

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRELIÇAS E PÓRTICOS COM RESTRIÇÕES DE  
FLAMBAGEM E FLEXIBILIDADE

por

Carlos Eduardo Marcos Guilherme

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, dezembro de 2000

ESCOLA DE ENGENHARIA  
BIBLIOTECA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRELIÇAS E PÓRTICOS COM RESTRIÇÕES DE  
FLAMBAGEM E FLEXIBILIDADE

por

Carlos Eduardo Marcos Guilherme

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetido ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Aprovada por:

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Prof. Dr. Volnei Andersson

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Prof. Dr. Sergio Viçosa Möller  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 22 de dezembro de 2000

## **AGRADECIMENTOS**

- Ao professor Jun Sérgio Ono Fonseca, pela amizade, formação e orientação,
- a todos colegas do GMAP,
- à minha família e amigos, em especial aos meus pais pela amizade e compreensão,
- à minha namorada, Andréia Simone, pela compreensão e amor,
- ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia para a otimização de estruturas do tipo treliça ou pórtico. A função objetivo adotada neste trabalho é o volume, onde o problema pode apresentar restrições de estabilidade estrutural ou flexibilidade. A abordagem utilizada é a otimização topológica, na qual busca-se gerar uma estrutura ótima a partir de um universo de elementos. A malha inicial é gerada por um programa que permite decidir qual o tipo de vizinhança que será utilizado, gerando então a ótima conectividade entre todos os nós possíveis. Utilizam-se neste trabalho vizinhanças de primeira até quarta ordem; o número de elementos cresce com o aumento da ordem da vizinhança.

Nas estruturas discretizadas utilizou-se elemento de barra e viga, onde a seção de cada um dos elementos foi adotado como variável de projeto. Restringiu-se a variação da área da seção de cada elemento dentro de um intervalo, com o limite máximo de 0,5 e o mínimo de 0,001.

Três tipos de problemas são formulados neste trabalho: o primeiro minimização do volume com restrição de flexibilidade, o segundo com restrição de flambagem e por último a minimização de volume com ambas as restrições de flexibilidade e estabilidade estrutural. Na otimização topológica é utilizado a programação linear seqüencial (SLP), onde as funções objetivo e sensibilidade são linearizadas através da expansão em série de Taylor. Um ponto importante deste trabalho foi a obtenção da derivada de flambagem quando existirem autovalores repetidos, fazendo-se uso do método analítico direto.

Os resultados obtidos demonstram que a metodologia implementada permitem a obtenção de estruturas que satisfazem as restrições impostas com grande redução no volume.

## ABSTRACT

“Topology Optimization of Trusses and Frames with Buckling and Compliance Constraints”

This work presents a methodology for structural optimization of trusses and frames. The approach adopted is topology optimization; the optimal structure is searched from a ground structure. This initial ground structure is generated by a computer program where the structural elements connect all nodes within a given neighborhood. This work uses from the first to fourth order neighborhood; the number of elements increases with this order.

Bar and beam elements are used, and the design variables are the cross sectional area of each element. Bound constraints are defined for the design variables, from a minimum of 0.001 to the maximum of 0.5.

Three different problems are considered: minimizing volume with compliance constraint, minimizing volume with stability (buckling) constraint, and minimizing volume with both compliance and stability constraint.

Sequential Linear Programming (SLP) is used to optimize the structure, demanding a linearization of the objective function and sensitivities through Taylor series expansion. A highlight of this work is the derivation of analytical sensitivities for repeated eigenvalues (with many eigenvectors).

Results show that the methodology developed in this work can successfully obtain structural designs that comply with the constraints with large weight reduction.

# ÍNDICE

	Pág.
1. Introdução.....	1
1.1 Otimização Estrutural.....	1
1.2 Objetivo do Trabalho.....	2
1.3 Estrutura da Dissertação.....	2
2. Revisão Bibliográfica.....	4
2.1 Conceitos Básicos.....	4
2.1.1 Variável de Projeto.....	4
2.1.2 Função Objetivo.....	5
2.1.3 Restrição.....	5
2.2 Revisão Bibliográfica da Sensibilidade e Otimização.....	6
2.2.1 Método de Otimização Estrutural.....	6
2.2.2 Estruturas Discretizadas em barras e vigas.....	6
2.2.3 Sensibilidade da Função de Restrição.....	9
3. Análise Estrutural.....	12
3.1 Análise de Estruturas Discretizadas.....	12
3.1.1 Método da rigidez.....	12
3.1.2 Estabilidade Estrutural.....	13
3.2 Energia de Deformação em Elementos de Estruturas Discretizadas.....	14
3.2.1 Treliça.....	14
3.2.2 Pórtico.....	17
4. Análise de Sensibilidade.....	21
4.1 Determinação da Derivada da Função Objetivo.....	21
4.2 Determinação do Gradiente para Flexibilidade.....	22
4.3 Determinação do Gradiente para Flambagem por Método Analítico.....	23
4.3.1 Determinação da sensibilidade para autovalores e autovetores simples.....	23
4.3.2 Derivada Segunda.....	26
4.3.3 Determinação da Sensibilidade para Autovalores Repetidos.....	27
4.3.4 Obtenção da Derivada de Autovalores Simples ou Duplos.....	34
4.3.2 Determoinação do gradiente para flambagem por Diferenças Finitas à Frente.....	38
5. Formulação do Problema de Otimização Estrutural.....	40
5.1 Otimização Estrutural.....	40

5.2	Definição do Universo de Barras. . . . .	42
5.2.1	Conectividadee com todos os nós . . . . .	43
5.2.2	Conectividade Somente com os Nós Vizinhos. . . . .	45
5.3	Formulação do Problema . . . . .	46
5.4	Programação Matemática Linear Seqüencial. . . . .	48
6.	Resultados. . . . .	51
6.1	Elemento de Viga. . . . .	51
6.2	Elemento de barra . . . . .	59
7.	Conclusões. . . . .	69
7.1	Sugestões para Trabalhos Futuros. . . . .	70
	Referências Bibliográficas. . . . .	71
	Apêndice A. . . . .	77

## LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal	[m <sup>2</sup> ]
B	Matriz n × n	
C	Constantes	
D	Matriz n × n real	
E	Módulo de elasticidade	[N/m <sup>2</sup> ]
f	Vetor de força	[N]
F	Trabalho externo	[Nm]
g	Aceleração da gravidade	[m/s <sup>2</sup> ]
g <sub>j</sub>	Restrição de desigualdade	
h <sub>k</sub>	Restrição de igualdade	
I	Matriz identidade	
K	Matriz de rigidez global	[N/m]
k <sub>c</sub>	Matriz de rigidez local	[N/m]
k <sub>g</sub>	Matriz de rigidez geométrica local	[N/m]
K <sub>g</sub>	Matriz de rigidez geométrica global	[N/m]
l <sub>i</sub>	Comprimento de cada elemento	[m]
L	Comprimento	[m]
P	Força axial	[N]
Q	Matriz de rotação	
s	Deslocamento na direção x	
u	Vetor de deslocamento	
ut	Autovetor	
u <sub>1</sub>	Primeiro autovetor	
u <sub>2</sub>	Segundo autovetor	
U	Energia de deformação	
v	Deslocamento na direção y	
V	Volume total	[m <sup>3</sup> ]
w	Função objetivo	
X	Autovetor à direita	
Y	Autovetor à esquerda	
Z	Combinação linear dos autovetores	
α	Multiplicador do primeiro autovetor	



$\beta$	Multiplicador do segundo autovetor
$\gamma$	Densidade
$\lambda$	Autovalor
$\iota$	Fator de correção
$\varepsilon$	Deformação
$\sigma$	Tensão
$\phi$	Combinação linear dos autovetores

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
3.1 Elemento de barra. . . . .	15
3.2 Elemento de viga. . . . .	17
5.1 Exemplo de primeira vizinhança. . . . .	44
5.2 Exemplo de segunda vizinhança. . . . .	45
5.3 Exemplo de terceira vizinhança. . . . .	46
5.4 Exemplo de quarta vizinhança. . . . .	47
6.1 Estrutura otimizada – coluna. . . . .	52
6.2 Primeiro e segundo modo de flambagem da coluna. . . . .	53
6.3 Gráfico de convergência do volume para coluna. . . . .	53
6.4 Gráfico de convergência de autovalores para coluna. . . . .	54
6.5 Malha de vizinhança de primeira ordem de uma torre. . . . .	54
6.6 Estrutura otimizada – torre com caso de carregamento simples. . . . .	55
6.7 Primeiro e segundo modo de flambagem para torre com um caso de carregamento simples. . . . .	56
6.8 Gráfico de convergência do volume para torre com um caso de carregamento simples. . . . .	56
6.9 Gráfico de convergência do autovalor para torre com um caso de carregamento simples. . . . .	56
6.10 Estrutura otimizada – torre com múltiplos casos de carregamento. . . . .	57
6.11 Primeiro e segundo modo de flambagem para torre com múltiplos casos de carregamento. . . . .	57
6.12 Gráfico de convergência do volume para torre com múltiplos casos de carregamentos. . . . .	58
6.13 Gráfico de convergência do autovalor para torre com múltiplos casos de carregamento. . . . .	58
6.14 Malha de primeira vizinhança com o tamanho de 8 por 5. . . . .	60
6.15 Estrutura otimizada – viga – malha de primeira vizinhança. . . . .	61
6.16 Malha de segunda vizinhança com o tamanho de 8 por 5. . . . .	61
6.17 Estrutura otimizada – viga – malha de segunda vizinhança. . . . .	62
6.18 Malha de terceira vizinhança com o tamanho de 8 por 5. . . . .	62
6.19 Estrutura otimizada – viga – malha de terceira vizinhança. . . . .	63
6.20 Malha de quarta vizinhança com o tamanho de 8 por 5. . . . .	63
6.21 Estrutura otimizada – viga – malha de quarta vizinhança. . . . .	64
6.22 Malha de segunda vizinhança com o tamanho de 20 por 20. . . . .	64

6.23	Estrutura otimizada – viga - um caso de carregamento na extremidade. ....	65
6.24	Estrutura otimizada – viga – com um caso de carregamento. ....	65
6.25	Malha de segunda ordem de vizinhança – caso da ponte – múltiplos casos de carregamentos. ....	66
6.26	Estrutura otimizada – treliça – ponte. ....	66
6.27	Malha de primeira ordem de vizinhança – torre – caso de carregamento simples. ....	67
6.28	Estrutura otimizada – treliça – torre. ....	67
6.29	Primeiro e segundo modo de flambagem da torre – treliça. ....	68
7.1	Fluxograma do programa. ....	78
7.2	Cálculo da resposta da estrutura (flexibilidade) ....	79
7.3	Cálculo da resposta da estrutura (flambagem) ....	79
7.4	Etapas do procedimento de otimização utilizado neste trabalho. ....	80
7.5	Determinação dos limites móveis. ....	80

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Otimização estrutural

Nos dias atuais, a competitividade é cada vez mais necessária, ressaltando a importância de projetos ótimos e viáveis para produção de produtos. Vários projetos da área de engenharia atingiram o ótimo aperfeiçoamento no decorrer dos anos, devido à evolução e experiência adquirida na solução de certos problemas na área estrutural. Na concepção de uma nova estrutura, busca-se o ótimo, de forma que tenha o menor peso e custo de fabricação, e isto torna-se possível utilizando as ferramentas computacionais, elementos finitos e de otimização. Outro objetivo que se busca com a otimização de uma estrutura é o menor consumo de matéria prima, consequência da pressão para a conservação dos recursos naturais.

O estudo referente à otimização estrutural teve início com Maxwell, 1869, um dos pioneiros na elaboração da primeira teoria sobre o *layout*, buscando em estruturas uniaxiais obter o mínimo volume para um dado carregamento e material. O estudo teve continuidade com Michell, 1904, que aplicou a teoria do layout buscando a ótima conectividade dos elementos entre todos os nós possíveis. Somente quatro décadas atrás, o assunto voltou a despertar o interesse dos pesquisadores, como por exemplo o trabalho publicado por Dorn et al, 1964 para buscar o ótimo layout de um universo de barras.

Muitos trabalhos sobre otimização estrutural têm sido apresentados na área de projeto. De acordo com Kirsch, 1989, o significativo progresso nesta área é o resultado do desenvolvimento na análise estrutural, métodos de otimização, e computadores com uma melhor eficiência. A otimização estrutural combinada com a matemática e a engenharia tem-se tornado uma área com múltiplas aplicações, como aeronáutica, mecânica, civil, nuclear e naval. A pesquisa nesta área tem sido motivada pela competição tecnológica e problemas que apresentavam e apresentam limites ou restrições. Vários livros recentemente foram publicados nesta área [Haftka e Gürdal, 1996, Bendsoe, 1995, Chen, 1992, Arora, 1989, Haug, Choi e Komkov, 1986].

