212 a. C.) e Apolônio (262 – 190 a. C.) conceberam construções geométricas utilizando esta técnica. Um dos procedimentos, conhecido por Tri-secção de Arquimedes, como o próprio nome sugere, divide um dado ângulo em três ângulos de mesma amplitude. Este, por si só, já é a solução para um dos problemas clássicos da geometria, que citamos anteriormente.

Embora não passe pela cabeça de muitas pessoas, o processo de dobras em papel tem um incrível potencial, tanto na compreensão como na solução de problemas geométricos. O mais interessante é que os procedimentos realizáveis via dobraduras são capazes de realizar as mesmas construções feitas com a técnica utilizada por Arquimedes. Portanto o origami constitui uma rica ferramenta para a resolução de problemas geométricos, uma vez que propõe uma extensão ao corpo de ângulos construtíveis, agregando a técnica de tri-secção ao seu conjunto de procedimentos possíveis.

6.4 Axiomas de Huzita-Hatori

Assim como as construções geométricas tradicionais, as construções realizadas via dobraduras são regidas por um corpo axiomático. Conhecidos por Huzita-Hatori, ou Huzita-Justin, os axiomas enumerados abaixo regem todas as construções geométricas realizáveis via dobraduras em papel:

1. Dados dois pontos P1 e P2, há uma única dobra que passa pelos dois pontos;
2. Dados P1 e P2, há uma única dobra que coloca P1 sobre P2;
3. Dadas duas linhas L1 e L2, há uma dobra que coloca L1 sobre L2;
4. Dado um ponto P1 e uma linha L1, Há apenas uma dobra perpendicular a L1 que passa por P1;
5. Dados dois pontos P1 e P2, e uma linha L1, há uma dobra que coloca P1 sobre L1 e passa por P2;

6. Dados dois pontos P1 e P2, e duas linhas L1 e L2, há uma dobra que coloca P1 sobre L1 e P2 sobre L2;
7. Dado um ponto P e duas linhas L1 e L2, há uma dobra que coloca P sobre L1 e é perpendicular a L2.

Estes axiomas têm uma íntima relação com as construções clássicas que conhecemos para régua e compasso, e sua interpretação algébrica nos permite provar que se trata de uma poderosa ferramenta geométrica. Com os procedimentos possíveis com origami, podemos solucionar dois dos três problemas clássicos, sendo a Quadratura do Círculo ainda impossível.

7. A ARTE POR TRÁS DA MATEMÁTICA

Existem teoremas derivados dos axiomas de Huzita-Hatori que explicam algumas construções interessantes como, por exemplo, a construção de Triângulos pitagóricos, assim denominados por Haga (2008, p .2), definidos como os triângulos semelhantes a outros cujas medidas são dadas por ternos pitagóricos[11].

7.1 O Primeiro Teorema de Haga

De uma simples dobra, muito comumente encontrada como passo inicial em diversos origamis, podemos derivar diversos pensamentos úteis em sala de aula. Um exemplo é o Primeiro Teorema de Haga, enunciado abaixo:

Primeiro Teorema de Haga (HAGA, 2008, p. 7, minha tradução): Através do simples processo de dobra que coloca o vértice direito inferior sobre o ponto médio do lado superior cada lado do papel é dividido em uma determinada proporção:

a) o lado direito é dividido, pelo ponto F, em dois segmentos com 3/8 e 5/8 do lado original;
b) o lado esquerdo é dividido, pelo ponto H, em dois segmentos com 2/3 e 1/3 do lado original;
c) o lado esquerdo também é dividido, pelo ponto G, em dois segmentos de 7/8 e 1/8 do lado original;
d) o lado inferior é dividido, pelo ponto H, em dois segmentos de 1/6 e 5/6 do lado original.

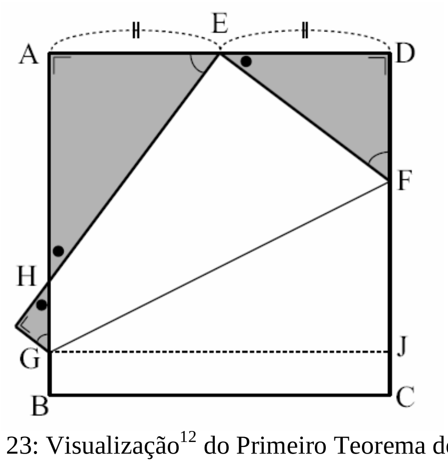


Figura 23: Visualização[12] do Primeiro Teorema de Haga

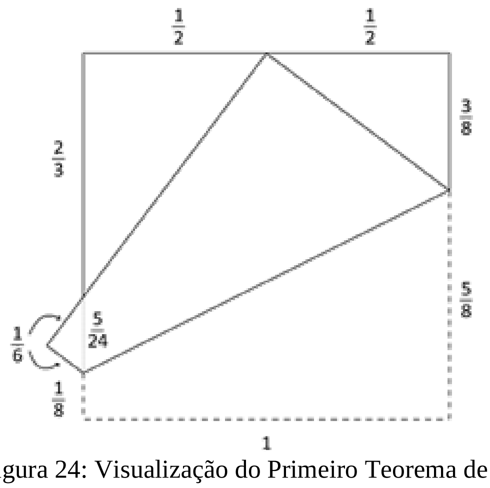


Figura 24: Visualização do Primeiro Teorema de Haga

[11] Ternos pitagóricos são trios de números naturais a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$.

