UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

THIAGO CRESTANI GAJKO

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE O USO DE JOGOS NO ENSINO DE NÚMEROS RELATIVOS

Porto Alegre

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

THIAGO CRESTANI GAJKO

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE O USO DE JOGOS NO ENSINO DE NÚMEROS RELATIVOS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Elisabete Zardo Búrigo

Porto Alegre

2018

Dedico este trabalho:

À minha mãe, Vera Lucia Crestani, por sempre me incentivar nos estudos e a ser alguém melhor.

Ao meu pai, Leonardo Gajko, por me ensinar o valor das coisas e ser um exemplo para minha vida.

À minha esposa, Aline Tarta Zwick, por estar comigo em todos os momentos e pelo seu amor a cada dia.

A todos aqueles que dedicam sua vida à causa da educação, o único caminho para uma humanidade melhor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais Vera Lucia Crestani e Leonardo Gajko (*in memorian*), que mesmo não estando mais presentes, ainda vivem em mim.

Com muito carinho, agradeço à professora Dra. Elisabete Zardo Búrigo, por ter aceito o convite para ser minha orientadora e disposto seu tempo e seu conhecimento à disposição da confecção deste trabalho.

A todos os professores que já passaram pela minha vida, por contribuírem com a minha formação.

A minha esposa, Aline Tarta Zwick, por sempre me apoiar, me ajudando a não me desviar dos meus sonhos.

Agradeço a Deus, pelo dom da vida.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma experiência de aplicação de sequência de atividades cujo tema central é números relativos, envolvendo uso de jogos. Tal sequência foi aplicada em uma turma do sétimo ano de uma escola particular da cidade de Porto Alegre. A construção da sequência apoiou-se em literatura que afirma que jogos podem propiciar contextos que façam mais sentido aos alunos do que as situações ditas do cotidiano, comumente retratadas em livros didáticos. Buscou-se, por meio dos jogos, constituir contextos que provocassem a necessidade da representação de números de sentidos opostos e das operações com esses números, incluindo situações complexas como a do efeito resultante da retirada de um número negativo. Foram coletados registros da produção dos alunos e das discussões em sala de aula por meio de gravação em áudio, fotografias de cadernos e do quadro-negro, e questionários preenchidos pelos alunos após cada atividade. A análise desses materiais permitiu concluir que os jogos representaram uma sustentação para o pensamento lógico e operatório dos alunos, na construção dos esquemas mobilizados para somar e subtrair números positivos e negativos.

Palavras-chave: Números relativos. Jogos. Números Negativos. Ensino de matemática. Ensino fundamental.

ABSTRACT

This work presents an experiment of an activity sequence centered on Relative Numbers and involving the use of games. Such sequence was applied in a seventh grade class of a Porto Alegre's private school. The conception of the sequence was supported by literature that affirms that games can provide contexts that make more sense to the students than the so-called "daily situations" frequently presented in didactic books. It was sought, by the games, to constitute contexts that provoked the need for representation of numbers with opposite signs and the operations with those numbers, including more complex cases, like the result of subtracting a negative number. The data collected includes audio recordings of students' production and discussions, notebooks and blackboard's photographs, and questionnaires filled by students after each activity. The analysis of this data allowed me to conclude that games could support the logical and operational thinking of the students in the construction of mobilized schemes to add and subtract positive and negative numbers.

Keywords: Relative Numbers. Games. Negative Numbers. Mathematical Education. Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Certa vez, um de meus alunos me perguntou, ao resolver uma equação de primeiro grau, se “menos com menos dava mais”. Senti que eu o ajudaria mais se comentasse algo que não fosse a resposta propriamente dita, mas que encaminhasse algum processo intelectual para que ele pensasse sobre o assunto e, assim, conseguisse deduzir sozinho a solução para o seu problema. Na situação específica de qualquer aluno dessa turma, ao invés de deduzir, o verbo poderia ser lembrar, uma vez que poucos meses antes estávamos estudando os números negativos. Tendo todas essas informações em vista, à pergunta do aluno, respondi: “depende da operação”.

A equação era “$2x + 3x = - 4 - 6$” e a pergunta em questão se referia ao segundo membro da identidade. O aluno não me respondeu, mas me olhou com uma expressão facial que revelou que minha frase não havia sido esclarecedora.

Desse breve relato, podem ser levantadas algumas hipóteses sobre o ensino-aprendizagem de números negativos em sala de aula. Talvez o aluno esperasse que lhe fosse dada a resposta pronta para sua pergunta, talvez ele apenas não lembrasse daquilo que havia sido trabalhado há alguns meses com números negativos, ou sua aprendizagem sobre números menores que zero tivesse sido superficial ou o conteúdo em questão oferece muitas dificuldades de compreensão.

Foi apenas após meu estudo sobre o tema que pude olhar para esse tipo de situação de outra forma, percebendo aspectos que antes eu não notaria e que, para os alunos, poderiam gerar uma abundância de dúvidas, como por exemplo, na equação/problema do aluno, onde estão os negativos? Mais precisamente, na equação “$2x + 3x = - 4 - 6$”, o sinal que precede 6 indica subtração ou o nome do número? Se o termo “6” for negativo, o termo “$3x$” é positivo?

Em minha trajetória pessoal como docente na Educação Matemática, já trabalhei com alunos dos mais variados níveis escolares. Mesmo o assunto sendo usualmente ensinado no sétimo ano, é possível perceber dúvidas remanescentes em estudantes de todos os anos escolares posteriores, e muitas vezes no ensino superior. E foi esse conjunto de inquietações o responsável por incendiar a minha centelha pessoal sobre a necessidade de se trabalhar com números relativos.

Desta forma, me propus a buscar uma maneira de possibilitar que os alunos compreendessem melhor as operações com esse tipo de números. Sempre me chamou a atenção o fato de que, independente de o aluno compreender ou não os processos envolvidos nos cálculos, o fato de acertar ou errar poderia estar associado a decorar um conjunto não extenso de regras operatórias. Eu mesmo, em anos anteriores de docência, já lecionei esse conteúdo e me dediquei em maior ou menor escala às famosas regras, concluindo que uma formalização sem compreensão se torna vazia aos estudantes. Não estou dizendo que as regras sejam desnecessárias ou nocivas ao sujeito, apenas que deva haver uma preocupação sobre o sentido que estas fazem ao usuário.

Segundo Vergnaud (2014), enquanto os naturais representam o tamanho de conjuntos finitos, um número relativo difere de um número natural por representar uma transformação com números naturais. Tais transformações podem ser positivas, negativas ou neutras.

Glaeser (1985) e Schubring (2007) apontam que a aceitação dos números negativos demorou muitos séculos. Desde as civilizações do passado (Grega, Árabe, Hindu) aos alto e baixo períodos da Idade Média, do Renascimento ao surgimento da Matemática Moderna, a aceitação e utilização de números menores que zero tem suscitado polêmica no debate acadêmico e no meio educacional da matemática (GONZÁLEZ *et al.*, 1990). Tal resistência das comunidades acadêmicas, inclusive por parte de célebres matemáticos, foi sustentada - principalmente - pela concepção de número aceita à época.

Frente à percepção de que hoje em dia não há problemas em legitimar os números negativos, me sinto ainda mais instigado a compreender as dificuldades dos alunos frente a esse assunto e buscar estratégias para superá-las. González e outros (1990) apresentam um apanhado dos obstáculos que explicam grande parte das dificuldades na compreensão desse novo conjunto de números, as quais discutirei ao longo do texto.

Buscando superar essas dificuldades, a proposta didática retratada nessa dissertação fez uso da inserção do jogo em sala de aula. Segundo Grando (2000), ao analisarmos os atributos e/ou características do jogo que possam justificar sua inserção em situações de ensino, evidencia-se que este representa uma atividade lúdica, que envolve o desejo e o interesse do jogador pela própria ação do jogo, e mais, envolve a competição e o desafio que motivam o jogador a conhecer seus limites e suas possibilidades de superação de tais limites, na busca da vitória, adquirindo confiança e coragem para se arriscar.

Para a confecção da proposta didática abordando números relativos via utilização de jogos, foram lidos textos de autores visando encontrar ideias e caminhos a me espelhar. Para tal, destacam-se as leituras de Linchevski e Williams (1999), Megid (2010), Linardi (1998) e Morais (2010).

A postura investigativa do professor/educador envolvido nesse trabalho, assim como a escolha pela abordagem do significado de Número Relativo e a interpretação dos resultados, foram construídas à luz das ideias apresentadas no livro *Numeros Enteros* (GONZÁLEZ *et al.*, 1990) e da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 2014).

Todos os aspectos citados nas linhas precedentes compuseram um contexto de trabalho que buscou a elucidação da questão: **como o trabalho com jogos pode auxiliar os alunos na compreensão das operações com números relativos?**

A pesquisa foi realizada em uma escola particular na Zona Norte de Porto Alegre, na qual o pesquisador atua como professor de turmas dos anos finais do ensino fundamental. A sequência de atividades foi aplicada em duas turmas de sétimo ano, ano escolar em que, de acordo com o plano de estudos da escola, são introduzidos os números menores que zero. Tal intervenção durou cerca de seis semanas, com cinco períodos semanais de 50 minutos, nos meses de fevereiro, março e abril de 2017.

2 ASPECTOS DA HISTÓRIA DOS NÚMEROS NEGATIVOS

O estudo da História pode fornecer importantes indícios para se compreender o presente. Acredito que o passado nos ajuda a entender por que algumas coisas são assim hoje em dia. O objetivo deste capítulo é apresentar um resumo das leituras realizadas a fim de obter informações sobre as dificuldades, ao longo da história, com respeito aos negativos, seja pela incompreensão, pela não aceitação dos mesmos, pelo desinteresse em relação a tal tema ou por qualquer outro motivo. Entender essas dificuldades pode nos ajudar a compreender aquelas enfrentadas pelos estudantes da Educação Básica.

Desde o início da existência humana, ao longo das mais variadas culturas e sociedades, o conceito de número sempre teve um papel de destaque. Hoje em dia os números estão inseridos no nosso dia a dia com os mais variados significados, para indicar horários, números de telefone, quantidade de amigos que temos na rede social favorita, dia do ano em que estamos, nossa constituição de massa corporal, entre muitos exemplos que podem ser citados. Desde o início da utilização de números, pelas sociedades mais antigas, os objetivos e as necessidades associadas a esse objeto matemático variaram de época para época.

O significado mais antigo para o conceito de número é também aquele que se mostra presente mais cedo no desenvolvimento das crianças; a personificação de número como quantidade. É razoável supor que para a maioria das pessoas um número sirva para *"contar"*. No dicionário Aurélio, o primeiro significado apresentado para a palavra número é: *"A soma das várias unidades que compõem alguma coisa"*. Ou seja, há uma forte relação entre as palavras "número" e "quantidade".

Diferentemente de como foi com os números fracionários – que também tiveram suas raízes na relação com quantidades – os números menores que zero permaneceram, durante muito tempo, na "clandestinidade" da matemática. E está justamente na falta de reconhecimento de quantidades menores que zero o aspecto fundamental para o atraso - em muitos séculos - na aceitação de números negativos como objetos matemáticos.

Segundo González e outros (1990), foram os filósofos gregos, no século VI a. C., que sugeriram que os números e a natureza estavam relacionados. Um dos lemas dos pitagóricos, contemporâneos a estes, era que "Tudo é número". Porém, a descoberta das medidas incomensuráveis indicou que essas crenças poderiam apresentar algum tipo de fragilidade.

Enquanto para outros povos a Álgebra e a Aritmética nortearam o desenvolvimento da matemática, para a matemática grega a orientação foi ditada pela Geometria. Esse atrelamento da Álgebra à Geometria – em que números estavam associados a segmentos de reta – teria, segundo González e outros (1990), bloqueado a busca por números menores que zero.

Já os matemáticos chineses, mais relacionados à álgebra e à aritmética, unindo um talento poético e uma superficialidade lógica, aceitaram números para representar faltas e envolviam-nos em operações. Tais números passaram a ser chamados de números negativos no Ocidente (GONZÁLEZ *et al.*, 1990).

Segundo González e outros (1990), data do ano 628 o primeiro registro de regras para calcular usando positivos e negativos, na obra do matemático Brahmagupta.

Muitas concepções matemáticas atuais tiveram origem no trabalho da matemática hindu, como a utilização do sistema posicional de base dez. Com respeito aos números menores que zero, as conclusões alcançadas só foram capazes graças a uma despreocupação com o rigor formal, em que o foco era a resolução de problemas práticos.

Após a decadência matemática na Europa, durante a Idade Média, o período renascentista foi marcado pela difusão desse conhecimento, impulsionada pela invenção da imprensa, o que permitiu que obras matemáticas do passado pudessem ser reimpressas e difundidas a diversos povos. Esse cenário permitiu que os estudos da álgebra árabe trouxessem os negativos à cena novamente. Uma característica relevante do legado árabe é que sua álgebra era retórica, os seja, aos poucos foram sendo introduzidos símbolos e abreviaturas, progressivamente até século XVII.

A popularização dos símbolos "+" e "-" foi contribuída pela obra *Aritmética Integra* do algebrista alemão Michael Stifel, em 1544 (GONZÁLEZ *et al.*, 1990). Na sequência, passam a surgir publicações de outros matemáticos em que estão contidas informações sobre os negativos.

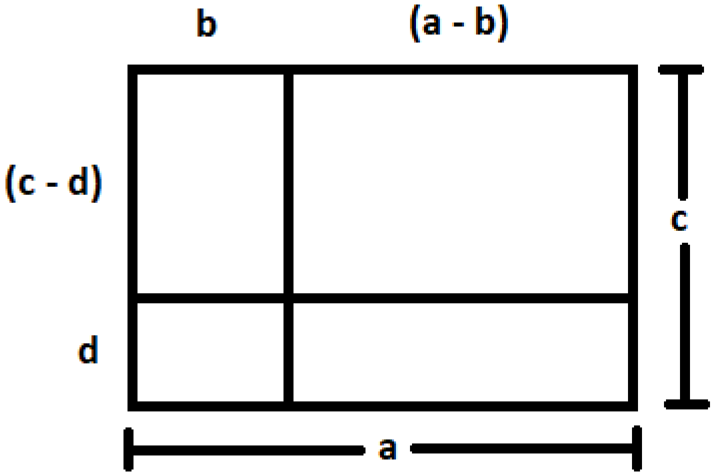
Enquanto Giordano Cardano (1501-1576) não admite coeficientes negativos para equações de terceiro grau, mas aceita as raízes menores que zero - classificando-as como fictícias - Rafael Bombelli (1526-1573) desenvolve as regras aditivas entre números inteiros através de débitos e posses (GONZÁLEZ *et al.*, 1990).

Posteriormente, Simon Stevin (1548-1620) propõe a ideia de que os negativos são ferramentas importantes em cálculos e passa a aceitá-los como coeficientes e raízes de equações. Foi o primeiro a justificar geometricamente a regra dos sinais através da relação algébrica

$$(a-b)(c-d)= a.c - b.c - a.d + b.d$$

por meio da representação a seguir (Figura 1).

Figura 1 - Representação geométrica do produto de duas diferenças.



Fonte: elaborado pelo autor a partir de González *et al*. (1990).

Por outro lado, uma parte dos matemáticos, como o algebrista inglês Thomas Harriot (1560-1621), recusavam-se a aceitar tais números. Harriot, inclusive, demonstrou que raízes negativas eram impossíveis (GONZÁLEZ *et al*., 1990).

Ou seja, a efervescência cultural que ocorreu no Renascimento não foi suficiente para permitir que os obstáculos no trato dos negativos fossem superados.

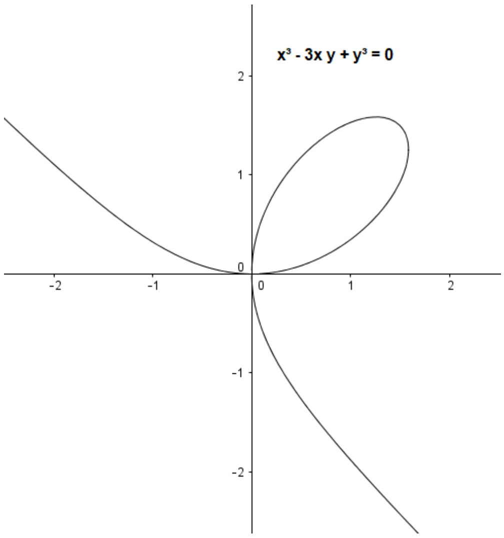
A partir do século XVII, a ciência passou a ser desenvolvida sob os pressupostos da experimentação e observação, com a tendência ao uso de modelos matemáticos em todos os campos científicos, como o cálculo infinitesimal no estudo de fenômenos naturais. Concomitante a isso, os conjuntos numéricos dos negativos e dos imaginários ganharam caminho para sua justificação. Enquanto era difícil justificá-los, era necessária a validação de sua existência através de seu uso (GONZÁLEZ *et al*, 1990).

No "Dicionário Matemático", Jaques Ozanan (1640-1718) cita diversos tipos de números, entre racionais, surdos, incomensuráveis, etc. Na seção *raiz*, são apresentados três tipos de soluções para equações: verdadeiras, falsas e imaginárias. Sendo o grupo das falsas compostas por aquelas compreendidas abaixo de zero (GLAESER, 1985).

Albert Girard (1590-1639) foi o primeiro a reconhecer a utilidade de aceitar as raízes negativas e imaginárias. Tal aceitação permitiria a criação de algoritmos para sua resolução, assim como a criação de equações a partir de suas raízes (GONZÁLEZ *et al*, 1990).

Foi através da Geometria Analítica, campo desenvolvido por Descartes e Fermat, que os negativos começaram a demonstrar uma utilidade inquestionável: representação de um lugar geométrico (GONZÁLEZ *et al*, 1990). Contudo, Descartes ainda foi relutante em aceitar que coordenadas negativas teriam sentido oposto às positivas, nunca considerando abscissas negativas. A curva que hoje é conhecida como Fólio de Descartes (Figura 2) dificilmente é entendida como uma folha, a não ser que se tome a região limitada ao primeiro quadrante do eixo cartesiano; onde a abscissa e ordenada são positivas.

Figura 2 – Representação da curva conhecida como Fólio de Descartes.



Fonte: elaborado pelo autor a partir de González *et al*. (1990).

Segundo González e outros (1990), o primeiro matemático a aceitar as coordenadas cartesianas como as conhecemos hoje foi Newton, em 1676, ao propor um estudo sobre curvas planas, o *Unimeratio linearum tertii ordinis*. Nele os negativos adquirem um lugar geométrico, na direção oposta à dos positivos. Com essa ideia, Newton propõe que quantidades afirmativas são maiores que nada e quantidades negativas são menores que nada. Tal ideia pode ainda ser aplicada a coisas humanas; bens e posses são coisas positivas e dívidas são negativas.

Embora todas essas ideias sejam parecidas com noções com as quais concordamos naturalmente hoje em dia, aceitar os negativos como orientação num sistema de representação não garantiria que tais números seriam aceitos na estrutura numérica existente.

No século XVIII, surge uma vertente de matemáticos que passam a se preocupar com o ensino dos saberes, o que envolve atacar o problema dos resultados presentes que careciam de fundamentação lógica e justificação.

D'Alambert (1716-1783) define as quantidades negativas como "*aquelas que são observadas como menores que nada e estão precedidas pelo sinal de menos*". Em outra produção, o mesmo diz: *dizer que a quantidade negativa é menos que nada é expressar uma* *coisa que não pode existir*. Vemos aqui que d'Alambert aceita os negativos como algo simbólico, mas nega seu caráter físico. O próprio admite não ser fácil descrever a ideia de negativo em um único sentido: *É necessário reconhecer que não é fácil fixar a ideia de quantidades negativas, e que pessoas hábeis têm se enredado por noções pouco exatas que se tem dado* (*apud* GONZÁLEZ *et al*, 1990, p. 37).

O mesmo matemático ainda defende que a aparição de uma raiz negativa implique em uma alteração do enunciado. Na equação $x + 100 = 50$ a solução moderna é "$x = -50$". Contudo, para d'Alambert, o problema deveria ser lido como "100 – 50 = 50" e, nesse caso, "*x*" equivaleria a "50", evitando-se a forma negativa de *x*. Mesmo havendo um erro em tal tradução, o erro – para tais matemáticos – estava na aparição de uma raiz negativa. O matemático De Morgan (1806-1871) propõe evitar o aparente erro lógico-matemático ao introduzir a condição inicial "$x = -t$ ($t \in \mathbb{N}$)" em problemas do tipo "$a - x = b$ (com $b < a$)".

O estado de incompreensão dos negativos é tão grande que o escritor Stendhal (1783-1843) descreve, em um romance autobiográfico, o professor M. Charbert explicando ao aluno Henri Brulard (seu alter ego). No diálogo, Henri pergunta a razão de menos por menos dar mais, e a resposta é: *"Pois na prática, todo mundo admite. Euler e Lagrange, que aparentemente valem tanto quanto a ti, têm o aceito."*. Stendhal ainda reitera: *Me vi reduzido ao que todavia me digo hoje, sem dúvidas "menos por menos ser mais" é certo, pois, a cada instante, essa regra de cálculo conduz a resultados verdadeiros* (*apud* GONZÁLEZ *et al*, 1990, p. 39).

Teria sido de L. Carnot (1753-1823) a primeira tentativa de legitimar esse grupo de números. Percebeu que o problema poderia ser resolvido caso houvesse uma ruptura com o senso comum, assim como poderia ser feito com os imaginários, que também enfrentavam um problema de legitimação (GONZÁLEZ *et al.*, 1990).

A nova perspectiva do pensamento científico/acadêmico, difundida no século XVIII, conduziu esforços para a obtenção de modelos através do pensamento formal. Esse foi o aspecto que manteve o debate em aberto sobre esse tema. Os matemáticos sabiam que o resultado era válido e, de certa forma, assumiam que era válido em oportunidades para desenvolver o seu trabalho. Contudo, o pensamento da época perturbava-os ao ponto de acharem necessários esquemas que conduzissem a um esquema formal e prático.

O primeiro desses passos, segundo González e outros (1990), foi perceber que os negativos eram legítimos em certos contextos, como na geometria e na contabilidade. Euler (1707-1783) propõe uma linguagem para problemas reais envolvendo os negativos. A lógica da multiplicação pode ser revista ao afirmarmos que *"cancelar uma dívida é o mesmo que dar* *um acréscimo".* A multiplicação de uma dívida por um número positivo "$b \cdot (-a)$" equivale a "$-ba$", pois "3 dívidas de a moedas equivale a uma dívida de $3a$ moedas". Por comutatividade, ele concluiu que "$(-a)(+b) = -ab$" e que "$(-a)(+b) = -ab$" deveria ser positivo por eliminação, uma vez que os casos anteriores resultam em negativo.

Laplace (1749-1827), por sua vez, tratou os casos da multiplicação de sinais contrários de maneira análoga à de Euler. Já no produto de dois negativos, afirmou que deveria ser "$+ab$", pois este seria o termo que anularia "$–ab$", fazendo uso da distributividade.

Na década de 1820, se inicia um movimento que rechaçaria a crença do século anterior segundo a qual os resultados eram mais importantes que a lógica contida. Sendo assim, concluir que "$(-a)(-b) = ab$", pois os resultados decorrentes eram todos verdadeiros ou por eliminação, não eram mais estratégias valorizadas.

Em 1867, Hermann Hankel (1839-1873) faria uma contribuição decisiva para a legitimação dos negativos, através da obra *Teoria dos sistemas dos números complexos* (1867). Nela estão definidas as condições para construir uma aritmética universal, isenta de percepções sensíveis. Dentre as contribuições da obra, está o que viria a ser definido como o *Princípio da Permanência de Hankel*[1], que dizia: "*Todos os resultados da álgebra aritmética que se deduz pela aplicação de suas regras, e que são generalizadas embora seu valor particular, são igualmente resultados da álgebra simbólica, de onde são gerais tanto em seu valor como em sua forma*" (*apud* GONZÁLEZ *et al*, 1990, p. 48, minha tradução).

Em outras palavras, o princípio de permanência afirmava que todas as regras que se verificam com naturais – comutatividade e associatividade da adição e da multiplicação, assim como a distributividade da multiplicação em relação à adição – seguiam valendo para todos os demais números e objetos representados por letras.

A partir desse momento, os negativos passaram a ser aceitos como objetos matemáticos, integrados nos conjuntos de números Inteiros, Racionais e Reais, estando submetidos às mesmas operações e compartilhando características dos demais números pertencentes a esses conjuntos.

De certo modo, o que Hankel fez foi explicitar que a extensão das propriedades de um conjunto menor (Naturais) para um conjunto maior é uma convenção, e que, desta forma, os resultados assim produzidos não são demonstráveis.

[1] O termo "princípio de permanência" havia sido usado alguns anos antes pelo matemático George Peacock (1791-1858). A efetividade desse resultado estava na fundamentação e justificação para as operações com

É preciso ressaltar que Hankel não resolveu o problema dos negativos. A ideia de que os resultados seriam uma convenção e não poderiam ser provados já existia desde Euler e Descartes. Contudo, a partir dos resultados de Hankel essa impossibilidade ficou estabelecida.

No final do século XIX, portanto, os negativos passaram a ser aceitos como números. Algum tempo depois foram incluídos nos currículos escolares e, de geração em geração, foram sendo aceitos cultural e socialmente, como números presentes em diversos tipos de representação de grandezas.

Segundo Glaeser (1985), as dificuldades envolvendo as operações com números relativos passam despercebidas por muitos professores e, inclusive, teriam sido minimizadas por educadores matemáticos, como Hans Freudenthal. Em contrapartida, receberam a atenção de Jean Piaget que, a partir das obras de d'Alambert, sugeriu que a superação dessas dificuldades estaria relacionada à compreensão de que um número corresponde a uma ação e não uma quantidade. O que ocorre com quantidades positivas e negativas é o crescimento ou decrescimento, uma vez que positivos e negativos são elementos da mesma espécie. Essa ideia foi a base para a concepção de número como operador ou, conforme a nomenclatura de Vergnaud (2014), transformação.

No próximo capítulo, o percurso histórico de aceitação dos negativos será retomado como parte da reflexão sobre o ensino atual e os desafios no ensino e na aprendizagem dos números relativos.

3 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE NÚMEROS RELATIVOS

Uma ideia que tem surgido mais recorrentemente em minha mente, conforme me torno um educador mais experiente, é: “até que ponto a *Matemática* deve ser ensinada nas aulas de matemática?”. Note aqui que o conteúdo é o mesmo, mas a abordagem é que sofre variações. Quando comecei a lecionar, ou, antes ainda, quando despertavam em mim os primeiros lampejos da educação ao ajudar meus colegas a entenderem as matérias para as provas da escola, pensava que o sucesso do professor estava associado ao sucesso dos alunos. Hoje, não consigo terminar essa frase sem pensar no que seria *sucesso dos alunos*. Para alguns, seria a conclusão do ciclo escolar, para outros o ingresso no curso superior em instituições de prestígio, para outros seria a aprovação em um concurso ou cargo preterido. Há o grupo que diria que o sucesso escolar estaria associado ao desenvolvimento do senso crítico e de valores. Embora, a meu ver, o senso comum diria que o sucesso educacional é único e que condiz à realidade de cada indivíduo, sendo, em cada caso, uma composição distinta dos objetivos citados acima.

Por muito tempo acreditei que expor conclusões prontas aos alunos, sem um processo reflexivo, seria a chave para a superação da aprendizagem insuficiente na matemática. Que o fato do aluno não aprender estaria relacionado a um ensino ineficaz e pouco significativo, onde, na maioria das vezes a culpa seria do professor, fosse por comodismo ou por didática não adequada. Certamente um ponto de vista de alguém com pouca experiência em sala de aula.

Neste capítulo, apresento reflexões sobre a abordagem dos números negativos, baseadas nas leituras de autores como González e outros (1990), Glaeser (1985), Schubring (2007) e Morais (2010), comentários sobre a abordagem dos números negativos no livro didático adotado na escola em que trabalho e concepções que orientaram a construção da sequência de atividades aplicada neste trabalho.

Também justifico a adoção da expressão “números relativos” e apresento comentários sobre a Teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud, que utilizei para compreender melhor os tipos de problemas do campo aditivo e como eles podem representar diferentes tipos de dificuldades nos cálculos envolvendo negativos e/ou positivos. A teoria de Vergnaud também assiste à análise dos dados coletados dos alunos, na qual procuro compreender os *esquemas* utilizados pelos mesmos para a resolução dos exercícios propostos.

A utilização de jogos em sala de aula ajuda a unir a aprendizagem e o interesse dos alunos. A conceituação acerca do conceito de jogo em sala de aula, utilizada para a confecção da sequência de atividades, foi constituída a partir de Grando (2000) e será desenvolvida no capítulo seguinte.

3.1 Obstáculos na aprendizagem dos números negativos

Segundo González e outros (1990), o grande obstáculo histórico para a aceitação e validação dos negativos[2] foi a concepção de que número representa quantidade. A ruptura dessa concepção permitiu um grande avanço no campo matemático teórico, conforme discutido no capítulo anterior. Tal aspecto afetou tanto o ensino-aprendizagem de números relativos quanto a aceitação deste tipo de número no campo matemático acadêmico. Hoje em dia, por outro lado, as pessoas se relacionam com os negativos desde cedo, em situações variadas como, por exemplo, nas redes sociais, na internet e em jogos eletrônicos.

Contudo, é uma ilusão pensar que esse convívio ampliado implique em facilidade no trato com as operações e demais aspectos desses números. Aceitar números negativos como objetos matemáticos, algo a mais do que simples recursos necessários para procedimentos algébricos, é algo que pode envolver muitas dificuldades. Podemos pensar que quinze séculos de debates e dificuldades na aceitação desses números não chegam à escola de hoje em dia sem deixar cicatrizes.

González e outros (1990), baseados em pesquisas realizadas com professores e alunos da Educação Básica na Espanha, argumentam que não há um caminho simples a ser seguido, na abordagem desses números. Os números negativos não têm o mesmo tipo de suporte no concreto dos números naturais, que correspondem à cardinalidade de conjuntos. Contextos do cotidiano em que ocorrem os negativos são questionáveis, uma vez que para cada um deles podemos reinterpretar a situação excluindo a necessidade de um número menor que zero, como escrever "*quatro graus abaixo de zero*" no lugar de - 4°C ou "*doze metros de profundidade*" ao invés de -12 m. Já a formalização do conhecimento através da mecanização de procedimentos segue exatamente o caminho inverso dos intentos da Educação Matemática nos últimos anos.

Os autores apontam, ainda, alguns obstáculos que devem ser enfrentados, pelos estudantes, no processo de aprendizagem dos números inteiros:

[2] Também referidos nesse texto como *números inferiores a zero, números menores que zero* e *números abaixo de zero.*

a) Número como quantidade: a ideia que bloqueava Descartes. Tentar validar a existência do número negativo pela realidade parece ser algo impossível, pois, em geral, eles podem ser desconsiderados.

b) Soma como aumento: essa concepção de soma, ligada ao plano da ação – agrupar objetos – atua no sentido inverso de se encontrar uma resposta para a pergunta: existe um número que somado a 7 resulte em 3?

c) Multiplicação como aumento: analogamente ao que ocorre com a soma, essa concepção instituída para os naturais pode gerar problemas com os números negativos e também com os números fracionários.

d) Subtração como diminuição: nas séries iniciais, a subtração está associada à ação de retirada. González e outros (1990) apontam que, para os alunos, a pergunta "qual o número que subtraído de 7 resulta em 10?" não segue a lógica natural, e daí respondem 17.

e) Conceito de ordem entre negativos: essa dificuldade tem um antecedente histórico quando Carnot afirma que, se "$-3 < 2$" e $(-3)^2 > 2^2$", "então a propriedade da monotonicidade vale para quantidades positivas, mas se perde para quantidades negativas".

f) Significação de símbolos: os alunos entrevistados por González e outros (1990) também não souberam o que afirmar quando questionados sobre a veracidade da frase "se *a* é positivo e *b* é negativo, *a* - *b* é um número positivo". Ao dizerem que não há o que afirmar por não saberem quanto valem *a* e *b*, podemos deduzir que eles estão pensando nos números como pensavam caso ambos fossem positivos. Em minha experiência como professor, já vivenciei vários momentos em que alunos não sabiam dizer se, no cálculo -2 - 4, o número 4 era positivo ou negativo.

Os problemas citados acima estão relacionados à tentativa de legitimar os negativos como números, acrescentando-os aos grupos de números já conhecidos pelos alunos: naturais, decimais e fracionários. Na minha experiência como professor, ao longo dos anos de prática docente, identifiquei as mesmas dificuldades. Estudantes do sexto ano, baseados em suas experiências com os números conhecidos até o momento (naturais, decimais e as frações), já trazem como verdades frases do tipo "a soma faz aumentar" ou "a diferença sempre resulta em um número menor que um número dado". Mesmo que as frases não sejam propriamente ditas nas falas dos alunos, a crença nessas relações afeta o trato que eles têm com novos objetos matemáticos, no caso, com os números negativos.

3.2 Abordagem dos números negativos em livros didáticos

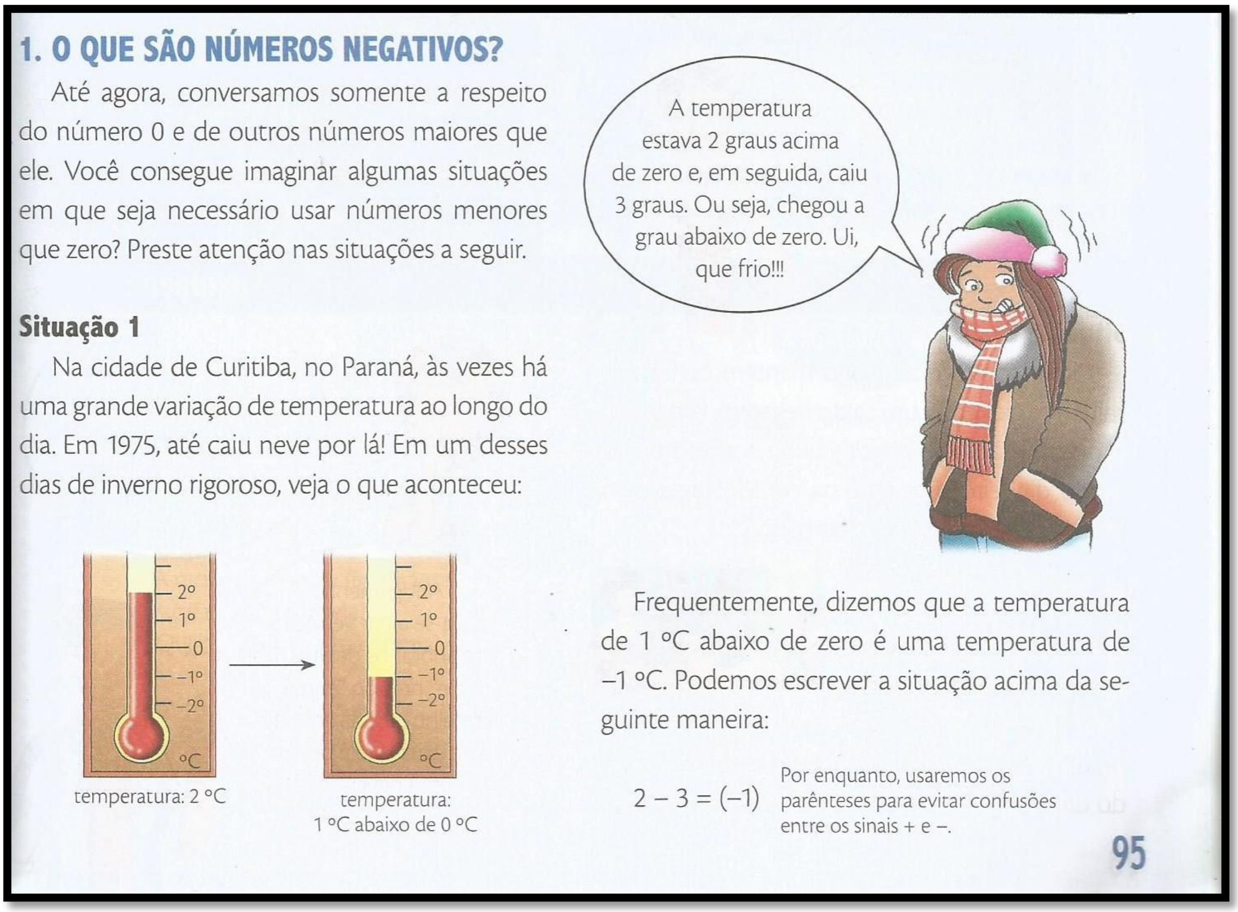
Os livros didáticos para o Ensino Fundamental, no Brasil, comumente possuem um capítulo chamado “Números Inteiros”, fazendo alusão ao conjunto $\mathbb{Z}$ - que posteriormente será apresentado como uma extensão do conjunto dos números naturais.

