59395-6

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

FUNDAMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA MATEMÁTICA INTERVALAR

Por
Benedito Melo Acióly

Tese submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciência da Computação

Prof. Dr. Dalcidio Moraes Claudio
Orientador

Porto Alegre, dezembro de 1991.

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Acióly, Benedito Melo
Fundamentação computacional da matemática intervalar/Benedito Melo Acióly. - Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991.
263 p.:il

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Porto Alegre, 1991. Orientador: Claudio, Dalcidio Moraes.

Tese: Domínios, Topologia de Scott, Categorias, Quasi-métricas, Quasi-Corpos, Avaliação de Funções, Cálculo Lambda Intervalar, Lógica Geometrica, Lógica Construtiva e Matemática Construtiva.

AGRADECIMENTOS

Agradeço

- Ao mestre Manoel Agamemnon Lopes, por ter me ensinado a pensar por conta própria, e pelo acompanhamento constante e sugestões ao presente trabalho.
- Ao sábio Fernando Spagnolo pelo apoio crítico e incentivo pessoal em momentos decisíveis.
- Ao amigos Wilson e Tereza pela amizade e apoio intelectual.
- Ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação da UFRGS, em especial o meu orientador professor Dalcidio pelo apoio, incentivo e sugestões.
- Aos professores Daltro e Mauro Castilho pelo apoio, incentivo e sugestões.
- Ao companheiro Antonio Rocha pelas longas discussões e sugestões que muito contribuiram para as características deste trabalho.
- Aos colegas Edson Costa, Jaelson, Rui, Veríssimo, Paulo Xavier, Sílvio Meira, Telma, Adagenor, Graçaliz, Marcília, Beatriz, Angélica, Benjamín, Tiaraju e João Batista pelo companheirismo e apoio.
- A Helenara pelos belos desenhos deste trabalho.
- A Oscar pelo eficiente trabalho de digitação.
- Ao Colegas do DI da UFPe pelo incentivo e apoio.
- A UFPE por ter permitido meu afastamento.
- Ao povo brasileiro que através do CNPq financiou este trabalho em forma de bolsa.

Para Dimitri,

Vladimir e

Eliane

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

ev	avaliação
e	base do logarítmo neperiano
π	número pi
B	bola aberta
$\perp$	bottom ou menor elemento
$\top$	topo ou último elemento
$\overline{A}$	conjunto dos cortes sobre A
$\downdownarrows x$	conjunto dos elementos que precedem estritamente x
$\upuparrows x$	conjunto dos elementos que x precede estritamente
CCF	Categoria Cartesiana Fechada
SET	Categoria dos Conjuntos e Funções
CPO	Categoria dos *cpo's* e Funções Contínuas
DOM	Categoria dos Domínios da Matemática Computacional
SDOM	Categoria dos Domínios de Scott
$\circ$	composição
$\mathbb{I}(\mathbb{Q})$	conjuntos dos intervalos de informação
$\downarrow x$	conjuntos dos elementos que precedem x
$\uparrow x$	conjuntos dos elementos que x precedem
$I(\mathbb{R})$	conjuntos dos intervalos reais
$Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$	conjuntos dos morfismos ou setas de X para Y da categoria $\mathcal{C}$
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$	conjunto dos números irracionais
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$obj(\mathcal{G})$	conjunto dos objetos da categoria $\mathcal{C}$
$tot(D)$	conjunto dos objetos totais de D
ϕ	conjunto vazio
$\mathbb{I}^n(\mathbb{Q})$	conjunto dos vetores intervalares de informação ou espaço de informação de dimensão n
$\mathbb{I}^n(\mathbb{R})$	conjunto dos vetores intervalares reais de dimensão m
$graf(g)$	o gráfico de uma função g

c-completo	consistentemente completo
$\neq$	diferente
$\Leftrightarrow$	equivale
$\exists$	existe
$!$	fatorial
fc-completo	finitamente consistentemente completo
$curry$	função *curry*
id	função identidade
f^{-1}	função inversa da função f
$\Longrightarrow$	implica
$\subseteq$	inclusão
$\subset$	inclusão estrita
inf	ínfimo
$\sqcap$	ínfimo
∞	infinito qualquer
$-\infty$	infinito negativo
$+\infty$	infinito positivo
int	interior
$\cap$	interseção finita
$[\ ]$	intervalo vazio
$\lim$	limite
max	máximo
$<$	menor em $\mathbb{R}$
$\leq$	menor ou igual
$\notin$	não pertinência
$\neg$	não ou não vale que
$\prec$	ordem forte qualquer
$<<$	ordem forte de aproximação
$\sqsubseteq$	ordem de informação
po	ordem parcial
cpo	ordem parcial completa
$\forall$	para todo ou qualquer que seja
$\in$	pertinência
$\times$	produto cartesiano
q	quasi-métrica
$\equiv$	relação de equivalência
$\square$	sinal de término de prova

Sup	supremo
$\sqcup$	supremo finito
T_0	topologia de ordem zero
T_1	topologia de ordem um
T_2	topologia de ordem dois ou de Hausdorff
$\cup$	união finita
$\sum^*$	o conjunto de todas as expressões finitas de elementos do alfabeto Σ
$\oplus$	soma disjunta de dois *cpo's*
$[D_1 \longrightarrow D_2]$	o conjunto das funções contínuas de D_1 em D_2
$\mathcal{P}(A)$	o conjunto das partes do conjunto A
$\bigcup$	união qualquer
$\biguplus$	união qualquer
$\bigcap$	interseção qualquer
$f!$	existe um único f
in_i	i-ésima injeção
pr_i	i-ésima projeção
$\xleftarrow{\lim}$	limite inverso
D_∞	domínio universal
$\int$	símbolo de integral
$\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$	conjunto das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$
$\dot{x}(t)$	derivada da função $x(t)$
$\sum$	alfabeto de uma linguagem
$\models$	símbolo de satisfação
$\vdash$	símbolo de derivabilidade
$\vdash_L^P$	sistema dedutivo sobre a linguagem L com apresentação P
$\wedge$	símbolo lógico "*e*"
$\vee$	símbolo lógico "*ou*"
$\lambda x \cdot f(x)$	abstração Lambda
$FV(M)$	conjunto das variáveis livres de M
$M[x/y]$	a substituição em M de y por x
$[\![\ ]\!]$	função semântica
$\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow$	símbolo de redução

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

A Matemática Intervalar se assenta em dois conceitos fundamentais, a propriedade da *inclusão-monotonicidade* de sua aritmética e uma topologia de Hausdorff definida no conjunto dos intervalos. A propriedade da inclusão-monotonicidade tem se revelado uma ferramenta útil na elaboração de algorítmos intervalares, enquanto a topologia de Hausdorff não consegue refletir as características lógicas daquela propriedade, comprometendo, desse modo, a construção de uma lógica cujo modelo seria a estrutura intervalar munida dessa topologia. Essa lógica seria necessária para fundamentação da matemática intervalar como uma teoria de algorítmos da análise real.

Neste trabalho se mostra que o insucesso na construção dessa fundamentação se deve a incompatibilidade entre a propriedade da inclusão-monotonicidade e a topologia de Hausdorff. A partir dessa constatação se descarta essa topologia e define-se uma outra topologia – a topologia de Scott – que é compatível com essa propriedade, no sentido de que todo resultado obtido usando-se a lógica, isto é, a propriedade da inclusão-monotonicidade, obtém-se também usando-se a ferramenta topológica e reciprocamente.

A teoria resultante da substituição da topologia de Hausdorff pela topologia de Scott tem duas características fundamentais. A Análise Funcional Intervalar resultante possui a maioria das propriedades interessantes da Análise Real, suprimindo, assim, as deficiências da Análise Intervalar anterior. A elaboração da propriedade da inclusão-monotoniciadade permite construir uma lógica geométrica e uma teoria lambda cujo modelo é essa nova matemática intervalar. Além disso, a partir dessa lógica e da teoria lambda se elabora uma teoria construtiva, como a teoria dos tipos de Martin-Löf, que permite se raciocinar com programas dessa matemática. Isso significa a possibilidade de se fazer correção automática de programas da matemática intervalar.

Essa nova abordagem da matemática intervalar é desenvolvida pressupondo, apenas, o conceito de número racional, além, é claro, da linguagem da teoria dos conjuntos.

Desse modo é construído o sistema intervalar de um modo análogo ao sistema real. Para isso é generalizado o conceito de corte de Dedekind, resultando dessa construção um sistema ordenado denominado de quasi-corpo, em contraste com o números reais cujo sistema é algébrico, o corpo dos números reais. Assim, no sistema intervalar a ordem é um conceito intrínsico ao sistema, diferentemente do sistema de números reais cuja a ordem não faz parte da álgebra do sistema.

A lógica dessa nova matemática intervalar é uma lógica categórica. Isto significa que todo resultado obtido para domínios básicos se aplica para o produto cartesiano, união disjunta, o espaço de funções, etc., desses domínios. Isto simplifica consideravelmente a teoria. Um exemplo dessa simplificação é a definição de derivada nessa nova matemática intervalar, conceito ainda não bem definido na teoria intervalar clássica.

PALAVRAS CHAVE: Domínios, Topologia de Scott, Categorias, Quasi-Métricas, Quasi-Corpos, Avaliações de Funções , Cálculo Lambda Intervalar, Lógica Construtiva e Matemática Construtiva.

ABSTRACT

The Interval Mathematics is based on two fundamental concepts, the *inclusion-monotonicity* of its arithmetics and a Hausdorff topology defined on the interval set. The property of inclusion-monotonicity has risen as an useful tool for elaboration of interval algorithms. In contrast, because the Hausdorff topology does not reflect the logical features of that property, the interval mathematics did not permit the elaboration of a logic whose model is this interval mathematics with that topology. This logic should be necessary to the foundation of the interval mathematics as a Real Analysis Theory of Algorithms.

This thesis shows that the theory of algorithms refered above was not possible because of the incompatibility between the property of inclusion-monotonicity and the Hausdorff topology. By knowing the shortcoming of this topology, the next step is to set it aside and to define a new topology - the Scott topology - compatible with the refered property in the sense that every result obtained via the logic is also obtainable via the topology and vice-versa.

After changing the topology the resulting theory has two basic features. The Interval Functional Analysis has got the most interesting properties belonging to Real Analysis, supressing the shortcomings of previous interval analysis. The elaboration of the inclusion-monotonicity property allows one to construct a geometric logic and a lambda theory whose model is this new interval mathematics. From this logic and from the lambda theory a constructive theory is then elaborated, similar to Martin-Löf type theory, being possible then to reason about programs of this new interval mathematics. This means the possibility of automatically checking the correctness of programs of interval mathematics.

This new approach assumes only the concept of rational numbers beyond, of course, the set theory language. It is constructed an interval system similar to the real system. A general notion of the concept of Dedekind cut was necessary to reach that. The

resulting construction is an ordered system which will be called quasi-field, in opposition to the real numbers system which is algebraic. Thus, in the interval system the order is an intrinsic concept unlike the real numbers sistems whose order does not belong to the algebraic system.

The logic of this new interval mathematics is a categorical logic. This means that every result got for basic domains applies also to cartesian product, disjoint union, function spaces, etc., of these domains. This simplifies considerably the new theory. An example of this simplication is given by the definition of derivative, a concept not derived by the classical interval theory.

KEY WORDS: Domains, Scott Topology, Categories, Quasi-Metrics, Quasi-fields, Evaluation Functions, Interval Lambda Calculus, Geometric Logic, Constructive Logic and Constructive Mathematics.

1 INTRODUÇÃO

Esta unidade é dividida em duas partes. Na primeira parte será feito um resumo da Análise Intervalar, aqui chamada clássica, com o objetivo de situar o leitor em alguns tópicos técnicos deste campo de pesquisa e também servir de subsídio as considerações futuras. Na segunda parte será feita uma análise crítica dos problemas pertinentes a este assunto e apontadas as soluções que serão motivo dos capítulos posteriores.

1.1 A Análise Intervalar Clássica

Atualmente tem sido muito divulgada a necessidade do uso de *técnicas intervalares* com a finalidade de alcançar limites garantidos para os resultados de computações científicas. Algorítimos convencionais, chamados de algorítmos pontuais, computam uma estimativa para uma resposta, e, talvez, um erro estimado. O usuário não pode afirmar a exatidão da resposta estimada sem o auxílio de uma análise de erro, que é extensa, dispendiosa e nem sempre viável.

Técnicas intervalares, em contraste, computam um intervalo, com a garantia de que a resposta pertence a este intervalo. Portanto, resultados intervalares carregam consigo a segurança de sua qualidade.

A *análise de intervalos* está interessada em técnicas que podem ser programadas por computador, contendo em sua computação uma análise rigorosa e completa de erros do resultado. Existem três fontes de erro em computação numérica: a primeira, e mais séria, porque não é possível torná-la arbitrariamente pequena via computação adicional, é a *propagação de erro nos dados iniciais.* Isto ocorre quando os dados de entrada ou parâmetros são incertos, como, por exemplo, na criação ou simplificação de um modelo matemático de um determinado sistema, ou ainda nas medidas, em geral, como tempo, temperatura, distância, intensidade luminosa, etc., que são obtidas de instrumentos que tem precisão limitada. A questão de como a incerteza dos dados contribuem para a incerteza da resposta pode ser ignorada, ou pode ser feita uma análise profunda com simulações , ou com auxílio da experiência do pesquisador. A análise é, frequentemente, difícil ou impossível; simulações são dispendiosas, especialmente em muitas dimensões; e a experiência deve ser considerada com cautela.

A segunda e terceira espécies de erros em computação são o *erro de arredondamento*, causado por computador com um número arrendondado a um número finito de dígitos, e o *erro de truncamento*, causado ao se truncar sequências infinitas de operações aritméticas após um número finito de etapas, que podem sempre, em princípio, ser minorados ao torná-los arbitrariamente pequenos através de una computação rigorosa e exaustiva.

A análise de intervalo é uma teoria matemática, com origem na década de 60, que tem como objetivo responder a questão de exatidão e eficiência que aparece na prática da computação científica. Aqui é importante fornecer esquemas computacionais tal que, em se efetuando bastante computação, a segunda e a terceira espécies de erros se tornem tão pequenos quanto possível. A propagação do erro nos dados iniciais e a acumulação do erro de arredondamente em qualquer *sequência finita de operações aritméticas* podem ser ambos rigorosamente controlados, simplesmente, pondo-as em aritmética de máquina ordinária.

Assim, espera-se que as *técnicas intervalares* forneçam garantia, e que possam ser aplicadas quase que automaticamente. Uma resposta intervalar carrega consigo a garantia de sua incerteza. Até mesmo quando uma análise de sondagem de erro é executada, o número resultante é somente uma estimativa do erro que pode estar presente.

Considerando as *técnicas intervalares*, o diâmetro de um intervalo solução é o indicativo da influência do erro do dado no erro do resultado final obtido. Este é um tipo de análise sensitiva, que pode substituir execuções de simulações repetidas e dispendiosas.

Entretanto, obter uma resposta intervalar não garante que ela inclua algo do nosso interesse. Atingir uma inclusão significativa requer uma fundamentação matemática cuidadosa de todos os estágios do desenvolvimento do algorítmo e sua implementação. Os algorítmos a serem desenvolvidos devem ser *algorítmos intervalares*, e não versões intervalares de algorítmos pontuais conforme as experiências de [COR 88].

Analizando o que tem sido apresentado nesta área, esbarra-se com alguns obstáculos que impedem o desenvolvimento de *algorítmos* eficientes. Para perceber isto é preciso fazer um esboço da fundamentação matemática dessa área.

As operações aritméticas com intervalos são definidas como segue:

$$
\begin{aligned}
&[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]\\
&[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]\\
&[a,b]\cdot[c,d]=[\min\{ac,bc,ad,bd\},\ \max\{ac,ad,bc,bd\}],\\
&[a,b]/[c,d]=[a,b]\cdot\left[\tfrac{1}{d},\tfrac{1}{c}\right],\quad \text{se}\quad 0\notin[c,d]
\end{aligned}
$$

Pode-se observar que $I(\mathbb{R})$, o conjunto de todos os intervalos de extremos números reais, constitui uma estrutura algébrica que generaliza a estrutura dos reais, quando se considera $-, +, \cdot$ e $/$ como definidas acima, como as operações. A aritmética de intervalos satisfaz a propriedade da inclusão monotônica (veja [MOO 66]), isto é, se $I, J, K, L \in I(\mathbb{R})$ e $I \subseteq K$ e $J \subseteq L$, então

$$
\begin{aligned}
&I+J\subseteq K+L\\
&I-J\subseteq K-L\\
&I\cdot J\subseteq K\cdot L\\
&I/J\subseteq K/L\quad \text{se}\quad 0\notin J,L
\end{aligned}
$$

A imagem de uma função real $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sobre um conjunto $X \subseteq D$ é $R(f,X) = \{f(x) | x \in X\}$. Quando $x = [a,b]$ é um intervalo fechado limitado e f é contínua, então $R(f,X)$ também é um intervalo da mesma espécie.

Um problema fundamental e típico na Análise Intervalar é o cálculo de $R(f,X)$ ou no mínimo uma boa aproximação dele. Se f é definida em termos de operações aritméticas e funções com extensão intervalar, então o uso de computação intervalar [MOO 66] nos dá uma extensão intervalar F tal que $R(f,X) \subseteq F(X)$ para $X \subseteq D$. Este cálculo tem a vantagem de ser completamente automático, e não requer conhecimento das propriedades específicas de f.

É possível introduzir uma topologia sobre $I(\mathbb{R})$ [MOO 66] que torna as operações aritméticas contínuas.

Sejam $X = [a,b]$ e $Y = [c,d]$ intervalos, onde a e c denotam os extremos inferiores do intervalo e, b e d os superiores. Chama-se *distância* entre X e Y a expressão dada por

$$d(X,Y) = \max\{|a-c|, |b-d|\}.$$

É fácil ver que $d(X,Y)$ satisfaz as seguintes propriedades de uma métrica

$$\begin{array}{l} d(X,Y)=0 \iff X=Y \\ d(X,Y)=d(Y,X), \quad \text{para todo} \quad X,Y \in I(\mathbb{R}) \\ d(X,Z) \leq d(X,Y)+d(Y,Z), \quad \text{para todo} \quad X,Y,Z \in I(\mathbb{R}). \end{array}$$

Portanto, $(I(\mathbb{R}),d)$ é um espaço métrico e consequentemente a topologia induzida dessa métrica é Hausdorff.

1.2 A Abordagem Proposta

É inegável que a matemática intervalar constitui um considerável avanço na fundamentação da análise numérica, como uma matemática da computação. E a razão deste avanço constitui-se não somente pela superação da problemática apontada anteriormente, mas, principalmente, pelas seguintes razões:

(a) Encara o número real como algo "ideal", não finitamente representável, e toma em seu lugar o intervalo, em princípio manipulável pelo computador. Desenvolve um método, o método intervalar , matematicamente fundamentado, para quantificar, automaticamente, o quanto é razoável tomar o intervalo pelo real. Portanto, diferentemente da análise numérica, cuja preocupação tem sido desenvolver algorítimos para executar certas tarefas, o método intervalar pode ser visto [SCO 72a] como uma tentativa da elaboração de uma teoria de algorítmos e de representação, nos moldes da Teoria da Informação [SCO 82a], [SCO 82b]. Ou seja, a análise intervalar é uma forte candidata a uma lógica da elaboração de métodos numéricos, isto é, a uma fundamentação da análise numérica.

(b) Uma teoria de algorítmos que se preza pressupõe critérios para analisar qual de dois algorítmos que "computa" o mesmo real aquele que é mais exato, isto é, aquele cujo resultado melhor se aproxima do real. Isto significa que deve haver uma relação de ordem no conjunto dos algorítmos. As funções que transformam um algorítmo em outro deve ser monotônica, isto é, deve preservar a relação de ordem. Vendo os intervalos como algorítmos e a inclusão intervalar como uma ordem de exatidão, as funções $-,+,\cdot$ e $/$, da aritmética intervalar, são monotônicas. Considere, agora, a reta com a ordem usual "menor ou igual". Das funções, $-,+,\cdot$ e $/$, da aritmética real, a única monotônica é a adição. Por exemplo, $-2 \leq 0, -3 \leq 0$ e no entanto não é o caso de $6 \leq 0$. Desse modo, não é conveniente considerar os números racionais como algorítmos reais com a ordem usual. Assim, a aritmétrica intervalar seria uma forma de superar esta deficiência da ordem usual dos números reais.

Apesar do sucesso dessa área de pesquisa, haja visto a grande quantidade de pesquisadores e trabalhos publicados, a matemática intervalar tem se mostrado muito mais uma alternativa, mais ou menos bem sucedida, de elaboração de algorítmos para executar tarefas em matemática numérica do que uma fundamentação da computação científica. (É importante observar que os sucessos obtidos são devidos, na sua quase totalidade, a propriedade da inclusão-monotonicidade da aritmética intervalar).

O autor tem os seguintes argumentos para o aparente insucesso da matemática intervalar como uma lógica da computação científica.

(a) As funções da aritmética intervalar, aqui chamadas *funções intervalares básicas*, como transformadores de algorítmos, devem ser computáveis. A inclusão -monotonicidade é uma condição necessária para que isto aconteça, porém não é suficiente [PLO 80]. Elas devem ser funções contínuas. As funções intervalares básicas são funções contínuas, mas a topologia que torna essas funções contínuas é uma topologia métrica e consequentemente uma topologia de Hausdorff (veja o capítulo 2).

Agora considere uma função definida num espaço munido de uma topologia e uma ordem. Se continuidade segundo a topologia não implicar monotonocidade segundo a ordem, ou a função não é computável [SMY 90a] ou o conceito de computabilidade de funções a partir da noção de continuidade topológica não pode ser definido nesta estrutura. Em outras palavras, a topologia e a ordem são incompatíveis (uma boa referência de espaço topológicos ordenados é [NAC 65]). A única ordem compatível com a topologia Hausdorff é a trivial (veja o capítulo 2 para a justificativa desta informação), isto é, a igualdade. Ou seja, se $\leq$ é uma ordem compatível com a topologia de Hausdorff, então para todo x, y, $x \leq y$ se e somente se $x = y$. Ora, a topologia definida no espaço dos intervalos é Hausdorff e a relação de inclusão, que permitiu o conceito de inclusão-monotonicidade, é uma relação de ordem não-trivial. Logo, a topologia definida no espaço dos intervalos e a inclusão-monotonicidade são incompatíveis. Ironicamtente, tudo se passa como se em colocando a topologia métrica no espaço dos intervalos se recuperasse as mesmas deficiências (a não monotonicidade de algumas das funções da aritmética real) da reta real as quais a teoria intervalar pretendia superar. Agora é possível entender porque os cientistas da área de matemática intervalar, deram preferência a inclusão monotonicicidade em detrimento dos conceitos topológicos. Aqueles que trabalham com os dois conceitos conjuntamente ou foram suficientemente sensíveis para perceber as incompatibilidades ou devem ter se expostos ao perigo de tirar conclusões contraditórias.

Não há como sair desse círculo, para não dizer paradoxal, sem se excluir um dos dois conceitos, inclusão -monotonicidade ou a topologia métrica, definida na seção anterior. A escolha é uma decisão política. A opção pela inclusão-monotonicidade é feita pelo cientista da computação, o lógico da computação , ou seja, aqueles preocupados pelos fundamentos da computação científica. A opção pela topologia Hausdorff é feita pelo matemático, nos moldes clássico, onde as únicas topologias que valem a pena estudar devem no mínimo ser de Hausdorff. Desse ponto de vista, a análise intervalar nada mais é que uma teoria que extende a análise real, no mesmo sentido da análise complexa. Em outras palavras, enquanto a primeira opção vê o intervalo como algo "menor" (ele aproxima um real), embora manipulável e o real como algo ideal, apenas atingível por limite, a segunda opção vê um intervalo como extensão (algo "maior") do real, e um real é um caso particular de intervalo, onde os extremos são iguais.

Embora essa duas visões da matemática intervalar sejam opostas, a visão Hausdorff tem predominado impedindo que a visão lógica dinamizasse todas as suas potencialidades e isso apesar da grande maioria ter, aparentemente, optado pela visão lógica. Isto explica porque a grande quantidade de trabalho nessa área continua sendo elaboração de algorítmos. A seguir são dados argumentos para justificar essa afirmação.

(b) A reta real munida das operações $-,+,\cdot$ e $/$ constitui um corpo. Ou seja, a reta real é um modelo de uma teoria algébrica. Numa teoria algébrica não figuram desigualdades no conjunto de seus axiomas, mas apenas igualdades. Por isso ela é também chamada teoria equacional. O conjunto dos intervalos munido das operações básicas, $-,+,\cdot$ e $/$, não constitui um corpo. Para quem tem uma visão Hausdorff isto constitui uma deficiência paralizante uma vez que a estrutura intervalar se afasta muito da semelhança com a reta, o que não acontece para a mesma estrutura com os números complexos, que também é um corpo. Uma consequência dessa "deficiência" (veja Capítulo 5) consiste em que não é possível definir sobre essa estrutura a noção de espaço vetorial e consequentemente está perdida toda a operacionalidade no sentido da álgebra linear, como resolução de sistemas lineares de equações, por exemplo. Não podendo ser vetorial não pode ser um espaço de Banach, não sendo Banach não existe a garantia de que funções que são contrações possuem um único ponto fixo, não havendo essa garantia está prejudicada a análise de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais e assim por diante. Ou seja, essa estrutura se afasta tanto da reta real que se começa a questionar se ela é realmente uma teoria que extenda a reta com alguma utilidade, enquanto extensão dessa reta. Em vez de entrar nesse beco sem saída, o indivíduo da outra visão, a visão lógica, focaliza a atenção não na igualdade, mas na relação de ordem. E o que resulta (veja capítulos 2 e 5) é uma estrutura ordenada com um conjunto de axiomas constituído de igualdades e desigualdades. Isto não é mais uma teoria algébrica, mas teoria ordenada ou lógica. A partir dessa teoria é possível definir espaço "vetorial" desenvolver uma "álgebra linear", resolver sistemas de equações "lineares", etc. Não se tem notícia de que algo semelhante tenha sido feito. Isto justifica a afirmação de que a visão Hausdorff da matemática intervalar tenha sido paralizante para o desenvolvimento do lado lógico dessa teoria.

(c) Mesmo a visão inclusão-monotônica da matemática intervalar, a parte computacionalmente fértil dessa teoria, não está isenta de defeitos graves, embora facilmente superáveis. Por exemplo, segundo essa teoria cada número real é aproximado por um intervalo de extremos reais que o contém. Cada intervalo, tendo extremos reais, cada um desses reais deve ser aproximado por um intervalos de extremos reais que o contém e assim ad infinitum. A única maneira de quebrar essa regressão infinita é desenvolver uma teoria, nos moldes da Teoria de Dedekind para o sistema de números reais, onde tudo que se precisa são os intervalos de extremos racionais. Para isso deve-se construir todos os elementos do espaço dos intervalos pressupondo apenas os intervalos de extremos racionais (veja capítulo 1). Ou seja, os intervalos de extremos racionais constitui uma "base" para o espaço dos intervalos. Como essa "base" é um conjunto enumerável é possível se introduzir o conceito de número real ou intervalo de números reais computável, pois para isso ser possível é suficiente a existência de uma base enumerável [SMY 77].

A opção pela visão inclusão-monotônica da matemática intervalar não significa que não se possa ter uma topologia definida nesse espaço. De fato, nesta tese é proposta uma topologia, a conhecida topologia de Scott, onde a propriedade da inclusão-monotonicidade é compatível com a topologia. Como consequência todos os resultados decorrentes da inclusão-monotonicidade são também resultados topológicos e reciprocamente. Portanto, existem, agora, duas visões diferentes, porém compatíveis, da matemática intervalar. Uma, a visão lógica, e deste ponto de vista é desenvolvido uma teoria de algorítmos que contém como subteoria o cálculo lambda com tipo e o cálculo lambda sem tipo. Esta teoria nos permite raciocinar com programas da matemática intervalar (Capítulo 7). A outra visão, o ponto de vista topológico ou analítico nos permite obter uma série de resultados que estão em analogia com os resultados da análise real tais como uma versão intervalar do Teorema do Ponto Fixo de Banach, do Teorema da Extensão de Tietze, do Teorema de Stone-Weierstrass, etc.

Um fato importante a destacar nesta nova abordagem é que a linguagem usada para falar de matemática intervalar é a mesma usada pelos cientistas da computação para fazer semântica denotacional de linguagens de programação, unificando, desde agora, dois campos de pesquisas aparentemente distintos.

A seguir será dado um resumo do conteúdo dos próximos capítulos.

No Capítulo 2 é construído o sistema intervalar a partir dos intervalos de extremos racionais. Essa construção é análoga aquela feita por Dedekind na construção do sistema de número reais a partir da estrutura de números racionais. O que resulta é uma estrutura ordenada em vez de uma estrutura algébrica, como se dá para o caso real. Essa estrutura ordenada está para a matemática intervalar assim como o corpo dos números reais está para a análise real.

No Capítulo 3 são apresentados alguns elementos de topologia e categoria necessários para os capítulos subsequentes. O resultado principal desse capítulo é o teorema de ponto fixo para espaços topológicos ordenados, onde a topologia do espaço é de Scott.

O objetivo do Capítulo 4 é apresentar a matemática intervalar como uma categoria bicartesiana fechada com objeto reflexivo e como tal ela é modelo do cálculo lambda com tipo e do cálculo lambda sem tipo.

No Capítulo 5 a matemática intervalar é apresentada como um método alternativo ao método linear, onde a preocupação por representação finita está presente. É sugerido, também, como desenvolver uma "álgebra linear" da matemática intervalar. Ainda neste capítulo mostra-se que é possível analizar a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais com a linguagem intervalar.

O objetivo do Capítulo 6 é apresentar cada número real, ou intervalos de números reais, ou funções reais apresentadas por séries, etc., como uma lógica das observações finitas, conhecida como lógica geométrica. Para isso são apresentadas, no início do capítulo, sob uma forma inédita, pelo menos para o autor, alguns conceitos fundamentais de lógica e linguagem.

O Capítulo 7 coloca a matemática intervalar como uma linguagem lambda que extende as linguagens lambda com tipos e sem tipos. É elaborada, também, neste capítulo, uma lógica construtiva para a matemática intervalar de modo que seja possível fazer correção automática de programas.

Finalmente, no Capítulo 8, é feita uma análise dos resultados obtidos e sugeridas futuras pesquisas na área.

2 A CONSTRUÇÃO DO QUASI-CORPO DOS INTERVALOS FECHADOS DE NÚMEROS REAIS

O objetivo principal deste capítulo é generalizar o conceito de corpo ordenado de números reais. Para isso o conceito de corte de Dedekind é generalizado na seção 2.2. O que resulta desta generalização é uma estrutura ordenada que será chamada quasi-corpo. Observa-se na seção 2.4 que esta estrutura é uma generalização da noção de reticulado contínuo como pode ser encontrado em [GIE 80]. Na seção 2.6 se observa que o conceito de corte de Dedekind generalizado é uma extensão da noção de ideal como aparece em Teoria dos Domínios [PLO 80]. Na seção 2.8 é feita uma comparação entre o conceito de quasi-corpo e a estrutura dos intervalos como está em [MOO 66].

2.1 A Estrutura dos Números Racionais e dos Intervalos de Extremos Racionais

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. Assume-se que $\mathbb{Q}$ contém $-\infty$ e $+\infty$. Considere sôbre $\mathbb{Q}$ as operações de $-$ (subtração), $+$(adição), $\cdot$ (multiplicação) e / (divisão). Por questão de simplicidade, as vezes, a subtração e a divisão são vistas em termos da adição e da multiplicação como segue. Para $a, b \in \mathbb{Q}$, faça:

$a - b = a + (-b)$, onde $- : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que $-(a) = -a$ e,

a/b (ou $\frac{a}{b}$) $= a \cdot \frac{1}{b}$, onde $^{-1} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que $a^{-1} = \frac{1}{a}$ se $a \neq 0$ e
$0^{-1} = -\infty$ ou $+\infty$.

A estrutura $(\mathbb{Q}, -, +, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$, onde 0 e 1 são os números racionais zero e um, respectivamente, agora destacados, satisfaz as seguintes propriedades para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

(1)	$x + y = y + x$; $\quad x \cdot y = y \cdot x$	(comutatividade)
(2)	$x + (y + z) = (x + y) + z$;	
	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	(associatividade)
(3)	$0 + x = x$; $1 \cdot x = x$	(existência de elemento neutro)
(4)	$x - x = 0$; $\frac{x}{x} = 1$ ou $\pm\infty$	(existência do elemento inverso)
(5)	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	(distributividade)

A estrutura $(\mathbb{Q}, -, +, ^{-1}, \cdot, 0, 1)$ satisfazendo (1) - (5) diz-se um *corpo*, o corpo dos números racionais, de ora em diante representado, simplesmente por, $\mathbb{Q}$. As operações envolvendo$\pm\infty$ são aquelas usuais. Por exemplo, $x + \infty = +\infty$ se $x \neq -\infty, x \cdot \infty = \infty$.

2.1.1 Definição: Ordem Parcial

Seja A um conjunto não-vazio e $\leq$ uma relação sobre A. Uma *ordem parcial*, ou simplesmente *po*, é um par $(A, \leq)$, onde a relação $\leq$ satisfaz as seguintes propriedades, para todo $x, y, z \in A$.

(i) $x \leq x$ (reflexividade)
(ii) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitividade)
(iii) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$ (anti-simetria)

Escreve-se $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$. Diz-se, também, que A é um *conjunto parcialmente ordenado*.

A ordem parcial $(A, \leq)$ diz-se *total* (ou *A é totalmente ordenado)* se todos os elementos de A são comparáveis, isto é, para todo $x, y \in A$. $x \leq y$ ou $y \leq x$. Por exemplo $\mathbb{Q}$ munido da ordem parcial $\leq$ ("menor ou igual") é um conjunto totalmente ordenado.

2.1.2 Definição: Ordem Forte ou Ordem Auxiliar

Seja $(A, \leq)$ uma ordem parcial e $\prec$ uma relação definida sobre A. $\prec$ diz-se uma *ordem forte* ou *relação auxiliar* se ela satisfaz as seguintes propriedades, [GIE 80], para todo $x, y, z, w \in A$.

(1) $x \prec y \Rightarrow x \leq y$
(2) $x \prec z$ e $y \prec z \Rightarrow \exists w \in A$ tal que $x, y \prec w$ e $w \prec z$
(3) $x \leq y, y \prec z$ e $z \leq w \Rightarrow x \prec w$
(4) $x \prec z \Rightarrow \exists y \in A$ tal que $x \prec y \prec z$

A propriedade (4) também chamada *interpolação*, é de fundamental importância para os "espaços contínuos" como a reta real e o espaço dos intervalos. Observe que uma ordem forte, em geral, não é reflexiva. A relação , $\prec$, "é estritamente menor", sôbre os racionais $\mathbb{Q}$ é uma ordem forte, sôbre $\mathbb{Q}$. $\prec$ não é reflexiva, isto é, $x \prec x$ não é verdadeira para nenhum $x \neq -\infty$ ou $+\infty$. Por outro lado, pode-se assumir, sem nenhum problema, que $-\infty \prec -\infty$ e $+\infty \prec +\infty$.

Seja $\mathbb{I}(\mathbb{Q}) = \{[p,q] \mid p,q \in \mathbb{Q} \text{ e } p < q\}$, onde $[p,q]$ são os intervalos fechados. Como, por hipótese, $-\infty < +\infty, [-\infty,+\infty] \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$. Defina, sôbre $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$, as seguintes relações, para todo $[p,q],[p',q'] \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$

$$[p,q] \sqsubseteq [p',q'] \Leftrightarrow p \leq p' < q' \leq q, \text{ isto é, } [p',q'] \subseteq [p,q]$$
$$[p,q] << [p',q'] \Leftrightarrow p < p' < q' < q, \text{ isto é, } [p,q] \sqsubseteq [p',q'], \text{ mas } p \neq p' \text{ e } q \neq q'.$$

É fácil ver que $(\mathbb{I}(\mathbb{Q}), \sqsubseteq)$ é uma ordem parcial e $<<$ é uma ordem forte, sobre $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$. Observe que $<<$ não é reflexiva. Esta relação desempenhará um papel, com respeito a $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$, análogo aquele que $<$ desempenha em relação a $\mathbb{Q}$.

A partir das operações $-,+,\cdot,/$, sobre $\mathbb{Q}$, é possível definir as seguintes operações sobre $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$:

$$\begin{aligned}
[p,q]+[p',q'] &= [p+p',q+q']; [p,q]-[p',q'] = [p,q]+[-q',-p'] = [p-q',q-p] \\
[p,q]\cdot[p',q'] &= [min\{x\cdot y\},\ max\{x\cdot y\}], \text{ onde } x \in \{p,q\}, y \in \{p',q'\} \\
[p,q]/[p',q'] &= [p,q]\cdot \tfrac{1}{[q',p']}, \text{ onde }{}^{-1} : \mathbb{I}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{I}(\mathbb{Q}) \text{ tal que} \\
[p,q]^{-1} = \left[\tfrac{1}{q},\tfrac{1}{p}\right] &\quad \text{se } 0 \notin [p,q] \text{ e } [p,q]^{-1} = [-\infty,+\infty] \text{ se } 0 \in [p,q].
\end{aligned}$$

Defina $[p,q] * [-\infty,+\infty] = [-\infty + \infty]$, como sendo $[-\infty,+\infty]$, se $* \in \{-,+,\cdot,/\}$. Usando as propriedades do corpo $\mathbb{Q}$ é fácil ver que $(\mathbb{I}(\mathbb{Q}), -, +, \cdot, {}^{-1})$ satisfaz as seguintes propriedades, para todo $x,y,z \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$.

(1) $x+y=y+x; \quad x\cdot y = y\cdot x$ (comutatividade)

(2) $x+(y+z)=(x+y)+z;$

$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ (associatividade)

(3) $x\cdot y + x\cdot z \sqsubseteq x\cdot(y+z)$ (semi-distribuitividade)

Sejam $(A_1, \sqsubseteq_1)$ e $(A_2, \sqsubseteq_2)$ ordens parciais com ordens fortes $\prec_1$ e $\prec_2$, respectivamente. Defina sobre $A_1 \times A_2 = \{(x,y) \mid x \in A_1, y \in A_2\}$, o produto cartesiano de A_1 e A_2, as seguintes relações.

$$(x_1,y_1) \sqsubseteq (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \sqsubseteq_1 x_2 \quad \text{e} \quad y_1 \sqsubseteq_2 y_2$$

$$(x_1,y_1) \prec (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \prec_1 x_2 \quad \text{e} \quad y_1 \prec_2 y_2$$

$(A_1 \times A_2, \sqsubseteq)$ é uma ordem parcial com ordem forte $\prec$.

2.1.3 Definição: Função Monotônica

Sejam $(A_1, \sqsubseteq_1)$ e $(A_2, \sqsubseteq_2)$ ordens parciais. Uma função $f : A_1 \longrightarrow A_2$ diz-se *monotônica* se $x \sqsubseteq_1 y \Rightarrow f(x) \sqsubseteq_2 f(y)$.

2.1.4 Proposição

As operações $-, +, \cdot$ e $/$, definidas sobre $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$, acima, são funções monotônicas de $\mathbb{I}^2(\mathbb{Q})$ em $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$

Prova: ver [DIM 91].

Das operações $-, +, \cdot$ e $/$ definidas sobre $\mathbb{Q}$ a única que é monotônica é a adição. A multiplicação, por exemplo, não é monotônica, pois $-2 \leq 0, -3 \leq 0$ e, no entanto, $(-2) \cdot (-3) \geq 0$.

Este fato poderia ser visto como uma deficiência da ordem $\leq$, sobre $\mathbb{Q}$. De fato, do ponto de vista da computação as funções não-monotônicas são imprestáveis, isto porque elas não são computáveis. Por outro lado, a função produto de números racionais é intuitivamente computável (é possível fazer um programa em FORTRAN que computa a função produto de dois números racionais). Isto sugere que a ordem usual, sobre $\mathbb{Q}$, é incompatível com a noção usual de computação. Desse modo, a passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ pode ser vista como uma tentativa de suprir essa deficiência da ordem dos racionais. É claro que $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ deve preservar muitas propriedades importantes de $\mathbb{Q}$.

2.1.5 Lema

A equação $x^2 = 2$ não tem solução em $\mathbb{Q}$, isto é, não existe nenhum $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$.

Prova: Sabe-se que $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Suponha, por contradição, que existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$. É possível supor, sem perda de generalidade, que $x = \frac{a}{b}$ é irredutível, isto é, $m.d.c(|a|, |b|) = 1$ (por exemplo, se $x = \frac{6}{10}$, então toma-se o seu equivalente $x = \frac{3}{5}$, onde $m.d.c(3, 5) = 1$). Da hipótese de que $\frac{a}{b}$ é solução de $x^2 = 2$ segue que $\frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a$ é par, isto é, $a = 2m$ para $m \in \mathbb{Z}$. Logo, $a^2 = 4m^2$ e consequentemente $4m^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2m^2 \Rightarrow b^2$ é par $\Rightarrow b$ é par. Absurdo, pois a e b, por hipótese, são irredutíveis. Portanto, $x^2=2$ não tem solução em $\mathbb{Q}$.

$\square$

2.1.6 Definição: Supremo e Ínfimo

Seja $(A, \sqsubseteq)$ uma ordem parcial e $X \subseteq A$ um subconjunto não-vazio de A. $x \in A$ diz-se *supremo* de X, cuja notação é $x = \sqcup X$ ou $x = Sup\ X$, se

(i) x é um majorante de X, isto é, $y \sqsubseteq x$, para todo $y \in X$.

(ii) x é o menor dos majorantes, isto é, se $x' \in A$ com $y \sqsubseteq x'$ para todo $y \in X$, então $x \sqsubseteq x'$.

Quando $x = Sup\ X$ e $x \in X$, ele diz-se um máximo de X. O conceito de ínfimo é o dual do de supremo, isto é, na definição de ínfimo coloca-se $\sqsupseteq$, onde se tem $\sqsubseteq$. Ou seja, $x \in A$ é o *ínfimo* de X, para $X \neq \emptyset, X \subseteq A$ se

(i') x é um minorante de X, isto é, $y \sqsupseteq x$, para todo $y \in X$.

(ii') x é o maior dos minorantes, isto é, se $x' \in A$ com $y \sqsupseteq x'$ para todo $y \in A$, então $x \sqsupseteq x'$.

Usa-se $x = \sqcap X$ ou $x = inf\ X$ para denotar o ínfimo de X. No caso particular de $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ser finito, usa-se $x = x_1 \sqcup \ldots \sqcup x_n$ e $x = x_1 \sqcap \ldots \sqcap_n$ como uma alternativa para denotar $Sup\ X$ e $inf\ X$, respectivamente.

É fácil ver que se $inf\ X$ ou $Sup\ X$ existe ele é único. De fato, sejam $x = inf\ X$ e $x' = inf\ X$. Como x é um ínfimo e x' é um minorante, então $x' \sqsubseteq x$. Analogamente, $x \sqsubseteq x'$. Usando a anti-simetria de $\sqsubseteq$ segue que $x = x'$.

Agora, usando o *princípio da dualidade*, o $Sup\ X$, se ele existe é único. Este princípio consiste no seguinte.

Seja $(A, \sqsubseteq)$ uma ordem parcial. A ordem parcial oposta A^{op} tem os mesmos elementos que A, porém com a ordem reversa: $a \sqsubseteq b$ em $A^{op} \Leftrightarrow b \sqsubseteq a$ em A. O princípio da dualidade pode ser enunciado como segue.

2.1.7 Proposição

Seja A uma ordem parcial e $X \subseteq A$, não vazio e $x \in X$. Então $x = SupX \Leftrightarrow x = infY$, com $Y \subseteq A^{op}$.

Prova: Imediata a partir das definições.

Apesar da simplicidade desta proposição, ela, muitas vezes, corta as demonstrações pela metade. Tendo provado um resultado para o supremo (ou ínfimo) pode-se, imediatamente, estabelecer, sem prova, um resultado para o dual, o ínfimo (ou supremo). Por exemplo, mostrou-se, acima, que o ínfimo quando existe é único. Pelo princípio da dualidade o mesmo é verdade para o supremo.

2.1.8 Lema

Seja $X = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ e $Y = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$. Então, $Sup\ X$ e $inf\ Y$ não existem em $\mathbb{Q}$.

Prova: Mostrar que $Sup\ X$ não existe, é equivalente a mostrar que, para cada $x \in X$, existe $y \in Y$ com $y \prec x$. Para isto suponha que $x \in X$. Então $x^2 < 2$. Considere um $p \in \mathbb{Q}$ com $0 < p < 1$ e $p < \frac{2-x^2}{2x+1}$. Seja $y = x + p$. Por conseguinte, $y > x$ e, $y^2 = x^2 + (2x+p)p < x^2 + (2x+1)p < x^2 + (2-x^2) = 2$. De modo que $y \in X$. Para mostrar que $inf\ Y$ não existe em $\mathbb{Q}$ suponha $x \in Y$. Então $x^2 > 2$. Seja $y = x - \frac{x^2-2}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. Então, $0 < y < x$ e $y^2 = x^2 - (x^2-2) + (\frac{x^2-2}{2x})^2 > x^2 - (x^2-2) = 2$. De modo que $y \in Y$. Logo, $inf\ Y$.

□

2.1.9 Proposição

Seja $X = \{[p,q] \in \mathbb{I}(\mathbb{Q}) | [p^2, q^2] << [2,3],\ p > 0 \text{ e } q > 0\}$. Então $Sup\ X$ não existe em $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$.

Prova: Seja $Y = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0 \text{ e } x^2 > 3\}$. Então $inf\ Y$ não existe em $\mathbb{Q}$. De fato, suponha $x \in Y$, então $x^2 > 3$. Seja $y = x - \frac{x^2-3}{2x} = \frac{x^2+3}{2x} > 0$ e $x - \frac{x^2-3}{2x} = y < x \Leftrightarrow x^2 > 3$. Portanto, $0 < y < x$ e $y^2 = x^2 - (x^2-3) + (\frac{x^2-3}{2x})^2 > x^2 - (x^2-3) = 3$. De modo que $y \in Y$. Logo, $inf\ Y$ não existe em $\mathbb{Q}$. Usando o Lema 2.1.8 e o fato de que $X = \{[p,q] \in \mathbb{I}(\mathbb{Q}) | p > 0, q > 0, p^2 > 2 \text{ e } q^2 > 3\}$ segue o resultado.

□

2.1.10 Definição: Conjunto Dirigido e Cadeia

Seja $(A, \sqsubseteq)$ uma ordem parcial e $X \subseteq A$ não-vazio. X diz-se um subconjunto *dirigido* de A se para todo $x, y \in X$ existe $z \in X$ tal que $x \sqsubseteq z$ e $y \sqsubseteq z$. Um subconjunto $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de A diz-se uma *cadeia* se ele é totalmente ordenado, isto é, $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq x_n \sqsubseteq \ldots$

Assim toda cadeia é um conjunto dirigido, pois dados dois elementos x_i e x_j da cadeia, então $x_i \sqsubseteq x_j$ ou $x_j \sqsubseteq x_i$. Se esta última desigualdade se verifica então o z da definição de dirigido é x_i, caso contrário é x_j.

Como $\mathbb{Q}$ é um conjunto totalmente ordenado, todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{Q}$ é uma cadeia em $\mathbb{Q}$ e por conseguinte um conjunto dirigido em $\mathbb{Q}$. Em $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$, nem todo subconjunto é uma cadeia, por exemplo $\{[-1,2],[0,3],[0,2]\}$ é dirigido e não é uma cadeia. Outro exemplo de conjunto dirigido em $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ é $\{[p,q] | p > 0, q > 0 \text{ e } [p^2, q^2] << [2,3]\}$.

Uma ordem parcial $(A, \sqsubseteq)$ diz-se *completa*, ou simplesmente *cpo* se todo subconjunto dirigido de A tem supremo em A e existe um elemento $\perp \in A$ tal que $\perp \sqsubseteq x$, para todo $x \in A$, chamado *primeiro elemento* de A ou *bottom*.

2.1.11 Exemplo

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Um conjunto não-vazio X diz-se *enumerável* se existe uma função bijetiva $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$. X diz-se *contável* se ele é finito ou enumerável.

(a) Seja A um conjunto contável e $A_\perp = A \cup \{\perp\}$, onde $\perp$ é um elemento artificial, $\perp \notin A$, acrescentado a A, chamado bottom. Defina sobre $A_\perp$ a seguinte relação

$$x, y \in A_\perp, \quad x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x = \perp \quad \text{ou} \quad x = y.$$

Então $(A_\perp, \sqsubseteq, \perp)$ é um *cpo* chamado *cpo plano*. (É usual se destacar o bottom na estrutura). De fato, é trivial que $\sqsubseteq$ é uma ordem parcial. Por outro lado, os únicos subconjuntos dirigidos de $A_\perp$ são $\{\perp, x\}$ e $\{x\}$, onde $x \in A_\perp$, $Sup\{\perp, x\} = x$ e $Sup\{x\} = x$.

Isso é uma maneira natural de tornar conjuntos em *cpo's*. Desse modo, os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{B} = \{f, t\}$ podem se tornar *cpo's* $(\mathbb{N}_\perp, \sqsubseteq, \perp), (\mathbb{Z}_\perp, \sqsubseteq, \perp), (\mathbb{Q}_\perp, \sqsubseteq, \perp)$ e $(\mathbb{B}_\perp, \sqsubseteq, \perp)$, onde $\sqsubseteq$ é a ordem plana definida acima.

(b) Seja X um conjunto não-vazio qualquer e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X. Defina, sobre $\mathcal{P}(X)$, a seguinte relação.

$$X_1, X_2 \in \mathcal{P}(X), \quad X_1 \sqsubseteq X_2 \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2.$$

Então, $(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq, \phi)$ é um *cpo*, onde o primeiro elemento $\perp = \phi$. Qualquer família não-vazia $\{A_\alpha\} \subseteq \mathcal{P}(X)$, dirigida, $\{A_\alpha\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tem supremo $\cup_\alpha \{A_\alpha\}$.

(c) Um caso particular do exemplo anterior é o seguinte.

Sejam $(D_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ e $(D_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$ *cpo's*. Seja $(D_1 \longrightarrow D_2)$ o conjunto de todas as funções de D_1 em D_2. Defina sobre $(D_1 \longrightarrow D_2)$ a seguinte relação $f, g \in (D_1 \longrightarrow D_2)$, $f \sqsubseteq g \Leftrightarrow graf(f) \subseteq graf(g)$. Defina $\perp \in (D_1 \longrightarrow D_2)$ por $\perp(x) = \perp_2$ para todo $x \in D_1$. Então $(D_1 \longrightarrow D_2, \sqsubseteq, \perp)$ é um *cpo*, cujo primeiro elemento é $\perp$.

As ordens parciais $(\mathbb{Q}, \leq)$ e $(\mathbb{I}(\mathbb{Q}), \sqsubseteq)$, definidas anteriormente, tem $\perp = -\infty$ e $\perp = [-\infty, +\infty]$ como primeiro elemento, respectivamente, mas não são *cpo's* pelos Lema 2.1.5 e a Proposição 2.1.7. Considere a ordem parcial $(\mathbb{Q}, \sqsubseteq)$ onde $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow y \leq x$. Denotando essa ordem parcial por $\mathbb{Q}^{op}$, tem-se $\perp = +\infty$ é o primeiro elemento de $\mathbb{Q}^{op}$.

2.2 Completação de Ordens Parciais

Nesta seção será usada a técnica dos cortes de Dedekind para se obter completação das ordens parciais $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^{op}$ e $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$. É dada aqui uma definição de Corte de Dedekind de modo a acomodar as ordens parciais $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q}^{op}$) e $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$. Essa definição de corte é uma generalização da definição de Corte de Dedekind encontrada na fundamentação do sistema de números reais, como está em [RUD 66].

Seja A qualquer um dos conjuntos $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$. Se $(A, \leq, \perp_0)$ é uma ordem parcial com primeiro elemento $\perp_0$ e $A = \mathbb{Q}$, então $\leq$ se tornará $\leq$ (menor ou igual) e $\perp_0 = -\infty$, enquanto a ordem forte é $<$ (estritamente menor). Se $A = \mathbb{Q}^{op}$, então, $\leq$ se torna $\sqsubseteq$, como definida acima e $\perp_0 = +\infty$, enquanto a ordem forte será $>$ (estritamente maior). No caso de $A = \mathbb{I}(\mathbb{Q})$, $\leq$ será $\sqsubseteq$, como definida acima, sobre $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$, $\perp_0 = [-\infty, +\infty]$ e $\prec$ é $<<$.

2.2.1 Definição: Corte de Dedekind

Seja $(A, \leq, \prec, \perp_0)$ uma ordem parcial com ordem forte $\prec$ e primeiro elemento $\perp_0$. Um subconjunto $\alpha \subseteq A$, tal que $\alpha \neq A$, diz-se um *corte de Dedekind* se

(i) $x \prec y$ e $y \in \alpha \Rightarrow x \in \alpha$

(ii) Para todo $x \in \alpha$, existe $y \in \alpha$ tal que $x \prec y$

(iii) α é dirigido, isto é, $\alpha \neq \phi$ e para todo $x, y \in \alpha$, existe $z \in \alpha$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$.

Como todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{Q}$ é dirigido, ele satisfaz automaticamente a condição (iii). Isto significa que esta condição é desnecessária para cortes em $\mathbb{Q}$, basta acrescentar a condição $\alpha \neq \phi$, veja [RUD 66]. A condição (iii) visa acomodar a ordem parcial $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$.

2.2.2 Proposição

Seja α um corte tal que $x \in \alpha$ e $y \notin \alpha$. Então $y \not\preceq x$. Se $A = \mathbb{Q}$, então, de fato, $x < y$.

Prova: $y \not\preceq x$, pois caso contrário se $y \prec x$, pela condição (i) da definição de corte $y \in \alpha$. Se $A = \mathbb{Q}$, então $x < y$ porque $\mathbb{Q}$ é totalmente ordenado.

□

2.2.3 Proposição

Para todo $x \in A$, o conjunto $\downarrow x = \{y \in A | y \prec x\}$ é um corte de Dedekind e $Sup \downarrow x = x$. Em particular, $\downarrow x$ é um conjunto dirigido.

Prova: Como $\perp_0 \prec \perp_0$, $\downarrow x$ contém no mínimo o elemento $\perp_0$, pois $\perp_0 \leq x$ para todo $x \in A$. Logo, $\downarrow x \neq \phi$, para cada $x \in A$. Por outro lado, se $z \succ x, z \in A$, então $z \notin \downarrow x$ e portanto $\downarrow x \neq A$. Se $x_1 \prec x_2$ e $x_2 \in \downarrow x$, então $x_2 \prec x$ e pela transitividade de $\prec$ segue que $x_1 \prec x$. Isto mostra a condição (i). Para provar a condição (ii) suponha que $z \in \downarrow x$. Então $z \prec \frac{x+z}{2} \prec x$ e consequentemente $\frac{x+z}{2} \in \downarrow x$. Para encerrar a prova falta mostrar que $\downarrow x$ é dirigido e $Sup \downarrow x = x$. Se $A = \mathbb{Q}$, $\downarrow x$ é dirigido porque todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{Q}$ é. Suponha que $A = \mathbb{I}(\mathbb{Q})$. Então, dados $[p,q],[p',q'] \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$ com $[p,q],[p',q'] \in \downarrow x$ tem-se $[p,q] << x$ e $[p',q'] << x$. Portanto, $z = [p,q] \cap [p',q'] \neq \phi$ e pertence a $\downarrow x$. Além disso, $[p,q] \sqsubseteq z, [p',q'] \sqsubseteq z$ e $z << x$. $z = [p,q] \cap [p',q']$. Portanto $\downarrow x$ é dirigido. Falta mostrar que $Sup \downarrow x = x$. De fato, $x \prec x$ é absurdo, pois α não é reflexiva. Logo, $x \notin \downarrow x$ e portanto x é um majorante de $\downarrow x$. Se x' é outro majorante, então necessariamente $x \prec x'$, pois do contrário (isto é, $x' \prec x$) ter-se-ia $x' \in \downarrow x$, contrariando o fato de x' ser majorante. Logo, $Sup \downarrow x = x$.

□

Seja $\overline{A}$ a coleção de todos os cortes de Dedekind sobre A. Defina sobre $\overline{A}$ a seguinte relação.

$\alpha, \beta \in \overline{A}$, $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$; $\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$, e para algum $x \in A, \alpha \subset \downarrow x \subset \beta \in \overline{A}$ é chamado *completação por cortes de Dedekind* de A.

2.2.4 Teorema

$(\overline{A}, \leq, \perp)$, onde $\perp = \{\perp_0\}$, é um *cpo* com ordem forte $\prec$.

Prova: Para provar esse teorema primeiro será provado o seguinte lema.

2.2.5 Lema

Seja $\overline{A}$ a completação por cortes de Dedekind de A e $F \subset \overline{A}$ uma família dirigida de $\overline{A}$. Então, $Sup\ F$ existe e pertence a $\overline{A}$, isto é, $Sup\ F$ é um corte de Dedekind.

Prova: Seja $F = \{\alpha_i | i \in I\}$, com $\alpha_i \in \overline{A}$. Deve-se mostrar que $Sup\ F = \cup F$ satisfaz a definição de corte. $Sup\ F \neq \phi$ e $Sup\ F \neq \overline{A}$ porque, por hipótese, F é uma família própria de $\overline{A}$. Suponha que $x \prec y$ e $y \in \cup F$. $y \in \cup F \Rightarrow \exists \alpha_i \in F$ tal que $y \in \alpha_i$.

$x \prec y \Rightarrow x \in \alpha_i$, pois α_i é corte. Logo, $x \in \cup F$. Para mostrar (ii) tome $x \in \cup F$. Então para algum i, $x \in \alpha_i$. Como α_i é um corte, existe $y \in \alpha_i$ tal que $x \prec y$. Portanto $y \in \cup F$ e $x \prec y$. Falta mostrar que $\cup F$ é dirigido. Seja $x, y \in \cup F$. Então, existem $\alpha_i, \alpha_j \in F$ tal que $x \in \alpha_i$ e $y \in \alpha_j$. Como F é dirigido existe um elemento $\alpha_e \in F$ tal que $\alpha_i \leq \alpha_e$ e $\alpha_j \leq \alpha_e$. Logo, existe $z \in \alpha_e$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$. Como $\alpha_e \subset \cup F$ segue que $z \in \cup F$. Portanto $Sup\ F = \cup F$ é dirigido e $\cup F \in \overline{A}$.

□

Prova do Teorema: $(\overline{A}, \leq)$ é uma ordem parcial porque $\leq$ é a relação de inclusão em conjuntos. Como $\perp_0 \notin A$ e $\perp_0 \leq x$ para todo $x \in A$ segue que $\{\perp_0\} = \downarrow \perp_0 \leq \alpha$, para todo $\alpha \in \overline{A}$. Logo, $\perp = \{\perp_0\}$ é o primeiro elemento de $\overline{A}$. Pelo Lema 2.2.5 $\overline{A}$ é um *cpo*. Falta mostrar que $\prec$ é uma ordem forte. Mas isto é imediato da definição de $\prec$.

□

2.2.6 Proposição

$\overline{\mathbb{Q}}$ é totalmente ordenado, isto é, $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}} \Rightarrow \alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$.

Prova: Pela definição da ordem $\leq$, sobre $\overline{A}$, se $\alpha = \beta$, então claramente não se dá $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$. Para mostrar que ambas as relações se excluem mutuamente, suponha que ambas as relações sejam válidas. Como $\alpha < \beta$, existe $y \in \beta$ e $y \notin \alpha$. Como $\beta < \alpha$, existe $x \in \alpha$ e $x \notin \beta$. Pela Proposição 2.1.2, no caso de $\overline{\mathbb{Q}}$, se $y \in \beta$ e $x \notin \alpha$, então $y < x$. Analogamente, de $x \in \alpha$ e $y \notin \alpha$ segue que $x < y$, o que é uma contradição, pois $<$ não é reflexiva. Logo, apenas uma de $x < y$ ou $y < x$ pode ser verdadeira. Uma dessas duas desigualdades se verifica. De fato, suponha que $\alpha \neq \beta$. Então os dois conjuntos não são idênticos, isto é, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que x está em um e não no outro. Se $x \in \alpha$ e $x \notin \beta$, então $\alpha < \beta$. Caso contrário, $\beta < \alpha$.

□

2.2.7 Definição: Isomorfismo

Sejam $(A_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ e $(A_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$ ordens parciais com primeiro elemento $\perp_1$ e $\perp_2$, respectivamente. Uma função $f : A_1 \longrightarrow A_2$ diz-se um *isomorfismo* se

(i) $f(\perp_1)=\perp_2$

(ii) f é bijetiva, isto é, f é injetiva e sobrejetiva

(iii) f é monotônica.

Seja $\mathcal{B}=\{\downarrow x|x\in A\}\subseteq\overline{A}$. $(\mathcal{B},\leq,\perp)$ é uma ordem parcial com primeiro elemento $\perp=\{\perp_0\}$, onde $\leq$ é induzida de $\overline{A}$. Ou seja, $\alpha,\beta\in\mathcal{B}\Leftrightarrow\alpha\leq\beta$ como elementos de $\overline{A}$. Como $\perp_0\in A$, $\downarrow\perp_0=\{x\in A|x\prec\perp_0\}=\{\perp_0\}$. Então $\downarrow\perp_0\in\mathcal{B}$ e, $\downarrow\perp_0=\{\perp_0\}\subseteq\alpha$, para todo $\alpha\in\mathcal{B}$, ou seja, $\downarrow\perp_0$ é o primeiro elemento de $\mathcal{B}$.

2.2.8 Proposição

A e $\mathcal{B}$ são isomorfos, isto é, a função $f:A\longrightarrow\mathcal{B}$ tal que $f(x)=\downarrow x$ é um isomorfismo.

Prova: (i) $f(\perp_0)=\downarrow\perp_0=\{\perp_0\}\in\mathcal{B}$.

(ii) f é injetiva. De fato, $f(x)=f(y)\Rightarrow\downarrow x=\downarrow y\Rightarrow x=y$ pois $x=Sup\downarrow x=Sup\downarrow y=y$. f é sobrejetiva. Com efeito, se $b\in\mathcal{B}$, então $b=\downarrow x$ para algum $x\in A$. Então $f(x)=b$.

(iii) f é monotônica. De fato, suponha que $x\prec y$ e $\downarrow x\not\prec\downarrow y\Rightarrow\exists z\in\downarrow x$ e $z\notin\downarrow y\Rightarrow z\prec x, x\prec y$ e $z\not\prec y$. Isto é um absurdo, pois $\prec$ é transitiva. É claro que se $x=y$, então $\downarrow x=\downarrow y$.

□

Esta proposição mostra que $\overline{A}$ possui uma cópia de $(A,\leq,\perp_0)$.

2.3 O Corpo Ordenado Completo de Números Reais

Sejam $\alpha,\beta\in\overline{A}$, onde $\overline{A}$, por enquanto, será $\overline{\mathbb{Q}}$ ou $\overline{\mathbb{Q}}^{op}$. Defina, sobre $\overline{A}$ as seguintes operações.

$$\alpha,\beta\in\overline{A},\alpha+\beta=\{x+y|x\in\alpha\text{ e }y\in\beta\}.$$

2.3.1 Proposição

A operação, definida acima, está bem definida, isto é, $\alpha+\beta$ é um corte se α e β forem.

Prova: Se α e β são cortes, então $\alpha \neq \phi$ e $\beta \neq \phi \Rightarrow \alpha+\beta \neq \phi$. Sejam $x, y \in A$ tal que $x \notin \alpha$ e $y \notin \beta$. Então, para todo x', y' em α e β tal que $x' \prec x$ e $y' \prec y$ tem-se que $x'+y' \prec x+y$. Logo, $x+y \notin \alpha+\beta$. Isto mostra que $\alpha+\beta \neq \overline{A}$. Para mostrar (i) na definição de corte suponha que $x \in \alpha+\beta$ com $y \prec x, y \in A$. Então existem $y' \in \alpha$ e $y'' \in \beta$ tal que $x=y'+y''$. Seja $z \in A$ tal que $z=y''+y$. Então $z \prec y$ e portanto $z \in \alpha$. Logo, $y \in \alpha+\beta$. Para provar (ii) suponha que $x \in \alpha+\beta$. Então $x=y'+y''$, com $y' \in \alpha$ e $y'' \in \beta$. Existe um $y \in A$ tal que $y' \prec y$. Logo $y+y' \in \alpha+\beta$ e $x \prec y+y''$. A condição (iii) se verifica trivialmente sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ ou $\overline{\mathbb{Q}}^{op}$. As operações $-, \cdot, /$ se define e prova analogamente.

□

2.3.2 Proposição

A função $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que $f(x)=\downarrow x$ preserva as operações $* \in \{-,+,\cdot,/\}$. Ou seja, $f(x*y)=f(x)*f(y)$.

Prova: A prova será feita, apenas, para a adição uma vez que as demais operações tem demonstração análoga. Mostrar $f(x+y)=f(x)+f(y)$ é equivalente a mostrar que $\downarrow(x+y)=\downarrow x+\downarrow y$. Suponha $z \in \downarrow(x+y)$. Então $z<x+y$. Sejam $s=x+y-z$, $r=x-\frac{s}{2}$ e $t=y-\frac{s}{2}$. Então $r \in \downarrow x, t \in \downarrow y$ e $z=r+t$. De modo que $z \in \downarrow x+\downarrow y$. Reciprocamente, suponha $z \in \downarrow x+\downarrow y$. Então $z=x'+y'$ com $x'<x$ e $y'<y$, de modo que $z<x+y$, isto é, $z \in \downarrow(x+y)$.

□

2.3.3 Lema

Seja $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}, x \in \alpha$ e $x>0$. Então existem $x', x'' \in \mathbb{Q}$ tal que $x' \in \alpha, x'' \notin \alpha, x''$ não é o supremo de α e $x''-x'=x$.

Prova: Seja $y \in \mathbb{Q}$ com $y \in \alpha$. Para $n=1,2,\ldots$ seja $s_n=y+nx$. Então existe um único natural m tal que $s_m \in \alpha$ e $s_{m+1} \not\in \alpha$. Se s_{m+1} não fôr o supremo de α, considere $x' = s_m$ e $x'' = s_{m+1}$. Se s_{m+1} fôr o supremo de α, considere $x' = s_m + \frac{x}{2}$, $x'' = s_{m+1} + \frac{x}{2}$

□

2.3.4 Proposição

Seja $\downarrow 0 = \{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}$ e $\downarrow 1 = \{x \in \mathbb{Q} | x < 1\}$. Então, para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{Q}}$ valem as seguintes propriedades, que caracterizam $\overline{\mathbb{Q}}$ como um corpo.

(a)	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$; $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	(comutatividade)
(b)	$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$; $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$	(associatividade)
(c)	$\alpha + \downarrow 0 = \alpha$; $\alpha \cdot \downarrow 1 = \alpha$	(existência de elemento neutro)
(d)	$\alpha + (-\alpha) = \downarrow 0$; $\frac{\alpha}{\alpha} = \downarrow 1$, se $\alpha \neq \downarrow 0$ e $\frac{\alpha}{\alpha} = \perp$, se $\alpha = \downarrow 0$	(existência do elemento inverso para cada elemento)
(e)	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	(distributividade)

Prova: Para demonstrar (a) e (b) basta usar as propriedades análogas de $\mathbb{Q}$ e as definições de soma e produto em $\overline{\mathbb{Q}}$. Agora será mostrado a primeira parte de (c). Quanto a segunda parte a demonstração é análoga.

Seja $x \in \alpha + \downarrow 0$. Então, $x = x' + x''$ com $x' \in \alpha$ e $x'' \in \downarrow 0$ (ou seja, $x'' < 0$ e $0 \in \mathbb{Q}$). Logo, $x' + x'' < x'$, de modo que $x' + x'' \in \alpha$ e portanto $x \in \alpha$.

Reciprocamente, suponha que $x \in \alpha$. Considere $y > x$, com $y \in \alpha$. Seja $z = x - y$. Então $z < 0$, isto é, $z \in \downarrow 0$ e $x = y + z$, de modo que $x \in \alpha + \downarrow 0$. Logo, $\alpha + \downarrow 0 = \alpha$.

Para mostrar a primeira parte de (d) (a segunda parte tem demonstração análoga) é preciso mostrar que para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ existe um único $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $\alpha + \beta = \downarrow 0$. Primeiro a unicidade. Se $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 = \downarrow 0$ segue, fazendo uso das três propriedades anteriores, que $\beta_2 = \downarrow 0 + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = \downarrow 0 + \beta_1 = \beta_1$.

Para mostrar a existência do corte β, seja β o seguinte conjunto $\{x \in \mathbb{Q} | -x$ é um majorante de α, mas não o supremo$\}$. Deve-se mostrar que β é um corte.

É claro que $\beta \neq \phi$ e $\beta \neq \overline{\mathbb{Q}}$. Para mostrar (ii), se $x \in \beta$ e $y < x$, então $-x \not\in \alpha$ e $-y > -x$, de modo que $-y$ é um majorante de α, mas não o supremo. Logo, $y \in \beta$.

No sentido de mostrar (ii), se $x \in \beta, -x$ é um majorante de α, mas não o supremo. De modo que existe um $y \in \mathbb{Q}$ tal que $-y < -x$ e $-y \notin \alpha$. Seja $z = \frac{x+y}{2}$. Então $-y < -z < -x$, de modo que $-z$ é um majorante de α, mas não o supremo. Portanto, existe um $z \in \mathbb{Q}$ com $x < z$ e $z \in \beta$. Falta mostrar que $\alpha + \beta = \downarrow 0$. Suponha que $x \in \alpha + \beta$. Então, $x = x' + x''$, com $x' \in \alpha$ e $x'' \in \beta$. Portanto, $-x'' \notin \alpha, -x'' > x', x' + x'' < 0$ e $x \in \downarrow 0$. Reciprocamente , suponha que $x \in \downarrow 0$. Então, $x < 0$. Pelo Lema 2.3.2 pode-se obter $x', x'' \in \mathbb{Q}$, com $x' \in \alpha, x'' \notin \alpha$ (com x'' sendo o supremo de α) de modo que $x'' - x' = -x$. Como $-x'' \in \beta$, tem-se $x = x' - x'' = x' + (-x'') \in \alpha + \beta$.

Para demonstrar a distributividade, basta usar a propriedade correspondente dos racionais.

O resultado abaixo é válido tanto para $\overline{\mathbb{Q}}$ e $\overline{\mathbb{Q}}^{op}$ quanto para $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$.

2.3.5 Proposição

$x \in A$ e $x \in \alpha \Leftrightarrow \downarrow x \subset \alpha$.