[12] Figura retirada de Haga(2008, p. 4).

Demonstração[13] da parte *a*:

Fixemos, sem perda de generalidade, a medida do lado do quadrado inicial como a unidade de medida.

Seja $\overline{FD} = a$. Note que $\overline{FE} = \overline{FC}$, então $\overline{FE} = 1 - a$. Além disso, temos que $\overline{DE} = \dfrac{1}{2}$.

Então, usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{FD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{FE}^2 \Rightarrow a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (1-a)^2 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{4} = 1 - 2a + a^2 \Rightarrow 1 = (1-2a).4 \Rightarrow 1 = 4 - 8a$$

$$1 = 4 - 8a \Rightarrow -3 = -8a \Rightarrow \frac{-3}{-8} = a \Rightarrow a = \frac{3}{8}$$

Então, $\overline{FD} = \dfrac{3}{8}$ e $\overline{FE} = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$, como queríamos demonstrar.

Sendo assim, todos os triângulos construídos desta forma são semelhantes entre si. Em especial, um triângulo construído a partir de um novo quadrado de papel $A'B'C'D'$, de lado 8, teria suas medidas dadas por $\overline{D'E'} = 4$, $\overline{E'F'} = 5$ e $\overline{F'D'} = 3$. Ou seja, o primeiro triângulo que construímos é semelhantes a um novo triângulo cujas medidas dos lados formam um terno pitagórico. Note que ser um triângulo pitagórico equivale a ser semelhante a qualquer triângulo retângulo cujas dimensões de seus lados são dadas por números naturais[14].

Nesta linha, podemos desenvolver diversas atividades, tanto no nível da demonstração, quanto no nível da escola básica. Fixando uma medida conveniente para o lado do quadrado inicial, temos uma extensa atividade na qual os alunos podem ser convidados a investigar as medidas de todos os segmentos da figura resultante da primeira dobra. Além disso, podemos utilizar este processo para investigar a existência, nesta figura, de ângulos congruentes, buscando uma justificativa para isso. O que podemos notar é que, em uma simples dobra, que pode passar despercebida ao trabalharmos com origami, residem importantes relações geométricas que, se exploradas, resultam em discussões saudáveis à aprendizagem de Matemática.

[13] Nesta demonstração, representarei tanto um segmento, quanto sua medida, pelo mesmo símbolo.

[14] De fato, se um triângulo retângulo qualquer tem as medidas de seus lados dadas por naturais a,b, e c, pelo teorema de Pitágoras, estes três naturais formam um terno pitagórico.

Continuando nesse tipo de reflexão, podemos investigar quais outras relações podemos ter se, ao invés de escolhermos o ponto médio do lado superior, escolhermos outro ponto localizado, por exemplo, a ¼ de distância do vértice superior esquerdo D. Esta investigação traria novos resultados muito interessantes, mas poderíamos continuar a nos perguntar: E se escolhermos um ponto arbitrário qualquer, podemos generalizar as medidas dos segmentos resultantes de uma determinada dobra em função deste ponto arbitrário? A resposta é sim, como podemos ver abaixo:

Seja x um número racional qualquer que representa a distância entre o ponto E, no lado superior, e o vértice superior direito D. Assim, quando dobrarmos o vértice inferior C sobre o ponto E teremos:

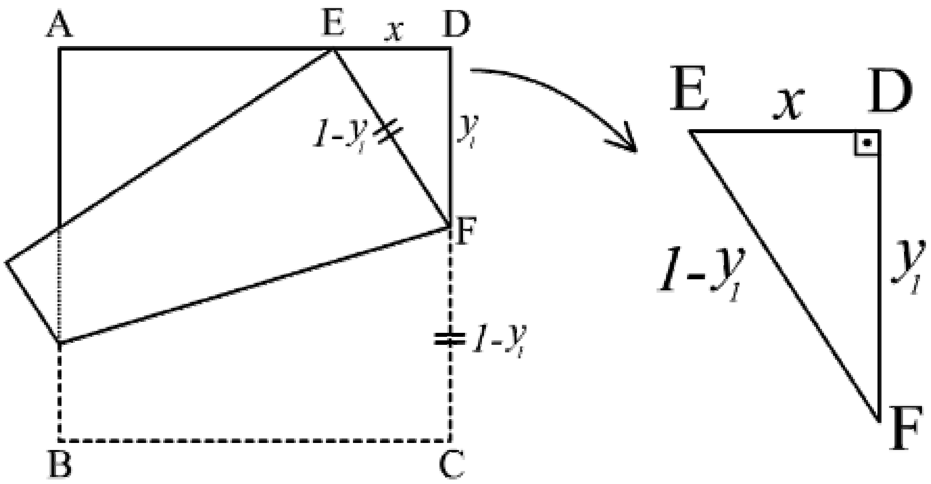


Figura 25: Generalizando o Primeiro Teorema de Haga.