No livro didático do sétimo ano da rede em que trabalho (CARVALHO; REIS; 2015), a rede em que sempre lecionei, o terceiro capítulo é intitulado “Números Negativos”. Lembro que, quando entrei em aula pela primeira vez como professor, substituía outro educador, por um mês, sendo que os conteúdos com os quais eu trabalharia já estavam pré-definidos. Para o sétimo ano, a matéria a ser ensinada era os números negativos. Recordo-me da confecção dos planejamentos e da sensação de que o dessa turma era o mais difícil. Como professor inexperiente, eu tinha ciência do que os alunos deveriam saber ao final do percurso, mas eu não sabia o caminho a conduzi-los. Em poucas palavras, apresentei a eles uma combinação das minhas técnicas pessoais para a resolução dos exercícios, isto é, alguma ideia do tipo “na adição e na subtração fica o sinal do maior e se eles tiverem sinais contrários fazemos a diferença”, com um suporte da teoria do livro.

Atualmente com um entendimento melhor sobre o tema, costumo estudar de maneira crítica um material didático antes de propô-lo aos meus alunos.

A primeira frase do capítulo que trata dos números negativos, no livro adotado na escola (vide Figura 3), na minha avaliação, coloca o aluno a pensar que os números negativos têm a mesma natureza dos números até então conhecidos como, por exemplo, os naturais, que servem para representar quantidades discretas, ou a cardinalidade de conjuntos finitos. Com essa ausência de discussão sobre a possibilidade de quantidades serem representadas por números negativos, entendo que uma etapa da construção do conceito desse novo tipo de número está sendo deixada de lado.

Figura 3 – Introdução aos números negativos no livro didático utilizado na escola.



1. O QUE SÃO NÚMEROS NEGATIVOS?

Até agora, conversamos somente a respeito do número 0 e de outros números maiores que ele. Você consegue imaginar algumas situações em que seja necessário usar números menores que zero? Preste atenção nas situações a seguir.

Situação 1

Na cidade de Curitiba, no Paraná, às vezes há uma grande variação de temperatura ao longo do dia. Em 1975, até caiu neve por lá! Em um desses dias de inverno rigoroso, veja o que aconteceu:

Frequentemente, dizemos que a temperatura de 1 °C abaixo de zero é uma temperatura de –1 °C. Podemos escrever a situação acima da seguinte maneira:

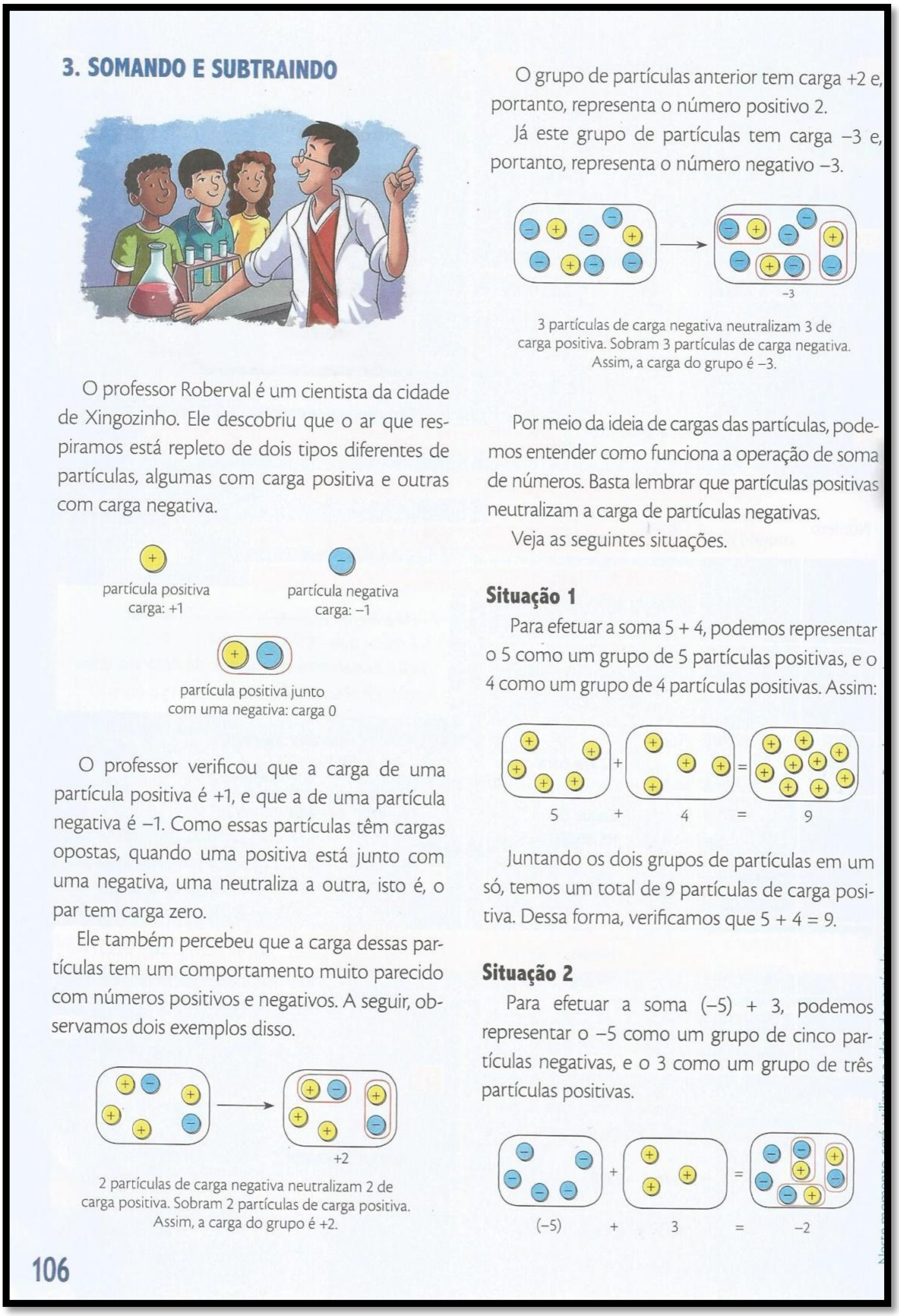
$2 - 3 = (-1)$ Por enquanto, usaremos os parênteses para evitar confusões entre os sinais + e –.

95

Fonte: Carvalho e Reis (2015, p. 95).

Após mencionar várias situações do cotidiano, como problemas de temperatura e saldos, a adição entre números positivos e negativos é introduzida através da associação dos números a cargas positivas ou negativas, resultantes do agrupamento de partículas (vide Figura 4).

Figura 4 - Adição e subtração de positivos e negativos, segundo o livro didático utilizado na escola.



3. SOMANDO E SUBTRAINDO

O professor Roberval é um cientista da cidade de Xingozinho. Ele descobriu que o ar que respiramos está repleto de dois tipos diferentes de partículas, algumas com carga positiva e outras com carga negativa.

partícula positiva carga: +1

partícula negativa carga: −1

partícula positiva junto com uma negativa: carga 0

O professor verificou que a carga de uma partícula positiva é +1, e que a de uma partícula negativa é −1. Como essas partículas têm cargas opostas, quando uma positiva está junto com uma negativa, uma neutraliza a outra, isto é, o par tem carga zero.

Ele também percebeu que a carga dessas partículas tem um comportamento muito parecido com números positivos e negativos. A seguir, observamos dois exemplos disso.

+2

2 partículas de carga negativa neutralizam 2 de carga positiva. Sobram 2 partículas de carga positiva. Assim, a carga do grupo é +2.

O grupo de partículas anterior tem carga +2 e, portanto, representa o número positivo 2.

Já este grupo de partículas tem carga −3 e, portanto, representa o número negativo −3.

−3

3 partículas de carga negativa neutralizam 3 de carga positiva. Sobram 3 partículas de carga negativa. Assim, a carga do grupo é −3.

Por meio da ideia de cargas das partículas, podemos entender como funciona a operação de soma de números. Basta lembrar que partículas positivas neutralizam a carga de partículas negativas.

Veja as seguintes situações.

Situação 1

Para efetuar a soma 5 + 4, podemos representar o 5 como um grupo de 5 partículas positivas, e o 4 como um grupo de 4 partículas positivas. Assim:

5 + 4 = 9

Juntando os dois grupos de partículas em um só, temos um total de 9 partículas de carga positiva. Dessa forma, verificamos que 5 + 4 = 9.

Situação 2

Para efetuar a soma (−5) + 3, podemos representar o −5 como um grupo de cinco partículas negativas, e o 3 como um grupo de três partículas positivas.

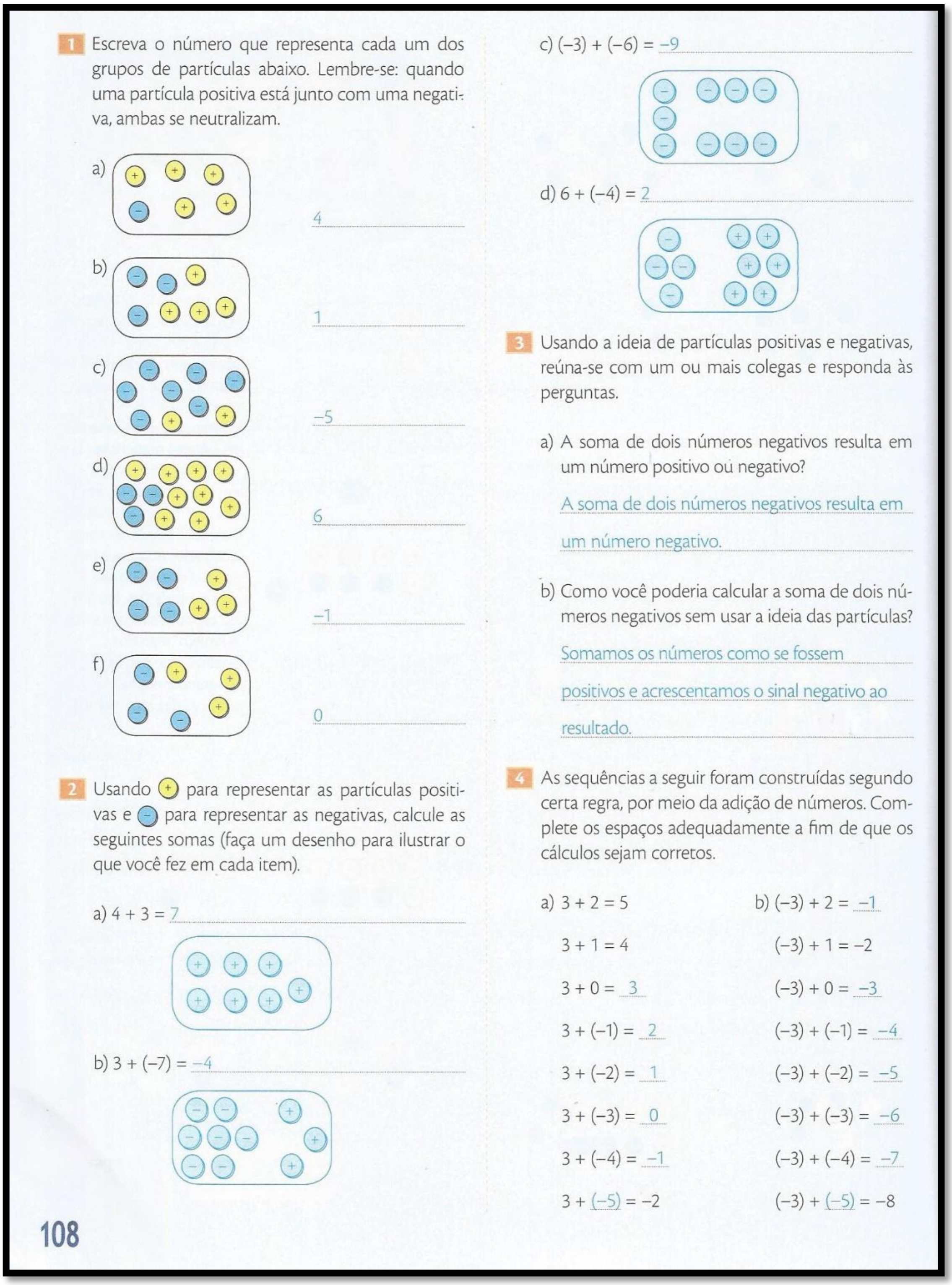
(−5) + 3 = −2

106

Fonte: Carvalho e Reis (2015, p. 106).

Sob esse contexto, surge a lógica de que números de mesmo sinal tendem a se “juntar”, enquanto números de sinais opostos tendem a se anular. Nenhuma discussão é feita sobre a ocorrência dos parênteses e dos sinais. Parênteses são aplicados apenas aos números negativos, aparentemente para separar o sinal do número do sinal da operação, mas sem justificativa.

Figura 5 – Exemplos de exercícios encontrados no livro didático.



1 Escreva o número que representa cada um dos grupos de partículas abaixo. Lembre-se: quando uma partícula positiva está junto com uma negativa, ambas se neutralizam.

a) 4

b) 1

c) –5

d) 6

e) –1

f) 0

2 Usando + para representar as partículas positivas e – para representar as negativas, calcule as seguintes somas (faça um desenho para ilustrar o que você fez em cada item).

a) 4 + 3 = 7

b) 3 + (–7) = –4

c) (–3) + (–6) = –9

d) 6 + (–4) = 2

3 Usando a ideia de partículas positivas e negativas, reúna-se com um ou mais colegas e responda às perguntas.

a) A soma de dois números negativos resulta em um número positivo ou negativo?

A soma de dois números negativos resulta em um número negativo.

b) Como você poderia calcular a soma de dois números negativos sem usar a ideia das partículas?

Somamos os números como se fossem positivos e acrescentamos o sinal negativo ao resultado.

4 As sequências a seguir foram construídas segundo certa regra, por meio da adição de números. Complete os espaços adequadamente a fim de que os cálculos sejam corretos.

a)	b)
3 + 2 = 5	(–3) + 2 = –1
3 + 1 = 4	(–3) + 1 = –2
3 + 0 = 3	(–3) + 0 = –3
3 + (–1) = 2	(–3) + (–1) = –4
3 + (–2) = 1	(–3) + (–2) = –5
3 + (–3) = 0	(–3) + (–3) = –6
3 + (–4) = –1	(–3) + (–4) = –7
3 + (–5) = –2	(–3) + (–5) = –8

108

Fonte: Carvalho e Reis (2015, p. 108).

Os primeiros exercícios propõem que o aluno trabalhe via representação de partículas, mas o texto não generaliza cálculos com números positivos e negativos.

Já a multiplicação é explorada a partir de deslocamentos na reta, em que o aluno é conduzido a compreender que andar para o sentido negativo é o mesmo que pensar em uma multiplicação entre números positivos e negativos. Falta coerência. Para a adição e a subtração trabalha-se com partículas, enquanto para a multiplicação explora-se a reta e para a divisão não se propõe nenhum contexto. Não é um absurdo pensar que, mesmo após o fim do estudo, possam existir dúvidas remanescentes nos estudantes. São duas maneiras distintas de olhar para um número, como posição e como resultado de um agrupamento de partículas.

3.3 Números relativos

A abordagem apresentada nesse livro é uma de muitas encontradas em materiais didáticos que tentam caracterizar a adição e a multiplicação a partir de situações que se acredita que possam fazer sentido ao estudante. Agrupamentos de partículas de cargas iguais ou opostas para a adição e deslocamentos em sentidos iguais ou opostos para a multiplicação. A meu ver, abordar as duas operações de maneira tão distinta pode confundir o aluno ainda mais.

Também é comum a apresentação dos conjuntos numéricos em que o conjunto dos Números Racionais é definido como extensão do conjunto dos Números Inteiros que, por sua vez, é construído a partir do conjunto dos Números Naturais. A meu ver, apresentar os números negativos segundo essa sequência entra em conflito com a ordem da aquisição do conhecimento na matemática escolar, uma vez que os alunos estudam números não inteiros (decimais e frações) antes de aprenderem os negativos.

Desta forma, escolhi utilizar nesse planejamento de aulas a noção de número relativo, ao entender que para o aluno seria mais fácil entender que cada número conhecido até o momento passaria a possuir um correspondente negativo, o seu oposto.

O termo número relativo está presente na literatura da educação matemática há algumas décadas. Raymond Duval valida a existência dos negativos ao utilizar esse conjunto de números como um exemplo para justificar de que modo a linguagem pode influenciar na operacionalização com números (DUVAL, 2012). Bertoni (2007) refere-se ao conjunto dos números relativos para exemplificar um conteúdo de difícil entendimento em sua trajetória escolar. Para Piaget, “o número negativo é resultante das mesmas ações que dão lugar ao número positivo, mas simplesmente orientadas em sentido contrário" (PIAGET *apud* GONZALEZ *et al*., 1990, p. 90).

A noção de número relativo é bastante desenvolvida por Vergnaud (1986), como um dos conceitos centrais do campo aditivo. Para ele, a ideia dos números relativos surge pela necessidade da representação de transformações no tempo e de comparações ou relações, que podem ter sentidos opostos (positivo ou negativo) e da composição dessas transformações e comparações. Podemos tomar como exemplo a situação que segue: "Em certo local, a temperatura era de 7ºC e começou a diminuir até completar uma queda de 10 graus. Dessa forma, a temperatura final ficou em três graus negativos." Nessa situação, o número relativo (+7) expressa uma comparação da temperatura inicial com a temperatura 0º (zero da escala Celsius) e a queda da temperatura, uma transformação, pode ser representada pelo número (-10). A situação pode ser representada pela expressão (+7) + (-10) = (-3). O resultado negativo (-3) expressa uma comparação entre a temperatura final e a temperatura 0º.

Utilizarei o termo *números relativos* para me referir a números que têm sinal opostos (positivos, negativos ou zero), sejam eles inteiros ou não, racionais ou irracionais. Mesmo a noção de número relativo abarcando números decimais e fracionários, escolhi, nesse trabalho, abordar apenas números inteiros. Essa decisão foi tomada baseada em prática desenvolvida anteriormente, em que o foco do estudo era a aprendizagem de positivos e negativos, mas os alunos cometiam erros em função das suas habilidades nas operações com números decimais e números fracionários. Por entender que abrir mão de trabalhar com números não inteiros não atrapalharia a exploração planejada e não comprometeria as conclusões almejadas, o estudo dos números relativos decimais e fracionários foi deixado para um momento futuro.

O estudo dos números relativos inteiros buscou enfatizar a atribuição de significados a esses números e operações e não envolveu a formalização do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Considerei que essa formalização, assim como a do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, poderia ser feita no futuro, sem prejuízo aos estudantes.

3.4 Perspectivas para o ensino de números relativos

González e outros (1990) apresentam várias perspectivas para o trabalho com números relativos na escola. Tais perspectivas influenciarão nas opções didáticas tomadas, nos métodos pedagógicos, nos recursos recorridos e nos resultados esperados. São elas:

> a) Parte de um programa que o aluno deve cumprir para continuar seus estudos.

> b) Uma questão de cultura matemática (Exemplo de estrutura de anel; $\mathbb{Z}$ como ampliação de $\mathbb{N}$, etc.).
> c) Um meio para estimular e favorecer o desenvolvimento de habilidades, destrezas e capacidades intelectuais.
> d) Ferramentas matemáticas necessárias para outros conteúdos posteriores (problemas algébricos, construção de $\mathbb{Q}$, números complexos, etc).
> e) Instrumentos úteis para outras ciências e para a vida (balanças, débitos, temperaturas, jogos virtuais, etc.).
> f) Objetos conceituais a serem construídos dentro do processo natural de aquisição, construção e descobrimento de conhecimentos.
> g) Meios de comunicação de conceitos e proposições em contextos numéricos. (GONZÁLEZ *et al.*, 1990, p. 15, minha tradução).

As combinações entre esses enfoques, dentre outros, podem dar sustentação à postura pedagógica de cada educador com respeito ao ensino desse tema. A abordagem que proponho para os números relativos é uma composição predominantemente dos itens *d*, *e* e *g*. Para os autores do livro, à composição dessas três finalidades é feito o seguinte comentário:

> Seja para um desenvolvimento posterior na Matemática (opção *d*), na vida ou em outros contextos (opção *e*), ou para poder comunicar informações numéricas (opção *g*), parece evidente que os números inteiros como instrumentos dever ser conhecidos em profundidade pelo aluno para que de sua utilização se obtenham resultados ótimos. E se não for assim, como é possível obter o máximo rendimento de uma ferramenta, sem conhecer bem sua estrutura, sua utilidade e seu funcionamento? (GONZÁLEZ *et al.*, 1990, p. 18, minha tradução).

De um modo geral, um objetivo claro para mim, desde o início da formulação da sequência de atividades a ser aplicada, foi a operacionalização dos números relativos. Trabalhar a validação e aceitação dos mesmos a partir do debate histórico ou discutir como eles estão presentes no dia a dia das pessoas não faz sentido se, em algum momento, as habilidades desenvolvidas não forem suficientes para o sucesso na mobilização desses números em todas as matemáticas estudadas nos anos posteriores da Educação Básica ou no ensino superior. Exemplos de saberes estudados em etapas posteriores da Educação Básica, que exigem um domínio dos conceitos pertinentes aos números relativos, são: Funções, Geometria Analítica, Expressões Polinomiais e Números Complexos.

Ao analisarem os textos destinados ao ensino dos números inteiros, González e outros (1990) identificam a presença de diversas concepções de seu ensino ao longo da história. As principais vias apontadas para essa abordagem são:

1. Extensão da aritmética.
2. Situações concretas.

3. Construção de conjuntos.

4. Reta numérica.

O método número 1 corresponde a uma extensão do conhecimento já possuído pelo aluno com respeito aos números naturais. As leis fundamentais das operações são expandidas, de modo que a subtração já não é mais uma operação restrita a certos casos.

No segundo método, os números inteiros são considerados a partir de uma situação em que há um referencial, e o sentido dado aos números corresponde a essa situação dada. O estudo dessas situações permitirá uma expansão posterior para cálculos descontextualizados.

A via da construção de conjuntos é um método que surgiu no final do século XIX e tem um ponto de vista basicamente matemático, em que são usadas classes de equivalência (pares ordenados) para se definir um número (GONZÁLEZ *et al.*, 1990). A pouca experiência que tenho com esse método me leva a colocá-lo na quarta colocação como minha preferência de trabalho escolar. Tanto pela necessidade de desconstrução/reconstrução do conceito de número, quanto pelo distanciamento em relação à matemática estudada na Educação Básica.

A quarta opção é a utilizada pelo livro didático da escola em que trabalho (CARVALHO; REIS; 2015). Uma contribuição desse método está relacionada ao fato de oferecer uma explicação mais intuitiva para as “regras operatórias” do que nos casos métodos anteriores. No momento em que somar (-3) corresponde a andar para a esquerda três unidades, considero intuitivo pensar que subtrair (-3) corresponderá a andar para a direita esse mesmo número de unidades. Essa lógica permite ainda a percepção de maneira simples de que subtrair um negativo equivale a um aumento. Compreender que uma subtração pode gerar um acréscimo é uma noção não trivial, mas pode ser visualizada por esse método.

Essa opção, contudo, também tem limitações, pois pressupõe que o primeiro termo da operação é sempre um ponto de partida, enquanto o segundo é um deslocamento; o que pressupõe abandonar a ideia de adição em que os dois termos têm o mesmo estatuto ou significado, e a da subtração como a reversão dessa operação. Além disso, nesse livro didático, como já mencionei, há uma simplificação de alguns problemas que devem ser examinados com cuidado, e a ausência de uma generalização das operações, de discussão sobre os diferentes significados dos sinais “+ e –” e das escritas com uso ou não de parênteses, atribuindo um grande peso à possibilidade de o professor complementar a abordagem do livro com outras explicações.

O processo de compreensão do tema – à luz da discussão feita por González e outros (1990) - me conduziu a concluir que a apresentação dos negativos não pode ser feita como se apenas acrescentássemos, aos números já conhecidos, números quaisquer menores que zero.

Como discutido acima, não há uma única maneira de definir essa expansão de números conhecidos e meu objetivo aqui não é concluir sobre qual é o melhor caminho. Apenas reafirmo a necessidade de o educador refletir sobre suas práticas cotidianas, alcançando maior compreensão acerca dos temas que ensina.

A Teoria dos campos conceituais, discutida na próxima seção, nos ajuda a compreender os problemas envolvidos na compreensão das operações, quando o campo numérico dos naturais é expandido para o campo dos números relativos.

3.5 A Teoria dos campos conceituais

A Teoria dos campos conceituais é uma teoria sobre a aprendizagem – não necessariamente matemática - dos sujeitos. O foco central desta teoria está sobre as ligações e rupturas entre os conhecimentos, feitos pelos indivíduos, para a resolução de problemas (VERGNAUD,2014).

Um campo conceitual seria um conjunto de situações. Por exemplo, o conjunto de todas as possibilidades de problemas envolvendo a adição corresponde ao *campo das estruturas aditivas* (ou *campo aditivo*), inclusive as situações que seriam resolvidas pelo aluno através de uma subtração. O conhecimento matemático, como um todo, se desdobra em vários campos conceituais.

E o ponto central da aprendizagem, segundo essa teoria, é o conceito de *esquema*. Um *esquema* seria a maneira como o sujeito procede diante de uma determinada classe de situações. Um exemplo de esquemas pode ser visto ao perguntarmos a um grupo de pessoas qual a diferença entre as alturas de dois sujeitos. É bastante provável que alguns optem pela subtração entre os valores brutos enquanto outros decidam contar os centímetros do menor para o maior. Essas duas maneiras de pensar, entre as diversas que podem existir, representam bem a ideia de esquema, ilustrando que há uma certa parcela de lógica pessoal na maneira de pensar de cada um. Caso contrário, encontraríamos apenas um tipo de resolução para cada conjunto de situações dadas. A verificação de múltiplos esquemas para certas situações também solidifica a crença de que pessoas diferentes pensam de maneiras diferentes.

Para cada grupo de situações dadas, o sujeito pode, ou possuir em seu repertório técnicas e procedimentos capazes de resolver um problema proposto, ou necessitar de tempo e reflexão para a elaboração de uma solução, seja essa correta ou incorreta.

Nesse primeiro grupo de situações, em que o sujeito domina esquemas satisfatórios, em certo momento da maturação sobre o assunto, ocorre a automatização dos procedimentos. Sobre a automatização, Vergnaud (2014) afirma:

> A automatização é evidentemente uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização da ação. Mas uma sequência de decisões conscientes pode ser igualmente objeto de uma organização invariante para uma classe de situações dadas (esquema). (VERGNAUD, 2014, p. 158).

Já no grupo das situações em que o aluno não possui um esquema para a resolução do problema, há casos em que ele não conseguirá produzir sozinho um caminho para uma solução. Por outro lado, a existência de um esquema pelo estudante não garante que o mesmo domine o grupo de situações dadas, uma vez que existem esquemas ineficazes ou incorretos. Baseado em minha experiência profissional, percebo que esquemas ineficazes são comuns quando os alunos buscam apenas reproduzir os procedimentos dos professores. Penso que é prejudicial ao aluno um contato precoce com as definições e os procedimentos do educador em uma exploração a um novo conceito, pois isso afetaria a livre exploração do pensamento do estudante e inibiria o vasto campo de possibilidades de construção de esquemas. Isso também pode acontecer caso haja uma tentativa de antecipar a automatização dos alunos por parte do educador.

Os conhecimentos contidos nos esquemas classificam-se como c*onceito-em-ação* e *teorema-em-ação*. A combinação desses dois grupos de situações corresponde ao conceito de *invariantes operatórias* (VERGNAUD, 2014).

Podemos notar que em ambas as classes de situações está a palavra “ação”. Isso pois a ação é o cerne da teoria. Seja pela ação do pensamento, do reconhecimento de invariantes, recomposição de procedimentos, e assim por diante.

Quando uma criança patinadora percebe que, ao girar sobre o mesmo eixo com braços e pernas próximos ao corpo, ela é mais rápida do que ao abrir os membros, temos um exemplo de teorema-em-ação. Um conhecimento que ela adquiriu a partir da ação e que, mesmo sem saber explicar, sabe que pode usá-lo para, por exemplo, fazer uma apresentação para os colegas.

3.6 O campo conceitual das estruturas aditivas

O campo conceitual das estruturas aditivas é entendido como “o conjunto das situações, cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações ou uma combinação destas operações, e também como o conjunto dos conceitos, teoremas e representações simbólicas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas” (VERGNAUD, 1993, p. 9). Já o campo conceitual das estruturas multiplicativas envolve situações que necessitam da multiplicação, da divisão ou da combinação entre elas. Vergnaud (2014) reconhece que, embora as estruturas multiplicativas não independam das estruturas aditivas, elas compõem um campo específico que é o da proporcionalidade. Já o campo das estruturas aditivas engloba situações de composição e decomposição.

Em relação às estruturas aditivas, o autor identifica seis relações de base, a partir das quais é possível engendrar todos os problemas de adição e subtração. Os problemas do tipo aditivo se classificam em: problemas de composição, comparação e transformação. As seis relações de base elencadas por Vergnaud (1986) foram obtidas a partir da combinação de três conceitos: o conceito de estado, representado por uma quantificação numérica, o conceito de transformação, que envolve uma mudança ao longo do tempo, e o conceito de relação, que envolve uma comparação entre dois estados. Apresentarei abaixo de maneira resumida os seis tipos de problemas aditivos, exemplificando-os com situações que podem ser representadas por adições ou subtrações de números naturais.

1) Composição de medidas: “Pedro tem 5 carrinhos e Júlia tem 7 carrinhos. Juntos eles têm 12 carrinhos.”

2) Transformação de uma medida: “Eduarda tem 9 bombons e comeu 5. Logo, Eduarda ficou com 4 bombons.”

3) Comparação de medidas: “Yasmin tem 7 brincos enquanto Carine tem 4. Carine tem 3 brincos a menos que Yasmin.”

4) Composição de transformações: “Em janeiro, trezentas pessoas se associaram ao clube. Já em fevereiro, 80 se desassociaram. Em relação ao início do ano, a variação de sócios foi positiva em 220 pessoas.”

5) Transformação de uma relação: “Pietra tem 10 figurinhas a mais que João. João, por sua vez, dá 4 figurinhas para Bruna. O que acontece com a relação entre Pietra e João?”

6) Composição de relações: “Pedro tem 2 anos a mais que Jade e Jade é 5 anos mais velha que Raí, então Pedro tem sete anos a mais que Raí.”

Os problemas do tipo 4, 5 e 6 são os que envolvem números relativos.

A teoria de Vergnaud foi escolhida como base da sustentação teórica dessa intervenção pedagógica, seja pela análise de dados a partir da Teoria dos campos conceituais, seja pela ênfase nas situações ou pela validação dos números relativos como transformações ou relações, que considero apropriadas para a compreensão desse tipo de número.

4 A GÊNESE DA PROPOSTA DIDÁTICA

No segundo semestre do ano de 2016, apliquei uma sequência de atividades nas turmas de sétimo ano da escola em que trabalho. Aquela sequência de trabalho teria o objetivo de fornecer dados sobre a aprendizagem dos números relativos por parte dos alunos e sustentar as conclusões da minha dissertação. Ao final da aplicação das atividades, entretanto, a aprendizagem constatada nos alunos não foi a esperada. A partir das respostas expressas pelos alunos, pude perceber que estavam muito mais preparados para discutir sobre o tema, qualitativamente falando, mas ainda cometiam erros nos cálculos simples. De certa forma, estava se repetindo o motivo da minha angústia em relação a esse tema específico: mesmo os estudantes que demonstravam dominar a adição e a multiplicação de maneira independente, ainda apresentavam erros com respeito aos cálculos.

Entendi que a sequência de atividades que eu havia planejado não propiciara uma compreensão para um grande número de alunos e decidi elaborar uma nova sequência de trabalho para ser aplicada no próximo período escolar com uma nova turma de sétimo ano. Este trabalho apresenta os resultados dessa segunda aplicação, realizada em 2017.

O ponto central de apoio para minha reflexão foi a ideia da exploração de situações. Para Vergnaud (1986), um conceito adquire sentido através da exploração de problemas e situações. A partir deste fato, procurei entender como promover situações que propiciassem mais aprendizagem e o entendimento inicial do tema.

4.1 Um modelo de introdução aos negativos com uso de jogos

Linchevski e Williams (1999) construíram uma proposta didática para preencher as lacunas percebidas na extensão do conceito de número para inclusão dos números negativos. Tal método consistiria em inserir em sala de aula contextos externos, permitindo aos alunos desenvolver uma lógica que seria, posteriormente, estendida à operacionalização:

> Quando nós introduzimos “realismo” em sala de aula nós não recriamos exatamente a situação social na qual a criança experimentou o “realismo” fora da sala de aula. Nós não podemos evocar a essência do conhecimento intuitivo da realidade, como às vezes sentimos falta do toque ou do cheiro no cinema (LINCHEVSKI; WILLIAMS, 1999, p. 132, minha tradução).

A palavra “realismo” é usada pelos autores no sentido da inserção de situações extraclasse, com a preocupação de que ocorra uma congruência, isto é, de que intuições produtivas, que provocam o pensamento, possam ser transferidas para a prática da sala de aula. Diversos materiais pedagógicos propõem o início do estudo com números abaixo de zero pela abordagem de problemas de saldos, temperaturas ou altitudes. Para adultos inseridos em sociedades urbanas, ou simplesmente pessoas que lidem com essas situações em suas realidades, esse tipo de exemplificação pode fazer sentido. Contudo, precisamos estar atentos ao fato de que alunos em idade escolar, em geral, não passam pela situação de ter o saldo devedor em sua conta bancária ou pouco conhecem a sensação do frio abaixo de zero. Megid (2010) desenvolveu um trabalho com alunos em que explora as hipóteses dos alunos sobre números negativos a partir de situações monetárias. Em seus resultados, ela também confirma que, para os alunos, é difícil fazer suposições sobre dívidas e gastos além das posses.

Do ponto de vista desses pesquisadores, promover esse tipo de atividade permite uma exemplificação, mas não promove a contextualização necessária para o desenvolvimento de significados relacionados a esses números, que, agora, passarão a ter um significado relacionado a um referencial, o zero.

Ainda, citando Linchevski e Williams (1999):

> Portanto crianças, professores e pais entendem que o objetivo da atividade em sala de aula é de que as crianças aprendam: os objetivos do aprendizado são explícitos e não frequentemente congruentes com as práticas extraescolares. [...] O uso de contextos que se referem a situações extraescolares deve ser validado por seu sucesso em ajudar a atividade autêntica de sala de aula, nas quais tarefas propostas, ferramentas educacionais e o professor podem ter um papel fundamental (LINCHEVSKI; WILLIAMS, 1999, p. 133, minha tradução).

Após a leitura de Linchevski e Williams (1999), passou a fazer sentido, para mim, pensar que os contextos do cotidiano permitem uma introdução ao assunto, mas não uma exploração suficiente a preparar os alunos para a adição e a subtração de números relativos. O modelo dos autores, o qual adaptei para a sequência de atividades inserida na minha dissertação, baseou-se no uso de jogos em sala de aula. A inserção de jogos busca o realismo citado anteriormente. O jogo é um sistema fechado, no qual, a partir de um conjunto de regras, podem ser feitas validações e recusas. A partir dessas verdades, são desenvolvidos resultados pelo aluno que servirão de base para a teorização futura. A realidade do jogo servirá de sustentação para o aluno.

As atividades aplicadas por Linchevski e Williams (1999) envolveram a exploração de dois jogos por alunos de sétimo ano que nunca haviam recebido qualquer instrução sobre números negativos. O primeiro jogo foi chamado de Jogo da Discoteca. Nesse jogo, os alunos representariam seguranças de uma festa que estariam na entrada da mesma, controlando o fluxo de pessoas que entram e saem do estabelecimento. A hipótese do jogo é que, no momento de início do turno, a quantidade de pessoas dentro da festa era desconhecida; desta forma, não importaria a quantidade de pessoas na festa a cada instante, mas sim, o controle da variação dessa quantidade, resultante das saídas e das entradas. Uma descrição mais detalhada sobre esse jogo e o próximo será dada no próximo capítulo.

O segundo jogo trabalhado foi o Jogo dos Dados, em que quatro crianças jogavam em dois times, anotando os pontos do lançamento dos dados. Na primeira parte do jogo, um dado amarelo e um dado azul eram jogados, representando sentidos opostos e cujo saldo para os times de mesma cor estavam associados e controlados como antes. A diferença é que agora o controle era feito em um ábaco duplo. Conforme fosse o resultado dos dados, os alunos poderiam mexer no ábaco da outra equipe, vencendo o time que abrisse seis pontos adiante do outro. Na segunda parte do jogo, foi adicionado mais um dado, visando permitir a subtração; em três faces estava escrito “adicionar” e em três faces “subtrair”. Na fase final do jogo, os dois dados foram substituídos por um único dado cujas faces continham os números inteiros “+3, +2, +1, -1, -2, -3”.