Em projetos estruturais busca-se obter o ótimo resultado, onde as restrições impostas devem ser satisfeitas. Essas restrições podem ser de deslocamento, carga crítica de flambagem, frequência natural, tensão e outras. As restrições são utilizadas juntamente com uma função objetivo ou custo. Um exemplo seria em obter o mínimo peso estrutural de um satélite (função objetivo é o peso) sujeito a restrições tecnológicas e funcionais. A otimização estrutural apresentou um grau de desenvolvimento na área espacial nestes últimos trinta anos, sendo seguido pela área automobilística.

Toda a análise de projeto que busca a solução ótima, tem necessidade de identificar quais serão as variáveis de projeto, pois serão estas responsáveis pela ótima estrutura. Considerando-se o tipo de variáveis de projeto, pode-se agrupar o problema em três diferentes tipos de otimização estrutural: otimização dimensional, de forma e topológica.

Os vários trabalhos publicados na procura do ótimo projeto em relação a estruturas discreti-

zadas, estão relacionados para otimização da seção transversal, e muito menos esforço tem sido voltado para otimização da geometria. A área que tem apresentado um crescimento nestes últimos anos está relacionada à otimização topológica, onde a otimização do layout estrutural (geométrica e topológica) pode melhorar o projeto.

Este trabalho apresenta a otimização de estruturas discretizadas, compostas por barras e vigas, com objetivo obter o mínimo volume da estrutura, tendo como restrições flambagem e flexibilidade. Este tipo de formulação permite a otimização de estruturas, tanto na área automobilística, como aeroespacial. A solução para a ótima estrutura será obtida utilizando-se da programação linear seqüencial, necessitando dos gradientes das funções objetivo e das restrições.

## **1.2 Objetivo do trabalho**

Este trabalho tem como objetivo a otimização de estruturas compostas por vigas e barras. A função objetivo adotada neste trabalho é o volume, e busca-se obter o mínimo desta função, de maneira a reduzir o custo de material, onde as restrições impostas são de flexibilidade e estabilidade estrutural. A seção transversal adotada é circular e maciça, sendo adotado somente para fins de estudo, pois somente é necessário o conhecimento do raio, desta forma facilitou o cálculo do momento de inércia.

Um ponto importante neste trabalho está no desenvolvimento das derivadas, que permite a utilização da programação linear seqüencial. Tanto a derivada da função objetivo (volume) como da flexibilidade são fáceis de ser obtidas. Em se tratando da derivada do autovalor existe a necessidade de distinguir entre autovalores simples e repetidos, pois causa instabilidade na convergência do problema. Apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre a determinação dos gradientes de autovalores e autovetores, desde o ano de 1968 até os dias atuais. As derivadas são obtidas utilizando-se do método analítico direto ou por diferenças finitas à frente.

A partir dos conhecimentos dos conceitos sobre otimização foi implementado o programa, constituído de três partes: a primeira obtém o mínimo volume com restrição de flexibilidade, a segunda com restrição de flambagem global e a terceira com restrição de flambagem e flexibilidade. Os resultados obtidos são tanto para elementos de viga como de barra. Este estudo teve como objetivo maior o desenvolvimento teórico do gradiente de flambagem, não tendo preocupação nas diferentes áreas obtidas nos resultados.

## **1.3 Estrutura da dissertação**

Este trabalho busca apresentar pontos importantes para otimização de estruturas discretizadas. No capítulo 2 apresenta-se conceitos sobre função objetivo, restrição e variável de projeto, como também uma revisão bibliográfica sobre o que existe na área de otimização de estruturas compostas por vigas e barras e sobre o gradiente de autovalor simples e duplo.

O capítulo 3 refere-se sobre a análise de estruturas, compostas por vigas e barras. Nesta seção

é mostrado como obter as matrizes de rigidez e rigidez geométrica local e global.

O próximo capítulo 4 trata sobre a determinação dos valores dos gradientes das funções objetivo e restrições. A derivada da função objetivo (volume) é obtida diretamente, e esta função pode apresentar-se penalizada, sendo obtida também facilmente, da mesma forma a restrição de flexibilidade. No que se refere a derivada de autovalor é apresentado uma formulação para autovalores simples e duplos.

No capítulo 5 trata sobre a otimização estrutural, onde é especificado os tipos de problemas de otimização desenvolvido. O método da programação linear seqüencial é apresentado, juntamente com os tipos de malhas que podem ser construídas para obter a ótima topologia de uma estrutura.

Os capítulos 6 e 7, apresentam respectivamente os resultados de treliça e pórticos, sendo o último capítulo composto da conclusão do trabalho e sugestões.



## 2 Revisão Bibliográfica

### 2.1 Conceitos básicos

O tema otimização estrutural é uma fusão das áreas de Engenharia, Matemática, Ciências e Tecnologia que tem como objetivo a obtenção do projeto (estrutura) com melhor performance. Nesse caso, por estrutura entende-se qualquer sistema cujo objetivo é a transmissão de esforços, sejam eles estáticos ou dinâmicos. A performance está associada, geralmente, a uma grandeza escalar podendo ser dos tipos: mínima massa, mínima flexibilidade, máxima frequência natural crítica, máxima carga crítica de flambagem, mínima tensão de contato entre partes etc.

A otimização estrutural é uma área de estudo que, na sua essência, procura melhorar o desempenho estrutural de componentes ou sistemas mecânicos de maneira sistemática. Assim, primeiramente há a necessidade de identificação das variáveis de projeto que caracterizam um determinado componente. Em seguida, mediante modificações dessas variáveis segundo algum critério, espera-se obter uma melhor solução, dentre as diversas possíveis [Pereira, 2000].

Na otimização estrutural busca através da seleção das variáveis de projeto, limites, condições de contorno e restrições imposta à estrutura para um determinado tipo de carregamento, maximizar ou minimizar a função objetivo, isto é, obter o resultado ótimo. Para uma melhor compreensão os significados de alguns conceitos básicos serão mostrados a seguir.

#### 2.1.1 Variável de projeto

As variáveis de projeto para o problema de otimização estrutural podem consistir do tamanho dos elementos (membros), variáveis que descrevem a configuração estrutural, propriedades mecânicas ou físicas do material, bem como outros aspectos qualitativos para o projeto em questão. A otimização de topologia (modelo no qual se obtém a ótima conectividade entre os elementos) de uma estrutura completa procura dentro de uma região admissível, quais os elementos em que a variável deve tender a zero, e os que devem atingir o valor máximo. O processo de otimização não permite a mudança do comportamento estrutural dentro do processo (mudança de uma estrutura treliçada (esforço axial) para um pórtico (esforços normais e fletor)).

Para otimização estrutural, existem diversas possibilidades de escolha da variável de projeto, como tamanho do elemento, representando a seção transversal da viga ou barra, o momento de inércia ou espessura da placa. Vários artigos foram publicados tendo como variável a seção transversal, devido sua simplicidade, mantendo constante o material e a geometria inicial. As variáveis de projeto serão representadas por  $v_i$ .

Como exemplo pode-se utilizar um caso simples, composto por três elementos de barra, as variáveis de projeto consideradas são as seções transversais ( $v_1, v_2, v_3$ ).

### 2.1.2 Função objetivo

A função objetivo, conhecida também como função custo, trata-se do valor a ser obtido como sendo o mínimo ou máximo no processo de otimização, onde as variáveis de projeto atingem o valor máximo ou mínimo (aproximadamente igual a zero). A função objetivo é uma função escalar da variável de projeto, é designada por  $W(v)$ .

A otimização com mais de uma função objetivo é conhecida como função de multi-critérios. Para problemas de otimização estrutural, o peso, deslocamento, tensão, frequência natural, carregamento de flambagem ou a combinação desses, podem ser usadas como função objetivo.

Utilizando-se do exemplo composto por três barras, o problema será minimizar o peso da treliça e a tensão em seus elementos. Para este exemplo tem-se quatro funções objetivos, a massa e três tensões.

A utilização de funções com multi-critérios normalmente é evitada. Existe duas maneiras diferentes de reduzir o número de funções objetivos, conforme mostrado por Haftka e Gürdal, 1992. A primeira maneira é reduzir todas as funções objetivos por apenas uma. Por exemplo: onde  $m$  é a massa da estrutura e a tensão nas barras é dado por  $\sigma_i$ ,  $i=1,2,3$ . Então a função objetivo poderá ser expressa como:

$$W = \alpha_0 m + \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3 \quad (2.1)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente, que reflete a importância da função objetivo.

A segundo método trata-se em reduzir o número de funções de custo, isto é, selecionar a função objetivo de maior importância, onde as outras são colocadas como limites ou restrições (a função objetivo o peso e a restrição a tensão).

Para a determinação da função objetivo, quando não for claro a função de maior importância, o problema poderá ser solucionado pelo método da programação matemática, chamado otimização de Edgeworth-Pareto, estudado por Haftka e Gürdal, 1992, lidando com múltiplas funções objetivos.

### 2.1.3 Restrição

As restrições são condições impostas ao problema, onde a violação de qualquer uma, corresponderá a uma solução que não se encontra no espaço admissível. Pode atuar como limitação imposta diretamente na variável de projeto ou em um grupo de variáveis (restrição explícita ou restrição lateral), ou pode representar a limitação de quantidades dependendo da variável de projeto (restrição implícita).

A restrição de igualdade, pode ser explícita ou implícita, sendo designada por

$$h_k(v) = 0, \quad i = 1, \dots, n_e \quad (2.2)$$

onde  $n_e$  refere-se ao número de restrições que o problema deverá satisfazer. Na teoria, cada restri-



ção de igualdade é uma oportunidade para se resolver a variável de projeto, mas normalmente isto na prática não é realizado;

A restrição de desigualdade é representada como

$$g_j(v) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_g, \quad (2.3)$$

onde  $n_g$  é o número total de restrições de desigualdade. Esse tipo de restrição é de maior importância para o projeto estrutural na busca do ótimo.

Como exemplo, considera-se a minimização da massa das três barras, sujeito aos limites de tensão. O problema é representado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{mínimo} & W(v) \\ \text{sujeito} & \sigma_i \leq \sigma_{\text{admissível}} \quad i = 1, 2, 3 \end{array} \quad (2.4)$$

## 2.2 Revisão bibliográfica da sensibilidade e otimização

### 2.2.1 Método de otimização estrutural

Estão disponíveis artigos de revisão bibliográfica sobre a otimização estrutural por Venkayya, 1978, Kirsch, 1989, Rozvany, 1995 e Bendsoe, 1995. Nestas revisões comenta-se sobre os métodos usados para obtenção da ótima solução, utilizando-se do método do critério de ótimo ou da programação matemática (programação linear sequencial). Os métodos citados são utilizados para obter a ótima solução para problemas de estruturas contínua ou discretizada. No caso de estrutura discretizada, compostas por barras ou vigas, busca-se sempre a ótima conectividade dos elementos entre todos os nós possíveis, para obtenção da melhor solução. A ótima solução é obtida através da formulação do problema, composto por uma função objetivo e restrições, para o caso da programação matemática é necessário o cálculo do gradiente para as funções objetivo como das restrições. Em se tratando do critério de ótimo, utiliza-se os multiplicadores de Lagrange.

### 2.2.2 Estruturas discretizadas em barras e vigas

A partir deste ponto apresenta-se uma revisão sobre estruturas discretizadas, referindo-se a elementos de barra e viga, que serão utilizados neste trabalho. Esta revisão comenta sobre restrições de tensão, deslocamento, frequência natural, estabilidade estrutural, tendo como função objetivo ou custo, na maioria dos casos peso ou volume. Na resolução desses problemas utilizaram-se o método da programação matemática ou critério de ótimo.

Imai, 1983 realizou um estudo utilizando-se do método dual, para otimização de estruturas de modo que a função objetivo é composta por uma parte que corresponde o peso da mesma e a outra o custo do material, sendo que as restrições foram tensão e deslocamento. Masur, 1984 propôs um trabalho sobre o projeto estrutural ótimo com múltiplas restrições de autovalores. Para o caso onde as restrições são de deslocamento e tensão utilizando-se do método do critério de ótimo, Allwood

e Chung, 1984, formularam o problema de otimização estrutural. O objetivo deste trabalho é obter o mínimo peso da estrutura, tendo como variável de projeto a seção transversal. O método de solução é baseado em Newton-Raphson e aproximação de primeira ordem para ambas as restrições através do método do trabalho virtual. Considerando-se a análise de sensibilidade para um projeto estrutural, Hsieh e Arora, 1984, apresentaram um estudo da resposta estática para um sistema estrutural. Khan, 1984, utilizando o método do critério de ótimo, mostrou uma formulação para a otimização de estruturas, tendo com restrições tensão e deslocamento.

O estudo realizado por Sadek, 1986, trata da otimização dinâmica de estruturas, possuindo como variáveis de projeto o tamanho de cada elemento e a posição de cada nó. O resultado ótimo é obtido quando se obtém o mínimo peso da estrutura, sujeita à restrição de frequência e condições de limites superior e inferior para variável de projeto, tanto da seção transversal como da posição de cada nó. A solução foi obtida através do critério ótimo de Kuhn-Tucker.