Prova: ($\Rightarrow$) Suponha que $x \in A$ e $x \in \alpha$. Então $\downarrow x \leq \alpha$, pois para todo $y \in \downarrow x, y \prec x$. Como $x \in \alpha$ e α é um corte segue $y \in \alpha \cdot \downarrow x \prec \alpha$ porque $x \in \alpha$ e $x \notin \downarrow x$.

($\Leftarrow$) Se $\downarrow x \prec \alpha$, então existe $y \in A$ tal que $y \in \alpha$ e $y \notin \downarrow x$. Assim, $x \leq y$ e por conseguinte $x \in \alpha$, pois $y \in \alpha$.

□

Os cortes de $\overline{\mathbb{Q}}$ serão chamados números reais. Este conjunto, de ora em diante, será denotado por $\mathbb{R}$. Pelo que foi visto acima, $\mathbb{R}$ contém uma cópia dos números racionais. O subconjunto $\mathbb{B} = \{\downarrow x | x \in \mathbb{Q}\}$, que é isomorfo a $\mathbb{Q}$, será denotado, simplesmente, por $\mathbb{Q}$ e seus elementos $\downarrow x$, com $x \in \mathbb{Q}$, serão identificados com os elementos de $\mathbb{Q}$, isto é, $\downarrow x \equiv x$. Assim, $\downarrow 0 \equiv 0$ e $\downarrow 1 \equiv 1$. Do ponto de vista da ordem existem dois corpos ordenados de reais. Um deles $(\mathbb{R}, \leq)$, onde $\leq$ é a ordem usual. O outro $(\mathbb{R}, \sqsubseteq)$ tem como ordem $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow y \leq x$.$(\mathbb{R}, \leq)$ e $(\mathbb{R}, \sqsubseteq)$ tem $-\infty$ e $+\infty$, respectivamente, como primeiro elemento. A diferença entre esses dois corpos ordenados completos é puramente qualitativa. Em $(\mathbb{R}, \leq)$, o menor elemento é $-\infty$, em $(\mathbb{R}, \sqsubseteq)$ é $+\infty$. De ora em diante $(\mathbb{R}, \leq)$ será denotado, simplesmente, por $\mathbb{R}$ e $(\mathbb{R}, \sqsubseteq)$ por $\mathbb{R}^{op}$.

O teorema a seguir é fundamental para a teoria que se pretende desenvolver nesse trabalho. Deve ser observado que ele vale para as situações $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}, \overline{\mathbb{Q}}$ e $\overline{\mathbb{Q}}^{op}$.

2.3.6 Teorema

Seja $F \subseteq \overline{A}$ uma família de cortes. Então

(a) Se F é majorada, então F tem supremo em $\overline{A}$

(b) Se F minorada, então F tem ínfimo em $\overline{A}$.

Prova: A família F diz-se majorada se existe $\alpha \in \overline{A}$ tal que $\beta \leq \alpha$, para todo $\beta \in F$.

Para mostrar (a) suponha que $F = \{\alpha_i | i \in I\}$ é uma família majorada de elementos de $\overline{A}$. Pretende-se mostrar que F tem supremo em $\overline{A}$. Mas precisamente, pretende-se mostrar que $Sup\ F = \cup_{i \in I}\{\alpha_i | i \in I\}$. Para isso tem-se

(i) $\alpha_i \leq \cup\{\alpha_i | i \in I\}$, para todo $i \in I$, isto é, $\cup_{i \in I}\{\alpha_i | i \in I\}$ é um majorante de F

(ii) Seja α um outro majorante de F. Então $\alpha_i \leq \alpha$ para todo $i \in I$. Logo, $\cup\{\alpha_i | i \in I\} \leq \alpha$, ou seja, $\cup\{\alpha_i | i \in I\}$ é o menor dos majorantes.

(iii) $\cup\{\alpha_i | i \in I\} = \cup F$ será o supremo de F se $\cup F \in \overline{A}$, isto é, se $\cup F$ fôr um corte. A prova de que $\cup F \neq \phi$ e $\cup F \neq \overline{A}$ é análoga a correspondente do teorema 2.2.4. Para mostrar que $\cup F$ é dirigido usa-se as propriedades inerentes a $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ de que se $x, y \in A$ ($A = \mathbb{Q}$ ou $A = \mathbb{I}(\mathbb{Q})$) e existe $w \in A$ tal que $x \leq w$ e $y \leq w$, então existe $x \sqcup y$ em A com $x \sqcup y \leq w$. Além disso, se α e β são cortes em $\overline{A}$ tal que $x \in \alpha, y \in \beta$ e $x \sqcup y$ existe, então $x \sqcup y \in \alpha \cup \beta$. A partir disto pretende-se mostrar que $\cup F$ é dirigido. Sejam $x, y \in \cup F$. Então existem $\alpha_i, \alpha_j \in F$ tal que $x \in \alpha_i$ e $y \in \alpha_j$. Como F é majorado, existe $\alpha \in \overline{A}$ com $\alpha_i \leq \alpha$ e $\alpha_j \leq \alpha$. Ou seja, existe $w \in \alpha$ tal que $x \leq w$ e $y \leq w$. Então, $x \sqcup y \leq w$. O que significa que $x \leq x \sqcup y$ e $y \leq x \sqcup y$. Como $x \sqcup y \in \alpha_j \cup \alpha_i$ segue que $x \sqcup \in \cup F$. Ou seja, $\cup F$ é dirigido em $\overline{A}$. Logo, $\cup_{i \in I}\{\alpha_i | i \in I\} \in \overline{A}$, isto é, $Sup\ F = \cup_{i \in I}\{\alpha_i | i \in I\}$.

(b) Segue de (i) e do princípio da dualidade.

□

2.3.7 Corolário

Todo corte em $\overline{\mathbb{Q}}$ tem um supremo em $\overline{\mathbb{Q}}$.

Prova: Em particular, como $\mathbb{Q} \subseteq \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, todo corte é um conjunto majorado de números reais.

$\square$

Uma consequência do Teorema 2.3.6 e do Corolário 2.3.7 é que, se α é um corte em $\mathbb{R}$, existe um corte $\beta \in \mathbb{R}^{op}$ tal que $Sup\ \alpha = Sup\ \beta$. Desse modo, pode-se definir uma relação de equivalência entre os cortes de $\mathbb{R}$ e os cortes de $\mathbb{R}^{op}$ como segue: $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^{op}$, $\alpha = \beta \Leftrightarrow Sup\ \alpha = Sup\ \beta$. Por essa equivalência sempre que fôr conveniente, pode-se substituir um corte de $\mathbb{R}$ por um equivalente de $\mathbb{R}^{op}$

2.4 O Quasi-Corpo dos Intervalos Fechados de Números Reais

Observe que $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$ é uma combinação de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^{op}$. Por isso é possível provar muitas propriedades de $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$ usando as propriedades de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^{op}$. O objetivo desta seção é derivar algumas propriedades de $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$ a partir de propriedades de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^{op}$. Antes, porém, é bom explicitar a definição de $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$, o conjunto de todos os cortes de Dedekind de intervalos de extremos racionais, isto é, se $\alpha \in \overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$, então

(a) $\alpha \neq \phi$ e $\alpha \neq \overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$

(b) Se $[p,q] << [p',q']$ (isto é, $p < p'$ e $q \sqsubset q'$) e $[p',q'] \in \alpha$, então $[p,q] \in \alpha$.

(c) Para todo $[p,q] \in \alpha$ existe $[p',q'] \in \alpha$ tal que $[p,q] << [p',q']$.

(d) α é um conjunto dirigido, isto é, se $x, y \in \alpha$, então existe $z \in \alpha$ tal que $x \sqsubseteq z$ e $y \sqsubseteq z$.

(Lembre-se que a notação $q \sqsubset q'$ em $\mathbb{R}^{op}$ significa $q' < q$, onde $<$ é a ordem estrita usual sobre $\mathbb{R}$).

Como as propriedades de $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$ dependem, apenas, dos extremos dos intervalos $[p,q], p, q \in \mathbb{Q}, p < q$, é possível encarar $p \in (\mathbb{Q}, \leq)$ e $q \in (\mathbb{Q}, \sqsubseteq)$. Logo é possível se pensar num corte $\alpha \in \overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$, como sendo um par $\alpha = [\beta, \gamma]$ onde $\beta \in \mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{R}^{op}$. β e γ podem ser vistos como cortes ou como números reais, dependendo da conveniência.

Desse modo, as relações $\sqsubseteq$ e $<<$, sobre $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$, definidas anteriormente podem ser recuperadas como segue. Para todo $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$

$$[\alpha, \beta] << [\alpha', \beta'] \Leftrightarrow \alpha < \alpha' \text{ e } \beta \sqsubset \beta', \text{ onde } \alpha \leq \beta \text{ e } \alpha' \leq \beta'$$

$$[\alpha, \beta] \sqsubseteq [\alpha', \beta'] \Leftrightarrow \alpha \leq \alpha' \text{ e } \beta \sqsubseteq \beta', \alpha, \alpha' \in \mathbb{R}, \beta, \beta' \in \mathbb{R}^{op}$$

As operações $-, +, \cdot, /$, sobre $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$, podem ser definidas como segue

$$[\alpha, \beta] + [\alpha', \beta'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta'].$$

Essa operação está bem definida porque $\alpha + \alpha' \in \mathbb{R}$ e $\beta + \beta' \in \mathbb{R}^{op}$. No caso das demais operações é necessário, às vezes, trocar em $[\alpha, \beta], \beta$ pelo seu equivalente em $\mathbb{R}$. Tendo o cuidado de efetuar essa troca, quando necessário, as demais operações são definidas como segue.

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta] \cdot [\alpha', \beta'] &= [min\{x \cdot y\}, max\{x \cdot y\}], \text{ onde } x \in \{\alpha, \beta\}, y \in \{\alpha', \beta'\} \\ -[\alpha, \beta] &= [-\beta, -\alpha] \text{ e } [\alpha, \beta]^{-1} = \left[\tfrac{1}{\beta}, \tfrac{1}{\alpha}\right]. \end{aligned}$$

De acordo com a observação a respeito da troca, todas estas operações estão bem definidas.

Defina $0^{\bullet} \in \overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$, como $0^{\bullet} = [\downarrow 0, \downarrow 0]$ e $1^{\bullet} = [\downarrow 1, \downarrow 1]$, onde $\downarrow 0, \downarrow 1 \in \overline{\mathbb{Q}}$. De modo geral cada elemento de $\overline{\mathbb{Q}}$ (ou $\mathbb{R}$) pode ser recuperado, a partir de $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$, definido $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ como o conjunto dos elementos de $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$ da forma $[\alpha, \alpha]$, com $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$.

2.4.1 Proposição

A função $f : \mathbb{I}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{B} = \{\downarrow x | x \in \overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}\}$ preserva as operações $* \in \{-, +, \cdot, /\}$, definidas sobre $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$.

Prova: Dada $[p, q] \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$, $f([p, q]) = \downarrow [p, q] = [\downarrow p, \downarrow q]$. A demonstração será feita apenas para a adição. Pretende-se mostrar que

$$\begin{aligned} \downarrow([p, q] + [p' + q']) &= \downarrow[p, q] + \downarrow[p', q']. \text{ De fato, } \downarrow([p, q] + [p', q']) = \\ = \downarrow[p + q, p' + q'] &= [\downarrow(p + p'), \downarrow(q + q')] = [\downarrow p + \downarrow p', \downarrow q + \downarrow q'] = \\ = [\downarrow p, \downarrow q] + [\downarrow p', \downarrow q'] &= \downarrow[p, q] + \downarrow[p' + q]. \end{aligned}$$

□

2.4.2 Proposição

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$ quaisquer. Então valem as seguintes propriedades

(a)	$\alpha+\beta=\beta+\alpha; \quad \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$	(comutatividade)
(b)	$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma); (\alpha\cdot\beta)\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$	(associatividade)
(c)	$\alpha+0^{\bullet}=\alpha;\ \alpha\cdot 1^{\bullet}=\alpha$	(existência de elemento neutro)
(d)	$\alpha+(-\alpha)<<0^{\bullet}; \frac{\alpha}{\alpha}<<1^{\bullet}$, se $\alpha\neq 0^{\bullet}$ e $\frac{\alpha}{\alpha}=\perp$, se $\alpha=0^{\bullet}$	(existência do elemento semi-inverso)
(e)	$\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma\sqsubseteq\alpha(\beta+\gamma)$	(semi-distributividade).

Observe que as propriedades (a),(b) e (c) são exatamente como em $\mathbb{R}$, e as demais só valem, em geral, pela metade. Por isso $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$, munido dessas operações será chamado *quasi-corpo*.

Prova: As propriedades (a),(b) e (c) saem imediatemente da representação $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$ como um conjunto de pares $[\alpha,\beta], \alpha\in\mathbb{R}, \beta\in\mathbb{R}^{op}$. Para mostrar (d) seja $\alpha=[\alpha',\alpha'']$, $\alpha'\in\mathbb{R}, \alpha''\in\mathbb{R}^{op}$. Então $\alpha'<\alpha''$. Portanto, $\alpha''-\alpha'>0^{\bullet}$ e $\alpha'-\alpha''<0^{\bullet}$. Mas isto significa exatamente que $\alpha-\alpha<<0^{\bullet}$. Analogamente se mostra que $\frac{\alpha}{\alpha}<<1^{\bullet}$. Para mostrar (e) basta usar o fato de que para todo $a,b,c\in\mathbb{I}(\mathbb{Q})$, $a\cdot b+a\cdot c\sqsubseteq a\cdot(b+c)$.

□

2.5 A Suficiência de A na Construção de $\overline{A}$

O resultado a seguir se constitui no principal resultado deste capítulo. Ele nos diz, a grosso modo, que para conhecer a estrutura $\overline{A}$ é suficiente se conhecer a estrutura A. Vale observar que esse resultado vale em qualquer um dos casos $A=Q$ ou $A=\mathbb{I}(\mathbb{Q})$.

2.5.1 Teorema

Para todo $\alpha\in\overline{A}$, o conjunto $\{\downarrow x\in\mathbb{B}|\downarrow x\prec\alpha\}$ é dirigido e $\alpha=Sup\{\downarrow x\in\mathbb{B}|\downarrow x\prec\alpha\}$. Tendo em vista que $\mathbb{B}$ é isomorfo a A, isto justifica chamar A *base* de $\overline{A}$.

Prova: (a) α é um majorante do conjunto $\downarrow\alpha=\{\downarrow x\in\mathbb{B}|\downarrow x\prec\alpha\}$. (b) α é o menor dos majorantes. De fato, suponha que $\alpha'\in\overline{A}$ tal que $\alpha'\prec\alpha$. Isto significa que existe $x \in A, x \in \alpha$ e $x \notin \alpha'$. Pela Proposição 2.2.3 $\downarrow x \prec \alpha$ e $\downarrow x \not\prec \alpha'$. Ou seja, α não é um majorante do conjunto $\downarrow\alpha$. Logo, α é o menor dos majorantes, isto é, $\alpha = Sup\{\downarrow x \in \mathbb{B} | \downarrow x \prec \alpha\}$. Para mostrar que $\downarrow\alpha$ é dirigido, suponha que $\downarrow x', \downarrow x'' \in \downarrow\alpha \Rightarrow \downarrow x' \prec \alpha$ e $\downarrow x'' \prec \alpha \Rightarrow x' \in A, x'' \in A$ e $x', x'' \in \alpha$ pela Proposição 2.3.5 $\Rightarrow$ existe $y \in \alpha$ tal $x' \leq y, x'' \leq y$ e $\downarrow y \leq \alpha$, pois α sendo um corte ele é dirigido. Logo, $\downarrow x' \leq \downarrow y, \downarrow x'' \leq \downarrow y$ e $y \leq \alpha$.

□

Resumindo os Teoremas 2.2.4, 2.3.6 e 2.5.1 pode-se dizer que a estrutura $\overline{A}$ tem as seguintes propriedades.

(i) Todo conjunto dirigido de $\overline{A}$ tem supremo. Isto caracteriza a completude de $\overline{A}$. Ou seja, $\overline{A}$ é um *cpo*.

(ii) Todo conjunto majorado (minorado) de $\overline{A}$ tem supremo (tem ínfimo). Isto se expressa dizendo-se que $\overline{A}$ é consistentemente completo. Os subconjuntos majorados de $\overline{A}$ podem ser interpretados como sendo consistentes.

(iii) Todo elemento de $\overline{A}$ é o supremo de elementos de A que estão "essencialmente" abaixo dele (x está essencialmente abaixo de $y \Leftrightarrow x \prec y$). Isto se expressa dizendo-se que $\overline{A}$ é um *cpo* contínuo.

(iv) $\overline{A}$ tem base enumerável, pois A é um conjunto enumerável.

Em resumo, $\overline{A}$ é um *cpo contínuo consistentemente completo, com base enumerável.*

De ora em diante, $\overline{\mathbb{I}(\mathbb{Q})}$ será denotado por $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{R}$. Assim, $\mathbb{I}(\mathbb{R}) = \{[a,b] | a, b, \in \mathbb{R}, a \leq b\} \cup \{\perp\}$, onde $\perp = [-\infty, +\infty]$. O conjunto $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{R})$, pois $\mathbb{R} = \{[a,a] | a \in \mathbb{R}\}$. Os elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ serão chamados *números reais parciais*. Os elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ serão chamados ***intervalos de informação***. Um fato de fundamental importância relativo a $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ consiste em que dado qualquer $[a,b] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, mesmo que a ou b sejam reais não racionais (chamados *irracionais*), $[a,b] = Sup\{[p,q] \in \mathbb{I}(\mathbb{Q}) | [p,q] << [a,b]\}$. Em particular, todo real $x = Sup\{[p,q] \in \mathbb{I}(\mathbb{Q}) | [p,q] << x\}$. Desse modo, a estrutura $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ se reveste de particular importância. Ela contém informações suficientes para dar conta de todos os elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$. Levando em conta que $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ é enumerável e seus elementos são finitamente representáveis não é difícil perceber a importância de $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$

na fundamentação computacional de números reais e intervalos de números reais. $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ será importante, também, para uma teoria da computabilidade de números reais, pois pode-se definir um real x, ou um intervalo de reais $[a, b]$, como sendo *computável* se ele é o supremo de uma sequência recursivamente enumerável de elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$.

Pretende-se desenvolver uma "Teoria da Informação" para a Análise Real e a Análise Intervalar. Nesta teoria são relevantes os conceitos de informação, ordem de informação, aproximação e ordem de aproximação os quais serão esclarecidos abaixo.

Dado o *cpo* $(D, \sqsubseteq, <<, \perp)$, onde $<<$ é a ordem forte, interpreta-se a relação $x \sqsubseteq y$, para $x, y \in D$, como uma *relação de informação*, isto é, x e y são interpretados como informações (sobre algum número real, ou intervalo de reais, etc) sendo que y dá, no mínimo, tanta informação quanto x. Por outro lado, a relação $x << y, x, y \in D$, será interpretada como uma *relação de aproximação*, isto é, x é interpretado como uma informação sobre a entidade y (y pode ser um número real, um intervalo de números reais, etc). "$x << y$" pode ser lido como "x é uma aproximação de y". Neste caso y é visto como um objeto essencialmente infinito, como um número irracional, e x uma de suas representações finitas. Observe que x pode sempre ser pensado como uma representação finita, isto é, um elemento da base. De fato, se x não pertencesse a base, pela Proposição 2.3.5 existe x' da base tal que $x' << x << y$ e portanto toma-se x' por x. Todas essas observações só tem sentido se D fôr um *cpo* contínuo consistentemente completo, com base enumerável. Sabe-se que $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ satisfaz essas condições.

2.5.2 Exemplo

Quando $[1,3] \sqsubseteq [2,3], [1,3]$ e $[2,3]$ são informações sobre, por exemplo o número real e ou o intervalo $[1+\sqrt{2}, e]$. Isto significa que $[1,3] << e$ e $[2,3] << e$ (analogamente $[1,3] << [1+\sqrt{2}, e]$ e $[2,3] << [1+\sqrt{2}, e]$), apenas com a resalva de que $[2,3]$ é uma informação mais refinada (mais "exata") que $[1,3]$.

Observe que nunca se pode ter uma situação do tipo $[1,2] \sqsubseteq 2$, porque 2 é um real e não uma informação e não é verdade que $[1,2] << 2$. Dito de outro modo, 2 não pertence a base e portanto não pode ser uma representação finita. Pode-se dizer, também, que 2 é um limite e como tal ele não informa, apenas é informado. Ele não informa nem sobre ele mesmo pois não é verdade que $x << x$. Embora não seja verdade que $[e, \pi] << [e, \pi]$, pode-se ter $[e, \pi] << x$ para $x \in \mathbb{R}$, por exemplo, no caso de $e < x < \pi$. Como $[e, \pi]$ não é uma representação finita toma-se $a \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$ tal que $a << [e, \pi]$ e portanto $a << x$. Logo, embora se tenha algum prejuizo, com respeito a exatidão, os intervalos (de informação) de estremos irracionais não são essenciais. Por isso assume-se que intervalos de informação são constituídos pelos elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$.

Quando $x_1 \sqsubseteq y$ e $x_2 \sqsubseteq y$, para algum $y \in D$, a informação dada pelo conjunto $\{x_1, x_2\} \subseteq D$ pode ser considerada consistente. Desse modo, é razoável dizer que $X \subseteq D$ é consistente se ele é majorado em D, isto é, se existe um $y \in D$ tal que $x \sqsubseteq y$ para todo $x \in X$. É essencial que $X \neq \emptyset$. Se $X \subseteq D$ fôr consistente é desejável ter um nome para a informação (mínima necessária) dada por X. Tal informação deve ser o $Sup\ X$. Daí a seguinte definição.

2.5.3 Definição: Conjunto Consistentemente Completo

Seja $(A, \sqsubseteq)$ uma ordem parcial. A diz-se *consistentemente completo* se todo conjunto não-vazio $X \subseteq A$ consistente tem supremo.

O Teorema 2.3.6 nos diz que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ são consistentemente completos. Observe que $\{[0,1],[2,3]\} \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{R})$ não é consistente. Ou seja, em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, um conjunto, não-vazio, mesmo finito pode não ser consistente. Uma forma simples de achar o supremo de um conjunto, não-vazio, $X \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{R})$ consistente, é tomar a interseção de todos os elementos de X.

2.5.4 Definição: *cpo* Contínuo

Seja $(D, \sqsubseteq, <<, \perp)$ um *cpo* com ordem forte $<<$. D diz-se um *cpo contínuo* se para todo $x \in D$, o conjunto $\{y \in D | y << x\}$ é dirigido e $x = Sup\{y \in D | y << x\}$.

O teorema 2.5.1 nos diz que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ são *cpo's* contínuos. Ele diz, muito mais, que existe um subconjunto enumerável, $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{R})$ (e também $B \subseteq \mathbb{R}$), chamado base, tal que para todo $x \in D$ ($D = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{I}(\mathbb{R})$) o conjunto $\{y \in \mathbb{B} | y << x\}$ é dirigido e $x = Sup\{y \in \mathbb{B} | y << x\}$.

2.6 *cpo's* Algébricos

Nesta seção será apresentado um tipo especial de *cpo* contínuo de modo a reconhecer-se os *cpo's* do exemplo 2.1.11.

Considere o Exemplo 2.1.11 (b), $(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq, \perp)$, onde X é um conjunto contável não-vazio. Fazendo $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \sqsubseteq, \perp)$ é um *cpo* mas ele não pode ter ordem forte não-reflexiva. Por exemplo, para $\{0, 1\}, \{0, 1, 2\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, tem-se $\{0, 1\} \sqsubseteq \{0, 1, 2\}$, mas não existe nenhum $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $\{0, 1\} \subset Y \subset \{0, 1, 2\}$. Ou seja, a relação , $\subset$, candidata a ordem forte não satisfaz a propriedade de interpolação . No entanto, tomando-se a própria $\sqsubseteq$, como ordem forte, ela satisfaz trivialmente a definição de ordem forte. No sentido de entender melhor esse caso particular de *cpo* contínuo, será feita uma repetição da completação por cortes de Dedekind de uma ordem parcial com primeiro elemento.

Seja $(A, \sqsubseteq, \perp_0)$ uma ordem parcial com primeiro elemento $\perp_0$. Adaptando a definição de corte de Dedekind para o caso da ordem forte ser a trivial tem-se, $\alpha \subseteq A$ é um corte de Dedekind se

(a) $\alpha \neq \phi$ e $\alpha \neq A$
(b) $x \sqsubseteq y$ e $y \in \alpha \Rightarrow x \in \alpha$
(c) α é dirigido, isto é, $x, y \in \alpha \Rightarrow \exists z \in \alpha$ tal que $x \sqsubseteq z$ e $y \sqsubseteq z$
(d) Para todo $x \in \alpha$ existe $y \in \alpha$ tal que $x \sqsubseteq y$.

Observe que a condição (d), agora, é inteiramente supérflua, pois basta tomar $y = x$. Portanto, neste caso a condição (d) é tirada da definição de corte, como desnecessária. Um corte nestas condições é chamado um *ideal*, na literatura de teoria dos Domínios de Scott, ver [PLO 80]. Agora, tomando o conjunto de todos os ideais e definindo a ordem analogamente a da Seção 2.2, $(\overline{A}, \sqsubseteq, \perp)$, a ***completação por ideais*** de $(A, \sqsubseteq, \perp_0)$, é um ***cpo algébrico*** cuja base é A. Por conseguinte, todo *cpo* algébrico é um *cpo* contínuo e a recíproca é falsa. Um contra-exemplo é o *cpo* contínuo $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ construído acima. A partir dessas observações pode-se enunciar o seguinte resultado.

2.6.1 Teorema

Seja $(A, \sqsubseteq, \perp_0)$ uma ordem parcial com primeiro elemento $\perp_0$. Então, a completação por ideais de $(A, \sqsubseteq, \perp_0)$ é um *cpo* algébrico cuja base é A.

Como são os ideais em $\overline{A}$? Eles são da forma $\downarrow x = \{y \in A | y \sqsubseteq x\}$, onde $x \in A$. Usa-se o símbolo $\downarrow$ no lugar de $\Downarrow$ para indicar a reflexividade da relação. O teorema pode, agora, ter o seguinte enunciado. Para todo $x \in \overline{A}$, o conjunto $\downarrow x = \{y \in A | y \sqsubseteq x\}$ é dirigido e $x = Sup \downarrow x$.

A definição de consistentemente completo é a mesma para *cpo's* algébricos e *cpo's* contínuos, em geral, pois essa definição não envolve a ordem forte.

2.6.2 Definição: Domínio de Scott

Um *cpo* algébrico consistentemente completo, com base enumerável é chamado um *domínio de Scott*.

2.6.3 Exemplo

Todos os *cpo's* do Exemplo 2.1.11 são domínios de Scott.

2.7 Reticulados Completos e Contínuos

Nesta seção será apresentada a teoria elementar dos reticulados contínuos, com o objetivo de relacioná-los com os *cpo's* contínuos consistentemente completos. Será destacado o duplo carácter dos reticulados, quer como estruturas algébricas, quer como estruturas ordenadas. Estes dois aspectos de reticulados serão explorados quando se abordar a teoria da informação intervalar do ponto de vista lógico.

Existem duas maneiras de se definir reticulado, uma algébrica (como grupo, anel, corpo, etc.) e outra como um conjunto parcialmente ordenado. Esse é o aspecto lógico da teoria. Essa dupla característica dos reticulados tem como consequência ser possível usá-las tanto para elaborar teorias algébricas, quanto lógicas.

Seja L um conjunto não-vazio munido de duas operações binárias $\sqcap$ e $\sqcup$, chamadas *ínfimo* e *supremo*, respectivamente, duas operações nulárias (elementos destacados de L)$\bot$ e $\top$, chamados *bottom* e *topo*, respectivamente.

2.7.1 Definição: Reticulado (Algébrica)

A estrutura $(L, \sqcap, \sqcup, \perp, \top)$ diz-se um *reticulado* se para todo $x, y, z \in L$ são satisfeitas as seguintes condições.

L_1 (a) $x \sqcap y = y \sqcap x$ (comutatividade)
(b) $x \sqcup y = y \sqcup x$

L_2 (a) $(x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$ (associatividade)
(b) $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z)$

L_3 (a) $x \sqcap x = x$ (idempotência)
(b) $x \sqcup x = x$

L_4 (a) $x = x \sqcap (x \sqcup y)$ (absorção)
(b) $x = x \sqcup (x \sqcap y)$

L_5 (a) $x \sqcap \top = x$
(b) $x \sqcup \perp = x$ (leis do elemento neutro)

(c) $x \sqcap \perp = \perp, x \sqcup \top = \top$

L diz-se *distributivo* se ele, além disso, satisfaz

L_6 (a) $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$ (distributividade)
(b) $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

Um subconjunto, $S \subseteq L$, não vazio diz-se um *subreticulado* de um reticulado L se S é também um reticulado com as operações induzidas de L. Considerando somente a estrutura $(L, \sqcap, \top)$ com as propriedades $L_1(a), L_2(a), L_3(a), L_4(a)$ e $L_5(a)$, L diz-se um *inf-semireticulado* ou, simplesmente, semireticulado. Analogamente, $(L, \sqcup, \perp)$ satisfazendo $L_1(b) - L_5(b)$ diz-se um *sup-semireticulado*.

2.7.2 Exemplo

Seja X um conjunto não-vazio e $\mathcal{P}(X)$ a coleção dos subconjuntos de X. Então $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, \phi, X)$ é um reticulado distributivo, onde $\sqcap \equiv \cap$, $\sqcup \equiv \cup$, $\perp \equiv \phi$ e $\top \equiv X$.

2.7.3 Definição: Reticulado (Ordenado)

Seja $(L, \leq, \perp, \top)$ uma ordem parcial tal que $\perp \leq x$ e $x \leq \top$, para todo $x \in L$. L diz-se um *reticulado* se para todo $x, y \in L$ o conjunto $\{x, y\}$ tem ínfimo e supremo em L, denotados $x \sqcap y$ e $x \sqcup y$, respectivamente. Se, além disso, L satisfaz as igualdades $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$ e $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$, ele diz-se um *reticulado distributivo.*

$(\mathcal{P}(X), \subseteq, \phi, X)$ onde $\subseteq$ é a inclusão de conjuntos, é um reticulado distributivo, com $X_1 \sqcap X_2 = X_1 \cap X_2$ e $X_1 \sqcup X_2 = X_1 \cup X_2$.

2.7.4 Proposição

As duas definições de reticulados, dadas anteriomente, coincidem no seguinte sentido.

i) Se $(L, \sqcap, \sqcup, \perp, \top)$ é um reticulado, então $(L, \leq, \perp, \top)$ também é, onde para todo $x, y \in L \quad x \leq y \Leftrightarrow x = x \sqcap y$ ou $y = x \sqcup y$.

ii) Se $(L, \leq, \perp, \top)$ é um reticulado, então $(L, \sqcap, \sqcup, \perp, \top)$ também é, onde $x \sqcap y = inf\{x, y\}$ e $x \sqcup y = sup\{x, y\}$.

Prova: (i) Suponha que $(L, \sqcap, \sqcup, \perp, \top)$ é um reticulado e defina para $x, y \in L \quad x \leq y \Leftrightarrow x = x \sqcap y$ ou $y = x \sqcup y$. Pretende-se mostrar que $(L, \leq, \perp, \top)$ é reticulado segundo a definição 2.7.3. De fato, $x \sqcap x = x$ segue que $x \leq x$ (reflexividade), para todo $x \in L$. $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = x \sqcap y$ e $y = y \sqcap x \Rightarrow x = y$ (anti-simetria), para todo $x, y \in L$, $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x = x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap z$ e portanto $x \leq z$ (transitividade). Logo, $\leq$ é uma relação de ordem parcial sobre L. Como $x \sqcap \perp = \perp$ e $x \sqcap \top = x$ segue que $\perp \leq x$ e $x \leq \top$ para todo $x \in L$. Agora, $x = x \sqcap (x \sqcup y)$ e $y = y \sqcap (x \sqcup y) \Rightarrow x \leq x \sqcup y$ e $y \leq x \sqcup y$. Logo, $x \sqcup y$ é um majorante de x e de y. Suponha que $z \in L$ é outro majorante, isto é, $x \leq z$ e $y \leq z$. Então $x \sqcup z = (x \sqcap z) \sqcup z = z$ e analogamente, $y \sqcup z = z$. Portanto, $(x \sqcup z) \sqcup (y \sqcup z) = z \sqcup z = z$. consequentemente, $(x \sqcup y) \sqcup z = z$, dando $(x \sqcup y) \sqcap z = (x \sqcup y) \sqcap [(x \sqcup y) \sqcup z] = x \sqcup y$ (pela lei da absorção), isto é, $x \sqcup y \leq z$. Portanto, $x \sqcup y = sup\{x, y\}$. Usando o princípio da dualidade $x \sqcap y = inf\{x, y\}$.

(ii) Suponha por outro lado, que $(L, \leq, \perp, \top)$ é um reticulado. É fácil ver que $\sqcap$ e $\sqcup$, como definidos em (ii), satisfazem os axiomas $L_1 - L_5$ da definição 2.7.1.

$\square$

2.7.5 Definição: Reticulado Completo

Seja $(L, \sqcap, \sqcup, \perp, \top)$ um reticulado. L diz-se um *reticulado completo* se todo subconjunto $X \subseteq L$ tem supremo e tem ínfimo, denotados por $\bigsqcup X$ e $\sqcap X$ (ou alternativamente *sup* X e *inf* X), respectivamente. Assim, um reticulado completo é uma estrutura do tipo $(L, \sqcap, \sqcup, \sqcap, \bigsqcup, \perp, \top)$, onde $\sqcap, \sqcup, \sqcap$ e $\bigsqcup$ são definidos acima. L diz-se *distributivo* se $(\sqcap X) \sqcap Y = \bigsqcup\{x \sqcap y | x \in X \text{ e } y \in Y\}$ e $(\bigsqcup X) \sqcap Y = \sqcap\{x \sqcap y | x \in X \text{ e } y \in Y\}$ e $(\sqcap X) \bigsqcup Y = \sqcap\{x \sqcup y | x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Em particular L deve satisfazer as equações de distributividade com relação as operações $\sqcap$ e $\sqcup$. $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, \bigcup, \bigcap, \phi, X)$ é um reticulado completo distributivo.

2.7.6 Definição: Reticulado Contínuo

Seja $(L, \leq, \perp, \top)$ um reticulado completo e $\prec$ uma ordem forte sobre L. L diz-se um *reticulado contínuo* se para todo $x \in L$

$$x = sup\{y \in L | y \prec x\}$$

$\mathbb{B}$ é uma base de L se para todo $x \in L, x = sup\{y \in \mathbb{B} | y \prec x\}$.

2.7.7 Proposição

Seja $(D, \sqsubseteq, <<, \perp)$ um *cpo* contínuo consistentemente completo. Seja $L = D \cup \{\top\}$, onde $\top$ é um elemento artificial acrescentado a D tal que $x \sqsubseteq \top$ para todo $x \in D$. Então, $(L, \sqsubseteq, <<, \perp, \top)$ é um reticulado contínuo.

Prova. Seja $X \subseteq D$ qualquer. Se X é dirigido, então $Sup\ X$ existe porque D é um *cpo*. Se X não é dirigido, mas é consistente, então $Sup\ X$ existe porque D é consistentemente completo. Se X não é consistente nem dirigido defina $Sup\ X = \top$. Desse modo, todo subconjunto de D tem supremo. Na hipótese de que todo subconjunto de D tem supremo deve-se mostrar que ele também tem ínfimo. Seja $X \subseteq D$ qualquer e suponha que $Sup\ X$ existe. Seja $B = \cap\{\downarrow x | x \in X\}$ o conjunto de todos os minorantes de X. (Se $X = \phi$, tome $B = L$). Pretende-se mostrar que $Sup\ B = inf\ X$. De fato, se $x \in X$, então x é um majorante de B. Como o $Sup\ B$ existe, tem-se $Sup\ B \leq x$, para cada $x \in X$. Isto prova que $Sup\ B \in B$ e que X tem o maior dos minorantes que é $Sup\ B$, isto é, $inf\ X$ existe. Falta mostrar que L é contínuo. Mas se $x \in L$ e $x \neq \top$, então $x = Sup\{y \in L | y << x\}$ porque D é um *cpo* contínuo. Só resta o ponto $\top$. Como este ponto é acrescentado artificialmente, basta introduzir a hipótese de que $\top << \top$.

□

O motivo pelo qual se estabelece, aqui, uma teoria de *cpo* e não de reticulado reside no fato de que não se pretende considerar o topo em muitas situações, pois muitas vezes ele se torna problemático. Além disso, os resultados fundamentais obtidos para reticulados contínuos são também obtidos para *cpo's* contínuos consistentemente completos, tornando o topo supérfluo.

Observe que embora $\mathbb{IR}$, como foi construído acima, seja um *cpo* contínuo consistentemente completo, a multiplicação, por exemplo, não é uma função monotônica e portanto não é admissível nessa teoria. Isto é suficiente para excluir $\mathbb{IR}$ da classe de estruturas de matemática computacional, como se verá com mais detalhe nos próximos capítulos.

2.8 Conclusões

Afirmou-se anteriormente que $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ (ou mais precisamente $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$) é um espaço de informação. Mas informação de que objetos? Precisamente do espaço intervalar $I(\mathbb{R})$, definido na introdução, acrescentando-se $-\infty$ e $+\infty$ ao conjunto $\mathbb{R}$, de números reais. Os intervalos degenerados de $I(\mathbb{R})$, porque são identificados com os números reais, possuem uma ordem, $\leq$, já estudada anteriormente. É possível definir sobre $I(\mathbb{R})$ uma ordem parcial que é consistente com $\leq$, no sentido de que coincide com $\leq$ quando os intervalos são degenerados. De fato, para todo $[a,b],[c,d] \in I(\mathbb{R})$, defina $[a,b] <' [c,d] \Leftrightarrow b \leq c$ e $[a,b] = [c,d] \Leftrightarrow a = b = c = d$. É fácil ver que $\leq'$ é uma ordem parcial que generaliza a ordem usual sobre $(\mathbb{R}, \leq)$. Definindo as operações $-, +, \cdot$ e $/$ sobre $I(\mathbb{R})$ (veja introdução) essas operações são contínuas na topologia métrica sobre $I(\mathbb{R})$. O espaço $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ é constituído não somente dos elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$, mas também dos supremos de conjuntos dirigidos em $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$. A estrutura de informação $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ é um quasi-corpo completo, consistentemente completo, um *cpo* contínuo com base enumerável $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ e está provido de duas relações, uma ordem parcial, $\sqsubseteq$, que expressa a qualidade de informação e uma ordem forte $<<$, que expressa aproximação entre os objetos de $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ e os objeto de $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, que são supremos de conjuntos dirigidos de elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$. Esses objetos podem ser identificados com os elementos de $I(\mathbb{R})$. Desse modo, quando $x << y$, x é pensado como um intervalo de informação , isto é, pertence a $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ ou $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ e y é visto como um intervalo de números reais, isto é, pertence a $I(\mathbb{R})$.

Na cadeia $x_1 << x_2 << \cdots << x_n << \cdots, x_i$ ora é visto como um intervalo de informação, ora como um intervalo de números reais. Quando x_i é visto como um intervalo de informação ele é uma entidade lógica, um predicado, quando ele é visto como um intervalo de números reais ele é uma entidade matemática substantiva. Na relação

"x aproxima y", x é uma propriedade (entidade lógica) e y é o sujeito, a entidade "real". Desse modo, para cada intervalo de informação $x \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ está associado o conjunto $\Uparrow x = \{y \in I(\mathbb{R}) | x << y\}$, de todos os intervalos de números reais aproximados por x, inclusive um conjunto de números reais, identificados com os intervalos degenerados. Como por convenção $\perp \in I(\mathbb{R})$ e $\perp << \perp$ segue que $\Uparrow \perp = \{y \in I(\mathbb{R}) | \perp << y\} = I(\mathbb{R})$. Dualmente, dado $y \in I(\mathbb{R}), \Downarrow y = \{x \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) | x << y\}$, ou seja, $\Downarrow y$ é interpretado como o subconjunto dos intervalos de informação que aproximam y. Se se acrescentar $\top = [\ ]$, o intervalo vazio, a $I(\mathbb{R})$ e assumindo que $x << \top$, para todo $x \in I(\mathbb{R})$ (o que é razoável) têm-se $\Downarrow \top = \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Como $\top = Sup\{x \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) | x << \top\}, \top$ deve pertencer a $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. Assim, $\Uparrow \perp$ é o dual de $\Downarrow \top$. Dado $x \in \mathbb{I}(\mathbb{R}), x$ diz-se *total* se $x \sqsubseteq y$ não é verdadeiro para nenhum $y \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Denotando por $tot(\mathbb{I}(\mathbb{R}))$, o conjunto dos elementos totais de $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ tem-se $tot(\mathbb{I}(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$. De fato, dado $x \in \mathbb{R}$, $x = Sup\{y \in \mathbb{I}(\mathbb{R}) | y << x\}$ (veja figura abaixo).

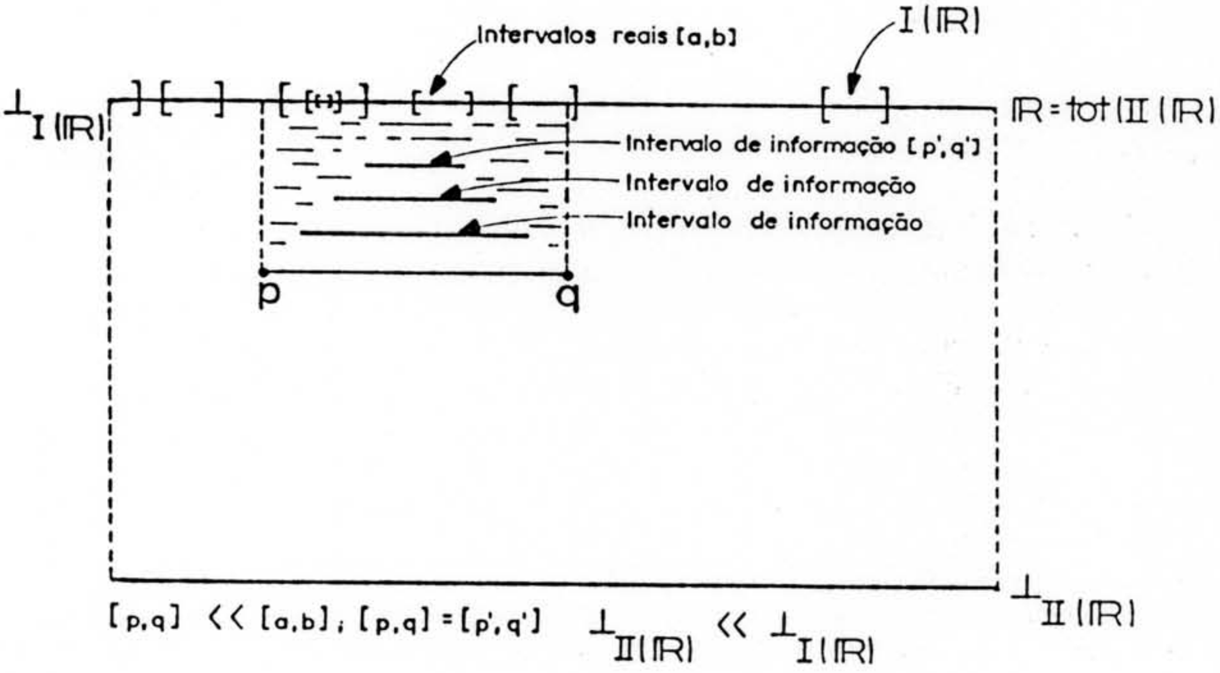


Figura 2.1 - Relação entre $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ e $I(\mathbb{R})$

3 A TEORIA ABSTRATA DAS ORDENS PARCIAIS: *cpo's*

Neste capítulo serão apresentados os resultados fundamentais da teoria do *cpo* necessários neste trabalho. Inicia-se, na Seção 3.1, descrevendo as convenções de notação e algumas definições preliminares.

Na seção 3.2 serão apresentados alguns conceitos básicos de topologia necessários para as seções subsequentes. Ainda nesta seção será definida a topologia de Scott, que é uma topologia natural em *cpo*. Muitos dos resultados desta seção podem ser encontrados em qualquer livro de topologia, um texto recomendado é [DUN 66].

O conteúdo da seção 3.3 é a equivalência entre os dois conceitos de função contínua em *cpo's*, como espaços topológicos com a topologia de Scott. Uma boa referência para esta seção é [BAR 84].

Na seção 3.4 são desenvolvidos os conceitos básicos de categorias necessárias para o entendimento dos objetos matemáticos que aparecerão nos próximos capítulos. Uma referência para esta seção é [MAC 71]. Na seção 3.5 serão estudados algumas construções em categorias de modo a realizar a definição de categoria cartesiana fechada. As referências são [MAC 71] e [BAR 84]. Finalmente, na seção 3.6 é construída a categoria cartesiana fechada dos *cpo's* e demonstrado o resultado principal deste capítulo, o teorema do ponto fixo. Quem estiver interessado em teoria dos *cpo's* uma consulta obrigatória é [PLO 80].

3.1 Ordens Parciais Completas

A teoria matemática de semântica de linguagens de programação desenvolvida por Dana Scott e Christopher Strachey foi baseado no conceito de ordem parcial de informação.

Nesta abordagem um comando, numa linguagem de programação imperativa, é denotado por uma função parcial do conjunto de estados de entradas no conjunto de estados de saídas. Se a função parcial f é mais definida do que a função g, pensa-se de f como tendo mais informações do que g, porque f nos diz mais acerca do comportamento entrada/saída. A idéia é de que crescer na ordem parcial significa aumentar informação.

"Platão imaginou um mundo "ideal" [LAW 87] onde tudo existia em perfeição. Em nosso universo, ao contrário, os objetos são vistos como aproximações de objetos ideais. A matemática postula abstrações ideais (como pontos, retas, funções totais, etc.) de objetos físicos ou fenômenos. Pode-se pensar uma ordem parcial como uma aproximação de objetos ideais. Neste caso o objeto ideal é visto como o limite de aproximações cada vez "melhores". Por completamento entende-se a existência de objetos "ideais" ou os limites da computação. Assim as ordens parciais completas (*cpo's*) são os sistemas que incorporam tanto os objetos parciais quanto os objetos (totais) ideais."

Lembre-se que dado uma ordem parcial $(D, \sqsubseteq)$ um subconjunto não-vazio $X \subseteq D$ diz-se *dirigido* se para todos $x, y \in X$ existe um $z \in X$ tal que $x \sqsubseteq z$ e $y \sqsubseteq z$. $(D, \sqsubseteq)$ diz-se uma *ordem parcial completa* ou, simplesmente, *cpo* se D possui um primeiro elemento, $\perp$, e todo subconjunto dirigido de D possui um supremo em D. O *cpo* $(D, \sqsubseteq, \perp)$ cujo primeiro elemento é $\perp$, denota-se, simplesmente, por D. Se $X \subseteq D$ é dirigido, o supremo de X é denotado por $\sqcup X$ ou $Sup\ X$. Convenciona-se que num *cpo*, a notação $\sqcup X$ ou $Sup\ X$ significa que X é dirigido, sem mensão explicita. Exemplos de *cpo's* podem ser encontrados no Exemplo 2.11.

As estruturas matemáticas são vistas sempre agrupados em classes. Além disso, essas estruturas estão sempre associadas com as transformações entre elas. Assim, uma classe é constituida de todas as estruturas de um certo "tipo" chamadas objetos da classe e de todas as transformações entre esses objetos (chamadas de *morfismo*) que preservam a estrutura. Desse modo, a classe das ordens parciais, ou *PO*, tem como objetos as ordens parciais e como morfismos funções monotônicas.

3.1.1 Definição: Função Sup-contínua.

Sejam $(D_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ e $(D_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$ *cpo's*. Uma função $f : D_1 \longrightarrow D_2$ diz-se *Sup-contínua* se

(a) $X \subseteq D_1$, dirigido $\Rightarrow f(X) \subseteq D_2$, dirigido, onde $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$.

(b) $f(\text{Sup } X) = \text{Sup } f(X)$.

Lembre-se que $f : D_1 \longrightarrow D_2$ diz-se monotônica se para todo $x, y \in D_1, x \sqsubseteq_1 y \Rightarrow f(x) \sqsubseteq_2 f(y)$.

3.1.2 Proposição

Seja $(D_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ e $(D_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$ *cpo's*. Se $f : D_1 \longrightarrow D_2$ é Sup-contínua, então f é monotônica.

Prova: Suponha que $x \sqsubseteq_1 y$. Então $y = x \sqcup_1 y$ e consequentemente $f(y) = f(x) \sqcup_2 f(y)$. Logo, $f(x) \sqsubseteq_2 f(y)$.

□

3.1.3 Proposição

Sejam $(D_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ e $(D_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$ *cpo's*. Se $f : D_1 \longrightarrow D_2$ é monotônica e $X \subseteq D_1$ é dirigido, então $f(X)$ também é dirigido.

Prova: Suponha que $X \subseteq D_1$ é dirigido e $y_1, y_2 \in f(X)$. Então existem $x_1, x_2 \in X$ tal que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Como X é dirigido, existe $c \in X$, com $x_1 \sqsubseteq c$ e $x_2 \sqsubseteq c$. Monotonicidade de f acarreta $y_1 = f(x_1) \sqsubseteq_2 f(c)$ e $y_2 = f(x_2) \sqsubseteq_2 f(c)$. Ou seja, $f(X)$ é dirigido.

□

Tendo em vista a proposição acima, pode-se substituir a definição de Sup-continuidade por

3.1.4 Definição: Sup-Continuidade (Lógica)

$f : D_1 \longrightarrow D_2$ diz-se *Sup-contínua* se

(a) f é monotônica

(b) $X \subseteq D_1$ dirigido $\Rightarrow$ Sup $f(X) = f(\text{Sup } X)$.

Agora, usando-se a Proposição 3.1.2, finalmente, é possível se dar a seguinte definição.

3.1.5 Definição: Sup-Continuidade (Analítica)

$f : D_1 \longrightarrow D_2$ diz-se *Sup-contínua* se, sempre quando $X \subseteq D_1$ é dirigido, então $f(\text{Sup } X) = \text{Sup } f(X)$.

Pode-se dizer, então, que a classe dos *cpo's*, denotado CPO, tem como objetos as ordens parciais completas e como morfismos as funções monotônicas que preservam os supremos de conjuntos dirigidos. Já foi visto, no capítulo anterior, que as estruturas dos intervalos de informação, $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, é uma ordem parcial completa, com primeiro elemento, onde as funções $-, +, \cdot$ e $/$ são monotônicas. Mostra-se-á, no próximo capítulo, que essas operações são, de fato, funções Sup-contínuas. Ou seja, $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ pertence a CPO. Por outro lado, embora $\mathbb{R}$ seja um *cpo*, sua aritmética, com excessão da adição, não são funções monotônicas. Isto exclui $\mathbb{R}$ da classe dos *cpo's*.

3.2 *cpo's* e Topologias

Nesta seção serão desenvolvidos alguns conceitos elementares de topologias necessárias para relacionar espaços topológicos com *cpo's*. A partir daí serão examinadas as propriedades topológicas que podem ser obtidas da ordem e reciprocamente.

3.2.1 Definição: Topologia

Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção $\mathcal{J}$ de subconjuntos de X diz-se uma *topologia* sobre X, se ela satisfaz os seguintes axiomas:

(i) $X, \phi \in \mathcal{J}$

(ii) $A, B \in \mathcal{J} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{J}$ e consequentemente, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{J} \Rightarrow A_1 \cap, \ldots, \cap A_n \in \mathcal{J}$

(iii) $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{J}$.

Os membros de $\mathcal{J}$ são chamados subconjuntos $\mathcal{J}$-*abertos* de X ou simplesmente, subconjuntos *abertos* de X. O par $(X, \mathcal{J})$, onde X é um conjunto não-vazio e $\mathcal{J}$ é uma topologia sobre X é chamado um *espaço topológico*.

3.2.2 Exemplo

(a) Seja $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{J} = \{x \subseteq \mathbb{R} | x = \phi$, ou $x = \mathbb{R}$ ou x é união qualquer de intervalos abertos de $\mathbb{R}\}$. Então $(X, \mathcal{J})$ é um espaço topológico. Essa topologia é conhecida como a topologia *usual* da reta.

(b) Seja X um conjunto qualquer. Então $\mathcal{J} = \mathcal{P}(X)$, a família de todos os subconjuntos de X, forma uma topologia sobre X. O espaço topológico $(X, \mathcal{P}(X))$ é conhecido como espaço topológico *discreto*. A razão desse nome provém do fato de que a topologia discreta contém o maior número possível de abertos, desde que relativo a essa topologia, todo subconjunto de X é aberto.

(c) Seja X um conjunto não-vazio qualquer. A coleção $\mathcal{J} = \{X, \phi\}$, constituída somente de X e do vazio, também forma uma topologia sobre X. Esta topologia é chamada *trivial* ou *indiscreta*. Ela contém o menor número possível de abertos.

As topologias discreta e trivial representam extremos opostos. As topologias de real interesse estão entre esses dois extremos. Por exemplo, a topologia usual da reta nem é trivial nem discreta.

(d) Seja $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ e $\mathcal{J} = \{\phi, \{1\}, \mathcal{D}\}$. Então $\mathcal{J}$ é uma topologia, sobre $\mathcal{D}$, conhecida como topologia de Sierpinski. $\mathcal{D}$ será chamado espaço de Sierpinski.

3.2.3 Definição: Conjunto Fechado

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico. Um subconjunto $F \subseteq X$, diz-se *fechado* se o seu complementar $X - F \in \mathcal{J}$, isto é, $X - F$ é aberto.

3.2.4 Proposição

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico. Seja $\mathcal{F}$ a família dos subconjuntos fechados de X. Então $\mathcal{F}$ tem as seguintes propriedades:

(i) $X, \phi \in \mathcal{F}$, ou seja, X e ϕ são fechados.

(ii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

(iii) $\{F_i\} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \cap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$.

Prova: Basta usar a definição de conjunto fechado e as leis de De Morgan.

□

Muitas vezes, para introduzir uma topologia num conjunto X, não é preciso descrever todos os abertos de X, mas apenas os abertos "básicos" de acordo com a seguinte definição.

3.2.5 Definição: Base

Seja X um espaço topológico. Uma coleção de abertos $\mathcal{B}$ de X diz-se uma *base* de abertos de X se todo aberto de X fôr uma união de elementos de $\mathcal{B}$.

3.2.6 Proposição

$\mathcal{B}$ é uma base de abertos para X $\Leftrightarrow$ para todo aberto $A \subseteq X$ e $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.

Prova: $(\Rightarrow)$ óbvia

$(\Leftarrow)$ Seja A um aberto em X. Para todo $x \in A$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq A$. $A = \cup_{x \in A}\{x\} \subseteq \cup_{x \in A} B_x \subseteq A$, portanto $A = \cup_{x \in A} B_x$.

□

3.2.7 Proposição

Seja X um conjunto não-vazio e $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X, com as seguintes propriedades

(a) X é a união de membros de $\mathcal{B}$

(b) A interseção de dois membros quaisquer de $\mathcal{B}$ é a união de membros quaisquer de $\mathcal{B}$.

Então,definindo $\mathcal{J} = \{u \subseteq X | u$ é a união de membros de $\mathcal{B}\}, \mathcal{J}$ é uma topologia sobre X e $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{J}$. (É fácil ver que $\mathcal{J}$, nestas condições, é única).

Prova: Deve-se verificar que $\mathcal{J}$ satisfaz os axiomas (i) - (iii) da definição 3.2.1.

(i) X é uma união de membros de $\mathcal{B}$ por (a). ϕ é uma união da sub-família vazia. Logo, $X, \phi \in \mathcal{J}$.

(ii) Sejam $A, B \in \mathcal{J}$. Então, $A = \cup_{i \in I} B_i$, $B = \cup_{j \in J} B_j$, $B_i, B_j \in \mathcal{B}$ para todo $i \in I, j \in J$. Logo $A \cap B = \cup_{i,j}(B_i \cap B_j)$. Como cada $B_i \cap B_j \in \mathcal{B}$, por (b), segue que $A \cap B$ é união de membros de $\mathcal{B}$ e como tal é um membro de $\mathcal{J}$.

(iii) Se $\{A_i | i \in I\}$ é qualquer família de membros de $\mathcal{J}$, então A_i, para cada i, é uma união de membros de $\mathcal{B}$. Logo $\cup_{i \in I} A_i$ é uma união de membros de $\mathcal{B}$ e portanto está em $\mathcal{J}$.

□

No caso da topologia usual da reta a coleção de intervalos abertos satisfaz a proposição 3.2.7 e portanto é uma base.

Suponha que X é qualquer conjunto não vazio e $\mathcal{S}$ é qualquer coleção de subconjuntos de X. Combinando as proposições 3.2.6 e 3.2.7 ver-se que $\mathcal{S}$ é uma base de alguma topologia sobre X se e somente se $\mathcal{S}$ satisfaz (a) e (b) da proposição 3.2.7. Porém nem toda família de subconjuntos de X satisfaz essas condições . Cabe perguntar, então, qual é a topologia, sobre X, na qual os elementos de $\mathcal{S}$ são abertos. Por exemplo, os intervalos da reta $\mathbb{R}$ são abertos tanto na topologia usual quanto na discreta. Então a questão deve ser posta do seguinte modo: qual é a "menor" topologia $\mathcal{J}$, sobre X, isto é, a topologia que tem a menor quantidade de abertos para qual $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{J}$? Esta questão é respondida na seguinte proposição.

3.2.8 Proposição

Seja X um conjunto não vazio qualquer e $\mathcal{S}$ uma coleção de subconjuntos de X. Seja $\mathcal{B} = \{B | B$ é a interseção de uma quantidade finita de membros de $\mathcal{S}$ ou $B = X\}$. Então $\mathcal{B}$ é uma base para topologia $\mathcal{J}$, sobre X, tal que

$$\mathcal{J} = \{A | A \text{ é a união de membros de} \mathcal{B}\}.$$

Além disso, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{J}$ e se $\mathcal{J}'$ é outra topologia, sobre X, com $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{J}'$, então $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}'$. Ou seja, $\mathcal{J}$ é menos fina que $\mathcal{J}'$, isto é, tem menos abertos.

Prova: Primeiro deve-se mostrar que $\mathcal{B}$ satisfaz (a) e (b) da Proposição 3.2.7.

(a) X é uma união de membros de $\mathcal{B}$ porque por hipótese $X \in \mathcal{B}$.

(b) Se B_1 e B_2 ambos estão em $\mathcal{B}$, então B_1 e B_2 são a interseção de uma quantidade finita de membros de $\mathcal{S}$. Daí $B_1 \cap B_2$ também é. Pela Proposição 3.2.7 $\mathcal{B}$ é uma base para topologia $\mathcal{J}$ definida acima, sobre X. Além disso, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{J}$. Se $\mathcal{S}$ é uma coleção de abertos em qualquer outra topologia, sobre X, então todas as interseções finitas de membros de $\mathcal{S}$ devem ser, também, conjuntos abertos e portanto qualquer união de uma família dessas interseções deve, também, ser aberta. Como $\mathcal{J}$ é a menor topologia, sobre X, na qual essas condições são preenchidas, ela é portanto a topologia menos fina, sobre X, para qual $\mathcal{S}$ é uma famíla de conjuntos abertos.

□

Em virtude da Proposição 3.2.8 é possível se dar a seguinte definição.

3.2.9 Definição: Sub-base

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico. Um subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{J}$ diz-se uma *subbase* para $\mathcal{J}$ se o conjunto

$$\mathcal{B} = \{B | B \text{ é interseção de uma quantidade finita de membros } \mathcal{S}\}$$

é uma base para $\mathcal{J}$.

A Proposição 3.2.8 nos diz que qualquer coleção de subconjuntos de X cuja união está em X é uma subbase para uma única topologia, sobre X.

A família $\mathcal{S} = \{(-\infty, a)(b, +\infty), a, b \in \mathbb{Q}\}$ forma uma subbase para topologia usual da reta.

Do ponto de vista computacional é relevante o fato de uma topologia, sobre X, possuir base enumerável. Por isso é dado a seguinte definição.

3.2.10 Definição: Espaço Segundo Contável

Um espaço topológico $(X, \mathcal{J})$ diz-se *segundo contável* se ele possui uma base enumerável.

A reta com a topologia usual é um espaço segundo contável. A base enumerável é $\mathcal{B} = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subconjunto de X. É pertinente a seguinte questão: existe alguma topologia, sobre Y, que seja "induzida" por $\mathcal{J}$? Para responder esta questão é preciso a seguinte definição.

3.2.11 Definição: Aberto Relativo

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subconjunto não vazio de X. Um subconjunto $A \subseteq Y$ diz-se *aberto em* Y se $A = Y \cap B$, onde $B \in \mathcal{J}$.

3.2.12 Proposição

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico e $Y \subseteq X$. O conjunto σ de todos os subconjuntos de Y que são abertos em Y, forma uma topologia para Y.

Prova: Deve-se mostrar que σ satisfaz (i), (ii) e (iii) da Definição 3.2.1

(i) $X, \phi \in \mathcal{J}$. Logo $Y \cap X = Y$ e $Y \cap \phi = \phi$ pertencem a σ

(ii) Seja $A, B \in \sigma$. Então $A = Y \cap A'$ e $B = Y \cap B'$, com $A', B' \in \mathcal{J}$. Logo $A \cap B = Y \cap (A' \cap B') \in \sigma$, pois $A', B' \in \mathcal{J}$.

(iii) Suponha que $\{A_i | i \in I\} \subseteq \sigma$. Então para cada i, $A_i = Y \cap A'_i$, com $A'_i \in \mathcal{J}$. Logo $\cup_{i \in I}\{A_i\} = Y \cap \cup_{i \in I}\{A'_i\} \in \sigma$ porque $\cup_{i \in I}\{A'_i\} \in \mathcal{J}$.

□

3.2.13 Definição: Subespaço Topológico

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico e $Y \subseteq X$. Diz-se que (Y, σ) é um *subespaço topológico* de $(X, \mathcal{J})$ se σ é uma coleção de abertos em Y induzidos por $\mathcal{J}$.

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{J}$ uma topologia sobre X. É possível interpretar os elementos de $\mathcal{J}$ como sendo propriedades dos elementos de X. Desse modo, $A \in \mathcal{J}, x \in X$ e $x \in A$ será interpretado como "x tem a propriedade A". Desse ponto de vista poder-se-ia perguntar como dois elementos x e y, de X, estão relacionados com respeito aos abertos de $\mathcal{J}$. Em outras palavras, dados dois elementos distintos x e y existem propriedades de x que não são propriedades de y? e reciprocamente. Desse modo pode-se classificar os espaços topológicos como segue.

3.2.14 Definição: Espaço Topológico T_0

Um espaço topológico $(X, \mathcal{J})$ diz-se T_0 se dados dois pontos distintos de X existe um aberto que contém um e não o outro. Ou dito de outra maneira, se todo aberto que contém um também contém o outro, então, eles são o mesmo.

O espaço topológico de Sierpinski $(\mathcal{D}, \{\phi, \{1\}, \mathcal{D}\})$ é T_0. O aberto $\{1\}$ contém 1 e não contém 0.

3.2.15 Definição: Fecho

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subconjunto de X. O *fecho de* A, denotado $\overline{A}$, é a interseção de todos os conjuntos fechados de X que contém A. Em particular, $\overline{A}$ é um conjunto fechado.

O objetivo da proposição que segue é caracterizar os espaços T_0.

3.2.16 Proposição

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico, $x, y \in X$ com $x \neq y$. Então todo conjunto aberto que contém x ou y contém ambos $\Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

Prova: ($\Leftarrow$) Suponha que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Então $x \in \overline{\{x\}}$ e $x \in \overline{\{y\}}$.

Analogamente $y \in \overline{\{x\}}$. Suponha que $A \in \mathcal{J}$ com $x \in A$ e $y \notin A$. Então $X - A$ é um conjunto fechado tal que $y \in X - A$ e $x \notin X - A$. Mas, $\{y\} \subseteq X - A$ e $X - A$ fechado acarreta $\overline{\{y\}} \subseteq X - A$ e daí $x \notin \overline{\{y\}}$, absurdo. Portanto, não existe nenhum conjunto aberto que contém y e não x.

($\Rightarrow$) Suponha que todo conjunto que contém x ou y contém ambos.

Seja $z \in \overline{\{x\}}$. Então todo conjunto aberto que contém z contém x. Pois se A é um aberto que contém z, mas não x, $X - A$ é um fechado que contém x, mas não z. Logo, z poderia não está em $\overline{\{x\}}$. Como todo conjunto aberto que contém x contém y, e todo aberto que contém z contém y segue que $z \in \overline{\{y\}}$. Logo, $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$. Analogamente se prova que $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$. Logo, $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

□

3.2.17 Corolário

Um espaço topológico $(X, \mathcal{J})$ é $T_0 \Leftrightarrow$ para $x, y \in X$ com $x \neq y$, então $x \notin \overline{\{y\}}$ ou $y \notin \overline{\{x\}}$.

□

3.2.18 Definição: Espaço Topológico T_1

Um espaço topológico $(X, \mathcal{J})$ diz-se T_1 se para cada $x, y \in X$ com $x \neq y$ existem $A, A' \in \mathcal{J}$ com $x \in A, y \notin A$ e $y \in A', x \notin A'$.

3.2.19 Proposição

Um espaço topológico $(X, \mathcal{J})$ é $T_1 \Leftrightarrow$ para cada $x \in X, \overline{\{x\}} = \{x\}$.

Prova: ($\Rightarrow$) suponha que X é $T_1, x \in X$ tal que $z \in \overline{\{x\}}$ e $z \neq x$.

Então todo aberto contendo z deve conter x. Logo, não existe aberto contendo z

que exclua x, um absurdo pois X é suposto ser T_1. Logo $\overline{\{x\}} = \{x\}$ para todo $x \in X$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\overline{\{x\}} = \{x\}$ para cada $x \in X, y, z \in X$ como $z \neq y$. Se todo aberto que contém y contém z, então $z \in \overline{\{y\}} = \{y\}$. Logo $y = z$, uma contradição. Portanto, existe um aberto contendo y que exclui z. Analogamente, existe um aberto contendo z que exclui y, ou seja, $(X, \mathcal{J})$ é T_1.

□

3.2.20 Corolário

Um espaço topológico $(X, \mathcal{J})$ é $T_1 \Leftrightarrow$ todo ponto é um subconjunto fechado de X. Uma classe importante de espaços topológicos T_1 são os espaços métricos [DUN 66].

□

3.2.21 Corolário

Todo espaço topológico T_1 é T_0.

□

3.2.22 Definição: Espaço de Hausdorff

Um espaço topológico $(X, \mathcal{J})$ é T_2 ou de *Hausdorff* se dados $x, y \in X$ com $x \neq y$ existem $A, A' \in \mathcal{J}$ com $x \in A, y \in A'$ e $A \cap A' = \phi$.

A topologia usual da reta é de Hausdorff.

3.2.23 Corolário

$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. Porém existem espaços topológicos T_0 sem ser T_1, por exemplo, o espaço de Sierpinski. Existem espaços topológicos T_1 sem ser T_2 ver [DUN 66].

□

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico T_0. A partir da topologia $\mathcal{J}$ é possível se definir uma relação de ordem sobre X como segue:

$$x, y \in X, x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \text{ todo } A \in \mathcal{J} \text{ que contém } x, \text{ contém } y.$$

3.2.24 Proposição

$(X, \sqsubseteq)$ é uma ordem parcial.

Prova: As propriedades reflexivas e transitivas saem imediatamente da definição da relação , enquanto a antisimetria é exatamente a definição da topologia ser T_0.

□

Assim, a todo espaço topológico T_0 está associado uma ordem parcial gerada pela topologia. Reciprocamente, será visto a seguir que, dado um *cpo* existe uma topologia T_0, a ***topologia de Scott***, que é compatível com a ordem.

3.2.25 Definição: Aberto Scott

Seja $(D, \sqsubseteq, \perp)$ um *cpo* e $A \subseteq D$. A diz-se um *aberto Scott* se satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $x \in A$ e $x \sqsubseteq y \Rightarrow y \in A$

(b) $X \subseteq D$ dirigido e $\operatorname{Sup} X \in A \Rightarrow X \cap A \neq \phi$.

3.2.26 Proposição

Seja $(D, \sqsubseteq, \perp)$ um *cpo* e $\mathcal{J} = \{A \subseteq D | A \text{ é aberto Scott}\}$. Então $\mathcal{J}$ é uma topologia T_0, sobre D, que em geral não é T_1. $\mathcal{J}$ será chamada *topologia de Scott sobre D*.

Prova: Deve-se mostrar que $\mathcal{J}$ satisfaz os axiomas (i), (ii) e (iii) da Definição 3.2.1.

(i) ϕ e D são trivialmente abertos Scott.

(ii) Suponha que $A_1, A_2 \in \mathcal{J}$. Deve-se mostrar que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{J}$. Seja $x \in A_1 \cap A_2$ e $x \sqsubseteq y$. Então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Como $x \sqsubseteq y$ e $A_1, A_2 \in \mathcal{J}$ segue que $y \in A_1$ e $y \in A_2$ e portanto $y \in A_1 \cap A_2$. Seja $S \subseteq D$ dirigido, então Sup $S \cap A_1 \neq \phi$ e Sup $S \cap A_2 \neq \phi$. Portanto Sup $S \cap (A_1 \cap A_2) \neq \phi$. Portanto $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{J}$.

(iii) Demonstra-se de modo análogo a (ii).

$\mathcal{J}$ é T_0. De fato, seja $U_x = \{z \in D | z \not\sqsubseteq x\}$.

Fato: U_x é aberto Scott. Com efeito, se $y \in U_x$ e $y \sqsubseteq w$, então $y \not\sqsubseteq x$ e consequentemente $w \not\sqsubseteq x$. Logo $w \in U_x$. Suponha que Sup $X \in U_x$, para $X \subseteq D$ dirigido, ou seja Sup $X \not\sqsubseteq x$. Se $U_x \cap X = \phi$, então para todo $y \in X, y \sqsubseteq x$, e pela definição de supremo, Sup $X \sqsubseteq x$, contrariando a hipótese. Logo, $U_x \cap X \neq \phi$. Terminando assim a prova de que U_x é aberto Scott. No sentido de provar que $\mathcal{J}$ é T_0 suponha que $x, y \in D$, com $x \neq y$. Então, $x \in U_y, y \notin U_y$ e U_y é aberto. Logo $\mathcal{J}$ é T_0. Se além disso $x \sqsubset y$ então todo aberto que contém x (vizinhança de x) contém y. Portanto $\mathcal{J}$ não necessita ser T_1.