Ao final das seções, um teste escrito foi passado aos alunos com cálculos puramente matemáticos como “+3” adicionado a“-2” ou “-2” subtraído de “-5”. Todas menos uma criança obteve 100% de acertos na reescrita.

Citando Linchevski e Williams (1999):

> A intuitiva força da justiça nos jogos esteve acessível nesse experimento pela estrutura social de “jogar jogos” ser realizada na classe. Este foi um jogo autêntico, com times, pontos e uma competição real. Nós vemos a força disso na força do uso do jogo como um meio de justificação para a estratégia de compensação e seu uso para a justificação das operações matemáticas. Pareceu que “menos, menos é mais” foi, finalmente, uma regra que fez sentido para a criança porque eles viram isso em uma situação justa e autêntica (LINCHEVSKI; WILLIAMS, 1999, p. 133, minha tradução).

Os resultados e o ponto de vista de Linchevski e Williams foram a centelha para o projeto de pesquisa com números relativos. Pensar em uma abordagem com jogos para o desenvolvimento de significados na construção do conjunto dos números relativos poderia representar uma boa ideia para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem deste, que é um dos assuntos mais relevantes da matemática escolar.

4.2 Sobre jogos na Educação Matemática

Segundo Grando (2000), pensar na atividade com jogos como uma metodologia, ou mesmo uma teoria recentemente discutida, é um grande equívoco. Platão já acreditava na ação dos jogos educacionais ao ensinar seus “discípulos”, através de jogos com palavras e/ou jogos lógicos (dialética). Para a autora, quase todas as atividades humanas podem ser vistas como um jogo. Dirigir um carro é um jogo de regras, no qual o cumprimento das normas é fundamental para o sucesso da atividade. Sendo assim, não é necessário haver um vencedor para que uma atividade seja considerada um jogo.

Gardner (*apud* GRANDO, 2000) caracteriza um jogo, do ponto de vista matemático, como uma atividade de forte caráter lúdico. Ou seja, uma atividade relacionada à brincadeira, à diversão.

Segundo Grando (2000), os jogos possuem um importante papel na construção de conceitos matemáticos:

> O jogo de regras possibilita à criança a construção de relações quantitativas ou lógicas, que se caracterizam pela aprendizagem em raciocinar e demonstrar, questionar o como e o porquê dos erros e acertos. Neste sentido, o jogo de regras trabalha com a dedução, o que implica numa formulação lógica, baseada em um raciocínio hipotético-dedutivo, capaz de levar as crianças a formulações do tipo: teste de regularidades e variações, controle das condições favoráveis, observação das partidas e registro, análise dos riscos e possibilidades de cada jogada, pesquisar, problematizar sobre o jogo, produzindo conhecimento (GRANDO, 2000, p. 16).

Há ainda uma distinção feita para *jogos de estratégia*, definidos por propiciarem o desenvolvimento de habilidades típicas da matemática da resolução de problemas (CORBALÁN *apud* GRANDO, 2000). Sobre os jogos de estratégia, Grando (2000) diz:

> Estes tipos de jogos são importantes para a formação do pensamento matemático e propiciam passos para a generalização (estratégias do jogo). O conceito matemático pode ser identificado na estruturação do próprio jogo, na medida em que não basta jogar simplesmente para construir as estratégias e determinar o conceito. É necessária uma reflexão sobre o jogo, análise do jogo. Um processo de reflexão e elaboração de procedimentos para a resolução dos problemas que aparecem no jogo (GRANDO, 2000, p. 54).

Os jogos aplicados nesta pesquisa não atendem necessariamente à definição de jogos de estratégia, pois não foram concebidos com esse objetivo.

A meu ver, a possibilidade de competir com outros jogadores pode instigar a pessoa a buscar as melhores ações dentro do universo do jogo e ajudar no despertar do interesse por parte dos sujeitos participantes da atividade. Muitas vezes o próprio ato de jogar já conduz o jogador a uma aprendizagem, como, por exemplo, no jogo de palavras cruzadas. Com esses objetivos, busquei inserir jogos na sequência de atividades a ser aplicada com os alunos.

Analisando as produções recentes sobre o ensino de números relativos relacionadas ao uso de jogos, destaco a dissertação "*Quatro jogos para números inteiros: Uma análise"* (LINARDI, 1998), em que os jogos são o caminho para a superação dos obstáculos na aprendizagem de números relativos. Um dos jogos utilizados nessa dissertação inspirou o jogo que eu mais gostei de aplicar na minha sequência de atividades e que, em minha opinião teve os melhores resultados conforme discutirei nos próximos capítulos, o Banco Imobiliário de Porto Alegre.

Megid (2010) propõe um jogo de cartas que explora a questão da soma de números de sinais opostos, o qual, após uma adaptação, deu origem ao jogo Escova do Zero, que foi aplicado neste trabalho.

Morais (2010) projetou o objeto digital "Fórmula (-1)"[3] como produto de sua dissertação: uma abordagem do jogo e da tecnologia que eu achei interessante e planejei abordar na sequência de atividades inicial, mas que não consegui executar pela falta de tempo.

A minha postura como pesquisador em sala de aula foi sustentada pelo conceito da *Investigação Qualitativa* em sala de aula segundo Bogdan e Biklen (1994).

4.3 Pesquisa qualitativa em sala de aula

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa se originou no campo jornalístico, em que as pessoas buscaram entender os problemas sociais. As condições de vida das comunidades menos favorecidas passaram a ser expostas e soluções precisaram ser encontradas. Isso, já no século XIX.

Essas características de entendimento crítico da realidade foram a gênese para a investigação qualitativa em educação, que teve origem na antropologia. Um campo que era dominado pelas questões da mensuração, definições irracionais, variáveis, teste de hipóteses e estatística, alargou-se para contemplar uma metodologia de investigação que enfatiza a

[3] Disponível no Repositório de Produtos Didáticos do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, no site <http://www.mat.ufrgs.br/ppgem/produto_didatico/objetos/anuar/formula_1/index.html>. (Acessado em 19 de junho de 2017).

descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais. Designamos esta abordagem por "Investigação Qualitativa" (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Ainda citando Bogdan e Biklen (1994), sobre a investigação qualitativa em educação:

> Utilizamos a expressão investigação qualitativa como um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características. Os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico. As questões a investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, sendo, outras sim, formuladas com o objetivo de investigar os fenômenos em toda a sua complexidade e em contexto natural. Ainda que os indivíduos que fazem investigação qualitativa possam vir a selecionar questões específicas à medida que recolhem os dados, a abordagem à investigação não é feita com o objetivo de responder a questões prévias ou de testar hipóteses. Privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação. As causas exteriores são consideradas de importância secundária. Recolhem normalmente os dados em função de um contato aprofundado com os indivíduos, nos seus contextos ecológicos naturais (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 16).

A utilização da investigação qualitativa foi escolhida devido ao interesse nos processos individuais dos alunos. Minha participação na pesquisa, como pesquisador e professor, ao mesmo tempo, teve o objetivo de entender o pensamento dos alunos a fim de levantar hipóteses sobre o trabalho com relativos. Na resolução das atividades, sempre foram incentivadas as descrições das respostas e, mesmo em exercícios exclusivamente de cálculos, os alunos foram recomendados a expor todos os rascunhos de sua linha de pensamento. Muito mais importante do que verificar que os alunos calcularam corretamente, foi perceber o que os conduziu a esses acertos.

A pesquisa foi realizada com uma turma de sétimo ano da escola em que trabalho. Nessa escola, o planejamento escolar divide o ano letivo em quatro bimestres. Normalmente, a cada bimestre são abordados dois conteúdos – um a cada mês – com uma avaliação ao final de cada um destes. Desde o início, pensei em organizar a minha sequência de atividades sob o princípio da reprodutibilidade por outros educadores e também por mim mesmo em anos anteriores. Bogdan e Biklen (1994) apontam como uma característica da investigação em sala de aula o não engessamento temporal. A investigação não pode estar sujeita ao relógio, com prazo para acabar. Embora eu tivesse um planejamento global desde o início, as aulas sempre foram planejadas uma após o término da outra; o que aconteceu a cada dia seria fundamental para o prosseguimento no encontro seguinte.

A coleta de dados se deu através de registro em áudio e escrito dos debates em aula. Após cada uma das atividades, foram propostos questionários para os alunos exporem seus pensamentos, para que pudessem ser lidos e analisados posteriormente. Fotografias de cadernos foram utilizadas em momentos de atividades que não envolveram listas. No apêndice 1 segue o termo de ciência informado, coletado junto aos responsáveis pelos estudantes participantes.

5 APRESENTAÇÃO DOS JOGOS UTILIZADOS NA PROPOSTA DIDÁTICA

Nesse capítulo são apresentadas as expectativas para cada jogo utilizado na sequência de atividades e os regulamentos dos jogos tais como foram apresentados aos alunos[4]. Uma breve explicação sobre cada jogo será retomada no próximo capítulo, de relato da aplicação da proposta didática, e uma análise sobre a aplicação de cada jogo será apresentada no capítulo da análise dos dados.

5.1 O Jogo do Segurança

Este jogo é organizado em duas fases, neste texto chamadas de fase 1 e fase 2.

A ideia deste jogo é que os alunos assumirão o papel de um segurança de uma festa, onde as pessoas vão para dançar. A condição inicial do jogo é que a festa já está com um bom público de pessoas, sendo impossível saber quantas estão ali no momento. Além de cuidar da entrada, faz parte de seu trabalho controlar o fluxo de entradas e saídas, de modo que se possa comparar o número de pessoas na festa, em qualquer momento, com o número de pessoas daquele momento inicial em que se começou a fazer o controle.

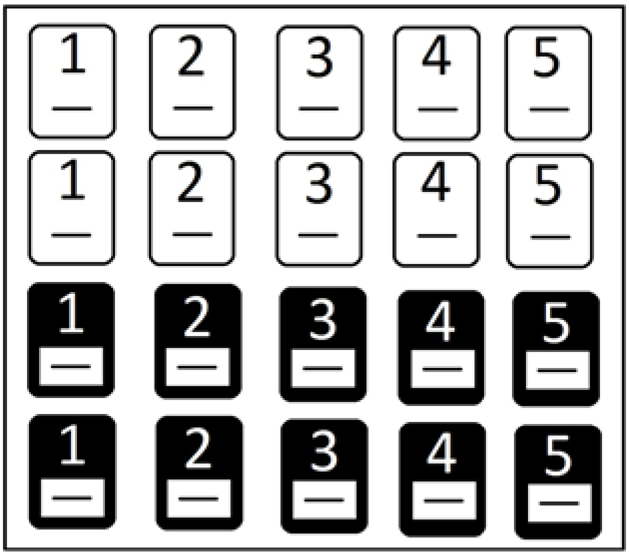
O fluxo de pessoas é representado por peças brancas e peças pretas colocadas sobre a mesa. A regra fundamental do jogo é que cada peça branca indica a entrada de uma pessoa na festa, enquanto cada peça preta indica a saída de uma pessoa da festa. Quando o número de peças brancas na mesa é maior do que o número de peças pretas, sabemos que houve mais entradas do que saídas e, portanto, aumentou o número de frequentadores da festa. Ao contrário, quando o número de peças pretas é maior do que o número de peças brancas, sabemos que houve mais saídas do que entradas e, portanto, diminuiu o número de frequentadores da festa. A tarefa dos jogadores é controlar a variação do público, simbolizando o decorrer do turno de trabalho. Para esse controle, não é preciso saber exatamente quantas pessoas entraram e quantas saíram; o importante é que a variação dos frequentadores seja registrada. Para isso, é importante é que a diferença entre o número de peças das duas cores na mesa seja igual à diferença entre o número de pessoas que entraram e que saíram da festa.

Para jogar esse jogo são necessários, portanto, botões brancos e pretos, ou peças brancas e pretas do jogo de damas ou xadrez. Na aplicação do jogo, foram usados dez botões

[4] Um arranjo completo do regulamento dos jogos pode ser encontrado no produto final desta dissertação.

de cada cor. São necessárias, também, cartas que indicarão, a cada jogada, a movimentação das pessoas, de entrar ou sair da festa, a ser representada pelas peças brancas e pretas. Na aplicação, foram usadas dez cartas brancas (dois conjuntos de cartas numeradas do 1 ao 5) e dez cartas pretas (dois conjuntos de cartas numeradas do 1 ao 5). Para a fase 1 do jogo, os alunos receberam uma folha com as cartas impressas para recortarem, conforme retratado na Figura 6.

Figura 6 - Cartões utilizados na fase 1 do jogo do Segurança.



Fonte: Acervo do autor.

O jogo inicia com o posicionamento de quatro peças brancas e quatro peças pretas, agrupadas por cor, no centro da mesa. As demais ficam no estoque, em um canto da mesa.

A cada jogada, um jogador retira uma carta do topo da pilha de cartas que foi previamente embaralhada. Ele deve representar o evento descrito pela carta através do movimento das peças. Vence a equipe que primeiro conseguir reunir as suas dez peças no centro da mesa.

Nessa fase do jogo, é esperado que o aluno desenvolva a noção de números opostos, que correspondem a transformações de sentidos opostos e que, quando combinadas se anulam. Outra expectativa corresponde a lidar com conflitos resultantes da falta de peças para representar os eventos indicados nas cartas. Para a solução desse problema, a expectativa é que os alunos desenvolvam as estratégias de compensação, cancelamento, anulação e agrupamento, que serão descritas no próximo capítulo. O contexto do jogo foi projetado para que essas estratégias de superação da crise de falta de peças provocassem o desenvolvimento da lógica operatória que futuramente auxiliaria o cálculo com números relativos. A justificação para essas estratégias está no próprio sentido que essas ações têm dentro do próprio jogo, uma vez que, para o controle da variação de pessoas na festa, cada entrada cancela uma saída. Portanto, o acréscimo de peças brancas tem o mesmo efeito da retirada de peças pretas e vice-versa.

Quando os alunos alcançarem o estágio de utilizar esses procedimentos, o objetivo do jogo foi alcançado.

Na fase 2 do jogo é marcada uma seta em cada carta, sobre o travessão abaixo de cada número. Dentre as dez cartas brancas, cinco (numeradas de 1 a 5) passam a possuir uma seta para a esquerda e nas outras cinco são marcadas setas para a direita. O mesmo ocorre com as cartas pretas.

As setas para a direita mantêm o sentido original da carta, e as setas para a esquerda indicam o contrário do que seria feito caso a seta fosse para a direita. A ação correspondente a cada uma das cartas poderá passar a ser lida conforme retratado no Quadro 1.

Quadro 1 – Ações representadas pelas cartas com as setas.

Branca com seta para a direita: entrou na festa o número de pessoas indicado na carta. Branca com seta para a esquerda: desfazer a ação marcada na carta branca com seta para a direita. Preta com seta para a direita: saiu da festa o número de pessoas indicado na carta. Preta com seta para a esquerda: desfazer a ação marcada na carta preta com seta para a direita.

Fonte: Acervo do autor.

A ideia desta fase 2 é permitir que os alunos desenvolvam a noção da subtração sem ao menos termos falado sobre positivos e negativos em aula. A combinação de que a seta para a esquerda indica a transformação oposta pode ser uma maneira de se dar sentido a expressões do tipo “$-(-..)$”.

5.2 O Jogo das Tropas

Para este jogo são usados os mesmos conjuntos de dez peças de cada cor do Jogo do Segurança e dois dados. Um dos dados será alterado para que em suas faces constem os símbolos “-3, -2, -1, +1, +2, +3” e será chamado neste texto por *dado dos números*. O outro será alterado para que três de suas faces contenham a palavra “adicionar” e as demais a palavra “subtrair”. Este segundo dado será chamado de *dado das operações*.

Esse jogo deverá ser jogado em duplas e também tem duas fases.

Em ambas as fases cada aluno escolhe a cor de suas peças e posiciona uma quantidade inicial de quatro peças na mesa, em frente aos jogadores, deixando as outras seis de sua cor na reserva. Tendo feito isso, o jogo se inicia; a cada turno, cada aluno deve jogar uma vez o dado dos números e executar a ação correspondente ao resultado do dado. Vence o aluno que, ao final de dez lançamentos, tiver mais peças.

Inseri o jogo nessa proposta de trabalho por alguns motivos. O primeiro foi considerar que as ações mentais necessárias para a execução das atividades são um pouco mais complexas que as da atividade anterior e que essa transição poderia representar um crescimento na lógica dos alunos. Já o segundo, correspondeu a que os alunos percebessem que limitar as ações de entrada e saída da festa por uma pilha composta com conjuntos equivalentes de cartas pretas e brancas indicaria que as partidas acabariam do mesmo modo, pois em algum momento a pilha acabaria e a situação das peças estaria como no início da atividade. De certa forma, esse jogo seria uma possibilidade de retomar a aplicação do jogo anterior e superar eventuais confusões que os alunos pudessem ter feito sobre a relação entre as cartas e as pessoas.

Esse jogo possuiria uma segunda etapa – principal motivo de sua inserção nesse trabalho - que envolveria acrescentar um novo dado ao jogo, chamado *dado das operações*. Esse dado teria três faces escritas “Adi” e três faces escritas “Sub”. Dessa forma, a composição dos dados poderia permitir que o aluno precisasse pensar em como realizar a ação que correspondesse a obter o número “-3” no dado dos números e “Sub” no dado das operações, o que entendi como uma boa maneira de se trabalhar ideias de subtração *a priori*.

A ideia desses dois primeiros jogos surgiu do trabalho de Linchevski e Williams (1999), em que a situação foi trabalhada em um ábaco duplo no qual as crianças controlavam a manipulação das peças das duas cores.

5.3 O Banco Imobiliário de Porto Alegre

O Banco Imobiliário de Porto Alegre é um jogo adaptado da dissertação de Linardi (1999) com os pontos turísticos da cidade de Porto Alegre. Esse jogo é bastante semelhante ao Banco Imobiliário[5] original, mas envolve dinheiro em duas cores, um representando posses e outro dívidas, conforme representado na Figura 7.

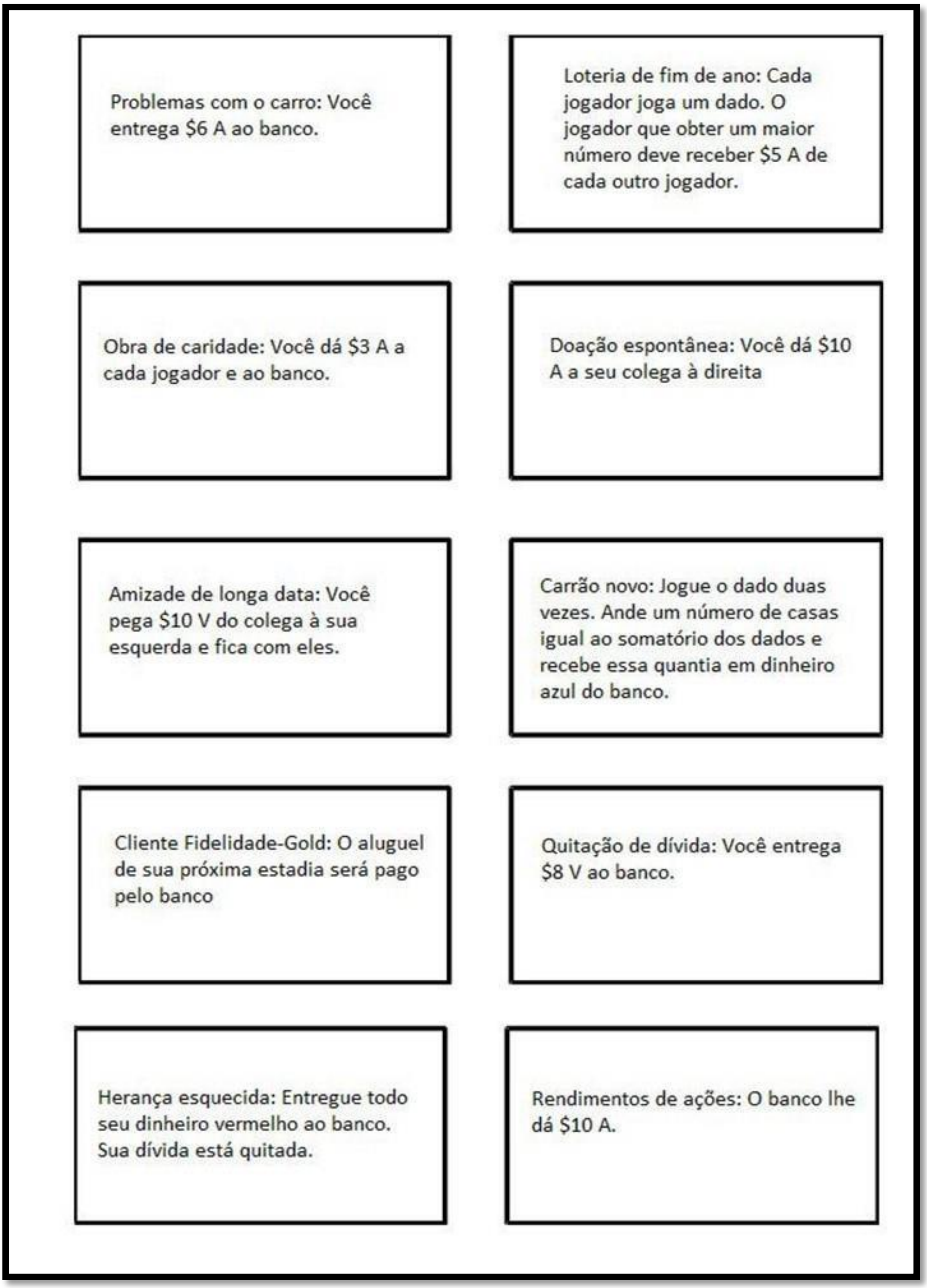
[5] Banco Imobiliário é um jogo de tabuleiro lançado, no Brasil, pela empresa Brinquedos Estrela. O jogo consiste na compra e venda de propriedades como bairro, casas, hotéis, empresas, de modo que vence o jogador que não for à falência.

Figura 7 - Cédulas do jogo Banco Imobiliário de Porto Alegre.

Fonte: acervo do autor.

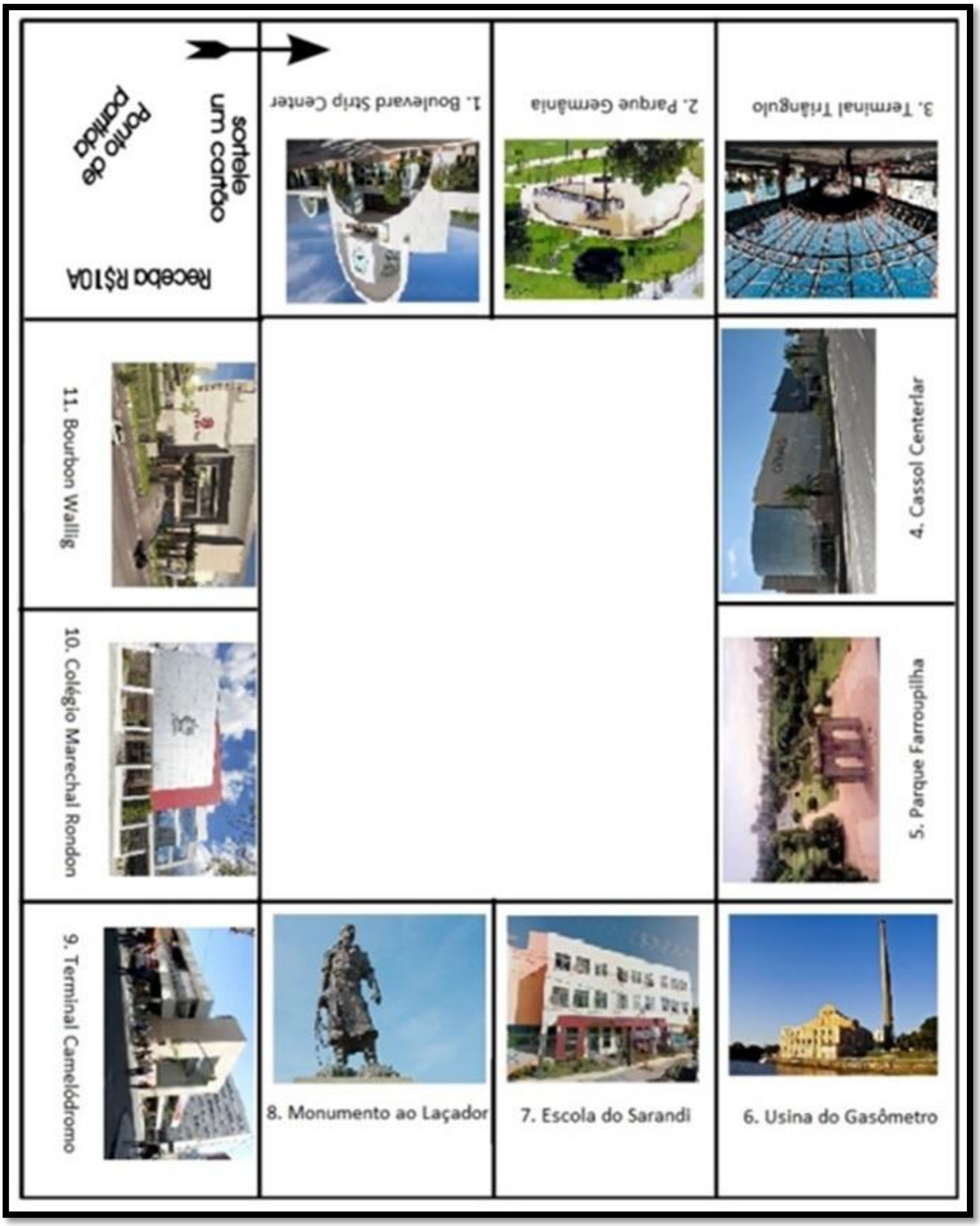
Outra novidade desse jogo são as cartas de sorteio, como mostra a Figura 8. Em minha adaptação, além dessas cartas que permitem que cada partida seja diferente de todas as partidas anteriores, foram utilizados os pontos turísticos da cidade de Porto Alegre para a composição do tabuleiro, conforme pode ser visto na Figura 8.

Figura 8 - Cartões do jogo Banco Imobiliário de Porto Alegre.



Fonte: acervo do autor.

Figura 9 - Tabuleiro do jogo Banco Imobiliário de Porto Alegre.



Fonte: acervo do autor.

Para jogar esse jogo, são necessárias entre três a seis pessoas. Além do tabuleiro, são necessários peões para representar os jogadores[6] quando se movimentam, um dado de seis faces, as cédulas (azuis representando posses e vermelhas representando dívidas) e cartas de sorteio. O preço de cada propriedade, assim como o seu valor de seu aluguel, corresponde ao número da propriedade indicado no tabuleiro.

De um modo geral, as regras são bastante parecidas com as do jogo Banco Imobiliário original, acrescentando-se a ideia de “dinheiro negativo” para representar dívidas. Cada jogador inicia com a quantia de R$ 10A (10 reais azuis) e coloca seu peão no ponto de partida. Decide-se através do dado quem começa, e o jogo seguirá no sentido horário. Cada jogador, na sua vez, em cada rodada, segue a sequência de ações descritas no quadro 2.

Quadro 2 – Ações do turno do jogador no Banco Imobiliário de Porto Alegre.

1) Fazer um aprimoramento no lote (caso possua todas as propriedades do mesmo tipo);
2) Negociar propriedades com outro jogador por valor a combinar;
3) Vender propriedade ao banco pelo valor que foi pago por ela;
4) Jogar o dado para movimentar-se e, na sequência ao movimento, decidir se comprará a propriedade em que parou ou pagar o aluguel equivalente para outro jogador;
5) Executar as instruções de uma carta de sorteio.

Fonte: acervo do autor.

Essa sequência não pode ser alterada, ou seja, por exemplo, o jogador não pode decidir colocar casas na propriedade após movimentar-se.

A compra de uma propriedade é possibilitada no momento em que o jogador para sobre essa casa do tabuleiro, conforme o item 4, e sua quantia deverá ser transferida ao banco. Para aprimorar uma propriedade, o jogador deve ser proprietário de todas as propriedades de mesmo tipo e parar sobre o lote no qual deseja construir. O valor de cada aprimoramento equivale ao dobro do aluguel (número da propriedade). Quando um jogador parar em uma propriedade com aprimoramentos (que podem ser de até três), o novo aluguel será calculado através da multiplicação do valor inicial do lote (descrito no tabuleiro) por dois, para cada aprimoramento contido no mesmo. Dessa forma, se houver dois aprimoramentos no Monumento ao Laçador, o aluguel passará a ser R$ $8A \cdot 2^2 =$ R$ 32A. Um jogador só pode fazer aprimoramentos se não possuir nenhum dinheiro vermelho, isto é, se não tiver dívidas.

[6] Uma alternativa aqui é permitir que os alunos desenhem personagens para os representarem no tabuleiro, ao invés de usar peões genéricos.

A venda de propriedades para outros jogadores pode ser feita a cada rodada, antes do lançamento do dado do movimento. Não há limites para tal negociação. Um jogador pode contrair uma dívida para comprar uma propriedade de outro jogador.

Enquanto o dinheiro azul representa a quantia que o jogador possui, o dinheiro vermelho representa uma dívida. Antes do movimento, um jogador pode devolver ao banco uma mesma quantia de dinheiro azul e vermelho, visando quitar sua dívida.

Após passar pelo ponto de partida novamente, cada jogador recebe R$ 10A e tem direito a pegar uma carta de sorteio. Algumas cartas de sorteio têm efeitos positivos enquanto outras representarão prejuízos. O efeito da carta de sorteio deve ser executado exatamente após sua retirada. As cartas executadas são colocadas em uma pilha de descarte, que deverá ser embaralhada, gerando uma nova pilha de cartas de sorteio quando a atual chegar ao fim.

O jogo chega ao fim quando o tempo previsto para a partida acabar. Nesse momento, vence o jogador que tiver uma maior quantidade de dinheiro azul, após serem feitos todos os procedimentos retratados no quadro abaixo.

Quadro 3 – Ações para finalizar o Banco Imobiliário de Porto Alegre.

1) Venda dos aprimoramentos possuídos nas propriedades do jogador pela metade do valor que custaram;
2) Venda das propriedades possuídas por cada jogador pelo valor que custaram;
3) Pagamento de todas as dívidas (dinheiro vermelho) possuídas por cada jogador junto ao banco.

Fonte: acervo do autor.

5.4 Jogo Escova do Zero

Este jogo foi inspirado em jogo semelhante apresentado por Megid (2010), que por sua vez é uma adaptação de um jogo comum em comunidades de origem italiana, chamado Escopa (escova em italiano). Em minha infância fui apresentado ao jogo, já com o nome em português, por meus parentes do interior do Rio Grande do Sul, em uma área de colonização italiana próxima à cidade de Santiago.

Por gostar de jogos de cartas, pensei que seria uma boa ideia encontrar um espaço para a inserção desse jogo em minha sequência de atividades, pois os alunos poderiam desenvolver conhecimento e aprender se divertindo com as aulas de matemática.

No Quadro 4 segue o conjunto de regras segundo a minha adaptação do jogo.

Quadro 4 – Regras do jogo Escova do Zero.

Jogadores: 2 jogadores.

Objetivo: Formar combinações de cartas cujos valores resultem no número neutro (zero).

Composição do jogo: De um baralho normal de cartas são retirados os valetes, rainhas e reis. Dessa forma, o baralho de jogo é composto por 40 cartas, sendo 20 de uma cor (vermelha) e 20 de outra (preta). Convencionaremos que as cartas pretas terão um significado positivo enquanto as vermelhas terão um significado negativo.

Iniciando: Tira-se par ou ímpar para decidir quem começará. O outro jogador deverá embaralhar as cartas e distribuí-las alternadamente entre cada jogador e a mesa. Cada jogador começará com 3 cartas na mão e serão colocadas 4 cartas na mesa viradas para cima.

Efetuando uma jogada: Na sua vez, cada jogador poderá usar uma carta da mão e juntar com qualquer número de cartas da mesa para formar uma combinação. Uma combinação é considerada válida quando a soma dos positivos e negativos resultam no número neutro.

Exemplo: *Thiago tem um quatro vermelho na mão e decide usá-lo para combinar com um 2 vermelho e um 6 preto que estão na mesa.*

4 vermelho + 2 vermelho + 6 preto = neutro

Dessa forma, Thiago faz 1 ponto e finaliza sua jogada.

Caso não seja possível efetuar nenhum tipo de combinação com as cartas que tem na mão, o jogador deve escolher uma das cartas que possui na mão e colocá-la na mesa. Essa carta passará a fazer parte do estoque de cartas que estão na mesa à disposição dos jogadores. Após um jogador efetuar uma combinação ou jogar uma carta da mão na mesa, ele termina sua jogada e passa a vez para o próximo.

Ficando sem cartas: Quando ambos os jogadores ficarem sem cartas na mão, serão distribuídas novamente 3 cartas para cada jogador.

Finalizando uma rodada: Uma rodada do jogo finaliza quando não houver mais cartas no baralho e os jogadores não tiverem mais cartas na mão. Nesse momento, são contados os pontos e se iniciará a próxima rodada da partida, alternando o jogador que iniciou nessa.

Finalizando uma partida: A partida finalizará com um jogador como vencedor quando o placar de 15 pontos for atingido por algum dos jogadores.

Pontuando: A pontuação será feita ao fim de cada rodada pelo somatório dos itens representados abaixo:

1) Combinação: Cada vez que um jogador efetuar uma combinação usando uma carta da mão e cartas da mesa esse conquistará 1 ponto.

2) Mais cartas: Ao final da rodada, o jogador que tiver mais cartas conquistará 2 pontos.

3) Limpeza de mesa: No momento em que um jogador efetuar uma combinação de modo que não sobre nenhuma carta na mesa, esse ganhará 3 pontos ao invés de 1.

Fonte: acervo do autor.

6 RELATO DA EXPERIÊNCIA

No dia 16 de fevereiro de 2017 foi iniciada a aplicação da proposta didática com duas turmas de alunos do sétimo ano da escola em que trabalho. Essa escola é privada e pertence a uma rede de escolas confessionais com unidades em todas as regiões do país. Está inserida no bairro Sarandi, o maior de Porto Alegre. Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o rendimento médio dos responsáveis do domicílio desse bairro, em 2010, era de 2,64 salários mínimos[7].

Eu trabalho nessa escola desde o ano de 2014 como professor de Matemática dos anos finais do ensino fundamental. Contudo, por não ter lecionado para as turmas de sexto ano em 2016, o grupo de alunos participantes dessa pesquisa teria uma característica bastante peculiar: nunca haviam sido meus alunos.

As turmas que participaram da pesquisa eram formadas por 26 e 27 alunos. Tendo aplicado o mesmo planejamento em ambas as turmas, escolhi uma delas para a composição dos dados que sustentaram este trabalho, a qual será chamada de turma A (27 alunos). Essa turma era composta por meninos e meninas com idade média de 12 anos. Nesse conjunto de alunos, não havia estudantes com necessidades educativas especiais, sendo que um deles repetia o sétimo ano por ter sido reprovado no ano anterior (nessa mesma escola).

Entendo que, por ser a primeira vez que esse grupo de alunos estaria trabalhando comigo, eles entenderiam a postura que eu adotasse como a minha identidade profissional, independente de qual fosse a escolhida. Esses aspectos foram levados em consideração para a composição da sequência de atividades a ser preparada nessa que seria a minha segunda aplicação de proposta didática para o ensino de números relativos com alunos do sétimo ano.
Visando atender a essa organização bimestral da escola, assumi o compromisso de trabalhar com essa pesquisa por no máximo sete semanas, até o final do mês de março.

Após minha apresentação na primeira aula, conduzi minha fala para meu curso de Mestrado, meus motivos pessoais para o ingresso no Programa de Pós-graduação e as consequências que isso teria para minha vida pessoal e profissional. Expliquei que um dos momentos mais importantes nesse curso é o trabalho de conclusão e que eu estava dedicado ao processo de elaboração desse trabalho. Sem apresentar o tema, expliquei que o assunto que eu havia escolhido abrangia conteúdos do ano escolar que eles estavam cursando e que o

[7] Disponível em: <http://portoalegreemanalise.procempa.com.br/?regioes=53>. Acesso em: 4 de março de 2018.

trabalho com esse tema seria abordado no primeiro bimestre letivo (período que iria até o início de maio).

6.1 Aplicação do Jogo do Segurança e do Jogo das Tropas

Em minha breve experiência como educador, percebo que o laço mais forte no ambiente escolar condiz à relação professor-aluno. Desta forma, sabia que o primeiro contato, a primeira conversa, seria crucial para que as turmas se engajassem na pesquisa e participassem ativamente. Tal participação já começaria na aula seguinte, quando cada aluno deveria trazer para a aula dois dados e um jogo de tabuleiro de damas, xadrez (ou similar) ou algumas peças coloridas (dez de cada cor) que poderiam ser representadas por tampinhas de garrafas[8].