Utilizando o teorema de Pitágoras, teremos:

$x^2 + {y_1}^2 = (1 - y_1)^2 \Rightarrow x^2 + {y_1}^2 = 1 - 2y_1 + {y_1}^2 \Rightarrow x^2 = 1 - 2y_1 \Rightarrow y_1 = \frac{x^2 - 1}{-2} > 0$, pois x é racional e menor que 1, logo $x^2 - 1 < 0$, e na divisão por -2, tornamos tudo positivo. Assim, temos todos os lados de ΔDEF dados em função de x, genérico: $\overline{ED} = x$, $\overline{EF} = \frac{1 - x^2}{2}$ e $\overline{FE} = \frac{1 + x^2}{2}$. Seguindo neste raciocínio teremos as medidas de todos os segmentos.

Nossa hipótese considera x racional por um simples motivo: Para gerar ternos pitagóricos. Desta forma, podemos estabelecer uma importante relação[15] entre a construção dada acima e um belo teorema da teoria dos números. Dos resultados enunciados anteriormente, temos que dobrando o vértice inferior direito em um ponto sobre a lado superior do papel que diste x do vértice superior direito, teremos os lados do triângulo retângulo ΔDEF dados por : $\overline{ED} = x$, $\overline{EF} = \dfrac{1-x^2}{2}$ e $\overline{FE} = \dfrac{1+x^2}{2}$. Sendo assim, utilizando-se nossa hipotese de x ser racional, teremos que x pode ser escrito como $x = \dfrac{p}{q}$, com $0 < x < 1, 1 \leq p < q$ e $mdc(a,b) = 1$, ou seja, x representado por uma fração irredutível, então as medidas $\overline{ED}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FE}$ são dadas por $\overline{ED} = \dfrac{p}{q}$, $\overline{EF} = \dfrac{1-\frac{p}{q^2}^{2}}{2} = \dfrac{q^2-p^2}{2q^2}$ e $\overline{FE} = \dfrac{1+\frac{p}{q^2}^{2}}{2} = \dfrac{q^2-p^2}{2q^2}$. Deste modo, as medidas dos lados do triângulo retângulo de ΔDEF são:

$$\boxed{\left(x, \frac{1-x^2}{2}, \frac{1+x^2}{2}\right) = \left(\frac{p}{q}, \frac{q^2-p^2}{2q^2}, \frac{q^2+p^2}{2q^2}\right) = \left(\frac{2qp}{2q^2}, \frac{q^2-p^2}{2q^2}, \frac{q^2+p^2}{2q^2}\right)}$$

Multiplicando todos os termos por $2q^2$, teremos o seguinte trio de números:

$$\boxed{\left(2qp, q^2-p^2, q^2+p^2\right)}$$

Pois bem, consideremos o teorema, referente a teoria dos números que apresento a seguir:

<u>Teorema</u>[16]: *Qualquer solução nos inteiros da equação* $x^2 + y^2 = z^2$ *satisfazendo* $mdc(x,y) = 1$ *e x par, é da forma*

$$x = 2ab \quad , \quad y = a^2 - b^2 \quad , \quad z = a^2 + b^2$$

onde a *e* b *são inteiros com paridades distintas,* $a > b > 0$ *e* $mdc(a,b) = 1$.

---

[15] Valorosa contribuição por parte do professor Eduardo Henrique de Mattos Brietzke, membro da banca examinadora do presente trabalho.

[16] Retirado de An Introduction to the Theory of Numbers, de G. H. Hardy e E. M. Wright (traduzido por Eduardo Henrique de Mattos Brietzke) – Ver Referências.

Exemplo: Se $x = \frac{3}{4}$, então $y = \frac{1 - \frac{9}{16}}{2} = \frac{7}{32}$ e $1 - y = \frac{25}{32}$. Multiplicando tudo por 32, obtemos o terno pitagórico (24, 7, 25), obtido também para $a = 4$ e $b = 3$ no teorema acima.

Seguindo nesta investigação, podemos realizar atividades nesta mesma linha variando a peça inicial, de um quadrado para um retângulo prata[17], por exemplo, e novamente generalizar as medidas. Este tipo de reflexão pode ser feita analisando-se o padrão das marcas de qualquer modelo ao desdobrá-lo.

Trazendo a Matemática do origami para um nível mais básico, alguns autores defendem a utilização desta arte também no ensino básico, como defendemos em nossa proposta. Questões elementares, porém muito importantes, podem ser trabalhadas a partir do suporte oferecido pelo desenvolvimento de modelos de origami específicos, segundo estes autores.

Vejamos um exemplo fornecido por Genova (2008, p. 12). Um sistema de medida adota uma unidade padrão e, a partir dela, determinam-se os múltiplos e submúltiplos deste padrão. Assim, considerando que nosso quadrado de papel inicial é nosso padrão, Genova (2008, p. 12) define origami como a arte de "medir dobrando", utilizando uma "régua particular" escondida na folha de papel. Neste viés, pôde-se constatar a existência de um rico campo para o desenvolvimento de atividades sobre questões importantes no desenvolvimento do pensamento matemático.