□

3.2.27 Corolário

Seja $(D, \sqsubseteq, \perp)$ um *cpo* e $\mathcal{J}$ a topologia de Scott sobre D. Então o conjunto $U_x = \{z \in D | z \not\sqsubseteq x\}$ é aberto segundo Scott.

□

De ora em diante, todo *cpo* será considerado como um espaço topológico ordenado, onde a topologia é a de Scott, a menos que se mencione o contrário. No que segue será definido o conceito de função contínua segundo a topologia e mostrado que os dois conceitos coincidem quando a topologia é Scott.

3.3 Relação Entre Sup-Continuidade e Top-Continuidade num *cpo*

A noção de continuidade é central em topologia. As funções contínuas são as únicas admissíveis na classe TOP, dos espaços topológicos. As funções contínuas são aquelas que preservam o conceito de proximidade. Dito de outro modo, se $f : X \longrightarrow Y$ é uma função contínua entre os espaços topológicos $(X, \mathcal{J}_1)$ e $(Y, \mathcal{J}_2)$, então a toda propriedade de $f(x) \in Y$ corresponde uma propriedade de $x \in X$.

3.3.1 Definição: Top-contínua

Sejam $(X, \mathcal{J})$ e $(Y, \mathcal{J}')$ espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. f diz-se *Top-contínua* se para todo $B \in \mathcal{J}', f^{-1}(B) \in \mathcal{J}$. Ou seja, se a imagem inversa de qualquer aberto de Y é um aberto em X.

3.3.2 Exemplos

(a) Se X é um espaço com a topologia discreta e $(Y, \mathcal{J})$ é qualquer, então $f : X \longrightarrow Y$ é Top-contínua.

(b) Se X é um espaço com a topologia trivial e $(Y, \mathcal{J})$ é um espaço qualquer, então as únicas funções Top-contínuas de X em Y são as constantes.

3.3.3 Proposição

Sejam $(X, \mathcal{J})$ e $(Y, \mathcal{J}')$ espaços topológicos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é Top-contínua $\Leftrightarrow$ dado qualquer $f(x) \in Y$ e $V \ni f(x)$ existe $U \in \mathcal{J}$ com $x \in U$ e $f(U) \subseteq V$.

Prova: ($\Rightarrow$) Suponha que f é Top-contínua. Então se $V \in \mathcal{J}'$ com $f(x) \in V, f^{-1}(V) \in \mathcal{J}$ e $x \in f^{-1}(V)$. Basta tomar $U = f^{-1}(V)$.

($\Leftarrow$) Assuma o lado direito de "$\Leftrightarrow$". Seja $W \in \mathcal{J}'$ qualquer. Deve-se mostrar que $f^{-1}(W) \in \mathcal{J}$. Seja $z \in f^{-1}(W)$. Então, $f(z) \in W$ e consequentemente existe um aberto U contendo z tal que $f(U) \subseteq W$. Mas então $U \subseteq f^{-1}(W), z \in U \subseteq f^{-1}(W)$, onde $U \in \mathcal{J}$. Logo $f^{-1}(W)$ é a união de abertos de X e portanto é um aberto em X. Daí f é Top-contínua.

□

3.3.4 Proposição

Sejam $(X, \mathcal{J})$ e $(Y, \mathcal{J}')$ espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ função. Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathcal{J}'$. f é Top-contínua $\Leftrightarrow$ para cada $B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{J}$.

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que f é Top-contínua. Como $B \in \mathcal{B}$ segue que $B \in \mathcal{J}'$ e consequentemente $f^{-1}(B) \in \mathcal{J}$, pois f é Top-contínua.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $f^{-1}(B) \in \mathcal{J}$ para cada $B \in \mathcal{B}$. Seja $V \in \mathcal{J}'$. Então $V = U_{i \in I} B_i$, onde cada $B_i \in \mathcal{B}$. Daí $f^{-1}(V) = f^{-1}(U_{i \in I} B_i) = U_{i \in I} f^{-1}(B_i)$. Como $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{J}$ para cada $i, f^{-1}(V) \in \mathcal{J}$ e portanto f é Top-contínua.

□

3.3.5 Proposição

Sejam $(X, \mathcal{J})$ e $(Y, \mathcal{J}')$ espaços topológicos. Então $f : X \longrightarrow Y$ é uma função Top-contínua $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(F)$ é fechado para qualquer $F \subseteq Y$, fechado.

Prova: Imediata, basta usar as leis de De Morgan.

□

3.3.6 Proposição

Seja X um conjunto munido de duas topologias $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}'$. $\mathcal{J}$ é mais fina do que $\mathcal{J}'$ $\Leftrightarrow$ a função identidade $id : X \longrightarrow X$, definida por $id(x) = x$ para todo $x \in X$, é Top-contínua, onde $id : (X, \mathcal{J}) \longrightarrow (X, \mathcal{J}')$.

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que $\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{J}$. Se $A' \in \mathcal{J}'$, então $id^{-1}(A') = A' \in \mathcal{J}$. Logo id é Top-contínua.

$(\Leftarrow)$ Suponha que id é Top-contínua. Se $A \in \mathcal{J}'$ então $id^{-1}(A) = id(A) = A \in \mathcal{J}$. Logo $\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{J}$, isto é, $\mathcal{J}$ é mais fina que $\mathcal{J}'$.

□

3.3.7 Proposição

Sejam $(X,\mathcal{J}),(Y,\mathcal{J}'),(Z,\mathcal{J}'')$ espaços topológicos com $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ funções Top-contínuas. Então $g \circ f : X \longrightarrow Z$ também é Top-contínua.

Prova: Seja $A \in \mathcal{J}''$. Então $g^{-1}(A) \in \mathcal{J}'$ e $f^{-1}(g^{-1})(A) \in \mathcal{J}$. Mas, $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$. Logo $g \circ f$ é Top-contínua.

□

3.3.8 Proposição

Sejam $(X,\mathcal{J}),(Y,\mathcal{J}')$ e $(Z,\mathcal{J}'')$ espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ Top-contínua.

(a) Seja $(Y,\mathcal{J}')$ um subespaço topológico de $(Z,\mathcal{J}'')$. Então $f : X \longrightarrow Z$ é Top-contínua.

(b) Se W é um subespaço de X, então $f|W : W \longrightarrow Y$ é uma função Top-contínua.

Prova: (a) Se $U \in \mathcal{J}'$, então $U \cap Y \in \mathcal{J}'$ e portanto $f^{-1}(U \cap Y) \in \mathcal{J}$. Mas $f(x) \in Y$ para todo $x \in X$ e consequentemente $f^{-1}(U) = f^{-1}(U \cap Y) \in \mathcal{J}$. Logo $f : X \longrightarrow Z$ é Top-contínua.

(b) A função inclusão $i : W \longrightarrow X$ tal que $i(x) = x$ para todo $x \in W$ é obviamente Top-contínua. Além disso, $f_{|W} = f \circ i$. Pela Proposição 3.3.7 $f_{|W}$ é Top-contínua.

□

3.3.9 Definição: Homeomorfismo

Sejam $(X,\mathcal{J})$ e $(Y,\mathcal{J}')$ espaços topológicos. Uma função bijetiva $f : X \longrightarrow Y$ diz-se um *homeomorfismo* se f e f^{-1} são Top-contínuas. Neste caso os espaços $(X,\mathcal{J})$ e $(Y,\mathcal{J}')$ são ditos *homeomorfos*.

3.3.10 Proposição

Sejam $(X, \mathcal{J})$ e $(Y, \mathcal{J}')$ espaços topológicos e $\mathcal{B}$ uma base de $(X, \mathcal{J})$. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma bijeção. Então f é um homeomorfismo $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ é uma base de $\mathcal{J}'$.

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que $\mathcal{B}$ é uma base de $(X, \mathcal{J})$. Deve-se mostrar que $f(\mathcal{B})$ é uma base de $\mathcal{J}'$. Seja $A \in \mathcal{J}'$. Então $f^{-1}(A) \in \mathcal{J}$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{J}$, $f^{-1}(A) = \cup_i B_i, B_i \in \mathcal{B}$. Logo, $f(f^{-1}(A)) = A = f(U_i B_i) = U_i f(B_i)$. Portanto $f(\mathcal{B})$ é uma base de $\mathcal{J}'$.

$(\Leftarrow)$ Suponha o lado direito de "$\Leftrightarrow$". Se $A \in \mathcal{J}'$, então $A = U_i\{f(B_i)\}$ com $B_i \in \mathcal{B}$. Portanto $f^{-1}(A) = f^{-1}(U_i\{f(B_i)\}) = U_i f^{-1}(f(B_i)) = U_i B_i$, que é um aberto de X. Logo f é Top-contínua.

Por outro lado, se $A \in \mathcal{J}$, então $A = U_i B_i$, com $B_i \in \mathcal{B}$. Logo, $f(A) = f(U_i B_i) = U_i f(B_i) \in \mathcal{J}'$ pois é a união de subconjuntos abertos de Y. mas $f = (f^{-1})^{-1}$, pois f é bijetiva. Portanto $(f^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{J}'$ se $A \in \mathcal{J}$. Logo, f^{-1} é Top-contínua.

□

Sob o ponto de vista da topologia dois espaços topológicos homeomorfos são indistinguíveis, isto é, a relação "X é homeomorfo a Y" é uma relação de equivalência na classe TOP, de todos os espaços topológicos. É possível provar, agora, o principal resultado desta seção que afirma a equivalência entre as funções Top-contínuas e Sup-contínuas, nos *cpo's* com as topologias de Scott.

3.3.11 Proposição

Sejam $(D_1, \sqsubseteq_1, \perp_1, \mathcal{J}_1)$ e $(D_2, \sqsubseteq_2, \perp_2, \mathcal{J}_2)$ *cpo's* com as topologias de Scott $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$, respectivamente. Uma função $f : D_1 \longrightarrow D_2$ é Sup-contínua $\Leftrightarrow$ é Top-contínua.

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que f é Sup-contínua, isto é, $f(\text{Sup } X) = \text{Sup } f(X)$, para todo $X \subseteq D_1$, dirigido. Suponha que $A \in \mathcal{J}_2$. Deve-se mostrar que $f^{-1}(A) \in \mathcal{J}_1$. De fato, se $\text{Sup}X \in f^{-1}(A)$, então $f(\text{Sup}X) = \text{Sup } f(X) \in A$. Logo, $f(X) \cap A \neq \phi$ e daí $X \cap f^{-1}(A) \neq \phi$. Se $x \in f^{-1}(A)$ e $x \sqsubseteq_1 y$, então $f(x) \sqsubseteq_2 f(y)$, pois f é monotônica. Como $f(x) \in A \in \mathcal{J}_2$ segue que $f(y) \in A$. Logo, $f^{-1}(f(y)) = y \in f^{-1}(A)$, o que termina a prova de que f é Top-contínua.

($\Leftarrow$) Suponha que f é Top-contínua. Deve-se mostrar inicialmente que f é monotônica. Seja $x \sqsubseteq_1 y$ e assuma que $f(x) \not\sqsubseteq_2 f(y)$. Então pelo Corolário 3.2.27, $f(x) \in \cup_{f(y)}$ e portanto $x \in f^{-1}(\cup_{f(y)})$, que é aberto em D_1. Logo, $y \in f^{-1}(\cup_{f(y)})$, ou seja, $f(y) \in \cup_{f(y)}$ o que é um absurdo. Isto mostra que f é monotônica. Portanto, se $X \subseteq D_1$ é dirigido, $f(X)$ é dirigido em D_2. Logo, para todo $x \in X_1, f(x) \sqsubseteq_2 f(\text{Sup } X)$ e daí Sup $f(X) \sqsubseteq_2 f(\text{Sup}X)$. Agora, se $f(\text{Sup}X) \not\sqsubseteq_2$ Sup $f(X)$, então $f(\text{Sup } X) \in \cup_{\text{Sup } f(X)}$. Usando a condição (b) da definição de conjunto aberto Scott e observando que $f(X)$ é dirigido, tem-se $f(X) \cap \cup_{\text{Sup } f(X)} \neq \phi$, isto é, existe $K \in f(X)$ e $K \in \cup_{\text{Sup } f(X)}$. Desse modo, $K \sqsubseteq_2$ Sup $f(X)$ e $K \not\sqsubseteq_2$ Sup $f(X)$, absurdo.

□

De acordo com esta proposição, nos *cpo's* onde a topologia é Scott as funções Top-contínuas ou Sup-contínuas serão chamadas, simplesmente, funções contínuas.

3.4 A Classe dos *cpo's* como uma categoria

O conceito de *categorias* visa abstrair a noção de conjuntos e funções entre eles. pode-se dizer que uma categoria é um universo de discurso matemático que é determinado quando se especifica uma certa espécie de objeto e uma certa espécie de funções entre objetos. usa-se a palavra "*seta*" ou "*morfismo*" no lugar de funções em categorias.

3.4.1 Definição: Categoria

Uma *categoria* $\mathcal{C}$ consiste de uma conjunto $obj(\mathcal{C})$ (de objetos de $\mathcal{C}$) junto com um conjunto $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$(os morfismos de X para Y) tal que para $X, Y, Z \in obj(\mathcal{C})$ existe uma operação binária

$\circ : Mor(X, Y) \times Mor(Y, Z) \longrightarrow Mor(X, Z)$, chamada *composição* satisfazendo

(a) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (associatividade) para todo f, g, h

(b) Para cada $X \in obj(\mathcal{C})$ existe $Id \in Mor(X, X)$ tal que para todo $f \in Mor(X, Y)$ e $g \in Mor(Y, X)$ $f \circ Id = f$ e $Id \circ g = g$.

3.4.2 Exemplo

(a) SET. A categoria onde os objetos são conjuntos e os morfismos são funções.

(b) POSET. A categoria cujos objetos são *po's* (ordens parciais) e cujos morfismos são funções monotônicas.

(c) CPO. A categoria cujos objetos são *cpo's* e cujos morfismo são funções contínuas.

(d) TOP. A categoria cujos objetos são espaços topológicos e cujos morfismos são funções contínuas.

(e) Um *monoide* é uma terna $(M, \circ, e)$, onde M é um conjunto, $\circ : M \times M \longrightarrow M$ é uma operação sobre M e $e \in M$ é um elemento destacado, satisfazendo as seguintes condições:

- $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ para todo $x, y, z \in M$, isto é, $\circ$ é associativa

- $e \circ x = x \circ e = x$ para todo $x \in M$, isto é, e é a identidade.

Para qualquer categoria $\mathcal{C}$ e qualquer $X \in obj(\mathcal{C})$, o conjunto $Mor(X, X)$ forma um monoide sob composição, com id_X sendo a identidade. A categoria MON tem monoides como objetos e homomorfismos de monoides como morfismos. Diz-se que $f : M \longrightarrow N$ é um *homomorfismo* de monoide se $f(e) = e'$ e $f(x \circ y) = f(x) \circ' f(y)$ para todo $x, y \in M$.

(f) Embora POSET seja uma categoria cujos objetos são *po's*, pode-se ver um *po* como uma categoria. Fixe um *po* $(P, \sqsubseteq)$ e construa a categoria $\mathcal{C}$ cujos objetos são os elementos de P e os morfismos são pares de objetos (x, y), onde $x, y \in P$, definido por

$$(x, y) \in Mor(x, y) \Leftrightarrow x \sqsubseteq y$$

As propriedades reflexivas e transitivas de *po* satisfazem as condições de categoria.

3.4.3 Definição: Categoria Plena

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $\mathcal{D}$ uma subclasse de $obj(\mathcal{C})$. Defina uma categoria $\mathcal{D}$ por $obj(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ e $Mor_{\mathcal{D}}(X,Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para todo $X, Y \in \mathcal{D}$, com a composição e a identidade como em $\mathcal{C}$. Diz-se que $\mathcal{D}$ é uma *categoria plena* induzida por $\mathcal{C}$ (o adjetivo "plena" se referé ao fato de que todos os $\mathcal{C}$-morfismos entre objetos de $\mathcal{D}$ são mantidas).

3.4.4 Definição: Subcategoria

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Uma *subcategoria* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ é dada por uma subclasse de objetos, $obj(\mathcal{D})$, de $obj(\mathcal{C})$ e, para cada $X, Y \in obj(\mathcal{D})$, um subconjunto $Mor_{\mathcal{D}}(X,Y)$ de $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ sujeitos aos axiomas $Id_X \in Mor_{\mathcal{D}}(X,X)$ e sempre que $f \in Mor_{\mathcal{D}}(X,Y)$ e $g \in Mor_{\mathcal{D}}(Y,Z)$, então $g \circ f \in Mor_{\mathcal{D}}(X,Z)$.

É claro que $\mathcal{D}$, com a composição herdada de $\mathcal{C}$, satisfaz os axiomas de categorias. Desse modo, uma subcategoria é, também, uma categoria. Uma subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ é plena se $Mor_{\mathcal{D}}(X,Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$, para todo $X, Y \in obj(\mathcal{D})$.

Todas as construções numa categoria deve ser descrita inteiramente em termos da linguagem de objetos, morfismos, composição e identidade.

3.4.5 Definição: Isomorfismo

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $X, Y \in obj(\mathcal{C})$. Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ é um *isomorfismo* se existe $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$ ou em outras termos se o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "id_Y"] & \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Figura 3.1 - Diagrama de um isomorfismo

Se tal g existe, ele é único, pois se $h \circ f = id_X, f \circ h = id_Y$, então $g = g \circ id_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_X \circ h = h$.

Na categoria SET $f : X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo se e somente se f é uma função bijetiva.

Dados $X, Y \in obj(\mathcal{C})$, diz-se que X e Y são *isomorfos* se existe um isomorfismo $f : X \longrightarrow Y$. Dado uma categoria $\mathcal{C}$ não existe interesse em distinguir dois elementos que são isomorfos, isso porque a relação "X é isomorfo a Y" é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{C}$ e portanto basta olhar a categoria quociente por essa relação de equivalência.

3.4.6 Definição: Objeto Inicial

Uma objeto X numa categoria $\mathcal{C}$ diz-se *inicial* se para todo $Y \in obj(\mathcal{C})$ existe um único morfismo $f : X \longrightarrow Y$.

O próximo resultado, embora simples, é básico em teoria das categorias, uma vez que muitas construções acontecem ser equivalentes a objetos iniciais de categorias adequadas.

3.4.7 Proposição

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com A e B ambos iniciais em $\mathcal{C}$. Então A e B são isomorfos. Ou seja, se $\mathcal{C}$ tem objeto inicial, então ele é único a menos de isomorfismo.

Prova: Basta observar que o diagrama abaixo comuta e usar o fato de que quaisquer dois morfismos de A em A são iguais.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f!"] \arrow[dr, "id_A"'] & B \arrow[d, "g!"] \arrow[dr, "id_B"] & \\
 & A \arrow[r, "f!"'] & B
\end{tikzcd}$$

Figura 3.2 - Diagrama de um isomorfismo

A notação "$x!$" significa "existe um único x".

Ou seja $\exists!\, g \circ f : A \longrightarrow A$ e $\exists!\, f \circ g : B \longrightarrow B$. Logo, $g \circ f = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = id_A$. Ou seja, $g = f^{-1}$.

□

3.4.8 Exemplo

(a) ϕ é inicial na categoria SET, pois existe uma única função $f : \phi \longrightarrow X$, para todo $X \in obj(SET)$, qual seja aquela cujo o gráfico é vazio.

(b) $\perp = (\{\perp\}, \sqsubseteq, \perp)$ é um *cpo* que é o objeto inicial da categoria CPO.

A cada construção em categorias corresponde a uma construção dual, qual seja a construção obtida ao se reverter todas as setas. Um objeto inicial é aquele que admite uma única seta saindo dele, o seu dual deveria ser um objeto admitindo somente uma seta chegando nele. Tal objeto se existir será chamado objeto *terminal*.

3.4.9 Proposição

Se X e Y são objetos terminais numa categoria $\mathcal{C}$, então eles são isomorfos.

Prova: Basta observar que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
Y & X \arrow[l, "g!"'] \arrow[dr, "id_X"] & \\
 & Y \arrow[ul, "id_Y"] \arrow[u, "f!"'] & X \arrow[l, "g!"]
\end{tikzcd}$$

Figura 3.3 – Diagrama de um isomorfismo

Esse diagrama é o mesmo da Proposição 3.4.7, porém com as setas invertidas. □

Essas duas proposições é um caso particular de uma situação geral, que acontece com o conceito de dualidade. Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo numa categoria $\mathcal{C}$.

Pode-se ver o morfismo $f : Y -\!\!< X$ como sendo de uma categoria cujos objetos são os mesmos de $\mathcal{C}$, porém com as setas invertidas.

3.4.10 Definição: Categorial Dual

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. A categoria *dual* ou *oposta* de $\mathcal{C}$, denotado $\mathcal{C}^{op}$ é a categoria definida como segue:

$$obj(\mathcal{C}^{op}) = obj(\mathcal{C}), \; Mor_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = Mor_{\mathcal{C}}(Y,X).$$

Partindo da categoria $\mathcal{C}$ cujas setas são $f : X \longrightarrow Y$, os morfismos em $\mathcal{C}^{op}$ são $f : Y -\!\!< X$. Se $f \in Mor_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)$ e $g \in Mor_{\mathcal{C}^{op}}(Y,Z)$, a composta $g \circ f \in Mor_{\mathcal{C}^{op}}(X,Z)$ é obtida se tomando a composta $f \circ g \in Mor_{\mathcal{C}}(Z,X)$ em $\mathcal{C}$.

Assim

$$X \overset{f}{-\!\!<} Y \overset{g}{-\!\!<} Z \equiv X \overset{g \circ f}{-\!\!<} Z \quad \text{em} \quad \mathcal{C}^{op}$$

onde

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X \equiv Z \xrightarrow{f \circ g} X \quad \text{em} \quad \mathcal{C}.$$

Os axiomas da definição de categoria em $\mathcal{C}^{op}$ seguem dos correspondentes em $\mathcal{C}$. Além disso, $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é isomorfismo se e somente se o mesmo f considerado em $\mathcal{C}^{op}$ é um isomorfismo. Isto é facilmente visto no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "id_Y"] & \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X & Y \arrow[l, "f"'] & \\
& X \arrow[ul, "id_X"] \arrow[u, "g"'] & Y \arrow[l, "f"] \arrow[ul, "id_Y"']
\end{tikzcd}$$

Figura 3.4 – Diagrama da dualidade

Dada uma construção A em $\mathcal{C}$, a ***construção dual*** é aquela obtida em se fazendo a correspondente construção em $\mathcal{C}^{op}$ e então interpretando-se a construção em $\mathcal{C}$. A construção dual de A será referida como $co - A$.

Desse modo, isomorfismo $\equiv$ co-isomorfismo, co-inicial $\equiv$ terminal e co-terminal $\equiv$ inicial. A todo resultado A numa categoria $\mathcal{C}$ corresponde um co-resultado na categoria dual $\mathcal{C}^{op}$. Isto economiza demonstrações, reduzindo-as pela metade.

3.4.11 Definição: Objeto Zero

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto $\theta \in obj(\mathcal{C})$ diz-se um *zero* se ele é inicial e terminal em $\mathcal{C}$.

3.5 Construções em Categorias

Existem muitas maneiras de se construir um novo objeto a partir de objetos dados de uma categoria. Nesta seção serão apresentadas algumas dessas construções. Antes, porém, será visto o espaço produto de espaços topológicos para servir de exemplo de construção na categoria Top. O *produto cartesiano* de n conjuntos $X_1, \ldots, X_n$ é definido como sendo o conjunto.

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

não existe perda de generalidade ao se estudar o produto para apenas dois conjuntos.

Sejam $(X_1, \mathcal{J}_1)$ e $(X_2, \mathcal{J}_2)$ espaços topológicos. Pretende-se definir uma topologia no produto cartesiano de tal modo que satisfaça as seguintes condições:

(i) A topologia produto $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$ depende de $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$

(ii) $\mathcal{J}$ é a topologia menos fina que torna as projeções $pr_1(x_1, x_2) = x_1$ e $pr_2(x_1, x_2) = x_2$ funções contínuas.

3.5.1 Definição: Topologia Produto

Sejam $(X_1, \mathcal{J}_1)$ e $(X_2, \mathcal{J}_2)$ espaços topológicos. Seja $S = \{w_1 \times w_2 | w_i \subseteq X_i$ e $w_i \in \mathcal{J}_i,\ i = 1, 2\}$. A topologia *produto* sobre $X_1 \times X_2$ é definida como sendo aquela cuja subbase é S. O espaço topológico $(X_1 \times X_2, \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2)$ é dito *espaço produto*.

3.5.2 Proposição

Seja $(X_1 \times X_2, \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2)$ o espaço produto dos espaços $(X_1, \mathcal{J}_1)$ e $(X_2, \mathcal{J}_2)$. Cada projeção $pr_i : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$, $i = 1, 2$, definida por $pr_i(x_1, x_2) = x_i$, é uma função contínua. Além disso, $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$ é a topologia menos fina que torna as projeções contínuas.

Prova: Dado $A \subseteq X_i$ aberto, $pr_i^{-1}(A)$ é aberto pela definição da topologia. Agora seja σ outra topologia sobre $X_1 \times X_2$ que torna as projeções contínuas e menos fina que $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$. Então algum membro de $\mathcal{S}$, a subbase de $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$, não seria aberto e portanto ao menos uma das projeções não seria contínua.

□

A topologia de $\mathbb{R}^2$ tem como subbase o conjunto $\{(a,b) \times (c,d) | (a,b), (c,d)$ são abertos em $\mathbb{R}\}$.

A seguir é dada uma descrição do produto cartesiano numa linguagem categórica.

Dado o conjunto X pretende-se caracterizá-lo como sendo isomorfo ao produto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_n$. Para isso considere a família de morfismos da forma $Y \xrightarrow{f_i} X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Para cada $y \in Y$, $\{f_i(y) | i = 1, \ldots, n\}$ é um elemento de $X_1 \times \cdots \times X_n$ e portanto ele deve corresponder a um elemento de X, suponha $f(x)$. Então existe uma correspondência entre morfismos $Y \longrightarrow X$ e a família de morfismos $Y \xrightarrow{f_i} X_i$. Além disso, quando $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ esta correspondência pode ser facilmente descrita em termos do diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i=1}^{n} X_i \arrow[rr, "pr_j"] & & X_j \\
& Y \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

para todo $j = 1, \ldots, n$

portanto, $f(y) = (f_i(y) | i = 1, \ldots, n)$

Figura 3.5 - Diagrama do produto

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $\{X_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$ uma família de objetos de $\mathcal{C}$. O *produto* de $\{X_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$ é o par $(P, (pr_i | i = 1, \ldots, n))$, onde P é um objeto de $\mathcal{C}$ e para cada $i = 1, \ldots, n$, $pr_i : P \longrightarrow X_i$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ satisfazendo a seguinte propriedade:

Dado $(Y, f_i | i = 1, \ldots, n)$, onde Y é um objeto de $\mathcal{C}$ e $f_i : Y \longrightarrow X_i$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, existe um único $f : Y \longrightarrow P$ tal que $pr_i \circ f = f_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, como mostra o diagrama abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "pr_i"] & X_i \\
& Y \arrow[ul, dashed, "f"] \arrow[u, "f_i"']
\end{tikzcd}
$$

ou para apenas
dois objetos

$$
\begin{tikzcd}
X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] & X_2 \\
& Y \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dashed, "\langle f_1, f_2 \rangle"'] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.6 - Diagrama do produto para apenas dois objetos

cada pr_i é chamado um morfismo projeção.

Na categoria SET, dos conjuntos, o *produto* coincide com o produto cartesiano.

3.5.3 Proposição

Em qualquer categoria se o produto existe ele é único. Ou seja, se $(P, (pr_i))$ e $(P', (pr'_i))$ são ambos o produto de $\{X_i | i = 1, \ldots, n\}$, então existe um único isomorfismo p tal que o diagrama abaixo comuta.

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "pr_i"] \arrow[dd, "p"'] & \\
& X_i \\
P' \arrow[ur, "pr'_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.7 - Diagrama da prova da Proposição 3.5.3

prova: A prova é feita para $i = 1, 2$. Considere o diagrama abaixo

$$
\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr'_1"] \arrow[dd, dashed, shift left, "p'"] & \\
X_1 & & X_2 \\
& P' \arrow[ul, "pr_2"] \arrow[ur, "pr'_2"'] \arrow[uu, dashed, shift left, "p"] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.8 - Diagrama da prova da Proposição 3.5.3

como P é um produto é possível achar um único $p : P' \longrightarrow P$ tal que

(a) $pr_1 \circ p = pr'_1$ e $pr_2 \circ p = pr'_2$. Como P' também é um produto existe um único $p' : P \longrightarrow P'$ tal que

(b) $pr'_1 \circ p' = pr_1$ e $pr'_2 \circ p = pr_2$. Agora considere o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
X_1 & & X_2 \\
 & P \arrow[ul, "pr_1"] \arrow[ur, "pr_2"'] \arrow[uu, dashed, "q"] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.9 – Diagrama da prova da Proposição 3.5.3

Como P é um produto existe um q para o qual esse diagrama comuta. É claro que $q = id_P$. Mas as equações (a) e (b) nos diz que $pr_i \circ p \circ p' = pr_i$. Portanto $q = p \circ p'$. Como q é único segue que $p \circ p' = id_P$. O mesmo argumento, porém trocando P por P' nos diz que

$$p' \circ p = id_{P'}.$$

Logo p é um isomorfismo cuja inversa é p'.

□

3.5.4 Proposição

Em qualquer categoria, o produto de uma família vazia é o mesmo conceito que o de objeto terminal, enquanto se $i = 1, id : X \longrightarrow X$ é o produto.

Prova: Considere uma família vazia. Um produto é um objeto equipado com uma família vazia (pr), isto é, P é um objeto com nenhuma outra estrutura. A propriedade satisfeita por P é que se Y é qualquer outro objeto com nenhuma estrutura, então existe uma única função $f : Y \longrightarrow P$ com nenhuma condição a mais. Isto é o mesmo que a definição de objeto terminal. A segunda afirmativa é imediata do diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "id"] & X_i \\
Y \arrow[u, "f_i"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.10 - Diagrama da prova da Proposição 3.5.4

Diz-se que uma categoria tem produto se toda família finita de objetos tem produto. Pela proposição anterior qualquer categoria que tem produto tem objeto terminal.

O dual da noção de produto é o de *co-produto* ou *soma disjunta* de objetos, o qual pelo princípio da dualidade pode ser definido como segue.

3.5.5 Definição: Coproduto

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $\{X_i, |i = 1, \ldots, n\}$ uma família finita de objetos de $\mathcal{C}$. O *co-produto* de $\{X_i|i=1,\ldots,n\}$ é o par $(\oplus X_i, (in_i)), i=1,\ldots,n$, onde $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e (in_i) é tal que para cada $i=1,\ldots,n, in_i : X_i \longrightarrow X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ é um morfismo (injeções) tal que $(\oplus X_i, (in_i))$ $i=1,\ldots,n$ é o produto em $\mathcal{C}^{op}$.

Isto faz sentido pois em $\mathcal{C}^{op}, in_i$ tem a forma

$$\oplus X_i \overset{in_i}{-\!\!<} X_i$$

dado $f_i : X_i \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ tem-se

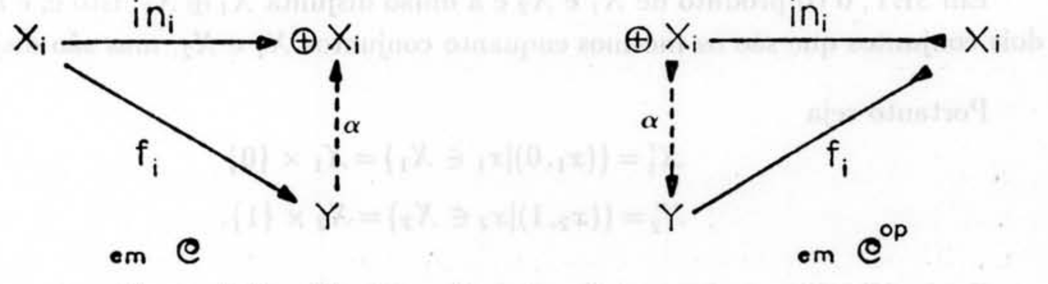


Figura 3.11 - Diagrama do co-produto, caso geral

O único α tal que $\alpha \circ in_i = f_i$ será denotado por $[f_i|i=1,\ldots,n]$.

No caso particular de dois objetos X_1 e X_2 de C pode-se dar a seguinte definição.

O *co-produto* ou *soma disjunta* dos objetos X_1 e X_2, denotado $X_1 \oplus X_2$ é um par $(X_1 \oplus X_2, (in_1, in_2))$, onde $in_1 : X_i \longrightarrow X_1 \oplus X_2$ são injeções tal que para quaisquer $f : X_1 \longrightarrow Y$ e $g : X_2 \longrightarrow Y$ existe uma única $[f,g] : X_1 \oplus X_2 \longrightarrow Y$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "in_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & X_1 \oplus X_2 \arrow[d, "{[f_1,f_2]}"] & X_2 \arrow[l, "in_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.12 - Diagrama do co-produto, caso de dois objetos

ou seja, $[f_1, f_2] \circ in_1 = f_1, [f_1, f_2] \circ in_2 = f_2$. $[f_1, f_2]$ é chamado o co-produto de f_1 e f_2 com respeito as injeções in_1 e in_2.

Usando o princípio da dualidade pode-se enunciar o seguinte resultado

3.5.6 Proposição

(i) Em qualquer categoria, co-produtos são únicos a menos de isomorfismo

(ii) O co-produto da família vazia é o mesmo conceito que o de objeto inicial.

Em SET, o co-produto de X_1 e X_2 é a união disjunta $X_1 \oplus X_2$, isto é, é a união de dois conjuntos que são os mesmos enquanto conjuntos X_1 e X_2, mas são disjuntos.

Portanto seja

$$X_1' = \{(x_1, 0)|x_1 \in X_1\} = X_1 \times \{0\}$$
$$X_2' = \{(x_2, 1)|x_2 \in X_2\} = X_2 \times \{1\}.$$

Então $X_1' \cap X_2' = \phi$. Agora defina $X_1 \oplus X_2 = X_1' \cup X_2'$. A injeção $in_1 : X_1 \longrightarrow X_1 \oplus X_2$ é definida por $in_1(x) = (x, 0)$, enquanto $in_2 : X_2 \longrightarrow X_1 \oplus X_2$ é dada por $in_2(y) = (y, 1)$.

Dados os conjuntos A e B em SET é possível formar a coleção $(A \longrightarrow B)$ de todas as funções de A em B. Para caracterizar $(A \longrightarrow B)$ em termos de morfismo, associa-se a $(A \longrightarrow B)$ um morfismo especial $ev : (A \longrightarrow B) \times A \longrightarrow B$ definida por $ev(f,x) = f(x) \cdot ev$ é chamada *função de avaliação*.

A descrição categórica de $(A \longrightarrow B)$ vém do fato de que ev goza de uma propriedade universal dentre todas as funções da forma $C \times A \longrightarrow B$.

3.5.7 Proposição

Dado qualquer função $g : C \times A \longrightarrow B$ existe uma única função $\hat{g} : C \longrightarrow (A \longrightarrow B)$ tal que o diagrama abaixo comuta.

Prova:

$$\begin{tikzcd}
(A \longrightarrow B) \times A \arrow[dr, "ev"] & \\
& B \\
C \times A \arrow[uu, dashed, "\hat{g} \times id_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $\hat{g} \times id_A : C \times A \longrightarrow (A \longrightarrow B) \times A$ tal que

$$\hat{g} \times id_A(c,a) = (g(c), id_A(a)) = (\hat{g}(c), a) = (g_c, a)$$

Figura 3.13 – Diagrama da prova da Proposição 3.5.7 □

A idéia por trás da definição de $\hat{g}$ é que a ação de g faz com que um c particular determine uma função de $A \longrightarrow B$ fixando o primeiro elemento dos argumentos de g em C, e permitindo os segundos elementos percorrer A. Em outras palavras, para cada $c \in C$ defina

$$g_c : A \longrightarrow B \text{ por } g_c(a) = g(c,a), \text{ para cada } a \in A.$$

$\hat{g} : C \longrightarrow (A \longrightarrow B)$ pode, agora, ser definida por $\hat{g}(c) = g_c$ para qualquer $c \in C$. Para qualquer $(c,a) \in C \times A$ tem-se

$$ev(\hat{g}(c), a) = g_c(a) = g(c,a)$$

e portanto o diagrama comuta.

Mas exigir que o diagrama comute, isto é, que $ev(\hat{g}(c), a) = g(c,a)$, significa que $\hat{g}(c)$ deve ser uma função que para a entrada a dá saída $g(c,a)$, ou seja, $\hat{g}(c)$ deve ser g_c, como acima.

□

Abstraindo essa situação é possível se dar a seguinte definição.

3.5.8 Definição: Exponenciação

A categoria $\mathcal{C}$ tem *exponenciação* se para qualquer A, B pertencentes a $obj(\mathcal{C})$ existem o produto $A \times B$, o objeto $(A \longrightarrow B)$ e um morfismo $ev : (A \longrightarrow B) \times A \longrightarrow B$, chamado *avaliação*, tal que para qualquer objeto $c \in obj(\mathcal{C})$ e $g \in Mor_{\mathcal{C}}(C \times A, B)$ existe um único morfismo $\hat{g} : C \longrightarrow (A \longrightarrow B)$ de modo que o diagrama abaixo comuta, isto é, existe um único $\hat{g} : C \times A \longrightarrow B$ tal que $ev \circ (\hat{g} \times id_A) = g$

$$\begin{tikzcd}
{[A \longrightarrow B] \times A} \arrow[dr, "ev"] & \\
& B \\
C \times A \arrow[uu, dashed, "\hat{g} \times id_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

A atribuição de $\hat{g}$ para g estabele uma bijeção

$$Mor_{\mathcal{C}}(C \times A, B) = Mor_{\mathcal{C}}(C, (A \longrightarrow B))$$

Figura 3.14 – Diagrama da exponenciação

entre a família dos morfismos de $C \times A \longrightarrow B$ e a família daqueles de $C \longrightarrow (A \longrightarrow B)$. Para $\hat{g} = h$, $ev \circ (\hat{g} \times id_A) = ev \circ (\hat{h} \times id_A)$, isto é, $g = h$, o que mostra que a atribuição é injetiva. Para ver que ela também é sobrejetiva, tome $h : C \longrightarrow (A \longrightarrow B)$ e defina $g = ev \circ (h \times id_A)$. Pela unicidade de $\hat{g}$ segue que $h = \hat{g}$. Dois morfismos (como g e $\hat{g}$) relacionados desta maneira bijetivamente são adjuntos (exponenciais) um do outro.

3.5.9 Definição: Categoria Cartesiana e Bicartesiana Fechada

Uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se *cartesiana fechada* (CCF) se

(i) $\mathcal{C}$ tem objeto terminal

(ii) $\mathcal{C}$ tem produtos (finitos)

(iii) $\mathcal{C}$ tem exponenciação. Se além disso $\mathcal{C}$ possui

(iv) co-produtos (finitos) e, consequentemente objeto inicial, $\mathcal{C}$ diz-se uma categoria bicartesiana fechada (CBF). SET é uma categoria bicartesiana fechada. Defina $(A \longrightarrow B)$ como sendo o conjunto de todas as funções de A em B. Defina $ev(g, c) = g(c)$. A função (única) $\hat{g}$ é dada por $\hat{g}(c)(a) = g(c, a)$.

3.6 CPO Como uma Categoria Bicartesiana Fechada

O objetivo desta seção é mostrar que a categoria CPO, das ordens parciais completas e funções contínuas é uma categoria bicartesiana fechada. Será mostrado, também, um teorema de ponto fixo para *cpo's*.

3.6.1 Definição: Soma Disjunta ou Co-Produto de *cpo's*

Sejam $(D_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ e $(D_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$ *cpo's*. A *soma* disjunta de D_1 e D_2, denotado $D = D_1 \oplus D_2$, é o *cpo* $(D, \sqsubseteq, \perp)$ definido como segue:

$$
\begin{array}{rcl}
\perp & = & \phi \\
D & = & D_1 \times \{0\} \cup D_2 \times \{1\} \cup \{\perp\} \quad \text{e} \quad \sqsubseteq = \{(\perp, d) | d \in D\} \cup \\
 & & \cup \{((x,0),(y,0)) | x, y \in D_1, x \sqsubseteq_1 y\} \cup \{((x,1),(y,1)) | x, y \in D_2 \text{ e } x \sqsubseteq_2 y\}.
\end{array}
$$

Portanto, o conjunto base da soma é a união disjunta dos conjuntos base D_1 e D_2 acrescentado de um novo bottom. A ordem é essencialmente a união disjunta de $\sqsubseteq_1$ e $\sqsubseteq_2$.

3.6.2 Proposição

Sejam $(D_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ e $(D_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$ *cpo's* e $(D_1 \oplus D_2, \sqsubseteq, \perp)$ a soma disjunta de D_1 e D_2. Então,

(a) $(D, \sqsubseteq, \perp)$ é um *cpo*

(b) As injeções $in_1 : D_1 \longrightarrow D_1 \oplus D_2$ e $in_2 : D_2 \longrightarrow D_1 \oplus D_2$ definidas por $in_1(x) = (x, 0)$ e $in_2(y) = (y, 1)$, respectivamente, são funções contínuas

(c) O par $(D, (in_1, in_2))$ satisfaz a seguinte condição:

Seja C um *cpo*, $f_1 : D_1 \longrightarrow C$ e $f_2 : D_2 \longrightarrow C$ funções contínuas. Então existe uma função contínua $f : D \longrightarrow C$ tal que $f_1 = f \circ in_1, f_2 = f \circ in_2$ e $f(\perp) = \perp_2$.

Prova: (a) D é obviamente um *cpo*. Agora se $X \subseteq D$ é um conjunto dirigido, então $X = X_1 \cup X_2$, onde $X_1 \subseteq D_1$ e $X_2 \subseteq D_2$ são dirigidos. Logo X tem supremo, pois D_1 e D_2 são *cpo's*.

(b) Imediata

(c) Basta observar o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, "in_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & D_1 \oplus D_2 \arrow[d, dashed, "f"] & D_2 \arrow[l, "in_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.15 – Diagrama da prova da Proposição 3.6.2

Defina $f = [f_1, f_2]$ com $f(x, 0) = f_1(x), f(y, 1) = f_2(y)$.

□

3.6.3 Definição: Produto

Sejam $(D_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ e $(D_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$ *cpo's*. O *produto* de D_1 e D_2, denotado $D_1 \times D_2$, é definido como segue:

$$\perp = (\perp_1, \perp_2); (x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \sqsubseteq_1 x_2 \text{ e } y_1 \sqsubseteq_2 y_2.$$

3.6.4 Proposição

Seja $(D, \sqsubseteq, \perp)$ o produto de $(D_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ e $(D_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$. Então

(a) D é um *cpo*

(b) As projeções $pr_i : D_1 \times D_2 \longrightarrow D_i$ $(i = 1, 2)$ são funções contínuas

(c) O par $(D, (pr_1, pr_2))$ satisfaz a seguinte propriedade:

Se $(C, \sqsubseteq, \perp)$ é um *cpo* e $g_1 : C \longrightarrow D$ e $g_2 : C \longrightarrow D$ são funções contínuas, então existe uma única função $g : C \longrightarrow D$ tal que $g_1 = pr_1 \circ g$ e $g_2 = pr_2 \circ g$.

Prova: (a) $\sqsubseteq$ é obviamente uma ordem parcial sobre $D_1 \times D_2$ e $(\perp_1, \perp_2)$ é o bottom (1º elemento).

Seja $X \subseteq D_1 \times D_2$ dirigido. Então $\text{Sup } X = (\text{Sup } X_1, \text{Sup } X_2)$, onde $X_1 = \{x \in D_1 | \exists y \in D_2, (x, y) \in X\}$ e $X_2 = \{y \in D_2 | \exists x \in D_2, (x, y) \in X\}$.

Neste caso X é dirigido $\Leftrightarrow$ X_1 e X_2 são. Como D_1, D_2 são *cpo's*, X_1 e X_2 dirigidos possuem supremos. Logo X também possui. Ou seja, $(D, \sqsubseteq, \perp)$ é um *cpo*.

(b) D_1 e D_2 são espaços topológicos e $D_1 \times D_2$ possui a topologia produto, onde as projeções são funções contínuas.

(c) Basta observar o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
D_1 & D_1 \times D_2 \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] & D_2 \\
& C \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.16 - Diagrama da prova da Proposição 3.6.4

Defina $g = (f_1, f_2)$. Então $g_1(x) = pr_1 \circ g(x) = pr_1(g_1(x), g_2(x))$ e $g_2(x) = pr_2(g_1(x), g_2(x))$.

□

Sejam D_1, D_2 e D_3 espaços topológicos, $D = D_1 \times D_2$ e $f : D_1 \times D_2 \longrightarrow D_3$. Sejam $f_x : D_2 \longrightarrow D_3$ e $f_y : D_1 \longrightarrow D_3$ funções (chamadas seções ou projeções) obtidas de f fazendo-se x =constante, y =constante, respectivamente. Em geral, pode acontecer que f_x e f_y sejam contínuas num ponto x_0, y_0 respectivamente, e no entanto f não seja contínua em $(x_0, y_0) \in D_1 \times D_2$. Por exemplo, seja $\mathbb{R}^2$ com a topologia produto usual. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f_x e f_y são contínuas em $x=0$ e $y=0$, respectivamente, e f não é contínua em $(0,0)$.

De fato, uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua num ponto $x_0 = (x_1, \ldots, x_n)$ se e somente se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Agora,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f_y(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=k}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \tfrac{kx^2}{x^2+k^2} = 0 = f_y(0) \\ \lim_{y\to 0} f_x(y) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=k}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \tfrac{ky^2}{y^2+k^2} = 0 = f_x(0) \end{aligned}$$

No entanto,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=k}} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0.$$

Felizmente isso não acontece se D_1, D_2 e D_3 forem *cpo's* com a topologia de Scott e $D_1 \times D_2$ é o *cpo* produto. Esse é conteúdo da seguinte proposição.

3.6.5 Proposição:

Sejam $(D_i, \sqsubseteq_i, \perp_i)$ *cpo's* $(i=1,2,3)$ e $(D, \sqsubseteq, \perp)$ o *cpo* produto de D_1 e D_2.

(a) Seja $X \subseteq D$, dirigido, $X_1 = pr_1(X)$ e $X_2 = pr_2(X)$. Então

- X_1 e X_2 são dirigidos

- Para todo $y \in X_1 \times X_2$ existe $x \in X$ tal que $y \sqsubseteq x$

- Sup $X = (\text{Sup } X_1, \text{Sup } X_2) = \text{Sup } X_1 \times X_2$

(b) Seja $f : D_1 \times D_2 \longrightarrow D_3$ uma função, $f_x : D_2 \longrightarrow D_3$ e $f_y : D_1 \longrightarrow D_3$ suas seções como definidas acima. Então f é contínua $\Leftrightarrow$ f_x e f_y são contínuas.

Prova: (a) Seja $X \subseteq D_1 \times D_2$ dirigido. Para quaisquer $x_1, y_1 \in D_1$ tem-se: se $x_1, y_1 \in X_1$, então existem $x_2, y_2 \in X_2$ tal que $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$. Como X é dirigido existe $(z_1, z_2) \in X$ tal que $(x_1, x_2) \sqsubseteq (z_1, z_2)$ e $(y_1, y_2) \sqsubseteq (z_1, z_2)$. Portanto existe $z_1 \in X_1$ tal que $x_1 \sqsubseteq_1 z_1$ e $y_1 \sqsubseteq_1 z_1$. Logo X_1 é dirigido em D_1. De modo análogo se prova que X_2 é dirigido em D_2.

Seja $y = (y_1, y_2) \in D_1 \times D_2$, com $y \in X_1 \times X_2$. Então existem z_1, z_2 tal que $(z_1, y_2), (y_1, z_2) \in X$, pois $X_i = pr_i(X)(i=1,2)$. Como X é dirigido existe $(x_1, x_2) \in X$

com $(z_1, y_2) \sqsubseteq (x_1, x_2)$ e $(y_1, z_2) \sqsubseteq (x_1, x_2)$. Consequentemente existe $(x_1, x_2) \in X$ tal que $(y_1, y_2) \sqsubseteq (x_1, x_2)$. Isto prova a segunda afirmativa de (a). No sentido de provar a terceira afirmativa seja $(x_1, x_2) \in X$. Então $(x_1, x_2) \sqsubseteq (\mathrm{Sup}\ X_1, \mathrm{Sup}\ X_2)$. Logo $\mathrm{Sup}\ X \sqsubseteq (\mathrm{Sup}\ X_1, \mathrm{Sup}\ X_2)$. Tome (y_1, y_2) um majorante de X. Então (y_1, y_2) é um majorante de $X_1 \times X_2$ pela segunda afirmativa. Portanto, y_i é um majorante de X_i, isto é, $\mathrm{Sup} X_i \sqsubseteq y_i$ $(i = 1, 2)$. Por conseguinte, $(\mathrm{Sup}\ X_1, \mathrm{Sup}\ X_2)$ é o supremo de X. Trocando X por $X_1 \times X_2$ obtém-se que $(\mathrm{Sup}\ X_1, \mathrm{Sup}\ X_2)$ é supremo de $X_1 \times X_2$.

(b) ($\Rightarrow$) Suponha que f é contínua e seja $x \in D_1$. Seja $Y \subseteq D_2$ dirigido. Então $\{x\} \times Y$ é dirigido e $f_x(\mathrm{Sup}\ Y) = f(x, \mathrm{Sup}\ Y) = f(\mathrm{Sup}\ (\{x\} \times Y)) = \mathrm{Sup}\ f(\{x\} \times Y) = \mathrm{Sup}\ f_x(Y)$. Analogomente se prova a continuidade de f_y.

($\Leftarrow$) Suponha que f_x e f_y são contínuas para todo $x \in D_1$ e $y \in D_2$. Seja $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in D_1 \times D_2$ tal que $(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2)$.

Então, $f(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_2) \sqsubseteq_2 f_{x_1}(y_2) = f(x_1, y_2) = f_{y_2}(x_1) \sqsubseteq_1 f_{y_2}(y_1) = f(y_1, y_2)$. Logo f é monotônica e consequentemente, se X é dirigido em $D_1 \times D_2$ $f(X)$ também é. Seja $X \subseteq D_1 \times D_2$ dirigido. Pelo ítem (a) $X_1 \times X_2$ também é dirigido e para todo $z \in f(X_1 \times X_2)$ existe algum $y \in f(X)$ com $z \sqsubseteq y$. Portanto, $\mathrm{Sup}\ f(X) = \mathrm{Sup}\ f(X_1 \times X_2)$. Fazendo $z = \mathrm{Sup}\ X_2$ tem-se

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{Sup}\ X) &= f(\mathrm{Sup}\ X_1, z) \quad \text{(por (a))}\\
&= f_z(\mathrm{Sup}\ X_1) = \mathrm{Sup} f_z(X_1) \quad \text{(pela continuidade de } f_z)\\
&= \mathrm{Sup}\{f(x, z) | x \in X_1\} = \mathrm{Sup}\{f_x(\mathrm{Sup}\ X_2) | x \in X_1\} =\\
&= \mathrm{Sup}\{\mathrm{Sup}\ f_x(X_2) | x \in X_1\} \quad \text{(pela continuidade de } f_x)\\
&= \mathrm{Sup}\{\mathrm{Sup}\ f(\{x\} \times X_2) | x \in X_1\} = \mathrm{Sup}(X_1 \times X_2) = \mathrm{Sup}\ f(X).
\end{aligned}$$

Logo, f é contínua.

□

Sejam $(D_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ e $(D_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$ *cpo's*. A exponenciação ou *espaço de funções*, $(D, \sqsubseteq, \perp)$, de D_1 em D_2 é definido como segue:

$D = \{f : D_1 \longrightarrow D_2 | f$ é função contínua$\}$; $\perp(x) = \perp_2$, para todo $x \in D_1$; $f \sqsubseteq g \Leftrightarrow f(x) \sqsubseteq_2 g(x)$ para todo $x \in D_1$.

Neste caso a exponenciação é denotado por $[D_1 \longrightarrow D_2]$ em vez de$(D_1 \longrightarrow D_2)$.

3.6.6 Proposição

Sejam $(D_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ e $(D_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$ *cpo's*. Então o espaço de funções contínuas $([D_1 \longrightarrow D_2], \sqsubseteq, \perp)$ é um *cpo*, onde $(\text{Sup } F)(x) = \text{Sup}\{f(x) | f \in F\}$ para qualquer $x \in D_1$ e qualquer conjunto dirigido $F \subseteq [D_1 \longrightarrow D_2]$.

Prova: É claro que $([D_1 \longrightarrow D_2], \sqsubseteq, \perp)$ é uma ordem parcial com primeiro elemento $\perp$, pois $\perp$ é uma função contínua. Suponha que $F \subseteq [D_1 \longrightarrow D_2]$ é dirigido. Defina $h : D_1 \longrightarrow D_2$ por $h(x) = \text{Sup}\{f(x) | f \in F\}$.

A função h está bem definida pois $\{f(x) | f \in F\}$ é dirigido para todo $x \in D_1$. Se $X \subseteq D_1$ é dirigido, $h(X)$ é claramente dirigido. Daí Sup $h(X)$ existe, pois D_2 é um *cpo*. Além disso,

$$\begin{aligned} h(\text{Sup } X) &= \text{Sup}\{f(\text{Sup } X) | f \in F\} = \text{Sup}\{\text{Sup } f(X) | f \in F\} \text{ (pois } F \subseteq [D_1 \longrightarrow D_2]) \\ &= \text{Sup}\{f(x) | f \in F, x \in X\} = \text{Sup}\{\text{Sup}\{f(x) | f \in F\} | x \in X\} = \\ &= \text{Sup}\{h(x) | x \in X\} = \text{Sup } h(X). \text{ Logo } h \text{ é contínua.} \end{aligned}$$

Seja $g \in [D_1 \longrightarrow D_2]$ tal que para todo $f \in F, f \sqsubseteq g$. então para todo $f \in F, f(x) \sqsubseteq_2 g(x), \text{Sup}\{f(x) | f \in F\} \sqsubseteq_2 g(x), h(x) \sqsubseteq_2 g(x)$ para todo $x \in D_1$, portanto, $h = \text{Sup } F$. Logo, D é um *cpo* e $(\text{Sup}F)(x) = \text{Sup}\{f(x) | f \in F\}$.

□

3.6.7 Proposição

Sejam $(D_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ e $(D_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$ *cpo's*. A função de avaliação $ev : [D_1 \longrightarrow D_2] \times D_1 \longrightarrow D_2$ definida por $ev(f, x) = f(x)$ é uma função contínua.

Prova: Tendo em vista a proposição 3.6.5 (b) é suficiente mostrar que as seções de ev são funções contínuas.

Seja $f \in [D_1 \longrightarrow D_2]$. Então $ev_f(x) = ev(f, x) = f(x)$ para todo $x \in D_1$. Portanto, ev_f é contínua, pois $ev_f = f$.

Seja $x \in D_1$, $f_1, f_2 \in [D_1 \longrightarrow D_2]$ e $f_1 \sqsubseteq f_2$. Então, $ev_x(f_1) = f_1(x) \sqsubseteq_2 f_2(x) = ev_x(f_2)$, portanto ev_x é monotônica e consequentemente preserva conjuntos dirigidos.

Seja $F \subseteq [D_1 \longrightarrow D_2]$ dirigido. Então, $\text{Sup}(ev_x(F)) = \text{Sup}\{f(x) | f \in F\} = (\text{Sup } F)(x) = ev_x(\text{Sup } F)$. Logo ev_x é contínua. Pela Proposição 3.6.5 (b), ev é contínua.

$\square$

3.6.8 Proposição

Sejam $(D_i, \sqsubseteq_i, \perp_i)$ *cpo's* $(i = 1, 2, 3)$ e $f : D_1 \times D_2 \longrightarrow D_3$ uma função contínua, isto é, $f \in [D_1 \times D_2 \longrightarrow D_3]$. Seja *curry* $(f) : D_1 \longrightarrow [D_2 \longrightarrow D_3]$ definida por *curry* $(f)(x) = f_x$, com *curry* $(f)(x)(y) = f_x(x, y)$. Então

(a) *curry* $(f) \in [D_1 \longrightarrow [D_2 \longrightarrow D_3]]$, isto é, *curry* (f) é uma função contínua.

(b) A função $H : f \longmapsto curry\ (f)$ é uma função contínua, isto é, $H \in [[D_1 \times D_2 \longrightarrow D_3] \longrightarrow [D_1 \longrightarrow [D_2 \longrightarrow D_3]]]$.

(c) *curry* (f) é a única função contínua que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{tikzcd}
{[D_1 \longrightarrow D_2] \times D_1} \arrow[dr, "ev"] & \\
& D_3 \\
D_1 \times D_2 \arrow[uu, dashed, "curry(f) \times id_{D_2}"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.17 - Diagrama da prova da Proposição 3.6.8

Prova: (a) Como *curry* $(f)x = f_x$ para cada $x \in D_1$, então imagem $(curry\ (f)) \subseteq [D_2 \longrightarrow D_3]$, pela Proposição 3.6.5 (b). *curry* (f) preserva conjunto dirigido, pois *curry* $(f)(x)y = ev(f_x, y) = f_x(y)$ e ev sendo contínua preserva conjunto dirigido. Seja $X \subseteq D_1$ dirigido. Então $curry(f)(\text{Sup } X)y = ev(f_{\text{Sup } X}, y) = f_{\text{Sup } X}(y) = f(\text{Sup } X, y) = \text{Sup}_{x \in X} f(x, y) = \text{Sup}_{x \in X}(f(x, y))$. Portanto, $curry(f)(\text{Sup } X)y = \text{Sup}(curry\ (f)(X))y$. Logo, *curry* (f) é uma função contínua.

(b) Seja $F \subseteq [D_1 \times D_2 \longrightarrow D_3]$ dirigido. Então $H(\text{Sup } F)y = (curry(\text{Sup } F))y = \text{Sup}_x F(y) = (\text{Sup } F)(x, y) = \text{Sup}_{f \in F}\{f(x, y)\} = \text{Sup}_{f \in F}\{f_x(y)\} = \text{Sup}_{f \in F}(curry\ (f)\ (x)y) = \text{Sup } H(F)y$. Logo H é contínua.

(c) A unicidade do diagrama é equivalente a seguinte equação

$$curry\ (ev \circ (h \times id_{D_2})) = h. \qquad (*)$$

Para ver isto suponha que a equação se verifica e h satisfaz $f = ev \circ (h \times id_{D_2})$. Então $curry\ (f) = curry\ (ev \circ (h \times id_{D_2})) = h$, portanto a unicidade é satisfeita. Por outro lado, se $curry(f)$ é unicamente determinado pelo diagrama acima, então a equação $(*)$ segue imediatamente da comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[D_1 \to D_2] \times D_1} \arrow[dr, "ev"] & \\
& D_3 \\
D_1 \times D_2 \arrow[uu, dashed, "h \times id_{D_2}"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.18 - Diagrama da prova da Proposição 3.6.8

para $f = ev \circ (h \times id_{D_2})$.

□

Os resultados obtidos nesta seção para a categoria CPO permite enunciar o seguinte corolário.

3.6.9 Corolário

A categoria CPO é uma categoria bicartesiana fechada.

□

É possível, agora, enunciar e provar o resultado fundamental deste capítulo. Este resultado, conhecido como *Teorema do Ponto Fixo*, estabelece que toda função contínua de um *cpo* nele mesmo, possui um menor ponto fixo. É difícil exagerar a importância deste teorema em matemática computacional. Dentre as muitas aplicações deste teorema se destacam a garantia de soluções de equações em *cpo's* e a garantia de convergência de processos iterativos.

3.6.10 Definição: Ponto Fixo

Seja $(D, \sqsubseteq, \perp)$ um *cpo*. $x \in D$ diz-se um *ponto fixo* da função $f : D \longrightarrow D$ se $f(x) = x$.

3.6.11 Teorema: do Ponto Fixo

Seja $(D, \sqsubseteq, \perp)$ um *cpo* e $f : D \longrightarrow D$ um função contínua. Então

(a) f tem um menor ponto fixo, isto é, existe $x \in D$ tal que $f(x) = x$ com a propriedade de que se existe outro y tal que $f(y) = y$, então $x \sqsubseteq y$.

(b) A função $Fix : [D \longrightarrow D] \longrightarrow D$ tal que a cada função contínua f associa o seu ponto fixo, $Fix\ (f)$, é contínua.

Prova: (a) Como f é contínua, f é monotônica. Logo, $\perp \sqsubseteq f(\perp)$ (que é sempre verdadeiro num *cpo*) acarreta

$$f(\perp) \sqsubseteq f(f(\perp)) = f^2(\perp);\ f^2(\perp) \sqsubseteq f^3(\perp), \ldots$$

Portanto,

$$x_f = \mathrm{Sup}_n\ f^n(\perp)$$

existe. Agora, por continuidade de f, $f(x_f) = \mathrm{Sup}_n f^{n+1}(\perp) = x_f$, isto é, x_f é um ponto fixo de f. Suponha que existe y tal que $f(y) = y$. Então segue por monotonicidade que $f^n(\perp) \sqsubseteq f^n(y) = y$. Portanto

$$x_f = \mathrm{Sup}_n\ f^n(\perp) \sqsubseteq y.$$

(b) A função $Fix\ (f)x = x_f = \mathrm{Sup}_n f^n(\perp)$ é contínua pela Proposição 3.6.7 e o fato de que se $\{f_i\} \subseteq [D \longrightarrow D]$ é uma família dirigida de funções contínuas e

$$f(x) = \mathrm{Sup}_i\ f_i(x)$$

então f é bem definida e contínua. A prova desta afirmação está contida na demonstração da Proposição 3.6.6.

□

4 A CATEGORIA BICARTESIANA FECHADA DA MATEMÁTICA INTERVALAR

O objetivo principal desse capítulo é apresentar a Análise Intervalar como uma categoria bicartesiana fechada e como tal ela é modelo do cálculo lambda com tipos. Na Seção 1 são generalizados alguns resultados obtidos no Capítulo 1 e definido a categoria DOM. A Seção 2 mostra que essa categoria possui um objeto reflexivo e portanto ela é, também, um modelo do cálculo lambda sem tipos. Esta seção é baseado em [BAR 84], [PAU 87], [SEL 86]. A seção 3 explora o fato da categoria DOM ser, também, uma categoria de espaços topológicos, obtendo assim novas versões de resultados importantes como, por exemplo, o Teorema da Extensão de Tietze. As Seções 1 e 3 foram inspiradas em trabalhos como [GIE 80], [PLO 80], [NAC 65], [SCO 72a], [SCO 82a].

4.1 A Categoria DOM: Uma Categoria Bicartesiana Fechada (CBF)

Seja $(\mathcal{B}, \sqsubseteq, \ll, \perp_0)$ uma ordem parcial enumerável, com ordem forte $\ll$ e primeiro elemento $\perp_0$. Definindo *Corte de Dedekind* sobre $\mathcal{B}$, como na Definição 2.2.1, os Teoremas 2.2.4 e 2.5.1 podem ser generalizados como segue.

4.1.1 Teorema

O completamento por cortes de Dedekind, $(\overline{\mathcal{B}}, \sqsubseteq, \ll, \perp)$, é um *cpo* contínuo, cuja base é $\mathcal{B}$, e cuja ordem forte de $\overline{\mathcal{B}}$ extende a de $\mathcal{B}$.

Prova: Exatamente igual as provas dos Teoremas 2.2.4 e 2.5.1 combinadas.

□

4.1.2 Corolário

Seja D um *cpo* contínuo com base $\mathcal{B}$. Então para cada $x \in D$, o conjunto $\downarrow x = \{b \in \mathcal{B} | b << x\}$ é dirigido e $x = \text{Sup} \downarrow x$. Além disso,

$$x = y \Leftrightarrow \downarrow x = \downarrow y.$$

□

No sentido de generalizar o Teorema 2.3.6, um dos resultados fundamentais do Capítulo 2, é dada a seguinte definição.

4.1.3 Definição: Conjunto Consistentemente Completo

Seja $(A, \sqsubseteq)$ uma ordem parcial.

(a) A diz-se *consistentemente completo* (c-completo) se Sup X existe para todo $X \subseteq A$ consistente e não vazio.

(b) A diz-se finitamente consistentemente completo (fc-completo) se Sup X existe para todo $X \subseteq A$, finito, consistente e não-vazio.

Lembre-se que um conjunto não-vazio $X \subseteq A$ é consistente se existe $a \in A$ tal que $x \sqsubseteq a$ para todo $x \in X$.

O teorema a seguir fornece um critério muito simples para verificar se um *cpo* contínuo, com base enumerável, é consistentemente completo.

4.1.4 Teorema

Seja $(D, \sqsubseteq, <<, \bot)$ um *cpo* contínuo com base $\mathcal{B}$. Então (a),(b),(c) são equivalentes:

(a) D é c-completo

(b) D é fc-completo

(c) $\mathcal{B}$ é fc-completo

Além disso, se D é c-completo, então $\sqcup_0 E = \sqcup E \in \mathcal{B}$ para qualquer subconjunto $E \subseteq \mathcal{B}$, finito, consistente e não-vazio, onde $\sqcup_0$ é a operação de supremo sobre $\mathcal{B}$.

Prova: (a) $\Rightarrow$ (b) óbvio

(b) $\Rightarrow$ (c). Suponha que D é fc-completo. Seja $E \subseteq \mathcal{B}$ finito e consistente em $\mathcal{B}$. Então E é consistente em D. Portanto Sup $E = x$ para algum $x \in D$. Logo $e \sqsubseteq x$ para todo $e \in E$. Como $\downarrow x = \{b \in \mathcal{B} | b << x\}$ é dirigido, existe $b \in \downarrow x$ com $e \sqsubseteq b$ para todo $e \in E$. Logo $\sqcup E \sqsubseteq b \sqsubseteq x$. Isto mostra que $\sqcup E = b \in \mathcal{B}$. É claro que b é um majorante de E em $\mathcal{B}$. Como $\sqcup E \sqsubseteq \sqcup_0 E$ em qualquer caso, $b = \sqcup_0 E$. Consequentemente $\mathcal{B}$ é fc-completo e $\sqcup_0 E = \sqcup E \in \mathcal{B}$ para qualquer $E \subseteq \mathcal{B}$ consistente, finito.

(c) $\Rightarrow$ (a). Suponha que $\mathcal{B}$ é fc-completo. Seja $X \subseteq D$ majorado por $w \in D$. Defina $Z = \cup\{\downarrow x | x \in X\}$. Seja $E \subseteq Z$ finito. Então para todo $e \in E, e \sqsubseteq w$ e consequentemente, $E \subseteq \downarrow w$. Como $\downarrow w$ é dirigido, E é majorado por algum $b \in \downarrow w$, logo $\sqcup_0 E$ existe. Defina

$$Y = \{\sqcup_0 E | E \subseteq Z,\ E \text{ finito}\}.$$

Como $\sqcup_0 E_1 \sqsubseteq \sqcup_0(E_1 \cup E_2)$ e $\sqcup_0 E_2 \sqsubseteq \sqcup_0(E_1 \cup E_2)$, Y é dirigido. Como $b \sqsubseteq x \in X$ implica $b \in Z$ que implica $b \in Y$ tem-se que $\downarrow x \subseteq Y$ para qualquer $x \in X$. Portanto, $x = \sqcup \downarrow x \sqsubseteq \sqcup Y$ para qualquer $x \in X$. Logo, $\sqcup Y \in D$ é majorante de X. Seja w outro majorante de X. Então w é um majorante de $Z, \sqcup_0 E \sqsubseteq w$ para qualquer $E \subseteq Z$ finito. Portanto $\sqcup Y \sqsubseteq w$. Assim, $\sqcup Y$ é supremo de X.

□

4.1.5 Corolário

(i) Seja $(\mathcal{B}, \sqsubseteq, <<, \perp)$ uma ordem parcial, fc-completa, com ordem forte, $<<$, e primeiro elemento $\perp$. Então o completamento de Dedekind de $\mathcal{B}, (D, \sqsubseteq, <<, \perp)$, é um *cpo* contínuo c-completo, com base $\mathcal{B}$.

(ii) Seja $(\mathcal{B}, \sqsubseteq, \perp)$ uma ordem parcial, fc-completa com primeiro elemento $\perp$. Então o completamento por ideais de $\mathcal{B}, (\overline{\mathcal{B}}, \sqsubseteq, \perp)$, é um *cpo* algébrico c-completo com base $\mathcal{B}$.

□

4.1.6 Definição: Categorias dos Domínios e dos Domínios de Scott

(i) A categoria **DOM**, da matemática computacional, tem como objetos *cpo's* contínuos, *c*-completos e com base enumerável, e como morfismos as funções contínuas. Um objeto de DOM será chamado, simplesmente, de *domínio*.

(ii) A categoria **SDOM**, da computação, tem como objetos *cpo's* algébricos, *c*-completos e com base enumerável, e como morfismos funções contínuas. Um objeto de SDOM será chamado *domínio de Scott*.

Os Exemplos 2.1.11 todos pertencem a SDOM, enquanto $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ pertence a DOM.

O objetivo desta seção é mostrar que DOM, e consequentemente SDOM, é uma categoria bicartesiana fechada. Desse modo, DOM e SDOM são modelos do cálculo lambda com tipo.

Sejam D_1 e D_2 *cpo's*. Foi mostrado no capítulo anterior, que $D_1 \oplus D_2$ e $D_1 \times D_2$ são, também, *cpo's*. É imediato que se D_1 e D_2 são domínios com bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respectivamente, então $D_1 \oplus D_2$ e $(D_1 \times D_2)$, também, são domínios com bases $\mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$. Para ver isto basta tomar o completamento de Dedekind de $\mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, respectivamente. Com o objetivo de registrar o fato tem-se

4.1.7 Proposição

(i) Sejam $D_1, \ldots, D_n$ domínios com bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$, respectivamente. Então, $D_1 \oplus \cdots \oplus D_n$ e $D_1 \times \cdots \times D_n$ são, também, domínios com bases $\mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_n$ e $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$, respectivamente.

(ii) Sejam $D_1, \ldots, D_n$ domínios de Scott, com bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$, respectivamente. então $D_1 \oplus \cdots \oplus D_n$ e $D_1 \times \cdots \times D_n$, também, são domínios de Scott com bases $\mathcal{B} \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_n$ e $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$, respectivamente.