Essa primeira atividade seria chamada de Jogo do Segurança, no qual os alunos teriam o objetivo de gerenciar a entrada de uma festa, cuidando da variação do número de pessoas na festa, conforme explicado no capítulo anterior.

Preparei alguns conjuntos-reserva para o caso de faltar material para o início da tarefa. Contudo, isso não foi necessário, pois a grande maioria dos alunos trouxe os materiais solicitados, incluindo peças de jogos populares e conjuntos customizados a partir da pintura de tampinhas de garrafas pet. Nesse momento percebi que eu havia tido um bom primeiro contato com os alunos e pude superar meus receios quanto ao comprometimento desses estudantes para com a proposta didática que trabalharíamos nas próximas semanas.

Visando incentivar o pensamento em equipe para essa primeira atividade, pedi aos alunos que se organizassem em quartetos e que cada um pegasse seus cartões e suas peças. Nesse primeiro momento, os alunos jogariam em duplas, visando à resolução de problemas em conjunto. Sendo assim, cada conjunto de quatro alunos utilizaria um conjunto de peças e uma pilha de cartões; as peças de uma dupla representariam as entradas e as peças da outra representariam as saídas.

Cada dupla contava com dez peças da sua cor e o jogo iniciaria com quatro peças de cada cor posicionadas no centro da mesa e seis que iriam compor o estoque de reserva; escolheu-se começar com quatro peças, pois as cartas com maior número representavam a entrada ou saída de quatro pessoas. Dessa forma, o primeiro movimento nunca resultaria em um conflito por falta de peças. Um conflito seria esperado em etapas posteriores do jogo, no

[8] Havia uma expectativa minha de que metade dos alunos cumprissem a tarefa, uma vez que eles fariam duplas. Era necessário que metade da turma trouxesse o material para a execução da atividade conforme o planejamento.

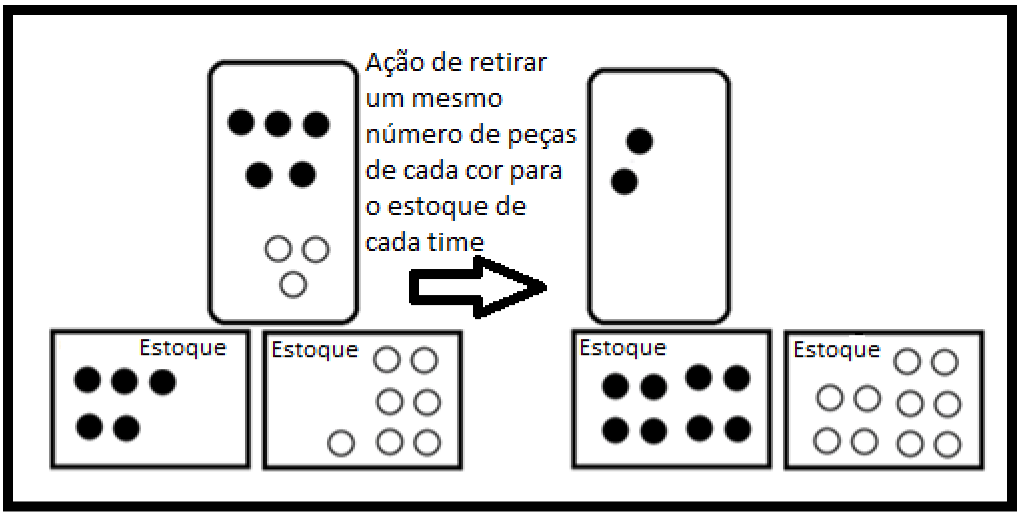
momento da falta de peças para realizar uma ação de inserção ou retirada; nessa etapa, os alunos já haveriam feito pelo menos um movimento, estando assim mais capazes de resolver a situação sem a intervenção do professor/pesquisador. É importante salientar que esse número inicial de peças na mesa e na reserva é algo arbitrário, uma vez que, havendo o mesmo número de peças de cada cor, há uma indicação de equilíbrio em relação ao estado inicial, ou seja, o número de pessoas que entraram e saíram foi o mesmo.

Expliquei aos alunos que se uma carta com o fundo preto fosse retirada da pilha, isso indicaria que o número de pessoas indicado na carta estaria deixando a casa, e caberia à dupla responsável pelas peças pretas movimentar do estoque para o centro da mesa aquela quantidade de peças, visando a representação da ação estipulada pela carta.

Meu objetivo com essa tarefa, conforme comentado anteriormente, seria a manipulação e familiarização com transformações de sentidos opostos, a serem representadas, mais tarde, por números de sinais opostos. Essa experimentação feita pelos alunos teria como objetivo prepará-los para o desenvolvimento do pensamento que os auxiliaria no entendimento futuro, quando as peças fossem substituídas por números. De acordo com a minha expectativa, o sucesso nessa tarefa seria atingido pelos alunos que conseguissem utilizar o cancelamento e/ou a compensação no momento em que começassem a faltar peças.

A Figura 10 ilustra um caso de cancelamento, em que três peças brancas e três peças pretas são retiradas do centro da mesa para repor os estoques, sem alterar a representação da variação do número de pessoas na festa.

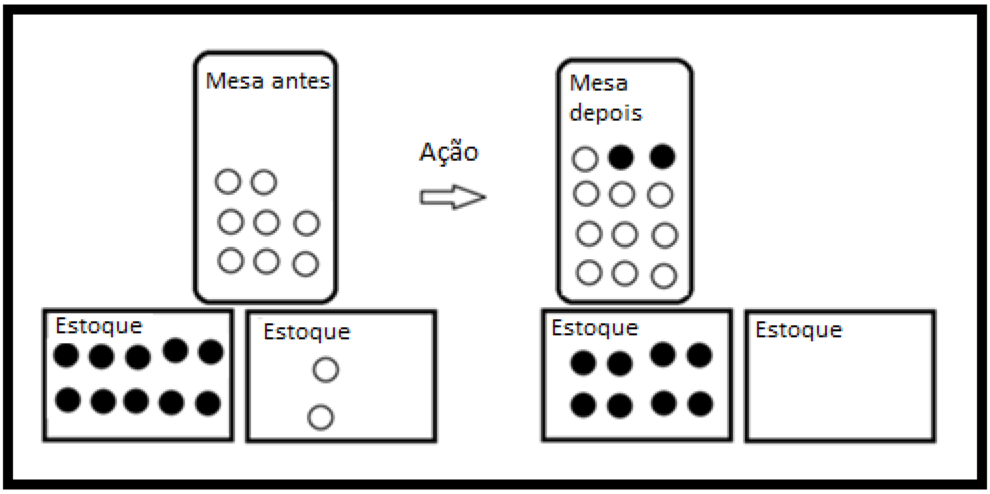
Figura 10 - Exemplo de como o cancelamento poderia fornecer mais peças brancas e pretas.



Fonte: acervo do autor.

Demorou pouco para que o conflito da falta de peças ocorresse, sendo assim, me dirigi ao primeiro grupo para ajudá-los. Antes que eu pudesse prestar um atendimento, de modo a questionar os alunos a pensarem em uma solução, todos os outros grupos já solicitavam a minha presença. Ao circular pela sala, pude ver que alguns alunos estavam realizando a tarefa de maneira bem distinta da desejada, como por exemplo, movendo as peças da outra cor na falta da possuída, conforme podemos ver na figura 11.

Figura 11 - Demonstração de procedimento realizado por aluno ao retirar uma carta com o valor quatro em favor da cor branca.



Fonte: acervo do autor.

A carta de número 4 com o fundo branco indicava que quatro pessoas iriam entrar na festa e para representar isso era preciso acrescentar quatro peças brancas. Como oito peças brancas já estavam na mesa, só havia mais duas disponíveis no estoque para o aluno movimentar. Ao invés de construir uma estratégia para recuperar peças ou representar a entrada de quatro pessoas de outro modo, o aluno simplesmente acrescentou duas peças brancas e duas peças pretas, como se a cor fosse indiferente.

Nesse momento eu precisei interromper a atividade das duplas e reexplicar a tarefa, as possibilidades de ação e o que não podia ser feito. A existência desse ocorrido em mais de um grupo me fez perceber, mais tarde, um fato que poderia comprometer todo o planejamento e expectativa que tive sobre essa atividade: o significado depositado pelos alunos sobre as peças. Vejamos a transcrição do diálogo entre o professor e um grupo no momento da falta de peças.

Aluna I: Tá sôr, é assim, se tirar a carta branca eu movo as brancas pra cá [centro da mesa] e se eu tirar preta eu movo as pretas pra cá [centro da mesa]?
Prof: Isso.
Aluna I: Ah tá, entendi.
Prof: Certo, então como tu faz para resolver se tu tirar a carta cinco branca? [numa situação em que há oito peças brancas e sete peças pretas na mesa e duas brancas e três pretas nos estoques]
Aluna J: Não tem mais pino?
Prof: Não tem mais pinos.
Aluno JG: Botando as pretas?
Prof: Por quê?
Aluna J: Por que se não tem mais, somaria mais essas aqui nas que entrou.
Aluna Y: Elas podem estar na fila esperando para entrar.

Nesse momento, é possível perceber que, para os alunos, as peças estão representando as pessoas, e não a tabulação de entradas e saídas.

Na tentativa de não interferir, respondi “mostra como tu farias”, mas depois percebi que os alunos estavam se distanciando do foco.

Aluna Y: Esses aqui (peças pretas) é os que já foram embora?
Grupo: Sim.
Aluna Y: Eu ia voltar com esses aqui para a festa. (adicionando pretas na seção das peças brancas)
Aluna I: Ah, eu não entendi sôr.

A esta altura da aula, pude perceber que todos os grupos estavam tendo esse tipo de dificuldades, que o problema estava na gênese da proposta e que se eu não interviesse, nenhum grupo alcançaria nenhum resultado.

Prof: Desde que tu começou a cuidar da festa, quantas pessoas aumentou ou diminuiu na festa?
Aluna J: Oito chegaram e sete saíram.
Prof: Isso. Então, aumentou ou diminuiu?
Grupo: Diminuiu.
Prof: Então como vocês fazem para representar que cinco pessoas entraram?
Grupo não conseguiu.
Prof: Se cinco pessoas chegaram, o número de pessoas na festa tem que aumentar ou diminuir?
Grupo: Aumentar.
Prof: Isso. Então como que tu representa agora que tem que aumentar cinco.
Aluna J: Usaria essas aqui. [peças pretas]
Aluna I: Tem que usar as que já saíram, por que as brancas não têm suficiente.
Aluna J: Move pretas pra cá.
Prof: Mas não pode, aí é o espaço das brancas.

Aluna J: Mas não tem mais brancas!
Prof: Esse é o obstáculo que eu quero que vocês pensem e superem. Como tu consegue compensar com os pinos sendo que tu não tem mais pinos?

Após alguns minutos de diálogo com esse grupo, percebi que os demais já estavam dispersos por não serem atendidos em suas dificuldades. Encerrei o diálogo pedindo que eles continuassem pensando, mesmo sem saber se conseguiriam resolver a questão.

Eu disse para a turma: “Certamente esse não é um jogo de apenas mover conforme as cartas, ou eu não estaria passando isso para vocês aprenderem algo novo, bolem uma estratégia”. Em geral, precisei ajudar cada grupo uma vez, explicando que as peças não representavam as pessoas, serviam principalmente para indicar a variação entre as duas cores e, com isso, informar se em cada instante haviam ocorrido mais entradas ou saídas em comparação ao início do monitoramento da festa. A partir daí, cada um estabeleceu seu leque de recursos para resolver as situações imprevistas. Depois de algum tempo de exploração, pude perceber que, dos seis grupos, cinco moveram as peças da outra cor no sentido contrário (na falta de peças), o que definimos como compensação, e um usou a estratégia do cancelamento para renovar os estoques de peças de ambas as cores, movendo o mesmo número de peças de cada cor para a reserva. Nesse momento a aula de dois períodos de 50 minutos estava acabando.

Analisando posteriormente o ocorrido, percebi dois problemas no que houve em aula. Primeiro, os alunos associaram os peões às pessoas, e não às mudanças “entrada/saída”. Isso pareceu limitar muito o seu pensamento. Não cogitaram que uma situação envolvendo cinco peças pretas e duas brancas pudesse ser considerada equivalente a uma com nove pretas e seis brancas, ou seja, que a diferença entre as cores é o mais importante nesse jogo. Dessa forma, talvez nunca pensassem em tirar o mesmo número de peças das duas cores para solucionar a falta de peças, pois não estavam preocupados em representar a diferença entre entradas e saídas. Segundo, em decorrência ao primeiro, não ficou clara a possibilidade de executar a ação de uma carta através do movimento de retorno de peças para o estoque; os alunos entenderam a ação de movimentar peças como algo que seria estritamente feito no sentido do estoque para o centro da mesa. O que acarretou em ninguém tendo percebido, nesse primeiro momento, que a carta preta de valor 2, correspondente à saída de duas pessoas, poderia ser representada pela devolução de duas peças brancas para o estoque, isto é, pela redução na representação de duas entradas. Alguns alunos perceberam que isso era possível ao eu reiterar que as peças não representavam as pessoas. Na verdade, as peças por si só, analisadas de maneira isolada, não possuíam significado. As mesmas passavam a possuir sentido quando analisadas sob uma comparação com as peças da outra cor, indicando mais entradas do que saídas, ou vice-versa, e desse modo a variação do número de pessoas na festa.

Na aula seguinte eu aplicaria um questionário (Quadro 5) sobre as percepções dos alunos em relação a essa primeira atividade, por meio do qual eu poderia perceber quantos e quais alunos perceberam e aplicaram os recursos de cancelamento e compensação. Como eu teria novamente períodos duplos, permiti uma nova oportunidade para que eles jogassem – desta vez, em duplas, um contra um – permitindo relembrar as conclusões já obtidas anteriormente.

Quadro 5 – Primeiro questionário proposto aos alunos.

Folha 1 – Conclusões sobre o Jogo do Segurança

1. Você gostou do jogo? Por quê?

<u>Sobre a Fase 1:</u>

2. Se as peças pretas acabarem, isso quer dizer que ninguém mais pode sair?

3. O que você fez quando acabaram suas peças?

4. Cite mais coisa(s) que você percebeu nesse jogo:

Fonte: acervo do autor.

Circulei pelos grupos e vi que alguns alunos já não estavam tão motivados com a atividade. Ninguém apresentou dificuldades em resolver alguma situação. Assim que eles terminaram de responder a lista, cancelei a aplicação da segunda fase do Jogo do Segurança e iniciamos os procedimentos para a nova tarefa exploratória, bastante similar à primeira.

Para evitar muitas dúvidas, busquei iniciar explicando bem como funcionaria esse segundo jogo, o Jogo das Tropas, em que cada jogador deveria controlar uma tropa, representada pelas peças, e o objetivo seria vencer as tropas inimigas em quantidade de peças, ao final de dez lançamentos de dados para cada jogador. Nesse jogo, o resultado do dado dos números passa a representar a mesma ação (aumento ou retirada de peças) para cada um dos jogadores. Dessa forma, qualquer jogador que obtiver o resultado “+3” no dado aumentará suas tropas em três peças. Diferentemente do jogo anterior, em que as peças representavam variações (entrada ou saída), agora cada peão representaria um soldado, e inclusive o nome do jogo ajudaria a compreender que cada jogador representaria algo com o sentido contrário ao outro.

Pensar nos peões como soldados que defendessem objetivos contrários foi uma maneira de induzir que uma compensação poderia ser feita entre peças de cores distintas, no sentido de um cancelamento, uma anulação. Entretanto, quando faltaram peças para movimentarem, não foi natural movimentar peões do oponente. Dessa forma, eu estive presente em praticamente todos os grupos, quando parei a atividade e convidei os alunos a pensarem na situação, fazendo perguntas como as que seguem.

Prof: O que você acha que seria justo fazer se você não consegue reduzir em dois seus peões?
Prof: (Para o oponente): O que você acha que seria justo se ele não consegue reduzir em dois os peões dele?

A ideia seria permitir que os estudantes vissem que, se não fosse possível tirar duas peças da sua cor, poderiam aumentar em duas unidades o número de peças na mesma cor do oponente. Essa estratégia deu certo para três dos seis grupos. No quarto grupo, eu perguntei:

Prof: O que você faria para conservar a relação entre as duas cores e mais o indicado no dado?

Essa pergunta foi o bastante para pensarem em dar o que faltava para o oponente, isto é, mobilizar a relação de equivalência entre reduzir o seu número de peças e aumentar o número de peças do oponente. Para o quinto grupo, a estratégia foi parecida.

O sexto grupo não conseguiu pensar em nenhuma estratégia e disse para guardarmos “na cabeça” o saldo devedor no momento em que eles precisariam fazer, por exemplo, uma adição e faltaram peças.

Eu disse que eles tinham que resolver o problema no momento através de uma representação com as peças, e não podiam usar aquela estratégia de “deixar para depois”, pois se eu permitisse isso, entendi que eles a usariam em todos os momentos em que houvesse uma *crise* e não buscariam uma estratégia para a superação da mesma, o que era o principal motivo da proposta do jogo para eles.

Quando vi que esses alunos não estavam conseguindo resolver a situação, parti para a estratégia de provocá-los a constatar que a diferença do momento deveria ser conservada. Deste modo, poderíamos fazer a retirada do mesmo número de peças de ambos os lados. No momento, havia quatro peças brancas e uma peça preta e o jogador com as peças pretas tirou o número -3 no dado, ou seja, ele deveria retirar três das suas peças e devolver para o estoque. Mas isso não era possível, tendo em vista que possuía apenas uma na mesa. Por outro lado, a diferença, que no momento era de 3 em favor dos brancos, deveria ser modificada de modo a aumentar a desvantagem em três unidades para a equipe das peças pretas. O grupo concordou que a diferença final deveria ser de 6 em favor dos brancos, mas não conseguiram representar isso usando os peões. Eu perguntei nesse momento se eles podiam tirar um peão de cada lado, mas eles não se convenceram de que era algo possível ou não entenderam com qual objetivo eu estava propondo isso. Eu, por minha vez, disse isso para induzi-los a pensarem por essa ótica.

Quando vi que eles não se convenceram disso, convidei o aluno D de outro grupo para ajudar a resolver a situação. Ele brevemente respondeu: “tira um preto e aumenta dois brancos”. Ao perguntar o motivo de valer aumentar dois brancos, ele disse: “porque se tu não pode tirar do teu é justo aumentar o do outro”, uma aplicação da estratégia da compensação. A aluna AL disse que tinha pensado nisso, mas não conseguiu explicar. O grupo concordou com essa lógica e conseguiu jogar sem mais complicações.

Faltando 15 minutos para terminar a aula, propus eles jogarem com o *dado das operações*, ficando combinado que, quando a operação sorteada fosse a subtração, o efeito no jogo seria o inverso do que estava sendo feito antes, enquanto para a soma o efeito seria o mesmo.

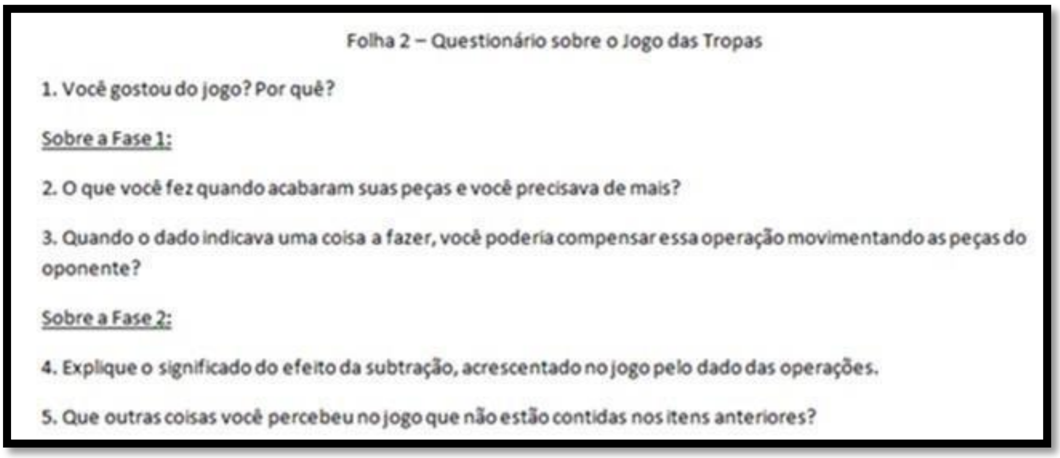
Na falta de peões, os alunos adotaram a estratégia de fazer a operação inversa na reserva do oponente. Para os alunos que não conseguiram superar esse obstáculo, desenvolvi uma estratégia de diálogo com as perguntas abaixo:

Prof: Se tu tem 0 e perde 1, a vantagem do teu time tem que aumentar ou diminuir? Caso o aluno dissesse que diminuísse para si ou aumentasse para o outro, eu faria a pergunta.
Prof: E como eu faço isso se eu não tenho peões para tirar?
Ao que a aluna I respondeu: Aumentar em um para o outro.

Essas perguntas foram suficientes para conduzir os alunos a pensarem em como superar a falta de peças. Poucos trabalharam com a ideia do cancelamento, isto é, adicionando ou removendo uma mesma quantidade de ambos os jogadores, através de uma equivalência, para aumentar seu estoque.

Nenhum grupo teve problemas nessa fase do jogo. Vi que muitos deles estavam apresentando uma impressão de saturação com esse tipo de exploração (dois jogos utilizados até o momento). Concluí que era o momento de avançar para o próximo jogo. Pensei que eu precisava passar alguma atividade atrativa ou eu poderia perder a participação dos alunos e seu engajamento com a pesquisa. Dessa forma, planejei antecipar o Banco Imobiliário de Porto Alegre para a próxima aula. Entreguei o questionário 2 (Quadro 6) que eles preencheram em casa e me devolveram na aula seguinte.

Quadro 6 - Segundo questionário proposto aos alunos.



Folha 2 – Questionário sobre o Jogo das Tropas

1. Você gostou do jogo? Por quê?

Sobre a Fase 1:

2. O que você fez quando acabaram suas peças e você precisava de mais?

3. Quando o dado indicava uma coisa a fazer, você poderia compensar essa operação movimentando as peças do oponente?

Sobre a Fase 2:

4. Explique o significado do efeito da subtração, acrescentado no jogo pelo dado das operações.

5. Que outras coisas você percebeu no jogo que não estão contidas nos itens anteriores?

Fonte: acervo do autor.

Nas respostas dos alunos a esse questionário, pude ver que muitos alegaram gostar mais desse jogo, pois ele era menos complicado do que o outro. Contudo, as respostas à questão 2 indicaram que poucos alunos entenderam o processo de movimentar as peças do outro time como operação equivalente. Já a inserção do segundo dado pareceu ser muito breve. Seguem algumas resoluções de alguns alunos à questão dois:

Aluno YC: “Agente” jogou os dados “de novo”.
Aluna GA: Nada, porque acabaram.
Aluna IM: Reiniciei o jogo.
Aluno L: Tira as minhas e coloco para o adversário.

Essas respostas, ao final da aplicação deste jogo, me levam a concluir que muitos alunos – mesmo após as minhas intervenções – desenvolveram a atividade de maneira distinta das minhas expectativas. Ao aluno se deparar com uma *crise*, eu esperava que buscasse superar esse imprevisto, através de um procedimento que ele mesmo elaborasse. Entretanto, muitas vezes os alunos optaram por reiniciar o jogo, sem enfrentar a situação.

6.2 Aplicação do Banco Imobiliário de Porto Alegre

Em meus testes com materiais didáticos antes da definição da proposta de trabalho, percebi que a inclusão de “dinheiro negativo” no conhecido jogo de compra e venda seria uma possibilidade de aprendizagem de números relativos. Todo o processo de construção de lógica que estaria parecendo “forçada” até o momento poderia acontecer de maneira mais natural. Eu estava decidido, sem ressalvas, a destinar várias aulas para essa atividade.

A primeira aula destinada à exploração do jogo iniciou com a explicação das regras e com a preparação do jogo (recorte, desenho dos personagens). Abaixo seguem alguns relatos coletados durante as aulas propostas ao jogo Banco Imobiliário de Porto Alegre.

No grupo 1, o aluno I informa aos colegas que o banco não possui mais notas de R$ 1A. Em resposta a isso, o aluno N sugere ao aluno K trocar suas cinco notas de R$ 1A por uma nota de R$ 5A. O que mostra que a operacionalização e familiarização com o jogo se deu de maneira bastante mais rápida do que com os jogos anteriores, em que foram necessárias discussões com a turma.

No grupo 2, a aluna AL pergunta ao aluno L se ele está com alguma dívida ao passar pelo ponto de partida, momento em que este receberia R$ 10A. Então o aluno L entregou R$ 10V para o banco. Nesse caso, o aluno L percebeu que poderia usar a compensação para se livrar de R$ 10V, ao invés de receber 10 azuis.

Novamente no grupo 1, o aluno K diz:

Aluno K: Tenho que te dar R$ 4A. Pega R$ 4A do banco e me dá R$ 4V que eu não tenho nada.

Aqui vemos o aluno K utilizando uma ação que indica que ele já domina a estratégia da compensação. Seu breve comentário indica também que, além de compreender o que está sendo feito, espera que o colega já esteja também a essa altura de entendimento do jogo.

No grupo 3, a aluna V tinha R$ 10A e precisava entregar R$ 18A ao banco. Nesse grupo, o banco estava sendo administrado por todos os colegas simultaneamente. A aluna V, ao ver a ação que equivaleria à sua jogada, sem pedir ajuda para alguém e sem se atrapalhar no cálculo matemático necessário, resolveu sua vez ao trocar as notas com o banco. Entregou seu dinheiro e pegou R$ 8V do banco, realizando uma estratégia de compensação que equivale a $(+10) + (-18) = (+10) + (-10) + (-8) = (-8)$.

Nesse jogo, a estratégia de compensação foi mais facilmente atingida pelos alunos do que nos jogos anteriores. Atribuo esse fato à noção intuitiva que bens e dívidas podem evocar no aluno, exemplificando as duas naturezas de um número relativo. Na conferência vi que o grupo estava usando dois dados, o que gerou voltas muito rápidas pelo tabuleiro e muitos acessos ao bônus do ponto de partida, o que resultou no término do dinheiro do banco.

6.3 Primeiras impressões sobre os jogos

Após um total de seis períodos de 50 minutos em que os alunos puderam jogar o Banco Imobiliário de Porto Alegre, percebi que todas as situações práticas que o jogo poderia proporcionar aos alunos estavam se tornando repetitivas. Sendo assim, decidi propor uma atividade (Quadro 7) em que eles pudessem expor seu pensamento através de respostas a perguntas que questionassem a necessidade/validade de uma eventual expansão nos números já conhecidos e, caso fosse verdade, como esses novos números se comportariam (utilidade, ordenamento, possibilidade de operações, etc).

Quadro 7 – Terceiro questionário proposto aos alunos.

Atividade 3 – Pensando sobre a noção de número

1) Existe um número maior que todos os outros?

2) Existe um número menor que todos os outros?

3) Existe um número que somado a 42 resulte em 109? Se sim, qual é?

4) Existe um número que somado a 5 resulte em zero? Se sim, qual é?

5) Existe um número que somado a 7 resulte em 4? Se sim, qual é?

6) Que nome você daria para os tipos de números que poderiam aparecer nas questões 4 e 5?

7) É possível somar esses números? Dê um exemplo.

Fonte: acervo do autor.

Dos 24 alunos que entregaram a atividade na data estipulada, 19 responderam as questões 2, 4 e 5 de maneira a não considerar números menores do que zero. Enquanto alguns alunos se limitaram a descrever seus pontos de vista com *sim* ou *não*, outros expuseram comentários esperados de alguém que nunca estudou os números relativos.

Aluno D:

Resposta à questão dois *(existe um número menor que todos os outros?)*: “Sim o numero 0 não tem um menor.”
Resposta à questão quatro *(existe um número que somado a 5 resulte em zero?)*: “Não, só se fosse subtração.”
Resposta à questão cinco *(existe um número que somado a 7 resulte em 4?)*: “Não. Tem que ser subtração daí dava. Ex: 7 – 3 = 4”.

A partir das respostas desse aluno, é possível perceber que nem todos alunos passaram a reconhecer números negativos simplesmente após terem jogado. Minha expectativa era que os jogos despertassem na maioria dos alunos a necessidade de validação de números menores que zero, contudo, a maioria da turma não respondeu dessa forma, conforme representado também nas respostas da aluna AL.

Aluna AL:

Resposta à questão dois *(existe um número menor que todos os outros?)*: "Que eu saiba o menor número é o 0. Se essa não é a resposta eu não sei :("
Resposta à questão quatro *(existe um número que somado a 5 resulte em zero?)*: "5 somado a qualquer número dará de 5 para cima. Pois é adição."
Resposta à questão cinco *(existe um número que somado a 7 resulte em 4?)*: 7 somado a qualquer número dará de 7 p/ cima. Pois é adição.

Para esses alunos, as duas questões finais pareceram confusas. Durante a execução da atividade, eu informei a turma de que tais questões estariam relacionadas às respostas dos itens anteriores e que, dependendo do que tivessem respondido antes, poderiam deixar alguns itens em branco.

Quanto aos poucos alunos que responderam de maneira afirmativa esses itens em destaque, pouca explicação foi dada, sendo apresentadas respostas sucintas.

Aluno IV:

Resposta à questão dois *(existe um número menor que todos os outros?): "* Não, não sei explicar muito bem, mas tenho quase certeza que vai ter numeros como -1 , -2 , -3 , etc"
Resposta à questão quatro *(existe um número que somado a 5 resulte em zero?)*: "Sim, -0,5"
Resposta à questão cinco *(existe um número que somado a 7 resulte em 4?)*: "-3"
Resposta à questão seis *(que nome você daria para os tipos de números que poderiam aparecer nas questões 4 e 5?)*: "Pra baixo"
Resposta à questão sete *(É possível somar esses números)*: "Sim, pensando"

Aluno JG:

Resposta à questão dois *(existe um número menor que todos os outros?):* "Não"
Resposta à questão quatro *(existe um número que somado a 5 resulte em zero?)*: "Sim, -5"
Resposta à questão cinco *(existe um número que somado a 7 resulte em 4?)*: "Sim, -3"
Resposta à questão seis *(que nome você daria para os tipos de números que poderiam aparecer nas questões 4 e 5?)*: "Menos cinco, menos três"
Resposta à questão sete *(É possível somar esses números)*: "Sim, $\begin{array}{r} -5 \\ +\underline{-3} \\ -8 \end{array}$ "

É interessante que os alunos tenham representado os números negativos de maneira correta, precedidos pelo sinal, mesmo sem nenhuma discussão sobre isso ter sido feita em aula. Porém é difícil avaliar o quanto que o ato de jogar auxiliou esses estudantes a responderem de maneira correta.

Confesso que nesse ponto eu esperava que os alunos, em algum momento, recorressem às três atividades práticas desenvolvidas (jogos) para argumentar seus pontos de vista. O que de certa forma estaria refletido nessa terceira atividade, uma vez que várias perguntas visavam direcionar a uma expansão dos naturais. Como tal objetivo não foi atingido, no segundo período dessa aula propus no quadro algumas situações com referências ao cotidiano das pessoas em que parece haver a necessidade de números menores do que zero.

6.4 Explorando situações com referência ao cotidiano

Com a proposição de problemas expressos por enunciados verbais, busquei abordar o assunto por outro ponto de vista. É importante destacar que, em nenhum momento até então, a nomenclatura “Número Negativo” ou qualquer alusão a números menores que zero fora utilizada. Os jogos foram explorados sem nenhuma generalização matemática, visando permitir um ambiente de reflexões sem influências externas. O Quadro 8[9] apresenta o conjunto de problemas apresentados aos alunos.

[9] Com respeito ao Problema 4, foi escolhido usar o número 0 para a coluna Assists a fim de evitar algum tipo de dificuldade na interpretação dos sentidos opostos entre as pontuações de Kills e Deaths. É comum representar os melhores desempenhos nesse tipo de jogo através do quociente entre Kills e Deaths, contudo, combinei com os alunos que estaríamos interessados na diferença entre esses escores.

Quadro 8 - Problemas com referências a contextos não escolares propostos aos alunos.

Problema 1: Um submarino está a uma profundidade de 70 m quando submerge 50 m. Neste momento, a que distância ele fica de um avião que voa acima dele, a 600 m de altura?

Problema 2: Em Olso a temperatura está 12°C quando começa a esfriar 2°C a cada hora. Diga a temperatura na cidade após:

a) 2 horas;

b) 6 horas;

c) Como ficará a temperatura após 6 horas?

Problema 3: Mohammed nasceu no ano 18 a.C. e morreu no ano 50 d.C.. Quantos anos ele viveu? E seu avô que nasceu em 80 a.C. e morreu em 33 a.C.?

Problema 4: Em uma partida online do jogo eletrônico League of Legends o placar final ficou:

Nickname:	Kills:	Deaths:	Assists:
FrED	7	2	0
Caverão	4	4	0
Maior Feed	1	6	0
J.Osé	9	8	0
Boizão	11	12	0

Com base nisso, responda:

a) Quem foi o melhor?

b) Quem foi o pior?

c) Qual foi o saldo de cada um?

Problema 5: Tenho R$ 10 e quando recebo R$ 14, compro no cartão de crédito um produto que custa R$ 37. Em seguida vendo um CD de músicas para um amigo por R$ 18. Como meu saldo pessoal ficará?

Fonte: acervo do autor.

De modo geral, a turma resolveu com facilidade as questões, o que de certo modo foi algo contrário às minhas expectativas. Mesmo as respostas da atividade anterior negligenciando a existência dos números negativos, como o fato de a maioria dos alunos dizerem que não há números menores que zero, os alunos que me mostraram o caderno após a execução da atividade indicaram que a aceitação de tal conjunto numérico estava pronta para acontecer, alguns apresentando as respostas inclusive com o sinal de menos antes do número.

Como eles realizaram essa atividade em duplas e trios, os poucos que já haviam aceitado a existência de números menores que zero convenceram os demais de que é razoável apontar esses candidatos para a resolução de perguntas como as propostas acima.

Durante a correção da atividade, comentei que certas situações implicariam em uma necessidade de se expandir o conjunto dos números conhecidos, aceitando números menores que zero. Um número desse tipo seria definido como "*um número precedido por um traço. Geralmente entre parênteses. O número 10 negativo é escrito como (-10) e é lido como "menos dez""*.

No início da aula seguinte, iniciei retomando a possibilidade de agora os números poderem ser maiores que zero, denominados positivos, ou menores que zero, denominados negativos. Que o zero ainda seria chamado de elemento neutro e que a identidade dos demais números estaria relacionada com o zero. Discuti ainda que haveria uma equivalência entre os números já conhecidos (naturais, decimais e frações) com os positivos e que os opostos desses números seriam chamados de números negativos. Os números positivos, negativos e o zero seriam denominados números relativos.

Comentei que podemos atribuir aos números relativos diversos significados, dentre os quais o de relação ou posição relativa e o de transformação. Esses significados não precisariam ser decorados, mas estariam presentes nos problemas que estudaríamos em aula.

Dentre os conceitos explorados nessa aula, destaco: a ideia de ordem, representada por meio da reta numérica a ideia de valor absoluto, apresentada aos alunos como a distância do número até o zero; e a ideia de número oposto, o qual corresponde ao elemento simétrico a determinado número em relação ao elemento neutro.[10]

Restando ainda meio período nessa aula, propus no quadro um exercício com alguns cálculos, conforme o Quadro 9.

Quadro 9 - Cálculos propostos em aula.

1) Calcule:

a) $(+19) + (-4) =$

b) $(+12) + (-20) =$

c) $(-4) + (-1) =$

d) $(-13) + (+17) =$

e) $(-3) + (-7) =$

f) $(+4) + (-15) + (-17) + (-5) =$

Fonte: Acervo do autor.

[10] Em minha experiência anterior, sugeri aos alunos que pensassem em um esquema para expressar os números relativos, satisfazendo o conceito de ordem, a fim de fazer uma votação com a turma para escolher qual assumiríamos em nossas aulas. Concluí posteriormente que seria melhor se os alunos utilizassem o esquema mais comumente presente em materiais didáticos.

Entendo que esses cálculos exemplificam o tipo de problema mais básico do campo aditivo, que é a composição de duas transformações. Contudo, o meu objetivo com eles foi atender minha curiosidade a respeito do quanto os jogos poderiam influenciar o pensamento de uma operação com números que praticamente não haviam sido formalizados, assim como para que eles já se familiarizassem com a escrita dos números relativos. As condições de trabalho para essa atividade foram tão rústicas para os alunos que eu simplesmente propus esses cálculos sem saber o que eles responderiam. O único combinado é que eles poderiam ir me mostrando o caderno e eu indicaria os itens que estavam errados com simples indicações, para que eles pudessem analisar novamente.