Sobre outras possibilidades de trabalho do origami, Genova (2008, p. 15) pontua diversas possibilidades, dentre as quais destaco as seguintes:

- Formas, classificação segundo a medida dos lados;
- Os fundamentos geométricos das dobras;
- Conceitos de Matemática e vocabulário específico de geometria;
- Simetria – congruência – ângulos;
- Frações – relação – proporção – medida;
- Análise de objetos 3-D, relações de espaço

[17] Por retângulo prata entende-se o retângulo cujos lados estão na proporção de $1:\sqrt{2}$. Esta proporção é interessante, pois quando dobramos um papel nesta proporção ao meio pelo lado maior, os pedaços formados conservam a mesma proporção. Os papéis classificados como A4, muito comuns em nosso dia-a-dia, estão nesta proporção.

- Explorar padrões e fazer conexões
- Concentração, memória, coordenação;
- Cooperação, paciência e socialização.

Indo mais a fundo nesta discussão, tive a oportunidade de perguntar diretamente a Robert J. Lang, o maior teórico do desenvolvimento de modelos de dobraduras, sobre qual o seu posicionamento quanto a utilização desta arte em sala de aula de Matemática. Sobre as possibilidades de utilização do origami em sala de aula, Lang[18] afirma:

> ... o origami pode auxiliar no ensino de alguns conceitos matemáticos, conceitos particulares relativos à geometria, pois proporciona uma referencia visual para conceitos geométricos. Além disso, origami permite a construção de diversos objetos que podem ser usados para explicar outras idéias matemáticas como, por exemplo, formas simétricas, que podem ser utilizadas para explicar alguns conceitos de teoria de grupos.

Ou do original:

> … origami can be used to assist with teaching some mathematical concepts, particular concepts relating to geometry, because it provides a visual reference for geometrical concepts. Also, origami allows one to easily construct objects that can be used to explain other mathematical ideas, for example, symmetric shapes that can be used to teach concepts from group theory.

O origami cativa os estudantes e também os professores. O aluno é cativado pela grandeza de sua obra em relação ao papel na qual foi iniciada, e o professor pelas formas e incríveis relações matemáticas intrínsecas a cada modelo. Neste sentido apontam as obras dos autores estudados e os dados coletados em nossas práticas, que veremos a seguir.

[18] Troca de mensagens com o Professor Robert J. Lang, teórico do origami e autor de diversas obras sobre o assunto e sobre a relação desta arte com a Matemática.(minha tradução)

8. ALGUMAS PRÁTICAS REALIZADAS

8.1 Minicurso Origami no Ensino-Aprendizagem em Matemática

Local: EREMATSUL 2009 / Criciúma - SC

Público Alvo: Professores de Matemática e Alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Desenvolvimento: Foi ministrado o minicurso "ORIGAMI NO ENSINO-APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA", do qual fui autor e pela primeira vez ensinei origami através de vídeos. Creio que neste aspecto reside uma grande contribuição desta aplicação ao produto final do presente trabalho.

Essa maneira de expor o curso foi muito bem aceita. Uma primeira vantagem que pude observar trabalhando com vídeo, mostrado com o auxílio de projetor, foi que o aluno podia enxergar com uma riqueza de detalhes muito maior cada procedimento na montagem de uma peça, pois se tratava de uma imagem muito maior e melhor posicionada. Pode-se destacar também que, ao fazer uma dobradura, marcas e fissuras ocorrem no papel, portanto ao repetir a dobradura, para que o aluno entenda o que foi feito, perde-se a referência em relação ao movimento que deve ser feito para se obter a dobra desejada, uma vez que o papel do aluno não tem marcas e o seu está praticamente se dobrando sozinho quando você repete um determinado passo.

Neste curso, foram produzidos três objetos anteriormente selecionados, mostrados no programa abaixo.

Programa:

Neste minicurso, tive a oportunidade de desenvolver atividades, buscando ensinar modelos de origami que pudessem ser utilizados em sala de aula, e discutir com os professores a viabilidade do uso deste recurso. Os modelos trabalhados foram:

- Caixa simples;
- Cubo Sonobe;
- Tetraedro Estrutural.

Análises e justificativas:

O primeiro modelo se tratava de uma caixa, composta por duas peças feitas de maneira idêntica, sendo uma delas a base e a outra a tampa. Meu objetivo com este modelo foi introduzir a prática de origami aos alunos, sem visar, em um primeiro momento a matemática por trás deste exemplo. Porém, questões muito pertinentes foram levantadas durante este processo de montagem aparentemente simples. Uma destas questões foi a seguinte: Se produzirmos duas peças, e uma delas for a tampa enquanto a outra corresponder à base, como é possível que elas sejam feitas de maneira idêntica? Para que isso funcione devemos partir de um papel com dimensões distintas para cada uma das peças, mas quanto, exatamente, eu preciso diminuir de um dos quadrados base para que as peças se encaixem perfeitamente após o processo?

Com estes questionamentos, os próprios alunos se deram de conta de que o raciocínio lógico-dedutivo, ligado diretamente à matemática, também é parte integrante do trabalho com origami. Desta maneira, foi mais natural propor outras atividades como os próximos dois exemplos que eram, respectivamente, um cubo e um tetraedro regular.

Além disso, foi construído um vocabulário específico para o trabalho com origami. Isto requer uma familiaridade com conceitos geométricos, pois temos na receita desta simples peça ordens como: dobrar o lado de um quadrado ao meio, marcar a diagonal de um retângulo e dobrar, e efetuar dobraduras de modo que vértices coincidam. Nessa etapa já podemos visualizar uma possibilidade de inserção deste origami em sala de aula. Tornando a construção de uma nomenclatura geométrica necessária para a confecção de uma peça, torna-se mais natural dar nomes a estes entes geométricos, cuja exposição de maneira vertical pelo professor pode ser encarado pelo aluno como um processo sem relevância denominar objetos abstratos, intangíveis.