Uma eficiente metodologia de otimização estrutural é apresentada por Woo, 1987, onde procura o mínimo peso para uma estrutura sujeita a múltiplas restrições de frequência natural. A técnica utilizada para expansão foi aproximação da restrição híbrida generalizada, utilizando-se somente da primeira ordem da derivada, sendo mais conservativa do que a expansão da série de Taylor. Para o caso de estruturas com respostas não lineares, Wu e Arora, 1999 mostraram um estudo sobre a análise de sensibilidade, envolvendo o uso de um procedimento incremental, considerando restrições de tensão, deformação, deslocamento e estabilidade estrutural.

O artigo de Kumar et al., 1989, apresentou o desenvolvimento da metodologia de otimização para projetos estruturais. O cálculo dos gradientes foi realizado através dos métodos da diferença finitas e semi-analítico, para problemas estáticos e dinâmicos, tendo como restrições tensão e frequência natural. Sadek, 1989, para a otimização de uma estrutura que tivesse o mínimo peso, utilizou o método do critério de ótimo, satisfazendo uma restrição de frequência natural. Cheu, 1989, realizou a análise de sensibilidade e otimização de forma para estruturas não simétricas, sendo o procedimento utilizado para obtenção do ótimo a programação linear seqüencial.

Tseng e Lu, 1990, apresentaram técnicas de otimização utilizando-se de múltiplas funções objetivo, onde a variável de projeto pode ser área, comprimento, espessura, e outras. As restrições adotadas neste trabalho foram: restrição de tensão, deslocamento, flambagem e frequência natural. Considerou-se estas condições também como funções de custo, onde deseja-se minimizar o peso, deslocamento e tensão, maximizar a frequência natural, tomando-se desta forma um problema complexo. A otimização estrutural estudada por Nha et al., 1998, teve como objetivo obter o mínimo peso da estrutura, sujeito à restrição de deslocamento e variável de projeto o tamanho. Para obtenção da ótima estrutura utilizaram-se do método de critério de ótimo.

O trabalho publicado por Gutkowski et al., 1985, propôs uma minimização do peso para uma estrutura em 2D, tendo como restrições tensão, deslocamentos e a seção transversal (área máxima e mínima). A estrutura era composta por barras, sendo utilizado para otimização a condição de Kuhn-Tucker. Para o caso em que se utiliza-se da programação linear seqüencial, o cálculo do gradiente por diferenças finitas foi apresentado por Haftka, 1985, com uma modificação para me-

lhorar o valor da derivada obtida. Os exemplos demonstrados são para casos simples, aplicados para estruturas treliçadas.

O artigo publicado por Tada e Minami, 1993, trata de uma formulação do problema para obter o mínimo peso para uma estrutura treliçada em 3D, tendo como restrições tensão para cargas estáticas e frequência natural especificada para cada módulo. A seção transversal de cada elemento foi otimizada através da programação linear seqüencial, sendo as restrições expandidas através da série de Taylor.

Liebermann et al., 1994, determinou o ótimo layout de uma estrutura tubular no plano e no espaço, através de um universo de barras (ground structure). Para solução do problema foi usado método do critério de ótimo, onde através de várias restrições seguiu-se a norma de projeto alemã DIN 188800.

A otimização topológica de treliças pelos métodos primal ou dual foi apresentado por Beckers e Fleury, 1997. O objetivo deste estudo foi encontrar o ótimo layout para uma estrutura treliçada, partindo de uma estrutura conhecida, estrutura esta formada por um universo de elementos (ground structure), tendo como restrições impostas os limite de volume para as barras e as equações de equilíbrio. Para o caso de carregamento simples e sem considerar o limite de volume das barras, o problema pode ser descrito como um problema de programação linear, tendo como variável de projeto o deslocamento dos nós. Considerando estruturas treliçadas, Kolakowski e Holnichi-Szulc, 1998, determinaram análise de sensibilidade utilizando-se do método da distorção virtual.

O artigo publicado por Achtziger, 1999, considerou o problema para ótima topologia de uma treliça, tendo como restrições tensão e estabilidade local. Observou-se que o controle da restrição de flambagem é altamente complexo, e a força do elemento deve satisfazer as funções nas quais a descontinuidade depende das variáveis de projeto. Essas restrições não garante necessariamente que existirá uma solução para estrutura. Um segundo artigo publicado Achtziger, 1999, trata deste problema, garantido que a solução existe, considerando desta vez as restrições de tensão, flambagem local e esbeltez.

A otimização de estruturas com elementos de viga (viga Bernoulli-Euler e viga Timoshenko) foi estudado por Lajczok, 1987, onde a seção transversal dos elementos são otimizadas. Esse problema aborda três tipos de restrições: restrição de frequência, deslocamento, flambagem local, sendo que no final do trabalho foi apresentado uma comparação entre os diferentes elementos de viga utilizados.

Utilizando-se da aproximação do critério de ótimo, Mcgee e Phan, 1992 formularam um problema para minimização do peso com restrições de múltiplos autovalores (frequência). Neste problema tiveram como variável de projeto a seção transversal dos elementos e indiretamente o momento de inércia, sendo aplicado para obtenção da solução as condições Kuhn-Tucker. Díaz e Kikuchi, 1992, apresentaram a solução de forma e topologia de uma estrutura na qual apresenta-se a maximização da frequência natural, sendo a metodologia baseada no método da homogenização e a representação da forma da estrutura com as propriedades do material.

O trabalho realizado por Chen e Ho, 1992, mostra a análise de sensibilidade para uma viga e



pórtico, utilizando-se do método variacional direto. No que se refere as derivadas do autovalor e autovetor em relação aos parâmetros de projeto foi apresentada por Wang, Huang e Zhang, 1993. O método utilizado foi desenvolvido somente para estruturas discretizadas, sendo que a frequência natural ou modo é maximizado.

### 2.2.3 Sensibilidade da função de restrição

A partir deste ponto da revisão o assunto a ser abordado é sobre a sensibilidade da função de restrição. Adelman e Haftka, 1986, realizaram um estudo sobre análise de sensibilidade em sistemas de estruturas discretizadas. A importância deste estudo está na utilização de métodos da programação matemática em que as derivadas são usadas para encontrar a direção da ótima solução. Nos dias atuais existe um forte interesse na otimização estrutural como um caminho para obter a melhor solução de projetos estruturais, como conseqüência há um grande interesse no estudo de análise de sensibilidade, para tornar os procedimentos computacionais mais eficientes. O artigo publicado por Adelman e Haftka mostrou o cálculo dos gradientes para estruturas modeladas através de elementos finitos (estruturas discretizadas), não realizando uma abordagem sobre modelos de estruturas contínuas. Esta publicação foi baseada em um estudo que começou no ano de 1968 e foi até 1986, abordando quatro tópicos:

- Sensibilidade para respostas estáticas (deslocamento e tensão);
- Sensibilidade de autovalores e autovetores;
- Respostas transientes;
- Derivadas de projeto de ótimas estruturas com relação aos parâmetros de projeto.

O cálculo do gradiente foi realizado pelo método da diferenças finitas ou método analítico que se divide em dois: método direto e método adjunto e o método da função de Green utilizado em respostas transientes.

O estudo sobre gradientes ou sensibilidade de autovalores e autovetores se divide em dois estágios. O primeiro aborda o cálculo da derivada de autovalor simples e no segundo momento a revisão se refere a derivada de autovalores repetidos. A diferença entre as derivadas de autovalores simples e duplos está que a primeira pode ser diferenciada em relação a variável de projeto, enquanto a segunda só pode ser diferenciada direcionalmente, pois um mesmo autovalor possui dois autovetores diferentes, definindo um ou mais auto-espaço.

Esta primeira parte da revisão refere-se a sensibilidade autovalores simples e autovetores, onde Fox e Kapoor, 1968 começaram o estudo sobre o cálculo da sensibilidade de autovalores, que teve início com Jacobi, 1846. A partir deste momento o estudo teve continuidade, incluindo a parte da derivada de autovetores, que foi apresentada por Rogers, 1970, Plaut e Huseyin, 1973, Garg, 1973, Rudissil, 1974 e Nelson, 1976. Este último apresentou uma maneira simplificada do cálculo da derivada de autovetores. Para o problema de autovalores, onde as matrizes apresentam-se de forma generalizada, Cardani e Mantegazza, 1979 apresentaram o estudo sobre derivadas de autovalor e autovetor.

Lin, Wang e Lim em 1996, desenvolveram a derivada de autovalor e autovetor, considerando autovalores simples, isto é, com somente um autovetor associado. O desenvolvimento da sensibilidade através de métodos analíticos é de grande importância para otimização estrutural, pois permite a identificação de sistemas dinâmicos e controle dinâmico, e o desenvolvimento efetivo e métodos eficientes para o cálculo do gradiente tem sido estudado nas última décadas. Para análise de uma estrutura envolvendo problema de autovalores, Nakagiri e Suzuki em 1997 realizaram um estudo, onde o problema foi baseado no método de elementos finitos para análise de sensibilidade.

Thomas et al., 1988, estudaram quatro métodos de calcular a derivada dos modos de vibração (derivada do autovetor) com relação a variável de projeto desejada. Os métodos utilizados foram: método por diferença finitas, método modal, método modal modificado e método de Nelson. Esses métodos foram implementados e testados com duas diferentes estruturas, e verificado a sua eficiência. O estudo realizado por Chen e Ho em 1993, mostraram quatro métodos possíveis de fazer uma análise de sensibilidade, que são: método direto (analítico), por diferença finitas, semi-analítico e por último o método variacional. Como exemplo foi apresentado um caso simples de estrutura (treliça com três barras - no plano).

A análise de sensibilidade para problemas que envolvam vibração ou flambagem, foi estudada por Godoy, Taroco e Feijoo em 1994, onde foram determinadas a primeira e a segunda ordem de derivada, através da perturbação provocada na equação de autovalores. O gradiente calculado para este tipo de problema considerou a existência de autovalores simples. Dois métodos de cálculo do gradiente foram considerados neste trabalho: método direto e método adjunto. Trabalhos incluindo o cálculo da derivada segunda dos autovalores foram publicados por Rogers em 1970, Plaut e Huseyin em 1973, Rudissil em 1974, Miura e Schmit em 1978 e Brandon em 1984.

A partir deste ponto faz-se uma revisão dos trabalhos considerando multiplicidades dos autovetores.

Um método iterativo para otimização de estruturas que tenham autovalores repetidos foi tratado por Choi, Haug e Seong em 1983, tendo como restrições impostas a frequência natural e carga crítica de flambagem. O método desenvolvido para autovalores repetidos não diferenciáveis aparecem em problemas de otimização estrutural, onde o mesmo autovalor possui dois modos diferentes de flambagem ou de vibração. A derivada é considerada válida quando os autovalores e autovetores são diferenciáveis em relação à variável de projeto, sendo esta afirmação verdadeira somente para autovalores simples; no caso de autovalores repetidos não é possível diferenciar em relação a variável de projeto.

Xu et al., 1994, consideraram para um sistema de vibração linear, a existência de autovalores repetidos, determinando desta forma as derivadas dos autovalores e autovetores, através da perturbação deste sistema, isto é, quando existirem autovalores idênticos e com módulos diferentes de vibração. As derivadas foram determinadas também para o caso de autovalores distintos. A derivada de autovetores com autovalores repetidos estudado por Zheng, Ni e Wang em 1998, consideraram um problema de autovalor generalizado. Duas soluções foram propostas, a primeira utilizando-se o método direto e a segunda método modais. Para o problema de otimização topológica de treliças

tendo como restrição o autovalor especificado para vibração, é formulado através da programação semi-definida, este assunto foi estudado por Ohsaki et al.,1999. O algoritmo apresentado é baseado no Algoritmo de Programação Semi-definido(SDPA), no qual utiliza-se de matrizes esparsas, sendo que os gradientes dos autovalores em relação a variável de projeto não tem necessidade de serem calculados, e o SPDA pode ser utilizado para os casos que existam múltiplos autovalores.

Manickarajah, Xie e Steven em 1998, apresentaram a discussão de como encontrar a ótima espessura para uma placa isotrópica, tendo como restrição a carga crítica de flambagem. A sensibilidade foi determinada para os casos de autovalores simples e autovalores duplos. O método utilizado para otimização estrutural foi ESO(evolutionary structural optimization). O estudo sobre autovalores repetidos realizado por Zheng et al., 1998, utilizaram-se do método combinado para o cálculo das derivadas de autovetores, para um problema de autovalores generalizado.

Autovalores repetidos, no qual possuem modos diferentes de flambagem, foram estudados por Ojalvo em 1988, Dailley em 1989, Hou e Kenny em 1992, Song, Han, Chen e Qiu em 1996, Ojalvo e Zhang em 1996. O artigo de maior importância foi publicado por Pedersen em 1999, tratando do problema de autovalores relacionado a frequência de vibrações, onde os valores dos gradientes são obtidos a partir de um plano formado por dois autovetores, mas tendo o mesmo autovalor.

### 3 ANÁLISE ESTRUTURAL

#### 3.1 Análise de estruturas discretizadas

##### 3.1.1 Método da rigidez

Neste trabalho, analisam-se dois tipos de estruturas [Allen e Bulson em 1980]: as estruturas compostas por barras (somente esforços normais) e as compostas por vigas (esforços normais e flexão). Apesar da metodologia ser plenamente aplicável a estruturas tridimensionais, por uma questão de simplicidade, apenas estruturas bidimensionais são consideradas. Cada elemento (barra ou viga) é conectado a dois nós distintos. Aos nós estão associados deslocamentos e cargas ou ações nodais. Aos elementos estão associadas solicitações, que podem ser esforços normais, cisalhantes ou momentos.