Alguns alunos resolveram os cálculos sozinhos corretamente ou com alguns equívocos operatórios, como dizer que 19 – 4 = 16, enquanto outros apresentaram alguns erros ou não conseguiram resolver os itens. Por exemplo, o aluno R resolveu o item *a* corretamente, mas não conseguiu resolver o item *b*, pois estava escrevendo o 12 na linha de cima ao armar o algoritmo e fazendo a soma entre os módulos dos dois números, obtendo como resposta -32.

O aluno E não participou das primeiras aulas de exploração do jogo e teve maiores dificuldades, como pode ser visto no diálogo abaixo acerca do item *c*.

Prof: Tenho (-4) e (-1), então fico com?
Aluno E: -3
Prof: Devo 4 para um amigo e 1 para outro, como estou?
E: Não sei.
Prof: Quem é maior, (-4) ou (-3)?
Aluno E: (-4).
Prof: Quem está mais perto do zero, (-4) ou (-3)?
Aluno E: (-3).
Prof. Quem é maior?
Aluno E: (-3).
Prof: Tenho (-4) e (-1), então fico com?
Aluno E. (-5).

Nesse diálogo foi possível verificar um dos maiores obstáculos, para os alunos, às operações com os relativos, segundo González e outros (1990). Esse obstáculo está relacionado à atribuição de significado para o sinal "-" . Quando o aluno afirma que o número resultante da operação (-4) + (-1) é (-3), está buscando uma diferença. O que é um equívoco, pois ambos os números são negativos e não devem se anular. Dessa forma, entendo que o aluno se apropriou do sinal que faz parte do nome de cada número para decidir efetuar uma subtração. Em alguns momentos de minha trajetória ignorei o fato de o sinal, em uma expressão numérica, poder possuir diversos significados – por exemplo, o sinal “-“ pode indicar uma subtração, o nome do número ou assinalar uma referência ao oposto do número que é precedido pelo sinal. Hoje em dia, procuro dedicar um tempo a discutir esse aspecto com os alunos.

Já o aluno N, após apresentar respostas erradas (como -23 no item *a*), retornou ao professor após pensar sobre um item errado.

Aluno N: Ficou positivo pelo sinal do maior e faço a diferença?
Prof. Porquê?
Aluno N: Porque se eu tenho mais dinheiro azul que vermelho estou positivo.
Prof. Isso.
Aluno N: Muito fácil.

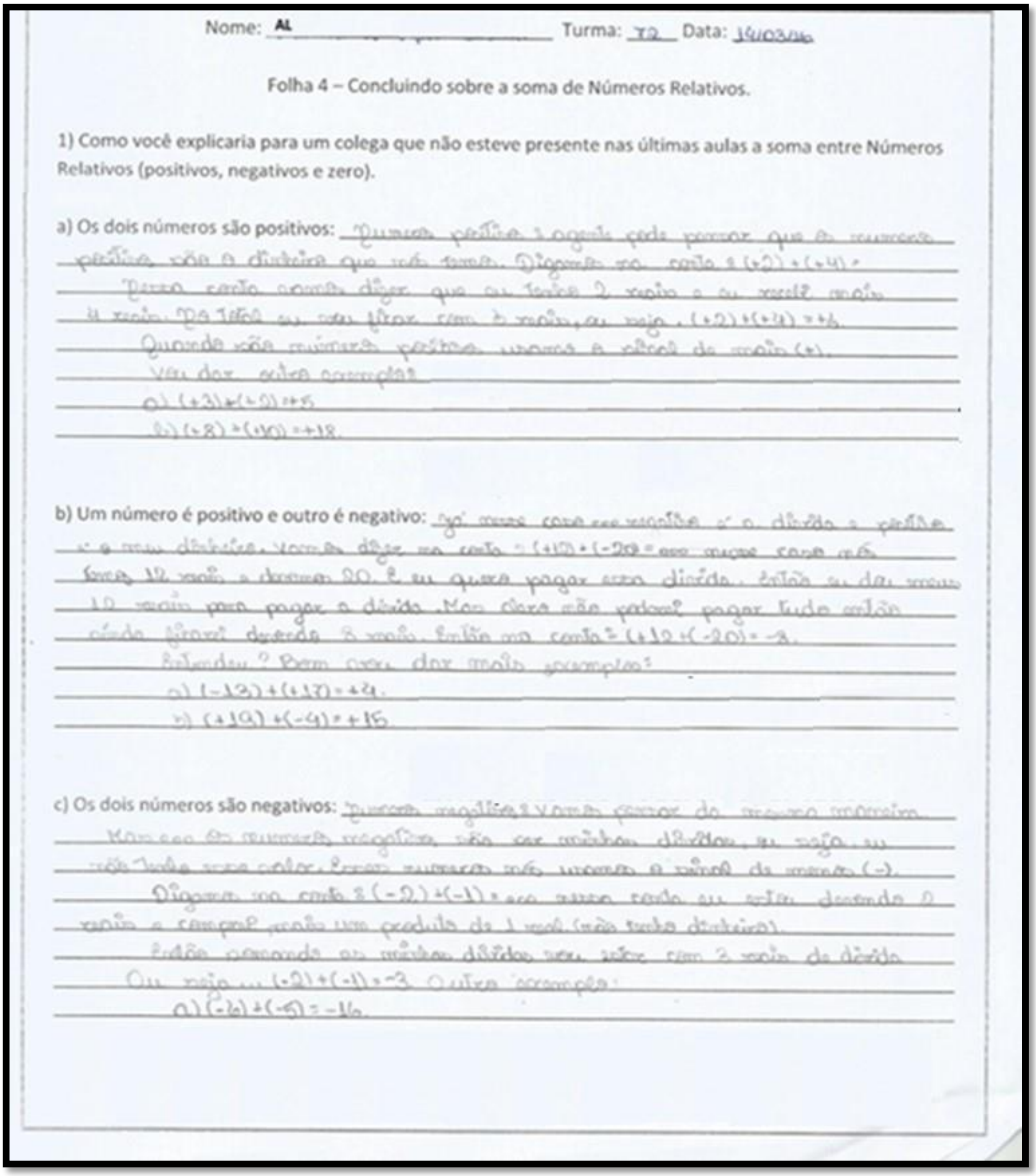
Dos 27 alunos da turma, 14 conseguiram mostrar o desenvolvimento correto antes do final da aula (25 minutos de atividade). Esse foi o primeiro momento de cálculos com números relativos e boa parte da turma conseguiu resolver esses cálculos. É importante citar que o professor não explicou nada em aula acerca de como efetuar as operações, só sugeriu que eles pensassem e não desistissem quando mostrassem seu pensamento e esse estivesse errado.

6.5 Impressões sobre os números relativos

A abordagem dos números relativos da proposta didática foi norteada pela preocupação em possibilitar situações e experiências para que os alunos estivessem aptos a concluir a respeito ou que a conclusão que seria construída fizesse sentido para os mesmos. Desta forma, boa parte do que foi feito até aqui teve como objetivo caracterizar a insuficiência do conjunto dos números até então conhecidos, definir uma identidade a esses novos números e possibilitar uma experiência com as operações.

Sendo assim, propus aos alunos a atividade 4, na qual eles poderiam descrever aquilo que entenderam sobre a soma entre positivos e negativos. Os alunos foram incentivados a escrever com uma linguagem simples, que fosse suficiente para o entendimento de um possível colega que tivesse faltado à aula. Essa foi a redação da proposta escolhida por mim para tentar captar a lógica do pensamento dos alunos, sem que os mesmos ficassem se preocupando com palavras sofisticadas ou rigor matemático em seus textos. Também disse a eles que, para se explicar algo na matemática, exemplos são uma boa ideia. A redação da atividade pode ser acompanhada nas Figuras 12 e 13.

Figura 12 - Resolução da aluna AL ao quarto questionário.



Nome: AL Turma: Data:

Folha 4 – Concluindo sobre a soma de Números Relativos.

1) Como você explicaria para um colega que não esteve presente nas últimas aulas a soma entre Números Relativos (positivos, negativos e zero).

a) Os dois números são positivos:

b) Um número é positivo e outro é negativo:

c) Os dois números são negativos:

Fonte: Acervo do autor.

Transcrição das respostas da aluna:

a) Números positivos: agente pode pensar que os números positivos são o dinheiro que nós temos. Digamos que na conta (+2) + (+4) =

Nessa conta vamos dizer que eu tenho 2 reais e eu recebi mais 4 reais. No total eu vou ficar com seis reais, ou seja, (+2) + (+4) = +6.

Quando são números positivos, usamos o sinal de (+).

Vou dar outro exemplo:

a) (+3) + (+5) = +8

b) (+8) + (+10) = +18

b) Já nesse caso ... negativo é a dívida e positivo é o dinheiro. Vamos dizer que na conta (+12) + (-20) = ... nesse caso nós temos 12 reais e devemos 20. E eu quero pagar essa dívida. Então eu dou os meus 12 reais para pagar a dívida. Mas claro que não poderei pagar tudo, então ainda ficarei devendo 8 reais. Então na conta (+12) + (-20) = -8.

Entendeu? Bom vou dar mais exemplos:

a) (-13) + (+17) = +4

b) (+19) + (-4) = +15

c) Números negativos: Vamos pensar da mesma maneira, mas ... os números negativos são as minhas dívidas, ou seja, eu não tenho esse valor. Esses números nós usamos o sinal de menos (-).

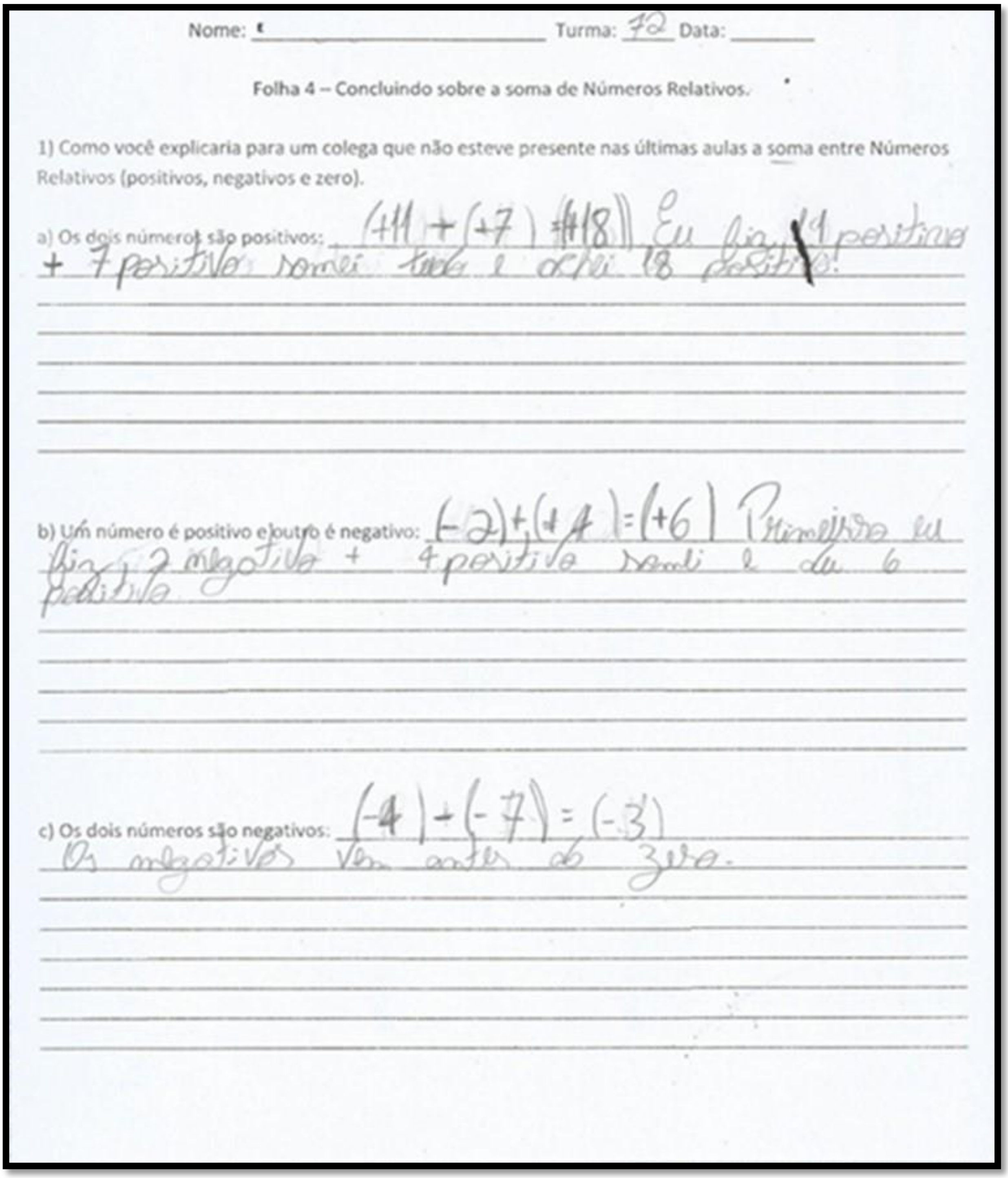
Digamos na conta: (-2) + (-1) = ... nessa conta eu estou devendo 2 reais e compro mais um produto de 1 real (não tenho dinheiro). Então somando as minhas dívidas, eu vou estar com 3 reais de dívida.

Ou seja ... (-2) + (-1) = -3. Outro exemplo:

a) (-10) + (-5) = -15

A aluna AL, assim como outros estudantes, utilizou uma referência ao universo dos jogos para escrever suas explicações. Escolhi a transcrição dela por entender que cumpriu bem a tarefa de escrever suas respostas em uma linguagem que pudesse ser entendida por um colega que não foi à aula, conforme o enunciado solicitava.

Figura 13 - Resolução do aluno E para o quarto questionário.


Nome: E Turma: 72 Data:

Folha 4 – Concluindo sobre a soma de Números Relativos.

1) Como você explicaria para um colega que não esteve presente nas últimas aulas a soma entre Números Relativos (positivos, negativos e zero).

a) Os dois números são positivos: (+11) + (+7) = (+18) Eu fiz 11 positivo + 7 positivo somei tudo e achei 18 positivo!

b) Um número é positivo e outro é negativo: (-2) + (+4) = (+6) Primeiro eu fiz, 2 negativo + 4 positivo somei e deu 6 positivo

c) Os dois números são negativos: (-4) + (-7) = (-3) Os negativos vem antes do zero.

Fonte: Acervo do autor.

Transcrição das respostas do aluno:

a) (+11) + (+7) = (+18) Eu fiz 11 positivo + 7 positivo somei tudo e achei 18 positivo.
b) (-2) + (+4) = (+6) Primeiro eu fiz, 2 negativo + 4 positivo somei e deu 6 positivo.
c) (-4) + (-7) = (-3) Os negativos vem antes do zero.

A partir das figuras 12 e 13, podemos ver que nem todos os alunos haviam alcançado as conclusões esperadas.

A Figura 13 mostra as respostas do aluno E. É difícil entender a lógica do aluno por meio da linguagem que ele utiliza. No segundo item ele afirma ter feito a soma (-2) + (+4), encontrando +6. É possível que sua lógica tenha envolvido fazer a soma e manter o sinal do número de maior módulo; ou considerar que o resultado deveria ser positivo, por ter identificado dois sinais (+) na expressão. Para o terceiro item, a mesma lógica não é utilizada, uma vez que ambos os números são menores que zero e ele decide fazer a diferença entre seus módulos, desconsiderando os sinais dos números.

Um dos objetivos de pedir que os alunos explicassem com uma linguagem que usariam com os colegas era o de que eles pudessem desenvolver seus conhecimentos matemáticos por meio do exercício da organização e comunicação de ideias. Contudo, muitos alunos responderam as conclusões de maneira equivocada, mesmo em momentos anteriores tendo respondido a cálculos de maneira correta. Isso me leva a conjecturar que o escore de acertos de cálculos não é um bom termômetro para a aprendizagem.

6.6 Aplicação do Jogo Escova do Zero

Na aula seguinte a essa tarefa, estabelecemos no quadro o ordenamento dos números sobre a reta numérica posicionando o zero no centro. Comentei com eles que os cálculos poderiam ser vistos como uma sobre a reta, em que a posição final seria o resultado de determinada adição de números relativos. Essas conclusões eu escrevi no quadro, explicando aos alunos o meu objetivo, que seria generalizar a regra que eles haviam escrito no último questionário. A redação final para a soma de números relativos ficou conforme o quadro 10.

Quadro 10 - Conclusões sobre a soma de números relativos.

Caso 1) Soma entre dois positivos: A resposta será positiva e o valor absoluto da resposta será a soma dos valores absolutos dos números.

Caso 2) Soma entre dois negativos: Como os dois números são negativos, a resposta será negativa e será a combinação dos dois números através da soma dos valores absolutos.

Caso 3) Soma de números de sinais contrários: Ficará o sinal do número de maior valor absoluto e faremos a diferença entre os valores positivos e negativos.

Fonte: Acervo do autor.

Principalmente para o caso 3, a recorrência aos jogos foi importante. Assim como o aluno E escreveu na lista uma resposta incorreta para esse caso, pude perceber que muitos alunos que comentaram sem refletir sobre o universo dos jogos fizeram comentários incorretos. Na conversa com a turma, os próprios colegas alegaram que fazia sentido permanecer o sinal do maior, pois era como a operação com os dois tipos de dinheiro do jogo do banco.

Ficou como tema de casa trazerem um baralho de casa para que na aula seguinte iniciássemos o próximo jogo, o *Escova do Zero*. O avanço para o próximo jogo, mesmo após a percepção de que nem todos os alunos haviam entendido a soma dos números relativos, foi, justamente, baseada nesse ponto. Acreditei que a abordagem do novo jogo, que seria mais operatória que o do Banco Imobiliário de Porto Alegre, ajudaria o entendimento daqueles que tiveram dificuldades nos cálculos. Esse seria justamente o sentido da pesquisa, investigar quanto e como os jogos poderiam ajudar no entendimento dos conceitos envolvendo números negativos.

Nos apêndices do livro didático utilizado na escola, estão à disposição dos alunos, para recorte, cartões nas cores branco e preto, numerados de zero a treze. Tal material é sugerido como material de apoio para o capítulo dos negativos, no qual o livro introduz a adição e a subtração utilizando a ideia de partículas; quando estas têm cargas de mesmo sinal tendem a se agrupar e quando têm sinais contrários acabam se anulando.

Sempre pensei em como poderia criar um jogo de cartas com esses cartões, em que os alunos fizessem combinações para conseguir pontos utilizando os conhecimentos desse conteúdo. Como não foi feito para ser um jogo, alguns imprevistos foram encontrados, como o tamanho dos cartões, o material dificultando ao embaralhar e o número de peças restrito a 26 cartas, 13 em cada cor. Uma boa solução para todos esses problemas seria utilizar um baralho de verdade, um item que provavelmente todos os alunos teriam em casa. Megid (2010) apresenta uma ideia bastante parecida, adaptando um jogo já conhecido chamado *Escopa* (escova em italiano) para os negativos. Como eu fui apresentado ao jogo pelo nome em português, me inspirei em alguns procedimentos descritos por ela e adaptei outros para propor aos meus alunos o jogo *Escova do Zero*.

O trabalho com esse jogo começaria de maneira distinta dos outros, pois seria o único que teria feito parte da composição de atividades realizadas na proposta didática anterior, realizada no ano de 2016. Sendo assim, eu já tinha uma ideia do que esperar e como conduzir os alunos a fim de evitar os problemas já vistos outrora.

Iniciei a aula distribuindo as regras para os alunos e lendo com eles os aspectos importantes, destacando a possibilidade de se usar mais de duas cartas para formar uma combinação, que foi um receio inicial que eu tive. Após a explicação, os alunos se dividiram em quartetos e começaram a jogar.

Nesse momento, percebi que a maioria dos alunos havia entendido pouco sobre as regras. O fato de ser um jogo praticamente novo, uma vez que poucos conhecem o jogo Escova original, implicou na necessidade de passar por praticamente todos os grupos para ajudar os alunos a darem os primeiros passos. O interessante desse processo foi que eu pude mostrar a eles movimentos que englobassem três ou mais cartas com naturalidade, visando a encaminhar os alunos a pensarem em usar a matemática para se obter mais sucesso. É importante salientar que o jogo poderia ser conduzido pelos jogadores de modo a formarem pares (duas cartas com os mesmos números e cores diferentes). A meu ver, esse tipo de condução seria bastante nocivo às minhas intenções com a proposta de trabalho, que seria a de introduzir a soma com números relativos. Foi esse o motivo da inserção da regra para uma pontuação extra para uma maior quantidade de cartas.

Nesse sentido, assumi uma postura de ajudar os alunos a conduzirem suas ações visando combinações de mais de duas cartas. As adaptações que fiz no jogo e os exemplos que abordei ao ensinar os alunos a jogarem seguiram essa linha de raciocínio.

Depois que eu passei por cada grupo, pude ver que eles conseguiram seguir de maneira mais autônoma, me consultando poucas vezes acerca de possibilidades ou regras.

Esse primeiro período foi um bom momento de adaptação e exploração do jogo. Pude perceber isso na fala do aluno D: “Esse 9 preto e esse 6 vermelho eu pego com 3 vermelho né?”. Muitos alunos tentaram fazer combinações usando cartas de mesma cor, como 2 preto com 2 preto. Esses perceberam um problema ao chegarem ao final do jogo e não encontrarem saldo zero na mesa final. Aos poucos a experimentação foi permitindo um melhor entendimento do jogo e um desenvolvimento de estratégias para a vitória. A fim de impor uma maior competitividade, despertando neles a busca por estratégias melhores, planejei um campeonato da Escova do Zero. Acredito que esse tipo de proposta aumenta ainda mais o engajamento dos alunos com a tarefa, talvez despertando o interesse em estudantes que ainda pareciam não se interessar muito em aprender como “jogar melhor”.

A divisão da turma foi feita da seguinte forma. Os alunos se dividiram em grupos de quatro alunos; em cada grupo, jogaram uma partida e duas rodadas, todos contra todos. Sendo assim, cada grupo teve um campeão, que fez parte da composição de um hexagonal final, no qual todos jogaram contra todos. Ao final dessa aula de dois períodos, somada à aula anterior de um único período, eu senti que poderia pensar em algo diferente para a aula seguinte. Após um total de quatro aulas de 50 minutos trabalhando com esse jogo e perceber que os estudantes já dominavam as habilidades envolvidas com respeito a esse jogo, considerei que seria o momento de começar a falar sobre subtração.

6.7 As atividades realizadas após o término dos jogos

Minha experiência como professor ao lecionar esse conteúdo em anos anteriores me indica que, em geral, os alunos não apresentam grandes dificuldades na compreensão da soma de números relativos. O problema é que a construção matemática desse assunto na escola não pode parar por aí. Na prática realizada no ano anterior, um dos principais problemas que percebi ao analisar os resultados das produções finais dos alunos estava na operacionalização com parênteses. De fato, é clara a necessidade dos parênteses na escrita de um número negativo. Os alunos concordam que ficaria estranho haver dois sinais juntos, possibilitando confusões entre a identidade do número e uma operação matemática. Contudo, podemos acompanhar que é comum, na linguagem matemática de livros didáticos e de exames qualificatórios, uma notação em que os números são lidos como positivos (números sem parênteses) e a ocorrência dos negativos se dá na substituição de uma constante ou uma variável por um número menor que zero em uma fórmula ou expressão, como no cálculo da distância entre dois pontos ou na fórmula de Bhaskara.

Desta vez, eu estava programado a concluir, com os alunos, uma maneira de operar com positivos e negativos “sem parênteses”. Nesse momento, me vi em uma bifurcação, em que um dos caminhos envolvia partir logo para a retirada dos parênteses e outro envolvia trabalhar durante algumas aulas a subtração de números relativos. Para o primeiro, eu precisaria buscar um método de explicar para os alunos por que o sinal de menos antecedendo uma expressão seria o equivalente a escrevê-la com os sinais contrários – o que ao meu ver seria algo difícil de fazer, de modo coerente com a proposta didática – sobrando mais aulas para trabalhar aspectos da matéria. O segundo caminho me levaria a conduzir os alunos a trabalhar uma operação que seria difícil contextualizar com jogos ou alguma outra modelagem, tendo já experimentado no ano anterior, sem sucesso, uma modelagem envolvendo cartas e saldos.

Optei pelo segundo caminho por entender que este estaria mais de acordo com as minhas crenças atuais sobre ensino, aprendizagem e construção de saber, pois entendo que os processos intelectuais que são justificados pelo aluno são os que lhe farão sentido e serão aqueles a que ele mais facilmente recorrerá na resolução de tarefas e problemas. Assim como pela minha suspeita pessoal de que é nesse momento que em geral essa matéria começa a ficar repleta de conclusões a serem decoradas e procedimentos a serem memorizados. Deste modo, minha nova preocupação seria a de como conduzir os meus alunos a terem uma resposta para a seguinte pergunta: *o que significa subtrair um número relativo de outro?*.

Na aula do dia 23 de março me restava apenas uma semana para o fim do período que eu havia predefinido como o ideal para o desenvolvimento das atividades e ainda não havíamos sequer iniciado a subtração entre relativos. Nesse momento, alterei o meu planejamento até o fim do bimestre, decidido a adentrar algumas aulas no espaço destinado à segunda área do bimestre. Sendo assim, escolhi um conteúdo para trabalhar na segunda áres que eu poderia desenvolver em poucas aulas com os alunos e avisei-os de que a prova de matemática seria transferida para uma data futura. Naquele momento eles aceitaram bem essa mudança. Defini um novo planejamento de atividades para finalizar no dia 13 de abril, o que resultaria em uma sequência de atividades de quase dois meses.

Visando introduzir a subtração, iniciei a aula propondo no quadro os cinco cálculos representados no quadro 11.

Quadro 11 - Cálculos propostos para iniciar a subtração.

a) $7 + (-10) =$

b) $15 + (-9) =$

c) $-6 + (-8) =$

d) $-3 + 8 =$

e) $-9 + 5 =$

Fonte: Acervo do autor.

A composição desses itens viria a provocar uma reflexão sobre o fato da soma nem sempre representar um aumento. Algo que merece um destaque nesses itens corresponde ao fato de nem todos possuírem parênteses, o que não implica que sejam resolvidos de maneira diferente. Analisando os itens *c* e *d* podemos ver que ao número (-6) somamos o número (-8) e ao número (-3) somamos o número natural 8, que é diferente do número 8 positivo. Como já havíamos discutido sobre a equivalência entre os naturais e os positivos, expressões desse tipo já eram bem aceitas pelos alunos.

Ao perguntar aos alunos, referindo-me aos três primeiros itens, por que adicionar um número negativo costumava representar (até então) uma diminuição, os comentários abaixo nos ajudam a elaborar suposições sobre o que eles estavam pensando.

Aluna FE: Porque o negativo é maior que o positivo.
Aluna V: Mais ou menos o que ele falou.
Aluno FR: Porque tem um número de cada sinal.

Acredito que, de modo geral, eles estavam pensando na comparação entre dois números de sinais contrários, e não necessariamente no sentido da adição de um negativo. Então, coloquei no quadro o item "7- (-3)". O aluno R respondeu: "Dez negativo! Ah, mas é sete positivo né?". Ao final de sua fala, o mesmo já não tinha mais certeza sobre o que havia dito, como se a própria ação de falar em voz alta o fizesse constatar que havia dito um equívoco.

Visando abordar o problema de outro modo sem dar a resposta, sugeri aos alunos imaginarem uma situação no jogo do banco em que eles estão com vários dinheiros azuis e vários dinheiros vermelhos. Nesse momento, alguém passa pelo ponto de partida e retira uma carta especial que diz que eles devem dar seu dinheiro vermelho para o banco. Em resposta a isso, pergunto para a turma:

Prof: Retirar de vocês o seu dinheiro vermelho é uma coisa vantajosa para vocês?
Turma: Sim.
Prof: Na vida real, se temos 100 reais e adquirimos uma dívida de 10 reais, nosso saldo aumentará ou diminuirá?
Turma: Diminuirá.
Prof: Para quanto?
Turma: 90.
Prof: E se temos 100 reais e nos é retirada uma dívida de 5 reais, nosso saldo aumentará ou diminuirá?
Turma: Aumentará.
Prof: Para quanto?

Para essa última pergunta, percebi que os alunos não consideraram natural responder que ficaríamos com 105 reais. Alguns alunos até mencionaram esse número, mas demonstraram não ter confiança de que o mesmo correspondia ao valor correto para a resposta ou não saberiam explicar caso fossem questionados.

Após essa breve discussão sobre o que significa subtrair um negativo, propus a eles como tarefa de casa a quinta folha de atividades, cujas perguntas estão expressas no Quadro 12.

Quadro 12 – Quinta folha de atividades.

Atividade 5 – Analisando a subtração

1) Certo dia a temperatura estava 6°C durante o dia e ficou -5°C durante a noite. Com base nessa informação, responda:

a) Escreva o cálculo que representa a diferença entre essas temperaturas usando números negativos:

b) Qual foi a diferença entre essas duas temperaturas?

2) Durante uma partida do Banco Imobiliário de Porto Alegre, José possuía R$ 13A e R$ 5V. Ao retirar uma carta da pilha, esta indicou que ele deveria entregar R$3V para o banco. Com base nisso, responda:

a) A ação de entregar dinheiro vermelho ao banco foi uma coisa vantajosa ou desvantajosa para José? Explique.

b) Qual era o saldo antes de entregar essa quantia ao banco? ____________________

c) Com ficou seu saldo após entregar tal quantia? ____________________

d) Escreva um cálculo que represente o que aconteceu com o saldo de José nesse episódio.

3) Neste exercício, faça de conta que você é o professor de matemática de uma turma do 7° ano e que um de seus alunos resolveu um exercício conforme está representado abaixo. Para cada item, você deve indicar ao aluno se ele acertou ou errou, explicando, de modo que ele possa entender o porquê de cada resposta.

a) $(+3) - (+5) = +2$ ____________________

b) $(-6) - (-10) = +4$ ____________________

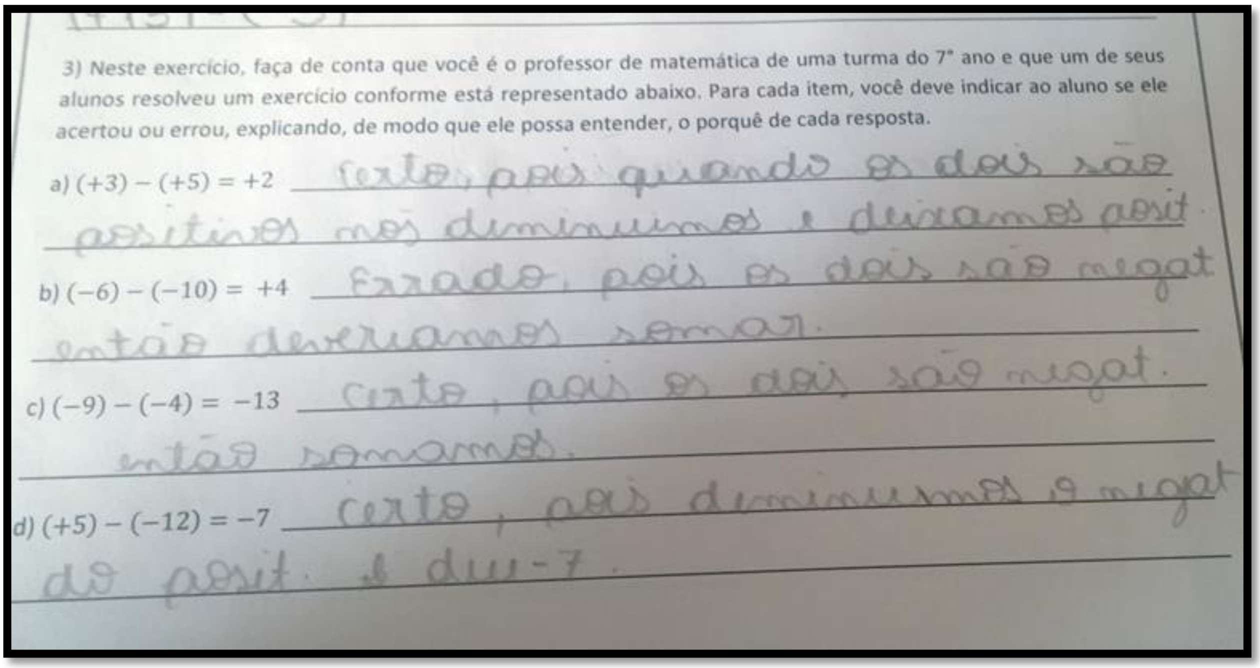
c) $(-9) - (-4) = -13$ ____________________

d) $(+5) - (-12) = -7$ ____________________

Fonte: acervo do autor.

Seguem recortes das resoluções de alguns alunos.

Figura 14 - Respostas da Aluna IR para o item 3 da quinta folha de atividades.


3) Neste exercício, faça de conta que você é o professor de matemática de uma turma do 7° ano e que um de seus alunos resolveu um exercício conforme está representado abaixo. Para cada item, você deve indicar ao aluno se ele acertou ou errou, explicando, de modo que ele possa entender, o porquê de cada resposta.

a) $(+3) - (+5) = +2$ Certo, pois quando os dois são positivos nos diminuimos e deixamos posit.

b) $(-6) - (-10) = +4$ Errado, pois os dois são negat então deveriamos somar.

c) $(-9) - (-4) = -13$ Certo, pois os dois são negat. então somamos.

d) $(+5) - (-12) = -7$ Certo, pois diminuimos o negat do posit. e deu -7.

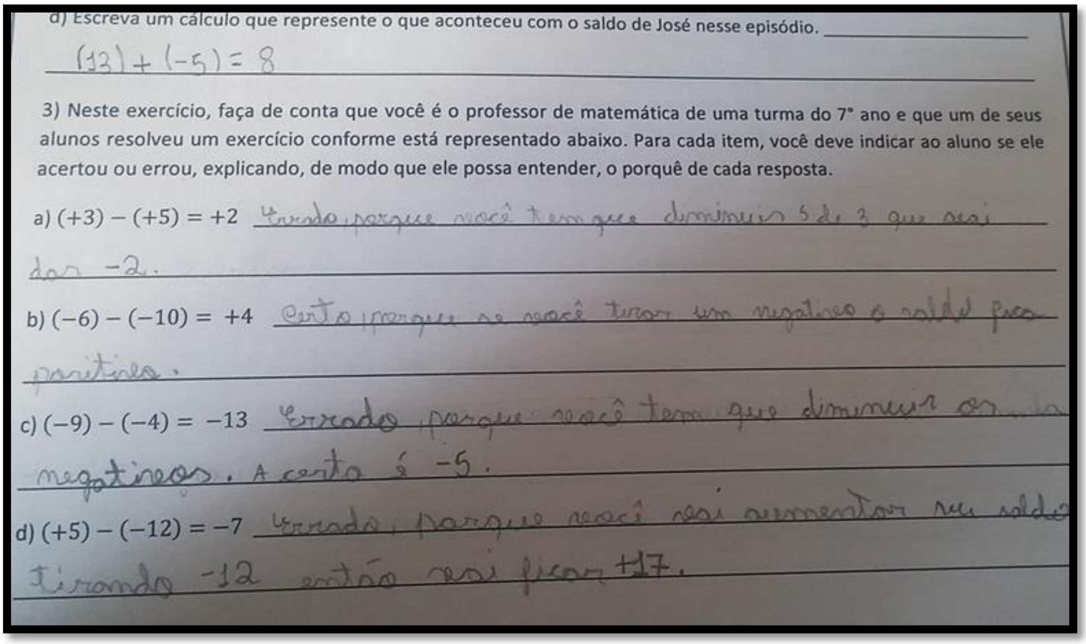
Fonte: acervo do autor.

Transcrição das respostas da aluna:

a) Certo, pois quando os dois são positivos nós diminuímos e deixamos posit.
b) Errado, pois os dois são negat então deveriamos somar.
c) Certo, pois os dois são negat. então somamos.
d) Certo, pois diminuimos o negat do posit. e deu -7.

Nas explicações a aluna IR utilizou uma combinação de esquemas incorretos. Nos itens *c* e *d* ela calculou como se a operação fosse de adição. Um procedimento contrário ao que foi feito no item *a*, onde ela valorizou a subtração. Durante os jogos, essa aluna praticou as atividades, mas alegou que teve dificuldades em desenvolvê-las.

Figura 15 - Respostas da aluna AV para o item 3 da quinta folha de atividades.


d) Escreva um cálculo que represente o que aconteceu com o saldo de José nesse episódio.