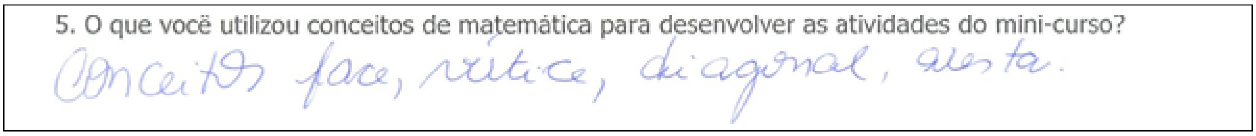
Em um segundo momento, trabalhei com a construção de um cubo. Para esta peça utilizei um famoso módulo, chamado *SONOBE*. Este módulo se tornou famoso pela sua versatilidade, tendo em vista que podemos utilizá-lo para construir diversas figuras. Neste sentido, temos um ganho de tempo no processo de construção de uma figura tridimensional. Para construirmos um cubo utilizando este módulo, são necessários seis deles, sendo um para cada face do cubo. Uma exigência estética, que foi feita nesta parte, era a de não haver faces adjacentes de mesma cor. Desta forma foi possível explorar questões como: "Quantas cores de papel eu devo ter, no mínimo, para poder construir um Cubo Sonobe obedecendo a esta exigência?" O que nos abriu um leque de possibilidades para o trabalho com conceitos de combinatória.

Nosso terceiro exemplo, o tetraedro, se diferencia dos demais, uma vez que este representa uma figura com as faces em aberto, ou seja, se trata de uma estrutura, onde vemos apenas as arestas de um tetraedro. Com este e outros modelos nesta mesma linha, que doravante denominarei Modelos Estruturais, podemos investigar e definir com o aluno relações e medidas que fazemos no interior de um determinado sólido. Por exemplo, com um modelo estrutural que represente um cubo, fica mais fácil definir sua diagonal quando não temos as faces ocultando este segmento. Daí a importância de introduzir este modelo no programa deste minicurso. Não obstante, com o módulo ensinado para este exemplo, podemos construir diversos modelos estruturais, como hexaedros, dodecaedros, etc.

Retorno dos Participantes:

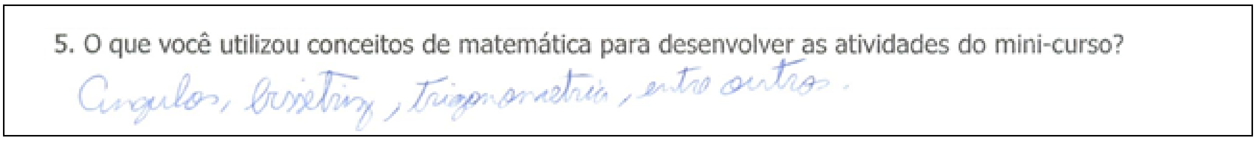
Foi aplicado um questionário ao final desta prática e as respostas para este constituem dados de nossa pesquisa, mostrados abaixo:

Quanto aos conteúdos matemáticos presentes na confecção das peças de origami presentes no programa deste minicurso, temos os seguintes relatos:


5. O que você utilizou conceitos de matemática para desenvolver as atividades do mini-curso?

Conceitos face, vértice, diagonal, aresta.

Figura 26: Resposta de um participante do minicurso

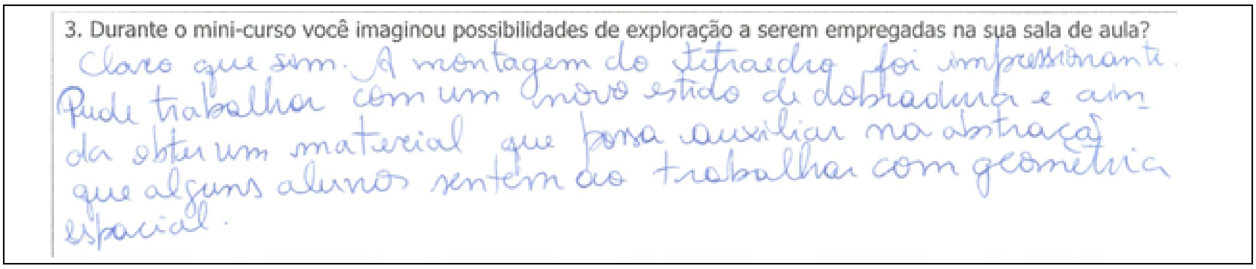

5. O que você utilizou conceitos de matemática para desenvolver as atividades do mini-curso?

Ângulos, bissetriz, trigonometria, entre outros.

Figura 27: Resposta de um participante do minicurso

Segundo os próprios professores, existem diversos conteúdos matemáticos envolvidos na construção das peças mostradas.

Também foi perguntado se foi imaginada alguma possibilidade de usar o origami em sala de aula. Para esta pergunta destaco as seguintes respostas:


3. Durante o mini-curso você imaginou possibilidades de exploração a serem empregadas na sua sala de aula?

Claro que sim. A montagem do tetraedro foi impressionante. Pude trabalhar com um novo estilo de dobradura e ainda obter um material que possa auxiliar na abstração que alguns alunos sentem ao trabalhar com geometria espacial.