□

Sejam D_1 e D_2 domínios com bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respectivamente. Foi visto, no capítulo anterior, que $[D_1 \longrightarrow D_2]$, o conjunto de todas as funções contínuas de D_1 em D_2, quando munida da ordem definida anteriormente, é um *cpo*. É possível, agora, representar cada $f \in [D_1 \longrightarrow D_2]$ em termos de funções de $\mathcal{B}_1$ em $\mathcal{B}_2$? Embora cada elemento de $\mathcal{B}_1$ seja, por hipótese, finitamente representável, não existe nenhum motivo para que dada $f \in [D_1 \longrightarrow D_2]$ e $b_1 \in \mathcal{B}_1$, $f(b_1)$ seja finitamente representável, isto é, $f(b_1) \in \mathcal{B}_2$. De fato, para $f \in [\mathbb{I}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})]$ dada por $f(x) = e^x$, tem-se que $[0,1] \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$, mas $e^{[0,1]} \notin \mathbb{I}(\mathbb{Q})$. No entanto, como se verá oportunamente, $f : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ tal que $f(x) = e^x$ existe e é contínua. Isto motiva o seguinte procedimento: Seja $f \in [D_1 \longrightarrow D_2]$ e para $x \in D_1$, seja $a \in \mathcal{B}_1$ tal que $a << x$. Como $f(a)$ pode não está em $\mathcal{B}_2$, seja $b \in \mathcal{B}_2$ tal que $b << f(a)$. Então o par (a, b) pode ser uma primeira aproximação da função f. Aqui (a, b) para $a \in \mathcal{B}_1$ e $b \in \mathcal{B}_2$ tem o significado de que $b << f(a)$, isto é, afb. Esta informação é encapsulada pela *função escada*

$$(a \longrightarrow b), \text{ onde } (a \longrightarrow b)(x) = \begin{cases} b & \text{se } a << x \text{ ou } x = a \\ \bot, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É claro que um par somente é insuficiente para representar f, por isso deve-se aumentar o número de pares sem, no entanto, tornar esse número infinito. Admita-se, portanto, um conjunto finito de tais pares. O conteúdo de informação de $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ com respeito a função f será.

(1) $\qquad b_1 << f(a_1), \ldots, b_n << f(a_n)$, isto é, $a_1 f b_1, \ldots, a_n f b_n$.

Qual é a função escada correspondente a (1)? Em geral, não existe uma função escada que encapsule (1), mesmo considerando que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ seja consistente. No entanto se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ forem consistentemente completos $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ também é e portanto $F = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ tem um supremo (a, b) em $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, onde $a = \text{Sup}\{a_1, \ldots, a_n\}$ e $b = \text{Sup}\{b_1, \ldots, b_2\}$. Logo, a função $(a \longrightarrow b)$ encapsula a informação de F. Observe que a hipótese de que $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são *c*-completos é essencial.

Motivados na intuição acima mostra-se a seguir que o espaço das funções contínuas entre dois domínios também é um domínio.

4.1.8 Teorema

Sejam $(D_1, \sqsubseteq, <<, \bot)$ e $(D_2, \sqsubseteq, <<, \bot)$ domínios com bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ respectivamente. Então $([D_1 \longrightarrow D_2], \sqsubseteq, <<, \bot)$ como definido anteriormente também é um domínio.

Prova: Já se sabe que $[D_1 \longrightarrow D_2]$ é um *cpo*. Deve-se mostrar que ele é contínuo e c-completo, com base enumerável. Para isso defina

$S\mathcal{B} = \{(a \longrightarrow b) | a \in \mathcal{B}_1, b \in \mathcal{B}_2\}$, onde $(a \longrightarrow b) \in [D_1 \longrightarrow D_2]$ é a função escada definida por

$$(a \longrightarrow b)(x) = \begin{cases} b & \text{se } a << x \text{ ou } x = a \\ \perp, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pretende-se mostrar que $\mathcal{B} = \{\text{Sup } F | F \subseteq S\mathcal{B}, F \text{ não-vazio, finito e consistente}\}$ é uma base de $[D_1 \longrightarrow D_2]$ e consequentemente uma base enumerável. Além disso, as seguintes condições se verificam.

(a) $(a \longrightarrow b) << f \Leftrightarrow b << f(a)$, com $a \in \mathcal{B}_1$ e $b \in \mathcal{B}_2$ $f \in [D_1 \longrightarrow D_2]$

(b) Seja $F = \{(a_0 \longrightarrow b_0), \ldots, (a_n \longrightarrow b_n)\}$. Então as seguintes propriedades são equivalentes.

(i) Sup F existe

(ii) F é consistente (em $[D_1 \longrightarrow D_2]$)

(iii) Para todo $J \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$, se $\{a_i\}_{i \in J}$ é consistente, então $\{b_i\}_{i \in J}$ também é consistente.

(c) $(\text{Sup } F)(x) = \text{Sup}\{b_i | a_i << x\}$, se $F = \{(a_0 \longrightarrow b_0), \ldots, (a_n \longrightarrow b_n)\}$ e Sup F existe.

De fato, é claro que $(a \longrightarrow b)$ é uma função contínua para $a \in \mathcal{B}_1$ e $b \in \mathcal{B}_2$.

Para mostrar (a) suponha que $(a \longrightarrow b) << f$. Então $b = (a \longrightarrow b)(a) << f(a)$. Suponha que $b << f(a)$. Se $a << x$, então $(a \longrightarrow b)(x) = b << f(a) << f(x)$, caso contrário $(a \longrightarrow b)(x) = \perp << f(x)$.

Portanto, $(a \longrightarrow b)(x) << f(x)$ para todo $x \in D_1$.

Para mostrar (b) suponha que Sup F existe, então F é majorada. Suponha que $f \in [D_1 \longrightarrow D_2]$ é um majorante de F. Seja $a_i << x$ para todo $i \in J$. Então $b_i = (a_i \longrightarrow b_i)(x) << f(x)$ para todo $i \in J$ e consequentemente $f(x)$ é uma majorante de $\{b_i | i \in J\}$. Suponha (iii). Defina $h : D_1 \longrightarrow D_2$ por

$$h(x) = \text{Sup}\{f(x) | f \in F\}.$$

Então, $h(x) = \text{Sup}\{b_i | a_i << x, i \leq n\}$. Como D_2 é c-completo $h(x)$ existe. Seja $X \subseteq D_1$ dirigido. Então $h(\text{Sup}X) = \text{Sup}\{f(\text{Sup}(x)) | f \in F\} = \text{Sup}\{\text{Sup}\{f(x) | x \in X\} f \in F\} = \text{Sup}\{h(x) | x \in X\}$. Logo h é contínua. Além do mais h é uma majorante de F. Se g é outro majorante de F, então para qualquer x, $h(x) = \text{Sup}\{f(x) | f \in F\} \sqsubseteq g(x)$. Portanto Sup F existe e $h = \text{Sup } F$.

A propriedade (c) sai imediatamente das hipóteses e de (b). Até aqui foi provado (a),(b) e (c) e o fato de que o conjunto $\mathcal{B} \subseteq [D_1 \longrightarrow D_2]$ é bem definido. Deve-se mostrar, agora, que $\mathcal{B}$ é uma base. Seja $M_f = \{(a \longrightarrow b) | (a \longrightarrow b) << f\}$, para $f \in [D_1 \longrightarrow D_2]$. Então f é um majorante de M_f. Seja $g \in [D_1 \longrightarrow D_2]$ um outro majorante de M_f. Tem-se $b << f(a)$ acarreta $(a \longrightarrow b) << f$, então $(a \longrightarrow b) << g$ e consequentemente $b << g(a)$. Logo, $f(a) = \text{Sup}\{b | b << f(a)\} \sqsubseteq \text{Sup}\{b | b << g(a)\} = g(a)$, para qualquer $a \in \mathcal{B}_1$. Ou seja, $f \sqsubseteq g$ e $f = \text{Sup } M_f$. O conjunto M_f, em geral, não é dirigido. Como M_f é majorado por f, cada subconjunto finito $F \subseteq M_f$ é majorado e portanto Sup F existe assumindo que $[D_1 \longrightarrow D_2]$ é c-completo. Além disso,

$$f = \text{Sup}\{\text{Sup } F | F \subseteq M_f, F \text{ finito}, F \neq \phi\},$$

cada Sup F é um elemento de $\mathcal{B}$ e o conjunto $\{\text{Sup } F | F \subseteq M_f, \text{ finito}, F \neq \phi\}$ é dirigido. Portanto, $\mathcal{B}$ é uma base de $[D_1 \longrightarrow D_2]$. Só falta mostrar $[D_1 \longrightarrow D_2]$ é c-completo. Para isso usa-se o Teorema 4.1.4 e mostra-se que $\mathcal{B}$ é fc-completo. De fato, se $i = 1, \ldots, n$, seja $F_i \subseteq S\mathcal{B}$ finito e consistente. Seja $\{\text{Sup } F_i | i = 1, \ldots, n\}$ consistente. Então $\cup F_i$ é consistente e Sup $\{\cup F_i\} = \text{Sup}\{\text{Sup } F_i\}$.

□

4.1.9 Corolário

DOM e SDOM são categorias bicartesianas fechadas. Consequentemente modelos do cálculo lambda com tipo.

Prova: Proposição 4.1.7 e Teorema 4.1.8.

□

4.2 DOM e SDOM como Modelos do Cálculo Lambda sem Tipo

Uma categoria para ser modelo do cálculo lambda sem tipo precisa ser cartesiana fechada e possuir um objeto reflexivo [LAM 86]. Um objeto, D, de uma categoria é reflexivo se ele é isomorfo a seu próprio espaço de funções contínuas, isto é, $D = [D \longrightarrow D]$. Embora escreva-se o sinal de igualdade na equação anterior, em teoria dos domínios a igualdade significa isomorfismo. Observe que em teoria dos conjuntos a equação $A = (A \longrightarrow A)$, onde $(A \longrightarrow A)$ denota o conjunto de todas as funções de A em A, não pode ter solução pois, para qualquer conjunto A, a cardinalidade de $(A \longrightarrow A)$ é estritamente maior que a cardinalidade de A.

Numa categoria onde a equação $D = [D \longrightarrow D]$ tem solução, todo elemento de D pode ser visto como uma função e pode ser aplicada a si própria. As linguagens de programação possuem essa característica uma vez que um programa pode ter como argumento um outro programa.

A maneira mais natural de mostrar que a categoria DOM, e portanto SDOM, possui objeto reflexivo seria usar a linguagem das categorias, no entanto, com o intuito de evitar essa linguagem com mais profundidade, far-se-á a construção desse objeto, diretamente, a maneira de D. Scott [SCO 72a]. Como foi observado no capítulo 2, um domínio acrescentado de um elemento artificial $\top$, chamado topo, se torna um reticulado contínuo. D. Scott [SCO 72a] construiu um objeto reflexivo para a categoria cartesiana fechada dos reticulados contínuos. Isto já seria suficiente para garantir que a categoria DOM, da matemática computacional, possui um objeto reflexivo. Para se construir um objeto reflexivo em DOM acrescenta-se um topo a cada objeto de DOM tornando-os reticulados contínuos e em seguida efetua-se a construção do objeto como em [SCO 72a]. Finalmente retira-se o topo de cada objeto da categoria dos reticulados contínuos. Tirar o topo do objeto reflexivo corresponde a identificar cada par da forma $(x, \top)$, isto é, $x \sqsubseteq \top$, com x. O que resta é a categoria DOM com objeto reflexivo. No entanto é possível fazer diretamente a construção do objeto reflexivo em DOM agindo por analogia com a construção de [SCO 72a]. A seguir será feita essa construção com o objetivo, muito mais, de entender melhor as características desse objeto reflexivo.

4.2.1 Definição: Sistema Projetivo Inverso

Seja $D_0, D_1, \ldots, D_n, \ldots$ uma sequência de domínios e seja $f_i \in [D_{i+1} \longrightarrow D_i]$.

(i) A sequência (D_i, f_i) é chamada um *sistema projetivo* ou *sistema inverso* de domínios.

(ii) O *limite inverso* ou *limite projetivo* do sistema (D_i, f_i), cuja notação é $\overset{\lim}{\longleftarrow} (D_i, f_i)$ é a ordem parcial $(D_\infty, \sqsubseteq_\infty, <<_\infty, \perp_\infty,)$ com primeiro elemento $\perp_\infty$, e ordem forte $<<_\infty$, definidos por

$$D_\infty = \{x_0, x_1, \ldots)|x_i \in D_i \text{ e } f_i(x_{i+1}) = x_i\}, \ \perp_\infty = (\perp_0, \perp_1, \ldots, \ldots)$$

com $x_i, \perp_i \in D_i$.

$(x_0, x_1, \ldots) \sqsubseteq_\infty (y_0, y_1, \ldots) \Leftrightarrow x_i \sqsubseteq_i y_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots$ e analogamente para $<<_\infty$.

Identifica-se a sequência $(x_0, x_1, \ldots)$ com a função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \cup_i D_i$ tal que $x(i) = x_i \in D_i$ para todo i. Escreve-se $\overset{\lim}{\longleftarrow} D_i$ em lugar de $\overset{\lim}{\longleftarrow} (D_i, f_i), \sqsubseteq$ e $<<$ em lugar de $\sqsubseteq_i$ e $<<_i$, respectivamente.

4.2.2 Proposição

Seja (D_i, f_i) um sistema projetivo de domínios. Então $\overset{\lim}{\longleftarrow} D_i$ também é um domínio.

Prova: (a) $\overset{\lim}{\longleftarrow} D_i$ é um *cpo*. De fato, para mostrar isto seja $X \subseteq \overset{\lim}{\longleftarrow} D_i$ dirigido. Então o conjunto $\{x(i)|x \in X\}$ é dirigido para cada i. Seja $y_i = \text{Sup}\{x(i)|x \in X\}$. Então por continuidade de f_i, $f_i(y_{i+1}) = \text{Sup}\{f(x_{i+1})|x \in X\} = \text{Sup}\{x(i)|x \in X\} = y_i$. Logo $(y_1, y_2, \ldots) \in \overset{\lim}{\longleftarrow} D$ é o supremo de X. Isto mostra que $\overset{\lim}{\longleftarrow} D_i$ é um *cpo*.

(b) $\overset{\lim}{\longleftarrow} D_i$ é um *cpo* contínuo. De fato, seja $\mathcal{B}_i$ uma base de D_i para cada i. Então, porque D_i é um *cpo* contínuo, para cada i, tem-se $x_i = \text{Sup}\{b_i \in \mathcal{B}_i|b_i << x_i\}$. Portanto, para cada $y \in \overset{\lim}{\longleftarrow} D_i, y = (x_0, x_1, \ldots)$, $y = \text{Sup}\{(b_0, b_1, \ldots)\} \in \overset{\lim}{\longleftarrow} \{\mathcal{B}_i|(b_0, b_1, \ldots) <<_\infty y\}$. Logo, $\overset{\lim}{\longleftarrow} D_i$ é um *cpo* contínuo.

(c) Para mostrar que $\overset{\lim}{\longleftarrow} D_i$ é consistentemente completo usa-se o Teorema 4.1.4. Seja $x, y \in \overset{\lim}{\longleftarrow} D_i$, consistentes. Então, para cada i, x_i, y_i são consistentes em D_i. Como D_i é c-completo, $x_i \sqcup y_i$ existe em D_i. Logo, $x \sqcup y$ existe em $\overset{\lim}{\longleftarrow} D_i$.

□

4.2.3 Corolário

(i) O produto cartesiano de uma quantidade enumerável de domínios é um domínio.

(ii) O produto cartesiano de uma quantidade enumerável de domínios de Scott é um domínio de Scott.

□

4.2.4 Definição: Retrato

Seja D um domínio e $D \subseteq D'$ um subconjunto de D'. D diz-se um *retrato* de D' se existe uma função contínua $f \in [D' \longrightarrow D]$ tal que $f \circ f = f$ e $D = f(D')$. Neste caso f é chamada uma *retração* de D' sobre D.

4.2.5 Proposição

Seja D' um domínio com retrato D. Então D é um domínio cujos subconjuntos dirigidos tem os mesmos supremos que em D' e cuja topologia é a topologia do subespaço.

Prova: Suponha que D é um retrato de D' e seja $f : D' \longrightarrow D$ uma retração. Seja $X \subseteq D$ dirigido. Então X é dirigido como subconjunto de D' e $\mathrm{Sup}_{D'} X$ existe em D'. Agora,

$$\begin{aligned} f(x) = f(\mathrm{Sup}_{D'} X) &= \mathrm{Sup}_D\, f(X), \text{ pois } f \text{ é contínua} \\ &= \mathrm{Sup}_{D'}\, X, \text{ pois } X \subseteq D \text{ e } f \text{ é uma retração} \\ &= x. \end{aligned}$$

Desse modo, $x \in D$ e portanto $\mathrm{Sup}\ X \in D$. D *cpo* contínuo e $x \in D \Rightarrow x \in D'$. Portanto, $x = \mathrm{Sup}\{b \in \mathcal{B} | b << x\}$. Falta mostrar que $X \subseteq D \Rightarrow f(X) = X$. De fato,

$x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow f(f(x)) = f(x) \in f(f(X)) \Rightarrow x \in f(X)$, ou seja, $X \subseteq f(X)$. $x \in f(X) \Rightarrow f(x) \in f(f(X)) = f(X) \Rightarrow x \in X$, ou seja, $f(X) \subseteq X$. Logo, $f(X) = X$.

A base $\mathcal{B}$ de D é um subconjunto de $\mathcal{B}'$, a base de D'. Portanto $\mathcal{B}$ é enumerável.

Para mostrar que D é c-completo usa-se o Teorema 4.1.4, o fato de que $\mathcal{B}'$, a base de D', é fc-completa e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$.

□

Por outro lado a topologia coincide com a topologia do subespaço porque só existe uma topologia, a topologia de Scott, que faz com que D seja um domínio.

A seguir o domínio D_∞ será construído usando-se as noções de projeções e mergulhos. Mostra-se-á, também, que qualquer domínio pode ser mergulado em D_∞. Além disso, D_∞ satisfaz a condição $D_\infty = [D_\infty \longrightarrow D_\infty]$, ou seja, D_∞ é um objeto reflexivo na categoria DOM. No que segue $D, D', \ldots$ percorrem os objetos de DOM.

4.2.6 Definição: Projeção

Um par de aplicações (i, p) de D' sobre D diz-se uma *projeção* se

(i) $i : D \longrightarrow D'$ e $p : D' \longrightarrow D$ são funções contínuas

(ii) $p \circ i = id_D$, isto é, $p(i(x)) = x$ para todo $x \in D$

(iii)) $i \circ p \sqsubseteq id_{D'}$, isto é, $i(p(x)) \sqsubseteq x$ para todo $x \in D'$.

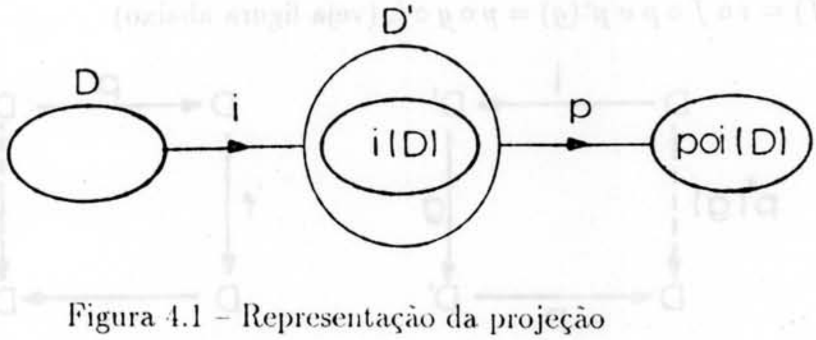


Figura 4.1 – Representação da projeção

Como (i, p), é uma projeção de D' sobre D, D é isomorfo a um retrato de D' com retração $p \circ i$. É neste sentido que D é mergulhado em D'. Pode-se dizer, então, que a menos de isomorfismo, $D \subseteq D'$.

Dizer que D pode ser mergulhado em D' significa que D' tem uma estrutura mais "rica" que D e pode representar a estrutura de D. Ou seja, se elementos de D são mapeados em D', via i, e recuperados de volta, via p, nenhuma informação será perdida. Por outro lado, se os elementos de D' são mapeados em D, via p, e recuperados novamente, via i, pode ser perdida informação. O que se obtém de volta, $i \circ p(x)$, é uma aproximação de x. observe que todo mergulo aqui representado por i, é uma função injetiva e toda projeção, aqui representada por p, é uma função sobrejetiva. Uma maneira usual de representar uma projeção (sistema de projeções) é dada pela figura abaixo.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "id_D"'] & D' \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "\sqsubseteq id_{D'}"] & \\
 & D \arrow[r, "i"'] & D'
\end{tikzcd}$$

Figura 4.2 - Diagrama da projeção

4.2.7 Lema

Seja (i, p) uma projeção de D' sobre D. Então existe uma projeção (i^*, p^*) de $[D' \longrightarrow D']$ sobre $[D \longrightarrow D]$ definida como segue: para $f \in [D \longrightarrow D]$ e $g \in [D' \longrightarrow D']$, $i^*(f) = i \circ f \circ p$ e $p^*(g) = p \circ g \circ i$, (veja figura abaixo)

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "p^*(g)"'] & D' \arrow[d, "g"] & & D \arrow[d, "f"'] & D' \arrow[l, "p"'] \arrow[d, dashed, "i^*(f)"] \\
D & D' \arrow[l, "p"] & & D \arrow[r, "i"'] & D'
\end{tikzcd}$$

Figura 4.3 - Diagrama da prova do Lema 4.2.7

Prova: Dado $x \in D'$ tem-se que $(i^*(f))(x) = if(p(x)) = i(ev(f, p(x)))$. Então pelas Proposições 3.6.7 e 3.6.8 i^* é uma função contínua. De modo análogo se mostra que p^* é contínua. Além disso,

$$p^*(i^*(f)) = p \circ i \circ f \circ p \circ i = f \text{ e de modo análogo } i^*(p^*(g)) = g$$

□

Seja D um domínio. Defina $i_0 : D \longrightarrow [D \longrightarrow D]$ e $p_0 : [D \longrightarrow D] \longrightarrow D$ como segue:

para $x \in D$, $i_0(x) = c_x : D \longrightarrow D$ tal que $c_x(y) = x$ para todo $y \in D$. Para cada $f \in [D \longrightarrow D], p_0(f) = f(\perp)$.

4.2.8 Lema

O par (i_0, p_0) é uma projeção de $[D \longrightarrow D]$ sobre D, conhecida como *projeção canônica*.

Prova: Deve-se mostrar que i_0 é contínua. Para isso seja $X \sqsubseteq D$ dirigido. Então

$$\begin{aligned} i_0(\text{Sup } X) &= \text{Sup}_{x \in X}\ i_0(X), \text{ pela definição de Sup no espaço de funções} \\ &= \text{Sup } i_0(X). \end{aligned}$$

Analogamente, p_0 é contínua. Além disso,

$$i_0(p_0(f) = i_0(f(\perp)) = C_{f(\perp)} \sqsubseteq f(x), \text{ porque } f \text{ é monotônica.}$$

Por outro lado, $p_0 \circ i_0 = id_D$, pois $(p_0 \circ i_0)(x) = p_0(i_o(x)) = p_0(C_x) = x$. □

4.2.9 Definição: Construção de D_∞

Seja D um domínio e (i_0, p_0) a projeção canônica de $[D \longrightarrow D]$ sobre D. Defina $D_0 = D, D_{n+1} = [D_n \longrightarrow D_n]$, $(i_{n+1}, p_{n+1}) = (i_n^*, p_n^*)$, a projeção de D_{n+1} sobre D definida de (i_n, p_n) no Lema 4.2.7. Portanto,

$$D_0 \underset{i_0}{\overset{p_0}{\rightleftarrows}} D_1 \underset{i_1}{\overset{p_1}{\rightleftarrows}} D_2 \ldots$$

Figura 4.4 – Diagrama do sistema inverso

isto é, $(D_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema inverso de domínios. Finalmente $D_\infty = \xrightarrow{\lim} (D_n, p_n)$.

□

No que segue D é um domínio fixo, D_n e D_∞ são como definidos acima.

Foi visto, anteriormente, que se cada D_i é um domínio $D_0 \times D_1 \times \cdots \times D_n \times \cdots = \Pi_{i \in \mathbb{N}} D_i$ também é. pela construção acima, D_∞ é um domínio e $D_\infty \subseteq \Pi_{i \in \mathbb{N}} D_i$. Por isso é feita a seguinte convenção:

Se $x \in D_\infty$, então $x_n = x(n), x = (x_0, x_1, \ldots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)$.

Considere um tupla típica de $D_\infty, (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Se for dado x_m, então $x_n = p_n(x_{n+1})$ determina todos os x_n para $n < m$ pois x_n é obtido do seu vizinho x_{n+1} aplicando a projeção p_n. Pondo $x_{n+1} = i_n(x_n)$ tem-se uma maneira de gerar os x_n para $n > m$, mas nem toda tupla precisa satisfazer esta condição, pois $x_n = p_n(x_{n+1})$ implica a não equivalência $i_n(x) \sqsubseteq x_{n+1}$.

Os mergulhos (i_n) e as projeções (p_n) permite se converter D_m e D_n um no outro.

4.2.10 Definição: Mergulhos

(i) Para $m, n \in \mathbb{N}$ defina $i_{mn} : D_m \longrightarrow D_n$ como segue:

$$i_{mn} = \begin{cases} i_{n-1} \circ \cdots \circ i_m & (m < n) \\ id_{D_m} & (m = n) \\ p_n \circ \cdots \circ p_{m-1} & (m > n) \end{cases}$$

(ii) $\rho_{n\infty} : D_n \longrightarrow D_\infty$ é definida por $\rho_{n\infty}(x) = (i_{nj}(x))_{j \in \mathbb{N}}$

(iii) $\rho_{\infty n} : D_\infty \longrightarrow D_n$ é definida por $\rho_{\infty n}(x) = x_n$

Para $m \le n, i_{mn}$ mergulha D_m em D_n, isto é, $i_{mn} : D_m \subseteq D_n$. No caso $i_{m(m+1)}$ ele se torna i_m, que mergulha D_m em D_{m+1}. Não é difícil de ver que $i_{kn} \circ i_{mk} \sqsubseteq i_{mn}$ e

$i_{kn} \circ i_{mk} = i_{mn}$, se $k \geq \min\{m, n\}$.

Observe que enquanto (D_n, p_n) é um sistema inverso, (D_n, i_n) é um sistema direto ou *sistema de mergulho.* Assim, $D_\infty \stackrel{\lim}{=\!\!\longrightarrow} (D_n, i_n)$, isto é, D_∞ também é o limite direto, de (D_n, i_n). Como um deles determina o outro é indiferente qual deles tomar para estudar ou construir D_∞.

A função definida acima mapeia um $x \in D_n$ na tupla

$$\rho_{n\infty} : x \longmapsto (i_{n0}(x), i_{n1}(x), i_{n2}(x), \ldots, x, \ldots)$$

olhando essa tupla da sua n-ésima componente tem-se

$$(\ldots, p_{n-2}(p(x)), p_{n-1}(x), x, i_{n+1}(x), i_{n+1}(i_n(x)), \ldots)$$

A projeção $\rho_{\infty n}$ deve mapear esta tupla de volta para x, e em geral tem-se

$$\rho_{\infty n}(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = x_n$$

4.2.11 Proposição

O par $(\rho_{n\infty}, \rho_{\infty n})$ é uma projeção (ou mergulho), isto é, $\rho_{n\infty}$ mergulha D_n em D_∞ e $\rho_{\infty n}$ projeta D_∞ em D_n.

Prova: é claro que $\rho_{\infty n} \circ \rho_{n\infty} = id_{D_n}$. Resta mostrar que $\rho_{n\infty} \circ \rho_{\infty n} \sqsubseteq id_{D_\infty}$. Como toda tupla em D_∞ satisfaz $x_m = p_m(x_{m+1})$ para todo m, tem-se $i_{nm}(x_n) \sqsubseteq x_m$ para todo m. Agora,

$$\begin{aligned} \rho_{n\infty}(\rho_{\infty n}(x_0, x_1, \ldots, x_m, \ldots)) &= \rho_{n\infty}(x_n) = (i_{n0}(x_n), i_{n1}(x_n), \ldots, i_{nm}(x_n), \ldots) \sqsubseteq \\ &\sqsubseteq (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \end{aligned}$$

□

4.2.12 Proposição

Se $m \leq n$, então compondo $\rho_{n\infty}$ com o mergulho $i_{mn} : D_m \subseteq D_n$ tem-se $\rho_{n\infty} \circ i_{mn} : D_m \subseteq D_\infty$, com $\rho_{n\infty} \circ i_{mn} = \rho_{n\infty}$.

Prova: Deve-se checar a igualdade para um elemento de D_∞ por componentes. A j-ésima componente de $(\rho_{n\infty} \circ i_{mn}(x)$ é $i_{nj}(i_{mn}(x))$ que é igual a $i_{mj}(x)$, que é a j-ésima componente de $\rho_{n\infty}(x)$

□

A figura abaixo mostra um cadeia de domínios e seu limite. Em linguagem categórica, a igualdade de $\rho_{m\infty} \circ i_{mn}$ e $\rho_{n\infty}$ significa que o diagrama comuta. Considere, agora, a função $\rho_{n\infty} \circ \rho_{\infty n}$, que projeta D_∞ em D_n e toma de volta D_∞. Este procedimento acarreta em perda de informação. Mas qual é a medida desta perda?

$$
\begin{tikzcd}
 & & & D_\infty & \\
D_0 \arrow[r, "i_{0m}"'] \arrow[urrr, "\rho_{0\infty}"] & D_m \arrow[rr, "i_{mn}"'] \arrow[urr, "\rho_{m\infty}"] & & D_n \arrow[u, "\rho_{n\infty}"'] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.5 – Diagrama da prova da Proposição 4.2.12

4.2.13 Proposição

$\rho_{n\infty} \circ \rho_{\infty n}$ forma uma cadeia crescente de funções de $D_\infty \longrightarrow D_\infty$ tal que $\rho_{0\infty} \circ \rho_{\infty 0} \sqsubseteq \rho_{1\infty} \circ \rho_{\infty 1} \sqsubseteq \rho_{2\infty} \circ \rho_{\infty 2} \sqsubseteq \cdots$

Prova: Basta expandir $\rho_{n\infty}$ usando a condição $\rho_{(n+1)\infty}(i_n(x)) = \rho_{n\infty}(x)$

$\rho_{n\infty} \circ \rho_{\infty n} = (\rho_{(n+1)\infty} \circ i_n) \circ (\rho_{\infty(n+1)} \circ i_n) = \rho_{(n+1)\infty} \circ i_n \circ p_n \circ \rho_{\infty(n+1)} \sqsubseteq \rho_{(n+1)\infty} \circ id_{D_{n+1}} \circ \rho_{\infty(n+1)} = \rho_{(n+1)\infty} \circ \rho_{\infty(n+1)}$.

□

4.2.14 Proposição

A cadeia $\rho_{n\infty} \circ \rho_{\infty n}$ de funções em $[D_\infty \longrightarrow D_\infty]$ converge para a identidade sobre D_∞, isto é, $\sqcup_{n=0}^{\infty} \rho_{n\infty} \circ \rho_{\infty n} = id_{D_\infty}$.

Prova: Para todo n, aplicando $\rho_{n\infty} \circ \rho_{\infty n}$ ao elemento $(x_0, x_1, \ldots)$ de D_∞ gera uma tupla com x_n na sua n-ésima componente. Supremos são tomados por componentes, assim $id_{D_\infty} \sqsubseteq \sqcup_{n=0}^{\infty} \rho_{n\infty} \circ \rho_{\infty n}$. Considere a direção oposta, $\sqcup_{n=0}^{\infty} \rho_{n\infty} \circ \rho_{\infty n} \sqsubseteq id_{D_\infty}$. Para todo n, desde que ρ_n é um mergulho tem-se $\rho_{n\infty} \circ \rho_{\infty n} \sqsubseteq id_{D_\infty}$.

□

O domínio, D_∞, construído acima satisfaz a propriedade da minimalidade no sentido de que se E é domínio com mergulho $\Phi_n \circ i_{mn} = \Phi_m$, então existe um único mergulho $\Theta : D_\infty \longrightarrow E$. Além disso, esse mergulho se fatora via $\Phi_n = \Theta \circ \rho_{n\infty}$; ver [PAU 87].

4.2.15 Teorema

(i) $D_\infty \neq \{\perp\}$, isto é, D_∞ é não trivial

(ii) $D_\infty = [D_\infty \longrightarrow D_\infty]$

Prova: (i) Imediato a partir da construção de D_∞.

(ii) Considere $\Phi : D_\infty \longrightarrow [D_\infty \longrightarrow D_\infty]$ e $\Psi : [D_\infty \longrightarrow D_\infty] \longrightarrow D_\infty$ definidas por: $\Phi(x) = \sqcup_{n=0}^{\infty} \rho_{n\infty} \circ (\rho_{\infty(n+1)}(x)) \circ \rho_{\infty n}$ e $\psi(f) = \sqcup_{n=0}^{\infty} \rho_{(n+1)\infty}(\rho_{\infty n} \circ f \circ \rho_{n\infty})$.

Para isso deve-se mostrar que $\rho_{n\infty} \circ (\rho_{\infty(n+1)}(x)) \circ \rho_{\infty}$ e $\rho_{(n+1)\infty}(\rho_{\infty n} \circ f \circ \rho_{n\infty})$ são conjuntos dirigidos em D_∞ e $[D_\infty \longrightarrow D_\infty]$, respectivamente. De fato,

$$\begin{aligned}
\rho_{n\infty} \circ (\rho_{\infty(n+1)}(x)) \circ \rho_{\infty n} &= \rho_{(n+1)\infty} \circ \rho_{n(n+1)} \circ (\rho_{\infty(n+1)}(x)) \circ \rho_{(n+1)n} \circ \rho_{\infty(n+1)} = \\
&= \rho_{(n+1)\infty} \circ \rho_{(n+1)(n+2)}(\rho_{\infty(n+1)}(x)) \circ \rho_{\infty(n+1)} \\
&\sqsubseteq \rho_{(n+1)\infty} \circ (\rho_{\infty(n+2)}(x)) \circ \rho_{\infty(n+1)}.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho_{(n+1)\infty}(\rho_{\infty n} \circ f \circ \rho_{n\infty}) &= \rho_{(n+1)\infty}(\rho_{(n+1)n} \circ (\rho_{\infty(n+1)} \circ f \circ \rho_{(n+1)\infty} \circ \rho_{n(n+1)})) = \\
&= \rho_{(n+1)\infty}(\rho_{(n+2)(n+1)}(\rho_{\infty(n+1)} \circ f \circ \rho)) \\
&\sqsubseteq \rho_{(n+2)\infty}(\rho_{\infty(n+1)} \circ f \circ \rho_{(n+1)\infty}).
\end{aligned}$$

Ambos são cadeias crescentes e consequentemente dirigidos. Portanto tem-se

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho_{(n+1)\infty}(f)) &= \sqcup_{n=0}^{\infty} \rho_{n\infty} \circ (\rho_{\infty(n+1)}(\rho_{(m+1)\infty}(f))) \circ \rho_{\infty n} = \\
&= \sqcup_{n=0}^{\infty} \rho_{n\infty} \circ (\rho_{(m+1)(n+1)}(f)) \circ \rho_{\infty n} \\
&= \rho_{m\infty} \circ f \circ \rho_{\infty m}.
\end{aligned}$$

Analogamente, $\rho_{\infty(m+1)}(\Psi(f)) = \rho_{\infty m} \circ f \circ \rho_{m\infty}$.

De modo que

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \Phi &= \sqcup_{n=0}^{\infty} \rho_{(m+1)\infty} \circ \rho_{\infty(m+1)} \circ \Psi \circ \Phi \circ \rho_{(m+1)\infty} \circ \rho_{\infty(m+1)} = \\
&= \sqcup_{n=0}^{\infty} \rho_{(m+1)\infty} \circ (\rho_{\infty m} \circ f \circ \rho_{m\infty})(\rho_{m\infty} \circ f \circ \rho_{\infty m}) \circ \rho_{\infty(m+1)} = \\
&= \sqcup_{m=0}^{\infty} \rho_{(m+1)\infty} \circ (\rho_{\infty m} \circ \rho_{m\infty} \circ f \circ \rho_{\infty m} \circ \rho_{m\infty})\rho_{\infty(m+1)} = \\
&= \sqcup_{m=0}^{\infty} \rho_{(m+1)\infty} \circ (f) \circ \rho_{\infty(m+1)} = id_{D_\infty}.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \Psi &= \sqcup_{m=0}^{\infty} \Phi \circ \rho_{(m+1)\infty} \circ \rho_{\infty(m+1)} \circ \Psi = \sqcup_{m=0}^{\infty} (\rho_{m\infty} \circ f \circ \rho_{\infty m}) \circ \\
&\quad (\rho_{\infty m} \circ f \circ \rho_{m\infty}) = \sqcup_{m=0}^{\infty} (\rho_{m\infty} \circ \rho_{\infty m} \circ \rho_{m\infty} \circ \rho_{\infty m}) \\
&= (\sqcup_{m=0}^{\infty} \rho_{m\infty} \circ \rho_{\infty m}) \circ f \circ (\sqcup_{m=0}^{\infty} \rho_{m\infty} \circ \rho_{\infty m}) = f = \\
&= id_{[D_\infty \longrightarrow D_\infty]}.
\end{aligned}$$

Como Φ e Ψ são contínuas como compostas de funções contínuas segue que D_∞ é isomorfo a $[D_\infty \longrightarrow D_\infty]$.

□

4.2.16 Corolário

As categorias DOM e SDOM possuem um objeto reflexivo também conhecido como *objeto universal*.

□

A razão porque D_∞ é chamado objeto universal está no fato de que todo domínio da categoria é, agora, subconjunto de D_∞. Desse modo a categoria DOM (e SDOM) pode ser vista como o domínio $(D_\infty, \sqsubseteq, <<, \perp)$ e os demais domínios da categoria como subdomínio de D_∞. Esse modo de encarar a categoria DOM (SDOM) se torna particularmente útil quando DOM (SDOM) fôr tomado como um modelo do cálculo lambda sem tipo ou como semânticas de lógicas de alta ordem tais como as lógicas categóricas, [LAM 86]. Observe que em D_∞ todos os elementos, quer constantes, funções, funções de funções, etc., tem o mesmo status, isto é, não existe uma hierarquia para os elementos de D_∞, eles serão chamados, simplesmente, de *funcionais*.

4.3 Domínios Como Espaços Topológicos

Nesta seção será dada, explicitamente, a topologia de um domínio e apresentado um critério simples para verificar quando uma função entre domínios é contínua. Mostra-se que a reta, o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, com a topologia usual, é homeomorfa a um subconjunto de (subespaço) $\mathcal{R} = \mathbb{I}(\mathbb{R})$, os elementos totais de $\mathcal{R}$. Isto significa que $\mathcal{R}$ contém uma cópia da reta. Este fato será usado para se obter mais resultados da topologia de $\mathcal{R}$. É dada, também, nesta seção a versão, para domínios, do Teorema da Extensão de Tietze.

Lembre-se que dado um domínio, $(D, \sqsubseteq, <<, \perp)$, uma base de D é uma ordem parcial, $(\mathcal{B}, \sqsubseteq, <<, \perp)$, com primeiro elemento $\perp$, onde $\mathcal{B}$ é um conjunto enumerável, fc-completa, com $\sqsubseteq$ e $<<$ induzidas de D. Como um domínio é un *cpo*, D está munido de uma topologia, - a topologia de Scott sobre D - que é consistente com a ordem de D no sentido de que uma função sobre D é Sup-contínua se e somente se é Top-contínua. Pretende-se mostrar que a topologia de Scott sobre um domínio $D, \mathcal{J}$, tem como base $\mathcal{J}_{\mathcal{B}} = \{\Uparrow b | b \in \mathcal{B}\}$. Assim, a base da topologia de Scott, sobre D, é determinada pela *base algébrica* $\mathcal{B}$ de D. Aqui, o nome "algébrico" é para deferenciar de base topológica.

Como a função $b \longmapsto \Uparrow b$, para cada $b \in \mathcal{B}$, é bijetiva, a base topológica, também, é enumerável e de um outro ponto de vista determina a base algébrica.

4.3.1 Proposição

Seja $(D, \sqsubseteq, <<, \perp, \mathcal{J})$ um domínio com base $\mathcal{B}$. Então $\mathcal{B} = \{\Uparrow b | b \in \mathcal{B}\}$ é uma base da topologia $\mathcal{J}$, a topologia de Scott sobre D.

Prova: Basta mostrar

(a) $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}$ é base de alguma topologia, sobre D.

(b) $\Uparrow b$ é um aberto Scott, para cada $b \in \mathcal{B}$.

Para provar (b) é necessário e suficiente provar

(i) $x \in \Uparrow b$ e $x \sqsubseteq y \Rightarrow y \in \Uparrow b$

(ii) Sup $S \in \uparrow b$, S dirigido $\Rightarrow \uparrow b \cap S \neq \phi$.

Para mostrar (i), seja $x \in \uparrow b$ e $x \sqsubseteq y$. Então $b << x$ e consequentemente $b << y$. Logo, $y \in \uparrow b$. Para provar (ii) suponha que Sup $S \in \uparrow b$. Então $b <<$ Sup S e portanto $b << s$ para algum $s \in S$. Ou seja, $S \cap \uparrow b \neq \phi$.

Para provar (a) usa-se as Proposições 3.2.6 e 3.2.7 como critério de base. Ou seja, para mostrar que $\mathcal{J}_\mathcal{B}$ é base de uma topologia, sobre D, é necessário e suficiente mostrar que dados $\uparrow b_1, \uparrow b_2 \in \mathcal{J}_\mathcal{B}$ existe $\alpha \subseteq \mathcal{J}_\mathcal{B}$ tal que $\uparrow b_1 \cap \uparrow b_2 = \cup_\alpha$ e além disso o próprio D é uma união de membros de $\mathcal{J}_\mathcal{B}$.

Seja, portanto $\uparrow b_1, \uparrow b_2 \in \mathcal{J}_\mathcal{B}$ e $x \in \uparrow b_1 \cap \uparrow b_2$. Então $x \in \uparrow b_1$ e $x \in \uparrow b_2 \Rightarrow b_1 << x$ e $b_2 << x \Rightarrow c_x = b_1 \sqcup b_2 << x \Rightarrow x \in \uparrow c_x$. Ou seja, para cada $x \in \uparrow b_1 \cap \uparrow b_2$ existe um c_x tal que $x \in \uparrow c_x$. Logo, $\uparrow b_1 \cap \uparrow b_2 \subseteq \uparrow c_x$. Portanto, $\uparrow b_1 \cap \uparrow b_2 \subseteq \cup\{\uparrow c_x | x \in \uparrow b_1 \cap \uparrow b_2\}$. Por outro lado, para cada $x \in \uparrow b_1 \cap \uparrow b_2$, $\uparrow c_x \subseteq \uparrow b_1 \cap \uparrow b_2$, pois $c_x = b_1 \sqcup b_2 \Rightarrow b_1 \sqsubseteq c_x$ e $b_2 \sqsubseteq c_x \Rightarrow \uparrow c_x \subseteq \uparrow b_1$ e $\uparrow c_x \subseteq \uparrow b_2 \Rightarrow \uparrow c_x \subseteq \uparrow b_1 \cap \uparrow b_2$. Logo, $\uparrow b_1 \cap \uparrow b_2 = \cup_\alpha$, onde $\alpha = \{\uparrow c_x\}$. Como $\mathcal{B}$ é fc-completo, $c_x \in \mathcal{B}$ e portanto $\uparrow c_x \in \mathcal{J}_\mathcal{B}$. Agora, como $\perp \in \mathcal{B}$ e $\perp << \perp$ tem-se que $D = \cup\{\uparrow \perp\}$, mais precisamente, $D = \uparrow \perp$ e como $\uparrow \perp \in \mathcal{J}_\mathcal{B}$, segue o resultado.

□

4.3.2 Corolário

Seja um domínio, $(D, \sqsubseteq, <<, \perp)$, com base $\mathcal{B}$. Então, $(D, \mathcal{J})$ é um espaço topológico com base enumerável $\mathcal{J}_\mathcal{B}$. Além disso, cada aberto de D é uma união de abertos da forma $\uparrow b$, com $b \in \mathcal{B}$.

□

Desse modo um domínio pode ser visto, ou como uma estrutura ordenada (chamado aqui *domínio ordenado*) e neste caso as funções admissíveis são aquelas Sup-contínuas ou como um espaço topológico (chamado *domínio topológico*), onde as funções admissíveis são aquelas Top-contínuas. Observe que para todo $x, y \in D, x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \uparrow y \subseteq \uparrow x$.

Sejam D_1 e D_2 domínios e $\mathcal{B}_1$ uma base algébrica de D_1. Seja

$f : D_1 \longrightarrow D_2$ contínua. Para qualquer $x \in D_1$ o conjunto $\{b \in \mathcal{B}_1 | b << x\}$ é dirigido e $x = \text{Sup}\{b \in \mathcal{B}_1 | b << x\}$. Como f é contínua $f(x) = \text{Sup } f(\{b \in \mathcal{B}_1 | b << x\}) = \text{Sup}\{f(b) | b << x\}$. Desse modo, f é unicamente determinada pelos seus valores sobre $\mathcal{B}_1$. Estas observações motiva a seguinte versão do Teorema da Extensão de Tietze.

4.3.3 Teorema

Seja $(D, \sqsubseteq, <<, \perp)$, um domínio com base $\mathcal{B}_1$ e $(D_2, \sqsubseteq, \perp)$ um *cpo* qualquer. Seja $f : \mathcal{B}_1 \longrightarrow D_2$ uma função monotônica. Então existe uma única extensão contínua, $\overline{f} : D_1 \longrightarrow D_2$, de f, com $\overline{f}$ definida por

$$\overline{f}(x) = \text{Sup}\{f(b) | b << x\}, \text{ onde } b \in \mathcal{B}_1$$

Prova: (a) $\overline{f}$ é bem-definida. De fato, $\downarrow x = \{b \in \mathcal{B}_1 | b << x\}$ é dirigido. Como f é monotônica, então $\overline{f}(x) = \text{Sup } f(\downarrow x)$ existe, pois D_2 é um *cpo*. Além disso, para qualquer $b \in \mathcal{B}_1$ tem-se $\overline{f}(b) = \text{Sup } f(\downarrow b) = f(b)$, isto é, $\overline{f}$ extende f.

(b) $\overline{f}$ é contínua. Com efeito, suponha que $x \sqsubseteq y$, $x, y \in D_1$. Então $\downarrow x \subseteq \downarrow y$ e por conseguinte $\overline{f}(x) = \text{Sup } f(\downarrow x) = \overline{f}$. Logo, $\overline{f}$ é monotônica.

Seja $X \subseteq D_1$ dirigido. Como $\overline{f}$ é monotônica, o conjunto $\{\overline{f}(x) | x \in X\}$ é dirigido em D_2 e $\overline{f}(x) \sqsubseteq \overline{f}(\text{Sup } X)$ para qualquer $x \in X$. Portanto,

$$\text{Sup}\{\overline{f}(x) | x \in X\} \sqsubseteq \overline{f}(\text{Sup } X).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\overline{f}(\text{Sup } X) &= \text{Sup}\{f(b) | b \in \mathcal{B}_1 \text{ e } b << \text{Sup } X\} \text{ (por definição de } \overline{f}) \\
&= \text{Sup}\{f(b) | b \in \mathcal{B}_1 \text{ e existe } x \in X \text{ tal que } b \sqsubseteq x\} \\
&\sqsubseteq \text{Sup}\{\overline{f}(x) | x \in X\} \text{ (pois } b \sqsubseteq x \Rightarrow \overline{f}(b) \sqsubseteq \overline{f}(x)).
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{f}$ é contínua.

(c) $\overline{f}$ é única. Para mostrar isto, suponha que $\overline{g} : D_1 \longrightarrow D_2$ é uma outra função contínua que extende f. Então, $\overline{g}(x) = \overline{g}(\text{Sup}\downarrow x) = \text{Sup } \overline{g}(\downarrow x) = \text{Sup } \overline{f}(\downarrow x) = \overline{f}(x)$.

□

Portanto, as funções contínuas entre domínios são, essencialmente, aquelas que são monotônicas na base. Em outras palavras, uma função monotônica na base para não ser contínua no espaço todo é preciso que sua extensão seja definida de modo "não natural" em algum ponto que não esteja na base, o qual chamar-se-á *ponto limite*.

Por exemplo, a função $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x \in \mathbb{I}(\mathbb{Q}) \\ \perp & , \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

é uma função monotônica na base que não é contínua no espaço todo, $\mathcal{R}$. Isso só foi possível porque f deveria ser definida como $f(x) = x^2$, também, nos pontos de $\mathcal{R}$ que não estão em $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$. De fato, se $x_0 = [\alpha, \beta]$ com α, β irracionais, então $x_0 = \text{Sup}\{b \in \mathcal{B} | b << x_0\}$ e por conseguinte $\overline{f}(x_0) = \sup\{f(b) | b << x_0\} = x_0^2$. Portanto, f deveria ser definida como $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathcal{R}$, para ser contínua em $\mathcal{R}$.

Se D_1 é um *cpo*, então para todo $X \subseteq D_1$, dirigido, existe $x_0 \in D_1$ tal que $x_0 = \text{Sup } X$. Por outro lado, se D_1 é um domínio para cada $x_0 \in D_1$, o conjunto $X = \{b \in \mathcal{B}_1 | b << x_0\}$ é dirigido e $x_0 = \text{Sup}\{b \in \mathcal{B}_1 | b_1 << x_0\}$, onde $\mathcal{B}_1$ é uma base de D_1. Em domínios, esta última igualdade será denotado por $\lim_{b << x_0} b = x_0$. Como $\mathcal{B}_1 \subseteq D_1$, $X = \{x \in D_1 | x << x_0\}$ e $x_0 = \text{Sup } X$, esta última igualdade será denotado por $\lim_{x << x_0} x = x_0$ ou, simplesmente, $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

Dados D_1 e D_2 domínios, $f : D_1 \longrightarrow D_2$ é contínua $\Leftrightarrow$ para todo $X \subseteq D_1$, dirigido, $f(X)$ é dirigido em D_2 e $\text{Sup } f(X) = f(\text{Sup } X)$. Denotando $\text{Sup } f(X)$ por $\lim_{x \to x_0} f(x)$, esta equivalência pode ser expressa dizendo-se que f é contínua $\Leftrightarrow$ para todo $x_0 \in D_1$, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Esta equivalência permite definir a continuidade de f num ponto $x_0 \in D_1$ como segue.

4.3.4 Definição: Continuidade Local e Global

Sejam D_1 e D_2 domínios. A função $f : D_1 \longrightarrow D_2$ diz-se *contínua no ponto* $x_0 \in D_1$ se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. f diz-se *contínua* em D_1 se f é contínua em cada ponto de D_1.

4.3.5 Exemplo

A função $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x \neq [e, \pi] \\ \perp & , \text{ se } x = [e, \pi]. \end{cases}$$

não é contínua no ponto $x_0 = [e, \pi]$. No entanto f é contínua nos demais pontos de $\mathcal{R}$. De fato, $\lim_{x \to x_0} x^2 = [e, \pi]^2 \neq f([e, \pi]) = \perp$. Em qualquer outro ponto $x_0 \in \mathcal{R}, \lim_{x \to x_0} = x_0^2 = f(x_0)$. A função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x \neq x_0 \\ \perp & , \text{ se } x = x_0 \end{cases}$$

diz-se definida *por mais de uma expressão* (no caso duas expressões). A função $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ definida por $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathcal{R}$, é definida por *uma expressão*.

4.3.6 Proposição

Sejam D_1 e D_2 domínios com bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respectivamente. Seja $f : D_1 \longrightarrow D_2$ definida por mais de uma expressão, por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , \text{ se } x \neq x_0 \\ f_2(x) & , \text{ se } x = x_0. \end{cases}$$

Então $f : D_1 \longrightarrow D_2$ é contínua $\Leftrightarrow$ $f : \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$ é monotônica, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f_2(x_0)$. Ou seja, $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x)$

Prova: ($\Rightarrow$) Se $f : D_1 \longrightarrow D_2$ é contínua, então f é, em particular, monotônica sobre $\mathcal{B}_1$, pois f é monotônica. Portanto $\lim_{x \to x_0} f_1(x)$ e $\lim_{x \to x_0} f_2$ existem, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f_1(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f_2(x_0)$. Como $\lim_{x \to x_0} f(x)$ é único segue que $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

($\Leftarrow$) Suponha que $f : \mathcal{B}_1 \longrightarrow D_2$ é monotônica, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe e $f_1(x) = f_2(x_0)$. O único ponto onde f poderia não ser contínua seria o ponto $x = x_0$, pois para os demais $f = f_1$ e $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = f(x)$. No ponto $x = x_0$ f é obviamente contínua pois $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

□

4.3.7 Corolário

Sejam D_1 e D_2 domínios com bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respectivamente. Então, $f : D_1 \longrightarrow D_2$ é contínua se $f : \mathcal{B}_1 \longrightarrow D_2$ é monotônica e f pode ser definida por uma única expressão.

$\square$

4.3.8 Exemplos

(i) As funções $-, +, \cdot, / \ : \ \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}$ são funções contínuas. De fato, elas são monotônicas em $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ e definidas por uma expressão.

(ii) A função $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \text{ se } x \not<< 0 \\ \perp & , \text{ se } x << 0 \end{cases}$ é contínua em todos os pontos x tais que $x \not<< 0$, pois f neste conjunto é definido por uma única expressão, qual seja, $f(x) = \frac{1}{x}$ e $\lim_{x \to y} f(x) = f(y) = \frac{1}{y}$, se $x \not<< 0$. f é contínua nos pontos x tais que $x << 0$? Seja x_0 um qualquer desses pontos. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \frac{1}{\perp} = \perp$. Como f é monotônica na base $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ segue que f é contínua nesse conjunto. Lembre-se que, por definição, $f(x) = \frac{1}{x} = \perp$. se $x << 0$ e $f(0) = \frac{1}{0} = \perp$. Logo f é monotônica na base e é definida por uma única expressão, qual seja, $\frac{1}{x}$ e portanto é uma função contínua. Como a composta de funções contínuas é contínua, qualquer função da forma $f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$, onde $x \in \mathcal{R}$ e $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathcal{R}$, chamada *função racional*, é uma função contínua.

Sejam $D_1, \ldots, D_n$ domínios. O produto cartesiano $D_1 \times \cdots \times D_n$ também é um domínio. A função i-ésima projeção, $p_i : D_1 \times \cdots \times D_i \times \cdots \times D_n \longrightarrow D_i$, definida por $p_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$ é uma função contínua.

4.3.9 Proposição

A função $f : D \longrightarrow D_1 \times \cdots \times D_n$, onde D é um domínio, é contínua $\Leftrightarrow$ $f_i = p_i \circ f$ é contínua.

Prova: $(\Rightarrow)$ Como cada p_i é contínua e f é contínua, por composição $f_i = p_i \circ f$ é contínua.

($\Leftarrow$) Suponha que $p_i \circ f$ é contínua. Então para cada conjunto subbásico U_i em $D_1 \times \cdots \times D_n$, $f^{-1}(U_i)$ é aberto porque $f_i^{-1}(U_i) = f^{-1}(p_i^{-1}(U_i)) = (p_i \circ f)^{-1}(U_i)$, ver [DUN 66], Teorema 83, pag. 79. Logo, f é contínua.

□

Sejam D_1 e D_2 domínios com D_2 um quasi-corpo. Dadas as funções $f, g : D_1 \longrightarrow D_2$ e $\alpha \in D$ um domínio qualquer, pode-se definir sobre o conjunto das funções, $D_1 \longrightarrow D_2$, de D_1 em D_2, as seguintes operações: para $* \in \{-, +, \cdot, |\}$ defina-se $f * g$ e $\alpha \in D$ como segue

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \text{ para cada } x \in D_1$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x) \text{ para cada } x \in D_1 \text{ e } \alpha \in D.$$

Ficam, assim, definidas, sobre $D_1 \longrightarrow D_2$, as operações $f - g, f + g, f \cdot g$ e αf.

Dado o domínio D, as funções $s : D^2 \longrightarrow D, s(x, y) = x \pm y$, $m : D^2 \longrightarrow D$, $m(x, y) = x \cdot y$ e $i : D \longrightarrow D$, $i(t) = \frac{1}{t}$, são funções contínuas.

4.3.10 Proposição

sejam D_1 e D_2 domínios com $f, g \in [D_1 \longrightarrow D_2]$. Então $f + g, f - g, f \cdot g, f/g$ e αf, para $\alpha \in D, D$ domínio, são funções contínuas.

Prova: A função $\varphi : D \longrightarrow D_1 \times D_2$ tal que $\varphi(x) = (f(x), g(x))$ é uma função contínua pela Proposição 4.3.9. Logo, $f \pm g = s \circ \varphi$ é contínua. Por outro lado, $\alpha^* : D \longrightarrow D$ tal que $\alpha^*(t) = m(\alpha, t)$ é contínua. Portanto, $\alpha f = \alpha^* \circ f$ é contínua. Tem-se, também, que $f \cdot g = m \circ \varphi$, ou seja, $f \cdot g$ é contínua. Em particular, se $f = \alpha, \alpha g$ é contínua $f/g = f \cdot (i \circ g)$ e portanto contínua.

□

4.3.11 Corolário

Sejam $f, g \in [D_1 \longrightarrow D_2]$ e $\alpha \in D$, um domínio qualquer. Dado $x_0 \in D_1$, suponha que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existem. Então

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0}(f \pm g)(x) &= \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)\\
\lim_{x \to x_0}(f \cdot g)(x) &= (\lim_{x \to x_0} f(x))(\lim_{x \to x_0} g(x))\\
\lim_{x \to x_0}(\tfrac{f}{g})(x) &= \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}; \lim_{x \to x_0}(\alpha f)(x) = \alpha \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)
\end{aligned}$$

□

4.3.12 Corolário

Sejam D_1 e D_2 domínios com D_2 um quasi-corpo. Então $[D_1 \longrightarrow D_2]$ também é um quasi-corpo, isto é, para todo $f, g, h \in [D_1 \longrightarrow D_2]$ os seguintes axiomas são satisfeitos.

1)	$f + g = g + f$; $f \cdot g = g \cdot f$	(comutatividade)
2)	$(f + g) + h = f + (g + h)$;	
	$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$	(associatividade)
3)	$f + 0 = f$; $f \cdot 1 = f$, onde	$0 : D_1 \longrightarrow D_2$ tal que $0(x) = 0$, para todo $x \in D_1$
		$1 : D_1 \longrightarrow D_2$ tal que $1(x) = 1$, para todo $x \in D_1$.
		(existência do elemento neutro)
4)	$f + (-f) \ll 0$; $\frac{f}{f} \ll 1$, onde	$-f : D_1 \longrightarrow D_2$ tal que $(-f)(x) = -f(x)$
		$\frac{1}{f} : D_1 \longrightarrow D_2$ tal que $(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$.
		(quasi-inverso)
5)	$f \cdot g + f \cdot h \sqsubseteq f \cdot (g + h)$	(quasi-distributividade)

Prova: Basta usar as propriedades do quasi-corpo D_2 e as definições de $f \pm g, f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$.

□

4.3.13 Definição: Objeto Total

Seja D um domínio. Um objeto $x \in D$ diz-se *total* se não existe nenhum $y \in D, y \neq x$ tal que $x \sqsubseteq y$. O conjunto dos objetos totais do domínio D será denotado por $tot(D)$.

No caso do domínio $\mathcal{R} = (\mathbb{I}(\mathbb{R}), \sqsubseteq, <<, \perp)$, os totais são os intervalos degenerados de reais, isto é, $tot(\mathcal{R}) = \{[x,x] | x \in \mathbb{R}\} \cup \{-\infty, +\infty\} \equiv \mathbb{R}$.

$\mathcal{R}$ visto como um espaço topológico com a topologia de Scott, $\mathcal{J}$, também é um domínio e contém $tot(\mathcal{R})$ como um subespaço topológico, onde cada aberto de $tot(\mathcal{R})$ é a interseção de um aberto de $\mathcal{R}$ com $tot(\mathcal{R})$, seja $\mathcal{J}_t$ essa topologia.

4.3.14 Proposição

Seja $(tot(\mathcal{R}), \mathcal{J}_t)$, o espaço topológico dos objetos totais de $\mathcal{R}$, com a topologia induzida. Então $(tot(\mathcal{R}), \mathcal{J}_t)$ é homeomorfo a $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty + \infty\}$ com a topologia usual. Isto significa que $\mathcal{R}$ contém uma cópia de $\overline{\mathbb{R}}$.

Prova: Dado $x \in \mathbb{R}, [x,x]$ é um intervalo degenerado. Existe uma correspondência biunívoca entre os reais e os intervalos degenerados de $\mathcal{R}$. Ou seja, a função $\Psi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow tot(\mathcal{R})$ tal que $\Psi(x) = \text{Sup}\{y \in \mathcal{R} | y << x\}$ é uma função bijetiva. É óbvio que Ψ é um homeomorfismo, pois Ψ manda a base da topologia usual de $\overline{\mathbb{R}}$, numa base da topologia de $tot(\mathcal{R})$. De fato, $\Psi((p,q)) = ([p,p],[q,q])) = tot(\mathcal{R}) \cap \Uparrow[p,q]$, onde $\{(p,q) | p,q \in \mathbb{Q}\}$ é uma base da topologia usual, e $\{([p,p],[q,q])\}$ é a base de $\mathcal{J}_t$.

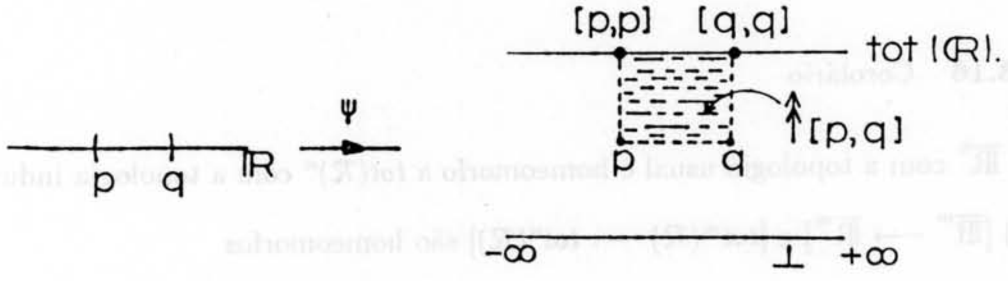


Figura 4.6 – Diagrama da prova da Proposição 4.3.14

□

4.3.15 Corolário

Existe uma bijeção entre as funções contínuas de $\overline{\mathbb{R}}$ em $\overline{\mathbb{R}}$ é as funções contínuas de $tot(\mathcal{R}) \longrightarrow tot(\mathcal{R})$.

Prova: Denota-se por $[\overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}]$ e $[tot(\mathcal{R} \longrightarrow tot(\mathcal{R})]$ os conjuntos das funções contínuas de $\overline{\mathbb{R}}$ em $\overline{\mathbb{R}}$ e de $tot(\mathcal{R})$ em $tot(\mathcal{R})$, respectivamente. A função $\Phi : [\overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}] \longrightarrow [tot(\mathcal{R}) \longrightarrow tot(\mathcal{R})]$ definida por $\Phi(f) = \Psi^{-1} \circ f \circ \Psi = f'$, onde Ψ é o homeomorfismo da Proposição 4.3.14, acima, é bijetiva pois Ψ é bijetiva e $\Phi^{-1}(f) = f = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}$. Como Ψ é um homeomorfismo, Ψ e Ψ^{-1} são contínuas. Então f é contínua $\Leftrightarrow$ f' é contínua, ver figura abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
\overline{\mathbb{R}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\Phi"] & \overline{\mathbb{R}} \arrow[d, "\psi"] \\
tot(\mathbb{R}) \arrow[r, "f'"'] & tot(\mathbb{R})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
f = \psi \circ f' \circ \psi^{-1} \\
f' = \psi^{-1} \circ f \circ \psi
\end{array}
$$

Figura 4.7 – Diagrama da prova da Corolário 4.2.15

□

A prova acima mostra que $[\overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}]$ é homeomorfo a $[tot(\mathcal{R}) \longrightarrow tot(\mathcal{R})]$

4.3.16 Corolário

(i) $\overline{\mathbb{R}}^n$ com a topologia usual é homeomorfo a $tot(\mathcal{R})^n$ com a topologia induzida.

(ii) $[\overline{\mathbb{R}}^m \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^m]$ e $[tot^m(\mathcal{R}) \longrightarrow tot^n(\mathcal{R})]$ são homeomorfos

□

De ora em diante $tot(\mathcal{R})$ será identificado com $\overline{\mathbb{R}}, tot(\mathcal{R}) \equiv \overline{\mathbb{R}}$ e qualquer função contínua de $tot(\mathcal{R})$ em $tot(\mathcal{R})$ será identificada com a correspondente de $\overline{\mathbb{R}}$ em $\overline{\mathbb{R}}$.

Seja D um domínio com base $\mathcal{B}$. O Teorema 4.1.8 nos diz que $[D \longrightarrow D]$ também é um domínio. Isto significa que toda função contínua, $F : D \longrightarrow D$, é o limite de uma sequência de funções contínuas de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}$ (lembre-se que as funções contínuas de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}$ são as funções monotônicas). Em particular toda função contínua de $\overline{\mathbb{R}}$ em $\overline{\mathbb{R}}$ é o limite de funções contínuas de $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ em $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$. Convencionando que os números racionais são finitamente representáveis ou de um modo geral os elementos de $\mathcal{B}$ são finitamente representáveis, toda função contínua de $\overline{\mathbb{R}}$ em $\overline{\mathbb{R}}$ é o limite de uma sequência de funções finitamente representáveis. Na Análise Real as funções contínuas consideradas "finitas" são os polinômios. Um teorema clássico na Análise Real, o Teorema de Weierstrass, afirma que toda função contínua de $\overline{\mathbb{R}}$ em $\overline{\mathbb{R}}$ é o limite de uma sequência de polinômios. Isto sugere que o próximo teorema seja uma versão em Teoria dos Domínios do Teorema de Weierstrass.

4.3.17 Teorema

Toda função contínua de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ é o limite de uma sequência de funções contínuas finitamente representáveis, isto é, funções monotônicas de $\mathbb{I}^n(\mathbb{Q})$ em $\mathbb{I}^s(\mathbb{Q})$.

□

Seja $p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, onde $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ um polinômio real. Todo polinômio deste tipo é uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. De modo análogo $\overline{p}(x) = a_0 + a_1.X + \cdots + a_n.X^n$, onde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{R}$, é uma função contínua de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$. $\overline{p}(X)$ é obtido, simplesmente, Substituido-se em $p(x)$, a variável real x, pela variável intervalar X, isto é, $\overline{p}(x) = p[X/x]$ é uma notação para essa substituição. Então, também, $p(x) = \overline{p}[x/X]$.

4.3.18 Definição: Extensão Canônica

O polinômio intervalar $\overline{p}(X) = a_0 + a_1 + \cdots + a_nX^n$, X variável em $\mathcal{R}$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, diz-se uma *extensão canônica* do polinômio real $p(x)$ se $\overline{p}[x/X] = p(x)$. $p(X)$ diz-se uma *extensão não-canônica* se $p(X) << p(x)$, mas existe algum coeficiente A_i de $p(X)$ e um a_i de $p(x)$ tal que $A_i << a_i$.

Por exemplo, a extensão canônica do polinômio real $p(x) = 2x + \pi x^3$ é o polinômio intervalar $\overline{p}(X) = 2X + \pi X^3$, para $X \in \mathcal{R}$. Uma extensão não canônica seria $p(X) = 2X + [3,4]X^3$, onde $[3,4] << \pi$. É claro que toda extensão canônica e não-canônica de um polinômio real é uma função contínua de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$. A versão intervalar do teorema de Weierstrass afirma que toda função contínua $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ é o limite de uma sequência de polinômios intervalares $p(X) = a_0 + a_1.X + \cdots + a_n.X^n$, onde $a_i \in \mathbb{Q}$

ou $a_i \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$.

4.3.19 Teorema

Toda função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser extendida conônicamente e não-canônicamente a uma função contínua $\overline{f} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$

Prova: Suponha que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Logo f é o limite de uma sequência de polinômios reais $p_n(x)$, isto é, $f = \lim_{n\to\infty} p_n$, onde $p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Defina $\overline{p}_n : \mathbb{N}_\perp \longrightarrow [\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}]$ como segue:

$\overline{p}_\perp(x) = \perp$, para todo $x \in \mathcal{R}$, isto é, $\perp: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}\ \perp(x) = \perp$ para todo x.

$$\overline{p}_m(X) = \begin{cases} a_0 + a_1X + \cdots + a_nX & ; \ m = n \\ \perp & \text{se } \ m > n \end{cases}$$

$\overline{p}_n \in [\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}]$, ou seja, $\overline{p}$ é uma função contínua de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$. Além disso, $\perp \sqsubseteq \overline{p}_0 \sqsubseteq \overline{p}_1 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq \overline{p}_n \sqsubseteq \cdots$

Ou seja, $(\overline{p}_n)$ sendo cadeia, é um conjunto dirigido em $[\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}]$ e portanto possui supremo $\overline{f} \in [\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}]$, isto é, $\overline{f} = \lim_{n\to\infty} \overline{p}_n$, ou equivalentemente, $\overline{f}(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$. Ou seja, $\overline{f}$ existe e é uma função contínua de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$, que é obviamente uma extensão contínua de f. Se se substituir algum $a_i \in \mathbb{R}$, os coeficientes em $\overline{p}$, por $A_i \in \mathcal{R}$ tal que $A_i << a_i$, então $\overline{f}$ extende não-conônicamente f.

□

4.3.20 Corolário

Toda função contínua $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser extendida conônicamente e não-canônicamente a função contínua $\overline{f} : \mathcal{R}^m \longrightarrow \mathcal{R}^n$.

□

4.3.21 Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$. f é uma função contínua. Então $F(X) = e^X$ é uma função contínua de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$ que extende canonicamente f. É notável que se $X \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$, então $p_n(X) = 1 + X + \cdots + \frac{X^n}{n!}$ toma valores em $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$. Ou seja, para calcular e^π toma-se um $A \in \mathcal{R}$ tal que $A << \pi$ e um p_n tal que $p_n(X) << e^x$. Então, $p_n(A) = 1+A+\cdots+\frac{A^n}{n!} << e^\pi$. $\lim_{A \to \pi} p_n(A) = e^\pi$. Lembre-se que $A \longrightarrow \pi$ significa um conjunto dirigido de $A \in \mathcal{R}$ tal que $A << \pi$. É claro que $A \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$. Portanto, cada função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é o limite de uma sequência de polinômios $p_n : \mathbb{I}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{I}(\mathbb{Q})$.