Ao estudar-se uma estrutura pelo método da rigidez, assim como em qualquer outro problema de elasticidade, quatro conjuntos de equações devem ser satisfeitos:

- as equações cinemáticas (deslocamentos - deformações, neste caso deformações infinitesimais);
- as equações de compatibilidade, satisfeitas automaticamente para formulações baseadas em deslocamentos;
- as equações constitutivas (neste caso, elasticidade linear isotrópica);
- e as equações de equilíbrio.

As equações cinemáticas e compatibilidade relacionam as deformações da barra com os deslocamentos nodais. Introduzindo estas relações nas equações constitutivas, relacionam as forças nos extremos das barras com os deslocamentos nodais. Introduzindo estas últimas relações nas equações de equilíbrio, obtém-se um conjunto de equações que relacionam forças nodais com deslocamentos nodais. Estas podem ser consideradas como equações de equilíbrio da estrutura expressas em função dos deslocamentos. A solução deste sistema de equações fornece os valores das incógnitas do problema, que são os deslocamentos nodais, de posse dos quais pode obter-se as tensões nos elementos da estrutura, bem como as reações.

Há muitas maneiras de se representar matricialmente o comportamento de uma estrutura. No método da rigidez, estuda-se primeiro o comportamento individual de cada elemento, o que permite estabelecer relações entre as forças de extremo do elemento e os deslocamentos nodais. Estas relações expressas em forma matricial correspondem à matriz de rigidez do elemento. Considerando-se a inter-relação de cada elemento com as demais, obtém-se o sistema global de equações que define o comportamento de toda a estrutura e que nos leva à solução do problema.

Pode-se definir seis etapas fundamentais na solução de um problema pelo método de rigidez por computador:

1. Identificação estrutural;
2. Cálculo da matriz de rigidez do elemento e do vetor de cargas nodais equivalentes;



3. Montagem da matriz de rigidez global e do vetor de cargas global de toda a estrutura;
4. Introdução das condições de contorno;
5. Solução do sistema de equações;
6. Cálculo das forças internas dos elementos.

A identificação estrutural consiste basicamente em manter através de números os nós e os elementos da estrutura. Para isto deve ser selecionado um sistema global de eixos de referência para a estrutura. Este sistema deverá constituir um triedro direto caso a estrutura seja espacial. As coordenadas dos nós são fornecidas com relação a este sistema de eixos.

Os elementos são definidos através da sua conectividade, isto é, da especificação dos nós que cada elemento conecta. A cada elemento está associado um sistema de eixos local, onde todas as grandezas inerentes à barra e à viga estarão referenciadas. Este sistema local fica automaticamente definido através da ordem em que são fornecidos os nós do elemento. O eixo local  $x^l$  coincide com o eixo geométrico da barra, sendo que o sentido positivo é estabelecido do nó inicial (primeiro dos dois nós da conectividade) ao nó final (segundo nó). O eixo local  $y^l$  deverá coincidir com os eixos principais centrais de inércia da seção transversal do elemento.

Além desses parâmetros que definem a geometria da estrutura, deverão ser fornecidos os valores correspondentes ao tipo de material usado na estrutura (módulo de elasticidade), características geométricas da seção transversal dos elementos (área, momento de inércia), definição das cargas e tipo de vinculação externa.

### 3.1.2 Estabilidade estrutural

Na mecânica linear de corpos deformáveis [Brush e Almroth, 1975], os deslocamentos são proporcionais ao carregamento. No que se refere à flambagem da estrutura, existe uma desproporcionalidade no incremento do deslocamento devido a um pequeno incremento de carga. Conseqüentemente, análise de flambagem é um subtópico da mecânica não linear. A não linearidade de corpos deformáveis é um problema geométrico, onde entra a teoria da relação tensão-deformação ou representa a influência das expressões de rotações dos elementos no comportamento estrutural.

Nas estruturas estudadas, estão implícitas três hipóteses fundamentais:

- O material de que é feita a estrutura segue a Lei de Hooke;
- As condições de contorno independem da deformação;
- A geometria da estrutura deformada não difere sensivelmente da geometria não deformada, de modo que as condições de equilíbrio são as mesmas nas duas situações.

A violação de qualquer destas hipóteses introduz uma não linearidade no comportamento do sistema estrutural. Estudam-se os problemas decorrentes da violação da terceira hipótese que correspondem à não linearidade geométrica. A abordagem dos problemas da não linearidade geométrica conduz, como conseqüência, à análise da estabilidade ou cálculo da carga crítica das estruturas. Um caso particular importante de não linearidade geométrica é o constituído por pórticos



quando se deseja levar em conta a interação entre as deflexões provenientes das cargas transversais e as da carga axial atuando nas barras do pórtico. Neste caso a distribuição de momentos fletores nas barras do pórtico é influenciada pelas deflexões transversais, daí decorrendo a não linearidade geométrica.

Pontos de equilíbrio representam configurações de equilíbrio. Para alguns pontos de equilíbrio é estável e para outros é instável. De acordo com o critério dinâmico para a perda de estabilidade, a configuração de equilíbrio é estável se e somente se, for fixado um valor para a carga aplicada. Uma pequena perturbação na configuração resultará na oscilação que são restringidas para uma imediata vizinha de configuração de equilíbrio. Todo o sistema estrutural neste trabalho é tratado como estático e conservativo. A estabilidade de um sistema pode ser determinado baseado no critério conhecido como critério da mínima energia potencial. De acordo com este critério, a estrutura está numa configuração de equilíbrio se a mudança da energia potencial total correspondente for suficientemente pequena. Cinematicamente os deslocamentos admissíveis são positivos (um deslocamento é cinematicamente admissível se as funções de deslocamento satisfizerem certas continuidades e condições de contorno). A carga crítica é definida como uma carga aplicada à estrutura em que o equilíbrio da estrutura falha, esta carga é lentamente incrementada desde zero.

## 3.2 Energia de deformação em elementos de estruturas discretizadas

### 3.2.1 Treliça

Para barras de treliça plana, os deslocamentos nodais considerados são duas translações no plano. Nestes elementos somente existe um tipo de sollicitação nas barras, que no caso é força axial.

A teoria de barras segue basicamente o estudo de elasticidade unidimensional. Considera-se apenas uma dimensão, nas quais as cargas são aplicadas, onde não há acoplamento entre tensões cisalhantes e normais na relação constitutiva. Algumas aproximações são normalmente feitas, especialmente para barras de seção variável.

Seja a barra de treliça da figura 3.1, de seção transversal constante  $A$  e de comprimento  $L$ , referida aos eixos locais,  $x, y$ . Os deslocamentos nodais são indicados na figura. Admita-se para os deslocamentos  $u$  e  $v$ , de um ponto qualquer do eixo da barra, a variação linear da seção.

Portanto,

$$\begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{x}{L} & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Da relação não-linear entre deslocamentos e deformações unitárias obtém-se

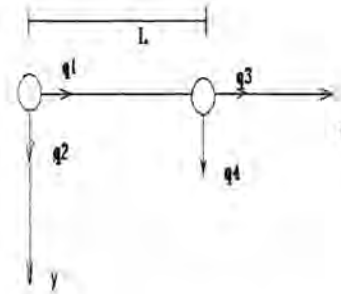


Figura 3.1: Elemento de barra

$$\varepsilon = \varepsilon \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (3.2)$$

Considerando  $u$  e  $v$  da equação 3.1, a equação 3.2 fornece

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{L} (-q_1 + q_3) \quad ; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{L} (-q_2 + q_4) \quad . \quad (3.4)$$

A energia de deformação armazenada na barra (supondo que o material segue a Lei de Hooke) expressa em termos da deformação unitária é

$$U = \frac{AE}{2} \int_0^L \varepsilon^2 dx \quad . \quad (3.5)$$

Introduzindo na equação 3.5  $\varepsilon$ , da equação 3.3:

$$U = \frac{AE}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial s}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 \right] dx \quad . \quad (3.6)$$

Desprezando-se na equação acima o termo de quarta ordem  $\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^4$  e introduzindo as equações 3.3 e 3.4 obtém-se

$$U = \frac{AE}{2L} (q_1^2 - 2q_1q_3 + q_3^2) + \frac{AE}{2L^2} (q_3 - q_1) (q_2^2 - 2q_2q_4 + q_4^2) \quad . \quad (3.7)$$

A força axial  $P$  é

$$P = \frac{AE}{L} (q_1 - q_3) \quad . \quad (3.8)$$

Introduzindo-se o valor de  $P$  da equação 3.8 na equação 3.7 obtém-se

$$U = \frac{AE}{2L} (q_1^2 - 2q_1q_3 + q_3^2) - \frac{P}{2L} (q_2^2 - 2q_2q_4 + q_4^2) \quad . \quad (3.9)$$

A equação acima pode ser escrita matricialmente como

$$U = \frac{1}{2} \{q\} \left( \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \{q\} \quad , \quad (3.10)$$

com

$$\{q\} = \{ q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \} \quad (3.11)$$

De maneira geral, a energia de deformação de um elemento estrutural é expressa por

$$U = \frac{1}{2} \{q\} [k] \{q\} \quad . \quad (3.12)$$

Comparando as equações 3.10 e 3.12 obtém-se

$$[k] = [k_e] - [k_g] \quad , \quad (3.13)$$

com

$$[k_e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

e

$$[k_g] = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (3.15)$$

onde  $[k_e]$  é a matriz de rigidez local do elemento e  $[k_g]$  a matriz de rigidez geométrica local do elemento, na qual leva em conta o efeito da força axial.

Para a obtenção da matriz rigidez e geométrica num sistema global, utiliza-se a matriz de rotação dada por

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad , \quad (3.16)$$

então:

$$K = Q^t k_e Q \quad , \quad (3.17)$$

$$K_g = Q^t k_g Q \quad . \quad (3.18)$$

### 3.2.2 Pórtico

Para elementos de viga no plano, os deslocamentos nodais podem ser duas translações e uma rotação no plano . As solicitações de extremos dos elementos podem ser força axial, cortante e momento fletor.

O desenvolvimento da teoria considera as seguintes hipóteses sobre o seguinte campo de deslocamentos: uma seção transversal qualquer da peça permanece plana, com a mesma forma e perpendicular ao eixo da viga. As tensões máximas ocorrem nas superfícies superior e inferior da peça. Uma inconsistência importante desta teoria visível no tensor é que as tensões cisalhantes são nulas, hipótese que é aceitável em vigas longas.

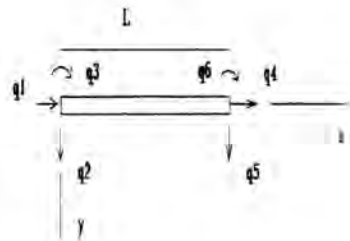


Figura 3.2: Elemento de viga

Considere-se a barra em flexão da figura 3.2, de seção transversal constante, com momento de inércia constante e comprimento  $L$ , referida aos eixos locais  $x$ ,  $y$ , com os deslocamentos nodais indicados. Os deslocamentos  $v$  provenientes de  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_5$ ,  $q_6$  estão relacionados para um caso de um elemento em flexão. Os deslocamentos  $u$  provenientes de  $q_1$  e  $q_4$  são referentes ao elemento de uma barra. Os deslocamentos  $u$  provenientes de  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_5$ ,  $q_6$  são dados pela inclinação  $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$  multiplicada por  $-y$ . Com estas considerações escreve-se, portanto,

$$\begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 6\left(\frac{x}{L^2} - \frac{x^2}{L^3}\right)y & \left(-1 + 4\frac{x}{L} - 3\frac{x^2}{L^2}\right)y & \frac{x}{L} & 6\left(-\frac{x}{L^2} + \frac{x^2}{L^3}\right)y & 2\left(\frac{x}{L} - 3\frac{x^2}{L^2}\right)y \\ 0 & 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} & x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & 0 & 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} . \quad (3.19)$$

A relação não-linear entre deslocamentos e deformações unitárias é, para este caso,

$$\varepsilon = \frac{\partial s_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 , \quad (3.20)$$

sendo  $s_0$  o valor de  $s$  para  $y = 0$ , notando-se que a equação 3.20 corresponde à equação 3.2 da barra da treliça com o acréscimo do termo correspondente à flexão.