Figura 28: Resposta de um participante do minicurso

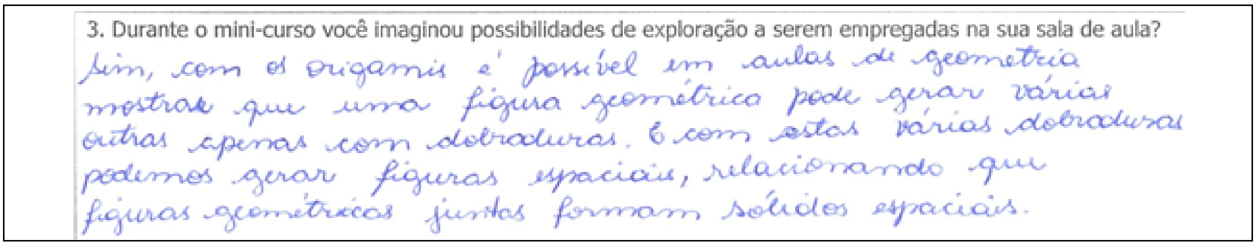

3. Durante o mini-curso você imaginou possibilidades de exploração a serem empregadas na sua sala de aula?
Sim, com os origamis é possível em aulas de geometria mostrar que uma figura geométrica pode gerar várias outras apenas com dobraduras. E com estas várias dobraduras podemos gerar figuras espaciais, relacionando que figuras geométricas juntas formam sólidos espaciais.

Figura 29: Resposta de um participante do minicurso

Com estas respostas, fica evidente que os professores, quando em contato com este minicurso, vislumbraram possibilidades para o uso desta proposta, enquanto alternativa didática para suas aulas.

8.2 CAp – Colégio de Aplicação UFRGS

Público Alvo: Alunos da sétima série

Desenvolvimento: Foi realizado um trabalho dentre os demais realizados pelos alunos ao longo do trimestre letivo. Este trabalho foi desenvolvido pela Internet, o que se encaixou perfeitamente em nosso trabalho, inicialmente projetado para este fim. A professora titular da turma já costumava trabalhar via Internet, através de pbworks[19] desenvolvidos pelo mesmo viés.

Foi proposto que os alunos construíssem o primeiro modelo do portal. Porém, para tal era necessário que eles já soubessem cortar, de uma folha qualquer, um papel quadrado. Para isso, foi produzido um vídeo explicando tal procedimento, promovendo um aumento da qualidade final dos trabalhos dos alunos. Vencidos estes dois passos, foi possível indagá-los sobre o que ocorreria com o produto final, a caixa, se alterássemos as dimensões do papel base.

O retorno dos alunos confirma seu apego a arte. Foi possível notar que os alunos gostaram da atividade de dobradura. Dado que evidencia esta afirmação é mostrado abaixo.

Comentário de A, aluna da sétima série do Colégio de Aplicação - UFRGS: "*Achei super legal fazer este quadradinho! Acho que vou fazer com uma folha maior, daí eu guardo minhas papeladas dentro, o que que tu acha ,sora?*"

[19] Trata-se de um site na web que possibilita o trabalho colaborativo dos estudantes e permite a edição como se fosse um simples editor de texto (SERRES, 2008, Pôster SIC-UFRGS)

Figura 30: Aluna A e sua caixinha de origami

Quanto à realização da atividade, foi possível notar que alguns alunos estabeleceram conexões corretas sobre as relações entre caixas produzidas a partir de papéis de dimensões diferentes. A resposta de um aluno, quando perguntado sobre o que aconteceria se construíssemos uma caixa com um papel quadrado de lado igual ao dobro do lado do papel utilizado para produzir a primeira caixa, evidencia esta afirmação.

Resposta de F, aluna da sétima série do Colégio de Aplicação - UFRGS: *"será aumentado 3 vezes o tamanho da caixa, porque para montar a caixa,eu usei um quarto dos quadrados."*

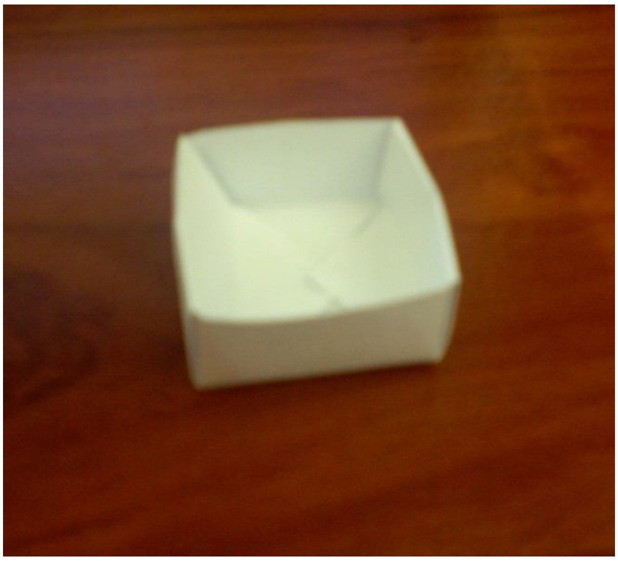


Figura 31: Caixa produzida pelo aluno

Esta resposta reflete um pensamento muito importante. Podemos notar que o aluno estabeleceu uma relação entre a peça inicial, o quadrado, e a final, a caixa, de modo que a área do fundo da caixa nada mais é do que uma parte da área da peça inicial. Portanto, há uma razão entre essas áreas, e esta razão é fixa. Então, analisar a razão entre áreas de caixas realizadas com papeis de dimensões diferentes é o mesmo que analisar a razão entre essas dimensões.