5 DOMÍNIOS COMO UMA ALTERNATIVA AO MÉTODO LINEAR

O objetivo principal desta unidade é apresentar argumentos em favor da tese de que a teoria dos domínios é um método de aproximção que pode ser uma alternativa ao Método Linear Clássico. Na Seção 5.1 é sugerida uma definição de função derivável em domínios. Na Seção 5.2 será introduzido o conceito de espaço quasi-vetorial, como alternativa "finitária" para espaços vetoriais clássicos. Os conceitos de integrais definida e indefinida serão apresentados na Seção 5.3. O conteúdo da Seção 5.4 é a generalização do conceito de espaço topológico metrizável de forma a adaptá-lo a categoria DOM. Ainda nesta seção será apresentado o conceito de sequência convergente em domínios. Finalmente, na Seção 5.5, é apresentado a possibilidade de se tratar equações diferenciais com a abordagem de domínios.

Algumas das ideias desta unidade foram baseados nos trabalhos [SMY 87a], [SMY 87b], [SMY 90a]. Foram consultados, também, os seguintes trabalhos [LIM 77], [ARN 79], [DUN 66],[GEL 61], [SIM 67], [BOY 74] e [STR 67].

5.1 A Estrutura Diferenciável em DOM

Nesta seção é introduzida uma estrutura diferencial em DOM, de modo que seja possível, nas seções seguintes, definir-se conceitos como equações diferenciais e integrais em domínios, assim como discutir a existência e unicidade de soluções para essas equações.

A Análise Real Clássica usa a estrutura diferenciável das variedades para fornecer um método de aproximação linear, local, para essas variedades. Por exemplo, a variedade $z = x^2 + y^2$, em $\mathbb{R}^3$, é aproximada, no ponto (x_0, y_0, z_0), pela diferencial $df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$, onde $z = f(x, y)$. Esta diferencial é o plano tangente a essa variedade neste ponto. Deste ponto de vista a Análise Real é substituída pela Álgebra Linear, a qual é um ramo operacional da matemática, haja visto que ela é equivalente a Teoria das Matrizes. É muito mais simples trabalhar com Álgebra Linear que com Análise. O preço pago por essa substituição está no fato de que os resultados obtidos são apenas aproximados do resultado exato. De modo análogo, ao se introduzir o conceito de número real parcial, criando a estrutura $\mathcal{R}$, está se fornecendo um métodos de aproximação à Análise Real Clássica. Por exemplo, um número real é aproximado por um intervalo de extremos racionais, uma função real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é aproximado por uma função de $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ em $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$, uma variedade, como $z = x^2 + y^2$, é aproximada, localmente, no ponto (x_0, y_0, z_0), pelo ponto (X_0, Y_0, Z_0), onde $X_0, Y_0, Z_0 \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$ e $X_0 << x_0$, $Y_0 << y_0$ e $Z_0 << z_0$, com $z_0 = x_0^2 + y_0^2$, e assim por diante. O método finitário dos domínios difere do método linear em pelo menos dois pontos. Primeiro ele não é um método algébrico, no sentido de que a estrutura é apresentada por equações, mas lógico, pois a estrutura é apresentada por um conjunto constituído de equações e inequações. Uma segunda diferença está em que o método finitário, diferentemente do método linear, fornece uma teoria representável finitária, no sentido de que cada objeto em estudo ou é finitamente representável ou é o limite de uma sequência de objetos finitamente representáveis. Ou seja, o método finitário tem preocupações computacionais no sentido moderno do termo, diferentemente do método linear.

Embora a estrutura diferencial não seja essencial em DOM é possível se introduzir o conceito de derivalidade para funções em DOM.

Nesta seção é conveniente olhar para a categoria DOM como o objeto universal, D_∞, cuja possibilidade foi justificada na Seção 4.3. É necessário ver todos os elementos de DOM com o mesmo status. Observe que se F não é uma extensão canônica de alguma função real f, é possível transformá-la numa extensão canônica substituindo cada coeficiente não-real em F por um real que ele aproxima. Por exemplo, $F(X) = [e, \pi]X^2 + 2X$ é uma extensão não-canônica. Como $[e, \pi] << 3$, por exemplo, $\overline{F}(X) = 3X^2 + 2X$ é uma extensão canônica de $f(x) = 3x^2 + 2x$. $\overline{F}$ é chamada a *transformada canônica de* F. É fácil ver que toda extensão possui uma transformada canônica. Seja $\mathcal{J} : F \longrightarrow \overline{F}$ a função transformada, será denotado por $\mathcal{J}^{-1} : \overline{F} \longrightarrow F$ a inversa da transformada.

Seja $F(x) \in D_\infty$ uma expressão contendo a variável intervalar X e $\rho : D_\infty \times D_\infty \longrightarrow D_\infty$ tal que $\rho(F(X), Y) = F(X)Y = F[Y/X]$, onde $F[Y/X]$ denota a substituição em F de X por Y. (Esta função chamada substituição será estudada com mais detalhes nos capítulos 6 e 7). Por exemplo, $\rho(X^2 + X, x) = (X^2 + X)[x/X] = x^2 + x$. No que segue ρ será usada para denotar substituição e $\mathcal{J}$ a função transformada.

5.1.1 Proposição

A função de substituição é uma função contínua.

Prova: Foi visto na Proposição 3.6.7 que a função de avaliação $ev : [D_\infty \longrightarrow D_\infty] \times D_\infty \longrightarrow D_\infty$ tal que $ev(f, x) = f(x)$ é uma função contínua. Como $[D_\infty \longrightarrow D_\infty] = D_\infty$, a função de avaliação pode ser escrita como $ev : D_\infty \times D_\infty \longrightarrow D_\infty$ tal que $ev(f(x), y) = f(x)y = f[y/X]$. Portanto a substituição é uma função contínua.

□

5.1.2 Proposição

Seja $f \in D_\infty$ uma função derivável. A função $\sigma : f \longmapsto f'$ é uma função contínua.

Prova: De fato, σ é uma função de substituição.

□

5.1.3 Proposição

Seja F uma extensão de alguma função real f. A função $\mathcal{J} : F \longrightarrow \overline{F}$ e $\mathcal{J}^{-1} : \overline{F} \longrightarrow F$ uma transformada canônica de F e sua inversa, respectivamente, são funções contínuas.

Prova: Ambas são substituições.

□

Se uma extensão F, de f, já for canônica a transformada $\mathcal{J}$ é a identidade.

Seja F a extensão de uma função real derivável f, cuja derivada é f'. Considere a seguinte cadeia de transformações (substituições).

$$F(X) \xrightarrow{\mathcal{J}_1} \mathcal{J}_1 F(X) \xrightarrow{\mathcal{J}_1} \cdots \xrightarrow{\mathcal{J}_n} \overline{F}(X) \xrightarrow{\rho_1} f(x) \xrightarrow{\rho_2} f'(x) \xrightarrow{\rho_3} f'[X/x] = \overline{F}'(X) \xrightarrow{\mathcal{J}_1^{-1}} \cdots \xrightarrow{\mathcal{J}_n^{-1}} F'(X)$$

Então a composta $F(X) \longrightarrow F'(X)$ é uma função contínua como uma composição de funções contínuas. Isto sugere a definição de $F'(X)$ como a derivada de $F(X)$. Partindo das regras de derivação para f é possível, usando essa cadeia, gerar regras análogas, (porque não dizer os mesmas regras para F?) para F.

5.1.4 Proposição

Seja $F(X)$ uma extensão de alguma função derivável f. Então F também é derivável e sua derivada é obtida pelo algorítmo acima

Prova: A cadeia acima.

□

5.1.5 Exemplo

Seja $F(X) = [2,4]X^2 + 2X$. Então $F'(X) = 2 \cdot [2,4]X + 2$. De fato,

$$[2,4]X^2 + 2X \xrightarrow{\mathcal{J}} 3X^2 + 2X \xrightarrow{\rho_1} 3x^2 + 2x \xrightarrow{\rho_2} 2 \cdot 3x + 2 \xrightarrow{\mathcal{J}^{-1}} 2 \cdot [2,4]X + 2.$$

De acordo com os resultados acima é possível se dar a seguinte definição.

5.1.6 Definição: Função Derivável e Derivada

Sejam D_1 e D_2 domínios com uma estrutura de quasi-corpo. Seja $F \in [D_1 \longrightarrow D_2]$. F diz-se *derivável* ou *diferenciável* no ponto $X_0 \in D_1$ se F é uma extensão (canônica ou não-canônica) da função f que é derivável no ponto x_0 tal que $X_0 << x_0$ e f' é contínua no ponto x_0. F diz-se *derivável* em $X \subseteq D_1$ se F é derivável em cada ponto de D_1. F', a *dirivada* de F, é obtida pelas mesmas regras de derivação usadas para obter f' de f porém, trocando f por F.

5.2 Espaços Vetoriais Computacionais

Motivado na definição de derivada e tendo em vista que já foi apresentado, no capítulo 2, o conceito de quasi-corpo, desenvolve-se nesta seção o conceito de espaço quasi-linear ou espaço quasi-vetorial, iniciando, assim, talvez, um ramo da matemática computacional que poderia ser denominada álgebra linear computacional.

5.2.1 Definição: Quasi-Corpo

Seja D um domínio munido das operações $-, +, \cdot, /, 0$ e 1. D diz-se um *quasi-corpo* se satisfaz, para todo $x, y, z \in D$ os seguintes axiomas

(1)	$x + y = y + x$; $\quad x \cdot y = y \cdot x$	(comutatividade)
(2)	$(y + z) + z = x + (y + z)$; $(x \cdot z) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	(associatividade)
(3)	$x + 0 = x; x \cdot 1 = x$	(existência de elemento neutro para a soma e para o produto)
(4)	$x - x << 0$; $\frac{x}{x} << 1$ e $\frac{0}{0} = \perp$	(existência do elemento semi-simétrico) e do elemento semi-inverso)
(5)	$x \cdot y + x \cdot z \sqsubseteq x \cdot (y + z)$	(semi-distributividade)

Se em (4) e (5) a igualdade se verifica, D diz-se um *corpo*.

Um exemplo de corpo é $\mathbb{R}$ e de quasi-corpo é $\mathcal{R}$. Isto mostra que o conceito de quasi-corpo generaliza o conceito de corpo. Ou seja, um corpo é um caso particular de quasi-corpo. Lembre-se que se $x, y \in D$ e $x << y$, então $x \sqsubseteq y$. Por isso $\mathbb{R}$ é um quasi-corpo.

5.2.2 Definição: Espaço Quasi-Linear

Seja $(L, \sqsubseteq, <<, \perp)$ um domínio e suponha que L está munido das operações "$-$","$+$" e "$\cdot$". L diz-se um *espaço quasi-linear* ou *espaço quasi-vetorial* sobre o quasi-corpo D se para todo $x, y, z \in L$ e $\alpha, \beta \in D$ ele satisfaz os seguintes axiomas.

(1)	$x + y = y + x$	(comutatividade)
(2)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	(associatividade)
(3)	$x + 0 = x$	(existência de elemento neutro para a soma)
(4)	$x - x << 0$	(existência do elemento semi-simétrico

(5) $\alpha \cdot x + \alpha \cdot y \sqsubseteq \alpha \cdot (x + y)$ (semi-distributividade)
(6) $\alpha \cdot x + \beta x \sqsubseteq (\alpha + \beta)x$ (semi-distributividade)
(7) $(\alpha \cdot \beta)x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (associatividade)
(8) $1 \cdot x = x$ (existência de elemento neutro para o produto)

Se em (4), (5) e (6) se verificam a igualdade L diz-se um *espaço linear* ou *espaço vetorial* sobre D.

5.2.3 Exemplo

(i) Defina $\mathcal{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathcal{R}\}, x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n), 0 = (0, \ldots, 0)$ $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x_i \sqsubseteq y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$; $x << y \Leftrightarrow x_i << y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1, \ldots, x_n \pm y_n), \quad \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

$(\mathcal{R}^n, -, +, \cdot, 0, 1)$ é um espaço quasi-linear sobre $\mathcal{R}$. Analogamente $\mathbb{R}^n$ é um espaço linear sobre $\mathbb{R}$.

(ii) Sejam D_1 e D_2 domínios com D_2 um espaço quasi-linear sobre algum quasi-corpo D. Seja $[D_1 \longrightarrow D_2]$ o espaço das funções contínuas de D_1 em D_2, onde para $f, g \in [D_1 \longrightarrow D_2]$, $f \sqsubseteq g \Leftrightarrow f(x) \sqsubseteq g(x), f << g \Leftrightarrow f(x) << g(x)$ para todo $x \in D_1$. $0 : D_1 \longrightarrow D_2$ tal que $0(x) = 0$ para todo $x \in D$, a função nula. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ para todo $x \in D_1$, $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, para $\alpha \in D$ e $x \in D_1$.

Então, $([D_1 \longrightarrow D_2], \sqsubseteq, <<, -, +, \cdot, 0)$ é um espaço quasi-linear sobre D. Em particular, $[\mathcal{R}_1 \longrightarrow \mathcal{R}_2]$ é espaço quasi-linear sobre $\mathcal{R}$.

Analogamente, $[tot(D_1) \longrightarrow tot(D_2)]$ é um espaço linear sobre $\mathbb{R}$. Lembre-se que em $tot(D)$ a relação $\sqsubseteq$ se torna a igualdade.

5.2.4 Definição: Subespaço Quasi-Linear

Seja L um espaço quasi-linear sobre D e $S \neq \phi$. S diz-se um *sub-espaço* quasi-linear de L, se

(a) $x, y \in S \Rightarrow x + y \in S$ e $x - y \in S$

(b) $\alpha \in D, x \in S \Rightarrow \alpha x \in S$

onde as operações e relações sobre S são induzidas de L.

5.2.5 Proposição

Seja L um espaço quasi-linear e S um subespaço de L. Então S, também, é um espaço quasi-linear.

Prova: imediata.

□

5.2.6 Exemplo

Seja $[D_1 \longrightarrow D_2]$ o espaço quasi-linear das funções contínuas, onde D_1 e D_2 são domínios com D_2 um quasi-corpo. Seja $\mathcal{D} \subseteq [D_1 \longrightarrow D_2]$ o conjunto das funções deriváveis de $D_1 \longrightarrow D_2$. $\mathcal{D}$ é um subespaço quasi-linear de $[D_1 \longrightarrow D_2]$, pois se f, g são deriváveis $f + g$ e αf também são. Portanto, $\mathcal{D}$ é, também, um espaço quasi-linear.

5.2.7 Definição: Aplicação Quasi-Linear

Sejam L e L' espaços quasi-lineares sobre o mesmo quasi-corpo D. Uma aplicação $T : L \longrightarrow L'$ diz-se uma *aplicação quasi-linear* se para todo $x, y \in L$ e $\alpha \in D$, se tem

(i) $T(x) + T(y) \sqsubseteq T(x + y)$

(ii) $T(\alpha \cdot x) = \alpha T(x)$

No caso de L' ser um espaço linear sobre um corpo D e em (i) se verificar a igualdade, T diz-se uma *aplicação linear*.

5.2.8 Corolário

Se $T : L \longrightarrow L'$ é aplicação quasi-linear, então $T(0) = 0$ e $T(-x) = -T(x)$.

Prova: De fato, $T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0) = 0$

$T(-x) = -1 \cdot T(x) = -T(x)$

□

5.2.9 Exemplo

(i) Sejam $\mathcal{R}^m$ e $\mathcal{R}^n$ como no Exemplo 5.2.3 (i) e $\alpha \in \mathcal{R}$ fixo.

$T : \mathcal{R}^m \longrightarrow \mathcal{R}^n$ tal que $T(x) = \alpha x$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é uma transformação quasi-linear. No caso de $\mathbb{R}^n$, T é uma aplicação linear.

(ii) A transformação $T : [D_1 \longrightarrow D_2] \longrightarrow [D_1 \longrightarrow D_2]$ tal que $T(f) = f'$, onde f' é a derivada de f é uma transformação quasi-linear.

De fato, $T(f + g) = (f + g)' = f' + g' = T(f) + T(g)$

$$T(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha \cdot f' = \alpha \cdot T(f).$$

Observe que $T(\alpha(f + g)) = (\alpha(f + g))' = \alpha(f + g)' \sqsupseteq \alpha f' + \alpha g' = \alpha T(f) + \alpha T(g)$.

Observe que o conceito de espaço quasi-linear generaliza o de espaço linear. O próximo passo seria definir combinação linear, independência linear, base, dimensão, representação matricial de uma aplicação quasi-linear, etc. No entanto para não desviar do objetivo principal, esses conceitos serão definidos em outra oportunidade.

5.3 Integração em Domínios

O objetivo desta seção é definir os conceitos de integral definida e indefinida para funções em DOM. Novamente, aqui, DOM será visto como o objeto universal D_∞. Seja $F \in D_\infty$ derivável e $F' \in D_\infty$ sua derivada. Então, $(F + C)' = F'$, ou seja, F' é a derivada da classe de funções $\{F + c | c \text{ constante}\}$. Designe por $[F]$ essa classe, isto é, $[F] = \{G \in D_\infty | F' = G'\}$. Desse modo toda função de $[F]$ somente difere de F por uma constante. Tome como representante de $[F]$ aquela função cuja constante que aparece na parcela é zero. Ou seja, se F é representante (principal) de $[F]$ e $G \in [F]$, então $G = F + c$. Desse modo, as funções deriváveis, de D_∞, que diferem apenas por uma constante serão identificadas. Com essa identificação existe uma bijeção, $I : F' \longmapsto F$, entre uma função derivável e sua derivada $(I(F))' = F$. Então $I : [D_\infty \longrightarrow D_\infty] \longrightarrow [D_\infty \longrightarrow D_\infty]$ é a aplicação inversa da derivada.

5.3.1 Proposição

I é uma transformação quasi-linear.

isto é, I satisfaz as seguintes propriedades

(a) $I(O) = O$

(b) $I(F+G) = I(F)+I(G)$ e consequentemente $I(F+G) \sqsupseteq I(F)+I(G)$, para todo F e G com $(I(F))' = F$ e $(I(G))' = G$

(c) $I(\alpha F) = \alpha I(F), \alpha$ constante e $(I(F))' = F$

Ou seja, I é uma aplicação quasi-linear.

Prova: (a) $I(0) = 0$, pois $0' = 0$

(b) $I(F+G) = H + L \Leftrightarrow (H+L)' = H' + L'$. Por outro lado, $H' = F \Leftrightarrow H = I(F)$ e $L' = G \Leftrightarrow L = I(G) \Leftrightarrow H + L = I(F) + I(G) = I(F+G)$

(c) $I(\alpha F) = G \Leftrightarrow \alpha F = G' \Leftrightarrow \alpha \cdot (I(F))' = G' \Leftrightarrow \alpha I(F) = G$. Logo, $I(\alpha F) = \alpha \cdot I(F)$.

□

Como $I(F) = G \Leftrightarrow G' = F$ segue que $I(F) \in D_\infty$, ou seja, é uma função contínua. Daí decorre imediatamente que I é uma função contínua de $[D_\infty \longrightarrow D_\infty] \longrightarrow [D_\infty \longrightarrow D_\infty]$, pois I é uma substituição.

5.3.2 Definição: Integral Indefinida

Dada $f \in D_\infty$ chama-se *primitiva de* f ou ***integral indefinida*** de f, denotado $\int f$, a função $F \in D_\infty$ tal que $F' = f$. A função de primitivação $\int : D_\infty \longrightarrow D_\infty$ tal que $f \longmapsto \int f$ é a função I discutido acima.

Assim a função $\int : D_\infty \longrightarrow D_\infty$ tal que $f \longrightarrow \int f$ possui as propriedades (a)-(c) da Proposição 5.3.1 e é uma função contínua.

Seja $f \in D_\infty$ e $A_1, A_2 \in D_\infty$ fixos. A partir de $\int$, definida acima, define-se a seguinte função:

$$\int_{A_1}^{A_2} : [D_\infty \longrightarrow D_\infty] \longrightarrow D_\infty \text{ tal que } \int_{A_1}^{A_2} f = (\int f)_{A_2}^{A_2} = F(A_2) - F(A_1)$$

, onde $F \in [D_\infty \longrightarrow D_\infty]$ é tal que $F' = f$ e F é a representação principal.

5.3.3 Exemplo

$$\begin{aligned} \int_{[2,3]}^{[3,4]}(X^2 + X) &= (\int X^2 + X)_{[2,3]}^{[3,4]} = \left(\tfrac{X^3}{3} + \tfrac{X^2}{2}\right)_{[2,3]}^{[3,4]} = \\ &= F[3,4] - F[2,3], \text{ onde } F(X) = \tfrac{X^3}{3} + \tfrac{X^2}{2}. \end{aligned}$$

5.3.4 Proposição

(i) $\int_{A_1}^{A_2}$ é uma função bem-definida

(ii) $\int_{A_1}^{A_2}(f + g) = \int_{A_1}^{A_2} f + \int_{A_1}^{A_2} g$, além disso, $\int_{A_1}^{A_2}$ é uma função quasi-linear.

(iii) $\int_{A_1}^{A_2}$ é uma função contínua.

Prova: (i) Suponha que $f = g \Rightarrow \int f = G \Rightarrow F(A_2) = G(A_2)$ e $F(A_1) = G(A_1) \Rightarrow F(A_2) - F(A_1) = G(A_2) - G(A_1) \Rightarrow \int_{A_1}^{A_2} f = \int_{A_1}^{A_2} g$.

(ii) $\int_{A_1}^{A_2}$ é uma função quasi-linear. De fato,

$$
\begin{aligned}
\int_{A_1}^{A_2} O &= \left(\int O\right)_{A_1}^{A_2} = O;\ \int_{A_1}^{A_2}(\alpha f) = \left(\int \alpha f\right)_{A_1}^{A_2} = \left(\alpha \int f\right)_{A_1}^{A_2} = \alpha(F(A_2) - F(A_1)) = \\
&= \alpha \int_{A_1}^{A_2} f;\ \int_{A_1}^{A_2}(f+g) = \left(\int (f+g)\right)_{A_1}^{A_2} = (F+G)_{A_1}^{A_2} = \int_{A_1}^{A_2} f + \int_{A_1}^{A_2} g
\end{aligned}
$$

(iii) $\int_{A_1}^{A_2}$ é uma função contínua.

De fato, ela é a função de avaliação $\int f \overset{ev}{\longmapsto} \left(\int f\right)_{A_1}^{A_2}$

□

Se $f \in [\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}]$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então a função $\int_a^b : f \longmapsto \int_a^b f$ é uma função contínua e $\int_a^b f \in \mathbb{R}$. Portanto, $\int_a^b f$ é o supremo de uma sequência de elementos de $\mathcal{R}$.

5.3.5 Proposição

Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, então $\int_a^b f = \lim_{\substack{A \to a \\ B \to b}} \int_A^B F$, onde $F << f$ e $F \in [\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}]$, $A, B \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$.

Prova: $A << a$, $B << b$ e $F << f \Rightarrow \int F << \int f \Rightarrow \int_A^B F << \int_a^b f$. Fazendo A e B convergir para a e b, respectivamente, tem-se $\lim_{\substack{A \to a \\ B \to b}} \int_A^B F = \int_a^b f$.

□

$\int_{A_1}^{A_2} F$ será chamada *integral definida* de $F \in [\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}]$ entre $A_1, A_2 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$.

5.4 Espaços Métricos, Espaços Quasi-Métricos e Convergência

Nesta seção será apresentado a teoria elementar dos espaços métricos como uma motivação para a teoria dos espaços quasi-métricos, também, apresentado nesta seção como uma generalização de espaços métricos. Sabe-se que toda métrica induz uma topologia de Hausdorff. A quasi-métrica é aquela estrutura que induz a topologia de Scott. A topologia de Scott fornece uma teoria puramente qualitativa ou lógica, enquanto espaços métricos, por outro lado, fornece uma teoria quantitativa. Desse modo, a quasi-metrizibilidade de um espaço topológico Scott vêm suprir esse aspecto quantitativo ausente em domínios. Outra vantagem da quasi-metrizibilidade está no fato de que, nestes espaços, é possível se definir o conceito de sequência, evitando, desse modo, a necessidade de se recorrer ao conceito de redes ou filtros, os únicos possíveis em espaços topológicos em geral. Aproveitando essas propriedades dos espaços quasi-métricos será apresentando o conceito de sequência convergente em domínios.

A teoria dos espaços métricos e quasi-métricos serão apresentados simultaneamente. A razão deste procedimento se justifica porque espaço quasi-métrico é uma generalização de espaço métrico, isto é, toda afirmação com respeito a espaço quasi-métrico é também verdadeira para espaço métrico. Como a recíproca é falsa serão destacados aqueles resultados que só valem para espaços métricos.

5.4.1 Definição: Espaço Quasi-Métrico e Espaço Métrico

Seja X um conjunto não-vazio. Uma função $q : X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, onde $\mathbb{R}_0^+$ é o conjunto dos números reais maiores ou igual a zero, diz-se uma *quasi-métrica* sobre X, se satisfaz os três axiomas seguintes.

(a) $q(x,x) = 0$, para todo $x \in X$

(b) $q(x,z) \leq q(x,y) + q(y,z)$, para todo $x, y, z \in X$

(c) $q(x,y) = q(y,x) = 0 \Rightarrow x = y$

Uma *métrica* ou *distância* sobre X, é uma quasi-métrica que satisfaz, além de (a),(b) e (c) os dois axiomas abaixo

(d) $q(x,y) = q(y,x)$ para todo $x, y \in X$

(e) $q(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

A estrutura (X,q) se $X \neq \phi$ e q é uma quasi-métrica diz-se um *espaço quasi-métrico*, se q é uma métrica diz-se um *espaço métrico*.

Seja $(L, +, -, \cdot, 0)$ um espaço linear sobre $\mathbb{R}$. Uma função $|| \quad || : L \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ diz-se uma *norma* sobre L se

(i) $||x|| \geq 0$ e $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, para todo $x \in L$

(ii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$; para todo $x, y \in L$

(iii) $||\alpha x|| = |\alpha|\ ||x||$,. para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in L$. O símbolo "$|\ |$" designa o valor absoluto em $\mathbb{R}$.

A estrutura $(L, +, -, \cdot, 0, ||\ \ ||)$ é chamada um *espaço linear normado*. Dados $x, y \in L$, defina $d(x, y) = ||x - y||$. Então $d : L \times L \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ é uma métrica sobre L. Para ver isto basta usar as propriedades da norma. Se L, em particular, fôr o $\mathbb{R}$ e $||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, então $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico. Em geral, (L, d) é um espaço métrico.

5.4.2 Definição: Bola Aberta e Conjunto Aberto

Seja (X, q) um espaço quasi-métrico e $r \in \mathbb{R}, r > 0$ e $a \in X$. O conjunto $B(a, r) = \{x \in X | q(x, a) < r\}$ é chamado *bola aberta com centro em a e raio r*. $A \subseteq X$ diz-se um *conjunto aberto* em X se para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

5.4.3 Proposição

Seja (X, q) um espaço quasi-métrico. Então (X, q) satisfaz as seguintes propriedades.

(i) ϕ e X são conjuntos abertos em X.

(ii) Se $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq X$ é uma família qualquer de conjuntos abertos de X, então $\cup_{i \in I}\{A_i\}$, também, é um conjunto aberto em X.

(iii) Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos abertos em X, então $\cap_{i=1}^n A_i$, também, é um conjunto aberto em X.

□

Esta proposição nos diz que a coleção $\mathcal{J} = \{A \subseteq X | A$ conjunto aberto em $X\}$ constitui uma topologia para X. Essa topologia diz-se *induzida* ou *gerada* pela quasi-métrica q. Assim, todo espaço quasi-métrico pode ser visto como um espaço topológico, para isso basta considerar a topologia gerada pela quasi-métrica.

Sejam X e Y espaços quasi-métricos. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ diz-se *contínua* no ponto $x_0 \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. f é contínua em $A \subseteq X$ se ela é contínua em todo ponto de A. Dizer que f é contínua em x_0 equivale a dizer que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $q(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow q(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. A função $f : X \longrightarrow Y$ diz-se *uniformemente contínua* se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in X,\ q(x, y) \leq \delta \Rightarrow q(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Uma função $f : X \longrightarrow Y, X, Y$ espaços quasi-métricos diz-se uma *isometria* se para toda $x, y \in X\ q(f(x), f(y)) = q(x, y)$. f diz-se uma *contração fraca* ou *não-expansiva* se para todo $x, y \in X, q(f(x), f(y)) \leq q(x, y)$. É claro que f isometria $\Rightarrow f$ não-expansiva $\Rightarrow f$ uniformemente contínua.

A seguir são dados exemplos importantes de espaços métricos e quasi-métricos. Antes, porém, deve-se observar que se $X_1, \ldots, X_n$ são espaços quasi-métricos (métricos), então $X_1 \times \ldots \times X_n$, também, é um espaço quasi-métrico (métrico). Pode-se definir o conceito de subespaço quasi-métrico (métrico) de modo análogo ao definido para espaço topológico.

5.4.4 Exemplo

Seja (M, d) um espaço métrico e X um conjunto não-vazio. Seja $B(X, M) = \{f : X \longrightarrow M | f$ é limitada$\}$. f é *limitada* se existe $k > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq k$ para todo $x, y \in X$. Usando a desigualdade triangular verifica-se que isto é equivalente a seguinte condição, para $a \in X$ fixo. $\exists r > 0$ tal que $f(X) \subseteq B(f(a), r)$.

Dados $f, g \in B(X, M)$ defina $d'(f, g) = \text{Sup}\{d(f(x), g(x)) | x \in X\}$. O conjunto $\{d(f(x), g(x)) | x \in X\} \subset \mathbb{R}$ é limitado, (logo tem supremo), pois para $a \in X$ fixo, $d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(a)) + d(f(a) + g(a)) + d(g(a), g(x))$. A aplicação d' é uma métrica em $B(X, M)$. Quando $M = E$, um espaço vetorial normado, $B(X, M)$ também é um espaço linear normado, com $||f|| = \text{Sup}\{||f(x)|| | x \in X\}$. Essa métrica é exatamente $||f - g||$. Em particular, o conjunto $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ das funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$ é um espaço linear normado, com norma $||f|| = \{|f(x)| | 0 \leq x \leq 1\}$.

Um espaço topológico $(X, \mathcal{J})$ diz-se *quasi-metrizável* se existe uma quasi-métrica, q, sobre X tal que a topologia gerada por q coincide com $\mathcal{J}$. Lembre-se que duas topologias $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}'$ coincidem quando os espaços $(X, \mathcal{J})$ e $(X, \mathcal{J}')$ são homeomorfos.

5.4.5 Proposição

Seja $(\mathcal{R}, \mathcal{J})$ o domínio dos reais parciais, com $\mathcal{J}$ a topologia de Scott sobre $\mathcal{R}$. Existe uma quasi-métrica, q, sobre $\mathcal{R}$, tal que a topologia induzida por q coincide com $\mathcal{J}$

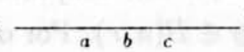
Prova: Defina $q : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$ como segue

Dados $[a,b],[c,d] \in \mathcal{R}, q([a,b],[c,d]) = \begin{cases} 0 & , \text{se } [c,d] \sqsubseteq [a,b] \\ max\{c-a, b-d\} & , \text{caso contrário} \end{cases}$

q é uma quasi-métrica sobre $\mathcal{R}$. De fato, é claro que para todo $x \in \mathcal{R}$, $q(x,x) = 0$.

Para mostrar a desigualdade triangular, isto é, que $q([a,b][e,f]) \leq q([a,b],[c,d]) + q([c,d],[e,f])$ são considerados vários casos. Antes, porém, tem-se $q([a,b],[c,d]) = max\{c-a, b-d\}, q([c,d],[e,f]) = max\{e-c, d-f\}$ e $q([a,b],[e,f]) = max\{e-a, b-f\}$.

(a) Suponha que $q([a,b],[c,d]) = c-a$ e $q([c,d],[e,f]) = e-c$.

(i) Se $q([a,b],[e,f]) = e-f$, então 
$(c-a)+(e-c) = e-a$ O.K.

(ii) Se $q([a,b],[e,f]) = b-f$, então
como $q([a,b],[c,d]) = c-a$, então $c-a \geq b-d$

Logo, $(c-a)+(d-f) \geq (d-f)+(b-d) = b-f$

(b) Suponha que $q([a,b],[c,d]) = b-d$ e $q([c,d],[e,f]) = e-c$

(i) Se $q([a,b],[e,f]) = e-a$
$(b-d)+(c-e) \geq (c-a)+(e-c) = e-a$, pois $c-a \leq b-d$ porque $q([a,b],[c,d]) = b-d$

(ii) Se $q([a,b],[e,f]) = b-f$
$(b-d)+(e-c) \geq (b-d)+(d-f) = b-f$, pois $d-f \leq e-c$.

(c) Suponha que $q([a,b],[c,d]) = b-d$ e $q([c,d],[e,f]) = d-f$

(i) Se $q([a,b],[e,f]) = e-a$, então $(b-d)+(d-f) \geq (c-a)+(e-c) = e-a$, pois $b-d \geq c-a$ e $d-f \geq e-c$.

(ii) Se $q([a,b],[\cdot\; f]) = b - f$, então $(b-d) + d - f = b - f$.

(d) Se $q([a,b],[c,d]) = 0$, $q([c,d],[e,f]) \neq 0$ e $q([a,b],[e,f]) \neq 0$, então $q([a,b],[c,d]) + q([c,d],[e,f]) = 0 + max\{e-c, d-f\}, q([a,b],[e,f]) = max\{e-a, b-f\}$.

Se $q([c,d],[e,f]) = e - c$, $q([a,b],[e,f]) = e - a$ O.K.

Se $q([c,d],[e,f]) = e - c$ e $q([a,b],[e,f]) = b - f$, então $d - f \leq e - f$, pois $q([c,d],[e,f]) = e - c$.

Logo, $e - c \geq d - f \geq b - f$, pois $b - f \leq e - c$. Suponha que $q([c,d],[e,f]) = d - f$ e $q([a,b],[e,f]) = e - a$. Então, $0 + q([c,d],[e,f]) \geq q([a,b],[e,f])$, pois $q([c,d],[e,f]) = d - f$ e portanto, $d - f \geq e - c \geq e - a$.

Suponha que $q([a,b],[e,f]) = b - f$, então $0 + d - f \geq q([a,b],[e,f])$. Logo, $0 + d - f \geq b - f$, pois $d \geq b$.

É claro que $q(x,y) = q(y,x) = 0 \Rightarrow x = y$ e que o conjunto $B(a,r)$, para $a \in \mathcal{R}$, $r > 0$, a bola centrada em a de raio r, é um conjunto aberto Scott, pois se $x \in B(a,r)$ e $x \sqsubseteq y$, $d(x,y) = 0$ e portanto $y \in B(a,r)$. Por outro lado se Sup $A \in B(a,r)$, para A dirigido, $b \sqsubseteq$ Sup A para $b \in A$ e consequentemente $A \cap B(a,r) \neq \phi$.

□

Dada uma sequência (x_n) de um espaço métrico (M,d) diz-se que ela *converge* para $x \in M$, chamado limite de (x_n) e denotado por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ou $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um índice k tal que para todo $n \geq k$ $d(x_n, x) \leq \varepsilon$. Isto é equivalente a dizer que $d(x_n, x) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$. É possível definir convergência de sequência apelando apenas para os abertos do espaço, pois em (M,d) é válida a seguinte proposição. "(x_n) converge para $x \in M$ se e somente se todo aberto que contém x contém quase todos os termos da sequência, no sentido de que só não pertence ao aberto quando muito um número finito de termos da sequência".

Se (X,q) é um espaço quasi-métrico e também um domínio da matemática computacional define-se limite de uma sequência de um modo diferente do convencional. Essa definição é baseada no seguinte argumento: [SCO 72a], [GIE 80] página 104, dá a seguinte definição: "uma sequência (x_n) em X converge para um ponto $x \in X$ se $\{x_n\} \subseteq X$ é um conjunto dirigido e x é o supremo desse conjunto". O teorema 18, página 104, [GIE 80] expressa que essa definição de convergência coincide com a definição topológica, dada acima, se e somente se X fôr um reticulado contínuo. Esse teorema ainda é válido se se trocar reticulado contínuo por domínio desde que o topo não-desempenha nenhum papel na sua demonstração e um domínio se torna um reticulado contínuo acrescentado-lhe um topo. Portanto se torna razoável a seguinte definição.

5.4.6 Definição: Sequência Convergente

Seja D um domínio. Uma sequência em D diz-se *convergir* para $x \in D$, denotado por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ou $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, se $\{x_n\} \subseteq D$ é um conjunto dirigido e $x = \text{Sup}\{x_n\}$.

Essa definição vale, em particular, para o espaço quasi-métrico $(\mathcal{R}, q)$.

5.4.7 Exemplo

A sequência $([1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}])$ converge para $[1,2]$, pois ela é um conjunto dirigido de $\mathcal{R}$ cujo supremo é $[1,2]$. Portanto $\lim_{n\to\infty}[1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}] = [1,2]$.

Uma sequência (x_n) de um espaço métrico (M,d) diz-se uma *sequência de Cauchy* se para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice k tal que se $m, n \geq k$ então $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$. Um espaço métrico (M,d) diz-se *completo* se toda sequência de Cauchy em M converge para um ponto de M. Um *espaço de Banach* é um espaço linear normado completo. Portanto um espaço de Banach é um espaço métrico. O $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (o espaço das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$) são os dois exemplos de espaços de Banach mais comuns em Análise. A norma em $\mathbb{R}^n$ é dada por $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. A norma de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ é a norma do Sup visto acima. Não existe nenhuma perda de generalidade em se estudar $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ em vez de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ pois esse dois espaços são homeomorfos.

Os espaços de Banach são os espaços típicos da Análise Clássica. Eles são suficientemente bem comportados para dá conta da maioria das questões sucitadas em Análise. Ele satisfaz, como será visto oportunamente, o teorema de ponto fixo, conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Banach, ferramenta fundamental na garantia de convergência de processos. As sequências típicas dos espaços de Banach são aquelas de Cauchy, as quais são sempre convergentes para um ponto do espaço. Se o espaço de Banach fôr o $\mathbb{R}^n$, pode-se acrescentar que todo ponto de $\mathbb{R}^n$ é o limite de alguma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$.

O leitor já está observando que existe um paralelismo entre espaços de Banach em Análise e em domínios da matemática computacional. Os domínios são espaços completos, no sentido de que toda sequência convergente (sequência dirigida) converge para um ponto do espaço. Pode-se dizer, então, que as sequências convergentes em domínios corresponde as sequências de Cauchy em espaços de Banach. Além disso, todo ponto de um domínio é o limite de uma sequência de pontos do espaço. É possível dizer, até, que esses pontos pertencem a base do domínio. Desse modo, um domínio tem um comportamento análogo ao espaço de Banach $\mathbb{R}^n$. As funções típicas em espaços de Banach são aquelas uniformemente contínuas. De fato, somente as funções uniformemente contínuas entre esses espaços preservam as sequências de Cauchy. Por exemplo, $(0,1)$ (o intervalo aberto $(0,1)$) é um espaço de Banach, $x_n = \frac{1}{n}$ é uma sequência de Cauchy em $(0,1), f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função contínua e $f(\frac{1}{n}) = n$, não é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Isto só foi possível porque $f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua. Por outro lado as funções contínuas entre domínios preservam sequências convergentes. Portanto as funções contínuas em domínios se comportam como aquelas uniformemente contínuas em espaços de Banach. Por fim, toda função contínua de um domínio nele mesmo possui um menor ponto fixo. Como o critério para determinar esse menor ponto fixo é contínuo, pode-se dizer que toda função contínua de um domínio nele mesmo possui um único ponto fixo. Tudo isso nos convence do acerto da escolha de domínios como espaços típicos da matemática computacional.

No sentido de entender melhor o espaço quasi-métrico $\mathcal{R}$ será estudado com mais detalhe o espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ como um subespaço de $[\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}]$. Para isso será analizado o espaço $F = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ é contínua }\} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Antes, porém, far-se-á um estudo rápido de espaços compactos.

5.4.8 Definição: Cobertura Aberta e Subcobertura Finita

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico e $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{J}$ uma coleção de conjuntos abertos de X. $\{A_i\}_{i \in I}$ diz-se uma *cobertura aberta* de X se para cada $x \in X$ existe um A_i com $x \in A_i$, isto é, $X = \cup_{i \in I} A_i$. Uma *subcobertura aberta finita* de X é um subcoleção, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$, finita, de $\{A_i\}_{i \in I}$, que também cobre X, isto é, $X = A_1 \cup, \ldots, \cup A_{i_n}$.

5.4.9 Definição: Conjunto Compacto

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico T_0. X diz-se um *espaço compacto* se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita. $K \subseteq X$ diz-se um *subconjunto compacto* de X, se visto como subespaço é compacto.

No $\mathbb{R}^n$ os conjuntos compactos são exatamente aqueles que são fechados e limitados. Toda função contínua definida num espaço compacto é uniformemente contínua [LIM 77]. Em espaços de Banach, em geral, todo subconjunto fechado de um espaço compacto, também, é compacto [DUN 66]. Funções contínuas preservam conjuntos compactos e toda função contínua definida num espaço compacto é limitada [LIM 77].

5.4.10 Proposição

Todo domínio D é um espaço compacto.

Prova: Basta ver que $D = \Uparrow \bot$ e toda cobertura aberta de D contém $\Uparrow \bot$.

□

Os conjuntos compactos de D são da forma $\{y \in D | x \sqsubseteq y$ para algum $x \in D\} = \uparrow x$, ou uniões finitas de conjuntos desta forma. Observe que $\uparrow x$, para $x \in D$, não é um subconjunto fechado de D, pois os subconjuntos fechados de D são da forma $\downarrow x = \{y \in D | y \sqsubseteq x\}$ ou uniões finitas destes.

Seja $F = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é contínua$\}$ e $f, g \in F, \alpha \in \mathbb{R}$. Então, $f - g, f + g, \alpha f$, o são funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, isto é, pertencem a F, [LIM 77]. Logo F é um espaço linear real (sobre $\mathbb{R}$). O espaço $[0,1]$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ e portanto qualquer função contínua $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ atinge um máximo em $[0,1]$, [LIM 77]. Logo, tem sentido definir-se

$$||f|| = \mathrm{Sup}\{f(x) | x \in [0,1]\}.$$

É fácil ver que $|| \quad || : F \longrightarrow \mathbb{R}$, definido desta maneira é uma norma. Definindo $d(f,g) = ||f - g||$, para todo $f, g \in F, (F, d)$ é um espaço métrico e consequentemente $(F, \mathcal{J})$ é um espaço topológico onde $\mathcal{J}$ é a topologia induzida pela métrica d.

5.4.11 Proposição

$(F, +, -, \cdot, 0, || \quad ||)$ é um espaço de Banach.

Será feita a demonstração deste resultado com o objetivo de esplorar o conceito de convergência de sequência de funções em espaços métricos completos.

Sejam (M, d) um espaço métrico e $f_n : X \longrightarrow M$ uma sequência de funções de um conjunto qualquer $X \neq \phi$ em M. Existem pelo menos duas noções de convergência da sequência de funções (f_n). A convergência pontual e a convergência uniforme.

5.4.12 Definição: Convergência Pontual

Seja (M, d) em espaço métrico e X um conjunto qualquer. Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow M$ diz-se convergir *pontualmente* para a função $f : X \longrightarrow M$ quando para cada $x \in X$, a sequência $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$ converge para $f(x)$. Ou seja, para cada $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ (n_0 depende ε e x_0) tal que se $n > n_0$, então $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Notação: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ou $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

5.4.13 Exemplo

A sequência $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \frac{x}{n}$, converge pontualmente em $\mathbb{R}$ para a função nula. De fato, para cada x fixo, tem-se $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$. Ou formalmente, dado $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{|x|}{\varepsilon}$. Então $n > n_0$ acarreta $\frac{|x|}{n} < \varepsilon$.

5.4.14 Definição: Convergência Uniforme

A sequência de aplicações $f_n : X \longrightarrow M$ *converge uniformemente* para a função $f : X \longrightarrow M$ em X, quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Ou seja, o natural n_0 depende de ε, mas não pode depender de x. Notação: $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ou $f_n \xrightarrow{unifte} f$.

É claro que se $f_n \xrightarrow{unifte} f$, então $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pontualmente. A recíproca, no entanto, é falsa. Com efeito, a sequência de funções $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = x^n$ converge pontualmente para a função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$

Mas essa convergência não é uniforme em $[0,1]$. De fato, tomando $0 < \varepsilon < 1$ por maior que seja n, é possível encontrar pontos $x \in [0,1]$ tais que $f_n(x) - f(x) = x^n \geq \varepsilon$. Basta tomar x tal que $\sqrt[n]{\varepsilon} \leq x < 1$. No entanto no intervalo da forma $[0, 1-\delta], 0 < \delta < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, uniformemente. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{n\to\infty}(1-\delta)^n = 0$, sempre existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ acarreta $(1-\delta)^n < \varepsilon$. Portanto, para todo $x \in [0, 1-\delta]$ e todo $n > n_0$ tem-se $0 \leq x^n \leq (1-\delta)^n < \varepsilon$.

Com relação a sequências e convergências pode-se dizer o seguinte: Primeiro obteve-se o conceito de convergência de sequência em $\mathbb{R}$. Em seguida este conceito foi extendido para sequência de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Então apareceram duas noções diferentes de convergência: pontual e uniforme. O conceito de convergência em $\mathbb{R}$ se aplica para qualquer espaço métrico, em particular para o espaço métrico $(F, +, -, \cdot, 0, \| \quad \|)$, das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, denotado, simplesmente, por $[[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}]$. Que relação existe entre a convergência neste espaço e as convergências uniforme e pontual, vistas acima?. Resposta: O conceito de convergência uniforme para funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ coincide com o conceito de convergência no espaço de funções. Para ver isto será considerada a seguinte proposição.

5.4.15 Proposição

Seja $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas convergindo uniformente para $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Então para todo n suficientemente grande, $\|f_n - f\|$ é finito e $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ no espaço de funções $[[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}]$. Reciprocamente, se $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, em $[[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}]$, então $f_n \overset{unifte}{\longrightarrow} f$ em $[0,1]$. Além disso, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Ou seja, $[[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}]$ é completo.

Prova: Basta observar que sendo $\|f_n - f\| = \text{Sup}\{|f_n(x) - f(x)| | x \in [0,1]\}$, se $\|f_n - f\| < \varepsilon$, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$. Por outro lado, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in [0,1]$ acarreta $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$.

Deve-se mostrar, agora, que f é contínua para qualquer ponto $x \in [0,1]$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Escolhe-se um natural n tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$, para todo $x \in [0,1]$. Isto é possível porque $f_n \overset{unifte}{\longrightarrow} f$. Como f_n é contínua no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f(a)| < \varepsilon/3$. Portanto, para todo $x \in [0,1]$, com $|x - a| < \varepsilon$ tem-se

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + = \varepsilon.$$

□

5.4.16 Corolário

$(F, +, -, \cdot, 1, \|\ \ \|)$ é um espaço de Banach.

Prova: imediata.

Observe que este corolário é a Proposição 5.4.11.

No sentido de mostrar que $([0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \mathcal{J}_{\text{Sup}})$, com a topologia gerada pela norma do Sup, é homeomorfo ao subespaço das funções contínuas de $tot(\mathcal{R}) \longrightarrow tot(\mathcal{R})$, com a topologia induzida de $[\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}]$, será demonstrada a proposição abaixo precedida de dois lemas.

5.4.17 Lema

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico com $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$. Então as duas propriedades de $\mathcal{B}$ são equivalentes.

(i) $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{J}$.

(ii) Para cada $G \in \mathcal{J}$ e cada $x \in G$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq G$.

Prova: (i) $\Rightarrow$ (ii). Seja $x \in G$. Como $G \in \mathcal{J}$ e $\mathcal{B}$ é uma base,$G = \cup_\alpha B_\alpha$, onde cada $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Portanto existe no mínimo um $\cup_\alpha \in \mathcal{B}$ com $x \in \cup_\alpha \subseteq G$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Seja $G \in \mathcal{J}$. Para cada $x \in G$, tome $\cup_x \in \mathcal{B}$ e $\cup_x \subseteq G$. Então, $G = \cup\{\cup_x | x \in G\}$.

□

5.4.18 Lema

Sejam (M, d_1) e (N, d_2) espaços métricos e $f : M \longrightarrow N$ uma função contínua. Então $Graf(f) = \{(x, f(x)) | x \in M\}$, o gráfico de f, é homeomorfo a M. Além disso, se M é compacto, $Graf(f)$ também é.

Prova: A função $\varphi : M \longrightarrow M \times N$ definida por $\varphi(x) = (x, f(x))$ é contínua e tem inversa $\varphi^{-1} = P_1 | Graf(f)$ que também é contínua. Além disso, a propriedade de ser compacto é um invariante topológico, isto é, se dois espaços são homeomorfos e um deles é compacto, então o outro também é.

□

5.4.19 Proposição

Seja $([0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \mathcal{J}_{\text{Sup}})$ o espaço das funções contínuas com a topologia do Sup. Seja $V^* \subseteq [[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}]$ como segue: para cada aberto $V \subseteq [0,1] \times \mathbb{R}$, $V^* = \{f \in [[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}] | Graf(f) \subseteq V\}$. Então $\mathcal{B} = \{V^* | V \subseteq [0,1] \times \mathbb{R}$ é aberto $\}$ é uma base de $[[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}]$.

Prova: Primeiro deve-se mostrar que V^* é aberto em $[[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}]$.

Se $pr_1(V) \neq [0,1]$, então $V^* = \phi$, que é aberto. Caso contrário, seja $f \in V^*$. Como $Graf(f)$ é uma conjunto compacto, $d(Graf(f), [0,1] \times \mathbb{R} - V) = r > 0$ (para uma prova deste fato ver [LIM 77], exercício 8, página 215). Logo $d(f,g) < r \Rightarrow d[(t,f(t)),(t,g(t))] = d(f(t),g(t)) < r$. Portanto $(t,g(t)) \in V$ para todo $t \in [0,1]$. Consequentemente, $Graf(f) \subseteq V$ e $g \in V^*$. Isto significa que $f \in V^*$ acarreta $B(f,r) \subseteq V^*$. Ou seja, V^* é aberto.

$\mathcal{B}$ é uma base de $[[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}]$. De fato, pelo Lema 5.4.17 é suficiente mostrar que para toda bola aberta $B(f,r)$ de $[[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}]$ e $g \in B(f,r)$ existe um $B' \in \mathcal{B}$ tal que $g \in B' \subseteq B$. Para isso seja $B(f,r)$ uma tal bola aberta em $[[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}]$. Então o conjunto $V = \{(t,y) \in [0,1] \times \mathbb{R},\ d(f(t),y) < r_2\}$ é aberto em $[0,1] \times \mathbb{R}$, pois f e d sendo funções contínuas, $d \circ (f, id)$ também é, e $V = [d \circ (f, id)]^{-1}((-r,r))$, onde $(-r,r)$ é o intervalo aberto, em $\mathbb{R}$, centrado em 0 e raio r. Agora, seja $g \in V^*$, então $graf(g) \subseteq V$ e portanto $d(f(t),g(t)) < r/2$ para todo $t \in [0,1]$ implica $d(f,g) < r_2$, isto é, $g \in B(f,r)$. Logo, $f \in V^* \subseteq B(f,r)$.

□

5.4.20 Corolário

A topologia do Sup de $[[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}]$ depende apenas das topologias de $[0,1]$ e $\mathbb{R}$, mas não das métricas particulares usadas para defini-las. Ou seja, se os espaços compactos da reta K_1 e K_2 são homeomorfos e M_1 e M_2 também são homeomorfos, então $[K_1 \longrightarrow M_1]$ e $[K_2 \longrightarrow M_2]$ também são.

□

5.5 Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais

Nesta seção será apresentado o Teorema do Ponto Fixo de Banach e sua aplicação na garantia de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais. Em seguida será apresentado resultado análogo para equações diferenciais em domínios.

Seja (M, d) um espaço métrico e $\Psi : M \longrightarrow M$ uma função total. Que condições devem satisfazer (M, d) e Ψ de modo que exista um único $x \in M$ tal que $\Psi(x) = x$? Já se sabe que se X fôr um domínio e $\Psi : X \longrightarrow X$ fôr uma função contínua então existe um ponto de início $\perp \in X$ tal que aplicando Ψ sucessivamente a $\perp$ se obtém a sequência $\perp, \Psi(\perp), \Psi^2(\perp), \ldots$

A monotonicidade de Ψ força a sequência ser uma cadeia ascendente. A definição de limite em domínios fornece $x = \lim_{x \to \infty} \Psi^n(\perp)$ e a continuidade de Ψ garante que $\Psi(x) = \lim_{n \to \infty} \Psi^n(\perp)$. além disso, x é o menor de todos os elementos que satisfaz esta condição. Como existe um critério contínuo de determinar x, pode-se dizer que x é único.

No caso do espaço métrico (M, d) não existe um ponto de início natural, como $\perp$. Assim deve-se começar com um $x_0 \in M$ qualquer. Forma-se a sequência (x_n)

$$x_0, \Psi(x_0), \Psi^2(x_0), \ldots, \Psi^n(x_0), \ldots$$

Esta sequência deve ter um limite x. Portanto (x_n) deve ser uma sequência de Cauchy. Como toda sequência desse tipo deve convergir, (M, d) precisa ser um espaço métrico completo. Além disso, $x_n \longrightarrow x$ deve implicar $\Psi(x_n) \longrightarrow \Psi(x) = x$ e x deve ser único.

Em resumo: Como deve ser Ψ de modo que

(i) (x_n) seja uma sequência de Cauchy?

(ii) $\lim_{n \to \infty} \Psi(x_n) = \Psi(\lim_{n \to \infty} x_n) = x$?

(iii) x seja único?

A questão (iii) é respondida pela seguinte proposição.

(iii) x seja único?

A questão (iii) é respondida pela seguinte proposição.

5.5.1 Proposição

Seja (M, d) um espaço métrico qualquer e $\Psi : M \longrightarrow M$ satisfazendo a seguinte condição:

$$d(\Psi(x), \Psi(y)) < d(x, y), \quad \text{sempre que} \quad x \neq y. \tag{1}$$

Então se Ψ tiver ponto fixo, ele é único.

Prova: Se $\Psi(x) = x$ e $\Psi(y) = y$ e $x \neq y$, então

$$d(x, y) = d(\Psi(x), \Psi(y)) < d(x, y), \text{ absurdo}$$

$\square$

É possível existir espaços métricos onde Ψ satisfaça a condição (1) acima, e não possui ponto fixo algum? O seguinte exemplo responde afirmativamente esta questão. Seja $(\mathbb{R}, d)$ o espaço métrico da reta usual, onde $d(x, y) = |x - y|$. Seja $M = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$, onde $x_n = \frac{1}{n}$. Então, (M, d) é um espaço métrico, com a métrica induzida de $(\mathbb{R}, d)$. Defina $\Psi : M \longrightarrow M$ por $\Psi(x_n) = x_{n+1}$. Ψ satisfaz a condição (1) acima, e no entanto Ψ não possui nenhum ponto fixo. Isto só foi possível porque (M, d) não é um espaço métrico completo.

5.5.2 Definição: Contração

Seja (M, d) um espaço métrico. Uma aplicação $\Psi : M \longrightarrow M$ diz-se uma *contração* se existe $0 \leq k < 1$ tal que $d(\Psi(x), \Psi(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ para todo $x, y \in M$, com $x \neq y$.

Observando a Proposição 5.5.1 e esta definição segue que a unicidade do ponto fixo é garantida se Ψ é um contração. O próximo teorema nos diz que nos espaços métricos completos a condição de contração é suficiente para Ψ garantir as outras duas condições.

5.5.3 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Seja (M, d) um espaço métrico completo, $x_0 \in M$ qualquer e $\Psi : M \longrightarrow M$ uma contração. Então, Ψ tem um único ponto fixo, qual seja

$$x = \lim_{n\to\infty}(\Psi^n(x_0)).$$

Prova: Primeiro, respondendo a questão (i), acima, deve-se mostrar que $(x_n) = (\Psi^n(x_0))$ é uma sequência de Cauchy, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > k$, então $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

De fato,

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(\Psi(x_0), \Psi(x_1)) \leq k \cdot d(x_0, x_1); d(x_2, x_3) = d(\Psi(x_1), \Psi(x_2)) \leq \\ &\leq k \cdot d(x_1, x_2) \leq k^2 d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Em geral, tem-se $d(x_m, x_{m+1}) \leq k^m d(x_0, x_1)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Então, se $m, n \in \mathbb{N}$, quaisquer, tem-se

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{m+n-1}, x_{m+n}) \leq \\ &\leq (k^m + k^{m-1} + \cdots + k^{m+n-1}) d(x_0, x_1) = k^m(1 + k + \cdots + k^{n-1}) \\ &\quad d(x_0, x_1) \leq \tfrac{k^m}{1-k} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} k^m = 0$, segue que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Se (x_n) é de Cauchy e M é completo, então (x_n) converge para um ponto $x \in M$, isto é, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Para responder a questão (ii), acima, tem-se, se Ψ é uma contração, então $d(\Psi(x_n), \Psi(x)) \leq d(x_n, x)$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} d(\Psi(x_n), \Psi(x)) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Logo, $\lim_{n\to\infty} d(\Psi(x_n), \Psi(x)) = 0$, isto é,. $\lim_{n\to\infty} \Psi(x_n) = \Psi(x)$. Ou seja, $\lim_{n\to\infty} \Psi(x_n) = \Psi(\lim_{x\to\infty} x_n) = x = \Psi(x)$. A gestão (iii) foi respondida pela Proposição 5.5.1.

□

Seja $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Procura-se por uma trajetória $x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que especifica o valor $x(t)$ para cada $t \in [t_0, t_1]$ de tal modo que satisfaça a equação recursiva.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{2}$$

para um valor especificado $x_0 \in \mathbb{R}$.

Nesta equação a função procurada, $x(t)$, é uma função dela própria, o que é típico das equações funcionais recursivas (lembre-se que $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, a derivada de x em relação a t, no ponto t). Isto sugere que se procure o ponto fixo de algum operador. De fato, na hipótese de continuidade pode-se integrar ambos os membros de (2) para se obter

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds &= \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds, \text{ ou equivalentemente,} \\ x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

Usando o valor especificado, $x(t_0) = x_0$, obtém-se finalmente

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \tag{3}$$

que é uma equação de ponto fixo.

Com efeito, seja $[[t_0,t_1] \to \mathbb{R}]$ o espaço de Banach das funções contínuas de $[t_0,t_1]$ em $\mathbb{R}$. Para cada $x : [t_0,t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, considere o operador

$$\Psi[[t_0,t_1] \longrightarrow \mathbb{R}] \longrightarrow [[t_0,t_1] \longrightarrow \mathbb{R}] \quad \text{tal que}$$

$\Psi(x) : [t_0,t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua definida por

$$\Psi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds. \tag{4}$$

Desse modo, (3) tem solução se e somente se o operador Ψ tem ponto fixo. Seria desejável que esse ponto fixo fosse único, ou que houvesse um critério contínuo para escollher dentre todos os pontos fixos aquele mais conveniente. A próxima definição tem como objetivo encaminhar a solução deste problema.

5.5.4 Definição: Condição de Lipschitz

Diz-se que $f : [t_o,t_1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz uma *condição de Lipschitz sobre* $\mathbb{R}$ (pode-se substituir $\mathbb{R}$ por um espaço de Banach ou domínio), *uniformemente com respeito a* t em $[t_0,t_1]$ se existe um número k tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y|, \text{ para todo } x,y \in \mathbb{R} \text{ e } t \in [t_0,t_1].$$

5.5.5 Teorema

Seja $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo uma condição de Lipschitz com constante $k > 0$. Então, o operador correspondente

$$\Psi[[t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}] \longrightarrow [[t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}], \quad \text{como (4), tem um único ponto fixo}$$

Prova: Deve-se comparar $d(\Psi(x), \Psi(y))$ com $d(x, y)$. No cálculo que segue $t \in [t_0, t_1]$.

$$\begin{aligned} d(\Psi(x), \Psi(y)) &= \mathrm{Sup}|\Psi(x)(t) - \Psi(y)(t)| = \mathrm{Sup}|\int_{t_0}^{t}(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds| \leq \\ &\leq \mathrm{Sup}\left(\int_{t_0}^{t}|f(s, x(s)) - f(s, y(s))|ds\right) \leq \\ &\leq \mathrm{Sup}\left(\int_{t_0}^{t} k|x(s) - y(s)|ds\right) \leq \\ &\leq \mathrm{Sup}(k \cdot d(x, y) \cdot |t - t_0|), \end{aligned}$$

pois $|x(s) - y(s)| \leq d(x, y) = k(t_1 - t_0) \cdot d(x, y)$.

Para aplicar o teorema do ponto fixo de Banach deve-se ter $k \cdot (t_1 - t_0) < 1$. Nada garante que isso acontece. No entanto, existe $n \geq 1$ para o qual Ψ^n é uma contração. De fato,

$$d(\Psi^n(x), \Psi^n(y)) \leq \frac{[k \cdot (t_1 - t_0)]^n}{n!} d(x, y).$$

Esta igualdade pode ser provada por indução sobre n. Pode-se escolher n, suficientemente grande, tal que

$$[k \cdot (t_1 - t_0)]^n < n!$$

e concluir que Ψ^n, para este n, é uma contração.

Considere que $\Psi^n(\Psi(x)) = \Psi(\Psi^n(x)) = \Psi(x)$. Ou seja, $\Psi(x)$ também é um ponto fixo de Ψ^n. Como Ψ^n tem um único ponto fixo, então $\Psi(x) = x$. Observando que todo ponto fixo de Ψ também é de Ψ^n conclui-se a prova.

□

No que segue os problemas acima são formulados no espaço $\mathcal{R}$ dos reais parciais. O problema (1), acima, poderia ser formulado como segue: Dado $[t_0, t_1]$, como acima, seja $P_0, P_1 \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$ tal que $P_0 << t_0$ e $P_1 << t_1$. Seja, $F : [P_0, P_1] \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ uma função contínua, que é uma extensão de f. Seja $X : [P_0, P_1] \longrightarrow \mathcal{R}$ a extensão correspondente de $x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Então, para cada $T \in [P_0, P_1]$, achar $X(T)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \dot{x}(T) &= F(T, X(T)) \\ X(P_0) &= X_0 \end{cases} \tag{5}$$

onde X_0 é um valor definido em $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ que aproxima o valor de $x_0 \in \mathbb{R}$. Analogamente ao caso real, esta equação pode ser transformada na equação integral

$$X(T) = X_0 + \int_{P_0}^{T} F(S, X(S))ds, \quad P_1 << T.$$

Para cada $X : [P_0, P_1] \longrightarrow \mathcal{R}$ considere o operador definido por

$$\Psi : [[P_0, P_1] \longrightarrow \mathcal{R}] \longrightarrow [[P_0, P_1] \longrightarrow \mathcal{R}]$$

$$\Psi(X)(T) = X_0 + \int_{P_0}^{T} F(S, X(S))ds. \tag{6}$$

Desse modo, a equação (5) tem solução se e somente se (6) tem um ponto fixo. Para mostrar que (6) tem único ponto fixo (o menor determinado por critério) basta mostrar que Ψ é um operador contínuo. Mas já foi visto anteriormente que $\int_{P_0}^{T} F(S, X(S))ds$ é uma função contínua como a soma de uma constante com uma função contínua.

□

6 OS NÚMEROS REAIS COMO LÓGICAS DAS OBSERVAÇÕES FINITAS

Este capítulo introduz os conceitos fundamentais de linguagem e de lógicas sobre uma linguagem. A introdução desses conceitos visa dar uma apresentação rápida de lógica clássica e intuicionística. É apresentada, com um pouco mais de profundidade, a lógica das observações finitas, denominada de lógica geométrica. O objetivo principal desse capítulo, além de servir de base para o próximo, é apresentar os números reais como uma teoria lógica geométrica.

Na Seção 6.1 e 6.2 são apresentados os conceitos de linguagem e interpretação, destacando os conceitos de interpretação sintática e semântica. Essa seção é baseada nos trabalhos [GOG 77], [GRA 79], [COH 65], [TUR 84], [JOH 87], [MAR 88] e [BUN 76].

A Seção 6.3 apresenta os conceitos de lógica sobre uma linguagem e sistema dedutivo. São apresentadas as lógicas clássica e intuicionística. Esta seção é baseada nos trabalhos de [PAU 87], [HEY 71], [JOH 87], [TUR 84], e [END 72].

A Seção 6.4 apresenta a linguagem das asserções afirmáveis com uma motivação para lógica geométrica, como está em [VIC 89].

A Seção 6.5 apresenta os conceitos de frame e lógica geométrica e é inspirada nos trabalhos de [JOH 82] e [VIC 89].

Finalmente a Seção 6.6 apresenta os números reais como lógicas geométricas.

6.1 Linguagens e Interpretações

A toda linguagem estão associados dois elementos básicos, um *alfabeto* que especifica quais símbolos serão usados na linguagem e uma *gramática* para caracterizar sua sintaxe, isto é, para especificar como esses símbolos podem ser agrupados formando as expressões admissíveis da linguagem. O que diferencia uma linguagem natural de uma linguagem formal é o fato de que nesta a gramática é especificada precisamente, enquanto naquela isto nem sempre é possível.

Seja $\sum$ um conjunto enumerável de símbolos, o qual é chamado *alfabeto*. O conjunto de todas as expressões finitas de elementos de $\sum$, incluindo a expressão vazia, será denotada por $\sum^*$. Define-se uma *linguagem* sobre $\sum$ como sendo um subconjunto próprio de $\sum^*$.

Seja $\sum$, por exemplo, um alfabeto constituído pelas letras do alfabeto português acrescentado dos símbolos de pontuação. Uma linguagem sobre este alfabeto são as palavras admissíveis da lingua portuguêsa. Enquanto a palavra "casa" pertence a essa linguagem a palavra "acsa" não pertence. Não existe nenhuma razão aparente para que isso se verifique.

Seguindo essa linha de exemplo, considere, agora, um alfabeto cujos símbolos sejam as palavras admissíveis da lingua portuguêsa, isto é, a linguagem do exemplo anterior, aqui denominada 1ª linguagem. Uma linguagem sobre esse alfabeto é a própria lingua portuguêsa. A expressão "esta casa é bonita" pertence a essa linguagem, enquanto a expressão "é casa esta bonita" não pertence. Devido ao fato de que a cada momento estão aparecendo novas palavras na lingua portuguêsa pode-se dizer que a 1ª linguagem é infinita enumerável. E isso é um fenômeno comum no que diz respeito a linguagens.

Um fato notável é que a segunda linguagem tem como alfabeto a primeira. Diz-se também que a segunda linguagem é uma *metalinguagem* da primeira.

A lingua portuguesa é chamada uma lingua natural porque não existe um conjunto finito de regras para dizer quando uma expressão qualquer é admissível ou não. Desse modo uma linguagem é dita formal quando existe um conjunto finito de regras tal que dado uma palavra admissível da linguagem é possível provar que ela, de fato, é admissível. Como de ora em diante só serão estudadas linguagens formais a expressão "linguagem" significará linguagem formal. Far-se-á a convenção de que todo alfabeto, apresentado de ora em diante contém, sem menção explícita, os símbolos de pontuação necessários para tirar as ambiguidades das expressões. Esses símbolos podem ser vírgulas, ponto e vírgulas, pontos, parênteses, etc.

Assim, uma *linguagem formal* é especificada por um par $< \sum, \mathcal{G} >$, onde $\sum$ é um conjunto contável de símbolos, denominado *alfabeto* e $\mathcal{G}$ é um conjunto finito de *regras de derivação*, cujo fim é dizer como os símbolos do alfabeto podem ser agrupados de modo a formar expressões admissíveis da linguagem, denominadas *objetos* da linguagem. Se L é uma linguagem, uma regra de derivação em $\mathcal{G}$ pode ser vista como uma função $f : L^n \longrightarrow L$ tal que se $x_1, \ldots, x_n \in L$ e aridade $(f) = n$, então $f(x_1, \ldots, x_n) = x$

pertence a L, com $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente uma linguagem é uma álgebra cujas operações são determinadas pelas regras de derivação. Descreve-se uma regra de derivação por $\frac{x_1,\ldots,x_n}{x}$, onde se entende que os objetos do numerador os *antecedentes*, dão origem ao do denomidador, o *consequente*. No caso $n = 0$, gera-se um elemento a, a partir de um conjunto vazio de objetos. Denota-se isso por $\frac{-}{a}$ e diz-se que a é um *axioma* da linguagem.

6.1.1 Exemplo

Seja L uma linguagem especificada pelo par $< \sum, \mathcal{G} >$, onde $\sum = \{\text{zero, succ, plus}\}$ e $\mathcal{G}$ é constituída pelas seguintes regras.

$$g_1 : \frac{-}{\text{zero}}; \quad g_2 : \frac{t}{\text{succ}(t)}, \quad t \in L; \quad g_3 : \frac{t_1, t_2}{(t_1 \text{ plus } t_2)}, \quad t_1, t_2 \in L.$$

Esta linguagem só tem um axioma, zero. Isto significa que todos os outros objetos de L são gerados a partir de "zero", através das regras g_1, g_2 e g_3. Exemplos de objetos de L são: zero, succ(zero), succ(zero)plus succ(succ(zero)).

6.1.2 Definição: prova

Uma *dedução* ou *prova* do objeto $x \in L$ é uma sequência finita $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de objetos de L, tal que $x_n = x$ e cada $x_i, 1 \leq i \leq n$, é o resultado da aplicação de uma regra de $\mathcal{G}$ aos objetos x_k, para $k < i$.

No Exemplo 6.1.1, uma prova de zero plus succ(succ (zero)) é

(1)	zero	(g_1)
(2)	succ(zero)	$(1, g_2)$
(3)	succ(succ(zero))	$(2, g_2)$
(4)	zero plus succ (succ(zero))	$(1, 3, g_3)$

Os parênteses do lado direito explicam as regras usadas e os objetos em que são aplicados.

As regras de derivação em $\mathcal{G}$ podem ser vistas como um *cálculo* ou *algorítmo* para gerar os objetos de L. No exemplo acima o cálculo $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$ *gera* a linguagem L a partir do axioma "zero".

6.1.3 Definição: Tipo de Operações

Um *tipo de operações* (signature, em inglês), que denota-se, em geral, por $\sum$, é um conjunto de símbolos de funções.

$\sum$ = {zero, succ, plus} seria um tipo de operações apropriado para os números naturais. Cada símbolo de função tem associado a ele uma *aridade* que dá o número de argumentos que a função representa. No caso acima a aridade de zero é 0, de succ é 1 e de plus é 2. Formalmente a aridade de um tipo de operações , $\sum$, é uma função $arid : \sum \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que se $f \in \sum, arid(f) \in \mathbb{N}$.