A energia de deformação é, neste caso,

$$U = \frac{E}{2} \int_v \varepsilon^2 dV . \quad (3.21)$$

Introduzindo-se  $\varepsilon$  da equação 3.20 na equação 3.21 obtém-se

$$U = \frac{E}{2} \int_v \left[ \frac{\partial s_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dV \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} U = \frac{E}{2} \int_0^L dx \int_A \left[ \left( \frac{\partial s_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 y^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 - 2 \frac{\partial s_0}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y \right. \\ \left. + \frac{\partial s_0}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 y \right] dA . \quad (3.23) \end{aligned}$$

Desprezando o termo de ordem elevada  $\frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^4$  e tendo em vista que  $\int_A y dA = 0$  e  $\int_A y^2 dA = I$  obtém-se, efetuando a interação sobre a área na equação 3.23,

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial s_0}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^L \frac{\partial s_0}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx . \quad (3.24)$$

Da equação 3.19 obtém-se

$$\frac{\partial s_0}{\partial x} = \frac{1}{L} (-q_1 + q_4) ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6 \left( -\frac{x}{L^2} + \frac{x^2}{L^3} \right) q_2 + \left( 1 - 4\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \right) q_3 + 6 \left( \frac{x}{L^2} - \frac{x^2}{L^3} \right) q_5 + \left( -2\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \right) q_6 \quad , \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left( -\frac{6}{L^2} + 12\frac{x}{L^3} \right) q_2 + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) q_3 + \left( \frac{6}{L^2} - 12\frac{x}{L^3} \right) q_5 + \left( -\frac{2}{L} + 6\frac{x}{L^2} \right) q_6 \quad . \quad (3.26)$$

A introdução das equações 3.25 na equação 3.24 fornece, depois de efetuadas as iterações,

$$U = \frac{EA}{2L} (q_1^2 - 2q_1q_4 + q_4^2) + \frac{2EI}{L^3} (3q_2^2 + L^2q_3^2 + 3q_5^2 + L^2q_6^2 + 3Lq_2q_3 - 6q_2q_5 + 3Lq_2q_6 - 3Lq_3q_5 + L^2q_3q_6 - 3Lq_5q_6) + \frac{EA}{L^2} (q_4 - q_1) \left( \frac{3}{5}q_2^2 + \frac{1}{15}L^2q_3^2 + \frac{3}{5}q_5^2 + \frac{1}{15}L^2q_6^2 + \frac{1}{10}Lq_2q_3 - \frac{6}{5}q_2q_5 + \frac{1}{10}Lq_2q_6 - \frac{1}{10}Lq_3q_5 - \frac{1}{30}L^2q_3q_6 - \frac{1}{10}Lq_5q_6 \right) \quad . \quad (3.27)$$

Como no caso de barra de treliça, a força axial é

$$P = \frac{AE}{L} (q_1 - q_4) \quad . \quad (3.28)$$

Introduzindo-se a equação 3.28 na terceira parcela da equação 3.27 e escrevendo esta sob forma matricial obtém-se, tendo em vista as equações 3.12 e 3.13,

$$U = \frac{1}{2} \{q\} ([k_e] - [k_g]) \{q\} \quad , \quad (3.29)$$

sendo

$$\{q\} = \left\{ q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \right\} \quad , \quad (3.30)$$

onde  $[k_e]$  é a matriz de rigidez local e  $[k_g]$  a matriz de rigidez geométrica local.

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad , \quad (3.31)$$

$$[k_g] = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Para a obtenção da matriz rigidez e geométrica num sistema global, utiliza-se a matriz de rotação para dada por

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

onde  $K$  é a matriz de rigidez global

$$K = Q^t [k_e] Q \quad , \quad (3.34)$$

e  $K_g$  é a matriz de rigidez geométrica global

$$K_g = Q^t [k_g] Q \quad . \quad (3.35)$$



## 4 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

O cálculo da sensibilidade é um problema matemático que objetiva obter a solução das derivadas das equações em relação à variável de projeto. Essa análise fornece a informação do gradiente para a otimização estrutural, tornando eficientes as técnicas de otimização. O primeiro passo na análise de uma estrutura complexa é a discretização espacial das equações na forma de elementos finitos, diferenças finitas ou outro modelo matemático. A análise do problema então requer a solução algébrica de equações de equilíbrio (resposta estática), problema de autovalores (flambagem ou vibração) ou equações diferenciais (resposta transiente).

Na otimização de estruturas discretizadas, a partir do valor da derivada é possível a determinação da direção a ser seguida dentro de uma região, sendo esta limitada por restrições e limites. O valor do gradiente é estabelecido pelas equações de restrições impostas. Para o caso de problema real, o maior número de restrições possíveis devem ser consideradas, o que requer por exemplo, a determinação dos seguintes gradientes em relação às variáveis de projeto:

- gradiente de flexibilidade;
- gradiente de flambagem;
- gradiente de frequência;
- gradiente de tensão e outras.

Conforme o problema proposto, o valor da derivada poderá indicar a solução máxima ou mínima do valor da função objetivo ou custo.

Dentre as restrições utilizadas na solução de estruturas discretizadas, o presente trabalho apresenta a demonstração do cálculo de dois gradientes distintos, a sensibilidade de flambagem e a sensibilidade de flexibilidade. O cálculo dessas derivadas é obtido por duas formas diferentes: cálculo por diferenças finitas ou método analítico.

### 4.1 Determinação da derivada da função objetivo

A função objetivo (volume) é uma função direta da variável de projeto e não apresenta maiores dificuldades [Cardoso em 2000]. A relação convexa

$$V = \sum_{i=1}^{ne} v_i l_i \quad ; \quad (4.1)$$

tem derivada

$$\frac{\partial V}{\partial v_i} = l_i \quad , \quad (4.2)$$

onde,  $V$  é o volume,  $l_i$  o comprimento do elemento,  $v_i$  é a variável de projeto, e neste instante representará a área e  $ne$  o número de elementos .

A expressão penalizada do volume (que não é convexa),



$$V = \sum_{i=1}^{ne} v_i^{\frac{1}{n}} l_i \quad , \quad (4.3)$$

também não apresenta maiores dificuldades na obtenção da derivada, resultando em

$$\frac{\partial V}{\partial v_i} = \frac{1}{n} v_i^{\frac{1}{n}-1} l_i \quad . \quad (4.4)$$

## 4.2 Determinação do gradiente para flexibilidade

A derivada do trabalho externo é obtida diretamente do conceito de trabalho externo, ou seja:

$$F = f^t u \quad , \quad (4.5)$$

onde  $f$  é o vetor de força e  $u$  o vetor de deslocamento. Utilizando-se da regra da cadeia obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f^t}{\partial v} u + f^t \frac{\partial u}{\partial v} \quad . \quad (4.6)$$

A derivada da força em relação à variável de projeto depende da natureza da força. Se não forem consideradas forças de corpo, estas derivadas se anulam. Por outro lado, se forem consideradas forças de corpo, na forma

$$f = v l g \gamma \quad , \quad (4.7)$$

onde  $V$  é o volume do elemento,  $g$  é a aceleração gravitacional e  $\gamma$  é densidade. A derivada é direta,

$$\frac{\partial f}{\partial v} = l g \gamma \quad . \quad (4.8)$$

A derivada do deslocamento em relação a variável de projeto é um pouco mais difícil de se obter, pois a relação entre os deslocamentos e as densidades não é direta, pois ambos estão relacionados pela equação de equilíbrio. Assim, derivando a expressão

$$u = k^{-1} f \quad , \quad (4.9)$$

obtem-se

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial k^{-1}}{\partial v} f + k^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \quad . \quad (4.10)$$

A derivada da matriz inversa pode ser obtida pela derivada da relação

$$k k^{-1} = I \quad , \quad (4.11)$$

pela aplicação da regra da cadeia

$$\frac{\partial k}{\partial v} k^{-1} + k \frac{\partial k^{-1}}{\partial v} = 0 \quad , \quad (4.12)$$

lembrando que a matriz identidade não depende da variável de projeto. Isolando a derivada de interesse obtém-se

$$\frac{\partial k^{-1}}{\partial v} = -k^{-1} \frac{\partial k}{\partial v} k^{-1} \quad , \quad (4.13)$$

que pode ser inserida na expressão da derivada do deslocamento, resultando em

$$\frac{\partial u}{\partial v} = -k^{-1} \frac{\partial k}{\partial v} u + k^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \quad . \quad (4.14)$$

Substituindo a expressão da derivada do deslocamento em relação à variável de projeto na expressão de interesse obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial v_i} = 2 \frac{\partial f^t}{\partial v} u - u^t \frac{\partial k}{\partial v} u \quad , \quad (4.15)$$

que apresenta como característica ser de fácil obtenção e ter apenas derivadas locais, ou seja, apenas matrizes locais de cada elemento precisaram ser utilizadas no cálculo do gradiente. Isto decorre do fato de que apenas a matriz de rigidez e o vetor de forças de corpo do elemento dependem da variável de projeto. Derivadas analíticas apresentam vantagens em tempo de processamento e estabilidade sobre procedimentos como diferenças finitas. No entanto, são muito específicas, necessitando de nova dedução a cada mudança de formulação.

### 4.3 Determinação do gradiente para flambagem por método analítico

Neste ítem é apresentada a formulação geral para análise de sensibilidade para problemas que apresentam singularidade, sendo governada por uma equação linear de autovalores. O problema de autovalores pode estar sujeito a restrições lineares ou não lineares. Um exemplo de estrutura são as respostas de vibração livre em componentes estruturais submetidos a carregamentos. Neste caso, a restrição é a equação de equilíbrio, sendo seu sistema constituído por uma matriz de rigidez e uma de massa. Uma outra aplicação são em problemas que envolvam flambagem, e os autovalores representam a condição de bifurcação, a restrição é novamente uma equação de equilíbrio. Outras interessantes aplicações da formulação podem ser encontradas em diferentes campos.

#### 4.3.1 Determinação da sensibilidade para autovalores e autovetores simples

O cálculo da derivada de autovalores relacionado à estabilidade estrutural considera como aproximação inicial a existência de apenas um autovalor, juntamente com seu autovetor, desconsiderando a possibilidade de existir autovalores duplos, que correspondem ao mesmo modo de flambagem ou diferente. Para o caso de autovalores repetidos, que são bem conhecidos e surgem

em problemas de otimização estrutural, a teoria demonstra que os autovalores duplos não são diferenciáveis em relação à variável de projeto, mas somente diferenciáveis direcionalmente. Essa condição de autovalores repetidos causa instabilidade no problema, como pode ser confirmado no capítulo de resultados.

Considerando-se um problema de autovalores:

$$DX = \lambda BX \quad , \quad (4.16)$$

$$Y^t D = \lambda Y^t B \quad , \quad (4.17)$$

$$Y^t B X = 1 \quad , \quad (4.18)$$

onde  $\lambda$  são os autovalores do problema, sendo  $Y$  e  $X$  os autovetores à esquerda e à direita correspondentes, que no nosso caso são os mesmos (idênticos).  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$  reais e não simétricas.

O primeiro resultado obtido para derivada de autovalor foi publicado por Jacobi. O desenvolvimento realizado foi para um caso simples, onde a matriz  $A$  é simétrica e  $B = I$ , onde  $I$  corresponde à matriz identidade, obtendo o seguinte resultado:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = Y^t \frac{\partial D}{\partial v} X \quad , \quad (4.19)$$

onde  $v$  é a variável de projeto.

Considerando que as matrizes  $D$  e  $B$  sejam simétricas e os autovetores à direita e à esquerda coincidentes, Fox e Kapoor em 1968 e Fox em 1971 demonstraram uma expressão para o cálculo da derivada da sensibilidade, como sendo:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = X^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) X \quad , \quad (4.20)$$

$$X_j^t B X_i = \delta_{ij} \quad , \quad (4.21)$$

assume-se que os autovetores são normalizados e que  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

A derivada do autovalor foi estudada por Rogers em 1970, considerando a equação diferencial linear e homogênea com coeficientes constantes, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$Dz' + Bz = 0 \quad , \quad (4.22)$$

assumindo que a solução de  $z$  é:

$$z = X e^{at} \quad . \quad (4.23)$$

Derivando a equação 4.23 e substituindo a mesma dentro da equação 4.22, obtém-se um pro-

blema de autovalores.

$$\alpha_i DX_i + BX_i = 0 \quad , \quad (4.24)$$

Fazendo-se as devidas modificações, o resultado obtido é:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = Y^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) X \quad , \quad (4.25)$$

sendo que a condição de ortogonalidade resulta em:

$$Y_j^t DX_i = Y_j^t BX_i = 0 \quad i \neq j. \quad (4.26)$$

Para o caso onde as matrizes  $D$  e  $B$  são complexas, Garg em 1973 mostrou a solução para o cálculo do gradiente do autovalor e do autovetor. Neste estudo considerou que para cada autovalor existisse um autovetor linearmente independente, pois para o uso desta solução não é admitida a existência de autovalores iguais. Esta formulação pode ser utilizada para dinâmica de estruturas, para estimar a sensibilidade de frequência.

O artigo publicado por Nelson em 1976, trata do cálculo simplificado para derivadas de autovetores, podendo utilizar para sistemas de matrizes simétricas ou não simétricas, associada a cada autovalor em consideração, isto é, não poderá ocorrer autovalores repetidos. O método de Nelson representa a derivada de autovetor como um somatório de autovetores.

Vanhonacker em 1980, considerou um sistema viscoso amortecido. A partir desta consideração utilizando-se do método adjunto, obteve a sensibilidade do autovalor, para um único autovetor correspondente.