(13) + (-5) = 8

3) Neste exercício, faça de conta que você é o professor de matemática de uma turma do 7º ano e que um de seus alunos resolveu um exercício conforme está representado abaixo. Para cada item, você deve indicar ao aluno se ele acertou ou errou, explicando, de modo que ele possa entender, o porquê de cada resposta.

a) $(+3) - (+5) = +2$ Errado, porque você tem que diminuir 5 de 3 que vai dar -2.

b) $(-6) - (-10) = +4$ Certo, porque se você tirar um negativo o saldo fica positivo.

c) $(-9) - (-4) = -13$ Errado, porque você tem que diminuir os negativos. A certa é -5.

d) $(+5) - (-12) = -7$ Errado, porque você vai aumentar seu saldo tirando -12 então vai ficar +17.

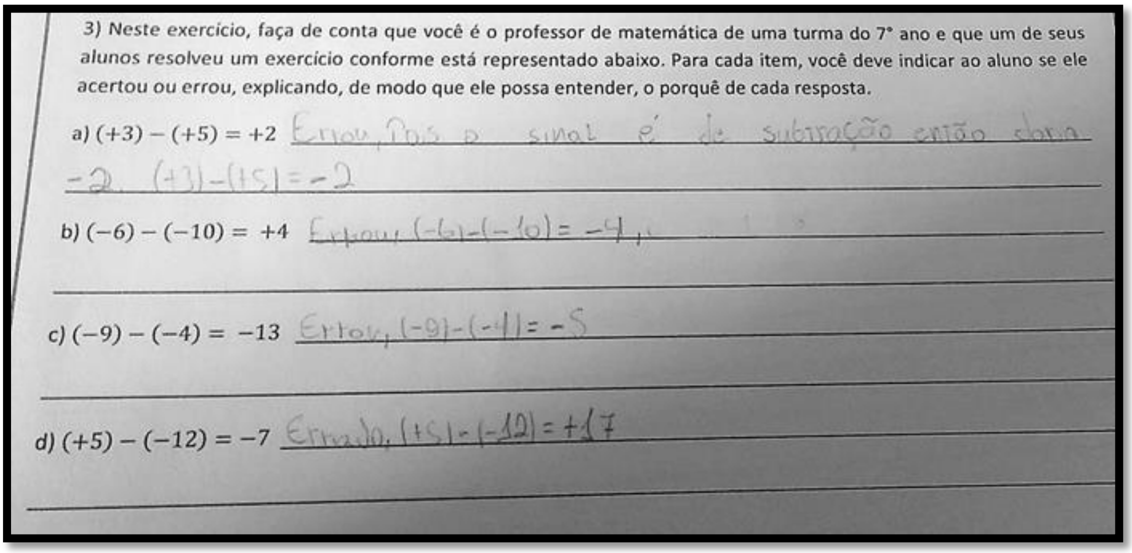
Fonte: acervo do autor.

Transcrição das respostas da aluna.

a) Errado, porque você tem que diminuir 5 de 3 que vai dar -2.
b) Certo, porque se você tirar um negativo o saldo fica positivo.
c) Errado, porque você tem que diminuir os negativos. A certa é -5.
d) Errado, porque você vai aumentar seu saldo tirando -12 então vai ficar +17.

Nesta resolução podemos ver uma resolução correta seguida da argumentação esperada.

Figura 16 - Respostas do aluno FO para o item 3 da quinta folha de atividades.


3) Neste exercício, faça de conta que você é o professor de matemática de uma turma do 7º ano e que um de seus alunos resolveu um exercício conforme está representado abaixo. Para cada item, você deve indicar ao aluno se ele acertou ou errou, explicando, de modo que ele possa entender, o porquê de cada resposta.

a) $(+3) - (+5) = +2$ Errou, Pois o sinal é de subtração então daria -2. (+3)-(+5) = -2

b) $(-6) - (-10) = +4$ Errou, (-6)-(-10) = -4,

c) $(-9) - (-4) = -13$ Errou, (-9)-(-4) = -5

d) $(+5) - (-12) = -7$ Errado, (+5)-(-12) = +17

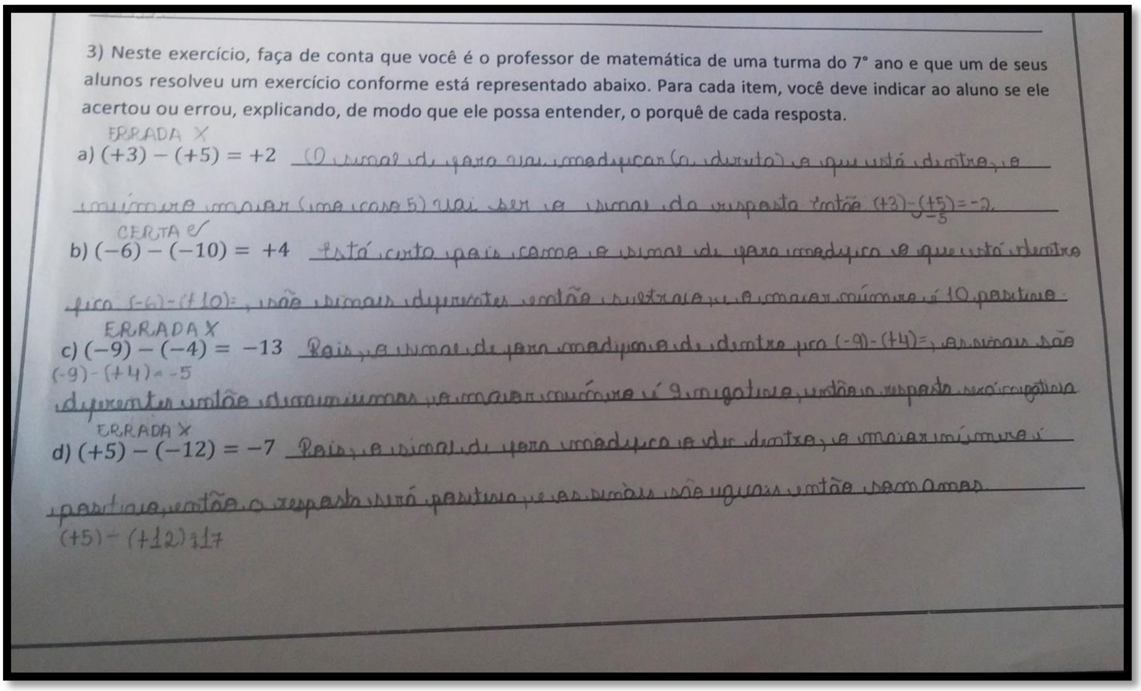
Fonte: acervo do autor.

Transcrição das respostas do aluno.

a) Errou, pois o sinal é de subtração então daria -2. (+3)-(+5)=-2
b) Errou, (-6)-(-10)=-4.
c) Errou, (-9)-(-4)=-5
d) Errado, (+5)-(-12)=+17

Neste recorte podemos ver a resolução correta de três quartos dos itens. Com as informações explicitadas, é difícil entender o que levou o aluno a errar o segundo item, tendo em vista que ele acertou os demais. Esse aluno praticou os jogos tirando dúvidas quando elas surgiram.

Figura 17 - Resolução da aluna J para o item 3 da quinta folha de atividades.


3) Neste exercício, faça de conta que você é o professor de matemática de uma turma do 7° ano e que um de seus alunos resolveu um exercício conforme está representado abaixo. Para cada item, você deve indicar ao aluno se ele acertou ou errou, explicando, de modo que ele possa entender, o porquê de cada resposta.

ERRADA X
a) (+3) − (+5) = +2

CERTA
b) (−6) − (−10) = +4

ERRADA X
c) (−9) − (−4) = −13

ERRADA X
d) (+5) − (−12) = −7

Fonte: acervo do autor.

Transcrição das respostas da aluna.

a) Errada. O sinal de fora vai modificar (a direita) o que está dentro, o número maior (no caso 5) vai ser o sinal da resposta então (+3)-(+5)=-2

b) Certa. Está certo pois como o sinal de fora modifica o que está dentro fica (-6)-(+10) = , são sinais diferentes então subtraio, e o maior número é 10 positivo.

c) Errada. Pois, o sinal de fora modifica o de dentro fica (-9)-(+4)=, os sinais são diferentes então diminuímos o maior número é 9 negativo, então a resposta será negativa.

d) Errada. Pois, o sinal de fora modifica o de dentro, o maior número é positivo, então a resposta será positiva, e os sinais são iguais então somamos (+5)-(+12)=17.

Já a aluna J apresentou uma explicação bem detalhada de como chegou a cada resposta. É possível perceber que sua reescrita da equação "(-9) – (-4) = -13" (item *c*) não está matematicamente correta, pois apenas o sinal do número é trocado: "(-9) – (+4) = -5.

Esse conjunto de recortes ilustra alguns entendimentos dos alunos até esse momento. Mesmo após a recorrência aos jogos, alguns alunos permaneceram sem entender alguns dos quatro casos em que há uma combinação de dois sinais (sinal da operação e do termo que segue). Como essa foi uma discussão aberta à turma toda, não consegui perceber os motivos da incompreensão, mas percebi que o problema estava em identidades do tipo -(+3) = +(-3) e na aceitação de que em ambos os casos a reescrita da expressão equivale a (-3). Por meio do exercício proposto, em que, de maneira oportuna, alguns alunos responderam "(+8) + (-3) = 5", enquanto outros responderam "(+8) - (+3) = +5", a turma pôde perceber que, de fato, aquela identidade é verdadeira.

Iniciei a aula seguinte colocando no quadro o cálculo (+20) - (-3) = -23 e perguntei para a turma se essa resposta estaria correta ou incorreta. O aluno N respondeu: "Assim oh, tu tem 23A e vai tirar 3V, então vai aumentar 3". Aqui há um exemplo de situação em que a recorrência ao jogo auxiliou na resolução do cálculo. Resolvi propor esse cálculo para reforçar com os alunos a ideia de que há uma conclusão lógica para definir o resultado de um cálculo. O termo "Números Negativos" sempre está cercado por muitas regras, e desde o primeiro dia pude perceber que alguns alunos justificaram alguns cálculos com argumentos não tratados em aula, do tipo "menos com menos dá mais". Desta forma, sempre procurei conduzir os alunos a pensar antes de optarem por regras. Essa operação retrata uma situação em que a subtração representa um aumento, na qual mesmo havendo dois sinais "menos" a resposta deveria ser positiva e que nem sempre menos com menos dá mais.

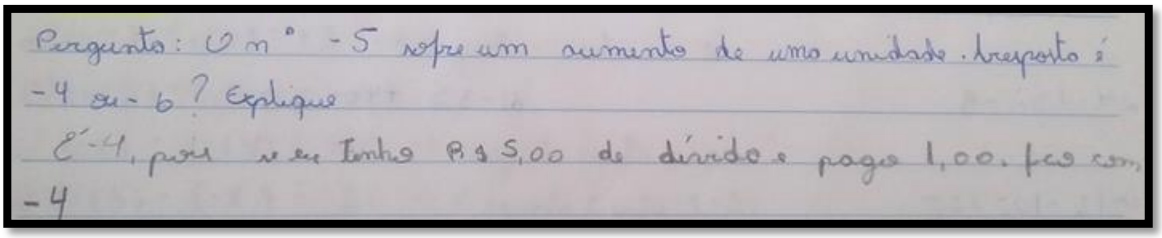
Através de exemplos, como os expressos abaixo, e discutindo os mesmos com apelo às situações financeiras possibilitadas pelos jogos e já assumidas pelos alunos como uma notação de argumentação, introduzi a ideia da subtração de números relativos.

$$(+20) + (-3) = +17$$
$$(+20) - (-3) = +23$$

A subtração continuaria com um efeito de retirada. O obstáculo a ser superado seria algo que busquei construir com os alunos desde o primeiro momento em que falamos da operação inversa da soma, que seria o que significa aumentar. Para isso, propus a seguinte pergunta: "O número (-5) sofre um aumento de uma unidade. A resposta é (-4) ou (-6)? Explique.".

A Figura 18 mostra a resolução do aluno NL.

Figura 18 - Resolução do aluno NL.


Pergunta: O nº -5 sofre um aumento de uma unidade. A resposta é -4 ou -6? Explique
É -4, pois se eu tenho R$ 5,00 de dívida e pago 1,00, fico com -4

Fonte: acervo do autor.

Seguem as transcrições de outras respostas.

Aluno D: Tava devendo 5 ao banco. Recebe 1, fica devendo 4.
Aluno PH: Aumentar um positivo significa diminuir um negativo.

Após isso, escrevi no quadro alguns cálculos de subtração de números relativos para os alunos resolverem. Durante a resolução, a aluna AV perguntou:

Aluna AV: Nessas contas de menos a gente faz como viu de somar quando tem o sinal igual?
Prof: Não, pois agora é subtração.
Aluna AV: Então é parecido ou nada a ver?

Por meio de perguntas como essa um estudante pode indicar ao educador o quão difícil está a sua compreensão do que é trabalhado. Suspeito que a aluna não tenha percebido que sua pergunta propôs que adicionar e subtrair são equivalentes.

Esse breve diálogo me permitiu perceber duas coisas. Por parte da aluna, acredito que ela estivesse interessada em um método para resolver os exercícios da aula de matemática. Por um lado, eu poderia conduzir os alunos a pensarem sobre o efeito que a subtração tem no cálculo, enquanto, por outro, poderia definir um algoritmo para a operacionalização desses cálculos. A consequência dessa segunda opção seria encontrar um modelo com conclusões distintas das da soma, havendo mais casos com que se preocupar e podendo gerar confusão em relação aos casos anteriores. Evitando esse caminho, eu considerei duas opções. Representar os cálculos com números relativos como deslocamentos ao longo da reta – o que não havia sido feito em nenhum momento dessa proposta de trabalho – ou direcionar o estudo para os procedimentos de reescrita dos cálculos com a retirada dos parênteses, minha intenção inicial.

De certa forma, partir nesse momento para a etapa final da adição e subtração, transformando cálculos com essas duas operações matemáticas em problemas a serem resolvidos de maneira análoga, seria algo razoável. Houve um bom investimento de tempo e atividades para concluirmos o impacto de uma subtração e como isso poderia ser analisado de outra perspectiva.

Iniciei com os alunos uma série de perguntas sobre como poderíamos reescrever cálculos sem parênteses de modo que tal transformação não alterasse o significado da operação. Escrevi no quadro as contas representadas no quadro 13.

Quadro 13 – Introdução à reescrita de cálculos.

a) $(+20) - (+8) =$

b) $(+50) - (+56) =$

c) $(-7) - (+4) =$

d) $(+12) - (-4) =$

e) $(-3) - (-1) =$

Fonte: acervo do autor.

Para a compreensão de alguns desses itens, visualizar os números positivos como números naturais auxiliaria na compreensão da lógica, pois a operação poderia ser resolvida utilizando um mecanismo já dominado por eles, que é o cálculo com números naturais. A organização desses itens foi proposta de modo a permitir uma extensão dos naturais para cálculos envolvendo negativos. De certa forma, a subtração com positivos (itens a e b) seria uma ampliação da subtração com naturais, bastando apenas que fossem aceitos números abaixo de zero como solução. A intenção seria a de que os alunos percebessem que encontrar a resposta da subtração entre dois números positivos quaisquer é o mesmo que encontrar a diferença entre eles. Através dos resultados percebidos na conferência dos cadernos, concluo que a maioria dos alunos conseguiu atender a essa expectativa. Esses dois primeiros itens permitiram refletir sobre a conclusão de que subtrair um número positivo tem o efeito de redução sobre o primeiro termo, em contrapartida ao fato de que subtrair um negativo provoca um aumento, fato que eu já estava buscando introduzir há algumas aulas com a turma.

Para os itens d e e, os alunos demonstraram aceitar bem a ideia de que deveríamos aumentar quatro e uma unidade, respectivamente, pois a máxima de que tirar um negativo representa um aumento veio à tona através do comentário de alguns alunos e logo a turma toda pareceu concordar com a decisão. Tornou-se mais difícil – mesmo já tendo conversado sobre isso em aula - descobrir qual seria a resposta para, por exemplo, aumentar o número (-3) em uma unidade. Para me auxiliar na explicação, tive naquele momento uma ideia que não estava em meu planejamento e decidi segui-la, recorrendo à ideia de ordem, mencionada algumas aulas antes. Desenhei no quadro a representação de uma reta com as marcações dos números inteiros, com a marcação do zero no centro, indo até a marcação de – 20 à esquerda e +20 à direita, enquanto solicitava aos alunos que fizessem o mesmo em seu caderno.

Para abordar o item *d*, fixei a caneta no número +12 e perguntei se, para aumentar, eu deveria andar para a direita ou para a esquerda. Ao ouvir a resposta "direita" da turma, perguntei então onde eu iria "parar". Perguntei se esse procedimento seria útil para resolver cálculos dessa natureza e eles disseram que sim, demonstrando achar tal procedimento bastante facilitador para os cálculos, inclusive solicitando se poderiam usá-lo na hora da prova. Nesse momento, percebi que eu estava me aproximando de uma outra abordagem para os cálculos com números relativos, que é a de resolver exercícios através de deslocamentos na reta. A fim de evitar uma mecanização de procedimentos, comentei com os alunos que se basear na reta poderia ser um problema para o cálculo de números muitos grandes. Isso se tornou uma preocupação quando diversos alunos perguntaram se poderiam desenhar uma reta para ajudar na hora de uma avaliação. Tal questionamento, por outro lado, mostrou que ou o procedimento foi considerado simples, ou esclarecedor.

Iniciei a discussão colocando no quadro quatro "cálculos":

… + (-3) =

… - (-7) =

… - (+6)=

… + (+8)=

E então fui perguntando aos alunos: "Somar -3 aumenta ou diminui? Subtrair -7 aumenta ou diminui? Subtrair 6 positivo aumenta ou diminui? Somar 8 positivo aumenta ou diminui?". Enquanto eles respectivamente foram respondendo: "diminui, aumenta, diminui, aumenta". Sendo assim, reescrevi cada um dos esquemas os quais as perguntas foram referidas colocando o número 10, escolhido arbitrariamente, no local das reticências, e na linha abaixo, reescrevi os cálculos sem os parênteses:

10 + (-3) =	10 - (-7) =	10 - (+6) =	10 +(+8) =
10 – 3 =	10 + 7 =	10 – 6 =	10 + 8 =

É importante citar que a reescrita foi acompanhada pela minha fala, dizendo que somar 10 + (-3) representa uma redução em três unidades, o cálculo pode ser reescrito como "10 - 3". Foi esse o meu objetivo com a última lista de exercícios que eles haviam feito e todas as discussões das aulas precedentes: que pudessem visualizar a equivalência entre as duas escritas para o cálculo a ser realizado e para a validação de possuírem a mesma resposta.

Percebi, nesse momento, que os alunos estavam sem entender o porquê de reescrever cálculos, se nas últimas aulas estávamos justamente aprendendo a resolver tais contas. Contei brevemente que em algumas situações matemáticas no futuro escolar deles, os cálculos com que eles se deparariam estariam expressos justamente dessa forma.

Sem negligenciar os obstáculos e a desconfiança dos alunos para com o que estava no quadro, propus alguns cálculos para eles resolverem obrigatoriamente reescrevendo as contas sem parênteses, conforme estava exemplificado na lousa. O que me motivou a propor um exercício após uma discussão relativamente breve foi simplesmente minha curiosidade sobre o que os alunos fariam. Talvez há alguns anos atrás, minha expectativa seria de que eles aceitariam o método e buscariam aprender a reproduzi-lo. Contudo, agora, eu estava percebendo que eu não sabia o que esperar.

Os cálculos propostos foram variações dos exemplos citados acima, envolvendo a adição e a subtração. Acredito que trabalhar ambas as operações juntas, no momento de pensar em uma lógica de reescrita, contribui para uma eventual significação que possa estar implícita ao processo, de modo que o aluno possa pensar em algo do tipo “a soma e a subtração têm muitas semelhanças”. Para mim, não haver separação entre a soma e a subtração é algo que contribui para a aceitação da reescrita do cálculo sem os parênteses.

Fui acompanhando as resoluções dos alunos enquanto eles me mostravam os cadernos. Passados alguns minutos, fui ao quadro com o pretexto de resolver as contas através das observações dos alunos. Para minha surpresa, um grande número de alunos fez a tarefa do modo correto. Por um breve momento suspeitei que talvez eu tivesse achado uma mina de ouro ao construir uma sequência de ideias que conduzisse quase todos os alunos ao acerto (embora o real entendimento não pudesse ser percebido aqui). Contudo, ao insistir em dúvidas de compreensão com os alunos, a aluna I comentou “Não entendi porque que ficou menos três” se referindo ao item “(-7) + (-3)” sendo reescrito como “-7 - 3”. Nesse momento, escrevi no quadro o seguinte cálculo e perguntei aos alunos se era verdade que subtrair (+3) era o mesmo que somar (-3):

$$- (+3) = + (-3)$$

Alguns alunos palpitaram que sim, mas não souberam explicar, ao que eu propus o seguinte exercício.

“Certo dia, a temperatura começou amena. Até a hora do almoço, a temperatura já tinha aumentado 8 graus. Durante a tarde, ela baixou 3, mantendo-se assim até o fim do dia. Com base nisso:
a) Escreva o cálculo que representa a situação acima usando números relativos.
b) Comparando o início e o final do dia, a temperatura aumentou ou diminuiu?
c) Em quantos graus?”

Aqui, para minha surpresa, muitos alunos acertaram a letra *a*, que era o meu principal objetivo, mas erraram o *b*, pensando que a temperatura foi de 8 graus para 5 graus. No momento da correção eu expliquei que não sabíamos quanto valia a temperatura inicial, mas que a mesma tinha aumentado 5 graus durante o dia. Na correção do item *a*, pedi que os alunos citassem sua resposta. A aluna AL disse: “(+8) + (-3) = 5”. Perguntei se a turma achava que a resposta estava certa e os que responderam disseram que sim. Perguntei se alguém tinha feito diferente, e a aluna AV disse: “(+8) - (+3) = 5”. Com essa resposta a turma também concordou, então circulei os termos e perguntei: “será que são iguais?”. Nisso ouvi uns alunos dizendo “uhmmm”, demonstrando entender, enquanto outros disseram “ah sor, entendi agora”.

Felizmente, duas alunas espontaneamente citaram respostas distintas e a turma concordou que ambas poderiam representar a situação dada. Ao que consegui perceber, isso pareceu bastar para a dificuldade apresentada, pois compreender que somar (-3) é o mesmo que subtrair (+3) implicaria na aceitação de resultar o sinal “menos” à frente do 3, uma vez que o número +3 poderia ser substituído pelo número 3 sem qualquer prejuízo ao cálculo. Após essa discussão, preenchi os minutos finais da aula com o jogo Escova do Zero. Tal procedimento foi feito em outras oportunidades para aproveitar o tempo das aulas, após a realização das atividades planejadas para cada encontro.

Já na aula seguinte, propus uma atividade em que os conhecimentos deles seriam avaliados. Seriam propostos alguns cálculos no quadro e eles teriam tempo livre para resolver e me mostrar o caderno. Os itens propostos estão retratados no quadro 14, abaixo:

Quadro 14 – Cálculos variados para análise da turma.

a) $4 - 9 =$	b) $(+4) - (-3) =$	c) $-13 + 5 =$
d) $(+5) + (-14) =$	e) $(-7) + (-3) =$	f) $-2 - 8 =$
g) $(-9) - (-13) =$	h) $-7 + 20 =$	i) $10 + (-4) =$
j) $15 - (-6) =$		

Fonte: acervo do autor.

A turma toda realizou tal atividade em menos de um período. Para mim, essa tarefa seria um indicativo de como estaria o entendimento dos alunos com esse assunto e uma possibilidade para o avanço à multiplicação e à divisão, uma vez que, segundo meu planejamento, faltaria uma semana para a data de encerramento da sequência de atividades. A média de acertos da turma foi 7,4, sendo que muitos alunos cometeram 1 ou nenhum erro. Nessa mesma aula decidi iniciar o estudo da multiplicação.

Desde o princípio da aplicação da proposta didática eu me preparei para nunca usar termos que pudessem se confundir com o que já havia sido construído para a soma (exemplo, "menos com menos dá mais"). Mesmo assim, equívocos desse tipo aconteceram, conforme estará relatado mais abaixo. Antes dessa investigação, uma das minhas hipóteses principais sobre o trabalho escolar com os Números Negativos é que os alunos em geral conseguem acompanhar a lógica que envolve a adição e a subtração, mas quando a multiplicação e a divisão são generalizadas simples e superficialmente através do procedimento conhecido como *Regra dos Sinais*, tudo que já foi construído mentalmente pelo aluno se atrapalha e aqueles exercícios que antes ele respondia corretamente, agora, passa a errar.

Dessa forma, procurei trabalhar de modo a construir com os alunos uma lógica para a multiplicação – que mais tarde estenderíamos para a divisão – sem nunca falar em *Regra dos Sinais*.

Escrevi no quadro a pergunta que segue.

Pergunta 1: **Quanto será que dá 3 × (- 4) = ?**

Os alunos acusaram (-12), mesmo sem saber explicar. Talvez tenha sido um palpite bem sucedido, tendo em vista que a matéria envolve a novidade de permitir números abaixo do zero. A explicação envolveu dizer que somar 3 vezes o número (-4) resultaria em (-12), conforme já sabíamos sobre a soma:

$$(-4) + (-4) + (-4) = -12$$

Pergunta 2: **Quanto será que dá (- 4) × 2** =?

Nesse momento, vários alunos comentaram -8; conforme a aluna L, "dá pra inverter". Visando evitar a mera exposição vazia de conteúdos e acreditando que uma explicação razoável ajudaria os alunos a superar os obstáculos que o contato futuro com as regras causaria, discuti com os alunos o que significa “pegar o 2 menos quatro vezes”. Contei sobre as dificuldades da aceitação dos negativos por parte da comunidade matemática, dos 15 séculos de dúvidas e de como perguntas como essas repercutiram durante muito tempo.

Após essa conversa, eles já não se arriscaram novamente na inversão dos números, como se a resposta não fosse tão simples, mesmo que houvesse apenas duas possibilidades. Nesse momento, propus a eles aceitarmos que $(-1) \times 7$ equivaleria ao oposto de 1×7, ou seja, -7. Sendo $-4 = -1\times 4 = 4 \times (-1)$, $(-4) \times 2$ equivaleria ao oposto de 4×2, portanto $(-4) \times 2 = -(4 \times 2) = -8$.

É razoável pensar que não seria ruim adotar a lógica da aluna e permitir que a comutatividade resolvesse nosso impasse. Contudo, encontraríamos um problema na multiplicação entre dois negativos.

Pergunta 3: **Quanto será que dá $(-3) \times (-5)=$?**

A maioria dos alunos respondeu como que por reflexo “-15”. Ao que eu intervim e disse, “mas não vimos há pouco que se o primeiro número for negativo devemos pegar o oposto da resposta da multiplicação desconsiderando esse sinal?”. Quando os alunos concordaram, eu desenvolvi no quadro:

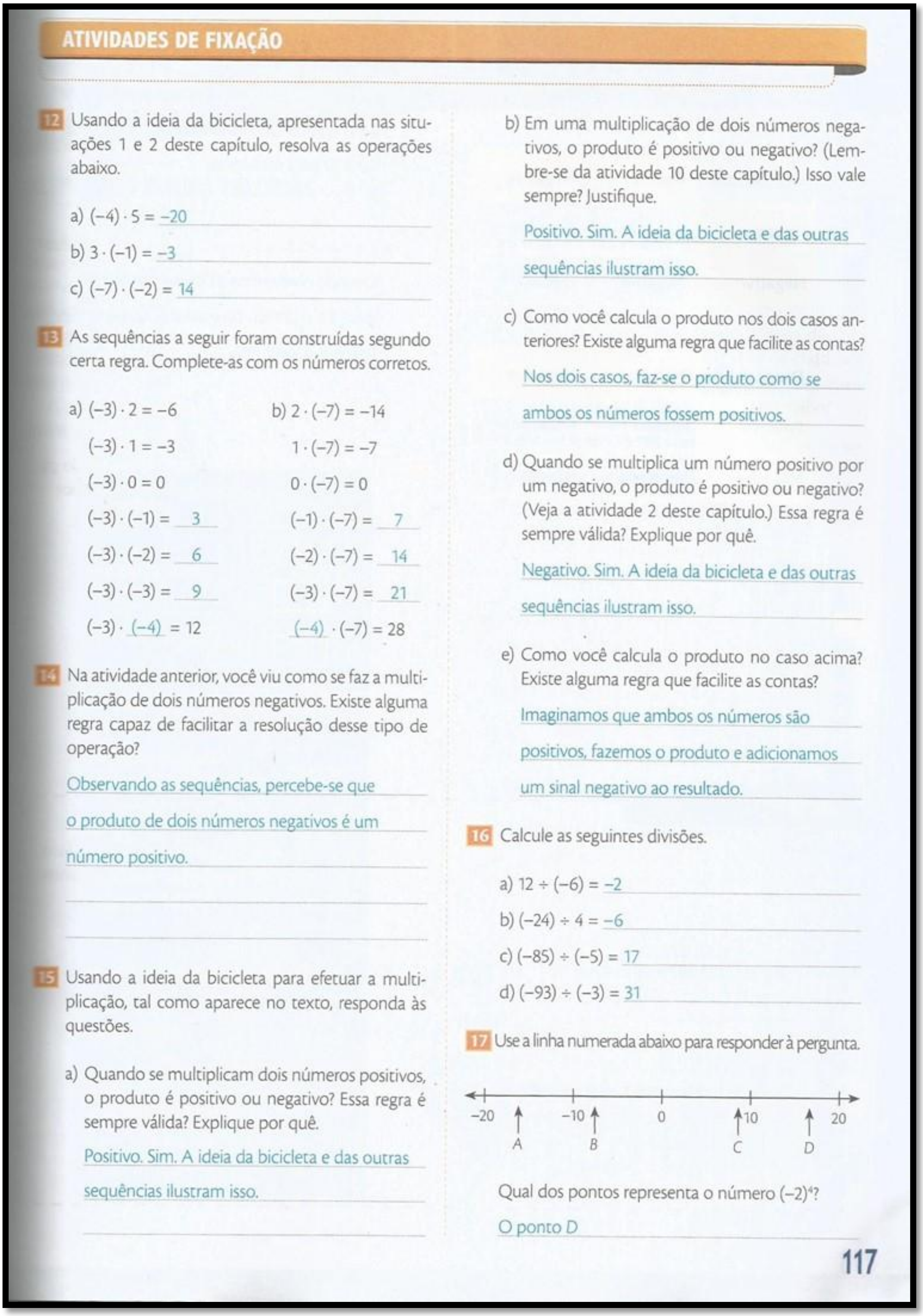
“Queremos o oposto de $3 \times (-5)$”.
“Isso quer dizer: $-(3 \times (-5))$”.
“$-(-15)$”.
“$+15$”.

“Logo, $(-3) \times (-5) = 15$”.

Os alunos aceitaram bem essa explicação e resolveram com naturalidade os exercícios - cálculos simples - que eu passei no caderno.

Quanto à divisão, em virtude do tempo, eu simplesmente disse que, por se tratar da operação inversa da multiplicação, o mesmo padrão de análise sobre o sinal valeria. Passei alguns cálculos no caderno sobre a divisão e a multiplicação, os quais os alunos acertaram com facilidade. No restante da aula, propus aos alunos alguns exercícios no livro envolvendo a multiplicação e a divisão (figura 19).

Figura 19 – Exemplos de exercícios envolvendo multiplicação e divisão.



ATIVIDADES DE FIXAÇÃO

12 Usando a ideia da bicicleta, apresentada nas situações 1 e 2 deste capítulo, resolva as operações abaixo.

a) $(-4) \cdot 5 = -20$

b) $3 \cdot (-1) = -3$

c) $(-7) \cdot (-2) = 14$

13 As sequências a seguir foram construídas segundo certa regra. Complete-as com os números corretos.

a) $(-3) \cdot 2 = -6$
$(-3) \cdot 1 = -3$
$(-3) \cdot 0 = 0$
$(-3) \cdot (-1) = 3$
$(-3) \cdot (-2) = 6$
$(-3) \cdot (-3) = 9$
$(-3) \cdot (-4) = 12$

b) $2 \cdot (-7) = -14$
$1 \cdot (-7) = -7$
$0 \cdot (-7) = 0$
$(-1) \cdot (-7) = 7$
$(-2) \cdot (-7) = 14$
$(-3) \cdot (-7) = 21$
$(-4) \cdot (-7) = 28$

14 Na atividade anterior, você viu como se faz a multiplicação de dois números negativos. Existe alguma regra capaz de facilitar a resolução desse tipo de operação?

Observando as sequências, percebe-se que o produto de dois números negativos é um número positivo.

15 Usando a ideia da bicicleta para efetuar a multiplicação, tal como aparece no texto, responda às questões.

a) Quando se multiplicam dois números positivos, o produto é positivo ou negativo? Essa regra é sempre válida? Explique por quê.

Positivo. Sim. A ideia da bicicleta e das outras sequências ilustram isso.

b) Em uma multiplicação de dois números negativos, o produto é positivo ou negativo? (Lembre-se da atividade 10 deste capítulo.) Isso vale sempre? Justifique.

Positivo. Sim. A ideia da bicicleta e das outras sequências ilustram isso.

c) Como você calcula o produto nos dois casos anteriores? Existe alguma regra que facilite as contas?

Nos dois casos, faz-se o produto como se ambos os números fossem positivos.

d) Quando se multiplica um número positivo por um negativo, o produto é positivo ou negativo? (Veja a atividade 2 deste capítulo.) Essa regra é sempre válida? Explique por quê.

Negativo. Sim. A ideia da bicicleta e das outras sequências ilustram isso.

e) Como você calcula o produto no caso acima? Existe alguma regra que facilite as contas?

Imaginamos que ambos os números são positivos, fazemos o produto e adicionamos um sinal negativo ao resultado.

16 Calcule as seguintes divisões.

a) $12 \div (-6) = -2$

b) $(-24) \div 4 = -6$

c) $(-85) \div (-5) = 17$

d) $(-93) \div (-3) = 31$

17 Use a linha numerada abaixo para responder à pergunta.

−20 A −10 B 0 10 C D 20

Qual dos pontos representa o número $(-2)^4$?

O ponto D

117

Fonte: Acervo do autor.

A partir dos exercícios 13 e 14, é possível perceber que o livro trabalha sobre uma ideia de que o aluno perceba e possa deduzir as conclusões almejadas. Considero isso um aspecto positivo do livro.

No fechamento da sequência de atividades, haveria uma tarefa que os alunos resolveriam individualmente e sem consulta, cujo principal objetivo seria analisar a aprendizagem dos estudantes para com os assuntos trabalhados em aula.

Para facilitar cálculos futuros e poupar tempo, eu propus escrever, com os alunos, conclusões sobre o sinal da multiplicação e divisão, quando o resultado é positivo e quando uma conta resultará em número negativo. Nessa aula vi que vários alunos mencionaram repetições de frases enunciadas em outros espaços, no estilo “menos com menos dá mais”. Quando questionados, ouvi respostas do tipo “meu pai me ensinou” ou ainda “vi assim na internet”. Isso me fez pensar sobre o quanto a sala de aula é influenciada pelo que se passa e se diz fora da escola.

As perguntas inseridas na tarefa avaliativa podem ser conferidas no Apêndice D (página 125) e uma análise sobre as respostas dos alunos será apresentada no próximo capítulo.

7 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

Na concepção da proposta didática, minha ideia foi de que os alunos tivessem algumas aulas para explorar um número arbitrariamente satisfatório de jogos. Mesmo que nunca tivessem ouvido falar de números negativos, mas que, quando iniciássemos esse estudo e – mais precisamente – as operações, os jogos pudessem representar um suporte mental para o pensamento e as ações com os números relativos. A minha conduta como professor, durante esse período, foi a de buscar que as conclusões obtidas pudessem estar mais fielmente associadas à atuação dos jogos.

O objetivo de meu estudo não era o de revolucionar o ensino dos números negativos ao propor que os jogos compõem um ambiente de exploração pedagógica que pode avançar em relação ao que comumente encontramos nos livros didáticos, em que há uma recorrência a situações do cotidiano. A intenção com o uso dos jogos foi a de ofertar uma exploração de situações que permitiriam aos alunos compreender melhor os conceitos inerentes ao estudo de números relativos. Fosse pelo desenvolvimento da lógica operatória, fosse pela ideia do comportamento de números de sinais opostos ou por outros processos subjetivos, a utilização dos jogos almejou superar essas dificuldades para que, posteriormente, no momento das conclusões sobre as operações entre números relativos, os alunos pudessem deduzir as regras a partir dos jogos e que elas fizessem sentido, pois nos jogos também o já o haviam feito.

Desta forma, esse capítulo terá como objetivo analisar os jogos aplicados e os processos decorrentes dos mesmos que puderam ser vistos na aprendizagem dos alunos com respeito aos números relativos.

7.1 Análise do uso dos jogos

Na aplicação da proposta didática, foram explorados quatro jogos: o Jogo do Segurança, o Jogo das Tropas, o Banco Imobiliário de Porto Alegre e o Escova do Zero.