6.1.4 Definição: $\sum$-álgebra

Seja $\sum$ um tipo de operações. Uma *$\sum$-álgebra* é um par $(A, \sum_A)$, onde:

(i) A é um conjunto, chamado *conjunto básico*

(ii) $\sum_A$ é um conjunto de funções $\{f_A | f \in \sum\}$ tal que se $arid(f) = n$, então f_A é uma função de A^n em A.

Portanto, uma $\sum$-álgebra é simplesmente uma interpretação de um tipo de operações $\sum$. Ela consiste de um conjunto A e uma interpretação sobre A de cada símbolo de função $f \in \sum$. No sentido de facilitar a notação escreve-se A no lugar de $(A, \sum_A)$, se isso não fôr motivo de confunção.

6.1.5 Exemplo

Considere o tipo de operações $\sum$ = {zero, succ, Pred, plus} com aridades $0, 1, 1$ e 2, respectivamente. Então $(\mathbb{N}, \sum_{\mathbb{N}})$ é uma $\sum$-álgebra onde:

(i) $\mathbb{N}$ é conjunto dos números naturais

(ii) $\sum_{\mathbb{N}}$ é dado por:

(a) $\text{zero}_{\mathbb{N}}$ é o número zero.

(b) $\text{succ}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é definida por $\text{succ}_{\mathbb{N}}(n) = n + 1$, onde $+$ é a soma usual de números naturais.

(c) $\text{Pred}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é definida por $\text{Pred}_{\mathbb{N}}(0) = 0$, $\text{Pred}_{\mathbb{N}}(n+1) = n$.

(d) $\text{plus}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é definida por $\text{plus}_{\mathbb{N}}(m, n) = m + n$.

$(\mathbb{N}, \sum_{\mathbb{N}})$ é apenas uma dentre as muitas interpretações possíveis de $\sum$. Uma outra interpretação seria, por exemplo, associar 1 a "zero" e a multiplicação a plus.

6.1.6 Exemplo

Uma outra interpretação do tipo de operações anterior seria $(\mathbb{Z}, \sum_{\mathbb{Z}})$ onde

(i) $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros

(ii) $\sum_{\mathbb{Z}}$ é definida por:

(a) $\text{zero}_{\mathbb{Z}}$ é o número $0 \in \mathbb{Z}$.

(b) $\text{succ}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é definida por $\text{succ}_{\mathbb{Z}}(n) = n + 1$

(c) $\text{Pred}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é definida por $\text{Pred}_{\mathbb{Z}}(n) = n - 1$.

(d) $\text{plus}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é definida por $plus_{\mathbb{Z}}(m, n) = m + n$.

6.1.7 Exemplo

Seja $INF = \{[p,q] | p, q \in Q, p < q\} \cup \{[-\infty, +\infty], [\ \ ]\}$ o conjunto enumerável dos intervalos de informação. Considere o tipo de operações $\sum = \{INF, \wedge, \vee, \bigvee\}$, onde cada elemento de INF tem aridade 0, $\wedge$ tem aridade 2, $\vee$ tem aridade 2 e $\bigvee$ tem aridade $+\infty$. $(\mathcal{J}, \sum_{\mathcal{J}})$ é uma $\sum$-álgebra, onde

(i) $\mathcal{J}$ é a topologia gerada pela base $\mathcal{J}_B = \{\uparrow [p,q] / [p,q] \in INF\}$, ou seja, $\mathcal{J}$ é o conjunto dos abertos básicos da topologia de $\mathcal{R}$, o domínio dos reais parciais.

(ii) $\sum_{\mathcal{J}}$ é dada por:

(a) $a_{\mathcal{J}} \in \mathcal{J}_B$ para cada $a \in INF$.

(b) $\wedge_{\mathcal{J}} : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ tal que $\wedge_{\mathcal{J}}(A, B) = A \cap B$, onde $A, B \in \mathcal{J}$.

(c) $\vee_{\mathcal{J}} : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ tal que $\vee_{\mathcal{J}}(A, B) = A \cup B, A, B \in \mathcal{J}$ e $\cup$ é a operação de união binária sobre $\mathcal{J}$.

(d) $\bigvee_{\mathcal{J}} : (A_i | i \in I) \longmapsto \bigcup_{i \in I} A_i$, que é uma operação pois a união qualquer de conjuntos abertos é um aberto.

Cada tipo de operações, $\sum$, pode ser visto como o alfabeto de uma linguagem. Neste caso uma $\sum$-álgebra correspondente é a chamada *álgebra de termos* para $\sum$. O conjunto básico desta álgebra consiste de expressões de símbolos sobre $\sum$, chamados *termos*, os quais são gerados a partir dos axiomas (termos constantes) usando os símbolos de funções em $\sum$. Por isso é dada a seguinte definição.

6.1.8 Definição: Conjunto dos Termos

Seja T_Σ, o *conjunto dos termos sobre* $\sum$, o menor conjunto de expressões de $\sum^*$ que satisfaz.

(i) Se $c \in \sum$ é um símbolo de constante, então $c \in T_\Sigma$, ou seja, tem-se a regra $\frac{-}{c}$, $c \in \sum$ é um símbolo de constante.

(ii) Se $f \in \sum$, tem aridade $n > 0$, e $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma$, então $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma$, ou seja, tem-se a regra $\frac{t_1, \ldots, t_n}{f(t_1, \ldots, t_n)}, t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma, f \in \sum$, com $arid(f) = n$.

O mesmo conjunto T_Σ pode ser visto de dois modos diferentes. Um deles T_Σ é a sintaxe de uma linguagem cujo alfabeto é $\sum$ e cujas regras de derivação são dadas por (i) e (ii) acima. Neste caso T_Σ é de natureza puramente sintática, de modo que, por exemplo, se $t \in T_\Sigma$, a função succ(t) recebe como entrada t e devolve $\text{succ}_{T_\Sigma}(t)$, como saída. Por outro lado T_Σ pode ser visto como uma $\sum$-álgebra da classe de todas as $\sum$-álgebras que interpretam o tipo de operações $\sum$. Neste caso $(T_\Sigma, \sum_{T_\Sigma})$ é um objeto semântico e como tal ele é capaz de dá significado a linguagem T_Σ. A função semântica aqui é a função identidade. Pode-se dizer, também, que $\sum$ pode ser visto ora como o alfabeto de uma linguagem, ora como um tipo de operações, sendo neste caso $(T_\Sigma, \sum_{T_\Sigma})$ uma das possíveis interpretações. Na prática só se distingue estes dois pontos de vistas quando for estritamente necessário. Desse modo a expressão "álgebra dos termos" pode siginificar qualquer um desses pontos de vista.

O papel da $\sum$-álgebra dos termos só é devidamente esclarecido através do uso do conceito de $\sum$-*homomorfismo*, funções entre os conjuntos básicos das $\sum$-álgebras que preservam a estrutura desses conjuntos impostas pelo tipo de operações $\sum$.

6.1.9 Definição: $\sum$-homomorfismo

Sejam $(A, \sum_A)$ e $(B, \sum_B)$ duas $\sum$-álgebras. Uma função $h : A \longrightarrow B$ diz-se um $\sum$-*homomorfismo* se para todo $f \in \sum$, onde $arid(f) = n$, então

$$h(f_A(a_1, \ldots, a_n)) = f_B(h(a_1), \ldots, h(a_n)). \tag{1}$$

Em particular, h transforma uma constante de A numa constante de B.

6.1.10 Exemplo

Seja $\sum = \{\text{zero, succ, Pred, plus}\}$, como no Exemplo 6.1.5. Seja $P = \{0, 2, 4, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais pares. Seja $\sum_P$ definida por

(a) $\text{zero}_P = 0$

(b) $\text{succ}_P : P \longrightarrow P$ definida por $\text{succ}_P(n) = n + 2$

(c) $\text{Pred}_P : P \longrightarrow P$ definida por $\text{Pred}_P(0) = 0$, $\text{Pred}_P(n) = n - 2$, $n \geq 2$.

(d) $\text{plus}_P : P^2 \longrightarrow P$ definida por $\text{Plus}_P(m, n) = m + n$.

Então, $(P, \sum_P)$ é uma $\sum$-álgebra.

Seja $in : \mathbb{N} \longrightarrow P$ uma função injetiva definida por $in(n) = 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. in é um $\sum$-homomorfismo. Para mostrar isso é suficiente mostrar que a igualdade (1) se verifica para todo símbolo de função $f \in \sum$.

Seja zero $\in \sum$, $in(\text{zero}_{\mathbb{N}}) = in(0) = 2 \cdot 0 = 0 = in(\text{zero}_P)$

succ $\in \sum$, $in(\text{succ}_{\mathbb{N}}(n)) = in(n+1) = 2 \cdot (n+1) = 2n+2$

$\text{succ}_P(in(n)) = succ_P(2n) = 2n + 2$. Analogamente se mostra para Pred, plus $\in \sum$.

6.1.11 Proposição

Sejam $(A, \sum_A), (B, \sum_B)$ e $(C, \sum_C)$ $\sum$-álgebras quaisquer

(i) A função identidade $id : A \longrightarrow A$ é um $\sum$-homomorfismo.

(ii) Se $h_1 : A \longrightarrow B$ e $h_2 : B \longrightarrow C$ são $\sum$-homomorfismos, então $h_2 \circ h_1 : A \longrightarrow C$ é um $\sum$-homomorfismo.

Prova: Imediata.

$\square$

Portanto, se $\sum$ é um tipo de operações, a classe de todas as $\sum$-álgebras constitui uma categoria, onde os objetos são as $\sum$-álgebras e os morfimos são os $\sum$-homomorfismos. Um fato importante com respeito a essa categoria consiste em que a álgebra dos termos, T_Σ, é inicial nesta categoria, ou seja, tem-se o seguinte resultado.

6.1.12 Teorema

Para toda $\sum$-álgebra $(A, \sum_A)$ existe um único homomorfismo $i_A : T_\Sigma \longrightarrow A$.

Prova: A prova deste teorema é feita por indução sobre a estrutura dos elementos de T_Σ. Isso é possível porque a definição de T_Σ, dada acima, foi indutiva, isto é, T_Σ foi definida como o menor conjunto de expressões, sobre $\sum$, que contém os símbolos constantes e que é fechado sob as operações da álgebra dos termos, ou seja, as f_{T_Σ} para cada $f \in \sum$. A natureza indutiva de T_Σ fornece um método para derivar propriedades de termos. Para mostrar que a propriedade P se verifica para todos os termos em T_Σ é suficiente estabelecer:

(i) P se verifica para todos os símbolos de constantes em $\sum$

(ii) Assumindo que P se verifica para os termos $t_1, \ldots, t_n$, mostra-se que P se verifica para o termo $f(t_1, \ldots, t_n)$, para cada $f \in \sum$, com $arid(f) = n$, $n > 0$.

Esse método é chamado *indução estrutural* porque a indução é sobre a estrutura sintática dos termos. A propósito, é possível se usar indução para definir uma função g, por exemplo, sobre T_Σ. Para isso é suficiente.

(a) Definir o resultado de g aplicados aos símbolos constantes.

(b) Definir o resultado de g aplicado a $f(t_1, \ldots, t_n)$ em termos de $g(t_1), \ldots, g(t_n)$ para cada $f \in \sum$, onde $arid(f) = n$, $n > 0$.

(a) e (b) pode ser resumido numa única condição:

Assume-se que se tem a definição de g nos termos $t_1, \ldots, t_n$ e então define-se a aplicação de g a $f(t_1, \ldots, t_n)$, para cada $f \in \sum$ com $arid(f) = n, n \geq 0$.

Usando, agora, indução estrutural é possível demonstrar o teorema. Para isso deve-se mostrar:

(i) Existe um homomorfismo de T_Σ em A

(ii) Ele é único.

Para se provar (i) define-se i_A usando indução estrutural sobre T_Σ. Sabe-se que cada elemento de T_Σ é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$ para algum $f \in \sum$, com $arid(f) = n$. Suponha, por indução , que foram definidas $i_A(t_1), \ldots, i_A(t_n)$. Defina $i_A(f(t_1, \ldots, t_n))$ como sendo $f_A(i_A(t_1), \ldots, i_A(t_n))$. Desse modo i_A está definida para todo elemento de T_Σ.

Deve-se mostrar que i_A, assim definida, é um homomorfismo. Para isso seja $f \in \sum$, com $arid(f) = n$. Então

$$\begin{aligned} i_A(f_{T_\Sigma}(t_1, \ldots, t_n)) &= i_A(f(t_1, \ldots, t_n)) \text{ por definição de } T_\Sigma \\ &= f_A(i_A(t_1), \ldots, i_A(t_n)) \text{ por definição de } i_A. \end{aligned}$$

(ii) Falta mostra que i_A é único.

De fato, basta mostra que todo $\sum$-homomorfismo h, de $T_{\sum}$ em A, coincide com i_A.

Usando indução estrutural pode-se mostrar que $i_A(t) = h(t)$ para todo $t \in T_\Sigma$. Um elemento típico de T_Σ é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, onde $f \in \sum$, com $arid(f) = n$. Portanto,

$$\begin{aligned} i_A(f(t_1, \ldots, t_n)) &= f_A(i_A(t_1), \ldots, i_A(t_n)) \text{ por definição de } i_A \\ &= f_A((t_1), \ldots, h(t_n)) \text{ por indução estrutural} \\ &= h(f_{T_\Sigma}(t_1, \ldots, t_n)) \text{ porque } h \text{ é um } \textstyle\sum\text{-homomorfismo} \\ &= h(f(t_1, \ldots, t_n)) \text{ pela definição de } f_{T_\Sigma}. \end{aligned}$$

Como cada elemento de T_Σ é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$ para algum $f \in \sum$, com $arid(f) = n$, segue que h coincide com i_A.

□

Vendo T_Σ como a sintaxe de uma linguagem e $(A, \sum_A)$ como uma interpretação ou domínio semântico, o teorema estabelece que toda expressão ou termo da linguagem tem um único significado em $(A, \sum_A)$, ou seja, existe uma única maneira de interpretar a linguagem num domínio semântico. Pode-se usar esse teorema para identificar termos em T_Σ. Por exemplo, a $\sum$-álgebra $(\mathbb{N}, \sum_{\mathbb{N}})$ identifica os termos succ(Pred(zero)) e succ(zero) pois $i_{\mathbb{N}}$ (succ(Pred(zero)))= $i_{\mathbb{N}}$ (succ(zero))= 1. Em geral, diz-se que uma $\sum$-álgebra $(A, \sum_A)$ *identifica* os termos $t_1, t_2 \in T_\Sigma$ se e somente se $i_A(t_1) = i_A(t_2)$. Neste sentido a $\sum$-álgebra $(T_\Sigma, \sum_{T_\Sigma})$ é a "menor"na categoria, pois ela faz o menor número de identificações, qual seja nenhuma. De fato, fazendo A igual a T_Σ, e aplicando o teorema, existe um homomorfismo I_{T_Σ} de T_Σ nele mesmo. Como a função identidade é um $\sum$-homomorfismo, então i_{T_Σ} é a identidade, isto é, $i_{T_\Sigma}(t_1) = i_{T_\Sigma}(t_2)$ se e somente se t_1 é sintaticamente o mesmo que t_2.

Seja $\mathcal{C}$ a categoria das $\sum$-álgebras para o tipo de operações $\sum$. Lembre-se que uma álgebra, I, é *inicial* em $\mathcal{C}$ se e somente se para qualquer outra $\sum$-álgebra J existe um único $\sum$-homomorfismo de I em J. Portanto, pelo Teorema 6.1.12, $(T_\Sigma, \sum_{T_\Sigma})$ é inicial em $\mathcal{C}$.

Um $\sum$-homomorfismo $h : A \longrightarrow B$ diz-se um $\sum$-*isomorfismo* se ele é bijetivo. Se as $\sum$-álgebras A e B são isomorfas, isto é, se existe um $\sum$-isomorfismo $h : A \longrightarrow B$, então A e B não podem ser distinguido usando $\sum$. Ou seja, qualquer assertiva em termos dos símbolos de funções em $\sum$ que é verdadeira em A é também verdadeira em B e vice-versa.

6.1.13 Proposição

As $\sum$-álgebras A e B são isomorfas se e somente se existem dois $\sum$-homomorfismos $h : A \longrightarrow B$ e $g; B \longrightarrow A$ tal que

(i) $h \circ g = id_B$

(ii) $g \circ h = id_A$

Prova: Suponha que $h : A \longrightarrow B$ é um $\sum$-homomorfismo bijetivo. Seja a função $g : B \longrightarrow A$ definida por

$$g(b) = a \quad \text{se} \quad h(a) = b.$$

Então g é uma função desde que para todo $b \in B$ existe exatamente um a tal que $h(a) = b$. Além disso, g é um $\sum$-homomorfismo porque para todo $f \in \sum$, com $arid(f) = n$, $g(f_B(b_1, \ldots, b_n)) = f_A(g(b_1), \ldots, g(b_n))$ pela definição de g. Por fim, é fácil ver que $h \circ g = id_B$ e $g \circ h = id_A$.

(ii) Inversamente, suponha que g e h satisfazem as condições da proposição. Mostrando que h é bijetivo segue que A e B são isomorfas como $\sum$-álgebras.

(a) Suponha que $h(a_1) = h(a_2)$. Então $g \circ h(a_1) = g \circ h(a_2)$. Como $g \circ h = id_A$ segue que $a_1 = a_2$ e portanto h é injetiva.

(b) Seja $b \in B$. Defina a como sendo $g(b)$. Então $h(a) = h \circ g(b) = b$, pois $h \circ g = id_B$. Logo h é sobrejetiva.

□

6.1.14 Corolário

Sejam I_1 e I_2 $\sum$-álgebras iniciais na categoria $\mathcal{C}$ de todas as $\sum$-álgebras. Então I_1 e I_2 são isomorfos.

Prova: Como I_1 é inicial em $\mathcal{C}$ e I_2 é uma $\sum$-álgebra existe um único $\sum$-homomorfismo $i_1 : I_1 \longrightarrow I_2$. Analogamente, como I_2 é inicial existe um único $\sum$-homomorfismo $i_2 : I_2 \longrightarrow I_1$. Como a composta de dois $\sum$-homomorfismos é um $\sum$-homomorfismo, segue que $i_2 \circ i_1 : I_1 \longrightarrow I_1$ é um $\sum$-homomorfismo. Como $id_{I_1} : I_1 \longrightarrow I_1$ também é um $\sum$-homomorfismo pode-se concluir da inicialidade de I_1 que $i_2 \circ i_1 = id_{I_1}$. Raciocinando de modo análogo se conclui que $i_1 o i_2 = id_{I_2}$. Desse modo i_1 e i_2 satisfazem as condições (i) e (ii) da Proposição 6.1.13 e consequentemente I_1 e I_2 são isomorfos.

□

O Corolário 6.1.14 nos diz que, numa categoria C de $\sum$-álgebras, a $\sum$-álgebra inicial é única a menos de isomorfismo. Ou seja, a menos de uma renomiação de seus elementos só existe uma $\sum$-álgebra inicial.

Convenciona-se, para simplificar a notação, que de ora em diante x substituirá a n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ e $f(t)$ substituirá $f(t_1, \ldots, t_n)$, sendo a aridade de f entendida a partir do contexto.

Existe interesse em $\sum$-álgebras que podem ser caracterizadas a partir de um conjunto de equações. Por exemplo, as $\sum$-álgebras $(\mathbb{N}, \sum_{\mathbb{N}})$ e $(\mathbb{Z}, \sum_{\mathbb{Z}})$ satisfazem a equação $\text{Pred}(\text{succ}(x)) = x$ para cada x.

Uma equação é determinada por dois termos que podem conter instâncias de variáveis. A avaliação de tais termos numa $\sum$-álgebra é feita com respeito a atribuição de valores a essas variáveis. Uma $\sum$-álgebra *satisfaz* uma equação se a avaliação de dois termos coincidem com respeito a toda atribuição de valores a essas variáveis.

Uma $\sum$*-congruência* é uma extensão natural da noção de relação de equivalência para $\sum$-álgebras. Ela é simplesmente uma relação de equivalência que preserva a estrutura induzida por $\sum$.

6.1.15 Definição: $\sum$-convergência

Seja $(A, \sum_A)$ uma $\sum$-álgebra. Uma relação C sobre A diz-se uma $\sum$-congruência se

(i) C é uma relação de equivalência

(ii) para todo $f \in \sum_A$, se $(a, a') \in C$, então $(f(a), f(a')) \in C$. Denotando por A/C o conjunto das classes de equivalência induzidas por C e por $[a]_C$ uma classe de equivalência, isto é, $[a]_C = \{a' \in A | (a, a') \in C\}$, $A/C = \{[a]_C | a \in A\}$ torna-se uma $\sum$-álgebra definindo sobre A/C as aplicações por

$$f_{A/C}([a]_C) = [f_A(a)]_C$$

6.1.16 Proposição

(i) $(A/C, \sum_{A/C})$ é uma $\sum$-álgebra

(ii) A injeção natural $in : A \longrightarrow A/C$ definida por $in(a) = [a]_C$ é um $\sum$-homomorfismo.

Prova: (i) É suficiente mostrar que a definição de $f_{A/C}$, dada acima, de fato define uma função. Deve-se mostrar, portanto, que o resultado não depende do particular representante $[a]_C$ escolhido. Seja $a' \in [a]_C$, então $(a', a) \in C$. Como C é uma $\sum$-congruência segue que $(f(a), f(a')) \in C$, ou seja, $f(a') \in [f(a)]_C$.

(ii) Imediato

□

6.1.17 Exemplo

Seja A uma $\sum$-álgebra. Para $t, t' \in T_\Sigma$ defina $t =_A t'$ se e somente se $i_A(t) = i_A(t')$. $=_A$ é uma relação de equivalência sobre T_Σ. Além disso ela é uma $\sum$-congruência, pois se $f \in \sum$, então $i_A(f_{T_\Sigma}(t)) = f_A(i_A(t))$. Portanto se $i_A(t) = i_A(t')$, então $i_A(f_{T_\Sigma}(t)) = i_A(f_{T_\Sigma}(t'))$, isto é, $t =_A t'$ implica $f_{T_\Sigma}(t) =_A f_{T_\Sigma}(t')$.

Pretende-se usar o conceito de $\sum$-congruência, principalmente, sobre T_Σ. Se C é uma $\sum$-congruência diz-se que a $\sum$-álgebra A *satisfaz* C se $i_A(t) = i_A(t')$ sempre que $(t, t') \in C$. Ou seja, A satisfaz C se e somente se todos os pares de termos que são equivalentes com respeito a C são identificados quando interpretados em A. Seja $\mathcal{C}(C)$ a categoria de todas as $\sum$-álgebras que satisfazem C.

6.1.18 Teorema: Inicialidade para Congruência

A $\sum$-álgebra T_Σ/C é inicial na categoria $\mathcal{C}(C)$.

Prova: (a) Mostra-se-á primeiro que $T_\Sigma/C \in \mathcal{C}(C)$. A injeção $in : T_\Sigma \longrightarrow T_\Sigma/C$ é um $\sum$-homomorfismo. Como T_Σ é inicial na categoria de todas as $\sum$-álgebras ele deve coincidir com $i_{T_\Sigma/C}$, pois este é único. Portanto, seja $(t,t') \in C$. Então

$$\begin{aligned} i_{T_\Sigma/C}(t) &= [t]_C = [t']_C, \text{ pois } (t,t') \in C \\ &= i_{T_\Sigma/C}(t') \end{aligned}$$

(b) Seja, agora, $A \in \mathcal{C}(C)$. Defina $h : T_\Sigma/C \longrightarrow A$ por $h([t]_C) = i_A(t)$. Esta função está bem definida, pois se $t' \in [t]_C$, então $(t,t') \in C$ e $i_A(t) = i_A(t')$ devido ao fato de que A satisfaz C. Além disso, h é um $\sum$-homomorfismo desde que

$$h(f_{T_\Sigma/C}([t]_C)) = h([f(t)]_C) = i_A(f(t)) = f_A(i_A(t)) = f_A(h([t]_C))$$

(c) Falta mostrar que h é o único homomorfismo de T_Σ/C em A. Para isso seja $h' : T_\Sigma/C \longrightarrow A$ um outro $\sum$-homomorfismo. Defina $i'_A : T_\Sigma \longrightarrow A$ por $i'_A(t) = h'([t]_C)$.

Então $i'_A(f_{T_\Sigma}(t)) = h'([f(t)]_C) = h'(f_{T_\Sigma/C}(t)) = f_A(h'([t]_C)) = f_A(i'(t))$. Portanto i'_A é um $\sum$-homomorfismo. Entretanto T_Σ é inicial na categoria de todas as $\sum$-álgebras o que implica que i'_A deve coincidir com I_A. Segue que $h'([t]_C) = i'_A(t) = i_A(t) = h([t]_C)$, isto é, h' coincide com h.

□

Observe que este teorema é uma generalização do Teorema 6.1.12. Para obter este teorema basta tomar a $\sum$-congruência trivial, a identidade, que não iguala nenhum termo.

Seja X um conjunto de variáveis. Usa-se $x, x_1, x_2, \ldots$ para indicar qualquer elemento de X. É possível extender qualquer tipo de operações $\sum$ a um novo tipo de operações $\sum(X)$, que tem todos os símbolos de função de $\sum$ e, além disso, cada $x \in X$ é um símbolo de função de $\sum(X)$, de aridade 0. A notação $\sum(X)$ tem como objetivo enfatizar que as novas constantes desempenharão um papel especial no que segue. Usa-se, também, a notação $T_\Sigma(X)$ para denotar a álgebra dos termos para o tipo de operações $\sum(X)$. Os termos de T_Σ estão também em $T_\Sigma(X)$. De ora em diante, qualquer referência a termos, ou mais precisamente a $\sum$-termos, pretende-se significar elementos de T_Σ, os quais, também, são chamados *termos fechados*, pois eles não contém variáveis. Os elementos de $T_\Sigma(X)$ são chamados *termos abertos*.

Equações, agora, são simplesmente pares de elementos da álgebra dos termos $T_\Sigma(X)$. Por exemplo, se $\sum = \{\text{zero, succ, Pred, plus}\}$ então, $\text{Pred}(\text{succ}(x))$, $\text{succ}(\text{Pred}(x))$

e x são termos de $T_\Sigma(X)$ se $x \in X$. A álgebra $T_\Sigma(X)$ tem uma significância análoga a T_Σ.

Seja A uma $\sum$-álgebra. Uma *A-atribuição para* X é uma função $\rho_A : X \longrightarrow A$. Assim ρ_A associa a cada variável $x \in X$ um elemento $\rho_A(x) \in A$.

6.1.19 Teorema

Seja A uma $\sum$-álgebra e ρ_A uma A-atribuição para X. Então existe um único $\sum$-homomorfismo $h_A : T_\Sigma(X) \longrightarrow A$ tal que $h_A(x) = \rho_A(x)$.

Prova: A prova deste teorema é análogo a do Teorema 6.1.12.

(i) Defina h_A por indução estrutural sobre os termos em $T_\Sigma(X)$.

(a) Se $t \in X$ seja $h_A(t) = \rho_A(t)$

(b) Caso contrário t tem a forma $f(t)$ para $f \in \sum$. Neste caso seja $h_A(f(t)) = f_A(h_A(t))$. Então h_A está definida para todo termo de $T_\Sigma(X)$. A prova de que h_A é um $\sum(X)$-homomorfismo é análogo a prova de que i_A é um $\sum$-homomorfismo do Teorema 6.1.12.

(ii) Seja $h' : T_\Sigma(X) \longrightarrow A$ um outro $\sum(X)$-homomorfismo que coincide com ρ_A em X. Pretende-se mostrar, por indução estrutural, sobre t, que $h(t) = h'(t)$ para todo $t \in T_\Sigma(X)$.

(a) $t \in X$. Então $h(t)$ e $h'(t)$ coincidem com $\rho_A(t)$.

(b) Caso contrário t tem a forma $f(t')$ para algum $f \in \sum$. Portanto

$$\begin{aligned} h(f(t')) &= f_A(h(t')) \text{ pois } h \text{ é } \textstyle\sum\text{-homomorfismo} \\ &= f_A(h'(t')) \text{ por indução estrutural} \\ &= h'(f(t')) \text{ pois } h' \text{ é } \textstyle\sum\text{-homomorfismo} \end{aligned}$$

□

Observe que, mais uma vez, este teorema pode ser visto como uma generalização do Teorema 6.1.12. Ele pode ser obtido fazendo-se $X = \phi$. A essência do teorema acima pode ser expresso dizendo-se que todo $\sum$-termo com variável pode ser avaliado ou interpretado de modo único numa $\sum$-álgebra A, se cada variável está associada a um elemento de A. Por abuso de notação denota-se o $\sum$-homomorfismo do teorema anterior por ρ_A. Observe que ρ_A quando aplicado aos elementos de T_Σ coincide com i_A. Esta notação para A-atribuição nos permite definir, de modo natural substituição em termos. Uma *substituição* é uma $T_\Sigma(X)$-atribuição, isto é, ela associa a cada variável em X um termo em $T_\Sigma(X)$. Escreve-se t_ρ para denotar a substituição ρ no termo t e chama-se uma *instanciação* de t. A rigor uma instanciação deveria ser escrito como $\rho_{T_\sigma(X)}$, mas por conveniência omite-se o subscrito. Além sisso para satisfazer a natureza sintática de substituições escreve-se t_ρ em lugar de $\rho(t)$. No que segue é usada a notação mais comum, qual seja, $t[t'/x]$, para indicar que x é substituído por t' em t. Se cada $\rho(x)$ é um termo fechado, isto é, um elemento de T_Σ, então ρ é chamada uma *substituição fechada* e t_ρ uma *instanciação fechada de* t.

6.1.20 Proposição: O Lema da Substituição

Para toda A-atribuição ρ_A e toda substituição ρ, a única extensão da A-atribuição $\rho_A \circ \rho$ para $T_\Sigma(X)$ é dada pela função $h(t) = \rho(t_\rho)$.

Prova: Este lema estabelece que ou se pode fazer a substituição primeiro em t e em seguida avaliar segundo ρ_A ou primeiro avaliar em A os termos a ser substituidos e então avaliar t segundo esta atribuição modificada.

A função h é obviamente um $\sum$-homomorfismo e ela coincide com a A-atribuição $\rho_A \circ \rho$ nas variáveis. De acordo com o Teorema 6.1.19 existe um único $\sum$-homomorfismo com essa característica e portanto h coincide com $\rho_A \circ \rho$ como $\sum$-homomorfismo.

□

Esse lema pode ser aplicado, em particular, para o caso quando a A-atribuição é uma substituição. Neste caso tem-se que $t(\rho \circ \rho') = (t\rho')\rho$.

É possível, agora, definir o que significa uma álgebra satisfazer um conjunto de equações . Para $t, t' \in T_\Sigma(X)$ escreve-se $t =_A t'$ se para toda A-atribuição $\rho_A, \rho_A(t) = \rho_A(t')$. Quando aplicado aos elementos de $T_\Sigma(X)$ isto coincide com a definição dada no Exemplo 6.1.17. Uma $\sum$-equação é um par de termos (t, t') com $t, t' \in T_\Sigma(X)$. Escreve-se esse par na forma $t = t'$.

Uma relação R sobre $T_\Sigma(X)$ *satisfaz* um conjunto de equações E se para toda equação $(t, t') \in E$ tem-se $(t, t') \in R$. Uma álgebra *satisfaz* um conjunto de equações E se a relação $=_A$ satisfaz E, isto é, para toda $\sum$-equação $(t, t') \in E$ e toda A-atribuição ρ_A, tem-se $\rho_A(t) = \rho_A(t')$.

6.2 $\sum$-estruturas

Os resultados obtidos para $\sum$-álgebras podem ser generalizadas, permitindo-se relações sobre T_Σ, diferentes da igualdade. Por isso é feita a distribuição entre *termo* e *fórmula*. Enquanto termos são expressões envolvendo operações de $\sum$, uma fórmula é uma expressão onde aparece uma relação comparando termos. Os objetos semânticos correspondentes são $\sum$-estruturas, que generalizam $\sum$-álgebras. Um típico alfabeto a ser considerado é da forma

$$\sum(X) = \{X, f_1, f_2, \ldots, R_1, R_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists, \forall\},$$

onde

$X = \{x_1, x_2, \ldots\}$	é um conjunto contável de variáveis
$f_1, f_2, \ldots$	são símbolos de funções não lógicas
$R_1, R_2, \ldots$	são símbolos de relações
$p_1, p_2, \ldots$	são os símbolos de proposições atômicas ou predicados atômicos.

$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists, \forall$ são as operações lógicas.

Deve figurar, também, em $\sum(X)$, os símbolos de pontuação que não serão explicitados.

Uma $\sum$-*estrutura* é um par $(D, \sum_D)$, onde

(i) D é um conjunto não-vazio chamado conjunto básico

(ii) $\sum_D$ é um conjunto de funções e relações, onde se $f \in \sum$ é um símbolo de função de aridade n, então $f_D : D^n \longrightarrow D$, se $R \in \sum$ é um símbolo de relação de aridade n, então R_D é um subconjunto de D^n.

6.2.1 Exemplo

Considere o tipo de operações $\sum = \{\text{zero, um, plus, igual, div}\}$. Seja $=_{\mathbb{N}}$ a igualdade usual sobre os naturais, div a relação "divide" sobre $\mathbb{N}$, $\text{plus}_{\mathbb{N}}$ a função soma sobre os naturais, $\text{zero}_{\mathbb{N}}$ e $\text{um}_{\mathbb{N}}$, o zero e o um naturais. Então

$$\left(\mathbb{N}, \sum_{\mathbb{N}}\right), \text{ onde } \sum_{\mathbb{N}} = \{+_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}, =_{\mathbb{N}}, div_{\mathbb{N}}\} \text{ é uma } \sum\text{-estrutura.}$$

A teoria das $\sum$-estruturas pode ser desenvolvida de modo análogo a teoria das $\sum$-álgebras, com as modificações óbvias. Essas modificações são as que levam em conta os símbolos de relações. Por exemplo, $\sum$-estrutura homomorfismo é um $\sum$-homomorfismo que preserva as estruturas extras de relações.

Sejam $(D_1, \sum_{D_1})$ e $(D_2, \sum_{D_2})$ $\sum$-estruturas. Uma função $h : D_1 \longrightarrow D_2$ é uma $\sum$*-estrutura homomorfismo* se:

(i) Para cada $f \in \sum$, de aridade n, $h(f_{D_1}(d_1, \ldots, d_n)) = f_{D_2}(h(d_1), \ldots, h(d_n))$, onde $d_1, \ldots, d_n \in D_1$.

(ii) Se $(d_1, \ldots, d_n) \in R_D$, onde $R \in \sum$ é um símbolo de relação de aridade n, então $(h(d_1), \ldots, h(d_n)) \in R_{D_2}$.

Uma $\sum$*-estrutura isomorfismo* é uma $\sum$-estrutura homomorfismo que é bijetivo.

6.2.2 Proposição

Seja $(D, \sum_D)$ uma $\sum$-estrutura e ρ_D uma D-atribuição para X, então existe um único $\sum$-estrutura homomorfismo $h_D : L \longrightarrow D$ tal que $h_D(x) = \rho_D(x)$ para todo $x \in X$, onde L é a linguagem gerada pelo $\sum$-cálculo.

Prova: É uma extensão imediata do Teorema 6.1.12.

□

O homomorfismo da $\sum$-estrutura, h_D, desta proposição coincide com aquele dado no Teorema 6.1.12 quando a $\sum$-estrutura é simplesmente uma $\sum$-álgebra. Se $X = \phi$, existe um único homomorfismo da $\sum$-estrutura L em D. Caso contrário, isto é, $X \neq \phi$, pode existir uma infinidades de tais homomorfismo.

Desse modo as linguagens a ser consideradas se caracterizam como segue:

(1) Um *alfabeto* $\sum(X)$, como acima.

(2) A *gramática* é constituída de regras para gerar L, os quais são divididos em duas categorias sintáticas: *termos* e *fórmulas*.

O conjunto dos termos é gerado pelo seguinte cálculo:

(i) $\frac{-}{x_i}$, $x_i \in X$, (ii) $\frac{-}{a}$, a é um termo atômico ou constante,

(iii) $\frac{t_1,\ldots,t_n}{f(t_1,\ldots,t_n)}$, onde $t_1, \ldots, t_n$ são termos e $f \in \sum$ tem aridade n.

O conjunto $Form(L)$, das fórmulas da linguagem L é gerado pelo seguinte cálculo:

(F_1) $\frac{t_1,\ldots,t_n}{R(t_1,\ldots,t_n)}$ para todo símbolo de relação n-ária $R \in \sum$ e todo $t_j \in T_\Sigma$.

(F_2) $\frac{-}{P_i}$, para todo predicado atômico P_i.

(F_3) $\frac{\alpha}{(\neg\alpha)}$; $\frac{\alpha,\beta}{(\alpha\wedge\beta)}$; $\frac{\alpha,\beta}{(\alpha\vee\beta)}$; $\frac{\alpha,\beta}{(\alpha\Rightarrow\beta)}$; $\frac{\alpha,\beta}{(\alpha\Leftrightarrow\beta)}$; $\frac{\alpha}{(\exists x\alpha)}$; $\frac{\alpha}{(\forall x\alpha)}$;
para todo $\alpha, \beta \in Form(L)$, para todo $x \in X$.

Regras de igualdade:

$\frac{-}{t=t}$, $t \in T_\Sigma$; $\frac{t=t'}{t'=t}$, $t, t' \in T_\Sigma$, $\frac{t=t', t=t''}{t=t''}$, $t, t', t'' \in T_\Sigma$.

$\frac{t_1=t_1',\ldots,t_n=t_n'}{f(t_1,\ldots,t_n)=f(t_1',\ldots,t_n')}$ para todo $f \in \sum$, de aridade n, (Substituição)

$t_1, \ldots, t_n, t_1', \ldots, t_n' \in T_\Sigma$

$\frac{t=t'}{t\rho=t\rho'}$ para toda substituição ρ (Instanciação)

$\frac{-}{t=t'}$ para toda equação $(t, t') \in E$. (Equações)

Regras da desigualdade $\leq$:

$\frac{-}{t\leq t}$, $t \in T_\Sigma$; $\frac{t<t', t'<t''}{t\leq t''}, t, t', t'' \in T_\Sigma$, $\frac{t<t', t'<t}{t=t'}, t, t' \in T_\Sigma$.

$\frac{t<t'}{f(t)\leq f(t')}$ para todo $f \in \sum$. (Substituição)

$\frac{t<t'}{t\rho=t'\rho}$ para toda substituição ρ (Instanciação)

Se $x \in X$, define-se por recursão o que significa uma variável *ocorre livre* numa fórmula $\alpha \in Form(L)$ como segue.

(a) Para α atômica, x *ocorre livre* em α se x ocorre em α.

(b) x *ocorre livre* em $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \beta$ e $\alpha \Leftrightarrow \beta$ se x ocorre livre em α ou β.

(c) x *ocorre livre* em $(\neg\alpha)$ se x ocorre livre em α.

(d) y *ocorre livre* em $\forall x\alpha$ ou $\exists x\alpha$ se y ocorre livre em α e $y \neq x$.

Denota-se por $FV(\alpha)$ o conjunto das variáveis livres de α. Uma *sentença* pode ser definida como uma fórmula sem variáveis livres. Uma fórmula com variáveis livres é também chamada *fórmula aberta*, caso contrário ela pode ser chamada *fórmula fechada*. Se as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis livres em α, isso pode ser indicado por $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$. Observe que o conceito de *variável ligada*, uma variável que não é livre, é um conceito relativo a um quantificador. Por isso numa fórmula uma variável pode ser livre e ligada, simultaneamente. Por exemplo, na fórmula

$$\alpha \equiv \forall y(x > y \wedge \forall x(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(y)) \wedge \beta(x, y)),$$

x ocorre livre em α, mas relativo a $\forall x, x$ é ligada. Ou seja, x ocorre ligada na subfórmula $\forall x(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(y))$. Por outro lado, y não ocorre livre em α. Neste caso diz-se que y *é ligada* em α. Se x é uma variável ligada em α, o nome "x" da variável não é importante, é o que se chama variável muda. Ou seja, pode-se trocá-la na fórmula sem alterar seu "significado". Por exemplo, seja a fórmula $\alpha \equiv \forall x(x = 2y \wedge sen^2x + cos^2x = 1)$. Trocando a variável x por z, em α, indicado por $\alpha[z/x]$, a fórmula resultante.

$$\alpha[z/x] \equiv \forall z(z = 2y \wedge sen^2z + cos^2z = 1)$$

não altera seu significado. Observe que x não poderia ser trocado por y, em α, sem alterar o seu significado, pois a expressão $\alpha[y/x] \equiv \forall y(z = 2y \wedge sen^2y + cos^2y)$ é uma sentença falsa no domínio $(\mathbb{N}, +, \leq)$ dos naturais, enquanto a expressão original, sendo uma fórmula seu valor verdade depende de uma interpretação. Ou seja, ela é apenas possível de tomar um valor verdade. Isto ocorreu porque quando da substituição da variável x por y, a variável y que era antes livre foi ligada pelo operador $\forall y$. Neste caso diz-se que x não é *substituível* por y. Observe que na fórmula original α, y é *substituível* por t pois

$$\alpha[t/y] \equiv \forall x(x = 2t \wedge sen^2x + cos^2x = 1)$$ tem o mesmo significado que α

6.2.3 Definição: Satisfatibilidade

Seja L uma linguagem e $\alpha \in Form(L)$. Diz-se que α é *satisfatível* ou *verdadeira* na interpretação $I = (D, \sum_D)$ para a atribuição de variáveis a, cuja notação é $I \models_a \alpha$, se são satisfeitas as seguintes condições:

(i) Se α é uma fórmula atômica $R(x_1, \ldots, x_n)$, então $I \models_a \alpha$ se e somente se $(v_a(x_1), \ldots, v_a(x)) \in R_D$, onde $v_a : T(X) \longrightarrow D$ é a extensão de a em $T(X)$, garantida pelo Teorema 6.1.9

(ii) Se $\alpha \equiv \exists x\beta(x)$, então
$I \models_a \alpha$ se e somente se existe $d \in D$ tal que $\beta[d/x]$ é verdadeira, onde $\beta[d/x]$ simplifica $\beta[d/\alpha(x)]$

(iii) Se $\alpha \equiv \forall x\beta(x)$ então $I \models_a \alpha$ se e somente se para todo $d \in D$, $\beta[d/x]$ é verdadeira.

(iv) $I \models_a \alpha \wedge \beta$ se e somente se $I \models_a \alpha$ e $I \models_a \beta$
$I \models_a \alpha \vee \beta$ se e somente se $I \models_a \alpha$ ou $I \models_a \beta$
$I \models_a \alpha \Rightarrow \beta$ se e somente se quando $I \models_a \alpha$ então $I \models_a \beta$
$I \models_a \alpha \Leftrightarrow \beta$ se e somente se $I \models_a \alpha \Rightarrow \beta$ e $I \models_a \beta \Rightarrow \alpha$
$I \models_a (\neg\alpha)$ se e somente se $I \not\models_a \alpha$, isto é, não é o caso de $I \models_a \alpha$.

6.2.4 Definição: Modelo

Quando $I \models_a \alpha$ diz-se que o par (I, v_a) é um *modelo* para a fórmula α. Um modelo para o conjunto Γ de fórmulas é um par (I, v_a) que é modelo para cada $\alpha \in \Gamma$. Neste caso a notação é $I \models_a \Gamma$.

Observe que só se pode caracterizar um modelo por um par (I, v_a), pois pode acontecer que (I, v_a) seja um modelo para α e para uma outra atribuição $a' : X \longrightarrow D, (I, v_{a'})$ não seja modelo para α. Considere, por exemplo, uma linguagem onde a interpretação seja $(\mathbb{N}, <)$. Considere a atribuição $a : X \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que se $x_i \in X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, então $a(x_i) = i$. A fórmula $x_i < x_{i+1}$ é verdadeira em $\mathbb{N}$, para essa atribuição , isto é, $(\mathbb{N}, <) \models_a x_i < x_{i+1}$, pois $i < i + 1$ para $i = 1, 2, \ldots$. No entanto para a atribuição $a'(v_i) = 1$ para todo $x_i \in X$, tem-se $(\mathbb{N}, <) \not\models_{a'} x_i < x_{i+1}$. Isto só acontece porque a e a' são definidas diferentemente para as variáveis livres de $x_i < x_{i+1}$.

6.2.5 Proposição

Seja $\alpha(x)$ uma fórmula com variável livre x. Sejam a e a' duas atribuições de variáveis tais que $a(x) = a'(x)$, isto é, concordam nas variáveis livre x. Então (I, v_a) é modelo de α se e somente se $(I, v_{a'})$ também é.

Prova: Basta mostrar para o caso onde $\alpha(x)$ é uma fórmula atômica, os demais são obtidos através do homomorfismo v_a. Observe que não é preciso considerar o caso $\forall x\alpha(x)$ ou $\exists x\alpha(x)$, pois estas fórmulas não tem x como variável livre. Suponha que $\alpha(x) \equiv R(x)$ é uma fórmula atômica. Como $a(x) = a'(x)$ segue que $v_a(x) = v_{a'}(x)$ e consequentemente $R_D(v_a(x))$ se e só se $R_D(v_{a'}(x))$.

□

Em particular isso é verdade se α não tem variáveis livres, isto é, α é uma sentença.

6.2.6 Corolário

Seja α uma sentença. Então para uma interpretação I da linguagem L.

(i) Ou I satisfaz α para toda atribuição a, isto é, (I, v_a) é modelo para α,

(ii) Ou I não satisfaz α para nenhum a.

□

Quando α é uma sentença e (I, v_a) é um modelo de α basta dizer que *I é um modelo de α*, indicado por $I \models \alpha$, sem explicitar, necessariamente, a atribuição.

6.3 Lógicas

Seja L uma linguagem. Os objetos de L estão separados em duas categorias sintáticas, os termos e as fórmulas. Uma *lógica sobre L* é um subconjunto próprio de fórmulas de L, aquelas fórmulas que são verdadeiras em todas as interpretações de L. Em outras palavras, aquelas fórmulas cuja verdade depende da forma e não da interpretação.

6.3.1 Definição: Consequência Lógica

Seja L uma linguagem e T um conjunto de fórmulas de L. Diz-se que a fórmula α é uma ***consequência lógica de T***, cuja notação é $T \models \alpha$, se todo modelo de T é também modelo de α. Uma ***lógica sobre L com conjunto de axiomas*** Γ, é o conjunto $T = \{\alpha \in Form(L) | \Gamma \models \alpha\}$, isto é, é o subconjunto $T \subset Form(L)$ tal que se $\alpha \in Form(L)$ e $\Gamma \models \alpha$, então $\alpha \in T$.

Seja L uma linguagem formal e $Form(L)$ o conjunto das fórmulas de L. Para definir uma lógica sobre L é preciso isolar um subconjunto de L. A seguir pretende-se fornecer um algorítmo para isolar esse subconjunto. Seja $\vdash \subseteq \mathcal{P}(Form(L)) \times Form(L)$ uma relação sobre $Form(L)$ tal que se $\Gamma \subseteq Form(L)$ e $\alpha \in Form(L)$ tem-se $\Gamma \vdash \alpha$ se $(\Gamma, \alpha) \in \vdash$. Escreve-se $\Delta, \Gamma \vdash \alpha$ em lugar de $\Delta \cup \Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ em lugar de $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. Usa-se as letras gregas maiúsculas $\Gamma, \Delta, \ldots$ para representar conjunto de fórmulas enquanto as fórmulas são representadas por letras gregas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

6.3.2 Definição: Consequência Sintática

Uma relação $\vdash \subseteq \mathcal{P}(Form(L)) \times Form(L)$ diz-se uma ***relação de consequência sintática*** ou uma ***relação de derivabilidade*** se satisfaz as seguintes propriedades:

(i)	$\alpha \vdash \alpha$	(reflexividade)
(ii)	$\alpha \vdash \beta$ e $\beta \vdash \gamma \Rightarrow \alpha \vdash \gamma$	(transitividade)
(iii)	Se $\gamma \vdash \alpha$, então $\gamma, \Delta \vdash \alpha$	(monotonicidade)
(iv)	Se $\Gamma \vdash \alpha$, então existe Γ_0 finito; $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash \alpha$	(finitária)
(v)	Se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma^* \vdash \alpha^*$	(preserva a substituição)

onde $*$ é o homomorfismo de substituição e $\Gamma^* = \{\alpha^* | \alpha \in \Gamma\}$.

Lembre-se que uma relação R sobre um conjunto A diz-se uma *pré-ordem* se ela é reflexiva e transitiva. Se além disso ela é anti-simétrica, ela é uma ordem (parcial). Portanto, $(Form(L), \vdash)$ é uma pré-ordem. Para tornar $\vdash$ uma ordem basta definir $\alpha \equiv \beta$ se e somente $\alpha \vdash \beta$ e $\beta \vdash \alpha$. Com essa identificação $(Form(L), \vdash)$ é uma ordem parcial. A propriedade (iii) da definição 6.3.2 diz que se deve evitar hipóteses supérfluas. Usando o fato de que $(Form(L), \vdash)$ é uma estrutura de pré-ordem é possível especificar lógicas sobre L.

6.3.3 Definição: Apresentação de uma lógica

Seja $T \subseteq Form(L)$ uma lógica com conjunto de axiomas $\mathbf{A}$. Uma apresentação de T é o conjunto $P = \mathbf{A} \cup \{R_1, \ldots, R_n\}$, onde P é um conjunto finito de regras que especifica T. Diz-se também que T é *apresentada* pelo algorítmo P. Existem, basicamente, dois estilos de apresentar lógicas. O ***estilo axiomático***, onde a ênfase é dado aos axiomas (regras sem antecedentes) junto com um número pequeno de regras propriamente ditas. O outro estilo, o de ***dedução natural***, as regras são dadas em pares, uma regra de *introdução* e uma regra de *eliminação* para cada operador lógico. A definição de *prova* é análoga a dada anteriormente, isto é, uma prova de que $\Gamma \vdash \alpha$, isto é, de que α é uma consequência (sintática) do conjunto de premissas de Γ, é uma sequência finita de fórmulas $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tal que

(i) $\beta_n = \alpha$

(ii) Para cada β_i, $1 \leq i \leq n$, $\beta_i \in \Gamma$, ou β é um axiomas ou β é o resultado dos $B_j's$ anteriores pela aplicação de uma regra de P.

6.3.4 Definição: Sistema Dedutivo

Seja L uma linguagem. Seja T uma lógica sobre L com apresentação $P = \boldsymbol{A} \cup \{R_1, \ldots, R_n\}$. O par $\vdash_L^P = \langle L, \vdash^P \rangle$, onde $\vdash$ é uma consequência sintática sobre L, é chamada *sistema dedutivo* da lógica T sobre L. Diz-se, também, que $\vdash_L^P$ *gera* T.

Como em geral, principalmente no estilo de dedução natural, o que muda para gerar novas lógicas é o conjunto de axiomas, o sistema é representado por $\vdash_L^{\boldsymbol{A}}$.

6.4 Sistema Dedutivo para a Lógica de Predicados e a Lógica Intuicionística

No que segue será apresentado o sistema dedutivo, em estilo de dedução natural, da lógica de predicados clássica e intuicionística. Será apresentado, também, o estido axiomático para a lógica clássica.

O estilo de dedução natural é caracterizado por dois fatos básicos. O primeiro deles é o uso, em certas regras, de *hipóteses*. Essas hipóteses são internas a derivação e não deve ser confundidas com premissas. Uma hipótese é sómente para ser usada com o propósito de derivar um resultado particular determinado pela regra que motivou sua introdução. Cada hipótese tem um *escopo* que vai da linha na qual ela é introduzida até a linha antes da regra na qual ela é descartada. Assim a hipótese não deve ser usada fora do escopo. Desse modo, a definição de prova dada acima, deve ser ligeiramente modificada de modo a permitir a acomodação de hipóteses, além de premissas.

Uma segunda característica do estilo de dedução natural, consiste no fato de que as regras aparecem em pares. Uma regra para introduzir o operador lógico (denotado Iop) e outra para eliminá-lo (denotado E op). Abaixo é apresentado as regras que apresentam a lógica de predicados clássica.

Seja L uma linguagem (de 1ª ordem) cujo alfabeto é $\sum(X) = \{X, f_1, f_2, \ldots, R_1, R_2, \ldots, P_1, P_2, \ldots, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists, \forall\}$ como apresentada anteriormente. As regras que apresentam a lógica de predicados clássica, onde $\alpha, \beta, \gamma \in Form(L), x, y \in X$.

$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}(I\wedge)$; $\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}(E_1\wedge)$, $\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}(E_2\wedge)$

$$\frac{\alpha}{\alpha\vee\beta}(I_1\vee);\quad \frac{\beta}{\alpha\vee\beta}(I_2\vee);\quad \frac{\alpha\vee\beta,\ \begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots\\ \gamma\end{matrix}\ \ \begin{matrix}[\beta]\\ \vdots\\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}(E\vee)$$

$$\frac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots\\ \beta\end{matrix}}{\alpha\Rightarrow\beta}(I\Rightarrow),\quad \frac{\alpha,\alpha\Rightarrow\beta}{\beta}(E\Rightarrow)$$

$$\frac{\alpha\Rightarrow\beta,\beta\Rightarrow\alpha}{\alpha\Leftrightarrow\beta}(I\Leftrightarrow);\quad \frac{\alpha\Leftrightarrow\beta}{\alpha\Rightarrow\beta}(E_1\Leftrightarrow),\quad \frac{\alpha\Leftrightarrow\beta}{\beta\Leftrightarrow\alpha}(E_2\Leftrightarrow)$$

$$\frac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots\\ \beta\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots\\ \neg\beta\end{matrix}}{\neg\alpha}(I\neg);\quad \frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}(E\neg\neg)$$

$\frac{\alpha(x)}{\forall x\alpha(x)}(I\forall)$ se x não ocorre livre em qualquer das hipóteses da prova de $\alpha(x)$.

$\frac{\forall x\alpha(x)}{\alpha(t)}(E\forall)$ para qualquer termo t. Em particular t pode ser livre em uma das hipóteses usadas na prova da fórmula do antecedente.

$$\frac{\alpha(t)}{\exists x\alpha(x)}(I\exists)$$

$\frac{\exists x\alpha(x)}{\alpha(y)}(E\exists)$ para qualquer variável y que não é livre em qualquer das hipóteses da prova de fórmulas do antecente.

No sentido de esclarecer as regras $(I\Rightarrow)$, $(E\vee)$ e $(I\neg)$, nas quais são introduzidas hipóteses, porém logo em seguida descartadas, indicada pelo colchete [ ], considere, como exemplo, a regra $(I\Rightarrow)$. Quando se pode deduzir $\alpha\Rightarrow\beta$? Um modo de deduzir esta fórmula é apresentar uma prova de β na hipótese α. Uma vez dada tal prova tem-se $\alpha\Rightarrow\beta$, o qual, é claro, não possui mas a hipótese α. Ou seja, a hipótese foi descartada, indicada por $[\alpha]$. Desse modo,

$\frac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots\\ \beta\end{matrix}}{\alpha\Rightarrow\beta}$ pode ser lido como "tendo uma prova de β na hipótese de α, tem-se $\alpha\Rightarrow\beta$, destacando a hipótese α".

A regra $(E\forall)$ é uma formalização da idéia de que se uma lei vale para todos, então em particular vale para um indivíduo escolhido arbitrariamente. A regra $(I\forall)$ tem a seguinte explicação. Suponha a afirmação de que $cos^2x + sen^2x = 1$ é verdadeira, para $x \in \mathbb{R}$. O que se afirma, de fato, é que $\forall x(cos^2x + sen^2x = 1)$. A restrição nesta regra pode ser explicada como segue. Suponha que para provar a fórmula $\alpha(x) \equiv \forall z(z \leq x \vee z \geq 0)$ foi feita a hipótese de que $x > 0, x$ livre. Então a sentença $\forall x\alpha(x)$ não é verdadeira, basta testar para o caso $x = -2$. A regra $(E\exists)$ é tão sutil quanto a regra $(I\forall)$. De fato, o que se pode deduzir de $\exists x\alpha(x)$? Apenas que existe um objeto com a propriedade α. Deve-se dar um nome a esse objeto e tomar cuidado com êle. Suponha que se afirma $\alpha(y)$. Tudo que se pode assegurar sobre êsse y na base de $\exists x\alpha(x)$ é que êle tem a propriedade α. Ou seja, não se deve fazer nenhuma outra hipótese sobre êle.

O sistema dedutivo $\vdash_L^{DN}$, onde L é a linguagem acima e

$$\begin{aligned} DN = \{ & I\wedge, E_1\wedge, E_2\wedge, I_1\vee, I_2\vee, E\vee, I\Rightarrow, E\Rightarrow, I\Leftrightarrow, E_1\Leftrightarrow, E_2\Leftrightarrow, \\ & I\neg, E\neg\neg, I\forall, E\forall, I\exists, E\exists\} \end{aligned}$$

gera a lógica de predicados clássica.

6.4.1 Exemplo

$$\vdash_L^{DN} \neg\alpha \vee \alpha$$

Prova:

(1)	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	hipótese
(2)	α	hipótese
(3)	$\neg\alpha \vee \beta$	$(2, I\vee)$
(4)	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	cópia de (1)
(5)	$\neg\alpha$	$(2, 4, I\neg)$
(6)	$\neg\alpha \vee \alpha$	$(5, I_1\vee)$
(7)	$\neg\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	$(1, 6, I\neg)$
(8)	$\neg\alpha \vee \alpha$	$(7, E\neg\neg)$

Considere, agora, o seguinte esquema de axiomas, para todo $\alpha, \beta, \gamma \in Form(L)$

(A_1) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$
(A_2) $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$
(A_3) $(\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow ((\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha)$
(A_4) $\forall x(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \forall x\alpha)$, onde $x \notin FV(\alpha)$
(A_5) $\forall x\alpha(x) \Rightarrow \alpha(t)$, onde x é substituível por t em α.

Regras: MP $\frac{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$

GEN $\frac{\alpha(x)}{\forall x\alpha(x)}$, onde x não é livre em qualquer premissa que foi usada na prova de $\alpha(x)$.

Fazendo $AX = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, MP, GEN\}$, então $\vdash_L^{AX}$ é o sistema dedutivo, em estilo axiomático, da lógica de predicados clássica.

Dois resultados fundamentais da lógica de predicados clássica são os teoremas da compacidade e da completude. O teorema da compacidade afirma que se Γ é um conjunto de fórmulas tal que $\Gamma \vdash \alpha$ então existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma_0 \vdash \alpha$. Isto é a propriedade finitária de $\vdash$. O teorema da completude assegura que $\Gamma \models \alpha$ se e somente se $\Gamma \vdash \alpha$.

A lógica de predicados clássica, LPC, sôbre uma linguagem (de 1a. ordem) L é um subconjunto próprio de $Form(L)$. Em particular, a lógica sentencial clássica é um subconjunto próprio de LPC. Não existe, porém, nenhuma evidência de que os únicos subconjuntos próprios de L sejam somente esses dois. De fato, muitos outros subconjuntos próprios de interesses foram definidos e investigados quer por meios semânticos (lógicas multivaloradas) quer por meios sintáticos (a lógica intuicionística, por exemplo).

Considere, por exemplo, a tautologia $\alpha \vee \neg\alpha$, conhecida em LPC, como a "lei do terceiro excluído". Devido a esta lei ao matemático lhe é permitido fazer argumentos como o seguinte." Os números algébricos formam um conjunto contável. O conjunto dos números reais não é contável. Logo existe números reais não-algébricos". Alguns matemáticos não aceitam esse argumento porque não são exibidos os objetos que se argumentam existirem. Esta crítica leva a completa rejeição da lei do terceiro excluído e portanto da lógica de predicados clássica. O resultado é o aparecimento de lógicas construtivas, como a lógica intuicionística.

A partir do ponto de vista construtivo de lógica, convivem duas concepções de semântica. Uma mais tradicional devida a Tarski e outra mais recente devida a Heyting. Na concepção Tarskiana o conectivo "$\vee$" é traduzido por "ou", o conectivo "$\wedge$" por "e" e assim por diante. Esta interpretação não nos diz particularmente nada a respeito dos conectivos lógicos. Talvez tenha sido por isso o sucesso operacional dessa abordagem. A única coisa que interessa de uma sentança, nessa abordagem, é a sua denotação F (falso) ou V (verdadeiro). Assumindo conhecidas as denotações das sentenças atômicas α e β e usando as tabelas-verdade encontram-se as denotações das sentenças compostas, $\neg\alpha, \alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \Rightarrow \beta$ e $\alpha \Leftrightarrow \beta$. A denotação de $\forall x\alpha$ é V se para todo d no domínio de interpretação, $\alpha[d/x]$ é V, enquanto a denotação de $\exists x\alpha$ é V se existe d tal que $\alpha[d/x]$ é V.

A concepção Heytiana, por outro lado, não pergunta quando uma sentança α é verdadeira, mas sim "qual é a prova de α?" Isto significa modelar não a denotação de α, mas sua prova. Desse modo

1. Para as sentenças atômicas assume-se conhecer intrinsicamente o que é um prova. Por exemplo, lápis e papel serve como uma prova da sentença "$9 \times 10 = 90$".

2. Uma prova de $\alpha \wedge \beta$ é um par (p, q) consistindo de uma prova p de α e uma prova q de β.

3. Uma prova de $\alpha \vee \beta$ é um par (i, p) com $i = 0$, e p é uma prova de α, ou $i = 1$, e p é uma prova de β.

4. Uma prova de $\alpha \Rightarrow \beta$ é uma função f, que mapeia cada prova p de α, em uma prova $f(p)$ de β.

5. Em geral, a negação $\neg\alpha$ é tratada como $\alpha \Rightarrow f$, onde f é uma sentença que não existe prova para ela.

6. Uma prova de $\forall x\alpha$ é uma função f que mapeia cada ponto d do domínio de interpretação a uma prova $f(d)$ de $\alpha[d/x]$.

7. Uma prova de $\exists x\alpha$ é um par (d, p), onde d é um ponto do domínio de interpretação e p é uma prova de $\alpha[d/x]$.

Por exemplo a sentença $\alpha \Rightarrow \alpha$, é provada pela função identidade que associa a cada prova p de α, a mesma prova. Por outro lado, o que seria uma prova de $\neg\alpha \vee \alpha$?

Seria uma prova de α ou uma prova de $\neg\alpha$ e isso não é possível, em geral. Portanto, a semântica de Heyting corresponde a uma outra lógica, que não é a lógica de predicados clássica, a qual é chamada *lógica intuicionística*.

A lógica intuicionística é uma variante da lógica clássica no sentido de que ambas as apresentações compartilham de um conjunto de regras comuns. No que diz respeito à apresentação a diferença entre as duas lógicas é muito pequena. Só diferem nas regras relativas a negação. Por isso as regras que especificam a negação em LPC será chamada *negação clássica*, enquanto àquelas que especificam a negação na lógica intuicionística será chamada negação intuicionística.

Considere as seguintes regras para a negação

$$\frac{\neg\alpha, \alpha}{\beta}(E\neg), \quad \frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}(E\neg\neg), \quad \frac{\beta, \neg\beta}{\neg\alpha}(RAA)$$

Então

$$\begin{aligned} \text{negação clássica} &= E\neg\neg + RAA \\ \text{negação intuicionística} &= E\neg + RAA \end{aligned}$$

Fazendo DNI= conjunto de todas as regras que aparecem em DN, para LPC, substituindo as regras da negação clássica pelas regras da negação intuicionística obtém-se uma apresentação da lógica intuicionística. O sistema $\vdash_L^{DNI}$ é o sistema dedutivo da lógica intuicionística.

Considerando que $\neg\alpha \wedge \alpha = f$, a regra $(I\neg)$ pode ser escrita por $\frac{f}{\neg\beta}(I\neg)$, ou mais

precisamente $\dfrac{\begin{matrix}[\beta] \\ \vdots \\ f\end{matrix}}{\neg\beta}(I\neg)$.

Considerando que $\neg\alpha \wedge \alpha = f$, a regra $(I\neg)$ pode ser escrita por $\frac{\neg\alpha, \alpha}{f}(E\neg)$.

6.5 A Linguagem das Asserções Afirmáveis e Refutáveis

Esta seção visa justificar o uso de topologias como semânticas de linguagem das observações finitas. Para isso são investigadas propriedades que asserções devem ter. Considere, por exemplo, a seguinte asserção: "Pedro tem olhos azuis"

Uma pergunta óbvia é: "é isto verdadeiro ou falso"? Uma possível resposta é dada examinando-se os olhos de pedro. Se ninguém presente é capaz de constatar a veracidade ou falsidade desta asserção, contrata-se um especialista em côres. Se por outro lado, pedro não está presente para ser examinado, manda-se buscá-lo. É um fato que esta asserção pode sempre em princípio ser confirmada ou não com uma quantidade finita de esfôrço, num tempo finito. Se, de fato, pedro tem olhos azuis diz-se que esta asserção foi confirmada, caso contrário diz-se que ela foi refutada.

Note que afirmações ou refutações são feitas na hipótese de que é possível se *observar* os fenômenos expressos nas asserções. Uma observação deve ser feita num tempo finito após uma quantidade finita de esfôrço. Observações satisfazendo estas condições serão chamadas, de ora em diante, ***observações finitas.***

A asserção "Pedro tem olhos azuis" é ao mesmo tempo *afirmável* e *refutável.* Constatando-se a veracidade desta asserção ela nunca pode ser refutada, mesmo assim diz-se que ela é refutável, pois é possível se descrever circunstâncias sob as quais ela poderia ser refutada, mesmo sabendo que todas essas circunstâncias são impossiveis. Afirmabilidade e refutabilidade são determinadas pela forma da asserção, enquanto verdade e falsidade são determinadas pelo modo como elas se relacionam com a realidade.

A asserção "algumas crianças tem olhos côr de rosa" é afirmável mas não é refutável. Para afirmá- la basta encontrar uma criança com olhos côr de rosa. Para refutá-la deve-se encontrar todas crianças do universo e checar que seus olhos não são côr de rosa. É preciso estar seguro de que nenhuma criança foi deixada sem exame. para completar deve-se checar todas as crianças do passado e do futuro. É óbvio que esta asserção não é refutável.

Considere a asserção "todos os corvos são prêtos". Isto talvez seja verdadeiro, mas não é afirmável. No entanto, para refutá-la basta encontrar um corvo que não seja preto. Ou seja, ela é uma asserção refutável. "José tem exatamente 1m e 80cm de altura" não é uma asserção afirmável pois nunca pode-se medir com tal precisão. Ela é refutável pois pode-se medir sua altura dentro de um intervalo entre 1m e 70 e 1m e 72 cm. A asserção "José tem de altura entre 1m e 70cm e 1m e 72cm" é afirmável e refutável.

Uma linguagem lógica tem como objetivo nos fornecer uma descrição dos conectivos tais como "e", "ou", "não", "se...então", etc. No que segue será examinado, de forma sistemática, o que acontece quando se usa esses conectivos com asserções afirmáveis ou refutáveis. Pretende-se responder questões tais como: é a composta, segundo esses conectivos, de asserções afirmáveis (refutáveis) também afirmável (refutável)?

1. Negação (Não, $\neg$)

Refutar uma asserção P é o mesmo que afirmar sua negação $\neg P$. Afirmar P é o mesmo que refutar $\neg P$. Portanto a negação transforma asserções afirmáveis em refutáveis e vice-versa. Como consequência se pode falar de asserções refutáveis, tomando-se sua negação e falando-se em asserções afirmáveis. Por isso é possível se focalizar a atenção apenas em asserções afirmáveis.

Tome, como exemplo, a assertiva $P \equiv$ "alguns corvos são não pretos". Isso é afirmável, mas não é refutável. Por outro lado, $\neg P$ é equivalente a "todos os corvos são pretos", que é refutável mas, não afirmável.

2. Disjunção (ou, $\vee$)

Se ambos P e Q são afirmáveis, então pode-se afirmar $P \vee Q$ (P ou Q) ou afirmando $\underline{P}$ ou afirmando Q. Logo $P \vee Q$ é afirmável. Por indução, a disjunção de um número finito de asserções afirmáveis é afirmável. Pode-se ir mais além. Suponha que se tem uma família $\{P_i\}_{i \in I}$ de asserções afirmáveis, mesmo infinita. Pode-se imaginar uma disjunção infinita $\bigvee_i P_i$, para afirmar que um dos $P_i's$ é afirmável. Portanto, a disjunção qualquer de asserções afirmáveis é afirmável.

3. Conjunção ($e, \wedge$)

Se P e Q são afirmáveis, pode-se afirmar $P \wedge Q$ afirmando-se ambos P e Q. Logo $P \wedge Q$ é afirmável. Usando indução finita pode-se afirmar que $\bigwedge_i P_i$, se $\{P_i\}$ é uma família finita de asserções afirmáveis. No entanto se $\{P_i\}$ é infinita, afirmar $\bigwedge_i P_i$ é afirmar cada P_i e isto tomaria uma quantidade infinita de tempo. Portanto, qualquer conjunção finita de asserções afirmáveis é afirmável.

4. Verdadeiro e Falso

Pode-se ver esses dois como casos especiais. Verdade e falso sendo, respectivamente, a conjunção vazia ($\bigwedge \phi$) e a disjunção vazia ($\bigvee \phi$). Eles estão relacionados a equivalência lógica $V \wedge P \Leftrightarrow P \Leftrightarrow F \vee P$. Eles devem ser ambos afirmáveis como casos particulares dos dois anteriores.

5. Implicação (Se...então, $\Rightarrow$)

$P \Rightarrow Q$ ("se P se verifica então também Q") é como uma lei científica, e pode ser refutada em se afirmando P e refutando Q. Se P e Q são ambos afirmáveis, nada se pode dizer, em particular, sobre $P \Rightarrow Q$. Por exemplo, tome P uma asserção afirmável e Q falsa. Então $P \Rightarrow Q$ é localmente equivalente a $\neg P$ o que, em geral, não é afirmável. Logo, a lógica das asserções afirmáveis não deve incluir a implicação.

Em resumo, a lógica das asserções afirmáveis tem

- disjunções finitas, incluindo a disjunção vazia, falso e disjunções infinitas.
- Conjunções finitas, incluindo a conjução vazia, verdade.

Ela não inclui negação, implicação ou conjunções infinitas.

6.6 Frame Como Linguagem da Lógica Geométrica

A estrutura de frame está para lógica das observações finitas ou lógica geométrica, assim como a estrutura de álgebra booleana está para a lógica de predicados clássica. Um frame $\mathbb{F}$ nada mais é que um reticulado, onde toda família infinita $\{P_i\} \subseteq \mathbb{F}$ possui disjunção, isto é, $\bigvee_i P_i \in \mathbb{F}$. O fato de "$\bigvee$" ser uma operação com infinitos argumentos não faz com que $\mathbb{F}$ deixe de ser uma teoria algébrica, como está provado em [JOH 82] página 40, Teorema 1.2.