Exemplos de aplicação das derivadas de autovalor e autovetor, para autovalores não repetidos, foram realizadas por Fox e Kapoor em 1970, usando-se de estruturas discretizadas, com restrição de frequência.

Choi, Haug, Seong em 1983, partindo da equação 4.16, obtiveram a equação de derivada para autovalores simples, isto sendo para primeira parte do problema, expressa pela equação 4.20. Este cálculo da derivada de autovalores foi utilizado para otimização de estruturas, sujeitas tanto à restrição de flambagem como de frequência, onde a matriz  $D$  é a matriz de rigidez e a  $B$  é a matriz de rigidez geométrica ou de massa.

Demonstrando como realizar a análise de sensibilidade para um sistema de estrutura discretizada, Adelman e Haftka em 1986, realizaram um estudo sobre o cálculo da derivada de autovalores e autovetores em relação a uma variável de projeto ( $v$ ), utilizando do método adjunto e do método direto. A equação demonstrada neste artigo é 4.20. Para solucionar o problema com múltiplas restrições de frequência, Woo em 1987, baseado no estudo realizado por Fox e Kapoor em 1968, utilizou da equação 4.19, para otimização estrutural de pórticos.

Tada e Minami, em 1993, realizaram o estudo referente a otimização de estruturas treliçadas em 3D, tendo como uma das restrições a frequência natural, sendo que modo de vibração foi



especificado.

A análise de sensibilidade de primeira e a segunda ordem para problemas de flambagem e vibração foi mostrado detalhadamente por Godoy e Feijoo em 1994, partindo de uma equação de autovalores, em que o problema apresenta singularidade. Os valores das derivadas primeira e segunda ordem são obtidas a partir de uma técnica de perturbação. Esta solução foi deduzida pelo método direto e adjunto.

A resolução do problema para o caso de autovalores simples também foi mostrado por Haftka e Gürdal em 1992, partindo da equação 4.16, que pode ser utilizada para análise de flambagem ou de frequência natural. As matrizes  $D$  e  $B$  da equação 4.16 são respectivamente matrizes de rigidez, matriz de massa ou de rigidez geométrica. No caso de estabilidade estrutural o autovalor ( $\lambda$ ) se refere ao carregamento crítico de uma estrutura e o autovetor o módulo de flambagem. A equação 4.21 é válida para problemas de frequência natural, pois para o caso de flambagem, esse valor é menor do que um, então a expressão obtida é:

$$\frac{d\lambda}{dv} = \frac{X^t \left( \frac{dD}{dv} - \lambda \frac{dB}{dv} \right) X}{X^t B X}, \quad (4.27)$$

Lin, Wang e Lim em 1996, realizaram o estudo sobre as derivadas de autovalores e autovetores. Os autovalores são obtidos da mesma forma que Haftka e Gürdal em 1992. Para o caso do gradiente do autovetor, expressaram como uma combinação linear de todos os autovetores do sistema.

Na otimização de placas para resistência à flambagem, Manickarajah e Steven em 1998, utilizaram da derivada de autovalor, expressada por Haftka e Gürdal em 1992. Este conhecimento foi aproveitado para o estudo da evolução do método de otimização para placas sujeitas a resistência de flambagem.

### 4.3.2 Derivada segunda

Alguns métodos de otimização requerem também a derivada segunda do autovalor. Plaut e Huseyin em 1973 realizaram o estudo sobre o cálculo da segunda derivada de autovalores, baseado no artigo publicado por Rogers em 1970. Para obtenção desta equação é realizado a derivada segunda da equação 4.25 e a utilização da derivada do autovetor.

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} = \frac{Y^t \left( \frac{\partial^2 D}{\partial v^2} - \frac{2\partial \lambda \partial B}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial^2 B}{\partial v^2} \right) X + 2Y^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} B - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) \frac{\partial X}{\partial v}}{Y^t B X}, \quad (4.28)$$

O estudo realizado sobre a derivada de segunda ordem por Plaut e Huseyin em 1973 e Rogers em 1970, teve continuidade por Rudissil em 1974, propondo um novo método de calcular o valor do gradiente de autovetores. Se todos os autovalores são distintos, então existe  $n$  autovetores linearmente independentes.

A pesquisa sobre derivada segunda de autovalores teve continuidade com Miura e Schmit em 1978, abordando o caso em que as matrizes  $D$  e  $B$  são simétricas (a matriz  $D$  se refere a rigidez e a matriz  $B$  a massa). A equação 4.16 foi diferenciada duas vezes, obtendo-se:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial v_k \partial v_j} = \frac{1}{X_i^t M X} \left[ -\frac{\partial \lambda}{\partial v_k} T_j^{(i)} - \frac{\partial \lambda}{\partial v_j} T_k^{(i)} + X_i^t \frac{\partial F_i \partial X_i}{\partial v_k \partial v_j} + X_i^t \frac{\partial F_i \partial X_i}{\partial v_j \partial v_k} \right] , \quad (4.29)$$

onde:

$$T_j^i = X_i^t B X_j , \quad (4.30)$$

$$F_i = (D - \lambda B) , \quad (4.31)$$

Os autovetores são ortonormalizados para  $B$ , então utiliza-se a equação 4.21 para simplificação da equação 4.28. Foi assumido que os dois últimos termos da equação 4.28 são muito menores do que os dois primeiros termos desta equação, fisicamente, os dois últimos termos representam a influência do módulo da primeira derivada dentro da segunda derivada associada ao autovalor. Aproximação da matriz Hessiana, apresenta-se como:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial v_k \partial v_j} = -\frac{1}{X_i^t B X} \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial v_k} T_j^{(i)} + \frac{\partial \lambda}{\partial v_j} T_k^{(i)} \right] , \quad (4.32)$$

sendo facilmente calculada, mas esta aproximação é somente utilizada quando os modo não modificarem a forma do projeto original, isto é, somente poderá ativar o primeiro modo (vibração ou flambagem). Este artigo trata especificamente da otimização de frequências naturais.

Brandon em 1984, demonstrou o cálculo da primeira e da segunda derivada para autovalores através do método da perturbação, sendo necessário a obtenção da primeira derivada do autovetor. Este problema se refere a um sistema dinâmico conservativo.

### 4.3.3 Determinação da sensibilidade para autovalores repetidos

A obtenção do gradiente dos autovalores com relação aos parâmetros de projeto é extremamente importante, pois através desses torna-se possível a modificação do projeto. A situação de autovalores repetidos ou idênticos com diferentes modos, ocorre em muitas situações físicas. Para este caso, o estudo somente teve início na década passada.

Ojalvo em 1988, estudou o caso em que ocorre autovalores idênticos; se  $\lambda_i$  é um autovalor repetido, existirá um autovetor  $X_i$ , ( $j=i$ ,  $i=1, \dots, i+m$ ), então a combinação linear  $X_i$  será um autovetor, expresso da seguinte forma:

$$Z_i = \sum_i^{i+m} \alpha_j X_j , \quad (4.33)$$

onde  $\alpha_j$  é um parâmetro completamente arbitrário, sendo obrigatoriamente  $\alpha^t \alpha = 1$ . Assumindo-se a seleção arbitrária de  $X_1$  e  $X_2$ , e provocando-se uma perturbação  $\delta$  na direção relativa dos cossenos diretores de  $X_1$  e  $X_2$ , obtém-se  $\alpha_j$  e  $(1 - \alpha_j)^{\frac{1}{2}}$ , então tem-se:

$$Z_1 = \alpha_1 X_1 \quad , \quad (4.34)$$

O gradiente do autovetor para a equação  $Z$  :

$$(D - \lambda B) \frac{\partial Z}{\partial v} = F_i(\lambda_i, Z_i) \quad , \quad (4.35)$$

onde:

$$F_i(\lambda_i, Z_i) = - \left( \frac{\partial D - \lambda_i B}{\partial v} \right) Z_i \quad . \quad (4.36)$$

Realizando-se as devidas manipulações matemáticas obtém-se o gradiente do autovalor, conforme mostrado:

$$E\alpha = \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} \alpha \quad , \quad (4.37)$$

onde:

$$E = X^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda_i \frac{\partial B}{\partial v} \right) X \quad . \quad (4.38)$$

No desenvolvimento realizado por Ojalvo em 1988, considerou-se que todas as equações redundantes fossem eliminadas e substituídas por equações independentes, sendo baseado no método de Nelson. Fazendo-se as devidas substituições na equação de  $F_i(\lambda_i, Z_i)$ , a forma final é dada por  $\overline{F}_i(\lambda_i, Z_i)$ , então a expressão obtida para o valor da sensibilidade de autovetor é expressa da seguinte forma:

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = V_j + \sum_{k=i}^{i+m} C_{jk} Z_k \quad j = i, i+1, \dots, i+m \quad . \quad (4.39)$$

Então, a solução de

$$\overline{(D - \lambda_i B)} V_j = \overline{F}_j \quad , j = i, i+1, \dots, i+m. \quad (4.40)$$

A obtenção do valor de  $C_{jj}$  é dada pelas seguintes expressões:

$$C_{jj} = b_{jj} - Z_j^t B V_j \quad , \quad (4.41)$$

com

$$b_{jj} = -\frac{1}{2} Z_j^t \frac{\partial B}{\partial v} Z_j \quad , \quad (4.42)$$

para obtenção dos valores de  $C_{jk}$  as expressões são:

$$C_{jk} = b_{jk} - V_j^t B Z_k \quad , \quad (4.43)$$

com

$$b_{jk} = -\frac{1}{2}Z_k^t \frac{\partial B}{\partial v} Z_j \quad . \quad (4.44)$$

As quatro últimas equações tem forma idênticas, mas será notado que  $b_{kj} = b_{jk}$ ,  $C_{kj} \neq C_{jk}$ .

O estudo sobre a derivada de autovetores com autovalores repetidos para matrizes simétricas foi estudado por Dailey em 1989, baseado no artigo publicado por Ojalvo em 1988. Utilizando-se do novo método, os elementos fora da diagonal da matriz  $C$ , podem ser determinado pela dupla diferenciação da equação 4.16, combinando os termos, multiplicando por  $Z^t$  e utilizando-se as expressões  $Z^t(D - \lambda B)$  e  $Z^t B Z = I$ , obtendo-se:

$$Z^t \left( \frac{\partial^2 D}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial^2 B}{\partial v^2} \right) Z + 2Z^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) \frac{\partial Z}{\partial v} - 2Z^t \frac{\partial B}{\partial v} Z \frac{\partial \Lambda}{\partial v} - 2Z^t M \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial \Lambda}{\partial v} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^2} \quad . \quad (4.45)$$

onde  $\Lambda = \lambda I$ ; agora expandindo com  $\frac{\partial Z}{\partial v} = V + ZC$ :

$$\begin{aligned} Z^t \left( \frac{\partial^2 D}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial^2 B}{\partial v^2} \right) Z + 2Z^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) V + 2Z^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) ZC \\ - 2Z^t \frac{\partial B}{\partial v} Z \frac{\partial \Lambda}{\partial v} - 2Z^t B V \frac{\partial \Lambda}{\partial v} - 2Z^t B Z C \frac{\partial \Lambda}{\partial v} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^2} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.46)$$

Utilizando-se das relações:

$$Z^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) Z = Z^t \left[ B Z \frac{\partial \Lambda}{\partial v} - (D - \lambda B) \frac{\partial Z}{\partial v} \right] = \frac{\partial \Lambda}{\partial v} \quad , \quad (4.47)$$

$$Z^t B Z = I \quad . \quad (4.48)$$

Chega-se a expressão:

$$\begin{aligned} Z^t \left( \frac{\partial^2 D}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial^2 B}{\partial v^2} \right) Z + 2 \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v} C - C \frac{\partial \Lambda}{\partial v} \right) - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^2} + 2Z^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) V \\ - 2Z^t \frac{\partial B}{\partial v} Z \frac{\partial \Lambda}{\partial v} - 2Z^t B V \frac{\partial \Lambda}{\partial v} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$C \frac{\partial \Lambda}{\partial v} - \frac{\partial \Lambda}{\partial v} C + 0.5 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^2} = Z^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) V \quad , \quad (4.50)$$

$$-Z^t \left( \frac{\partial B}{\partial v} Z + M V \right) \frac{\partial \Lambda}{\partial v} + 0.5 Z^t \left( \frac{\partial^2 D}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial^2 B}{\partial v^2} \right) Z \equiv R \quad , \quad (4.51)$$



$$r_{ij} = \begin{cases} c_{ij} \left( \frac{\partial \lambda_j}{\partial v} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} \right) & j \neq i \\ 0.5 \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial v^2} & j = i \end{cases} \quad (4.52)$$

A determinação de  $c_{ij}$  é representado pela equação acima, se  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial v} \neq \frac{\partial \lambda_j}{\partial v}$ . Para  $i = j$ ,  $c_{ij}$  é dado por:

$$C + C^t = Q \quad , \quad (4.53)$$

sendo que

$$c_{ij} = 0.5q_{ij} \quad . \quad (4.54)$$

Quando as derivadas dos autovalores são repetidas, significa que existe um auto-espaço, não podendo ser separada em  $m$  distintos autovetores. Nesses casos, a derivada do autovetor não é única, sendo contínua no auto-espaço.