8.2.1 Da Matemática do Modelo Utilizado

Analisando as marcas produzidas no papel ao se construir a Caixa Simples, podemos fundamentar o pensamento esboçado acima.

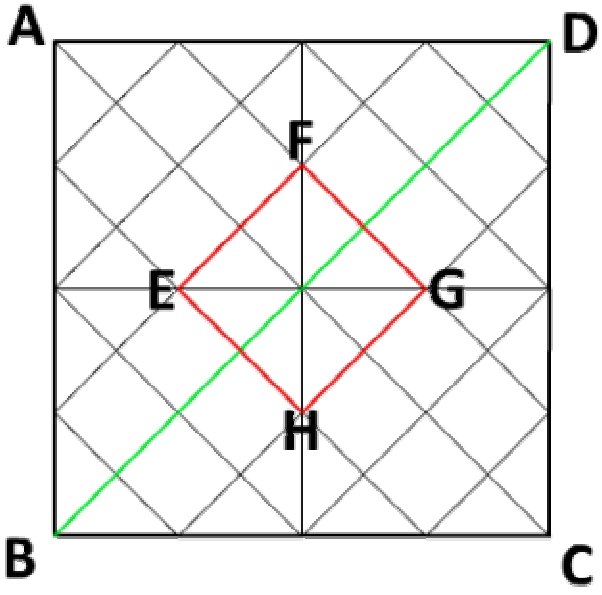


Figura 32: Padrão de Marcas (Caixa Simples)

Seja l a medida do lado do papel inicial. Assim, teremos que $\overline{AB} = l$, portanto $\overline{BD} = l\sqrt{2}$. Podemos notar que existem marcas perpendiculares a $\overline{BD}$, e pela construção das mesmas, temos que elas determinam segmentos congruentes sobre $\overline{BD}$. Por essa propriedade dos segmentos definidos sobre $\overline{BD}$ e pelo paralelismo das marcas que formam a malha quadriculada que podemos ver em todo papel, temos que $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = \frac{l\sqrt{2}}{4}$. Logo a área do fundo da caixa é $A(l) = \left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right)^2$, Sendo dada em função de l. Partindo de um novo quadrado cuja medida de seu lado seja $\frac{l}{2}$, teremos uma área de $\left(\frac{\frac{l}{2}\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right)^2$. Ou seja, embora o aluno não tenha elaborado um esquema como o desenvolvido acima, é possível notar que sua intuição levou-o a um raciocínio correto.

8.2.2 Depoimento da professora:

Ao final do desenvolvimento desta prática, foi solicitado um parecer informal da professora da turma quanto à viabilidade do trabalho desenvolvid. Atendendo a esta solicitação, a professor Fabiana Fatore Serres respondeu o seguinte:

> Acredito que para nossos estudantes aprendam matemática, precisamos promover situações em que apresentamos os conceitos envolvidos em atividades diferentes onde via procedimentos o estudante construa suas próprias idéias. Se estivermos ensinando geometria, podemos apresentar suas premissas fazendo uso da informática, de fotografias, da natureza, de material concreto, etc. Deste modo, penso que o trabalho com origamis possibilita uma destas situações aos alunos. Eles ficam motivados pela forma que vai surgir depois de várias dobraduras e este momento é uma boa oportunidade para dialogarmos com eles fazendo perguntas sobre o origami e incentivá-los a pensar sobre o que estão fazendo e a expor suas dúvidas.

Desta atividade foi possível constatar que o trabalho desenvolvido via internet é viável. Não foi preciso nada além de um computador com internet e um pedaço de papel para desenvolver a atividade. Segundo a professora da turma, os diálogos incentivando os alunos a pensar sobre o origami propiciam um ambiente de aprendizagem de Matemática.

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi possível, com o presente trabalho, relacionar aspectos da formalidade Matemática e da Arte e enxergar um vinculo direto entre a dobradura, como forma de representação espacial, e a Matemática, muitas vezes encarada como externa ao ser humano. Disto podemos ver que, por serem criações humanas, processos aparentemente distintos podem estar intimamente ligados.

Isto foi constatado ao longo da pesquisa, primeiramente quando pudemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre as construções geométricas realizáveis via régua e compasso com régua graduada e via dobraduras. Posteriormente, na apresentação do Primeiro Teorema de Haga, pudemos enxergar que, mesmo na mais simples dobra, que executamos durante o processo de montagem de um determinado modelo sem sequer notarmos, existem fortes relações entre dobradura, geometria e álgebra. Assim o origami se aproxima da Matemática, tornando-se uma ferramenta potencial para a utilização em sala de aula, seja como exercício, seja como momento destinado a reflexão sobre conceitos diversos.