Os dois primeiros jogos possuem muitas semelhanças quanto ao conjunto de possibilidades de ações. Minha expectativa com esses dois jogos foi a de que os alunos percebessem que a retirada ou acréscimo do mesmo número de peças não alteraria a variação expressada em determinada situação – o que denominamos cancelamento - e que verificassem que poderiam executar a ação do dado ou de uma carta fazendo o movimento contrário a ela sobre as peças do oponente (a carta três preta indica aumentar três peças pretas ou retirar três peças brancas) – o que denominamos compensação.

Para que essas intenções fossem alcançadas, os alunos precisariam olhar para o jogo como uma situação em que o que importa não é movimentar as peças, mas sim a diferença entre o número de peças das duas cores. Quanto a isso, posso dizer que nenhum aluno trabalhou dessa forma a partir das instruções iniciais. Foi apenas a partir de uma explicação (quando toda a turma encontrou a primeira crise nas peças) que em conjunto, por meio de perguntas, conduzi os alunos aos eixos da proposta.

Em uma análise posterior, vejo que o primeiro jogo, inspirado na aplicação de Linchevski e Williams (1999), realmente possibilitou a associação das peças às pessoas e não ao número de entradas e saídas. Esse fato inibiu as oportunidades dos alunos alcançarem, por si só, as minhas expectativas com o jogo. Se as peças brancas representam pessoas, além de não fazer sentido, eu não posso simplesmente cancelar uma pessoa que entrou com uma pessoa que saiu (cancelamento de uma peça de cada cor mantendo a variação atual), pois isso acarretaria uma mudança financeira para o dono da festa.

Em uma análise posterior à aplicação, percebi que o problema supostamente instransponível se tornaria uma questão de simples resolução se os alunos pensassem em mover as peças no sentido mesa/estoque (sentido contrário). Quando o aluno L resolveu representar a carta “cinco preta” alegando que poderia retirar cinco peças brancas na falta de peças pretas para serem acrescentadas, pois aumentar cinco no registro da saída da festa seria o mesmo que cancelar cinco entradas convidei a turma a observar sua fala e sua movimentação. Quando todos concordaram que fazia sentido o que ele disse, sugeri que usassem essa lógica para resolverem seus problemas.

Nas respostas aos questionários, pude perceber que os jogos não estavam tendo o efeito desejado. Pareceu uma boa ideia a inserção do segundo dado, que permitiria uma possibilidade de o aluno explorar o efeito da subtração de um número negativo, principalmente pela difícil contextualização deste caso algum contexto. Contudo, a situação do jogo não estava permitindo uma exploração interessada dos alunos. Em poucos momentos eles alegavam ter executado todas as ações possíveis no universo do jogo e/ou não se interessaram para ir adiante. Sendo assim, foi oportuno antecipar o jogo do Banco Imobiliário de Porto Alegre.

Nesse jogo, eu pude perceber nos alunos a exploração matemática por mim almejada. Jogando em grupo, eles deveriam jogar certo, pois os colegas controlariam suas ações. Teriam que fazer as contas certas, pois os oponentes não concordariam com cálculos errados.

Como o montante inicial escolhido foi pequeno em relação às necessidades do jogo, rapidamente todos os alunos se relacionaram com dinheiro vermelho e puderam vivenciar a situação de números de natureza oposta (lembrando que até esse momento não se havia falado em números negativos).

Conforme está retratado no relato, a exploração dos jogos permitiu aos alunos se depararem com cálculos de várias naturezas. O que contrariou minha expectativa inicial foram os altos índices de alunos ignorando a existência dos números negativos em suas respostas ao terceiro questionário. É como se os números vermelhos surgissem apenas no contexto do jogo, de modo oposto aos números azuis, mas que não existissem na vida real. Ou que, talvez, eles existissem, mas o fato de serem opostos aos azuis não implicaria em serem opostos aos naturais.

Nos relatos dos alunos, como podemos ver nos relatos abaixo, pude perceber fortemente a ideia de que a soma representa um aumento, um dos obstáculos epistemológicos que devem ser superados no aprendizado dos números relativos (GONZÁLEZ *et al*, 1990).

Prof.: Existe um número que somado a 5 resulte em zero? Se sim, qual é?
Aluno A: Não, só se for menor.
Aluno ME: Não, pois não tem como um número somado a outro dar como resultado um número menor.
Aluno J: Não pois [para] somar você tem que botar a mais os números e não tem como dar 0.

Em uma análise posterior, percebi que os jogos, até então, não provocaram os alunos com respeito à ordem. Dessa forma, mesmo que existissem outros números além dos conhecidos, o zero não deixaria de ser necessariamente um limite inferior. Ou talvez os estudantes tenham percebido que os números relativos só fazem sentido em contextos em que exista um significado posicional em torno do zero.

Durante várias aulas, os alunos se interessaram pelo jogo Banco Imobiliário de Porto Alegre, um fato distinto em relação à aplicação dos jogos anteriores. Avalio isso quanto ao próprio ato de jogar. Mesmo Grando (2000) propondo que um jogo seja qualquer atividade humana em que haja um envolvimento mental, como a comunicação por meio de palavras, penso agora que nem toda atividade proposta a alunos possa ser considerada um jogo. Mesmo que todos os jogos utilizados[11] almejassem o desenvolvimento do pensamento, nem todos se propunham a fazer isso com o mesmo grau de competitividade, variando do ponto de vista do desafio proposto e das possibilidades de exploração. Avalio isso em relação ao distinto grau de envolvimento que os alunos desenvolveram para com cada atividade. Na aplicação da sequência de atividades, a prioridade dos jogos não era a de que os alunos se divertissem, essa

[11] Jogo do Segurança, Jogo das Tropas, Banco Imobiliário de Porto Alegre, Escova do Zero.

poderia ser uma consequência; mas com atividades não atrativas dificilmente se chegará aos objetivos pedagógicos almejados. Sendo assim, penso que em uma nova aplicação dessa sequência de atividades, tanto o Jogo do Segurança quanto o Jogo das Tropas precisarão de um aprimoramento.

7. 2 Análise dos cálculos

Para que a excessiva repetição de exercícios não influenciasse o modo de pensar dos alunos, onde sucessivos exercícios feitos e corrigidos fizessem os alunos perceber um padrão de resolução dos cálculos, e, com isso, diluindo a influência dos jogos nas conclusões sobre a soma entre números relativos, defini brevemente esse conjunto numérico com os alunos e propus alguns cálculos, conforme segue no quadro abaixo.

Quadro 15 - Cálculos introdutórios à soma entre números relativos.

a) $(+19) + (-4) =$

b) $(+12) + (-20) =$

c) $(-4) + (-1) =$

d) $(-13) + (+17) =$

e) $(-3) + (-7) =$

f) $(+4) + (-15) + (-17) + (-5) =$

Fonte: Acervo do autor.

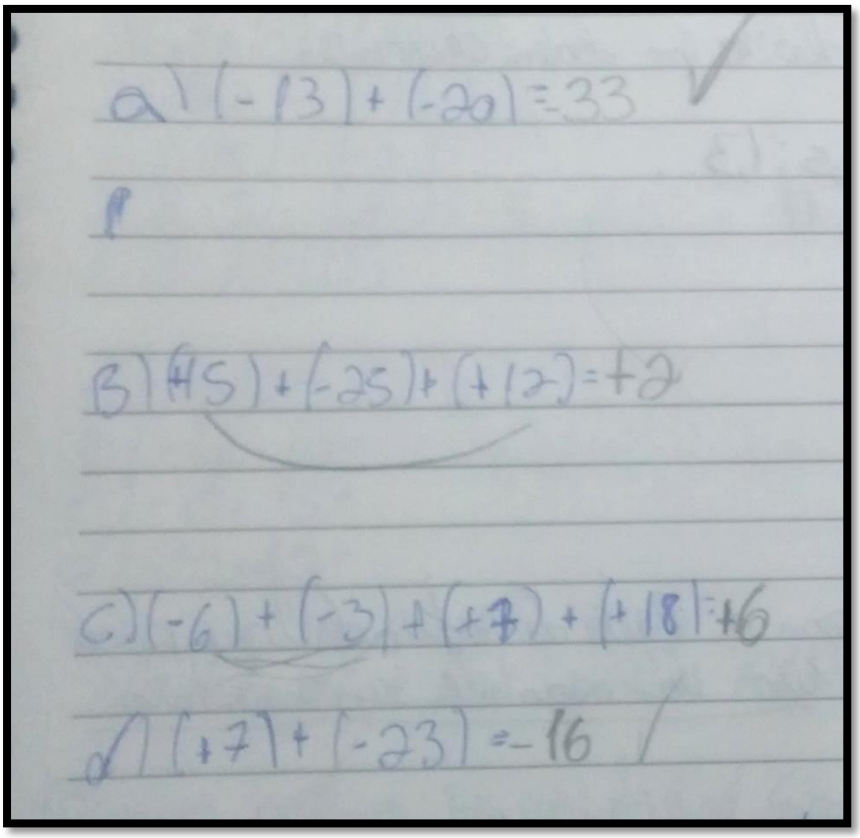
Minha expectativa pessoal foi a de que, com o auxílio dos jogos, os alunos não cometessem erros comumente verificados nesse tipo de atividade, como fazer a soma dos valores absolutos dos números e colocar o sinal negativo na resposta.

De fato, muitos alunos usaram analogias entre os jogos e as operações. O aluno D, ao item *b*, respondeu ao colega B “diminui porque tu paga tua dívida”, alegando que o número na resposta não poderia ser 32 (como o colega B havia respondido), qualquer que fosse o sinal. Ou seja, para esse aluno, os números de sinais opostos têm um efeito contrário, de anulação, quando somados. Pela sua fala, percebe-se que o mesmo utiliza um esquema que associa números relativos a dinheiro. Uma associação facilitada pelo jogo Banco Imobiliário de Porto Alegre. Já a aluna L disse que o item *b* ficaria -32, “*pois essa é uma soma com números negativos*”. Quando questionada sobre a resposta da conta “(-12) + (-20)”, a mesma fez uma expressão pensativa e voltou ao lugar para pensar. Quando voltou, o cálculo estava respondido corretamente -8. A aluna AL, por sua vez, com respeito ao item *c*, disse: “se tu deve quatro e deve um, então tu deve cinco”, outra recorrência ao jogo, agora em um cálculo com ambos os números de mesmo sinal. A partir desta frase, a aluna AL descreve um esquema para a resolução dessa composição de duas transformações a partir de uma alusão dos números a posses e dívidas. Enquanto isso, o aluno N disse que ficou positivo e depois faz a diferença (com respeito ao item *d*).

Com respeito ao item *f*, o aluno BH resolveu corretamente realizando os cálculos no sentido da leitura enquanto o aluno P resolveu, também corretamente, agrupando todos os negativos para depois comparar com o (+4).

Em itens mais simples, os alunos desenvolvem esquemas que podem encaminhá-los à resposta correta ou não. Já nos itens menos triviais, é possível ver que os alunos desenvolvem estratégias que conduzem à mesma resposta. Segundo a teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 2014), esse tipo de procedimento é chamado de esquema, uma maneira própria do indivíduo de resolver um determinado conjunto de situações dadas. Perceber isso, por parte do professor, é importante para o processo educativo, pois esses alunos que desenvolveram esquemas corretos resolveram mais cálculos corretamente do que se seguissem o modelo proposto pelo professor. Um exemplo disso é o desenvolvimento do aluno E, que pode ser acompanhado na Figura 20.

Figura 20 - Resolução do aluno E de cálculos com relativos.



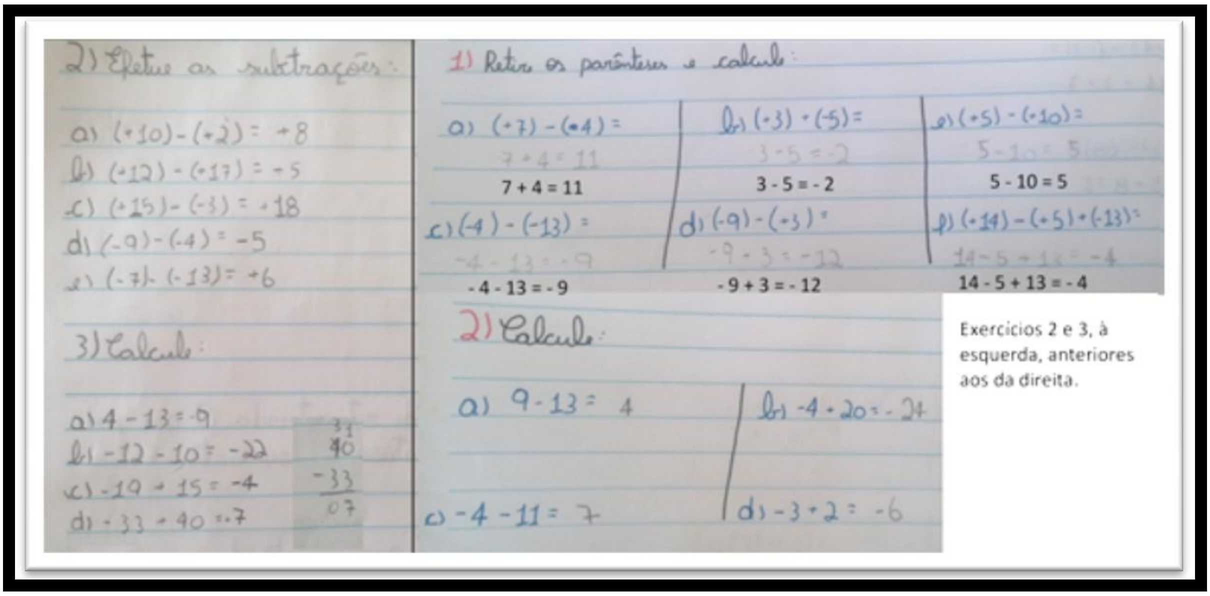
Fonte: acervo do autor.

Aqui podemos ver um esquema desenvolvido por muitos alunos, que foi o de agrupar números de mesmo sinal que não estão lado a lado, conforme pode ser visto no item B. Trabalhar desta forma facilita os cálculos, pois será necessário um número menor de subtrações para se chegar à resposta, cujo módulo será o módulo da diferença entre o resultante positivo e o negativo.

Houve uma preocupação especial com os cálculos que envolvem uma composição de duas ou mais transformações para sua resolução. Entendo que esse seja o tipo de problema do campo aditivo mais frequente na vida escolar dos alunos e, consequentemente, o que eles mais precisam dominar.

O que pude perceber é que muitos alunos têm dificuldade em estipular um modelo de resoluções. Resolvem itens seguindo um padrão que não é novamente aplicado em cálculos análogos futuros e, geralmente, não sabem explicar o motivo dos equívocos, como pode ser exemplificado na Figura 21, em que foram compilados cálculos do aluno G de dois dias distintos.

Figura 21 - Cálculos feitos pelo aluno G em duas aulas diferentes.



Fonte: acervo do autor.
Os excertos em negrito são transcrições da escrita do aluno.

À esquerda, na imagem, estão retratados cálculos resolvidos corretamente. À direita (em relação à divisão da figura) há cálculos desenvolvidos de maneira incorreta. O detalhe que faz pensar é que os incorretos foram feitos em uma aula posterior aos da esquerda. Para a maioria dos cálculos (todos à exceção do item *d* do exercício 2) o esquema utilizado pelo aluno para calcular foi observar os módulos dos números e efetuar a operação entre eles do maior para o menor.

A alusão financeira (tanto aos dinheiros coloridos quanto às perdas e dívidas) esteve presente nas respostas ao quarto questionário. Novamente, mais da metade dos alunos teve um bom aproveitamento, descrevendo corretamente os três casos da soma. Para os alunos que descreveram procedimentos e/ou regras incorretas, os mais frequentes foram “fica o sinal do primeiro número com a soma dos módulos” e “fica o sinal do maior com a soma dos módulos”. A meu ver, em ambas as respostas o pensamento dos alunos está sendo norteado pelo obstáculo de que a soma representa um aumento. O símbolo da operação de adição entre dois números implica na adição dos valores absolutos. Esse é o tipo de erro mais frequentemente visto nas resoluções dos alunos. Concluo, com isso, que o obstáculo da visualização da soma como um aumento seja mais difícil de ser superado do que eu esperei ao início desse trabalho.

Ao explorar a reta numérica e mostrar que – assim como era feito com os Naturais – a adição e a subtração poderiam ser vistas como deslocamentos sobre a reta, percebi que muitos alunos passaram a usar o esquema de traçar a reta antes de um conjunto de exercícios e utilizá-la para deduzir a resposta de um cálculo.

Para a subtração de um número relativo e o efeito que isso ocasionaria no cálculo, a recorrência ao universo do jogo foi crucial para o entendimento dos alunos. Através da pergunta: “se dinheiro vermelho for retirado da pessoa, sua situação financeira melhora ou piora?”, os alunos conseguiram visualizar o efeito de se subtrair um negativo. O aluno D disse, como resposta ao cálculo 100 – (-10), “tem que aumentar 10, por que tu tá se livrando de uma dívida”. Uma situação que em meus anos anteriores de docência eu sempre tive dificuldades em contextualizar, através do jogo, tornou-se algo de fácil compreensão dos alunos. Tal procedimento seria importante na retirada dos parênteses dos números.

Em meu planejamento, percebi que eu não precisaria de jogos para o desenvolvimento da multiplicação se os alunos entendessem bem o campo aditivo, pois os casos da multiplicação poderiam ser explicados com a ajuda da soma, pois escolhi trabalhar apenas com números inteiros. Sendo assim, a *Regra dos Sinais* seria uma conclusão, e não uma hipótese para a aprendizagem da multiplicação.

Antes da aula, minha expectativa é que eles concordariam que a multiplicação de um positivo por um negativo resulta em um número negativo, usariam a comutatividade no caso oposto entre um negativo e um positivo e esperariam eu dizer se o produto entre dois negativos é maior ou menor que zero.

Foi exatamente isso que aconteceu. Contudo, a fim de evitar a imposição do terceiro caso, expliquei o significado dos elementos da multiplicação. Dizer que o primeiro elemento ser negativo equivaleria ao oposto da solução acabou sendo uma conclusão que elaboramos. De qualquer forma, os alunos demonstraram aceitar os resultados encontrados no desenvolvimento utilizando a distributividade. Somei à minha fala o caso do Jogo das Tropas, em que foi adicionado o dado das operações, em que três das seis faces produziriam o efeito inverso do encontrado no outro dado. Então eles entenderam com maior facilidade qual é o oposto de um número e ao que ele equivale.

A última aula foi destinada a uma atividade envolvendo todo o conteúdo de números relativos, a fim de avaliar o conhecimento da turma. O conjunto de itens está contido no quadro 16 e os comentários serão feitos na sequência.

Quadro 16 - Conjunto de itens contidos na atividade final.

1) Um carregador vai sair de uma câmara frigorífica. Dentro dela, a temperatura é de -19°C, fora dela, a temperatura é de 20°C. A diferença entre essas temperaturas é de_________ °C. Justifique sua resposta.

2) Uma pessoa tem R$ 600,00 na sua conta bancária e faz, sucessivamente, as seguintes operações bancárias:

• Retira R$ 73,00. • Deposita R$ 18,00. • Retira R$ 469,00. • Retira R$ 125,00.

Após todas essas operações, o saldo final dessa pessoa fica positivo ou negativo? Em quantos reais?

3) Heródoto, historiador e geógrafo grego, nasceu no ano 484 antes de Cristo e faleceu com 59 anos de idade. Usou a prosa para descrever as regiões pelas quais passou e as guerras de sua época. Em que ano ele faleceu? Mostre seus cálculos.

4) Calcule:

a) $(+4)+(-10)=$ b) $(-12)+(-7)=$ c) $(-6)+(+10)=$ d) $(+3)+(-1)=$

5) Calcule:

a) $(+9)-(+12)=$ b) $(+6)-(-5)=$ c) $(-4)-(-6)=$ d) $(-12)-(+4)=$

6) Calcule:

a) $5-7=$ b) $-12+7=$ c) $-5-6=$ d) $-3+10=$

7) Um colega da outra turma disse que a soma entre dois números negativos resulta sempre em um número negativo. Essa afirmação está correta ou errada? Explique:

8) Dado um valor inicial, se subtraímos um número dele, o resultado será sempre menor que o valor inicial? Explique:

9) Calcule:

a) $3\ x\ (-2)=$ b) $(-5)\ x\ 5=$ c) $(-12)\div 3=$ d) $(-48)\div(-2)=$

Fonte: acervo do autor.

Os conteúdos envolvidos na primeira questão, que corresponde a um problema de transformação de uma relação segundo Vergnaud (1986), foram compreensão da reta numérica, compreensão de que negativos de maior módulo estão mais próximos do zero e do conceito de diferença. Foi justamente a incompreensão desse conceito que ocasionou o elevado número de erros (cerca de 60% da turma), conforme representado nas transcrições das respostas dos alunos representadas a seguir.

Aluna AL: "Pois temos o aumento de 19 até chegar ao 0. E depois aumenta mais até chegar ao 20. Então o cálculo será de 19 + 20=39, que resultará em 39."

Aluno B: "(-19) + 20 = +1. Ficará com a diferença de 1°C, pois -19 aumentando 20 vai da 1 positivo."

J: "Pois se está no -19 é como se a gente fosse andar 1 casa e a próxima casa seria o -20 e a diferença entre os dois é de 1°C de temperatura."

JG: "Eu estou no -19°C e ando 39°C para a direita eu chego no 20°C."

Quatro alunos dos dez que acertaram a questão utilizaram o esquema de traçar a reta numérica. Há ainda o conjunto de alunos que apresentam erros que não se enquadram propriamente no conteúdo em questão, como a aluna I que disse “Pois, tira 20 de 19 que fica 10°C”. Com respeito aos que tentaram justificar sua resposta através de cálculos, o erro mais reincidente foi “(-19) - (+20) = 1”. Os alunos associaram a palavra diferença à subtração, mas ao invés de subtraírem um número do outro, efetuaram a subtração entre os módulos.

A segunda questão correspondeu a uma sucessão de cálculos em que os esquemas necessários eram os de juntar ou anular. Um número considerável de alunos resolveu essa questão, uma composição de transformações, efetuando cálculos no sentido da leitura e que chegaram à última operação com 76 reais positivos almejando retirar 125. Dentre as possíveis respostas, mais de um aluno organizou o algoritmo da soma da seguinte forma;

$$\begin{array}{r} 76 \\ \underline{-125} \\ 151 \end{array}$$

Talvez o aluno tenha procedido desse modo por entender que o negativo, por ser menor, deva ser subtraído do positivo e, desta forma, deva ser posicionado abaixo na organização da conta. Segundo Vergnaud (2014), procedimentos incorretos para a resolução de um conjunto de situações também são conceituados como esquemas. De certa forma, esse é o esquema que foi usado durante muito tempo na vida escolar do aluno, quando o objetivo era subtrair naturais e decimais.

Quatro alunos da turma indicaram soluções positivas para esse exercício, dos quais a metade apresentou cálculos para tal.

Compreensão da reta numérica e interpretação de texto foram os conceitos envolvidos na resolução do terceiro item, que correspondeu a um problema de composição de relações. Cerca de dois terços da turma erraram ao apresentar como solução a soma dos números 484 e 59. Esse exercício envolveu o caso do campo aditivo composição de relações, tendo sido necessário descobrir o valor inicial através da operação inversa.

Ao final da análise dessas três questões, pude perceber que talvez esse tipo de problema devesse ter sido mais trabalhado ao longo das aulas. Os alunos da turma que apresentaram os melhores aproveitamentos nessa atividade tiveram seus erros em uma dessas três questões. Mesmo tendo focado na discussão de conceitos e na capacidade argumentativa durante as aulas, isso não foi o bastante para que eles pudessem resolver esse tipo de questão.

Com respeito aos exercícios que envolveram estritamente cálculos no campo aditivo, um fato que chamou minha atenção foi que o aproveitamento do exercício 6 foi superior ao do exercício 5. Associo esse fato à baixa adesão ao procedimento da retirada dos parênteses por parte da turma, oito alunos dos 27.

Mais de 60% dos alunos acertaram três ou quatro itens do exercício 6, o que considero um bom aproveitamento.

Com respeito à questão 7, é importante reiterar que em nenhum momento, inclusive durante o estudo da multiplicação, alguma frase como “menos com menos dá mais” foi dita em aula pelo professor. Baseado em sua experiência em sala de aula e nas confusões apresentadas por estudantes em virtude do estudo da multiplicação – mais precisamente em como os procedimentos dessa nova operação parecem atrapalhar tudo o que já havia sido construído corretamente pelo aluno com respeito à soma – muito cuidado foi tomado.

Durante as aulas, procurou-se sempre abordar a multiplicação como uma nova operação, com regras diferentes da soma. Mesmo assim, a avaliação final mostrou que relações tais como “menos com menos dá mais” – ignorando tudo que foi construído e usando essa nova verdade para resolver os exercícios antigos. Penso que esse esquema esteve presente nas questões anteriores, em acertos e erros. Abaixo seguem alguns recortes das resoluções dos alunos:

Aluna AL: “Sim, pois é como se eu devesse, e conseguisse mais dívidas.”
Por exemplo: $\underset{dívida\ inicial}{(-12)} + \underset{segunda\ dívida}{(-7)} = \underset{total\ de\ dívidas}{-19}$
Aluno E: “Errado, pois dois números negativos dá positivo.”
Aluno JG: “Esta afirmação está errada pois a somando dois negativos você terá um número maior”
Aluna I: “Correta pois, a soma de dois números negativos resulta a positivo”.
Aluna M: “Certa. Pois aumentar um negativo é diminuir, e diminuir é aumentar. Ex: (-12) + (-7) = -19”.
Aluna ME: “Correta, pois (-1) + (-1) = -2, a resposta dele estaria errada se tratasse de multiplicação que seria (-1) × (-1)=+1”.

Através das resoluções dos alunos AL, M e ME, é possível perceber que houve um entendimento pelos alunos, inclusive fazendo uso correto de exemplos. Mais da metade da turma acertou essa questão e, dos nove que erraram, oito o fizeram em decorrência do teorema em ação “menos com menos dá mais”. É possível evidenciar nesse fato o uso de um esquema incorreto por uma parte considerável da turma. Muitas vezes é difícil deduzir a origem da utilização de esquemas incorretos. Entendo que, nesse caso em questão, a utilização esteja mais relacionada a uma confusão de procedimentos do que à falta de compreensão do assunto.

De maneira análoga aos outros itens interpretativos, um grande número de alunos errou o exercício 8, por não perceber o contraexemplo que qualquer negativo poderia representar. Abaixo seguem alguns recortes dos alunos:

Aluno PH: "Não, porque se você fosse subtrair um negativo de um positivo o valor aumenta exemplo:
+7 - (-1) = +8.
Aluno NA: "Sim por que ele é mais auto".
Aluno M: "Não, pois se tirarmos +1 de +20 vai restar +19, mas, se tirarmos -1 de +20 vai restar +21.
Aluna I: "Não, pois a subtração ela aumenta e não diminui".
Aluno J: "Depende se o número inicial for maior e positivo".

Quanto à última questão, os erros presentes estão relacionados principalmente à aritmética básica, dos cálculos com os módulos dos números.

A análise quantitativa feita desta atividade me permitiu concluir que a grande maioria dos alunos alcançou um índice de acertos acima da média da escola, que é de 6,0 pontos.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Há muito tempo me sinto incomodado pelo fato do conjunto dos números menores que zero parecerem de difícil entendimento e prejudicarem o desempenho escolar dos estudantes.

Na busca por um motivo para tal fato, descarto a complexidade dos procedimentos operatórios, uma vez que os procedimentos da soma de números fracionários são muito mais trabalhosos. Não acredito que o problema esteja na natureza dos números negativos, pois penso que hoje em dia esses números estão presentes na vida das pessoas, e não são vistos com estranheza pela maioria. Penso que seja necessário tirar da lista, também, o volume de conteúdo a ser estudado nesse momento do sétimo ano, uma vez que há relações entre todas as operações básicas.

Compreendendo melhor o tema, reitero minha hipótese ao início do trabalho, de que o principal motivo para o grande volume de dúvidas e erros dos alunos com respeito a esse assunto está relacionado à atribuição de significados. Penso que é a compreensão do significado que vai evitar que um aluno conclua que a soma de dois negativos seja positivo, pois isso não faz sentido quando consideramos que os negativos são opostos dos correspondentes positivos e vice-versa.

A partir da pesquisa bibliográfica feita percebi que, de fato, a compreensão desses números não é uma tarefa simples. Destaco, no processo de problematização pessoal perante o tema, minha percepção de – mesmo graduado e professor escolar há alguns anos – desconhecer a noção de número relativo. Essa noção, e a ideia de que positivos e negativos têm sentidos opostos, deu sustentação à construção das atividades.

Entre as idas e vindas da elaboração de uma sequência de atividades que permitisse aos alunos a compreensão do tema e o entendimento do comportamento de números de naturezas opostas para a realização de cálculos, muitas ideias sugiram e diversas foram descartadas - lembrando que o relato e a análise retratados nas páginas precedentes corresponderam a uma segunda aplicação de proposta didática para alunos de sétimo ano. Nesse contexto, a utilização dos jogos pareceu um bom contexto para desenvolver uma significação com os números relativos, e ao conjunto das operações básicas.

Ao avaliar a aplicação da sequência de atividades, destaco positivamente a metodologia da utilização dos jogos.

Os jogos puderam servir de sustentação para os alunos nos primeiros cálculos feitos, antes inclusive de se falar em aula sobre números negativos. Conforme os alunos foram desenvolvendo o conhecimento desse conteúdo, passou a não ser necessária para todos a sustentação sobre os dinheiros coloridos. Entretanto, novas recorrências foram sendo feitas ao universo dos jogos, conforme aspectos mais complexos do conteúdo passaram a ser discutidos em aula.

Minha expectativa pessoal era a de que todos os alunos conseguissem aprender, resolver corretamente cálculos, explicitar com palavras seus pensamentos. Esse objetivo específico não foi alcançado; erros relacionados à incompreensão persistiram, nas respostas de alguns alunos, e deverão motivar novas experimentações. Mas, resultados positivos foram encontrados com respeito à criação de um contexto exploratório para números de natureza oposta e para a percepção do padrão operatório entre esses números, atribuindo significado às conclusões, culturalmente chamadas de *regras*.

As conclusões sobre a adição e a subtração de números relativos foram construídas pela recorrência ao universo dos jogos, as quais serviram também para o processo de retirada dos parênteses. Para os cálculos envolvendo números sem parênteses, a lógica usada foi equivalente à adotada para a adição.

É impossível deixar de concluir sobre esse trabalho sem comentar que, se esse é um assunto difícil de aprender, em igual ou maior escala está a dificuldade de se ensiná-lo.

De um modo geral, foram muitas as transformações que sofri durante a confecção dessa dissertação. As ideias da investigação qualitativa me permitiram repensar bastante sobre minhas práticas em aula. Estar mais sensível ao fato de que, realmente, sujeitos distintos aprendem de maneira distinta.

Concluo que o trabalho com jogos envolvendo números relativos pode acrescentar muito na aprendizagem dos alunos com respeito a esse tema.

Em uma nova aplicação dessa sequência de atividades penso que poderia rever melhor a distribuição do tempo para cada jogo e penso que acrescentaria também inserir um jogo digital no planejamento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERTONI, N. E. **Educação e linguagem matemática II**: Numerização. Brasília: Universidade de Brasília, 2007.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1994.

CARVALHO, A. L. T.; REIS, L. F. **Matemática, 7**. Tatuí: Casa Publicadora Brasileira, 2015.

DUVAL, R. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 305-330, jul./dez. 2012.

GLAESER, G. Epistemologia dos números negativos. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 17, p. 27 – 124, 1985.

GONZÁLEZ, J. L. *et alii*. **Numeros Enteros**. Madrid: Sintesis, 1990.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 239f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

LINARDI, P. R. **Quatro jogos para Números Inteiros:** uma análise. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 1998.

LINCHEVSKI, L.; WILLIAMS, J. Using intuition from everyday life in ‘filling’ the gap in children’s extension of their number concept to include the negative numbers. **Educational Studies in Mathematics**, n. 39, p. 131–147, 1999.

MEGID, M. A. B. A. Construindo a matemática da sala de aula: uma experiência com números relativos. In: FIORENTINI, D; MIORIM, M. A. (orgs.) **Por trás da porta que matemática acontece?**. Campinas: Ílion, 2010. p. 159 – 204.

MORAIS, A. D. **Fórmula (-1):** Desenvolvimento de objetos digitais de aprendizagem para as operações com números positivos e negativos. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

SCHUBRING, G. Um outro caso de obstáculos epistemológicos: o princípio da permanência. **Bolema**, Rio Claro – São Paulo, Ano 20, n. 28, p. 1 – 20, 2007.

VERGNAUD, G. Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e Didática das Matemáticas. Um exemplo: As estruturas aditivas. **Análise psicológica**, v. 1, n. 5, p. 75 – 90, 1986.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (Ed.) **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**. Curitiba: UFPR, 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE A

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada "A construção dos números relativos para além do formalismo" desenvolvida pelo professor/pesquisador Thiago Crestani Gajko. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela professora Dra. Elisabete Zardo Búrigo, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone 33086212 ou e-mail elisabete.burigo@ufrgs.br .

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa e para o desenvolvimento da educação matemática. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, é contribuir para a promoção e a compreensão do conteúdo números relativos e suas Operações através do desenvolvimento de uma sequência de atividades.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), e a identidade dos alunos ficará preservada.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio da participação em aulas, em que sua produção será analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço e-mail thiagogajko@gmail.com.

Fui ainda informado (a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável: ______________________________________

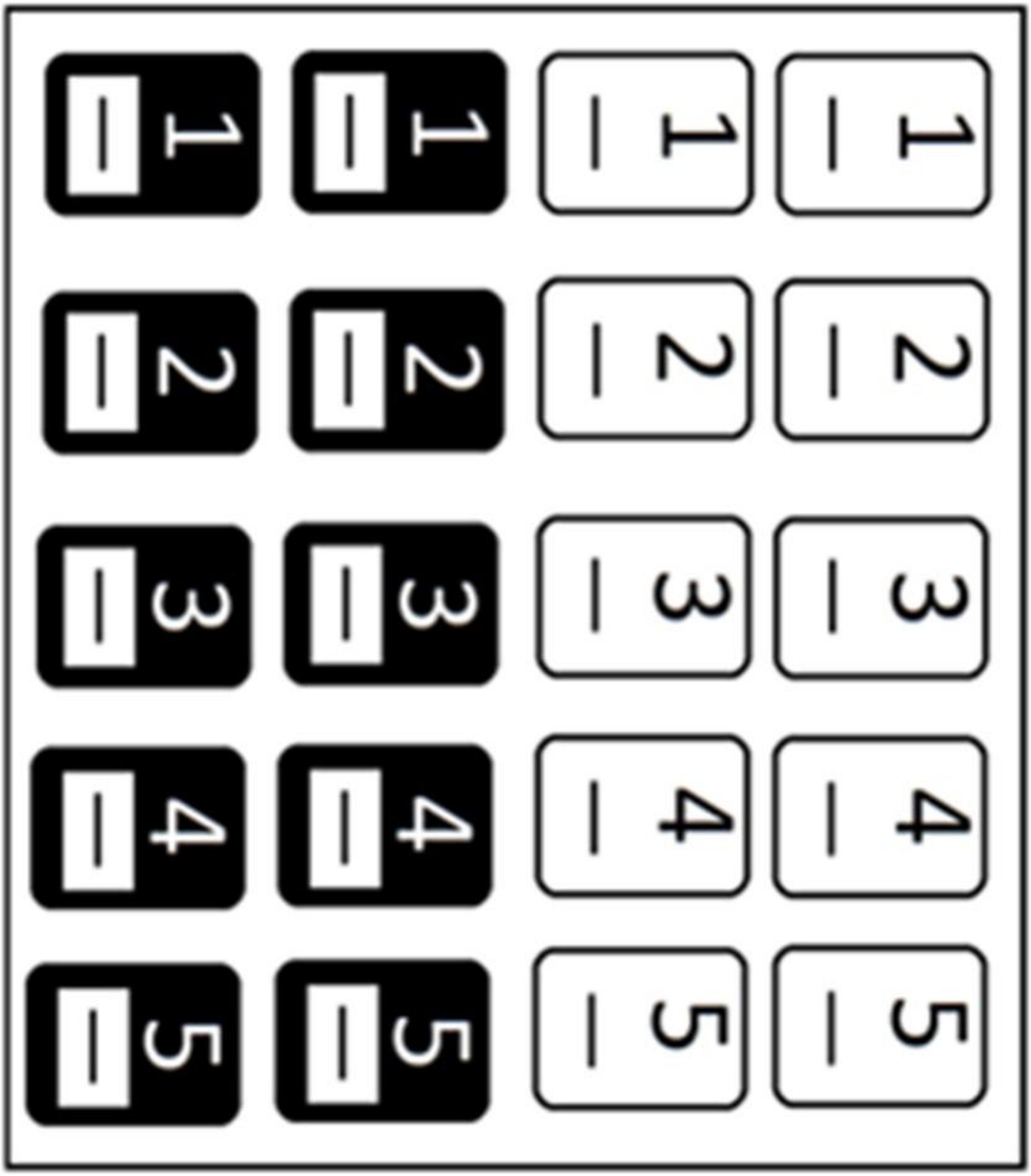
Assinatura do(a) pesquisador(a): ___________________________________

Assinatura do Orientador da pesquisa: _____________________________

APÊNDICE B

MATERIAIS UTILIZADOS NOS JOGOS

Cartões utilizados no Jogo do Segurança.