6.6.1 Definição: Frame (Ordenado)

Seja $(\mathbb{F}, \leq, 0, 1)$ um reticulado. $\mathbb{F}$ diz-se um *frame* se toda família infinita, $\{y_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{F}$, tem supremo, denotado por $\bigvee\{y_i\}|i \in I\}$, e satisfaz a igualdade $x \wedge \bigvee\{y_i|i \in I\} = \bigvee\{x \wedge y_i|i \in I\}$, isto é, ínfimos binários se distribuem sobre supremos quaisquer.

De acordo com o Capítulo 2, deste trabalho, um reticulado definido em termos de ordem possui uma definição algébrica equivalente. Portanto pode-se definir equivalentemente um frame como segue.

6.6.2 Definição: Frame (Algébrico)

Seja $\mathbb{F}$ um conjunto não vazio, munido de duas operações binárias $\wedge$ e $\vee$, chamados ínfimo e supremo, respectivamente, duas operações nulárias 0 e 1 e uma operação infinitária, $\bigvee$, chamada *supremo qualquer*. $(\mathbb{F}, \wedge, \vee, \bigvee, 0, 1)$ diz-se frame se satisfaz as seguintes equações para todo $x, y, z \in \mathbb{F}$.

$F_1(a)$	$x \wedge y = y \wedge x$; (b) $x \vee y = y \vee x$	(comutativa)
$F_2(a)$	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge y$; (b) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	(associativa)
$F_3(a)$	$x \wedge x = x$; (b) $x \vee x = x$	(idempotência)
$F_4(a)$	$x = x \wedge (x \vee y)$; (b) $x = x \vee (x \wedge y)$	(absorção)
$F_5(a)$	$x \wedge 1 = x$; (b) $x \vee 0 = x$; (c) $x \wedge 0 = 0; x \vee 1 = 1$	(leis do elem. neutro)
$F_6(a)$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$; (b) $x \vee (y \vee z) =$ $= (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	(distributividade)
$F_7(a)$	$x \wedge \bigvee\{y_i \mid i \in I\} = \bigvee\{x \wedge y_i \mid i \in I\}$	(distributividade)

De ora em diante, um frame é a estrutura $(\mathbb{F}, \wedge, \vee, \bigvee, 0, 1, \leq)$ onde $(\mathbb{F}, \wedge, \vee, \bigvee, 0, 1)$ e $(\mathbb{F}, \leq, 0, 1)$ são frames ordenado e algébrico, respectivamente.

6.6.3 Exemplo

(i) Seja X um conjunto não-vazio e $\mathcal{P}(X)$ a coleção dos subconjuntos de X. Então $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, \bigcup, \phi, X, \subseteq)$ é um frame, onde $\wedge \equiv \cap$, $\cup \equiv \cup$ (união binária). $\bigvee \equiv \bigcup$ (a união qualquer), $0 \equiv \phi, 1 \equiv X$ e $\leq \equiv \subseteq$ (a inclusão de conjuntos).

(ii) Seja X uma espaço topológico e $\mathcal{J}$ a coleção dos conjuntos abertos de X, isto é, a topologia de X. Então $(\mathcal{J}, \cap, \cup, \bigcup, \phi, X, \subseteq)$ é um frame.

6.7 Os Reais Como uma Lógica Geométrica

Juntando-se a definição de domínio da matemática computacional, como foi apresentado no capítulo 4, e a definição de lógica sobre uma linguagem, como apresentada na Seção 6.3, pretende-se, nesta seção, definir os números reais parciais como lógica sobre uma linguagem, cuja semântica é um frame. Como um frame modela uma linguagem de observações finitas, obtém-se, assim, os reais como lógicas de observações finitas chamadas lógicas geométricas.

Seja $(D, \sqsubseteq, <<, \perp, \mathcal{J})$ um domínio da matemática computacional, com B a base de D. Sabe-se que para todo $d \in D$, o conjunto $\{b \in B | b << d\}$ é dirigido e $d = \text{Sup}\{b \in B | b << d\}$. Além disso, todo conjunto dirigido de B tem supremo em D. Desse modo, existe uma correspondência biunívoca entre os subconjuntos dirigidos de B e os elementos de D. Portanto é possível identificar cada elemento de D com o subconjunto dirigido de B do qual ele é supremo, assim $d \equiv \{b \in B | b << d\}$. Sabe-se que se $b_1, b_2, \in B$ e $b_1, b_2 \in d$, então $\text{Sup}\{b_1, b_2\} = b_1 \wedge b_2$, $inf\{b_1, b_2\} = b_1 \vee b_2 \in d$. É fácil ver que se $\{b_i\} \subseteq d$ é uma família qualquer, então $inf\{b_i\} = \bigvee_i \{b_i\} \in d$. Tem-se, também, que $\perp \in d$. Além disso, se $b \in d$ e $c \sqsubseteq b$, então $c \in d$. Portanto, para cada $d \in D$, $d \equiv \{b \in D | b << d\}$ seria uma lógica das observações finitas. A pergunta, agora, seria: qual é o frame do qual cada $d \in D$ é uma lógica sobre ele? A resposta seria: A topologia de Scott sobre D. Observe também que para cada $d \in D$, $d = \text{Sup}\{b \in B | b << d\}$.

6.7.1 Proposição

Seja $(D, \sqsubseteq, <<, \perp, \mathcal{J})$ um domínio da matemática computacional e $\mathcal{J}_B$ a base da topologia $\mathcal{J}$, correspondente a base B de D. Então $(\mathcal{J}, \cap, \cup, \bigcup, \phi, D, \subseteq)$ é uma frame.

Prova: Foi visto, No Capítulo 3, que $b \in B \Leftrightarrow \Uparrow b \in \mathcal{J}_B$, onde $\Uparrow b = \{c \in D | b << c\}$. Por outro lado, $b_1 \sqsubseteq b_2$ em $B \Leftrightarrow \Uparrow b_2 \subseteq \Uparrow b_1$ em $\mathcal{J}$. Tem-se também que $b_1 \wedge b_2 \equiv \Uparrow b_1 \cap \Uparrow b_2, b_1 \vee b_2 \equiv \Uparrow b_1 \cup \Uparrow b_2$; $D \equiv \Uparrow \perp, \bigwedge_i \{b_i\} \equiv \cup\{b_i | i \in I\}$. Como o fato de $b_1, b_2 \in B, \{b_i\} \subseteq D$ acarreta $b_1 \wedge b_2, b_1 \vee b_2 \in B$ e $\bigvee b_i \in D$ segue que $\cap, \cup, \bigcup$ são operações bem definidas em $\mathcal{J}$ e portanto $\mathcal{J}$ é um frame.

□

Tendo em vista que $\mathcal{J}$ é exemplo de frame é razoável se introduzir os conceitos de base e subbase de um frame. Os elementos de um frame são pensados como asserções e o frame como a linguagem de lógicas geométricas. As operações $\wedge, \vee, \bigvee, 0$ e 1 são denominadas conjunções (finitas), disjunções (finitas), disjunção qualquer, falso e verdadeiro, respectivamente. Num frame começa-se de asserções simples e gera-se as demais asserções usando as operações $\wedge, \vee$ e $\bigvee$. As asserções simples são chamadas *subbásicas*, elas formam a *subbase*. Na Proposição 6.7.1 a subbase de $\mathcal{J}$ é o conjunto $\{\Uparrow b | b \in B\}$.

Em qualquer frame as etapas de geração dos elementos podem ser dadas por:

Etapa 1: Conjunções finitas de elementos subbásicos.

Etapa 2: Disjunções quaisquer (finita ou infinita) de conjunções finitas de elementos subbásicas.

Etapa 3: Qualquer expressão mais complicada pode ser reduzida a uma expressão da etapa 2 usando a lei da distributividade finita ou infinita.

Às vezes é melhor dizer que qualquer asserção é uma disjunção de espressões subbásicas. Neste caso a subbase é chamada *base* e os elementos são básicos.

Dado o frame $(\mathbb{F}, \wedge, \vee, \bigvee, 0, 1, \leq)$ sabe-se que se $a, b \in \mathbb{F}$, $a = b \Leftrightarrow a \leq b$ e $b \leq a$. É possível descrever os elementos de uma frame por *geradores* e as relações $\leq$ e $=$ como segue:

Etapa 1: Começa-se com uma subbase (de geradores).

Etapa 2: Constroem-se todas as expressões possíveis em termos da subbase e as operações do frame

Etapa 3: Exige-se que certas relações se verifiquem entre expressões, como por exemplo, que $a \leq b$ ou $a = b$.

Etapa 4: Deduz-se das relações (axiomas) e das leis (regras de inferências), quando duas expressões são iguais.

O procedimento, acima, de construir frames a partir de uma subbase motiva a seguinte construção. Seja $(D, \sqsubseteq, \ll, \perp, \mathcal{J})$ um domínio da matemática computacional e $B_\top$ a base de D acrescentada de um elemento artificial $\top$, tal que $x \sqsubseteq \top$ para todo $x \in B$. Considere o alfabeto $\sum = \{b_1, b_2, \ldots, \bot, \top, \wedge, \vee, \bigvee\}$ onde, $b_i, \bot, \top \in B_\top$. T_Σ; o conjunto dos têrmos sobre $\sum$, é o menor conjunto de expressões sobre $\sum$ gerado pelo seguinte cálculo:

$$T_1 \cdot \frac{}{b_i}, b_i \in B_\top; \quad T_2 \cdot \frac{t_1, t_2}{(t_1 \wedge t_2)}, t_1, t_2 \in T_\Sigma;$$
$$T_3 \cdot \frac{t_1, t_2}{(t_1 \vee t_2)}, t_1, t_2 \in T_\Sigma; \quad T_4 \cdot \frac{t_i | i \in I}{\bigvee\{t_i | i \in I\}}, \{t_i | i \in I\} \subseteq T_\Sigma.$$

Seja $(T_\Sigma, \wedge, \vee, \bigvee, \bot, \top)$ a Σ-ágebra (abstrata) associada a linguagem gerada por esse cálculo. Vendo $\sum$ como um tipo de operações, então $(\mathcal{J}, \sum_\mathcal{J})$ é um $\sum$-álgebra, onde

(i) $\mathcal{J}$ é a topologia do domínio.

(ii) $\sum_\mathcal{J}$ é dada por:

(a) $b_\mathcal{J}$ é o aberto $\Uparrow b \in \mathcal{J}_B$ para cada $b \in B_\bot$

(b) $\wedge_\mathcal{J} : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ definida por $\wedge_\mathcal{J}(A, B) = A \cap B, A, B \in \mathcal{J}$ e $\cap$ é a operação de interseção sobre $\mathcal{J}$.

(c) $\vee_\mathcal{J} : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ definida por $\vee_\mathcal{J}(A, B) = A \cup B, A, B \in \mathcal{J}$ e $\cup$ é a operação de uma união sobre $\mathcal{J}$.

(d) $\bigvee_\mathcal{J} : \mathcal{P}(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathcal{J}$ definida por $\vee_\mathcal{J}(\{A_i | i \in I\}) = \cup\{A_i | i \in I\}$, onde $\{A_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{J}$ e $\cup$ é a união qualquer sobre $\mathcal{J}$.

Pelo Teorema 6.1.12 existe um único homomorfismo de $T_\Sigma \longrightarrow \mathcal{J}$. Por outro lado, fazendo $\rho_{\mathcal{J}_B}(b) = \Uparrow b$, para todo $b \in B_\top$, e usando o Teorema 6.1.9 (para o caso de $X = B_\top$) $\rho_\mathcal{J}$: $B_\top \longrightarrow \mathcal{J}$ pode ser extendido para um único $\sum$-homomorfismo $h : T_\Sigma \longrightarrow \mathcal{J}$. Logo $h : T_\Sigma \longrightarrow \mathcal{J}$ definido por $h(t) = \Uparrow t$ é o único $\sum$-homomorfismo de T_Σ em $\mathcal{J}$. Além disso, h é ismorfismo porque existe uma bijeção entre $B_\top$ e a base, $\{\Uparrow b | b \in B_\top\}$, de $\mathcal{J}$.

Portanto cada elemento de T_Σ, visto como um objeto sintático, tem um único significado em $\mathcal{J}$.

Como T_Σ e $\mathcal{J}$ são isomorfos e $\mathcal{J}$ é um frame, então T_Σ também é um frame. Isto significa que T_Σ satisfaz as equações $F_1 - F_7$ da Definição 6.6.6 de frame. Além disso, pode-se definir uma relação de ordem, $\sqsubseteq$, sobre T_Σ de modo que $(T_\Sigma, \sqsubseteq, \perp, \top)$ é um frame segundo a Definição 6.6.1.

Defina, para $t_1, t_2 \in T_\Sigma, t_1 \sqsubseteq t_2 \Leftrightarrow h(t_2) \subseteq h(t_1)$, isto é, $\Uparrow t_2 \subseteq \Uparrow t_1$. O fato de que $(T_\Sigma, \sqsubseteq, \perp, \top)$ é um frame é expresso através das seguintes regras:

$$
\begin{array}{l}
R_1: \ \frac{-}{t \sqsubseteq t}, t \in T_\Sigma; \quad R_2: \frac{t_1 \sqsubseteq t_2, t_2 \sqsubseteq t_3}{t_1 \sqsubseteq t_3}, t_1, t_2, t_3 \in T_\Sigma; \quad R_3: \frac{t_1 \sqsubseteq t_2, t_2 \sqsubseteq t_1}{t_1 = t_2}, t_1, t_2 \in T_\Sigma; \\
R_4: \ \frac{-}{\perp \sqsubseteq t}, t \in T_\Sigma; \quad R_5: \frac{-}{t \sqsubseteq \top}, t \in T_\Sigma; \quad R_6: \frac{t_1 \sqsubseteq t, t_2 \sqsubseteq t}{t_1 \wedge t_2 \sqsubseteq t}, t, t_1, t_2 \in T_\Sigma; \\
R_7: \ \frac{t_1 \sqsubseteq t, t_2 \sqsubseteq t}{t_1 \vee t_2 \sqsubseteq t}, t, t_1, t_2 \in T_\Sigma; \ R_8: \frac{t_i \sqsubseteq t, t_i \in T_\Sigma}{\bigvee \{t_i | i \in I\} \sqsubseteq t}.
\end{array}
$$

Em resumo, seja $B_\top = \{b_1, b_2, \ldots, \perp, \top\}$, onde $B = \{b_1, b_2, \ldots, \perp\}$ é base de algum domínio $(D, \sqsubseteq, \ll, \perp, \mathcal{J})$. Considere o alfabeto

$\sum = \{b_1, b_2, \ldots, \perp, \top, \wedge, \vee, \bigvee, \sqsubseteq, =\}$, onde $b_i \in B$. Seja L a linguagem gerada pelo seguinte cálculo:

(a) T_1, T_2, T_3 e T_4, cálculo para gerar o conjunto dos têrmos, T_Σ.

(b) As equações $F_1 - F_2$, da Definição 6.6.2, caracterizam $(T_{\sum}, \wedge, \vee, \bigvee, \perp, \top)$ como um frame, do ponto de vista algébrica, isto é, identificam elementos de T_Σ.

(c) $R_1, R_2, \ldots, R_8$ acrescentado da equação F_7 são as regras para caracterizar $(T_\Sigma, \sqsubseteq, \perp, \top)$ como um frame, do ponto de vista da ordem.

L é uma linguagem cuja sintaxe é o frame $(T_\Sigma, \wedge, \vee, \bigvee, \sqsubseteq, \perp, \top)$ e cuja a semântica denotacional é o frame $(\mathcal{J}, \cap, \cup, \bigcup, \subseteq, \phi, D)$. Os elementos de T_Σ são pensados como asserções ou observações sobre os elementos de D. Seja $a \in T_\Sigma$ e $d \in D$. *d diz-se satisfazer a ou a é verdadeira para d* se e somente se $d \in h(a)$, isto é, $d \in \Uparrow a$. Escreve-se $d \models a$ no lugar de "d satisfaz a" (oberve que isso é equivalente a dizer que $a \ll d$. Este é o ponto de vista sintático que será apresentado oportunamente).

6.7.2 Proposição

Sejam $a, b \in T_\Sigma$ e $d \in D$. Então valem as seguintes propriedades:

(i) $d \models a \wedge b \Leftrightarrow d \models a$ e $d \models b$

(ii) $d \models a \vee b \Leftrightarrow d \models a$ ou $d \models b$

(iii) $d \models \bigvee\{a_i | i \in I\} \Longrightarrow d \models a_i$ para algum $a_i \in T_\Sigma$

(iv) Se $d \models b$ e $a \sqsubseteq b$ então $d \models a$

(v) $d \models \perp$ para todo $d \in D$ e $d \not\models \top$ para qualquer $d \in D$.

Prova: (a) $d \models a \wedge b \Leftrightarrow d \in \Uparrow(a \wedge b) = \Uparrow a \cap \Uparrow b \Leftrightarrow d \in \Uparrow a$ e $d \in \Uparrow b \Leftrightarrow d \models a$ e $d \models b$.

Os demais itens são provados analogamente.

□

6.7.3 Corolário

Seja $d \in D$. Defina $T(d) = \{a \in T_\Sigma | d \models a\}$. $T(d) \subseteq T_\Sigma$ é chamada a teoria do elemento d. $T(d)$ tem as seguintes propriedades:

(a) $a, b \in T(d) \Rightarrow a \wedge b \in T(d)$ e $a \vee b \in T(d)$

(b) $\{a_i | i \in I\} \subseteq T(d) \Rightarrow \bigvee\{a_i / i \in I\} \in T(d)$

(c) $b \in T(d)$ e $a \sqsubseteq b \Rightarrow a \in T(d)$

(d) $\perp \in T(d)$.

Prova: É uma consequência imediata da Proposição 6.7.2. As propriedade (a) - (d) justificam chamar $T(d)$ uma teoria lógica. É óbvio que $T(d)$ é um subconjunto próprio consistente de T_Σ. $T(d)$ é também chamada um teoria lógica geométrica de d ou simplesmente uma lógica geométrica de d.

Dados $a, b \in T_\Sigma$ diz-se que $a \models b$ (b é uma consequência lógica de a) se e somente se para todo $d \in D$, se $d \models a$, então $d \models b$. Lembre-se que se $d \in D, d \models a, d$ diz-se um modelo de a.

□

6.7.4 Proposição

Sejam $a, b \in T_\Sigma$. Então $a \models b \Leftrightarrow b \sqsubseteq a$.

Prova: Suponha que $a \models b$. Então para todo $d \in D$ se $d \models a$, então $d \models b$. Ou seja, se $d \in \Uparrow a$, então $d \in \Uparrow b$. O que equivale a dizer que $\Uparrow a \subseteq \Uparrow b$. Como $\Uparrow a \subseteq \Uparrow b \Leftrightarrow b \sqsubseteq a$. Segue o resultado. A recíproca é análoga.

□

6.7.5 Teorema da Compacidade

Seja Γ um conjunto de senteças de T_Σ e $a \in T_\Sigma$. Se $\Gamma \models a$ então existe $b \in T_\Sigma$ tal que $b \models a$.

Prova: Seja $\Gamma = \{a_i | i \in I\}$, com $a_i \in T_\Sigma$. $\Gamma \models a$ se e somente para todo $d \in D$, se $d \models a_i$, para todo i, então $d \models a$. Mas se $d \models a_i$ para todo i, então $d \models \bigvee\{a_i | i \in I\}$. Fazendo $b = \bigvee\{a_i | i \in I\}$ segue o resultado.

□

Seja L a linguagem para o domínio D construída acima e para $d \in D$ considere a lógica $T(d) \equiv d$ a qual, de ora em diante, será denotada simplesmente por d. Para se obter uma apresentação da lógica é necessário:

(a) Especificar um subconjunto dirigido $\boldsymbol{A} \subseteq B_\top$

(b) Considerar as seguintes regras:

$$(R_1) \quad \frac{-}{a_i \in d}, a_i \in \boldsymbol{A}; \quad \frac{a\in d, b\in d}{a\wedge b\in d}(I\wedge); \quad \frac{a\wedge b\in d}{a\in d}(E_1\wedge); \quad \frac{a\wedge b\in d}{b\in d}(E_2\wedge)$$

$$\frac{a\in d}{a\vee b\in d}(I\vee); \quad \frac{a\vee b\in d \quad \begin{array}{c}[a\in d]\\ \vdots\\ c\in d\end{array} \quad \begin{array}{c}[b\in d]\\ \vdots\\ c\in d\end{array}}{c\in d}(E\bigvee); \quad \frac{b_i\in d}{\bigvee\{b_i / i\in I\}\in d}(I\bigvee)$$

$$\frac{\bigvee\{b_i\in d\} \quad \begin{array}{c}[b_i\in d]\\ \vdots\\ b\in d\end{array}}{b\in d}(E\bigvee), \quad \frac{\begin{array}{c}[b\in d]\\ \vdots\\ a\in d\end{array}}{a\sqsubseteq b}(I\sqsubseteq); \quad \frac{b\in d, a\sqsubseteq b}{a\in d}(E\sqsubseteq); \quad \frac{-}{\bot\in d}(R_2)$$

$$\frac{a\in d, b\in d, a\sqsubseteq b, b\sqsubseteq a}{a=b\in d}(I=); \quad \frac{a\in d, a=b}{b\in d}(E=).$$

Fazendo $P = \boldsymbol{A} \cup \{R_1, R_2, I\wedge, E_1\wedge, E_2\wedge, I\bigvee, E_1\bigvee, E_2\vee, I\vee, E\vee, I\sqsubseteq, E\sqsubseteq, I=, E=$

}, $\vdash_L^P$ é o sistema dedutivo para gerar a lógica d. Observe que para obter duas lógicas diferentes d e d' basta especificar dois conjuntos dirigidos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A}'$ de B_{T}. Como a linguagem é fixa e o conjunto de regras também é fixo, para caracterizar a lógica d basta apresentar o conjunto de axiomas $\boldsymbol{A}$. Desse modo usa-se apenas o símbolo $\vdash$ para indicar o sistema dedutivo de uma lógica cujo conjunto de axiomas é $\boldsymbol{A}$.

6.7.6 Teorema da Completude

Se $a, b \in T_\Sigma$, então $a \vdash b \Leftrightarrow a \models b$.

Prova: $a \vdash b \Leftrightarrow b \sqsubseteq a(IE) \Leftrightarrow a \models b$ pela Proposição 6.7.4.

□

Tendo em vista que $d \equiv T(d), T(d) = \{a \in T_\Sigma | d \models a\}, d \models a \Leftrightarrow d \in \Uparrow a$ e $\Uparrow a = \{d \in D | a \ll d\}$ pode-se assumir a regra $\frac{a \in d}{a \ll d}$ e dar as seguintes interpretações para "$a \ll d$": "a aproxima d", "a é um algorítmo que computa d", "a é uma máquina que armazena d", "a é uma máquina que computa d" "a é uma prova de d", etc. As regras de P, acima, podem ser reescritas, agora, trocando o "$\in$" por "$\ll$". Por exemplo a regra, $\frac{a \in d, b \in d}{a \wedge b \in d}(I\wedge)$ pode ser escrita por $\frac{a \ll d, b \ll d}{a \wedge b \ll d}(I\wedge)$ e interpretar de modo natural segundo as sugestões acima. Neste caso esta regra poderia ter a seguinte leitura: "Se a aproxima d e b aproxima d, então $a \wedge b$ aproxima d". Fazendo $D = \mathcal{R}$, cada $r \in D$, seja $r \in \mathbb{R}$ ou r um intervalo de extremos irracionais, ele pode ser visto como uma lógica geométrica. Para obter-se essa lógica basta especificar um conjunto dirigido $\boldsymbol{A}_r \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{Q})$. A sua apresentação é $\boldsymbol{A}_r \cup \{R_1, R_2, I\wedge, E_1\wedge, E_2\wedge, I\vee, E_1\vee, E_2\vee, I\vee, E\vee, I\sqsubseteq, E\sqsubseteq, I=, E=\}$.

É claro que se r_1, r_2 são lógicas, então (r_1, r_2) também é uma lógica. O mesmo se pode dizer da união disjunta de r_1 e r_2. Sabe-se que D_1 e D_2 são domínios, então o espaço das funções contínuas de D_1 em D_2, $[D_1 \longrightarrow D_2]$, também é um domínio. Portanto, cada $f \in [D_1 \longrightarrow D_2]$, é também uma lógica geométrica. Dados $d_1 \in D_1$ e $d_2 \in D_2$, $f : d_1 \longmapsto d_2$ isto é, f mapeia d_1 em d_2. Esses tipos de transformações serão estudados com mais detalhes no próximo capítulo.

Para finalizar este capítulo será definido uma categoria de fundamental importância para o capítulo seguinte. Seja $(D, \sqsubseteq, \ll, \perp)$ um domínio da matemática computacional com base $\mathcal{B}$. Dado, $d \in D$, defina $\mathcal{B}_d = \{b \in \mathcal{B} / b \ll d\}$. sabe-se que $d \notin \mathcal{B}_d$, mas $d = \mathrm{Sup}\mathcal{B}_d$. Além disso, $\perp \in \mathcal{B}_d$. Considerando $sd = \mathcal{B}_d \cup \{d\}$ tem-se o seguinte resultado.

6.7.7 Proposição

Para cada $d \in D$, $(Sd, \sqsubseteq, \perp)$ é um domínio de Scott.

Prova: $\sqsubseteq$ é uma ordem parcial, sobre Sd, porque ela é induzida de D. Para mostrar que Sd é um *cpo* seja $X \subseteq Sd$ dirigido. Se $X = Sd$ então $\text{Sup } X = d \in Sd$. Se $X \neq Sd$, então X é consistente em Sd. Logo X é consistentemente completo. Como para todo $x \in X, x \ll d$ segue que $\text{Sup } X \ll d$. Logo $\text{Sup } X \in Sd$ e consequentemente Sd é um *cpo*. Isto também mostra que Sd é consistentemente completo. Para mostrar que Sd é um *cpo* algébrico, seja $x \in Sb$. se $x = d$, então $x = \text{Sup}\{b \in \mathcal{B}/b \ll x\} = \text{Sup}\{b \in Sd | b \ll x\} = \text{Sup}\{b \in Sd | b \sqsubseteq x\}$, pois, como $\ll$ é uma ordem forte, $b \ll x \Rightarrow b \sqsubseteq x$. Agora, se $x \neq d$, então o conjunto $\downarrow x = \{b \in Sd | b \sqsubseteq x\}$ é obviamente dirigido e $x = \text{Sup} \downarrow x$. Isto mostra que Sd é um *cpo* algébrico. Por fim, como Sd é um conjunto enumerável, a base de Sd, também é. Logo, $(Sd, \sqsubseteq, \perp)$ é um domínio de Scott.

□

Essa propriedade nos diz que cada número real ou intervalo de extremos reais pode ser visto como um objeto da categoria SDOM, a categoria dos domínios de Scott. Já foi visto anteriormente que essa categaria é bicartesiana fechada e possui objeto reflexivo. Assim, SDOM é um modelo tanto da cálculo lambda com tipo como do cálculo lambda sem tipo. Essa é a categoria mais usada em semântica de programação. Aqui ela será usada para efetuar a computação da categoria DOM, da matemática computacional. Como isso vai ser possível será objeto do próximo capítulo. Mas a ideia é a seguinte: Suponha $D_1, D_2 \in$ DOM e $d_1 \in D_1, d_2 \in D_2$. Suponha que se pretende efetuar a operação $d_1 + d_2$ em $D_1 \times D_2$. Então toma-se $a_1 \in d_1$ e $a_2 \in d_2 \Rightarrow (a_1, a_2) \in (d_1, d_2) \in D_1 \times D_2 \Rightarrow a_1 + a_2 \in d_1 + d_2 \in D_3 \in$ DOM. Como $a_1 + a_2$ é uma operação em $\mathcal{B}$ é possível ser feita efetivamente essa computação, pois, por hipótese, $\mathcal{B}$ é finitamente representável. O que resulta é $a_1 + a_2 \ll d_1 + d_2$, ou seja, é uma representação do objeto essencialmente infinito $d_1 + d_2$. É claro que a operação $a_1 + a_2$ é feita na categoria SDOM, enquanto $d_1 + d_2$ é feita na categoria DOM. É nesse sentido que se usará SDOM para se efetuar as computações em DOM. Essas computações será dentro de uma lógica intuicionística, objeto do próximo capítulo.

7 A LÓGICA CONSTRUTIVA DA MATEMÁTICA INTERVALAR

O objetivo principal desta unidade é a construção de uma lógica intuicionística para a matemática Intervalar. Como essa lógica é baseada na linguagem lambda, será apresentada, rápidamente, as teorias clássicas do cálculo lambda com tipos e sem tipos. Na seção 1 será apresentado o cálculo lambda sem tipos como uma teoria funcional. Na seção 2 se abordará o cálculo lambda com tipos como uma teoria de funções . Esta duas seções estão baseadas nos trabalhos de [BAR 84], [SEL 86] e [MAR 88]. Na seção 3 será apresentada uma linguagem lambda que unifica os cálculos lambdas com tipos e sem tipos. A referência principal desta seção é [PAU 87]. Finalmente, na seção 4 será apresentada a Matemática Intervalar como uma teoria construtiva. Esta seção está baseada em [PAU 87], [GIR 89] e [BAC 89]. Foram úteis para a concepção deste capítulo os seguintes trabalhos [BIS 67], [BEE 85], [LAM 86], [LÖF 70], [LÖF 75], [LÖF 82], [GOL 79] e [COS 90].

7.1 O Cálculo Lambda Sem Tipos como uma Teoria Funcional

O cálculo lambda de Church [CHU 51] é um sistema formal para se estudar funções, sua definição e aplicação. Neste sistema formal uma função é apresentada por regras de transformação, que modelam sua computação. Aqui, funções são de qualquer ordem (funções sobre conjuntos, funções de funções etc.) Este sistema capta exatamente aquelas funções que podem ser computadas por meios mecânicos ou eletrônicos. Embora essa linguagem tenha sido elaborada antes do computador eletrônico, argumenta-se que ela é um paradígma de linguagem de programação funcional. A linguagem de programação LISP teve o seu desenho influenciado pela linguagem lambda [PAU 87].

Seguindo [BUR 75], o cálculo lambda será apresentado, inicialmente, de forma intuitiva para que seja facilitada a compreenção de sua apresentação formal.

Considere uma função f definida por $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$. Uma definição como esta envolve três componentes. 1) o nome da função a ser definida, que no caso é f. 2) a variável x. 3) a expressão no lado direito que determina o valor da função para cada argumento. Usando a notação lambda de Church, é possível escrever uma *expressão lambda* que denota a função. A expressão lambda correspondente a função f, acima, é

$$\lambda x \cdot 2x^2 + 3x + 1$$

Portanto, a função f, acima, poderia, também, ser escrita por

$$f = \lambda x \cdot 2x^2 + 3x + 1$$

Desse modo, uma expressão lambda da forma $\lambda x \cdot M$ tem duas partes. A parte entre o lambda e o ponto será chamada *variável ligada* no mesmo sentido que o "x" na expressão $\forall x \cdot \alpha$ ou $\exists x \cdot \alpha$. A parte seguinte ao ponto será chamado o seu *corpo*. A expressão lambda que resulta quando se prefixa λx a uma expressão M será chamada *abstração*. É importante distinguir uma expressão lambda como $\lambda x \cdot 2x^2 + 3x + 1$ e uma expressão como $2x^2 + 3x + 1$. Enquanto o valor da expressão $2x^2 + 3x + 1$ é um número obtido quando se sabe o valor de x, o valor de $\lambda x \cdot 2x^2 + 3x + 1$ é uma função. Ou seja, o tipo de $2x^2 + 3x + 1$ é um real, enquanto o valor de $\lambda x \cdot 2x^2 + 3x + 1$ é do tipo $(\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$, uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

O lado direito de uma definição não é o único contexto no qual uma expressão lambda pode ocorrer. Uma expressão denotando a aplicação da função 5 poderia ser escrito ou por $f(5)$ ou por $(\lambda x \cdot 2x^2 + 3x + 1)5$. Esta expressão contém toda a informação necessária para produzir o resultado. A igualdade $(\lambda x \cdot 2x^2 + 3x + 1)5 = (2x^2 + 3x + 1)[5/x] = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 66$ é conhecido como *β-conversão*, cuja notação em geral é $(\lambda x \cdot M)N =_\beta M[N/x]$, e é uma forma de converter uma expressão em outra, muitas vezes mais simples. Observe que o lado direito da β-conversão é uma substituição, conforme foi definida no capítulo anterior.

Uma função de dois argumentos pode ser definida por

$$g(y) = \lambda x \cdot 2x^2 + 4xy + 3y^2$$

no qual o lado direito é uma expressão lambda. Quando g é aplicada a um número ela produz como resultado uma função. Por exemplo, $g(1) = \lambda x \cdot 2x^2 + 4x + 1$. Reescrevendo esta definição de g usando a regra, dada acima, de mover variáveis de um lado da igualdade para o outro, a mesma função poderia ser definida por

$$g(y)(x) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 \text{ ou } g = \lambda y.\lambda x \cdot 2x^2 + 4xy + 3y^2$$

Considere a expressão lambda $\lambda x \cdot 2x^2 + 3x + y^2$. O nome da variável x nesta expressão é irrelevante, ela pode ser trocada por outra variável sem alterar o significado da expressão. A igualdade entre expressões lambda que efetua essa troca de variável é dada por $\lambda x \cdot M =_\alpha \lambda z.M[z/x]$, (com a ressalva de que z não deve ser livre em $\lambda x \cdot M$) e é conhecida por α-conversão. A definição de variável livre e ligada, assim como as observações decorrentes, são as mesmas, dadas no capítulo anterior, para expressões lógicas como $\exists x \cdot \alpha$ e $\forall x \cdot \alpha$, apenas trocando $\exists x$ ou $\forall x$ por λx. No exemplo acima tem-se $\lambda x \cdot 2x^2 + 3 + y^2 =_\alpha \lambda z \cdot (2x^2 + 3x + y^2)[z/x] = \lambda z \cdot 2z^2 + 3z + y^2$, isso porque z não é livre em $\lambda x \cdot 2x^2 + 3x + y^2$. O mesmo não pode acontecer para a variável y, que é livre nesta expressão ou seja $\lambda x \cdot 2x^2 + 3x + y^2 \neq \lambda y.2y^2 + 3y + y^2$.

Das observações acima pode-se concluir que uma expressão pode ocorrer em três posições como componente de uma expressão maior:

(1) Na posição de operador

(2) Na posição de operando

(3) Como corpo de uma outra expressão lambda.

A expressão lambda é o segundo método básico de montar uma nova expressão. Desse modo as expressões na linguagem lambda podem ser caracterizadas como segue.

Uma expressão é ou *simples* e neste caso é uma variável ou uma *expressão lambda* e tem uma variável ligada e um corpo que é uma expressão, ou é *composta* e tem um *operador* e um *operando*, os quais são ambos expressões.

É necessário uma regra para reconhecer quando o corpo de uma expressão lambda termina. Deve-se usar uma regra de parênteses, ou vírgulas. No entanto será feita a seguinte convenção. $(\lambda x \cdot \lambda y.x + y)a$ significa o mesmo que $(\lambda x \cdot (\lambda y \cdot x + y))a$. $\lambda x \cdot \lambda y \cdot \lambda z.x + y + z$ significa o mesmo que $\lambda xyz \cdot x + y + z$. A seguir é dada a definição formal da linguagem lambda.

7.1.1 Definição: Termos da Linguagem Lambda

Seja $\sum = \{x, y, z, x_1, x_2, \perp, f, g, h, \cdots, f_1, f_2, ,\cdot, \lambda\}$ um alfabeto, onde $x = \{x, y, z, , x_1, x_2, \cdots\}$ é um conjunto enumerável de variáveis, $f, g, h, \cdots, f_1, f_2, \cdots$ é um conjunto, possivelmente vazio, de constantes, $\cdot$ é um símbolo de função chamado *aplicação*. T_Σ, o conjunto dos termos da linguagem lambda, é gerado pelo seguinte cálculo:

1) $\frac{-}{x}, x \in X$; 2) $\frac{-}{a}$, a constante, 3) $\frac{M}{\lambda x \cdot M}$, $M \in T_\Sigma, x \in X$

4) $\frac{M,N}{(M \cdot N)}, M, N \in T_\Sigma$.

Convenção de Notação: $(M \cdot N)$ será denotada, simplesmente, por MN; $\lambda x_1 x_2 \cdots x_n \cdot M$ é uma notação simplificada para $(\lambda x_1(\cdots(\lambda x_n \cdots M)\cdots))$ e $MNPQ$ está em lugar de $(((MN)P)Q)$. É usado, também, o metasímbolo $\equiv$ para representar igualdade sintática como, por exemplo, $MNPQ \equiv (((MN)P)Q)$. Convenciona-se, também, que

$$MN \equiv PQ \iff M \equiv P \text{ e } N \equiv Q;\ \lambda x \cdot M \equiv \lambda y \cdot N \iff x \equiv y \text{ e } M \equiv N$$

A $\sum$-álgebra dos termos lambda, $(T_\Sigma, \cdot_{T_\Sigma})$. possui somente uma função binária, a aplicação $\cdot_{T_\Sigma}$ (além das variáveis e constantes consideradas como funções nulárias, não destacadas, aqui, para não sobrecarregar a notação)

Assim, $\cdot_{T_\Sigma} : T_\Sigma \times T_\Sigma \longrightarrow T_\Sigma$ é definida por $\cdot_{T_\Sigma}(M, N) = MN$. Observe que $\lambda x \cdot M$ é uma notação, mais legível, para a função $\cdot_{T_\Sigma}(x, M) = x \cdot M$. Ou seja, a regra 3), chamada *abstração* , é uma operação, sobre T_Σ, a aplicação.

Exemplos de termos lambda são: $\lambda x \cdot x^2 + y$; $\lambda x \cdot xy$; $(x(\lambda x \cdot (\lambda x \cdot x)))$. Embora já se tenha estudado no capítulo anterior, (com certa profundidade) a função de substituição, ela será definida para o caso particular de termos lambda.

7.1.2 Definição: Substituição

A *substituição* é uma função $\rho : T_\Sigma \times T_\Sigma \longrightarrow T_\Sigma$ tal que $\rho(M, N) = M[N/x]$, onde $M[N/x]$ é definida por

(i) $x[N/x] \equiv N$

(ii) $a[N/x] \equiv a$, para qualquer variável ou constante $a \not\equiv x$

(iii) $M_1 M_2[N/x] \equiv (M_1[N/x])(M_2[N/x])$

(iv) $\lambda x \cdot M[N/x] \equiv \lambda x \cdot M$

(v) $(\lambda y \cdot M)[N/x] \equiv \lambda y \cdot M[N/x]$, desde que $y \not\equiv x, y \notin FV(N)$ ou $x \notin FV(M)$

(iv) $(\lambda y \cdot M)[N/x] \equiv \lambda z \cdot M[z/y][N/x]$, desde que $y \not\equiv x, y \in FV(N)$ e $x \in FV(M)$.

Os itens (i) e (ii) iniciam o processo de substituição, (iii) diz que ρ é $\sum$-homomorfismo. Os ítens (iv), (v) e (vi) são o caso particular da substituição para termo da forma $\lambda x \cdot M$.

Um caso especialmente importante de substituição é a α-conversão, a troca de variável ligada num termo.

7.1.3 Definição: α-conversão e α-congruência

(i) Seja P um termo lambda contendo uma ocorrência de $\lambda x \cdot M$ e seja $y \notin FV(M)$. A ação de trocar este $\lambda x \cdot M$ por $\lambda y \cdot M[y/x]$ é chamado uma *troca de variável ligada* em P.

(ii) Diz-se que P é *α-congruente* a Q, ou P se *α-converte* a Q, denotado $P =_\alpha Q$ se Q é obtido de P por um número finito (talvez nulo) de uma série de troca de variáveis.

7.1.4 Definição: β-congruência

Sejam M e N dois termos lambda. M diz-se *β-congruente* a N, cuja notação é $M =_\beta N$, se N é obtido de M após um número finito de substituições .

7.1.5 Definição: η-conversão ou axioma da Extencionalidade

Um termo lambda M diz-se satisfaz o *axioma da extencionalidade* ou o *axioma da η-conversão* se $\lambda x \cdot Mx \equiv (\lambda x \cdot M)x =_\beta M$, desde que $x \notin FV(M)$.

7.1.6 Proposição

Sejam M, N e P termos lambda. Se M e N satisfazem o axioma da η-conversão e $MP = NP$, então $M = N$.

prova: Basta mostrar que $Mx = Nx \Longrightarrow M = N$, desde que $x \notin FV(M)$ e $x \notin FV(N)$. Para mostrar isto assuma a hipótese. Então $M = \lambda x \cdot Mx = \lambda x Nx = N$.

□

Esta proposição motiva a conhecida *regra* η, ou *regra da extencionalidade*

7.1.7 Definição: Regra η

Se M e N são termos lambda que satisfazem o axioma da η-conversão e P é um termo lambda qualquer, então tem-se a seguinte regra

$$\frac{MP = NP}{M = N} \text{ (regra } \eta\text{, ou regra da extencionalidade)}$$

Observe que as igualdades acima são a β-congruênica, a qual de ora em diante, será denotada, simplesmente, por "=".

A regra η, acima, expressa o axioma da extencionalidade para funções, isto é, se para todo x, $f(x) = g(x)$, então $f = g$

7.1.8 Definição: Teoria Lambda e Cálculo Lambda

Seja $\sum$ o alfabeto da definição 7.1.1 acrescentado do símbolo de igualdade sintática "=". A *Teoria Lambda* é gerada pelo seguinte conjunto de regras sobre $\sum$, denominado *Cálculo Lambda*

(i) As regras para gerar termos são aqueles da Definição 7.1.1.

(ii) Para todo $L, M, N, P \in T_\Sigma$ e $x, y \in X$, as seguintes regras geram as fórmulas da teoria

(a) $\frac{-}{(\lambda x \cdot M)N = M[N/x]}$ (axioma da β-conversão)

(b) $\frac{-}{M = M}$; (c) $\frac{M = N}{N = M}$; (d) $\frac{M = N, N = L}{M = L}$;

(e) $\frac{M = N}{MP = NP}$

(f) $\frac{M = N}{\lambda x \cdot M = \lambda x \cdot N}$ (Regra ξ, ou da extencionalidade fraca)

(g) $\overline{\lambda x \cdot M = \lambda y \cdot M[y/x]}$, desde que $y \notin FV(M)$ (Regra da α-conversão)

(h) $\frac{MP=NP}{M=N}$ (Regra da η-conversão, ou da extencionalidade forte)

As regras (b), (c) e (d) tornam "=" uma relação de equivalência sobre T_Σ. Agora, a $\sum$-álgebra dos termos está munida de uma igualdade, satisfazendo as equações (a), (g) e com as propriedades (d),(e),(f) e (h). Esta sigma álgebra é inicial na categoria de todas as álgebras que realizam $\sum$ e satisfazem (a)-(h).

7.1.9 Teorema do Ponto Fixo

Para todo $M \in T_\Sigma$ existe um $N \in T_\Sigma$ tal que $MN = N$

Prova: Defina $w = \lambda x \cdot Mxx$ e $N = ww$. Então, $N = ww = (\lambda x \cdot Mxx)w = Mww = MN$

□

Este teorema afirma que todo termo de T_Σ tem um ponto fixo. Portanto, cada termo é candidato a representar uma função de um domínio de Scott, ou de um domínio da matemática computacional. Para ver que isto de fato acontece, seja D o domínio reflexivo de Scott SD_∞ ou o domínio reflexivo da matemática computacional, D_∞. D ser reflexivo significa que $D = [D \longrightarrow D]$, isto é, existem funções contínuas $F : D \longrightarrow [D \longrightarrow D]$ e $G : D \longrightarrow [D \longrightarrow D]$ tal que $F \circ G = id_{[D \longrightarrow D]}$ e $G \circ F = id_D$.

7.1.10 Lema

D satisfaz a regra (h), da Definição 7.1.8, o axioma da extencionalidade, isto é, Se $M, N, P \in D$ e $MP = NP$, então $M = N$.

Prova: Defina, para $x, y \in D$, $x.y = F(x)(y)$, onde F é a função contínua, acima. Esta operação está bém definida, pois $x \in D \Longrightarrow Fx \in D \longrightarrow D \Longrightarrow (Fx)y \in D$. Agora, suponha que $MP = NP$, para todo $P \in D$. Então $F(M)(P) = F(N)(P)$, para todo $P \in D$. Logo $F(M) = F(N)$, aplicando a definição acima para o caso $x \equiv F(M) = F(N)$ e $y \equiv P$. Agora, aplicando a função G, acima, tem-se $G(F(M)) = G(F(N)) \Longrightarrow GoF(M) = GoF(N)$, como $GoF = id_D$, tem-se, finalmente, $M = N$

$\square$

Foi provado no capítulo 3 que a função de avaliação, $ev : D \times D \longrightarrow D$, tal que $ev(M, N) = M \cdot N$, para todo $M, N \in D$, é uma função contínua. De ora em diante, para facilitar a notação, a função ev será representada, simplesmente, por um ponto $\cdot$, ou, como vem acontecendo, M aplicado a N, será denotado por MN, em vez $M \cdot N$. A seguir será enunciado e demonstrado o principal resultado desta seção.

7.1.11 Teorema

Seja $\rho : X \longrightarrow D$ uma avaliação de variáveis. Defina uma interpretação $[\![\ ]\!]_\rho : T_\Sigma \longrightarrow D$, por indução como segue: $[\![x]\!]_\rho = \rho(x)$, para todo $x \in X$ e $[\![a]\!]_\rho = a$, para a constante.
$[\![MN]\!]_\rho = [\![M]\!]_\rho [\![N]\!]_\rho$

$[\![\lambda x \cdot M]\!]_\rho = G(\Psi(d))$, onde $\Psi(d) = [\![M]\!]_{\rho[d/x]}$, para $d \in D$ e G é a função contínua acima

Seja $Val = \{\rho : X \longrightarrow D | \rho$ é uma avaliação de variáveis $\}$

(i) A função semântica $[\![\ ]\!] : Val \longrightarrow (T_\Sigma \longrightarrow D)$ tal que $\rho \longmapsto [\![M]\!]_\rho$ está bem definida, isto é, a função $\Psi : D \longrightarrow D$ definida por $\Psi(d) = [\![M]\!]_{\rho[d/x]}$, para $d \in D$ e $\rho \in Val$, depende contínuamente de d

(ii) $(D, \cdot, [\![\ ]\!])$ é um modelo da teoria Lambda. Além disso, as únicas funções representáveis na teoria são, exatamente, as funções contínuas.

Prova:

(i) A prova será feita por indução sobre M. Devido a simplicidade dos demais casos, é feita a prova somente para o caso $M \equiv \lambda y \cdot P$. $[\![\lambda y.P]\!]_{\rho[d/x]} = G(\Psi(e, d))$, G é a função contínua acima e $\Psi(e, d) = [\![N]\!]_{\rho[d/x][e/y]}$. Seja $G(\Psi(e, d)) = \varphi(d)$, para algum φ. Pela hipótese da indução, Ψ é contínua em d e e separadamente. Pela Proposição 3.6.5(b) Ψ é contínua. Usando a Proposição 3.6.8(a) e a continuidade de G segue que $\varphi = G \circ curry\ (f)$ é uma função contínua, o que mostra (i).

(ii) $(D, \cdot, [\![\ ]\!])$ satisfaz as propriedade (e),(f) e (g) da definição 7.1.8. De fato, será feita, apenas, o ítem (7) pois os dois outros se mostra analogamente. Para todo

$d \in D$, $[\![M]\!]_{\rho[d/x]} = [\![N]\!]_{\rho[d/x]} y \iff f(d) = g(d)$, onde $f(d) = [\![M]\!]_{\rho[d/x]}$; $g(d) = [\![N]\!]_{\rho[d/x]}$. Logo, aplicando G tem-se $G(f(d)) = G(g(d))$ e consequentemente $[\![\lambda x \cdot M]\!]_{\rho} = [\![\lambda x \cdot N]\!]_{\rho}$. As demais propriedades da definição 7.1.8 saem porque $\cdot$ é uma aplicação contínua. Por esta razão todas as funções representáveis são contínuas.

Reciprocamente, uma função contínua $f : D \longrightarrow D$ é representada por $G(f)$ tal que $G(f)(k) = F(G(f))(k) = f(k)$, ou seja, $\lambda k.f(k) = G(f(k))$.

□

Tendo atingido o principal objetivo desta seção com o teorema anterior, retoma-se o cálculo lambda informal do início desta seção.

Um termo da forma $(\lambda x \cdot M)N$ representa um operador aplicado a um argumento N. Foi visto que êste termo pode ser "simplificado" para o termo $M[N/x]$. Este processo de simplificação é captado na seguinte definição.

7.1.12 Definição: β-redução

Qualquer termo da forma $(\lambda x \cdot M)N$ é denominado um *redex*. Diz-se que M se *contrai*, para N, se N resulta da troca em M de um subtermo redex da forma $(\lambda x.P)Q$ pelo termo $P[Q/x]$. M se *β-reduz* para N, cuja notação é $M \twoheadrightarrow N$, se N resulta de M por uma sequência de contrações .

O axioma $\frac{-}{(\lambda x \cdot M)N = M[N/x]}$, da Definição 7.1.8 equivale a regra $\frac{P \twoheadrightarrow Q}{P=Q}$, onde P e Q são termos lambda.

A noção de β-redução é uma noção operacional. Cada passo da redução é uma computação, isto é, a aplicação de uma função a um argumento. No entanto, o processo de β-redução pode ou não levar a um termo no qual novas contrações sejam possíveis.

7.1.13 Definição: Termo em Forma Normal

Um termo lambda M está na *forma normal* se M não contém nenhum redex. Se $M \twoheadrightarrow N$ e N está na forma normal diz-se que N é a forma normal de M.

Nem sempre é possível reduzir uma expressão lambda a forma normal. Por exemplo, $M \equiv (\lambda x \cdot xx)(\lambda x \cdot xx)$. Observe que $\lambda x \cdot xx$ tem a forma $\lambda x \cdot Mx$, mas satisfaz o axioma da η-conversão porque x é livre em M. Usando β-redução tem-se $M \twoheadrightarrow M$ e portanto não há nenhuma simplificação. Pode até acontecer da expressão crescer como em $(\lambda x \cdot xxx)(\lambda x \cdot xxx) \twoheadrightarrow (\lambda x \cdot xxx)(\lambda x \cdot xxx)(\lambda x \cdot xxx)$.

Considere o seguinte exemplo $(\lambda x \cdot \lambda yy)((\lambda x \cdot xx)(\lambda x \cdot xx))b$. Neste caso existe uma escolha entre os redex. Escolhendo o redex mais à esquerda esta expressão se reduz a $(\lambda y \cdot y)b$ e portanto a b. Por outro lado, escolhendo o outro redex a tentativa de cálculo pode nunca terminar. Esta diferença em comportamento põe a seguinte questão. É possível para duas sequências diferentes de redução terminar com resultados diferentes ? A resposta felizmente é negativa e é garantida pelo seguinte teorema.

7.1.14 Teorema de Church-Rosser

Para qualquer expressão lambda P, e para quaisquer Q e R tal que $P \twoheadrightarrow Q$ e $P \twoheadrightarrow R$ existe S tal que $Q \twoheadrightarrow S$ e $R \twoheadrightarrow S$.

Prova: vêr [SEL 86] apendice 1, página 313. Esta prova é bastante trabalhosa. A figura abaixo ilustra o enunciado do resultado.

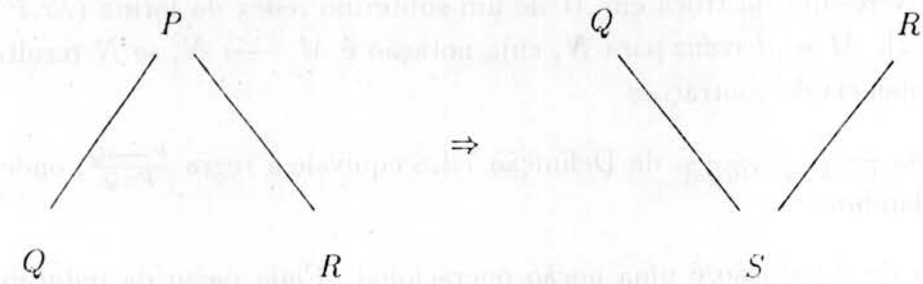


Figura 7.1 – Diagrama ilustrativo do Teorema 7.1.14

□

Intuitivamente, este resultado diz que não importa a escolha do redex, pois se uma expressão possui forma normal ela será encontrada

7.1.15 Corolário. Unicidade da Forma Normal

Se uma expressão P tem um forma normal, então ela é unica.

Prova: Suponha que P tem duas formas normais N_1 e N_2. Por definição de formas normais, $P \twoheadrightarrow N_1$ e $P \twoheadrightarrow N_2$ e pelo teorema de Church-Rosser existe S tal que $N_1 \twoheadrightarrow S$ e $N_2 \twoheadrightarrow S$. Como N_1 e N_2 estão na forma normal, eles não contém redex, o que significa que S deve ser igual a N_1 e a N_2 e consequentemente N_1 é igual a N_2. □

7.1.16 Corolário

Se M tem forma normal N e $M \twoheadrightarrow P$, então P tem forma normal N.

Prova: Exatamente como o Corolário 7.1.15. □

Se um termo não possui forma normal, então a sua β-redução é uma sequência infinita de contrações, como foi visto no exemplo acima. Ou seja, a computação de seu valor reduzido é um processo que não para. Na semântica elaborada por Dana Scott, para o cálculo Lambda sem tipos, o significado de um termo lambda que não tem forma normal é o bottom, isto é, um valor indefinido, sem nenhum conteúdo de informação.

Mesmo com o teorema de Church-Rosser permanece a seguinte questão. Existe uma ordem de computação que garanta terminar caso a expressão possua forma normal ? A resposta positiva é dada pelo teorema 7.1.17, abaixo.

7.1.17 Definição: Contração Normal, Redução Normal e Redução Normalizadora

(i) Uma contração de um termo lambda M diz-se uma *contração normal* se o redex contraído é o redex mais à esquerda de M.

(ii) Uma redução de um termo lambda M é uma *redução normal* se todas as contrações da redução são contrações normais.

(iii) Uma redução de um termo lambda M é uma *redução normalizadora* se ela é uma redução normal e conduz a uma forma normal, quando ela existe.

7.1.18 Definição: Estratégia de Ordem Normal e Estratégia de Redução Normalizadora

(i) Uma *estratégia de redução* é um critério que determina, para cada passo de uma redução, qual a próxima contração a realizar, ou termina a redução se não há redexes no último termo gerado.

(ii) A *estratégia da ordem normal* é a estratégia de redução que determina, para qualquer termo inicial, uma redução normal.

(iii) Uma estratégia de redução diz-se *normalizadora* se determina reduções normalizadoras, para qualquer termo inicial.

7.1.19 Teorema da Normalização

A estratégia da ordem é normalizadora, isto é, se o termo inicial tem forma normal, a estratégia a encontra.

Prova: ver [BAR 84].

□

7.2 O Cálculo Lambda com Tipos Como uma Teoria de Funções

Na linguagem lambda sem tipo um termo lambda representa um esquema de função ou funcional e não a noção usual de função, como em teoria dos conjuntos, onde ela é definida como uma terna, $< A, f, B >$, onde A é o domínio, B é o contradomínio e f é uma lei que associa cada elemento de A a um elemento de B. A linguagem lambda com tipos pretende suprir essa deficiência. Chamando A e B, acima, de tipos, pode-se dizer que o cálculo lambda com tipos é o cálculo lambda como antes porém com a adição de tipos. É neste sentido que o cálculo lambda é uma teoria de funções e não de esquemas de funções .

O cálculo lambda com tipos é, atualmente [LAM 84], uma ferramente de conectar uma categoria cartesiana fechada com lógica. Desse modo, o cálculo lambda com tipos pode ser visto como uma teoria equacional de funções, onde composição é refletida por substituição.

Um sistema de tipos para uma linguagem lambda deve especificar

(i) Um conjunto de tipos básicos

(ii) Meios de construir tipos compostos a partir dos tipos básicos

(iii) Atribuição de tipos aos termos *atômicos*, isto é, as variáveis ou constantes

(iv) Meios de inferir os tipos dos termos compostos, a partir da informação dos tipos dos seus componentes atômicos

Os ítens (i) e (ii) constituem a linguagem dos tipos lambda e os itens (iii) e (iv) a linguagem de cada tipo

7.2.1 Definição: A linguagem dos tipos

Seja $\sum = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, 1, \times, \longrightarrow, =, \}$ um alfabeto onde $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, 1$ é um conjunto infinito enumerável de símbolos de constante. T_Σ, o conjunto dos tipos da linguagem lambda é gerado pelo seguinte cálculo

(a) $\frac{-}{1}$; $\frac{-}{\sigma_i}$, para cada constante σ_i;

(b) $\frac{\sigma, \tau}{(\sigma \times \tau)}, \sigma, \tau \in T_\Sigma$;

(c) $\frac{\sigma, \tau}{(\sigma \longrightarrow \tau)}, \sigma, \tau \in T_\Sigma$.

Cada elemento de T_Σ será chamado um *tipo* e será denotado por uma letra grega minúscula, talvez indexada. $(\sigma \times \tau)$ e $(\sigma \longrightarrow \tau)$ será denotado, às vezes, simplesmente por $\sigma \times \tau$ e $\sigma \longrightarrow \tau$, respectivamente. A $\sum$-álgebra dos termos $(T_\Sigma, \times, \longrightarrow, 1)$ possui duas operações binárias $\times$ e $\longrightarrow$ e uma nulária, a constante 1.

Para todo $\tau, \alpha, \beta, \sigma \in T_\Sigma$, as seguintes regras geram as fórmula. Uma regra da forma $\frac{-}{\sigma = \tau}, \sigma, \tau \in T_\Sigma$, que é um axioma, será escrito, simplesmente por $\sigma = \tau$.

$(F_1)\ \sigma = \sigma$; $(F_2)\ \frac{\sigma=\tau}{\tau=\sigma}$; $(F_3)\ \frac{\alpha=\beta,\beta=\sigma}{\alpha=\sigma}$; $(F_4)\ \sigma \times 1 = \sigma$; $(F_5)\ \sigma\times\tau = \tau\times\sigma$; $(F_6)\ (\sigma\times\tau)\times\beta = \sigma\times(\tau\times\beta)$; $(F_7)\ (\sigma\times\tau)\longrightarrow\beta = \sigma\longrightarrow(\tau\longrightarrow\beta)$; $(F_8)\ \sigma\longrightarrow(\tau\times\beta) = (\sigma\longrightarrow\tau)\times(\sigma\longrightarrow\beta)$.

As regras $(F_1)-(F_3)$ torna "=" uma relação de equivalência.

7.2.2 Definição: Termos Lambda

O conjunto dos termos da linguagem lambda com tipos é definido como para a linguagem lambda sem tipos, os ítens (1)-(4) da Definição 7.1.1.

7.2.3 Definição: Atribuição de Tipos

Uma atribuição de tipos aos termos da linguagem lambda com tipos é dada por um conjunto de regras de tipos, e esquemas de regras, com, para cada variável $x \in X$, uma regra da forma

(i) $\frac{-}{x:\sigma}$, onde σ é um tipo

os esquemas de regras a seguir:

(ii) $\frac{x:\sigma \quad M:\tau}{(\lambda x\cdot M):\sigma\longrightarrow\tau}$;

(iii) $\frac{M:\sigma\longrightarrow\tau \quad N:\sigma}{(MN):\tau}$;

(iv) $\frac{x:\sigma,\ y:\tau}{(x,y):\sigma\times\tau}$;

(v) $\frac{(x,y):\sigma\times\tau}{\pi_1(x,y):\sigma}$;

(vi) $\frac{(x,y):\sigma\times\tau}{\pi_2(x,y):\tau}$;

(vii) $\top : 1$,

As seguintes igualdades se verificam

(i_1) $\pi_1(a,b) = a$, para todo $a:\sigma,\ b:\tau$

(i_2) $\pi_2(a,b) = b$, para todo $a:\sigma,\ b:\tau$

(i_3) $(\pi_1(c),\pi_2(c)) = c$, para todo $c:\sigma\times\tau$

(i_4) $(\lambda x:\varphi(x))a = \varphi(a)$, para todo $a:\sigma$ e x substituível por a

(i_5) $\lambda x : \sigma f x = f$, para todo $f : \sigma \longrightarrow \tau$

(i_6) $\lambda x : \varphi(x) = \lambda y : \varphi(y)$, desde que $y \notin FV(\varphi)$

(i_7) $\frac{M=N:\sigma}{M[P/x]=N[P/x]}$

7.2.4 Definição: Teoria do Cálculo Lambda com Tipos

A *teoria do cálculo lambda com tipos* consiste de tipos como na definição 7.2.1, de termos e equações como na definição 7.2.2 e 7.2.3, respectivamente.

7.2.5 Definição: Termo Bém-Tipado

Dada uma atribuição de tipos, un termo M do cálculo é *bém-tipado* se a atribuição $M : \sigma$ pode ser reduzidas pelas regras 7.2.3 (i) - (vii), para algum tipo σ.

7.2.6 Proposição

O conjunto dos teorema bem-tipado é fechado para a β-redução

Prova: Seja (MN) um redex bem-tipado. Então M e N são bém-tipados e M é da forma $(\lambda x \cdot P)$. Seja $(MN) : \tau$. Então, $M : \sigma \longrightarrow \tau$ e $N : \sigma$ para algum tipo σ. Logo, $(\lambda x \cdot P) : \sigma \longrightarrow \tau$, $x : \sigma$ e $P : \tau$. A redução de (MN) dá o termo $P[N/x]$. Se x não ocorre livre em P então, $P[N/x] = P$ e $P[N/x] : \tau$, como pede o teorema. Se x ocorre livre em P então a redução de (MN) se faz pela substituição de x por N em P. No entanto, x e N tem o mesmo tipo, de modo que o tipo da expressão resultante não se altera, é o mesmo de P, e se tem $P[N/x] : \tau$ também nesse caso.

□

7.2.7 Definição: Termo Fortemente Normalizável

Um termo do cálculo lambda diz-se *fortemente normalizável* se toda sequência de reduções, que começa com ele, termina numa forma normal.

7.2.8 Teorema da Normalização Forte

Todo termo de cálculo lambda com tipos é fortemente normalizável.

Prova: É bastante longa e tediosa, veja [SEL 86] Apêndice 2.

□

As categorias SDOM e DOM, dos domínios de Scott e da matemática computacional, respectivamente, são bicartesianas fechadas e por conseguinte cartesianas fechadas. Isso faz com que SDOM e DOM sejam modelos do cálculo lambda com tipos. Para mostrar isto suponha que $\mathcal{D}$ é uma categoria que substitui SDOM ou DOM. Como foi visto no capítulo 3 e 4, $\mathcal{D}$ ser cartesiana fechada significa que $\mathcal{D}$ possui um objeto terminal, denotado por 1, e para todo $D_1, D_2 \in \mathcal{D}, D_1 \times D_2, [D_1 \longrightarrow D_2] \in \mathcal{D}$ (lembre-se que $[D_1 \longrightarrow D_2]$ denota o conjunto as funções contínuas de D_1 em D_2). Ou seja, $(\mathcal{D}, \times, \longrightarrow, 1)$ é uma àlgebra com $\times$ e $\longrightarrow$ operações binárias sobre $\mathcal{D}$ e 1 um elemento destacado de $\mathcal{D}$ ou operação nulária. Defina sobre $\mathcal{D}$, a relação "=" tal que para todo $D_1, D_2 \in \mathcal{D}, D_1 = D_2 \iff D_1$ é isomorfo a D_2. A relação de isomorfismo, sobre $\mathcal{D}$, já foi estudada em capítulos anteriores. É claro que essa relação é uma relação de equivalência, mesmo de congruência, sobre $\mathcal{D}$. É facil ver que a função $h : D_1 \times D_2 \longrightarrow D_2 \times D_1$ definida por $h(x, y) = (y, x)$ é um isomorfirsmo, isto é, para todo $D_1, D_2 \in \mathcal{D}, D_1 \times D_2 = D_2 \times D_1$. Análogamente, $(D_1 \times D_2) \times D_3 = D_1 \times (D_2 \times D_3)$ para todo $D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{D}$. Como a função curry $(f)(x)(y) = f(x, y)$ é bijetiva e contínua e a inversa também é contínua tem-se que, para todo $D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{D}$ $[(D_1 \times D_2) \longrightarrow D_3] = [D_1 \longrightarrow [D_2 \longrightarrow D_3]]$. Por outro lado, a função $\varphi : [D_1 \longrightarrow D_2] \times [D_1 \longrightarrow D_3] \longrightarrow [D_1 \longrightarrow (D_2 \times D_3)]$ tal que $\varphi(g, h) = (g(x), h(x))$ é bijetiva e contínua, com a inversa $\Psi : [D_1 \longrightarrow (D_2 \times D_3)] \longrightarrow [D_1 \longrightarrow D_2] \times [D_1 \longrightarrow D_3]$ definida por $\Psi(f) = (pr_1 \circ f, pr_2 \circ f)$, onde pr_1 e pr_2 são a primeira e segunda projeção, respectivamente, é contínua. Portanto, $[D_1 \longrightarrow (D_2 \times D_3)] = [D_1 \longrightarrow D_2] \times [D_1 \longrightarrow D_3]$. Lembre-se que pr_1 e pr_2 são funções contínuas de $D_1 \times D_2 \longrightarrow D_1$ e de $D_1 \times D_2 \longrightarrow D_2$, respectivamente. Os argumentos acima estão resumidos na seguintes proposição.

7.2.9 Proposição

Seja $\mathcal{D}$ uma categoria cartesiana fechada representando SDOM ou DOM.

(i) $(\mathcal{D}, \times, \longrightarrow, 1)$ é uma álgebra ($\times$, $\longrightarrow$ e 1 como definidas acima), munidas de uma relação de equivalência "=", satisfazendo as seguintes propriedades, para todo $D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{D}$.

(a) $D_1 \times D_2 = D_2 \times D_1$; (b) $(D_1 \times D_2) \times D_3 = D_1 \times (D_2 \times D_3)$; (c) $[D_1 \longrightarrow D_2 \times D_3] = [D_1 \longrightarrow [D_2 \longrightarrow D_3]]$; (d) $[(D_1 \times D_2) \longrightarrow D_3] = [D_1 \longrightarrow D_2] \times [D_1 \longrightarrow D_3]$.

(ii) Para todo $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, as funções $pr_1 : D_1 \times D_2 \longrightarrow D_1$ e $pr_2 : D_1 \times D_2 \longrightarrow D_2$, definidas por $pr_1(x, y) = x$ e $pr_2(x, y) = y$, respectivamente, são contínuas.

7.2.10 Teorema

Seja $\boldsymbol{A} = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, 1\}$ o conjunto de símbolos de constantes da definição 7.2.1 e $Val = \{\rho : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathcal{D} | \rho$ é uma avaliação $\}$. Defina $[\![\,]\!]\rho : T_\Sigma \longrightarrow \mathcal{D}$, onde $\mathcal{D}$ é o conjunto básico da álgebra dos tipos da definição 7.2.1, como segue

$[\![\sigma]\!]\rho = \rho(\sigma)$, para todo $\sigma \in \boldsymbol{A}$, com $\rho(1) = 1$

$[\![\sigma \times \tau]\!]_\rho = [\![\sigma]\!]\rho \times [\![\tau]\!]\rho = D_1(\sigma) \times D_2(\tau)$, onde $D(\alpha)$ indica o domínio de $\mathcal{D}$ que interpreta $\alpha \in T_\Sigma$,

$[\![\sigma \longrightarrow \tau]\!]\rho = [[\![\sigma]\!]\rho \longrightarrow [\![\tau]\!]_\rho] = [D_1(\sigma) \longrightarrow D_2(\tau)]$. Então,

(i) A função semântica $[\![\;]\!] : Val \longrightarrow (T_\Sigma \longrightarrow \mathcal{D})$ tal que $\rho \longmapsto [\![\sigma]\!]\rho$, para todo $\rho \in Val$ e $\sigma \in T_\Sigma$, está bem definida, isto é, para cada $\rho \in Val, [\![\;]\!]\rho : T_\Sigma \longrightarrow \mathcal{D}$ é de fato uma função.

(ii) $(\mathcal{D}, \times, \longrightarrow, 1)$ é um modelo da teoria lambda com tipos, isto é, para cada $\rho \in Val, [\![\;]\!]\rho : T_\Sigma \longrightarrow \mathcal{D}$ é um homomorfismo e $\mathcal{D}$ satisfaz as igualdades (F_1) – (F_8) da definição 7.2.1, assim como as propriedades pertinentes à teoria do cálculo lambda sem tipos.

Prova: Uma consequência imediata da proposição 7.2.6 e da observação de que o cálculo lambda com tipos é o cálculo lambda como na seção anterior, porém adicionado-se a noção de tipo

□

O leitor pode observar que a teoria do cálculo lambda (com tipo e sem tipo) embora, computacionalmente, bastante poderosa, não reflete todas as potencialidades das categorias SDOM e DOM. Na proxima seção a teoria do cálculo lambda será extendida de forma a refletir essas categorias.

7.3 A Teoria Lambda da Matemática Intervalar

O objetivo desta seção é extender o cálculo lambda de modo que a teoria obtida reflita os conceitos de objeto parcial, de ordem de informação e ordem de aproximação presentes em DOM. Um conceito que deve ser refletido nesta teoria é o de ponto fixo, ou que todo conjunto dirigido de um domínio possui supremo nesse domínio. Esse conceito é importante numa teoria de computabilidade.

Essa extensão será feita seguindo o exemplo da seção anterior. Primeiro será extendido o cálculo lambda sem tipos e em seguida serão adicionados os tipos a essa teoria.

7.3.1 Definição: Teoria Lambda Intervalar e Cálculo Lambda Intervalar

Seja $\sum = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots, \perp, f, g, f_1, f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots, \cdot, =, \sqsubseteq, <<, Fix\}$ um alfabeto, onde $X = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ é um conjunto enumerável de variáveis, $C = \{f, g, h, f_1, f_2, \ldots, \perp, \top\}$ é um conjunto contável de constantes, $\cdot$ é um símbolo de função, chamado aplicação , Fix é um símbolo de função, $=, \sqsubseteq$ e $<<$ são símbolos de relações e λ é um símbolo auxiliar .