A interpretação da derivada do autovetor como sendo não única, ocorre quando existem derivada de autovalores iguais, e a interpretação para esses casos é a mesma de autovetores não únicos, ocorrendo com autovalores repetidos. No caso de autovalores repetidos, a combinação linear desses autovetores, é também um autovetor, se for satisfeito a condição  $Z^t B Z = 1$ . O valor do gradiente do autovetor é:

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = V + ZC \quad . \quad (4.55)$$

Observa-se que a sensibilidade do autovetor,  $\left( \frac{\partial Z}{\partial v} \right)$ , depende da segunda derivada de  $\frac{\partial^2 D}{\partial v^2}$  e  $\frac{\partial^2 B}{\partial v^2}$ , esses termos estão presentes na expressão de  $R$ . Dailey em 1989, concluindo que a segunda derivada influencia a primeira derivada de autovetor, como é igualmente verdadeiro que a primeira derivada afeta os autovetores.

Em certos casos a segunda derivada de  $D$  e  $B$  será zero. Como exemplo, no caso de uma viga, escolhendo como variável de projeto a seção transversal, densidade, momento de inércia ou módulo de Young, mas se a variável de projeto a ser escolhida for o comprimento, a segunda derivada de  $D$  e  $B$ , não será zero.

Hou e Kenny em 1992, apresentaram um método para análise aproximada de autovalores e autovetores, em presença de autovalores repetidos, e um método alternativo para equação de sensibilidade de autovetores. O método desenvolvido para análise da aproximação envolve a reparametrização das variáveis de projeto, sendo um valor positivo.

Nos casos em que os autovalores são repetidos, normalmente é difícil diferenciá-los, esta afirmativa pode ser melhor explicado pela investigação das diferenças entre um problema de autovalores simples e repetidos:

- a primeira e mais fundamental diferença é que a combinação linear dos autovetores, também será um autovetor;

- a segunda diferença é relacionada com a deficiência da matriz  $(D - \lambda B)$ , se autovalores repetidos ocorrem com uma frequência  $m$ , então a matriz estará deficiente de  $m$  linhas e colunas, onde  $D$  é a matriz de rigidez e  $B$  a matriz de massa.

As equações da derivada dos autovalores e autovetores apresentadas por Hou e Kenny em 1992, foram baseadas na equação abaixo apresentada:

$$(D - \lambda B) \phi_i = 0 \quad , \quad (4.56)$$

onde:

$$\phi_i = X y_i \quad , \quad (4.57)$$

sendo  $\phi$  uma combinação linear dos autovetores,  $X$  uma matriz de duas colunas contendo os valores de  $x_1$  e  $x_2$ , e  $Y$  um vetor com dois valores constantes.

Para o caso onde as derivadas dos autovalores são diferentes, existe duas soluções simples:

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial v} \quad \text{para } y_1 \quad , \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial v} \quad \text{para } y_2 \quad . \quad (4.59)$$

No caso onde os autovalores são idênticos, a derivada dos autovetores pode ser expressa como:

$$(D - \lambda B) \frac{\partial \phi_i}{\partial v} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} B \phi_i - \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) \phi_i \quad . \quad (4.60)$$

A derivada do autovetor pode ser expressa como um somatório arbitrário de  $u_i$  e o produto de duas constantes indeterminadas. A expressão assumi a seguinte forma:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial v} = u_i + c_{i1} \phi_1 + c_{i2} \phi_2 \quad . \quad (4.61)$$

O vetor  $u_i$  deverá ser ortogonal a  $B$ , então:

$$u_i^t B (c_{i1} \phi_1 + c_{i2} \phi_2) = 0 \quad , \quad (4.62)$$

$$u_i^t B \phi_1 = 0 \quad i = 1, 2 \quad ; \quad (4.63)$$

$$u_i^t B \phi_2 = 0 \quad i = 1, 2 \quad ; \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial v} = \phi_i^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) \phi_i \quad . \quad (4.65)$$

A equação 4.60 pode-se escrever como:

$$(D - \lambda B) u_i = \left[ \phi_i^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) \phi_i^t \right] (B \phi_i) - \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) \phi_i \quad (4.66)$$

Utilizando-se das equações 4.63 e 4.64, e o teorema de multiplicador de Lagrange, obtém-se a seguinte expressão:

$$(D - \lambda B) u_i + \mu_{i1} B \phi_{i1} + \mu_{i2} B \phi_{i2} = - \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) \phi_i \quad i = 1, 2 \quad (4.67)$$

A solução da equação acima torna-se trabalhosa, podendo-se então redefinir  $u_i$ , como uma combinação linear de  $v_i$ , sendo expressa como:

$$u_i = V y_i \quad i = 1, 2 \quad (4.68)$$

sendo  $V$  uma matriz  $n$  linhas com duas colunas. Realizando-se as devidas manipulações matemáticas, chega-se aos valores das constantes  $C$ :

$$c_{11} = -\frac{1}{2} \phi_1^t \frac{\partial B}{\partial v} \phi_1 \quad (4.69)$$

$$c_{22} = -\frac{1}{2} \phi_2^t \frac{\partial B}{\partial v} \phi_2 \quad (4.70)$$

$$c_{12} = \frac{\phi_2^t \left( \frac{\partial^2 D}{\partial v} - 2 \frac{\partial \lambda_1 \partial B}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial^2 B}{\partial v^2} \right) \phi_1 + 2 \phi_2^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) u_1}{2 \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial v} \right)} \quad (4.71)$$

$$c_{21} = \frac{\phi_1^t \left( \frac{\partial^2 D}{\partial v} - 2 \frac{\partial \lambda_2 \partial B}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial^2 B}{\partial v^2} \right) \phi_2 + 2 \phi_1^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) u_2}{2 \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial v} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} \right)} \quad (4.72)$$

Existência da condição de ortogonalidade entre os vetores  $\phi_1$  e  $\phi_2$ ,

$$\phi_1^t B \phi_2 = 0 \quad (4.73)$$

deverá também ser satisfeita para as derivadas dos autovetores,  $\frac{\partial \phi_1}{\partial v}$  e  $\frac{\partial \phi_2}{\partial v}$ , isto é, os gradientes dos autovetores deverão preservar a seguinte condição:

$$\frac{\partial \phi_1^t}{\partial v} B \phi_2 + \phi_1^t B \frac{\partial \phi_2}{\partial v} + \phi_1^t \frac{\partial B}{\partial v} \phi_2 = 0 \quad (4.74)$$

então:

$$c_{12} + c_{21} + \phi_1^t \frac{\partial B}{\partial v} \phi_2 \quad (4.75)$$

A análise aproximada para autovalores e autovetores, foi demonstrado por Hou e Kenny em

1992, este método consiste da expansão em série de Taylor, sendo uma aproximação linear,

$$\lambda_i(v^*) \approx \lambda_i(v^o) + \sum \frac{\partial \lambda_i}{\partial v_j} \Delta v_j \quad , \quad (4.76)$$

$$x_i(v^*) \approx x_i(v^o) + \sum \frac{\partial x_i}{\partial v} \Delta v_j \quad , \quad (4.77)$$

onde  $v^*$  e  $v^o$  são as novas variáveis de projeto e  $\Delta v_j$  a variação da variável de projeto  $v_i$ , formulação utilizada para autovalores distintos. Para o caso de autovalores repetidos, a variável de projeto é expressa como:

$$v^* = v^o + \Delta v \quad . \quad (4.78)$$

O problema de autovalores apresenta-se da seguinte forma:

$$D(v^*) x^* = \lambda^* B(v^*) x^* . \quad (4.79)$$

Introduzindo-se  $\epsilon$  na variável de projeto,  $v(\epsilon) = v^o + \epsilon \Delta v$ , sendo então representada a equação de autovalores como:

$$D(v(\epsilon)) = \lambda(\epsilon) B(v(\epsilon)) x(\epsilon) \quad , \quad (4.80)$$

onde  $\epsilon$  é um valor real, entre zero e um. A equação acima poderá ser diferenciada em relação a  $\epsilon$ , com  $\epsilon = 0$ ; observando-se que a equação acima representa um par de autovalores repetidos, para  $\epsilon = 0$ , obtendo-se a seguinte expressão para a derivada do autovalor:

$$(\tilde{D} - \gamma_i \tilde{B}) y_i = 0 \quad , \quad (4.81)$$

onde:

$$\tilde{D} = X^t \left( \frac{\partial D}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) X \quad , \quad (4.82)$$

$$\tilde{B} = I \quad ,$$

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{dD(v^o + \epsilon \Delta v)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon = 0} \quad , \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{\partial D}{\partial v} \Delta v \quad , \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \sum \frac{\partial D}{\partial v} \Delta v \quad , \quad (4.85)$$

similarmente para:

$$\frac{\partial B}{\partial v} = \sum \frac{\partial B}{\partial v} \Delta v \quad . \quad (4.86)$$

A derivada do autovetor  $\frac{\partial \phi}{\partial v_i}$  pode ser definida como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial v_i} = V y_i + c_{i1} \phi_1 + c_{i2} \phi_2 \quad . \quad (4.87)$$

Os valores das constantes são obtidos utilizando-se as equações, com:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial v^2} = \frac{d^2 D(v^o + \epsilon \Delta v)}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon = 0} \quad , \quad (4.88)$$

$$= \sum_{j=1} \sum_{i=1} \frac{\partial^2 D}{\partial v_i \partial v_j} \Delta v_i \Delta v_j \quad , \quad (4.89)$$

e

$$\frac{\partial^2 B}{\partial v} = \sum_{j=1} \sum_{i=1} \frac{\partial^2 B}{\partial v_i \partial v_j} \Delta v_i \Delta v_j \quad . \quad (4.90)$$

Aproximação de primeira ordem do novo autovalor, para  $\epsilon = 1$ , pode ser obtido utilizando expansão da série de Taylor, em relação a  $\epsilon$  com  $\epsilon = 0$ :

$$\lambda_i^* \approx \lambda_i^o + \gamma_i \quad i = 1, 2 \quad , \quad (4.91)$$

e similarmente para os autovetores:

$$\phi_i^* \approx \phi_i^o + \frac{\partial \phi}{\partial v_i} \quad i = 1, 2 \quad . \quad (4.92)$$

#### 4.3.4 Obtenção da derivada de autovalores simples ou duplos

Nesta parte do trabalho será demonstrado a obtenção dos autovalores simples ou duplos. Para o caso de autovalores simples o estudo foi baseado em Godoy e Feijoo em 1994 e Haftka e Gürdal em 1992. A expressão que será obtida abaixo somente servirá para otimização de estruturas que ative somente o primeiro módulo de flambagem, pois se o segundo módulo for ativado, causara instabilidade na convergência do problema.

A partir deste ponto será mostrado o gradiente de autovalor simples utilizado neste trabalho, sendo este baseado no estudo realizado por Haftka e Gürdal em 1996. Considerando-se o problema de autovalores:

$$(k - \lambda kg) ut = 0 \quad , \quad (4.93)$$

onde  $k$  é a matriz de rigidez,  $kg$  é a matriz de rigidez geométrica (poderá ser a matriz de massa



se for um problema de vibração),  $ut$  é autovetor (módulo de flambagem) e  $\lambda$  o autovalor correspondente a carga crítica. As matrizes  $k$  e  $kg$ , são simétricas, e  $k$  será positiva semidefinida, se as condições de contorno não forem consideradas.

Multiplicando-se a equação 4.93 por  $ut^t$  obtém-se

$$ut^t (k - \lambda kg) ut = 0 \quad . \quad (4.94)$$

Derivando-se a equação acima em relação à variável de projeto  $A$ , de forma aplicar a regra da cadeia

$$\frac{\partial ut^t}{\partial A} (k - \lambda kg) ut + ut^t (k - \lambda kg) \frac{\partial ut}{\partial A} + ut^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) = 0 \quad . \quad (4.95)$$

Sabendo-se que os termos

$$\frac{\partial ut^t}{\partial A} (k - \lambda kg) ut = 0 \quad , \quad (4.96)$$

e

$$ut^t (k - \lambda kg) \frac{\partial ut}{\partial A} = 0 \quad , \quad (4.97)$$

desta forma a equação 4.95 pode ser simplificada, podendo ser escrita da seguinte forma

$$ut^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) ut = 0 \quad , \quad (4.98)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A} = \frac{ut^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) ut}{ut^t kg ut} \quad . \quad (4.99)$$

Em relação a equação acima, pode-se normalizar o denominador para que seja um valor unitário, conforme descrito por Manickarajah e Steven em 1998, então

$$ut^t kg ut = 1 \quad , \quad (4.100)$$

e o segundo termo no numerador pode ser desprezado, pois o seu valor comparado com o primeiro termo é muito menor, então a equação 4.99 pode ser expressa da seguinte forma

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A} = ut^t \frac{\partial k}{\partial A} ut \quad . \quad (4.101)$$

A equação acima é utilizada somente para autovalores simples.