Cartas das propriedades do jogo Banco Imobiliário de Porto Alegre:

Dinheiro do jogo Banco Imobiliário de Porto Alegre:

Cartas de ação do jogo Banco Imobiliário de Porto Alegre:

Problemas com o carro: Você entrega $6 A ao banco.

Loteria de fim de ano: Cada jogador joga um dado. O jogador que obter um maior número deve receber $5 A de cada outro jogador.

Obra de caridade: Você dá $3 A a cada jogador e ao banco.

Doação espontânea: Você dá $10 A a seu colega à direita

Amizade de longa data: Você pega $10 V do colega à sua esquerda e fica com eles.

Carrão novo: Jogue o dado duas vezes. Ande um número de casas igual ao somatório dos dados e recebe essa quantia em dinheiro azul do banco.

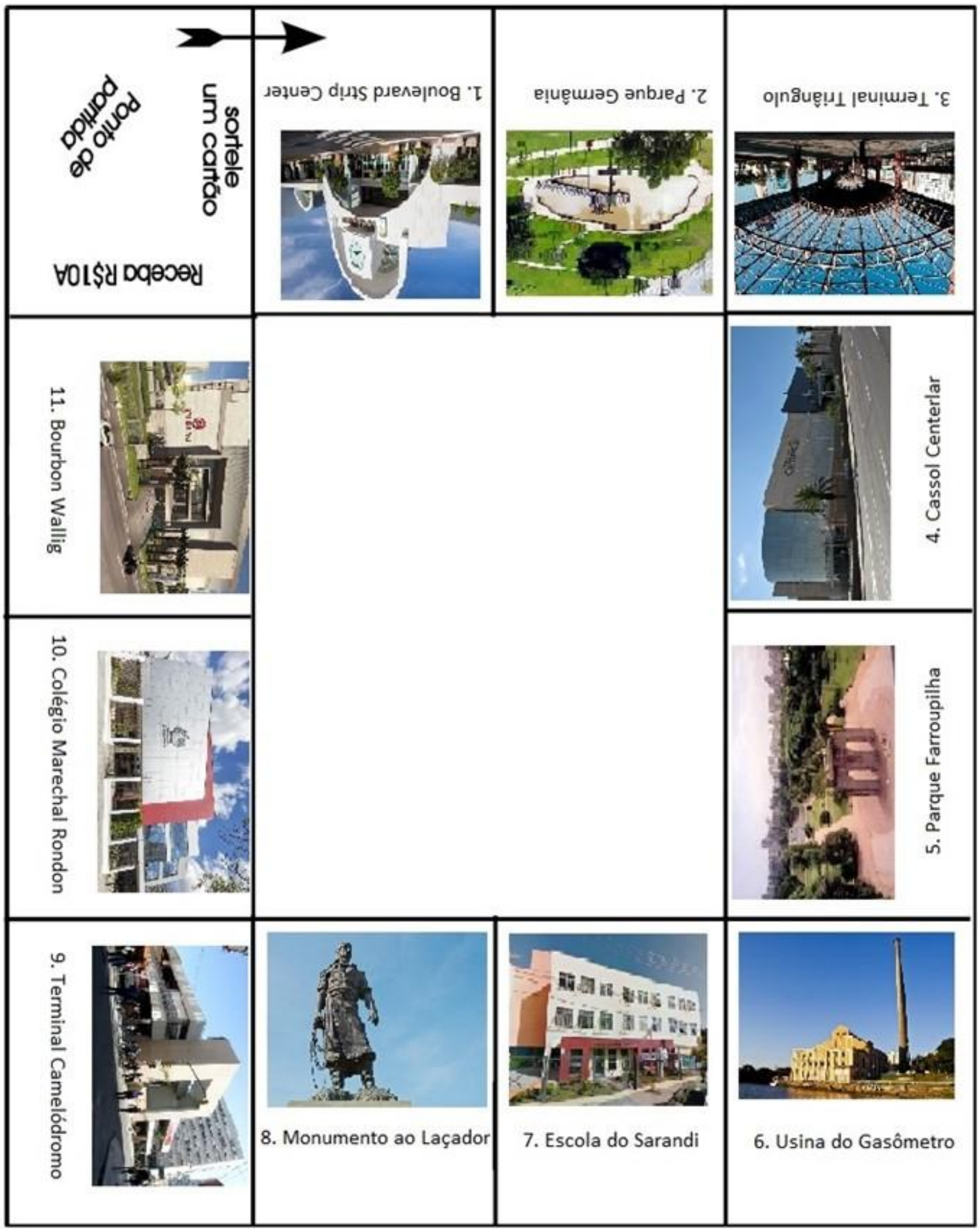
Cliente Fidelidade-Gold: O aluguel de sua próxima estadia será pago pelo banco

Quitação de dívida: Você entrega $8 V ao banco.

Herança esquecida: Entregue todo seu dinheiro vermelho ao banco. Sua dívida está quitada.

Rendimentos de ações: O banco lhe dá $10 A.

Tabuleiro do jogo Banco Imobiliário de Porto Alegre:



APÊNDICE C

LISTAS DE ATIVIDADES PROPOSTAS AOS ALUNOS

Folha 1 – Conclusões sobre o Jogo do Segurança

1. Você gostou do jogo? Por quê? ____

____

____

<u>Sobre a Fase 1:</u>

2. Se as peças pretas acabarem, isso quer dizer que ninguém mais pode sair?

____

____

____

3. O que você fez quando acabaram suas peças?

____

____

____

4. Cite mais coisa(s) que você percebeu nesse jogo:

____

____

____

____

<u>Sobre a Fase 2:</u>

5. Explique que mudança houve no jogo com a diferença entra as setas para a **esquerda** e para a **direita**:

____

____

____

____

Folha 2 – Conclusões sobre o Jogo das Tropas

1. Você gostou do jogo? Por quê? ____

____

____

Sobre a Fase 1:

2. O que você fez quando suas peças acabaram e você precisava de mais?

____

____

____

3. Quando o dado indicava uma coisa a fazer, você poderia compensar essa operação movimentando as peças do oponente?

____

____

____

Sobre a Fase 2:

4. Explique o significado do efeito da subtração, acrescentado no jogo pelo dado das operações.

____

____

____

____

5. Que outras coisas você percebeu no jogo que não estão contidas nos itens anteriores?

____

____

____

Atividade 3 – Pensando sobre a noção de número

1) Existe um número maior que todos os outros?

____

____

2) Existe um número menor que todos os outros?

____

____

3) Existe um número que somado a 42 resulte em 109? Se sim, qual é?

____

____

4) Existe um número que somado a 5 resulte em zero? Se sim, qual é?

____

____

5) Existe um número que somado a 7 resulte em 4? Se sim, qual é?

____

____

6) Que nome você daria para os tipos de números que poderiam aparecer nas questões 4 e 5?

____

____

7) É possível somar esses números? Dê um exemplo.

____

____

Atividade 4 – Concluindo sobre a soma de Números Relativos.

1) Como você explicaria para um colega que não esteve presente nas últimas aulas a soma entre Números Relativos (positivos, negativos e zero).

a) Os dois números são positivos: ____

____
____
____
____
____
____
____

b) Um número é positivo e outro é negativo: ____

____
____
____
____
____
____
____

c) Os dois números são negativos: ____

____
____
____
____
____
____
____

Atividade 5 – Analisando a subtração

1) Certo dia a temperatura estava 6°C durante o dia e ficou -5°C durante a noite. Com base nessa informação, responda:

a) Escreva o cálculo que representa a diferença entre essas temperaturas usando números negativos:

____

b) Qual foi a diferença entre essas duas temperaturas? ___________

2) Durante uma partida do Banco Imobiliário de Porto Alegre, José possuía R$ 13A e R$ 5V. Ao retirar uma carta da pilha, esta indicou que ele deveria entregar R$3V para o banco. Com base nisso, responda:

a) A ação de entregar dinheiro vermelho ao banco foi uma coisa vantajosa ou desvantajosa para José? Explique. _____

____

b) Qual era o saldo antes de entregar essa quantia ao banco? ____

c) Com ficou seu saldo após entregar tal quantia? ____

d) Escreva um cálculo que represente o que aconteceu com o saldo de José nesse episódio. ____________________

____

3) Neste exercício, faça de conta que você é o professor de matemática de uma turma do 7° ano e que um de seus alunos resolveu um exercício conforme está representado abaixo. Para cada item, você deve indicar ao aluno se ele acertou ou errou, explicando, de modo que ele possa entender o porquê de cada resposta.

a) $(+3) - (+5) = +2$ ____

____

b) $(-6) - (-10) = +4$ ____

____

c) $(-9) - (-4) = -13$ ____

____

d) $(+5) - (-12) = -7$ ____

____

Atividade final. Folha 1.

1) Um carregador vai sair de uma câmara frigorífica. Dentro dela, a temperatura é de –19ºC, fora dela, a temperatura é de 20ºC. A diferença entre essas temperaturas é de________ °C. Justifique sua resposta.

____

____

____

2) Uma pessoa tem R$ 600,00 na sua conta bancária e faz, sucessivamente, as seguintes operações bancárias:

• Retira R$ 73,00.

• Deposita R$ 18,00.

• Retira R$ 469,00.

• Retira R$ 125,00.

Após todas essas operações, o saldo final dessa pessoa fica positivo ou negativo? Em quantos reais?

3) Heródoto, historiador e geógrafo grego, nasceu no ano 484 antes de Cristo e faleceu com 59 anos de idade. Usou a prosa para descrever as regiões pelas quais passou e as guerras de sua época. Em que ano ele faleceu? Mostre seus cálculos.

Atividade final. Folha 2.

4) Calcule:

a) $(+4) + (-10) =$

b) $(-12) + (-7) =$

c) $(-6) + (+10) =$

d) $(+3) + (-1) =$

5) Calcule:

a) $(+9) - (+12) =$

b) $(+6) - (-5) =$

c) $(-4) - (-6) =$

d) $(-12) - (+4) =$

6) Calcule:

a) $5 - 7 =$

b) $-12 + 7 =$

c) $-5 - 6 =$

d) $-3 + 10 =$

7) Um colega da outra turma disse que a soma entre dois números negativos resulta sempre em um número negativo. Essa afirmação está correta ou errada? Explique:

____

____

____

8) Dado um valor inicial, se subtraímos um número dele, o resultado será sempre menor que o valor inicial? Explique:

____

____

____

9) Calcule:

a) $3\ x\ (-2) =$

b) $(-5)\ x\ 5 =$

c) $(-12) \div 3 =$

d) $(-48) \div (-2) =$

APÊNDICE D

SUGESTÃO DE SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA A UTILIZAÇÃO DE JOGOS NO ENSINO DE NÚMEROS RELATIVOS

Nesse apêndice apresentarei o produto técnico referente a essa dissertação, uma sequência de atividades envolvendo o uso de jogos no ensino de números relativos.

O objetivo desse apêndice é auxiliar educadores interessados em obter mais detalhes sobre como utilizar as ideias contidas nesse texto em suas aulas.

O planejamento contido nesse apêndice se voltará à apresentação da noção de número relativo, discussão sobre esse conjunto de números de naturezas opostas, a adição entre números relativos e a subtração entre números relativos.

A introdução da sequência será dada a partir da exploração com jogos, visando a superação de problemas e a resolução de situações conflitantes que possam surgir no andamento das partidas. O objetivo de problematizar com essas situações é que os alunos desenvolvam o pensamento inerente ao estudo com números de sinais opostos, tanto do ponto de vista lógico quanto do ponto de vista operatório.

Aula 1: Jogo das tropas.

O tempo proposto para essa atividade é de uma aula de 50 minutos. Para jogar esse jogo são necessários 20 botões, sendo 10 de cada cor e dois dados de seis faces. Podem ser usadas peças do jogo de Damas ou Xadrez. Dessa forma, é fundamental que o professor se prepare para providenciar o material aos alunos ou proponha com antecedência que os mesmos tragam e/ou confeccionem seu material.

Os alunos jogarão em quartetos, em que podem jogar em duplas, pensando juntos, ou individualmente e permutando os adversários ao término de cada partida. Antes de se iniciar o jogo, os dados deverão ter modificados os símbolos de suas faces. Uma sugestão aqui é colar um pedaço de fita e escrever com caneta o valor de cada nova face.

Um dos dados será alterado para que em suas faces constem os símbolos “-3, -2, -1, +1, +2, +3” e será chamado nesse texto por *dado dos números*. O outro será alterado para que três de suas faces contenham o termo “adi”, com menção a adicionar e as demais o termo “sub”, representando subtrair. Este segundo dado será chamado de *dado das operações*.

Esse jogo é composto de duas etapas. Na primeira será usado apenas o dado dos números e na segunda será adicionado o dado das operações. A partida inicia com o posicionamento de quatro peças brancas e quatro peças pretas (representando as tropas de cada exército inimigo em equilíbrio), agrupadas por cor, na mesa, em frente ao aluno. As demais ficam no estoque, em um canto da mesa. Cada jogador alternadamente jogará o dado e deverá executar uma ação em correspondência ao resultado obtido. Obter o resultado “+3” corresponde a melhorar sua vantagem em relação ao oponente em 3, enquanto que obter um valor negativo corresponde a executar essa ação inversa.

O objetivo com essa atividade é de que os alunos desenvolvam as habilidades do cancelamento e compensação, que, posteriormente, sustentarão os cálculos envolvendo os números relativos. Ou seja, que os alunos consigam perceber e concluir que faz sentido – em resposta ao resultado *+2* no dado – diminuir duas peças do oponente ao invés de aumentar duas a seu favor.

Na segunda etapa do jogo, o dado das operações será adicionado e ambos os dados serão lançados juntos. Caso o resultado do dado das operações seja “adi”, a ação correspondente ao lançamento não muda. Contudo, quando for obtida a face “sub”, o procedimento será o inverso do representado no dado dos números. Ou seja, obter na combinação dos dados “-2” e “sub” corresponde a ter que aumentar duas peças a seu favor ou reduzir em duas às do oponente. Vence o aluno (equipe) que, ao final de 10 lançamentos, tiver mais peças.

Aula 2: Discussão sobre a existência de números menores que zero.

Para essa aula, será proposto um debate com os alunos norteado pelas perguntas do quadro abaixo.

1) Existe um número maior que todos os outros?

2) Existe um número menor que todos os outros?

3) Existe um número que somado a 42 resulte em 109? Se sim, qual é?

4) Existe um número que somado a 5 resulte em zero? Se sim, qual é?

5) Existe um número que somado a 7 resulte em 4? Se sim, qual é?

6) Que nome você daria para os tipos de números que poderiam aparecer nas questões 4 e 5?

7) É possível somar esses números? Dê um exemplo.

O tempo para essa atividade varia conforme a discussão. A relevância para ela se sustenta em o professor perceber se e como os alunos têm a noção de número negativo. Outro aspecto importante dessa discussão ser aberta a todos os alunos é que em outros momentos dessa sequência cada aluno será convidado a pensar, organizar seu pensamento, discutir e escrever sobre isso. O fato do primeiro dos debates ser aberto a todos ajudará no desenvolvimento desse tipo de habilidade pelos estudantes.

Aula 3: O Banco Imobiliário de Porto Alegre.

Para a exploração desse jogo, serão destinadas 4 aulas de 50 minutos, sendo a primeira destinada à preparação e familiarização com o jogo.

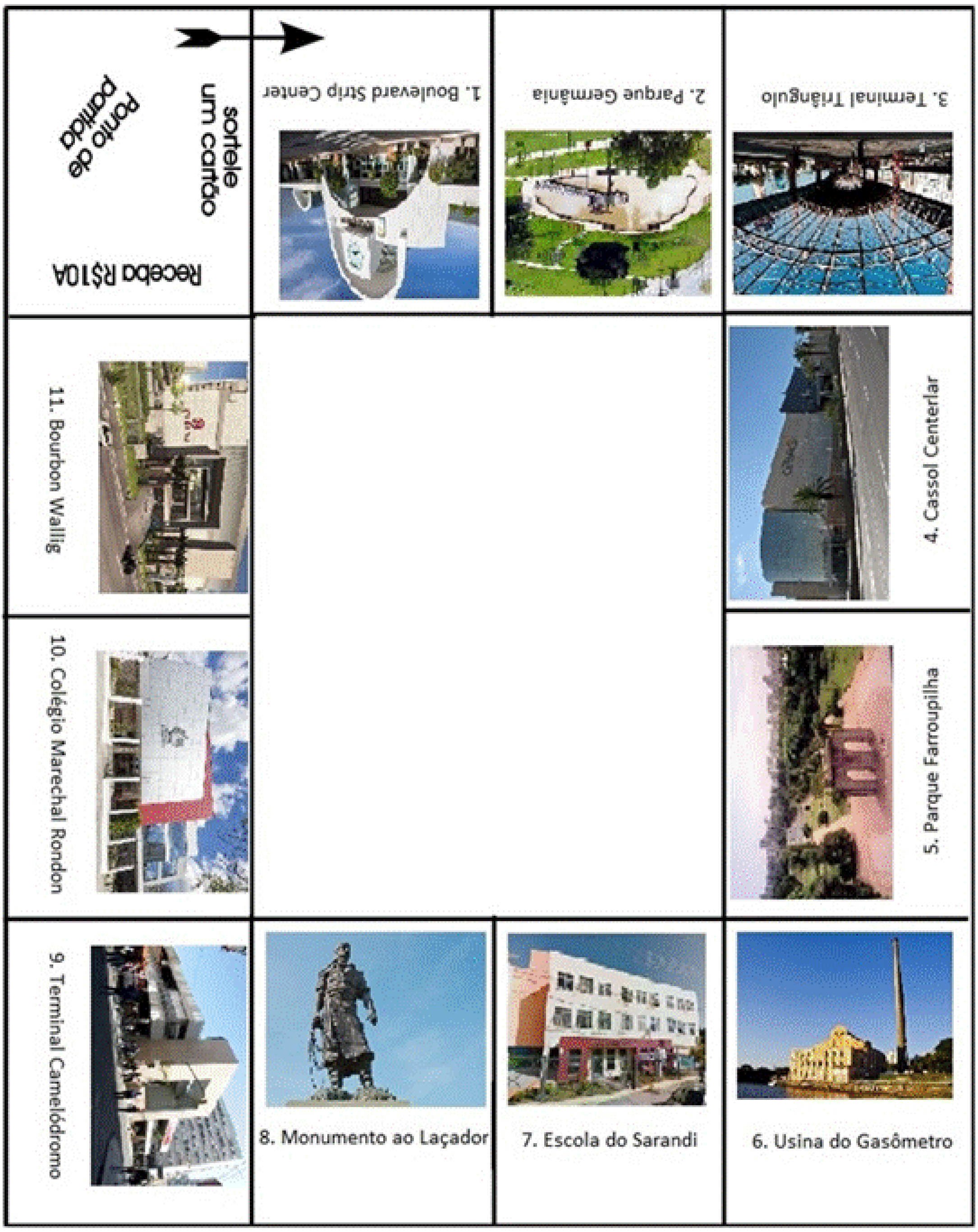
Esse é um jogo adaptado da dissertação de Linardi (1999) com os pontos turísticos da cidade de Porto Alegre. Esse jogo é bastante semelhante ao Banco Imobiliário[12] original, mas envolve dinheiro em duas cores, um representando posses e outro dívidas.

[12] Banco Imobiliário é um jogo de tabuleiro lançado, no Brasil, pela empresa Brinquedos Estrela. O jogo consiste na compra e venda de propriedades como bairro, casas, hotéis, empresas, de modo que vence o jogador que não for à falência.

Outra novidade desse jogo são as cartas de sorteio, contidas na próxima figura.

Problemas com o carro: Você entrega $6 A ao banco.	Loteria de fim de ano: Cada jogador joga um dado. O jogador que obter um maior número deve receber $5 A de cada outro jogador.
Obra de caridade: Você dá $3 A a cada jogador e ao banco.	Doação espontânea: Você dá $10 A a seu colega à direita
Amizade de longa data: Você pega $10 V do colega à sua esquerda e fica com eles.	Carrão novo: Jogue o dado duas vezes. Ande um número de casas igual ao somatório dos dados e recebe essa quantia em dinheiro azul do banco.
Cliente Fidelidade-Gold: O aluguel de sua próxima estadia será pago pelo banco	Quitação de dívida: Você entrega $8 V ao banco.
Herança esquecida: Entregue todo seu dinheiro vermelho ao banco. Sua dívida está quitada.	Rendimentos de ações: O banco lhe dá $10 A.

Em minha adaptação, além dessas cartas que permitem que cada partida seja diferente de todas as partidas anteriores, foram utilizados os pontos turísticos da cidade de Porto Alegre para a composição do tabuleiro, conforme pode ser visto na figura abaixo.


Ponto de partida
sorteie um cartão
Receba R$10A
1. Boulevard Strip Center
2. Parque Germânia
3. Terminal Triângulo
4. Cassol Centerlar
5. Parque Farroupilha
6. Usina do Gasômetro
7. Escola do Sarandi
8. Monumento ao Laçador
9. Terminal Camelódromo
10. Colégio Marechal Rondon
11. Bourbon Wallig

Para jogar esse jogo, são necessárias entre três a seis pessoas. Além do tabuleiro, são necessários peões para representar os jogadores[13] quando se movimentam, um dado de seis faces, as cédulas (azuis representando posses e vermelhas representando dívidas) e cartas de sorteio. O preço de cada propriedade, assim como o valor de seu aluguel, correspondem ao número da propriedade descrito no tabuleiro.

De um modo geral, as regras são bastante parecidas com as do jogo Banco Imobiliário original, acrescentando-se a ideia de “dinheiro negativo” para representar dívidas. Cada jogador inicia com a quantia de R$ 10A (10 reais azuis) e coloca seu peão no ponto de partida. Decide-se através do dado quem começa, e o jogo seguirá no sentido horário. Cada jogador, na sua vez, em cada rodada, segue a sequência de ações descritas no seguinte quadro.

1) Fazer um aprimoramento no lote (caso possua todas as propriedades do mesmo tipo);
2) Negociar propriedades com outro jogador por valor a combinar;
3) Vender propriedade ao banco pelo valor que foi pago por ela;
4) Jogar o dado para movimentar-se e, na sequência ao movimento, decidir se comprará a propriedade em que parou ou pagar o aluguel equivalente para outro jogador;
5) Executar as instruções de uma carta de sorteio.

Essa sequência não pode ser alterada, ou seja, por exemplo, o jogador não pode decidir colocar casas após movimentar-se em um turno.

A compra de uma propriedade é possibilitada no momento em que o jogador para sobre essa casa do tabuleiro, conforme o item 4, e sua quantia deverá ser transferida ao banco. Para aprimorar uma propriedade, o jogador deve ser proprietário de todas as propriedades de mesmo tipo e parar sobre o lote no qual que deseja construir. O valor de cada aprimoramento equivale ao dobro do aluguel (número da propriedade). Quando um jogador parar em uma propriedade com aprimoramentos (que podem ser de até três), o novo aluguel será calculado através da multiplicação do valor inicial do lote (descrito no tabuleiro) por dois, para cada aprimoramento contido no mesmo. Dessa forma, se houver dois aprimoramentos no Monumento ao Laçador, o aluguel passará a ser R$ 8 A $\cdot$ 2^2 = R$ 32A. Um jogador só pode fazer aprimoramentos se não possuir nenhum dinheiro vermelho, isto é, se não tiver dívidas.

[13] Uma alternativa aqui é permitir que os alunos desenhem personagens para os representarem no tabuleiro ao invés de usar peões genéricos.

A venda de propriedades para outros jogadores pode ser feita a cada rodada, antes do lançamento do dado do movimento. Não há limites para tal negociação. Um jogador pode contrair uma dívida para comprar uma propriedade de outro jogador.

Enquanto o dinheiro azul representa a quantia que o jogador possui, o dinheiro vermelho representa sua dívida. Antes do movimento, um jogador pode devolver ao banco uma mesma quantia de dinheiro azul e vermelho, visando quitar seus débitos.

Após passar pelo ponto de partida novamente, cada jogador recebe R$ 10A e tem direito a pegar uma carta de sorteio. Algumas cartas de sorteio têm efeitos positivos enquanto outras representarão prejuízos. O efeito da carta de sorteio deve ser executado exatamente após sua retirada. As cartas executadas são colocadas em uma pilha de descarte, que deverá ser embaralhada, gerando uma nova pilha de cartas de sorteio quando a atual chegar ao fim.

O jogo chega ao fim quando o tempo previsto para a partida acabar. Nesse momento, vence o jogador que tiver uma maior quantidade de dinheiro azul, após serem feitos os procedimentos retratados no quadro abaixo.

1) Venda dos aprimoramentos possuídos nas propriedades do jogador pela metade do valor que custaram;
2) Venda das propriedades possuídas por cada jogador pelo valor que custaram;
3) Pagamento de todas as dívidas (dinheiro vermelho) possuídas por cada jogador junto ao banco.

Os objetivos com esse jogo são a familiarização com números de natureza contrária, o desenvolvimento da lógica operatória com esse tipo de números a integração entre conteúdo escolar e saberes extraclasse. O número de aulas destinado a esse jogo pode variar, contudo, é importante que os alunos possam experimentar mais de uma partida para que possa formular hipóteses de decisões sobre como jogar melhor e tenha a oportunidade de as colocar em prática futuramente.

Aula 6: Operacionalização com números relativos.

Nessa aula serão propostos para os alunos cálculos envolvendo positivos e negativos, em que eles serão convidados a explicar suas respostas. Aqui, mais importante que a resposta correta será a argumentação do aluno. Mesmo que os alunos não acertem seus cálculos de primeira, é importante que o professor o questione, direcionando-o a encontrar seu erro. A composição desses dados auxiliará o educador a perceber as necessidades dos estudantes para as próximas aulas.

Sugiro que esses cálculos sejam propostos em uma lista de exercícios, conforme segue abaixo.

1) Diga a resposta dos cálculos abaixo e explique como você chegou em cada uma das respostas. Utilize as palavras que você tiver maior familiaridade, mas procure explicar de maneira clara o que está pensando.

a) $(+4) + (+3) =$ ________

____

____

b) $(+2) + (-5) =$ __________

____

____

c) $(+3) - (+5) =$ _________

____

____

d) $(-4) + (+4) =$ ________

____

____

e) $(+3) - (-4) =$ ________

____

____

f) $(-2) - (-3) =$ ________

____

____

Aula 7: Definindo números relativos.

No primeiro momento dessa aula serão definidos os números relativos. Tais números não representam quantidades, como os naturais, mas estados ou posições relativas (temperatura, latitude, saldos bancários), comparações (diferenças) ou transformações (crescimento ou decrescimento, aumento ou redução, deslocamentos para cima ou para baixo...). Não é necessário que os alunos decorem esses significados, mas que eles percebam que eles existem e que estarão presentes nos exercícios e problemas estudados em aula. Os números são chamados relativos por sua referência a um zero relativo por representarem transformações de sentidos iguais ou opostos.

No momento seguinte será definido o ordenamento desses números na reta horizontal infinita – com um desenho no quadro, organizando os negativos à esquerda do -5 até o +5 na extrema esquerda - e conceitos como: valor absoluto (distância do número à origem), oposto de um número (o número cuja soma resulta no neutro zero) e simétrico (números com o mesmo valor absoluto).

Na sequência serão propostos alguns cálculos (soma) com números relativos para que eles relembrem o que pensaram nas aulas anteriores e estejam prontos a elaborar, em conjunto ao professor, uma regra para a generalização da soma.

1) Calcule:

a) $(+19) + (-4) =$

b) $(+12) + (-20) =$

c) $(-4) + (-1) =$

d) $(-13) + (+17) =$

e) $(-3) + (-7) =$

f) $(+4) + (-15) + (-17) + (-5) =$

Um exemplo da redação final pode ser a que segue:

Caso 1) Soma entre dois positivos: A resposta será positiva e o valor absoluto da resposta será a soma dos valores absolutos dos números.

Caso 2) Soma entre dois negativos: Como os dois números são negativos, a resposta será negativa e será a combinação dos dois números através da soma dos valores absolutos.

Caso 3) Soma de números de sinais contrários: Ficará o sinal do número de maior valor absoluto e faremos a diferença entre os valores positivos e negativos.

Aula 8: Jogo Escova do Zero:

O objetivo da inserção desse jogo é o de solidificar os conhecimentos envolvidos na soma entre números de sinais opostos. Para chegar à vitória, cada jogador se deparará com diversas situações operatórias envolvendo números relativos e a habilidade com os cálculos será importante para se chegar à resposta. O quadro de regras desse jogo está contido no quadro seguinte e pode ser impresso para facilitar a experiência dos alunos. Para essa atividade serão destinadas duas aulas de 50 minutos.

Jogadores: 2 jogadores.

Objetivo: Formar combinações de cartas cujos valores resultem no número neutro (zero).

Composição do jogo: De um baralho normal de cartas são retirados os valetes, rainhas e reis. Dessa forma, o baralho de jogo é composto por 40 cartas, sendo 20 de uma cor (vermelha) e 20 de outra (preta). Convencionaremos que as cartas pretas terão um significado positivo enquanto as vermelhas terão um significado negativo.

Iniciando: Tira-se par ou ímpar para decidir quem começará. O outro jogador deverá embaralhar as cartas e distribuí-las alternadamente entre cada jogador e a mesa. Cada jogador começará com 3 cartas na mão e serão colocadas 4 cartas na mesa viradas para cima.

Efetuando uma jogada: Na sua vez, cada jogador poderá usar uma carta da mão e juntar com qualquer número de cartas da mesa para formar uma combinação. Uma combinação é considerada válida quando a soma dos positivos e negativos resultam no número neutro.

Exemplo: *Thiago tem um quatro vermelho na mão e decide usá-lo para combinar com um 2 vermelho e um 6 preto que estão na mesa.*

4 vermelho + 2 vermelho + 6 preto = neutro

Dessa forma, Thiago faz 1 ponto e finaliza sua jogada.

Caso não seja possível efetuar nenhum tipo de combinação com as cartas que tem na mão, o jogador deve escolher uma das cartas que possui na mão e colocá-la na mesa. Essa carta passará a fazer parte do estoque de cartas que estão na mesa à disposição dos jogadores. Após um jogador efetuar uma combinação ou jogar uma carta da mão na mesa, ele termina sua jogada e passa a vez para o próximo.

Ficando sem cartas: Quando ambos os jogadores ficarem sem cartas na mão, serão distribuídas novamente 3 cartas para cada jogador.

Finalizando uma rodada: Uma rodada do jogo finaliza quando não houverem mais cartas no baralho e os jogadores não tiverem mais cartas na mão. Nesse momento, são contados os pontos e se iniciará a próxima rodada da partida, alternando o jogador que iniciou nessa.

Finalizando uma partida: A partida finalizará com um jogador como vencedor quando o placar de 15 pontos for atingido por algum dos jogadores.

Pontuando: A pontuação será feita ao fim de cada rodada pelo somatório dos itens representados abaixo:

1) Combinação: Cada vez que um jogador efetuar uma combinação usando uma carta da mão e cartas da mesa esse conquistará 1 ponto.

2) Mais cartas: Ao final da rodada, o jogador que tiver mais cartas conquistará 2 pontos.

3) Limpeza de mesa: No momento em que um jogador efetuar uma combinação de modo que não sobre nenhuma carta na mesa, esse ganhará 3 pontos ao invés de 1.

Aula 10: Explorando situações do cotidiano:

Nessa aula serão propostos no quadro exercícios que envolvem números relativos para a resolução. O objetivo dessa tarefa será a expansão das habilidades dos alunos com esses números, através da resolução desses problemas.

Problema 1: Um submarino está a uma profundidade de 70 m quando submerge 50 m. Neste momento, a que distância ele fica de um avião que voa acima dele, a 600 m de altura?

Problema 2: Em Olso a temperatura está 12°C quando começa a esfriar 2°C a cada hora. Diga a temperatura na cidade após:

a) 2 horas;

b) 6 horas;

c) Como ficará a temperatura após 6 horas?

Problema 3: Mohammed nasceu no ano 18 a.C. e morreu no ano 50 d.C.. Quantos anos ele viveu? E seu avô que nasceu em 80 a.C. e morreu em 33 a.C.?

Problema 4: Em uma partida online do jogo eletrônico League of Legends o placar final ficou:

Nickname:	Kills:	Deaths:	Assists:
FrED	7	2	0
Caverão	4	4	0
Maior Feed	1	6	0
J.Osé	9	8	0
Boizão	11	12	0

Com base nisso, responda:

a) Quem foi o melhor?

b) Quem foi o pior?

c) Qual foi o saldo de cada um?

Problema 5: Tenho R$ 10 e quando recebo R$ 14, compro no cartão de crédito um produto que custa R$ 37. Em seguida vendo um CD de músicas para um amigo por R$ 18. Como meu saldo pessoal ficará?

Aula 11: Introdução à subtração:

A aula será iniciada com o cálculo “ 100 – (- 10)” no quadro. Nesse momento será feita uma discussão da equivalência entre positivos e naturais, permitindo que – de agora em diante – números positivos possam ser escritos sem parênteses com o sinal de adição.

Para convidar os alunos a pensarem sobre a resposta a esse cálculo, podem ser recordados o Jogo das Tropas quando foi adicionado o segundo dado, em que o efeito da subtração era o contrário do que vinha sendo feito até o momento. As questões abaixo podem ser propostas para enriquecer o debate.

1) Se uma pessoa que está jogando o Banco Imobiliário de Porto Alegre retira uma carta ao passar pelo ponto de partida, e essa diz: *entregue R$ 10V ao banco*, a situação financeira melhorará ou ficará pior?
2) Durante uma partida do jogo Escova do Zero, uma aluna conta o saldo das cartas em sua mão. Ao ver que não consegue fazer nenhuma combinação, ela decide jogar uma carta negativa de sua mão na mesa. Em relação ao saldo inicial, o novo saldo das cartas na mão dessa aluna é maior ou menor?
3) Dado um número qualquer inicial, o que significa subtrair um número negativo desse?

O objetivo para essa aula é permitir que os alunos concluam qual o efeito de subtrair um número negativo de um outro número relativo qualquer. Após uma discussão inicial, a seguinte atividade se propõe a conduzir os alunos à reflexão sobre a subtração. Ela pode ser proposta no quadro ou impressa como lista.

1) Certo dia a temperatura estava 6°C durante o dia e ficou -5°C durante a noite. Com base nessa informação, responda:

a) Escreva o cálculo que representa a diferença entre essas temperaturas usando números negativos:

____

b) Qual foi a diferença entre essas duas temperaturas? __________

2) Durante uma partida do Banco Imobiliário de Porto Alegre, José possuía R$ 13A e R$ 5V. Ao retirar uma carta da pilha, esta indicou que ele deveria entregar R$3V para o banco. Com base nisso, responda:

a) A ação de entregar dinheiro vermelho ao banco foi uma coisa vantajosa ou desvantajosa para José? Explique. ____

____

b) Qual era o saldo antes de entregar essa quantia ao banco? ______________________________

c) Com ficou seu saldo após entregar tal quantia? ____________________________________

d) Escreva um cálculo que represente o que aconteceu com o saldo de José nesse episódio. _______________

____

3) Neste exercício, faça de conta que você é o professor de matemática de uma turma do 7° ano e que um de seus alunos resolveu um exercício conforme está representado abaixo. Para cada item, você deve indicar ao aluno se ele acertou ou errou, explicando, de modo que ele possa entender o porquê de cada resposta.

a) $(+3) - (+5) = +2$ ____

____

b) $(-6) - (-10) = +4$ ____

____

c) $(-9) - (-4) = -13$ ____

____

d) $(+5) - (-12) = -7$ ____

____

O objetivo com essa sequência de exercícios é que o aluno conclua que "tirar um negativo aumenta", isto é, quando partimos de um número qualquer e dele subtraímos um número negativo, o resultado será maior que o valor inicial. O caso em que tirar um positivo pode ser pensado do modo como era feito com naturais.

Acredito que seja importante desenvolver uma lógica para a subtração que faça sentido para os alunos e que seja semelhante à lógica da subtração. Penso que quanto menor for a distância entre a maneira de pensar para cada uma dessas duas operações, melhor será a resolução dos problemas do campo aditivo por parte dos alunos.