Os símbolos acrescentados aqui em relação ao alfabeto da Definição 7.1.8 são $\top, \sqsubseteq$, $<<$ e Fix. A *Teoria Lambda Intervalar* é gerada pelo seguinte conjunto de regras sobre $\sum$, denominado *Cálculo Lambda Intervalar*

(i) As regras para gerar termos são aquelas da Definição 7.1, denominadas, agora, $(i_1), (i_2), (i_3)$ e (i_4) acrescentado da seguinte regra

(i_5) $\frac{M}{Fix\ M}$, se $M \in T_\Sigma$, onde T_Σ é o conjunto dos termos gerado por $(i_1) - (i_5)$.

(ii) Para todo $L, M, N, P \in T_\Sigma$ e $x, y \in X$ as seguintes regras geram as fórmulas da teoria. Aquelas da Definição 7.1.8, agora, denominadas $(ii_1), (ii_2), \ldots, (ii_9)$, acrescentadas das seguintes.

$(ii_{10})\ \perp M = \perp$; $\quad (ii_{11})\ \lambda x \cdot \perp = \perp$;

$(ii_{12})\ \perp \sqsubseteq M$; $\quad (ii_{13})\ \perp << M$; $\quad (ii_{14})\ \frac{M \sqsubset \perp}{M = \perp}$;

$(ii_{15})\ \frac{M << \perp}{M = \perp}$; $\quad (ii_{16})\ M \sqsubseteq M$;

$(ii_{17})\ M \sqsubseteq M$; $\quad (ii_{18})\ \frac{M \sqsubset N \quad N \sqsubset M}{M = N}$; $\quad (ii_{19})\ \frac{M \sqsubset N \quad N \sqsubset L}{M \sqsubseteq L}$; $\quad (ii_{20})\ \frac{M = N}{M \sqsubseteq N}$

$(ii_{21})\ \frac{M = N}{N \sqsubseteq M}$; $\quad (ii_{22})\ \frac{M << N \quad N << L}{M << L}$; $\quad (ii_{23})\ \frac{M \sqsubset N \quad N << L}{M << L}$;

$(ii_{24})\ \frac{MP \sqsubset NP}{M \sqsubseteq N}$; $\quad (ii_{25})\ \frac{MP << NP}{M << N}$; $\quad (ii_{26})\ \frac{M \sqsubset N}{\lambda x \cdot M \sqsubseteq \lambda x \cdot N}$

$(ii_{27})\ \frac{M << N}{\lambda x \cdot M << \lambda x \cdot N}$; $\quad (ii_{28})\ \frac{Mx \sqsubset N}{M \sqsubseteq \lambda x \cdot N}$; $\quad (ii_{29})\ \frac{Mx << N}{M << \lambda x \cdot N}$; $\quad (ii_{30})\ \frac{Mx = N}{M = \lambda x \cdot N}$

$(ii_{31})\ \frac{M \sqsubset N \quad L \sqsubset P}{ML \sqsubseteq NP}$; $\quad (ii_{32})\ \frac{M << N \quad L << P}{ML << NP}$; $\quad (ii_{33})\ \frac{M \sqsubset N \quad L = P}{ML \sqsubseteq NP}$

$(ii_{34})\ \frac{M << N \quad L = P}{ML << NP}$; $\quad (ii_{35})\ \frac{M \sqsubset N}{PM \sqsubseteq PN}$; $\quad (ii_{36})\ \frac{M << N}{PM << PN}$; $\quad (ii_{37})\ \frac{M \sqsubset N}{MP \sqsubseteq NP}$

$(ii_{38})\ \frac{M << N}{MP << NP}$; $\quad (ii_{39})\ M(Fix\ M) = Fix\ M$; $\quad (ii_{40})\ \frac{M[\perp/x] \quad M[N/x]}{M[Fix\ N/x]}$

7.3.2 Teorema

Seja D_∞ o objeto universal da categoria DOM, $[\![\ ]\!]$ a função semântica definida no Teorema 7.1.11 e $\cdot$ a função de avaliação em D_∞. Então, $(D_\infty, \cdot, [\![\ ]\!])$ é um modelo da teoria lambda intervalar.

Prova: Basta ver que as regras refletem as propriedades de $\perp, \sqsubseteq, <<$ e o fato de que todo conjunto dirigido em D_∞ tem supremo (regra (ii_{40})). (ii_{25}), por exemplo, reflete a propriedade, para todo f, g $fx \sqsubseteq gx \Rightarrow f \sqsubseteq g$, o mesmo se pode dizer com respeito a (ii_{26}), com relação a $<<$. (ii_{31}) reflete a monotonicidade de funções, para todo f, g, $f \sqsubseteq g$ e $x \sqsubseteq y \Rightarrow fx \sqsubseteq gy$, analogamente para (ii_{32}). A regra (ii_{30}) reflete a seguinte situação. $h = \lambda x\ t \Leftrightarrow \forall x\ h(x) = t$. Do mesmo modo (ii_{28}) e (ii_{29}). (ii_{39}) formaliza o fato de que toda função contínua possui ponto fixo.

□

Esse teorema também é verdadeiro para o objeto universal da categoria SDOM, se se retirar as propriedades relativas a relação $<<$, que não figura em SDOM.

Para acrescentar tipos a categoria DOM, que já é modelo da teoria lambda intervalar, é preciso especificar um conjunto de tipos básicos. Os tipos básicos dessa categoria são os naturais, booleanos, inteiros, racionais, reais parciais, $\mathcal{R}$, etc. todos estes sendo domínios. Ou seja, os booleanos, por exemplo, além de possuir como elementos T e F deve possuir, também, um bottom $\perp_{bool}$, satisfazendo $\perp \sqsubseteq T$ e $\perp \sqsubseteq F$, a ordem em *bool* sendo, $x, y \in bool$, $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x = y$ ou $x = \perp$. O mesmo acontece com $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, etc.

Além desses tipos básicos usuais deve-se acrescentar como tipos básicos, em DOM, cada $r \in \mathcal{R}$, visto, agora, como um domínio Scott. Foi visto, no capítulo anterior, que cada $r \in \mathcal{R}$, pode ser pensado como uma lógica geométrica e se se acrescentar a essa lógica o seu modelo tem-se um domínio de Scott, isto é, $r \equiv \{b \in \mathbb{I}(\mathbb{Q}) / b << r\} \cup \{r\}$ é um domínio de Scott, para cada $r \in \mathcal{R}$. Observe que o r do lado direito é um elemento de $\mathcal{R}$, enquanto o do lado esquerdo é um conjunto, mais precisamente um domínio Scott, está se usando o mesmo símbolo, r, para denotar ambos para não sobrecarregar a notação. Portanto, $r \in r$ não é um paradoxo Russelliano. Desse modo, o conjunto de tipos básicos, $\mathbb{B}$, de DOM será, $\mathbb{B} = \{\mathbb{N}_\perp, \mathbb{Z}, bool_\perp, \mathbb{Q}_\perp, \mathcal{R}, \ldots r / r$ é um *real Scott*$\}$. Cada domínio Scott do tipo $r \in \mathcal{R}$ será chamado *real Scott*, para diferenciar dos outros domínios Scott. Deve-se acrescentar a teoria lambda intervalar uma regra para recuperar r como um *elemento* de $\mathcal{R}$, tal regra deve ser $\frac{a \in r,\ r \text{ real Scott}}{a << r}$. No antecendente r é um domínio e no consequente r é um elemento.

Seja $\mathcal{D}$ qualquer uma das duas categorias DOM ou SDOM. Como $\mathcal{D}$ é uma categoria bicartesiana fechada, em $\mathcal{D}$ estão definidas as operações $\times, \oplus$ (união disjunta), $\longrightarrow$. Além disso, $\mathcal{D}$ tem objeto inicial, denotado por 0, e objeto terminal 1. Na construção do objeto (veja definição 3.6.1) $D_1 \oplus D_2$ a partir de D_1 e D_2 em $\mathcal{D}$, um novo bottom é acrescentado a $D_1 \oplus D_2$, a rigor isso deveria ser representado por $(D_1 \oplus D_2)_\perp$, que seria a soma disjunta de D_1 com D_2 acrescentado de um novo bottom. Ou seja, acrescentar um novo bottom deve ser uma operação em $\mathcal{D}$. Chamando $lift$ essa operação, tem-se $lift : D \longmapsto D_\perp$, o qual será denotado, simplesmente, por D, mas agora com o novo bottom. Então, a construção de $D_1 \oplus D_2$ é, na relidade, $lift \circ \oplus$ tal que $lift \circ \oplus(D_1, D_2) = lift(D_1 \oplus D_2) = (D_1 \oplus D_2)_\perp$, denotado, simplesmente, por $D_1 \oplus D_2$. Portanto, $(\mathcal{D}, \oplus, \times, \longrightarrow, lift, 0, 1)$ é uma álgebra. Recordando que $D_\infty \in \mathcal{D}$, essa álgebra satisfaz as equações $(F_1) - (F_8)$ da Definição 7.2.1, interpretando σ por $D(\sigma)$, mais as seguintes equações . $(F_9)\ D\times 0 = 0$; $(F_{10})\ D\oplus 0 = 0$; $(F_{11})\ D_1\oplus D_2 = D_2\oplus D_1$; $(F_{12})\ (D_1\oplus D_2)\oplus D_3 = D_1\oplus(D_2\oplus D_3)$; $(F_{13})\ (D_1\oplus D_2)\times D_3 = (D_1\times D_3)\oplus(D_2\times D_3)$; $(F_{14})\ (D_1\times D_2)\oplus D_3 = (D_1\oplus D_3)\times(D_2\oplus D_3)$; $(F_{15})\ D\oplus 1 = D$; para todo $D, D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{D}$; $(F_{16})\ D_\infty = [D_\infty \longrightarrow D_\infty] = D_\infty \times D_\infty \neq 1$ e $\neq 0$.

É possível tornar $\mathcal{D}$ um *cpo* como segue. Defina, sobre $\mathcal{D}$, a seguinte relação. $D_1, D_2 \in \mathcal{D}, D_1 \subseteq D_2 \Leftrightarrow$ existe um mergulo de D_1 em D_2 (veja Definição 4.2.10). É fácil ver que "$\subseteq$" é um ordem parcial, sobre $\mathcal{D}$, e $0 \subseteq D$, para todo $D \in \mathcal{D}$, isto é, 0 é o primeiro elemento de $\mathcal{D}$. Dados $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, $\mathrm{Sup}\{D_1, D_2\} = D_1 \oplus D_2$. Seja, agora, $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots \subseteq D_n \subseteq \ldots$ uma cadeia em $\mathcal{D}$, então $D = D_0 \oplus D_1 \oplus \cdots + D_n \oplus \cdots = \uplus_{n=0}^{\infty} D_n$ é supremo de $\{D_n\}$. Portanto, $(\mathcal{D}, \subseteq, 0)$ é um *cpo*. Por exemplo, considere a seguinte cadeia $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots \subseteq D_n \subseteq \ldots$, onde $D_0 = 0, D_1 = D \oplus D = D, D_2 = 0 \oplus D \oplus D^2$, $D_3 = 0 \oplus D \oplus D^2 \oplus D^3$, $D_n = 0 \oplus D \oplus D^2 \oplus \cdots \oplus D^n, \ldots$, onde $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n\ vezes}$. Então, $\mathrm{Sup}\{D_n\} = \uplus_{n=0}^{\infty} D_n = D_\infty$.

Seja $\Phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $\Phi(D_0 \oplus D_1 \oplus \cdots \oplus D_n) = D_0 \oplus D_1 \oplus \cdots \oplus D_n \oplus D_{n+1}$. Então, existe um $D \in \mathcal{D}$ tal que $\Phi(D) = D$, isto é, D é um ponto fixo de Φ e esse D é o menor ponto fixo porque $D = \uplus_{n=0}^{\infty} D_n$. Chamando $D = FIX\ \Phi$, tem-se $\Phi(FIX\ \Phi) = FIX\ \Phi$, como uma anologia ao caso de pontos fixos em domínios. então é possível estabelecer uma regra análoga a regra (ii_{40}), qual seja, $\frac{\tau[0/x]\ \ \tau[\sigma/x]}{\tau[FIX\ \sigma/x]}$, onde x percorre tipos, em vez de termos, como no cálculo lambda. Por exemplo, suponha que $\tau = 0 \oplus \alpha \oplus \alpha^2 \oplus \cdots \oplus \alpha^n$. então, $\tau[0/x] = 0$, $\tau[\sigma/x] = 0 \oplus \sigma \oplus \cdots \oplus \sigma^n$ existe. Logo, é possível sacar $\tau[FIX/x] = 0 \oplus \sigma \oplus \sigma^2 \oplus \cdots \oplus \sigma^n \oplus \cdots = \uplus_{n=0}^{\in} \sigma^n = \sigma_\infty$. Interpretando $D(\sigma)$, para σ, tem-se $D(\sigma_\infty) = D_\infty$. Essa a regra de induzir tipos de dados infinito, como listas infinitas, por exemplo.

7.3.3 Definição: Linguagem dos Tipos para a Matemática Intervalar

Seja $\sum = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, 0, 1, \times, \oplus, \longrightarrow, lift, =, \subseteq, FIX\}$, onde $\mathbb{B} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, 0, 1\}$ são os símbolos básicos, incluindo os símbolos de reais Scott, onde os demais símbolos tem significados óbivios. T_Σ, o conjunto dos *tipos da linguagem lambda da Matemática Intervalar* é gerada pelo seguinte cálculo.

(1) $\frac{-}{\sigma_i}$, $\sigma_i \in \mathbb{B}$, (2) $\frac{\alpha,\beta}{\alpha\oplus\beta}, \alpha, \beta \in T_\Sigma$, (3) $\frac{\alpha,\beta}{(\alpha\times\beta)}, \alpha, \beta \in T_\Sigma$;

(4) $\frac{\sigma}{lift\sigma}$, $\sigma \in T_\Sigma$; (5) $\frac{\alpha,\beta}{\alpha \longrightarrow \beta}, \alpha, \beta \in T_\Sigma$, (6) $\frac{\alpha[0/x]\ \alpha[\sigma/x]}{\alpha[FIX\ \sigma/x]}, \alpha, \sigma \in T_\Sigma$;
e x é uma variável percorrendo T_Σ.

As convenções de notação são as mesmas da Definição 7.2.1.

Para todo $\tau, \alpha, \beta, \sigma \in T_\Sigma$, as seguintes regras geram as fórmulas.

As regras $(F_1) - (F_8)$ da Definição 7.2.1, as regras $(F_{10}) - (F_{16})$, trocando os $D_i's$ pelos símbolos de tipos, $\tau_i's$, e as seguintes regras,

(F_{17}) $\sigma \subseteq \sigma$; (F_{18}) $\frac{\alpha \subseteq \beta\ \beta \subseteq \alpha}{\alpha = \beta}$; (F_{19}) $\frac{\alpha \subseteq \beta\ \beta \subseteq \gamma}{\alpha \subseteq \gamma}$.

$(T_\Sigma, \oplus, \times, lift, \longrightarrow, 0, 1, =, \subseteq, FIX)$ é a $\sum$-estrutura sintática. É claro que essa estrutura tem como interpretação, a $\sum$-estrutura $(\mathcal{D}, \oplus, \times, lift, \longrightarrow, 0, 1, =, \subseteq, FIX)$, analizada anteriormente, através da função semântica $[\![\ ]\!]$ definida no Teorema 7.2.7 acrescentado de $[\![\sigma \oplus \tau]\!]_\rho =]\!]\tau]\!]_\rho \oplus [\![\tau]\!]_\rho$; $[\![lift\ \sigma]\!] = lift[\![\sigma]\!]_\rho = lift(D(\sigma)$; $[\![FIX\sigma]\!]_\rho = FIX[\![\sigma]\!]_\rho = FIX\ D(\sigma)$.

7.3.4 Definição: Termos Lambdas

O conjunto do termos lambda da linguagem lambda intervalar com tipos é definido como para a linguagem lambda intervalar sem tipos.

7.3.5 Definição: Atribuição de Tipos

Uma atribuição de tipos ao termo da linguagem lambda intervalar com tipos é dada por um conjunto de regras de tipos, e esquemas de regras com

- para cada variável $x \in X$, uma regra da forma
  (i) $\frac{-}{x:\sigma}$, onde σ é um tipo
- os esquemas de regras a seguir:
  (ii) $\frac{x:\sigma\ M:\tau}{(\lambda x \cdot M):\sigma \longrightarrow \tau}$; (iii) $\frac{M:\sigma \longrightarrow \tau\ N:\sigma}{(MN):\tau}$; (iv) $\frac{x:\sigma\ j:\tau}{(x,y):\sigma \times \tau}$;
  (v) $\frac{(x,y):\sigma \times \tau}{\pi_1(x,y):\sigma}$; (vi) $\frac{(x,y):\sigma \times \tau}{\pi_2(x,y):\tau}$; (vii) $\frac{x:\sigma}{in_1 x:\sigma \oplus \tau}$;
  (viii) $\frac{y:\tau}{in_2 y:\sigma \oplus \tau}$; (ix) $\frac{x:\sigma \oplus \tau\ M:\sigma \longrightarrow \gamma\ N:\tau \longrightarrow \gamma}{\text{caso } xMN:\gamma}$;

(x) $\perp : lift(\sigma)$; (xi) $\perp : \sigma$ para todo σ;

(xii) $\frac{x_i:\sigma_i \ \{\sigma_i\}_{i=0}^{\infty} \text{ cadeia}}{(x_i)_{i=0}^{\infty}:FIX[\sigma_{i+1}/\sigma_i]}$; (xiii) $\frac{(x_i)_{i=0}^{\infty}:FIX[\sigma_{i+1}/\sigma_i]}{\Pi_i(x_i)_{i=0}^{\infty}:\{\sigma_i\}_{i=0}^{\infty}}$

(xiv) $\frac{x:\sigma \ \ \sigma \text{ real Scott}}{x \ll \sigma}$.

As igualdades que se verificam são aquelas da Definição 7.2.3 adicionadas as seguintes.

(i_8) caso $\perp MN = \perp$; $x \neq \perp$ caso $(in_1 x)MN = Mx$; $y \neq \perp$ caso $(in_1 y)MN = Ny$

(i_9) $\pi_i(x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots) = x_i$.

7.3.6 Definição: Teoria do Cálculo Lambda Intervalar com tipos

A *Teoria do Cálculo Lambda Intervalar com tipos* consiste de tipos como na Definição 7.3.3, de termos como na Definição 7.3.4 e de equações como na Definição 7.3.5.

7.3.7 Teorema

Sejam $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \oplus, \times, lift, 0, 1, =, \subseteq, FIX)$ e $[\![\ ]\!]$ a $\sum$-estrutura e a função semântica, respectivamente, definidas acima. Então, $(\mathcal{M}, [\![\ ]\!])$ é um modelo da teoria do cálculo lambda intervalar com tipos.

Prova: Todos os argumentos acima.

□

7.4 A Lógica Construtiva da Matemática Intervalar

O objetivo principal desta seção é usar os resultados obtidos até aqui, principalmente a partir do capítulo anterior, para elaborar uma teoria construtiva que permita reciocinar com programas da matemática intervalar. Ou seja, elaborar uma lógica construtiva de programas.

Será usada a abordagem de teoria dos tipos devida a Per Matin-Löf [LÖF 82], cuja motivação para elaborar essa teoria foi esclarecer a sintaxe e a semântica da linguagem matemática. Do seu ponto de vista, a única maneira de fazer isto seria analizar a Matemática Construtiva. A diferença básica entre Matemática Clássica e Construtiva já foi comentado no capítulo anterior.

A explicação em teoria dos tipos do que é uma proposição matemática encaixa-se bem com a explicação de Heyting (também já comentada anteriormente) [HEY 71] de que o que importa de uma proposição não é sua verdade, mas sua prova. Ela também se encaixa na visão de Kolmogorof [KOL 32] que vê uma proposição como um problema e explica um problema exibindo uma solução para ele.

A importância da Matemática Construtiva para a ciência da computação pode ser resumida no seguinte.

(1) As noções de *computação* e *método* são básicas para a matemática construtiva. Por exemplo, o conceito de função em matemática construtiva é exatamente o mesmo que em Ciência da Computação, ou seja, um método que quando aplicado a um argumento adequado dá como saída algo adequado. O conceito de função em matemática clássica (um subconjunto de um produto cartesiano com certas propriedades) não é o que é usado por um programador.

(2) De uma prova construtiva de uma proposição é possível construir um programa que computa informação relevante a partir dela. Por exemplo, uma prova de uma proposição existencial $\exists x \cdot P(x)$ gerará um programa que computa um objeto a que tem a propriedade desejada $P(a)$. Outros pesquisadores que propuseram matemática construtiva como uma base para programação são: E. Bishop [BIS 70], R.L. Constable [CON 71], [CON 86], M. Sato [SAT 79].

Com certeza, teoria dos tipos é um bom esboço conceitual para a ciência da computação. Teoria dos tipos está nos fundamentos dessa ciência, pois ela trata de conceitos básicos como programa, tipo, especificação, igualdade, avaliação, tipo abstrato de dados, etc. A teoria dos tipos pode ser vista como uma lógica de programação. Uma lógica para os processos onde os programadores escrevem um programa para uma certa tarefa e dão argumentos porque o programa está correto.

Antes de começar o esboço da teoria construtiva da matemática intervalar é bom perceber, intuitivamente, porque é possível acomodar a matemática intervalar, como está abordado neste trabalho, na teoria construtiva dos tipos.

Todas as operações $-, +, \cdot$ e $/$ definidas sobre $\mathbb{I}(\mathbb{Q})$ são totais, isto é, se $* \in \{-, +, \cdot, /\}$, então, $* : \mathbb{I}^2(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{I}(\mathbb{Q})$ é tal que para todo (x, y) em $\mathbb{I}^2(\mathbb{Q}), x * y \in \mathbb{I}(\mathbb{Q})$. Consequentemente, toda função racional (as funções racionais, quociente de polinômios, foram estudados com detalhes no Capítulo 5) $f : \mathbb{I}^n(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{I}^r(\mathbb{Q})$ é uma função total. Estas funções são as candidatas naturais a algorítmos da matemática intervalar. De fato, suponha que se precise computar o número real $\frac{e^2+\pi^2}{e^2}$. É necessário pois se exibir um algorítmo que tem como entrada $(e, \pi) \in \mathcal{R}^2$ e saída $\frac{e^2+\pi^2}{e^2}$. Mas, $e \equiv \{a \in \mathbb{I}(\mathbb{Q}) | a << e\}$ e $\pi \equiv \{b \in \mathbb{I}(\mathbb{Q}) | b << \pi\} \Rightarrow (e, \pi) \equiv \{(a, b) \in \mathbb{I}^2(\mathbb{Q}) | (a, b) << (e, \pi)\}$ $\Rightarrow \lambda x \lambda y \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2} \in \left[(e, \pi) \rightarrow \frac{e^2+\pi^2}{2}\right]$, ou seja, $\lambda x \lambda y \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2}$ é um esquema de algorítmos que transforma $(a, b) \in (e, \pi) \longmapsto \left(\lambda x \lambda y \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2}\right) ab \in \frac{e^2+\pi^2}{e^2}$. Ou seja, $\frac{a^2+b^2}{a^2} \in \frac{e^2+\pi^2}{e^2}$, e portanto, $\frac{a^2+b^2}{a^2} << \frac{e^2+\pi^2}{e^2}$ isto é, $\frac{a^2+b^2}{a^2}$ aproxima ou computa $\frac{e^2+\pi^2}{e^2}$. Para cada $(a, b) \in (e, \pi)$, $\left(\lambda x \lambda y \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2}\right) ab$ é um algorítmo que computa $\frac{e^2+\pi^2}{e^2}$, tem-se ainda mais, $(a, b) \sqsubseteq (a', b') \Rightarrow \left(\lambda x \lambda y \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2}\right) ab \sqsubseteq \left(\lambda x \lambda y \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2}\right) a'b'$, segundo uma regra da seção anterior, $\frac{e^2+\pi^2}{e^2}$ pode ser visto como uma proposição da lógica construtiva e cada $\frac{a^2+b^2}{a^2}$ como uma prova dessa proposição. $\lambda x \lambda y \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2}$ é visto como um método que transforma a prova $(a, b) \in (e, \pi)$ na prova $\frac{a^2+b^2}{a^2} \in \frac{e^2+\pi^2}{e^2}$. Como e é uma lógica geométrica, e é um conjunto de predicados. Neste ponto de vista $\lambda x \lambda y \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2} : (a, b) \longmapsto \frac{a^2+b^2}{a^2}$ é um transformador de predicados. Observe que (a, b) é o predicado "aproxima". Os argumento acima só foram possíveis porque as funções racionais $f : \mathbb{I}^n(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{I}^r(\mathbb{Q})$ são totais. Considere um exemplo mais complicado. Obter um algorítmo que computa $\frac{\pi^2+e^\pi}{e^\pi}$. Já se sabe que e^x e π^x para cada $x \in \mathcal{R}$ é uma lógica geométrica, isto é, $e^X = \{p(X) \in [\mathbb{I}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{I}(\mathbb{Q})] | p(X) << e^X$, $p(X)$ é um polinômio $\}$. Analogamente, $\pi^X = \{q \in [\mathbb{I}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{I}(\mathbb{Q})] | p(X) << \pi^X\}$. Logo, para cada $(X, Y) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ $(p(X), q(X)) << (e^X, \pi^Y)$. Fazendo $X = e, Y = \pi$ tem-se $(p(X), q(Y)) << (e^\pi, \pi^e)$. Logo, $\lambda X \lambda Y \cdot \frac{p(X)+q(Y)}{p(X)} \in \left[(e^\pi, \pi^e) \longrightarrow \frac{e^\pi+\pi^e}{e^\pi}\right]$. Dado $(a, b) \in (\pi, e) \Rightarrow \left(\lambda X \lambda Y \frac{p(X)+q(Y)}{p(X)}\right) ab \in \frac{a^\pi+\pi^e}{e^\pi}$, isto é, $\frac{p(a)+q(b)}{p(a)}$ computa $\frac{e^\pi+\pi^e}{e^\pi}$.

Estes dois exemplos sugere a seguinte estratégia. Sabe-se que $D \in \mathrm{DOM}$, a categoria dos domínios da matemática computacional, é um tipo e portanto, $D \times D, D \times D \times D, \ldots, [D_1 \longrightarrow D_2]$, etc. são tipos. Cada objeto de D ou $D_1 \times D_2$, ou $[D_1 \longrightarrow D_2]$, etc. é uma lógica geométrica e portanto também um tipo, chamado, agora, *tipo pequeno*. Acrescenta-se a categoria dos tipos pequenos o tipo *pequeno vazio*, para expressar o fato de que a lógica expressa por esse tipo é inconsistente. Assim, DOM é um universo de tipos e o tipo $D \in \mathrm{DOM}$ é um universo de tipos pequenos. O universo de tipos pequenos possui um tipo vazio para expressar que existe dois predicados deste tipo inconsistentes e portanto o conjunto todo não especifica objeto algum de $D \in$ DOM, por isso representado por um conjunto vazio. A seguir isto será feito com um certo rigor linguístico.

Em teoria dos tipos, o juízo $a : A$ significa que a tem tipo A, ou a é um membro do conjunto A. Em lógica construtiva um juízo $a : A$ admite muitas interpretações. Uma delas interpreta A como uma proposição (isto é, uma fórmula bém formada construída com conectivos proposionais $\wedge$, $\vee$, etc...) e então a: A pode ser interpretado como a assertiva de que a é uma prova construtiva de A. Ou seja, a proposição é identificada com o conjunto (ou tipo) de suas provas. Este é o conhecido princípio de proposições como tipos. a: A também pode ser interpretado como a é um predicado da especificação A. Este é conhecido como especificação como tipo.

Uma maneira usual de se especificar um programa é dando dois predicados, uma pré-condição $P(x)$ que deve ser verdadeira para a entrada x, e uma pós-condição $Q(x, y)$ que deve ser verdadeira para a saída y. Por exemplo, uma pré-condição seria $x << e$ "x aproxima e" a pós-condição seria $y = f(x) << e^2$,isto é "y aproxima e^2".

Considere A um tipo (como $\mathcal{R}$ por exemplo) e F uma fórmula em lógica de predicados clássica e x uma variável de quem a fórmula F depende, então $\{x : A|F\}$ é um tipo. Ocorrências livre da variável x em F torna-se ligada na expressão. Os elementos no tipo são os elementos em A para o qual F se verifica. Por exemplo, seja $D \in DOM$ um tipo, tome $d \in D$ e seja $F \equiv$ "$x << d$ e $x \in B$", onde B é a base de D. Então o conjunto acima toma a forma $\{x : D|x << d \text{ e } x \in B\}$, que é a lógica geométrica discutida acima. O sistema de tipos é então formalizado num sistema de dedução natural, como na seção anterior, da seguinte maneira:

Regras de introdução $\dfrac{a{:}A \quad F[a/x] \text{ verdadeira}}{a{:}\{x{:}A|F\}}$

Regras de Eliminação $\dfrac{a{:}\{x{:}A|F\}}{a{:}A} \quad \dfrac{a{:}\{x{:}A|F\}}{F[a/x] \text{ verdadeira}}$

As regras tomadas conjuntamente diz que $a : \{x : A|F\}$ se e somente se $a : A$ e $F[a/x]$ é verdadeira. Desta maneira são construidos todos os tipos pequenos de cada $\mathrm{D} \in$ DOM. E estes tipos pequenos são os construídos desta maneira acrescentado do tipo vazio. É sobre este universo de tipos pequenos, construídos a partir do universo de tipos DOM, que será abordado a teoria dos tipos segundo Martin Löf. De ora em diante, tipo significará "tipo pequeno" segundo a construção acima.

Embora a semântica de Heyting e a lógica intuicionística já tenham sido discutidas na seção 6.4, elas serão analizadas novamente, agora, para destacar suas relações com a teoria construtiva dos tipos. Foi observado, naquela ocasião, que a teoria construtiva da matemática exige que, para uma asserção ser aceitável, tem-se de exibir sua demonstração. Essa *demonstração* deve ser contrutiva no sentido de que se deve fornecer informação computacional acerca dos objetos que se está discutindo. Uma consequência desse fato consiste em que, quando se assegura que um objeto com uma propriedade particular *existe*, deve-se fornecer uma demonstração de tal objeto.

Considere expressões bem-formadas a partir dos conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ e f (o f representa o tipo vazio ou a proposição falsa) A notação $p : \alpha$, onde α é uma fórmula bém-formada, significa que "p é uma prova da proposição α" (De ora em diante, as letras minúsculas do alfabeto grego designará fórmula bem-formada da lógica intuicionística). Já foi observado, na seção 6.4, que em lógica intuicionística uma prova de $\alpha \wedge \beta$ é um par de provas (p, q), onde $P : \alpha$ e $q : \beta$, isto é, p é uma prova de α e q é uma prova de β. Uma prova de $\alpha \vee \beta$ é uma prova de α ou uma prova de β, junto com uma indicação de que fórmula é a prova. Uma prova de $\alpha \Rightarrow \beta$ consiste de um método ou uma função que transforma uma prova de α numa prova de β. É claro que dados provas de α e $\alpha \Rightarrow \beta$ é possível derivar uma prova de β *aplicando* a prova de $\alpha \Rightarrow \beta$ a prova de α. Não existe prova para a proposição *contraditória f*. As fórmulas $\neg\alpha$ e $\alpha \Leftrightarrow \beta$ são definidas e provadas a partir das anteriores. $\neg\alpha \equiv \alpha \Rightarrow f$ e $\alpha \Leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$. Desse modo, uma prova de $\neg\alpha$ é um método que toma uma prova de α e transforma numa prova de f. Uma prova de $\alpha \Leftrightarrow \beta$ é um par de funções (p, q), onde p transforma provas de α em β e q transforma provas de β em α

Uma prova de $\exists x\alpha(x)$ é um par (a, p) onde a é um indivíduo e p é uma prova de $\alpha(a)$. Uma prova de $\forall x\alpha(x)$ é um método que produz uma prova de $\alpha(a)$ a partir de um indivíduo arbitrário a.

7.4.1 Exemplo

(i) Achar uma prova para a proposição $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\beta \wedge \alpha)$ assumindo que $p = (p_1, p_2)$ é uma prova de $\alpha \wedge \beta$. Se (p_1, p_2) é uma prova de $\alpha \wedge \beta$, então (p_2, p_1) é uma prova de $\beta \wedge \alpha$. Portanto, $\lambda p \cdot (\pi_2(p), \pi_1(p))$ é uma prova de $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\beta \wedge \alpha)$

(ii) Achar uma prova para a proposição $(((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma) \wedge \alpha) \Rightarrow \gamma$, assumindo que $a : \alpha$ e $q : (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma$.

Se $\alpha : \alpha$, então $in_1(a) : \alpha \vee \beta$. Como $q : (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma$ tem-se que qa é uma prova de γ. Por outro lado, $(q, a) : ((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma) \wedge \alpha$. Logo, $\lambda(q, a).qa : (((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma) \wedge \alpha \Rightarrow \gamma$.

Estas deduções devem ser formalizadas no estilo de dedução natural, via regras (veja seção 6.3). Uma regra tem a forma geral $\frac{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{\alpha}$, onde cada $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha$ é um juízo da forma $p : \gamma$. Foi visto, anteriormente, que existem duas espécies de regras lógicas. Uma regra de introdução e uma regra de eliminação . Serão acrescentadas, agora, mais duas regras, uma *regra de formação* e uma *regra de computação* . As regras de introdução e eliminação já foram amplamente discutidas na seção 6.3. As regras de formação nos dizem que proposições tem formas admissíveis, faz parte da linguagem. As regras de computação nos dizem como provas de fórmulas podem ser reduzidas a provas mais simples.

Abaixo, serão listadas os quatros tipos de regras para cada um dos conectivos. α, β e γ são fórmulas.

Regras para o conectivo $\wedge$

(1) $\frac{\alpha \;\; \beta}{\alpha \wedge \beta}$ (regra de formação); (2) $\frac{p:\alpha \;\; q:\beta}{(p,q):\alpha\wedge\beta}(I\wedge)$

(3) $\frac{p:\alpha\wedge\beta}{\pi_1 p:\alpha}(E_1\wedge)$; $\frac{p:\alpha\wedge\beta}{\pi_2(p):\beta}(E_2\wedge)$,

(4) Regras de computação para $\wedge$: $\pi_1(p, q) \longrightarrow p$; $\pi_2(p, q) \longrightarrow q$.

Regras para o conectivo $\vee$:

(1) $\frac{\alpha \;\; \beta}{\alpha \vee \beta}$ (regras de formação); (2) $\frac{p:\alpha}{in_1 p:\alpha\vee\beta}(I_1\vee)$; $\frac{p:\beta}{in_2 p:\alpha\vee\beta}(I_2\vee)$;

(3) $\frac{p:(\alpha\vee\beta) \;\; f:(\alpha\Rightarrow\gamma) \;\; g:(\beta\Rightarrow\gamma)}{\text{caso } pfg:\gamma}$

(4) Regra de computação para $\vee$: caso $(in_1 q)fg \longrightarrow fq$; caso $(in_2 r)fg \longrightarrow gr$

Regras para o conectivo $\Rightarrow$:

$$\begin{array}{c} [x:\alpha] \\ \vdots \\ p:\beta \end{array}$$

(1) $\frac{p:\beta}{(\lambda x \cdot p):(\alpha\Rightarrow\beta)}(I \Rightarrow)$; (2) $\frac{p:(\alpha\Rightarrow\beta)a:\alpha}{(pa):\beta}(E \Rightarrow)$; (3) $\frac{\alpha \;\; \beta}{(\alpha\Rightarrow\beta)}$. (regra de formação)

(4) Regra de computação para $\Rightarrow$: $(\lambda x \cdot p)a \longrightarrow\!\!\!\!\to p[a/x]$.

Regras para o conectivo f (absurdo)

(1) $\frac{-}{f}$ (regra de formação); (2) Não existe regra de introdução.

(3) $\frac{p:f}{abot\ p:\alpha}(Ef)$. Ou seja, se é possível provar o absurdo é possível provar qualquer coisa, expresso por *abort* $p : \alpha$, para qualquer α. (4) Não existe regra de computação .

Regras para o conectivo $\forall$:

$$\begin{array}{cc} & [x:\alpha] \\ \alpha & \vdots \end{array}$$

(1) $\dfrac{\beta(x)}{(\forall x{:}\alpha)\beta(x)}$. Esta regra nos diz que que α é uma fórmula e que $\beta(x)$ é uma fórmula, na hipótese de que x é uma variável percorrendo α. (Observe que $\beta(x)$ é uma notação para indicar que a variável x pode ser livre em β).

$$\begin{array}{c} [x \cdot \alpha] \\ \vdots \end{array}$$

(2) $\dfrac{p:\beta(x)}{(\lambda x{:}\alpha)p:(\forall x{:}\alpha)\beta(x)}(I\forall)$; (3) $\frac{a:\alpha \quad f:(\forall x:\alpha)\beta(x)}{fa:\beta(a)}(E\forall)$

(4) Regra de computação para $\forall$: $((\lambda x : \alpha)p)a \longrightarrow\!\!\!\!\to p[a/x]$

Regras para o conectivo $\exists$:

$$\begin{array}{cc} & [x:\alpha] \\ \alpha & \vdots \end{array}$$

(1) $\dfrac{\beta(x)}{(\exists x{:}\alpha)\beta(x)}$ (regra de formação); (2) $\frac{a:\alpha \quad p:\beta(a)}{(a,p):(\exists x:\alpha)\beta(x)}(I\exists)$

(3) $\frac{b:(\exists x:\alpha)\beta(x) \quad f:(\forall x:\alpha)(\beta(x)\Rightarrow\gamma)}{\text{caso } af:\gamma}(E\exists)$

(4) Regra de computação para $\exists$: $\text{caso}(a,p)f \longrightarrow\!\!\!\!\to fap$.

O Isomorfismo de Curry-Howard

A analogia entre a teoria dos tipos e lógica foi inicialmente observado por Curry Fey [CUR 58] quando descobriram a analogia formal entre o tipo $\alpha \longrightarrow \beta$ e a implicação $\alpha \Rightarrow \beta$. Eles observaram que os tipos dos combinadores primitivos $I \equiv \lambda x \cdot x$, $K \equiv \lambda x \lambda y \cdot x$ e $S \equiv \lambda x \lambda y \lambda z \cdot xz(yz)$ correspondem a um conjunto de axiomas completo para o cálculo implicacional:

$$\alpha \Rightarrow \alpha;\ \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha) \text{ e } (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)).$$

Howard [HOW 80] extendeu essas idéias e Martin-Löf já tinha ido além [LÖF 75] identificando proposições e tipos.

Desse modo, identificando-se fórmula ou proposição com tipo e consequentemente provas com funções, ou objetos em geral, pode-se fazer as seguintes observações.

(1) A proposição $\alpha \wedge \beta$ é o conjunto de todos os objetos consistindo de uma prova de α e uma prova de β, isto é, todos os objetos da forma (a, b) onde a é uma prova de α e b é uma prova de β. Portanto a conjunção corresponde ao produto cartesiano $\alpha \times \beta$.

(2) A proposição $\alpha \vee \beta$ é o conjunto de todos os objetos da forma $in_1(a)$ ou $in_2(b)$, onde a é uma prova de α e b é uma prova de β. Portanto, a disjunção $\alpha \vee \beta$ corresponde a união disjunta $\alpha \oplus \beta$.

(3) A proposição $\alpha \Rightarrow \beta$ corresponde ao conjunto das funções $(\alpha \rightarrow \beta)$ desde que ele contém funções transformando uma prova arbitrária de α numa prova de β.

(4) A proposição $(\exists x : \alpha)\beta(x)$ é o conjunto de todos os pares (a, b), onde a é um elemento em α e β é uma prova de $\beta(a)$. Logo, a proposição existencial corresponde ao conjunto $\sum_{x:\alpha} \beta(x)$, *a união disjunta de uma família de conjuntos.*

(5) A proposição $(\forall x : \alpha)\beta(x)$ é o conjunto de todas as funções $\lambda x \cdot b$, onde b é uma prova de β sob a hipótese de que x é um elemento de α. Portanto, a proposição universal corresponde a $\Pi(x : \alpha)\beta(x)$, *o produto cartesiano de uma família de tipos indexado pelo tipo* α.

Com essa identificação pode-se adotar todas as regras apresentadas para a lógica intuicionística, acima, substituindo fórmula por tipo, $\wedge$ por $\times$, $\vee$ por $\oplus$, etc., obtendo-se assim um sistema dedutiva para tipos.

Observe que cada $D \in$ DOM pode ser recuperado usando a teoria dos tipos pequenos como segue. Seja $D \in$ DOM, visto como um conjunto, para cada $x \in D$, seja $\beta(x) = \{b \in \mathcal{B} | b << x\}$, então, $D = \sum_{x:D} \beta(x)$. Além disso, $D_\infty = \Pi_{i \in \mathbb{N}} \left(\sum_{x:D_i} \beta(x)\right)$.

O sistema dedutivo apresentado, aqui, visa falar acerca de provas (ou demonstrações) de proposições , ou de predicados e especificações, de números reais e suas aproximações. por exemplo, $(\lambda x : \alpha)x$ é um esquema de provas de $\alpha \Rightarrow \alpha$. Tomando

$\alpha \equiv \pi$ (o número real pi) $(\lambda x : \pi)x$ é um esquema de provas de $\pi \longrightarrow \pi$. É desejável que se esteja consciente em que "nível" se está trabalhando, uma vez que se faz um estudo matemático de um sistema formal. O nível de provas e proposições será chamado o *nível do objeto*. Por outro lado no nível meta, tem-se os *juízos*, que toma a forma $(\alpha \Rightarrow \alpha)$ é uma fórmula; $(\lambda x \cdot \alpha)x : (\alpha \Rightarrow \alpha)$.

Portanto, juízos expressam propriedades do sistema de objetos. É aplicando as regras que se deriva juízos. Por exemplo, pode-se constatar que $(\lambda x : \alpha)(\lambda y : \beta)x : (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha))$, pois $\frac{x:\alpha}{(\lambda y:\beta)x:(\beta \Rightarrow \alpha)}$ e descartando a hipótese, $\frac{\frac{[x:\alpha]}{(\lambda y:\beta)x:(\beta\Rightarrow\alpha)}}{(\lambda x:\alpha)(\lambda y:\beta)x:(\alpha\Rightarrow(\beta\Rightarrow\alpha))}$.

Esta aplicação de regras, que em geral toma a forma de árvores é chamada *derivação*. Desse modo, uma derivação é uma "prova" informal, sua ação é fora do sistema de objetos, enquanto uma prova faz parte do sistema de objetos. Assim, se pode dizer que "provas estabelecem proposições no nível do objeto" e derivações "estabelecem juízos, no nível meta.

7.4.2 Exemplo

Mostre que se $a << e$ e $b << \pi$, então $2a^3 + 5b << 2e^3 + 5\pi$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : e \quad x : e}{(x, x) : (e, e)} \quad x : e}{(x, x, x) : (e, e, e)} \quad y : \pi}{(\lambda x : e)2x^3 : (e, e, e) \longrightarrow 2e^3 \qquad (\lambda y : \pi)5y : (\pi \longrightarrow 5\pi)}}{(\lambda x : e)(\lambda y : \pi)(2x^3 + 5y) : (e, \pi) \longrightarrow (2e^3 + 5\pi)}}{(\lambda x : e)(\lambda y : \pi)(2x^3 + 5y)ab : (2e^3 + 5\pi)}$$

Computação: $(\lambda x : e)(\lambda y : \pi)(2x^3 + 5y)ab \twoheadrightarrow 2a^3 + 5b$.

Logo, $2a^3 + 5b : (2e^3 + 5\pi)$ e consequentemente $2a^3 + 5b << 2e^3 + 5\pi$.

8 CONCLUSÕES

Nesta unidade será feita uma avaliação global dos resultados obtidos ao longo deste trabalho, ao mesmo tempo que são apontadas as direções para as quais ele poderá ter continuidade.

8.1 O sistema Intervalar Como Uma Analogia ao Sistema de Números Reais

No capítulo 2 o sistema intervalar foi construído de tal modo que o sistema de números reais é obtido como um caso particular dessa construção. Isto foi possível a partir da generalização do conceito de corte de Dedekind. Enquanto a construção dos reais pressupões os números racionais, a construção dos intervalos reais pressupõe os intervalos racionais. A partir dessa construção o sistema intervalar possui propriedades análogas ao sistema real. Enquanto o sistema real constitui uma estrutura algébrica, munida de uma ordem, denominada corpo ordenado completo arquimediano, o sistema intervalar constitui um sistema lógico, não mais algébrico (nos seus axiomas figuram desigualdades) com a propriedade da interpolação (que corresponde à arquimediana para os reais). Esse sistema, chamado de quasi-corpo, também, é completo. O quasi-corpo intervalar tem a vantagem, em relação corpo real, de sua aritmética serem funções monotônicas, superando, assim, a deficiência "computacional" do sistema real.

O corpo dos números reais tem sido intensivamente estudado nesses últimos séculos. A partir do século passado a estrutura de corpo passou a ser estudada a partir de estruturas mais simples como grupos, anéis, etc. Sugere-se que a estrutura de quasi-corpo venha a ser pesquisada numa direção análoga a de corpo. Esse estudo é importante na resolução de sistemas de "equações" intervalar e na elaboração de uma "algébra" linear computacional.

Outra conclusão que se pode tirar do Capítulo 2 é que os cortes de Dedekind generalizados são, por sua vez, uma generalização do conceito de ideal, amplamente usado na teoria dos domínios de Scott.

Segundo Scott [SCO 72b] "o nível correto de modelação da matemática da computação não é nem o estritamente finito nem o ilimitadamente infinito, mas o finitário, isto é, aqueles objetos que aparece como limites de objetos finitos". A abordagem aqui proposta está coerente com esta filosofia, pois cada objeto da matemática intervalar é obtido como supremo de elementos da base, finitamente representáveis.

Kamimura [KAM 84a] pensando nos domínios de Scott faz a seguinte observação. "Nós programamos com objetos totais, mas raciocinamos com objetos parciais. Daí a importância da base. Na abordagem da computação por domínios, elementos computáveis são usualmente dados operacionalmente: supremos dirigidos de sequências recursivamente enumeráveis de objetos básicos".

8.2 O Desenvolvimento de uma Teoria da Computabilidade no Sistema de Números Reais ou Intervalar

A teoria da computabilidade ou teoria da recursão tem crescido rapidamente desde seu início - 50 anos atrás - até hoje. Enquanto, inicialmente principalmente lógicos estavam interessados na teoria da computabilidade, atualmente esta teoria fornece importantes resultados teóricos para a ciência da computação e a lógica, e suas questões e métodos estão penetrando em muitas outras disciplinas matemáticas. Enquanto inicialmente se estudava recursão sobre os naturais, aqui chamada teoria tipo 1, a teoria da recursão tipo 2 [WEI 87] investiga computabilidade sobre conjuntos com a cardinalidade do contínuo.

Nesta abordagem da matemática intervalar cada real ou intervalo de números reais, x, é o supremo do conjunto $\downarrow x = \{b \in \mathbb{I}(\mathbb{Q}) | b << x\}$. Pode-se dizer, então, que o número real ou intervalo de números reais, x, é *computável* se o conjunto $\downarrow x$ é recursivamente enumerável. Como a categoria DOM, da matemática computacional, é cartesiana fechada essa definição de computável pode ser extendida a qualquer objeto da categoria, quer seja número, intervalo, n-upla de números, n-upla de intervalos, funções entre números ou intervalos, funcionais, etc. Ou seja, um objeto de DOM é computável se ele é o supremo de um conjunto recursivamente enumerável de elementos da base. Mike Smyth [SMY 77] provou que esse conceito de função computável na categoria cartesiana fechada dos *cpo's* com base enumerável, coincide com o conceito usual de função computável [ROG 67].

A partir dessa definição de número computável é fácil ver que os números reais π (pi), e (base neperiana) etc. são computáveis (para um argumento de que *pi* é computável ver [LÖF 70]). É intuitivo que cada função intervalar racional é computável. Logo, toda função intervalar definida por série de potência é computável como supremo de um conjunto recursivamente enumerável de polinômios. Assim, são computáveis as funções e^X, $\cos X, \log X$, etc.

Diante dos argumentos acima sugere-se o desenvolvimento de uma teoria da computabilidade tipo 2, onde o espaço $\mathcal{R}$, dos reais parciais, desempenhe um papel, nessa teoria, análogo ao papel desempenhado pelos naturais na teoria tipo 1. Por exemplo, na teoria tipo 1 se define computabilidade explicitamente sobre os números naturais ou palavras e mostra-se que ambas as abordagens são equivalentes. Computabilidade em outros conjuntos enúmeráveis se reduzem a computabilidade sobre $\mathbb{N}$ via numeração ou condificação. Nessa teoria tipo 2 cada objeto x, infinito, é o limite de uma sequência recursivamente enumerável de objetos finitos $\{x_i\}$, isto é, $x = \lim x_i$. Sugere-se também, a investigação da possibilidade dos intervalos de informação básicos e da aritmética intervalar básica sejam vistas como máquinas simples cuja composição geram máquinas complexas que desempenham um papel para computação numérica análogo aquele desempenhada pelas máquinas de Turing sobre os números naturais. Caso essa analogia seja bem sucedida sugere-se que elas sejam denominadas máquinas de Moore, em homenagem ao criador da matemática intervalar. De qualquer modo essas máquinas requerem uma investigação da sua complexidade computacional. E isto é uma sugestão de pesquisa na área de complexidade de algorítmos.

8.3 No Sentido de uma Análise Funcional Intervalar

A introdução de uma topologia sobre $\mathcal{R}$, os reais parciais, compatível com a ordem faz com que esse espaço possua um teorema de ponto fixo, análogo ao Teorema do Ponto Fixo de Banach. É claro que este teorema de ponto fixo não é útil no espaço $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^n$. Isto porque toda função contínua de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$ tem o bottom como ponto fixo. Daí a importância da categoria DOM ser cartesiana fechada. Isto significa que o espaço de funções contínuas ou de funcionais contínuos, etc. tem o mesmo status que o espaço $\mathcal{R}$. Ou seja, todo funcional contínuo tem também ponto fixo, viabilizando assim o desenvolvimento de uma análise funcional intervalar. Sugere-se que seja investigada com profundidade essa Análise Funcional, para que seja definido o correspondente de Espaço de Banach, Espaço de Hilbert, Álgebra de Banach, etc. E que seja aprofundada o estudo de equações diferenciais e integrais, apenas sugeridas no Capítulo 5.

Smyth propôs [SMY 87b] uma generalização para espaços não-Hausdorff que tem como casos especiais domínios de Scott. Investigando essa generalização o autor, dessa tese, definiu uma quasi-metrica num domínio cuja topologia induzida por ela é exatamente a topologia de Scott nesse domínio. Tem-se aqui os espaços quasi-métricos na categoria DOM desempenhando o mesmo papel que os espaços métricos numa categoria topológica de Hausdorff. Ora porque interesse em espaços quasi-métricos? Em outras palavras, qual o interesse em quasi-metrizar domínios? A quasi-métrica permite uma análise quantitativa do espaço, enquanto a topologia de Scott, sendo compatível com a ordem, somente é capaz de fazer análise qualitativa.

Tendo em vista os argumentos acima sugere-se que a categoria DOM seja estudada com profundidade do ponto de vista de que seus objetos sejam espaços quasi-métricos.

8.4 A Matemática Intervalar como Método e Geometria

No Capítulo 5 foi observado que a matemática intervalar pode ser vista como um método, no mesmo sentido da álgebra linear. No entanto esse método está comprometido com representações, diferentemente do método linear, preocupado apenas com a operacionalidade.

Foi sugerido naquele capítulo o desenvolvimento de uma álgebra linear computacional. Essa álgebra linear permitirá desenvolver-se uma geometria. É interessante investigar-se a relação entre essa geometria e o método intervalar. Sugere-se assim a investigação dessa geometria como uma base para o desenvolvimento de uma computação gráfica intervalar.

8.5 A Matemática Intervalar como uma Teoria de Algorítmos

A elaboração da lógica geometrica do capítulo 6 que permite olhar para cada objeto da categoria DOM como uma teoria geométrica só foi possível porque existe uma equivalência entre uma categoria de espaços topológicos e funções contínuas, e uma categoria de frames e homomorfismos. Isto é uma generalização dos teoremas de dualidade do tipo Stone [JOH 82]. O papel dessa lógica é muito importante na análise qualitativa de algorítmos deduzidos na lógica construtiva do capítulo 7. Ela permite comparar dois algorítmos que computam o mesmo objeto de DOM. Ou a partir de dois algorítmos que executam a mesma tarefa é possível se extrair um terceiro qualitativamente melhor do que ambos e que executa a mesma tarefa. Enquanto a lógica construtiva do Capítulo 7 permite uma prova automática da corretude de uma programa a lógica elaborada no Capítulo 6 faz uma análise qualitativa desses programas. Trabalhos futuros nesta área deve aprofundar o estudo dessas duas lógicas assim como estudar a complexidade desses algorítmos.

Finalmente, uma continuação natural desse trabalho será extender a categoria DOM com domínios potências de modo que se possa fazer análise de algorítmos paralelos e não determinísticos [SMY 83].

BIBLIOGRAFIA

[ABR 87a] ABRAMSKY, S. **Domain Theory in Computing Science.** London: Department of Computing Science, Imperial College, 1987. 6p.

[ABR 87b] ABRAMSKY, S. **Domain Theory in Logical Form.** London: Department of Computer Science, Imperial College, 1987. 13p.

[ACI 88] ACIOLY, Benedito M. **Interval Analysis: a Domain Approach.** Brighton: Department of Computer Science, University of Sussex, 1988. 21p.

[ACI 90a] ACIOLY, Benedito M.; DIMURO, G. P.; CLAUDIO, D. M. Uma Teoria de Informaçäo - Uma Abordagem para a Teoria dos Intervalos. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMATICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 13., 27 - 29 nov., 1990, Aguas de Lindóia. **Resumos das Comunicações...** Rio de Janeiro: SBMAC, 1990. 184p. p.22.

[ACI 90b] ACIOLY, Benedito M.; DIMURO, G. P.; CLAUDIO, D. M. **No Sentido de uma Teoria de Informação para a Análise Real.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1990. 43p.

[ACI 90c] ACIOLY, Benedito M. **Lógica do Ponto de Vista da Computação.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1990. 147p.

[ACI 90d] ACIOLY, Benedito M. **CCS Como uma Teoria Formal.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1990. 112p.

[ACI 90e] ACIOLY, Benedito M. **Topologia, Uma Visão Moderna.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991. 115p.

[ALE 83] ALEFELD, G. ; Herzberger, J. **Introduction to Interval Computations.** New York: Academic Press, 1983. 381p.

[ARN 79] ARNOLD, V. I. **Equazioni Diferenziali Ordinarie.** Moscou: Edizione Mir, 1979. 331p.

[BAC 89] BACKHOUSE, R. C. Construtive Type Theory - an Introduction. In: **Construtive Methods in Computing Sciences.** Berlin: Spring-Verlag, 1989. 430p. p.5-56. (NATO ASI Series, v.55).

[BAR 84] BARENDREGT, H. P. **The Lambda Calculus: Its Syntase and Semantics.** Amsterdam: North-Holland , 1984. 620p.

[BEE 85] BEESON, M.J. **Foundation of Constructive Mathematics.** Berlin: Springer - Verlag, 1985. 465p.

[BIS 67] BISHOP, E. **Foundations of Constructive Analysis.** New York: Mcgraw-Hill, 1967. 314p.

[BIS 70] BISHOP, E. Mathematics as a Numerical Language. In: INTUITIONISM AND PROOF THEORY. Amsterdam: North-Holland, 1970. 321p. p.53-71.

[BOY 74] BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgar Blücher, 1974. 488p.

[BUN 76] BUNGE, M. **Tratado de Filosofia Básica: semântica.** São Paulo: EPU, 1976. 2v.

[BUR 75] BURGE, W. H. **Recursive Programming Techniques.** New York: Addison - Wesley, 1975. 277p. (The Programming Series).

[CLA 87] CLAUDIO, D. M.; MARINS, J. M. **Cálculo Numérico e Computacional: Teoria e prática.** São Paulo: Atlas, 1989. 182p.

[CHU 51] CHURCH, A. **The Calculi of Lambda Conversion.** Princeton: New Jersey University, 1951. p.32-75. (Annals of Mathematics Studies).

[COH 65] COHN, P. M. **Universal Algebra.** New York: Harper and Row, 1965. 333p.

[CON 71] CONSTABLE, R.L. Construtive Mathematics and Automatic Program Writers. In: IFIP CONGRESS ON INFORMATION PROCESS, 4., Aug. 23 - 28, 1971, Ljubljana. **Proceedings...** Ljubljana: North -Holland, 1972. 380p. p.229-233.

[CON 86] CONSTABLE, R.L. **Implementing Mathematics with the NuPRL Proof Development System.** Englewood Cliff: Prentice Hall, 1986. 232p.

[COR 88] CORLISS, G.F. **How Can You apply Interval Techniques in an Industrial Setting?.** Milwaukee: Marquette University, 1988. 37p. (Technical Report).

[COS 90] COSTA, Antônio C. R. **Teoria dos tipos.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1990. 98p.

[CUR 58] CURRY, H. B.; FEYS, R. **Combinatory Logic.** Amsterdam: North-Holland, 1958. 417p.

[DIM 91] DIMURO, G. L. **Domínios Intervalares da Matemática Computacional.** Porto Alegre: PGCC da UFRGS, 1991. 311p.

[DUN 66] DUNGUNDJI, J. **Topology.** Boston: Allyn and Bacon, 1966. 447p.

[DOI 88] DOITCHINOV, D. On Completeness of Quasi - Metric Spaces. **Topology and Its applications,** Amsterdam, v.3, n.2, p.127-148, Nov. 1988.

[END 72] ENDERTON, B. H. **A Mathematical Introduction to Logic.** New York: Academic Press, 1972. 295p.

[GEL 61] GELFAND, I. M. **Lectures in Linear Algebra.** New York: Interscience Publishers, 1961. 181p.

[GIE 80] GIERS, K. et al. **A Compendium of Continuous Lattice.** Berlin: Springer-Verlag, 1990. 371p.

[GIR 89] GIRARD, J.Y.. **Proofs and Types.** Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 176p.

[GOG 77] GOGUEM, J. et al. Initial Algebra Semantics and Continuous Algebras. **Journal of ACM,** New York, v.24, n.1, p.32-101, Jan. 1977.

[GOL 79] GOLDBLATT, R. **Topoi, the Categorical Analysis of Logic.** Amsterdam: North-Holland, 1979. 486p.

[GRA 79] GRATZER, G. **Universal Algebra.** Berlin: Springer-Verlag, 1979. 368p.

[HEN 89] HENNESSY, M. **An Algebraic Theory of Processes.** Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 271p.

[HEN 76] HENNIE, F. **Introduction to Computability.** Massachusetts: Addison - Wesley, 1979. 374p.

[HEY 71] HEYTING, A. **Intuitionism, an Introduction.** Amsterdam: North-Holland, 1971. 145p.

[HIN 80] HINDLEY, J.R.; SELDIN, J.P. **To H.B. Curry: Assay on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism.** New York: Academic Press, 1980. 526p.

[HOW 80] HOWARD, W.A. The Formulas - as - Types Notions Construction. In: HINDLEY, J. R.; SELDIN, J. P. **To H. B. Curry: Assay on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism.** New York: Academic Press, 1980. 526p. p.479-490.

[JOH 82] JOHNSTONE, P. T. **Stone Spaces.** Cambridge: Cambridge University Press, 1982. 370p.

[JOH 87] JOHNSTONE, P. T. **Notes on Logic and Set Theory.** Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 110p.

[KAM 84a] KAMIMURA, T.; TANG, A. **Total Objects of Domains.** Lawrence: Department of Computer Science, University of Kansas, 1984. 35p.

[KAM 84b] KAMIMURA, T.; TANG, A. Effectively Given Spaces. **Theorical Computer Science**, Amsterdam, v.29, n.5, p.155-166, Mar. 1984.

[KEL 55] KELLY, J. L. **General Topology.** Princeton: Van Nostrand, 1955. 298p.

[KEI 79] KEIMEL, K.; GIERS, G. Continuous Ideal Completion and Compacfications. In: CONTINUOUS LATTICE, Nov. 9 - 11, 1979. Bremen. **Proceedings...** Bremen: Springer-Verlag, 1979, p.97-125.

[KLE 52] KLEENE, S. C. **Introduction to Metamathematics.** Amsterdam: North-Holland, 1952. 550p.

[KOL 32] KOLMOGOROF, A. N. Zur Deutung de Intuitionistischen. **Mathematishe Zeitschrift**, Berlin, v.35, n.3, p.58-65, 1932.

[KUL 81] KULISCH, U.W.; MIRANKER, W.L. **Computer Arithmetic in Theory and Practice.** New York: Academic Press, 1981 . p.231.

[KUL 83] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. A New Approach to Scientific Computation. In: SIMPOSIUM ON A NEW APPROACH TO SCIENTIFIC COMPUTATION, Aug. 3, 1982, Yorktown Heights. **Proceedings...** New York: Academic Press, 1983. 384p.

[LAM 84] LAMBECK, J.; SCOTT, P. J. Aspect of Higher Order Categorical Logic. In: MATHEMATICAL APPLICATION OF CATEGORY THEORY, Jan. 5 - 9, 1983, Denver. **Proceedings...** Providence: American Mathematical Society, 1984. 307p. p.145-174.

[LAM 86] LAMBECK, J.; SCOTT, P. J. **Introduction to Higher Order Categorical Logic.** Cambridge: Cambridge University Press, 1986. 293p.

[LAW 87] LAWSON, S. D. **The Versatile Continuous Order.** Baton Range: Department of Mathematics/Lousiana State University, 1987. 74p.

[LIM 77] LIMA, E. L. **Espaços Métricos.** Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1977. 299p. Projeto Euclides.

[LOF 70] LÖF, P. M. **Notes on Mathematics.** Stokholm: Almqsvist and Wiksell, 1970. 110p.

[LOF 75] LÖF, P. M. An Intuitionistic Theory of Types: Predicative Part. In: LOGIC COLLOQUIUM, Mar. 5 - 7, 1973, Amsterdam. **Proceedings...** Amsterdam: North-Holland, 1975. p.73-118.

[LOF 82] LÖF, P. M. Constructive Logic and Computing Programming. In: **Logic, Methodology, and Philosophy of Science VI.** Amsterdam: North-Holland, 1982. p.153-175.

[MAC 71] MACLANE, S. **Categories for Working Mathematician.** Berlin: Springer-Verlag, 1971. 335p.

[MAN 75] MANES, E.G. **Algebraic Theories.** Berlin: Springer-Verlag, 1975. 350p.

[MAR 87] MARKOWSKY, G. Chain Complete Poset and Directed Sets with Application. **Algebra Universal,** Basel, v.6, n.1, p.138-147, Jul. 1975.

[MAR 88] MARTINS, R.; MOURA, A. V. **Desenvolvimento Sistemático de Programas Corretos: a Abordagem Denotacional.** São Paulo: VI Escola de Computação, 1988. 385p.

[MEN 72] MENDELSON, E. **Introductions to Mathematical Logic.** New York: Academic Press, 1972. 295p.

[MOO 66] MOORE, R. E. **Internal Analysis.** Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966. 232p.

[MOO 79] MOORE, R.E. **Methods and Applications of Interval Analysis.** Philadelphia: SIAM, 1979. 187p.

[MOO 88] MOORE, R. E. **Realiabilty in Computing: the Role of Interval Methods in Scientific Computing.** New York: Academic Press, 1988. 291p.

[NAC 65] NACHBIN, L. **Topology and Order.** New York: Van Nortrand, 1965. 135p.

[NIC 75] NICKEL, K. L. E. **Interval Mathematics.** New York: Springer-Verlag, 1975. 235p.

[NIC 85] NICKEL, K. L. E. **Interval Mathematics.** New York: Springer-Verlag, 1985. 312p.

[PAU 87] PAULSON, L. C. **Logic and Computation, Interative Proof with Cambridge LCF.** Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 302p.

[PLO 80] PLOTKIN, G. **Post-Graduate Lecture Notes in Advanced Domain Theory.** Edinburgh: Department of Computer Science / University of Edinburgh, 1980. 297p.

[PRA 65] PRAWITZ, D. **Natural Deduction.** Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1965. 135p.

[RAT 84] RATSHEK, H; ROKNE, J. **Computer Methods for the Range of Functions.** England: Ellis Horwood, 1984. 312p.

[ROG 67] ROGERS, H. **Theory of Recursive Function and Effective Computability.** New York: McGraw-Hill, 1967. 482p.

[RUD 66] RUDIN, V. I. **Princípios de Analisis Matemático.** New York: McGraw-Hill, 1966. 482p.

[SAT 79] SATO, M. Toward of a Mathematical Theory of Program Syntesis. In: INTERNATIONAL JOINT CONFERENCES ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE (IJCAI), 1979, Tokyo. **Proceedings...** Tokyo: IJCAI, 1979. 175p.

[SCH 77] SCHÜTTE, K. **Proof Theory.** Berlin: Springer-Verlag, 1977. 302p.

[SEL 86] SELDIN, J. R.; HINDLEY, J. R. **Introduction to Combinators and Lambda - Calculus.** Cambridge: Cambridge University Press, 1986. 360p.

[SIM 67] SIMMONS, G. F. **Topology and Modern Analysis.** New York: Mcgraw-Hill, 1967. 372p.

[SOM 88] SOMMERHALDER, R.; WESTRHENEN, S. C. **The Theory of Computability: Programs, Machines, Effectiveness and Feasibility.** England: Addison-Wesley, 1988. 441p.

[SCO 72a] SCOTT, D. S. Continuous Lattice. In: **Toposes, Algebraic Geometry, and Logic.** Berlin: Springer-Verlag, 1972. LNM, v.274, p.97-136.

[SCO 72b] SCOTT, D. S. Lattice Theory, Data Types and Semantics. In: **Formal Semantics of Programming Languages.** Englewood Cliff: Prentice Hall, 1972. 248p. p.66-106.

[SCO 76a] SCOTT, D.S. Data Types as Lattice. **SIAM Journal of Computing**, Philadelphia, v.5, n.3, p.522-587, Sept. 1976.

[SCO 76b] SCOTT, D. S. Logic and Programming Languages. **Communications of the ACM**, New York, v.20, n.5, p.634-641, May. 1976.

[SCO 80a] SCOTT, D. S. Lambda Calculus: some Models, some Philosophy. In: THE KLEENE SIMPOSIUM, Dez. 4 - 6, 1978, Amsterdam. **Proceedings...** Amsterdam: North -Holland, 1980. p.223-266.

[SCO 80b] SCOTT, D. S. Relating Theories of Lambda - Calculus. In: HINDLEY, J. R.; SELDIN, J. P. **To H. B. Curry: Assay on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism.** New York: Academic Press, 1980. 526p. p.403-450.

[SCO 82a] SCOTT, D. S. Domains for Denotational Semantics. In: COLLOQUIUM ON AUTOMATA, LANGUAGES AND PROGRAMMING, 9., July 12 - 16, 1982, Aarhus. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 1982. 613p. p.231-252. LNCS, v.140.

[SCO 82b] SCOTT, D. S. Lectures on a Mathematical Theory of Computation. In: **Theorical Foundations of Programming Methodology.** Berlin: R. Reidel, 1982. p.145-292.

[SMY 77] SMYTH, M. Effectively Given Domains. **Theorical Computer Science**, Amsterdam, v.5, n.1, p. 257-274, Marc. 1977.

[SMY 83] SMYTH, M. Power Domain and Predicate Transformers - a Topological View. In: COLLOQUIM ON AUTOMATA LINGUAGES AND PROGRAMMING, 10., July 18 - 22, 1983, Barcelona. **Proceedings...** Berlin: Springer-Verlag, 1983. p.665-675.

[SMY 87a] SMYTH, M. **Completion of Quasi - Uniform Space in Terms of Filters.** London: Department of Computing / Imperial College, 1987. 37p.

[SMY 87b] SMYTH, M. Quasi - Uniformity: Reconcilling domains with Metric Spaces. In: WORKSHOP ON MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF PROGRAMMING LANGUAGES SEMANTICS, 3., Apr. 8 - 10, 1987, New Orleans. **Proceedings...** Berlin: Springer - Verlag, 1988. 637p. p.120-138. LNCS, n.298.

[SMY 90a] SMYTH, M. **Totally Bounded Spaces and Compact Ordered Spaces as Domains of Computation.** London: Imperial College, 1990. 35p.

[SMY 90b] SMYTH, M. Topology. In: **Handbook of Logic in Computer Science.** Oxford: Oxford University Press, 1990. 78p.

[STR 67] STRUIK, D. J. **A Concise History of Mathematics**. New York: Dover, 1967. 72p.

[STO 77] STOY, J. **Denotational Semantics: the Scott-Strachey Approach to Programming Languages Theory**. Massachusetts: MIT Press, 1977. 414p.

[TAK 78] TAKASU, S. Proofs and Programs. In: SIMPOSIUM ON MATHEMATICAL FOUNDATION OF COMPUTER SCIENCES, Mar. 3-5, 1976, Tokyo. **Proceedings...** Tokyo: IBM, 1978. p.42-71.

[TUR 84] TURNER, R. **Logic for Artificial Intelligence**. England: John Willey and Sons, 1984. 121p.

[VIC 89] VICKERS, S. **Topology Via Logic**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 235p.

[WAD 76] WADSWORTH, C. P. The Relation Between The Computational and Denotational Properties for Scott's D_∞-models of Lambda-Calculus. **SIAM Journal of Computing**, Philadelphia, v.12, n.5, p.488-521, Mar. 1976.

[WEI 87] WEIHRAUCH, K. **Computability**. Berlin: Springer-Verlag, 1987. 482p.

[WYL 81] WYLER, O. Algebraic Theories of Continuous Lattice. In: CONTINUOUS LATTICE SIMPOSIUM, Nov. 9-11, 1978, Bremem. **Proceedings...** Berlin: Springer - Verlag, 1979. p. 390-413. LNM, v.871.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

"Fundamentação Computacional da Matemática Intervalar"

Tese apresentada aos Srs.

Prof. Dr. Dalcidio Moraes Claudio

Prof. Dr. Jayme Luiz Szwarcfiter (UFRJ)

Prof. Dr. Manoel Agamenon Lopes (UFPE)

Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena (DENUC/UFRGS)

Prof. Dr. Roberto Lins de Carvalho (PUC/RJ)

Visto e permitida a impressão

Porto Alegre, 20 / 12 / 91

Prof. Dr. Dalcidio Moraes Claudio
Orientador

Prof. Dr. Ricardo Augusto da L. Reis
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Ciência da Computação

ESR/LJSJr \DIVCPGCC\ASSINBAN.TES