Por isso, foi possível mergulhar na produção de material que, ao ser utilizado, evidenciasse a viabilidade desta alternativa na prática em ensino de Matemática. Criado e disponibilizado para professores de Matemática, o material se mostrou eficaz, tendo despertado o interesse dos professores que entraram em contato com o portal e sido utilizado com êxito nas práticas, as quais pudemos analisar. Um importante aspecto levantado durante esta pesquisa depõe a favor desta ferramenta. O custo do material necessário para esta prática torna-a viável mesmo quando não há uma quantidade razoável de recursos disponíveis por parte das instituições de ensino.

Durante a concepção do material, passamos por diversas etapas, nas quais encontramos dificuldades e meios para sanar tais dificuldades. Como resultado deste processo de constante renovação, nossa primeira versão do portal vem ao público no melhor formato possível até o momento. Durante este processo, foi necessário buscar novas técnicas e ferramentas para a filmagem e edição dos vídeos utilizados, bem como métodos de montagem alternativos para alguns modelos. A busca pela melhor alternativa em cada detalhe é característica da produção do material em questão.

Com o tempo, creio que contribuições valiosas virão por parte dos usuários, enriquecendo ainda mais o corpo do portal, uma vez que será aberto espaço para que os mesmos postem sugestões, tanto para atividades, quanto para a melhora do material em si. Além disso, serão filmados novos modelos, postados periodicamente. Com esta prática, pretendo, em alguns anos, constituir uma referência quanto à utilização do Origami em sala de aula, de modo que todo professor de Matemática, em qualquer nível de ensino, saiba que existe um portal no qual podem buscar esta alternativa para o trabalho em sala de aula.

Nas práticas realizadas, pode-se observar que o origami, enquanto ferramenta didática, foi instrumento pelo qual foi possível, intuitivamente, estabelecer relações entre figuras; uma figura geométrica e uma parte da mesma - entre o papel inicial e o fundo da caixa produzida com este papel - bem como entre propriedades decorrentes de transformações realizadas por meio de dobraduras a uma determinada figura - estabelecer uma relação entre a área do papel e a área do fundo da caixa produzida com este papel. Assim, mesmo sem descrever seu pensamento por um encadeamento de proposições lógicas, como apresentado na sessão 8.2.2, o aluno estabeleceu corretamente essas relações, o que, a meu ver, proporciona um ambiente favorável à formalização deste seu pensamento.

Por fim, considero alcançados meus objetivos iniciais nesta pesquisa, uma vez que o material produzido foi utilizado, trazendo um retorno satisfatório ao professor. É importante frisar que o sucesso obtido em uma prática, por si só, não torna o material bom ou ruim, mas atesta a condição de alternativa possível e viável para a implementação em sala de aula. A única variável neste sentido é a adequação do material à proposta do professor, pois cabe ao mesmo constatar tal possibilidade.

Quanto ao trabalho com origami, pretendo continuar pesquisando sobre o assunto. A Matemática do origami carece de livros, em português, que tratem desta temática, apresentando teoremas e demonstrações para os mesmos. Tendo em vista que, com o presente trabalho, foi encontrado um corpo axiomático que rege as construções realizáveis via dobraduras, pretendo, com meu trabalho futuro, contribuir para o desenvolvimento desta teoria que vincula o origami à matemática.

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORSUK, K.; SZMIELEW, W. Foundations of geometry: euclidean and bolyai-lobachevskian geometry: projective geometry. Amsterdam: North-Holand, 1960. xiv, 444p.

CARNEIRO, J. P.; WAGNER, E. Construções Geométricas. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, c1993. 110 p. : il.

CASTRUCCI, B. Fundamentos da geometria: um estudo axiomático do plano euclidiano. Rio de Janeiro: Livros Técnico e Científicos, 1978. xii, 195 p.

COSTA, C. R. Jr. Hilbert e a formalização da geometria. Editora Cidade, Disponível em , consultado 30/11/2009.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Campinas: UNICAMP, 1996. 843 p. : il.

FUSE, T. Unit: polyhedron origami. Japan: Japan Publications ; distributed by Kodansha America. 99 p. : col. ill.

GENOVA, C. Origami: dobras, contos e encantos. São Paulo: Escrituras Editora, 2008. 167 p. il

HAGA, K. Origamics: mathematical explorations through paper folding. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2008. xvi, 134 p.

HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford: Clarendon Press, 1954. xvi, 419 p. 3rd. ed.

HEATH, T. L. The thirteen books of Euclid's elements, volume 1, 2ª edição. New York: Dover, c1956. 3 v. : facsim., figuras.

LANG, R. J. Origami design secrets: mathematical methods for an ancient art. : A. K. Peters, 2003. viii, 585 p. : col. ill.

SERRES, F. F. Investigando a Contribuição do Uso de Pbwikis na Aprendizagem de Matemática. XX Salão de Iniciação Científica: Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008.

Fontes de Ilustrações:

Nytimes, 2009: *http://graphics8.nytimes.com/images/2005/04/02/arts/02yoshizawa_lg.jpg*

Malhatlantica, 2009: *http://www.malhatlantica.pt/mathis/egipto/rhind/rhind.htm*

Wikipédia, 2009: *http://www.wikipedia.org*

Todos endereços acima foram acessados em 30/11/2009.