O gradiente da sensibilidade para autovalores duplos foi baseado no estudo realizado por Pedersen em 1999, a sensibilidade obtida aqui é utilizada no trabalho. Para autovalores idênticos,  $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ , existem dois autovetores diferentes, para a determinação do gradiente é necessário de-

terminar uma região, sendo representada por um plano, onde busca-se o máximo e o mínimo valor da derivada.

Seja um autovalor  $\lambda$ , que possua dois autovetores diferentes,  $u_1$  e  $u_2$ , então:

$$\{ut\} = \alpha u_1 + \beta u_2 \quad , \quad (4.102)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad . \quad (4.103)$$

Tanto  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u$  devem satisfazer a condição:

$$\{ut\}^t [kg] \{ut\} = 1 \quad , \quad (4.104)$$

$$\{ut\}^t [k] \{ut\} = \lambda \quad . \quad (4.105)$$

Substituindo a equação 4.102 em 4.93, e multiplicando por  $u^t$  obtém-se

$$(\alpha u_1^t + \beta u_2^t) (k - \lambda kg) (\alpha u_1 + \beta u_2) = 0 \quad . \quad (4.106)$$

A equação 4.106 deve ser diferenciada em relação à variável de projeto adotado, para o caso de treliça e pórtico é a seção transversal de cada elemento ( $A$  - área).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\alpha u_1^t + \beta u_2^t)}{\partial A} (k - \lambda kg) (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha u_1^t + \beta u_2^t) (k - \lambda kg) \frac{\partial (\alpha u_1 + \beta u_2)}{\partial A} + \\ & (\alpha u_1^t + \beta u_2^t) \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) (\alpha u_1 + \beta u_2) = 0 \quad . \quad (4.107) \end{aligned}$$

Considerando a condição de singularidade do problema de autovalores, a expressão 4.107 pode ser reduzida, ficando da seguinte forma:

$$(\alpha u_1^t + \beta u_2^t) \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) (\alpha u_1 + \beta u_2) = 0 \quad . \quad (4.108)$$

A expandindo a equação 4.108, tem-se:

$$\left( \alpha u_1^t \frac{\partial k}{\partial A} - \alpha u_1^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg - \alpha u_1^t \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} + \beta u_2^t \frac{\partial k}{\partial A} - \beta u_2^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg - \beta u_2^t \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) \quad (4.109)$$

$$(\alpha u_1 + \beta u_2) = 0 \quad , \quad (4.110)$$

$$\alpha^2 u_1^t \frac{\partial k}{\partial A} u_1 - \alpha^2 u_1^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} u_1 - \alpha^2 u_1^t \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} + \alpha \beta u_2^t \frac{\partial k}{\partial A} u_1^t - \alpha \beta u_2^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_1 - \alpha \beta u_2^t \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} u_1 +$$

$$\alpha\beta u_1^t \frac{\partial k}{\partial A} u_2 + -\alpha\beta u_1^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} u_2 - \alpha\beta u_1^t \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} u_2 + \beta^2 u_2^t \frac{\partial k}{\partial A} u_2 -$$

$$\beta^2 u_2^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_2 - \beta^2 u_2^t \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} u_2 = 0 \quad , \quad (4.111)$$

$$\alpha^2 u_1^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) u_1 - \alpha^2 u_1^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_1 + \beta^2 u_2^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) u_2 - \beta^2 u_2^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_2 +$$

$$\alpha\beta \left( u_2^t \frac{\partial k}{\partial A} u_1 + u_1^t \frac{\partial k}{\partial A} u_2 - u_2^t \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} u_1 - u_1^t \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} u_2 \right) +$$

$$-\alpha\beta \left( u_2^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_1 - u_1^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_2 \right) = 0 \quad , \quad (4.112)$$

$$\alpha^2 u_1^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) u_1 + \beta^2 u_2^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) u_2 +$$

$$\alpha\beta \left( u_2^t \frac{\partial k}{\partial A} u_1 + u_1^t \frac{\partial k}{\partial A} u_2 - u_2^t \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} u_1 - u_1^t \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} u_2 \right)$$

$$= \alpha^2 u_1^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_1 + \beta^2 u_2^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_2 + \alpha\beta \left( u_2^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_1 - u_1^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_2 \right) \quad , \quad (4.113)$$

$$\alpha^2 u_1^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) u_1 + \beta^2 u_2^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) u_2 +$$

$$\alpha\beta \left[ u_1^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) u_2 + u_2^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) u_1 \right] =$$

$$\alpha^2 u_1^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_1 + \beta^2 u_2^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_2 + \alpha\beta \left( u_2^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_1 - u_1^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_2 \right) \quad , \quad (4.114)$$

$$\alpha^2 u_1^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) u_1 + \beta^2 u_2^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) u_2 + 2\alpha\beta u_1^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) u_2 =$$

$$\alpha^2 u_1^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_1 + \beta^2 u_2^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_2 + 2\alpha\beta u_1^t \frac{\partial \lambda}{\partial A} kg u_2 \quad . \quad (4.115)$$

Considerando-se que:

$$g_{nm} = u_n^t \left( \frac{\partial k}{\partial A} - \lambda \frac{\partial kg}{\partial A} \right) u_m \quad n = m = 1, 2 \quad . \quad (4.116)$$

Simplificando-se a equação 4.115 através da utilização da expressão 4.116, tem-se:

$$\alpha^2 g_{11} + \beta^2 g_{22} + 2\alpha\beta = \left[ \alpha^2 u_1^t k g u_1 + \beta^2 u_2^t k g u_2 + 2\alpha\beta u_1^t k g u_2 \right] \frac{\partial \lambda}{\partial A} \quad . \quad (4.117)$$

Sendo que os vetores  $u_1$  e  $u_2$  são ortogonais entre si, fazendo-se uso da equação 4.104, então:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A} = \alpha^2 g_{11} + \beta^2 g_{22} + 2\alpha\beta g_{12} \quad . \quad (4.118)$$

De maneira obter-se os valores máximos e mínimos para o caso que envolvam autovalores duplos, deve-se derivar a equação 4.118 em relação a  $\alpha$  e  $\beta$  e igualando-se a zero, obtém-se:

$$2\alpha g_{11} + 2\beta g_{12} = 0 \quad , \quad (4.119)$$

$$2\beta g_{22} + 2\alpha g_{12} = 0 \quad , \quad (4.120)$$

A partir do sistema de equações acima, monta-se uma matriz que contenha os valores de  $g_{nm}$ , determinando os autovalores corresponderão ao máximo e mínimo valores do gradiente.

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad (4.121)$$

#### 4.3.5 Determinação do gradiente para flambagem por diferenças finitas à frente

Uma técnica simples para o cálculo da derivada de autovalores em relação a uma variável de projeto é aproximação por uma diferença finita, [Haftka e Gürdal em 1992]. Este tipo de procedimento é computacionalmente caro, mas de fácil implementação e por isso muito popular. O método analítico foi apresentado neste capítulo, podendo ser verificado a sua resposta através da diferença finita. Nesta seção é discutida a obtenção do gradiente pelo método da aproximação por diferenças finitas.

Aproximação por diferenças finitas pode ser de primeira ordem ou de segunda ordem. Ordens mais altas também podem ser empregadas, mas são raramente utilizadas em aplicações de otimização estrutural, por demandarem um alto custo computacional.

Conforme Adelman e Haftka em 1986, a análise de sensibilidade para respostas estáticas, o método por diferenças finitas quase sempre é inferior ao método analítico. Para os casos nos quais calcula-se a derivada para respostas transientes, isto nem sempre ocorrerá. Quando métodos explícitos são usados para integrar a equação diferencial, a linearidade das equações de sensibilidade não constitui uma vantagem computacional. Para os casos de integração explícita, aproximação

por diferença finitas é freqüentemente superior computacionalmente do que método direto. Quando técnicas de integração implícita são utilizadas, a aproximação por diferenças finitas é menos atrativa computacionalmente mas de fácil implementação do que aproximação direta.

Falhas neste tipo de processo ocorrem devido ao tamanho do passo( $\Delta x$ ) a ser selecionado. No caso do tamanho do passo ser grande, ocorrerá erros devido ao truncamento. Esse tipo de erro normalmente aparece quando termos na expansão da série de Taylor são negligenciados, isto é, utilizando somente os termos de baixa ordem. Se o passo selecionado for pequeno, ocorrerá erro devido ao condicionamento, isto é, a diferença entre o cálculo numérico da função e o seu valor exato devido ao arredondamento das operações numéricas.

O gradiente para autovalores apresenta-se da seguinte forma utilizando diferenças finitas:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} \cong \frac{\Delta \lambda}{\Delta v} = \frac{\lambda(v + \Delta v) - \lambda(v)}{\Delta v} \quad (4.122)$$

A expressão acima obtida por diferenças finitas à frente.



## 5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

### 5.1 Otimização estrutural

Para a formulação do problema de otimização estrutural é necessário definir a formulação da análise estrutural, as variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições impostas ao problema. A otimização normalmente não tem uma única solução, sendo que o procedimento é estabelecido pela necessidade e condições de projeto e a construção de um algoritmo eficiente, respeitando as restrições impostas.

Para otimização de estruturas, os métodos mais utilizados são:

- Método da programação matemática;
- Aproximação do critério de ótimo.

O problema de otimização de *layout* para uma estrutura discretizada pode envolver três tipos de variáveis de projeto que são:

- Variável topológica, define um padrão de conexão dos membros ou de número e seqüência espacial dos elementos, pontos e suportes no sistema estrutural;
- Variável geométrica, descrevendo a geometria estrutural (coordenadas nodais);
- Variável de tamanho, representando a dimensão da seção transversal ou tamanho do elementos.

A formulação do problema de otimização pode possuir dois tipos de restrição:

- O primeiro tipo de restrição pode ser em relação ao deslocamento, tensão, frequência natural, carga crítica de flambagem, e outros; podendo ser restrição local ou global.
- O segundo tipo tem-se a restrição de geometria, que pode descrever o número e a direção dos elementos ou a seção transversal dos elementos.

Por causa da complexidade da otimização simultânea da geometria, topologia e da seção transversal, duas classes de problema são freqüentemente considerados na discretização do ótimo *layout*, que são:

- Otimização de geometria, onde as coordenadas nodais e a seção transversal são tratadas como variáveis de projeto, a topologia é usualmente assumida ser fixa, e alguns pontos nodais durante processo da busca do ótimo poderão sumir. Este tipo de assunto não é tratado neste trabalho.

- Otimização topológica, com as áreas da seção transversal como variáveis de projeto e uma malha bastante densa, alguns elementos irão tender a zero, de maneira que podem ser desprezados. Isto é possível devido a alta conectividade existente entre os nós. Há limites superiores e inferiores para as áreas cada elemento, sendo que o limite inferior pode ser igual a zero.

Tanto a variável topológica como a geométrica definem o *layout* da estrutura. Nos problemas de otimização topológica, a geometria e as variáveis topológica são otimizadas simultaneamente, através das variáveis de tamanho de cada elemento de uma malha densa, sendo este procedimento utilizado no trabalho.

O método escolhido para resolver o problema de otimização foi a programação matemática,

pela possibilidade do uso de diversas variáveis de projeto, restrições, funções objetivo e condições de carregamento. Este método é eficientemente utilizado para resolver problemas práticos. O tipo de estrutura escolhida está sujeita somente à aplicação de cargas estáticas e a análise do modelo é elástica. O carregamento estático aplicado pode ser simples ou com múltiplos casos de carregamentos. Com esta última condição pode-se afirmar que a estrutura não se torna um mecanismo e possui uma melhor estabilidade numérica. Neste procedimento, a seção transversal de diferentes elementos é adotada como variável de projeto  $[v]$ , enquanto que o volume estrutural é adotado como função objetivo. O processo de otimização estrutural tem como restrições flexibilidade e flambagem global, sendo que o problema pode ser formulado com a minimização do volume somente com flexibilidade, somente com flambagem, ou com ambas as restrições ao mesmo tempo.

Métodos numéricos são empregados com técnicas de programação matemática, de maneira que através de um processo iterativo busca-se o projeto ótimo. Inicialmente parte-se de uma estrutura cheia (universo de elementos), e o resultado é alcançado através de uma procura sistemática, que termina quando o critério de ótimo for satisfeito, indicando que o projeto satisfaz todas as restrições impostas e atingiu o máximo ou mínimo da função objetivo. A condição de obter a ótima solução para o problema depende especialmente do comportamento e das condições impostas ao projeto estrutural. A otimização estrutural para problemas com restrição de flambagem é complexa, porque o cálculo da carga crítica de flambagem é geralmente um processo que envolve a solução de duas equações, sendo a primeira análise estática e a segunda solução de um problema de autovalores, para cada iteração. Na maioria dos problemas não é garantido que o ótimo global possa ser obtido, neste caso será necessário processar vários casos partindo de pontos diferentes e verificar a resposta obtida através da comparação, mas este procedimento não irá garantir que seja o ótimo global, então considera-se o resultado como sendo um ótimo local. O problema pode não ser convexo, desta forma pode ter mais de uma solução.

Em estruturas discretizadas, onde utiliza-se elementos de barra e viga, a distribuição da seção transversal é frequentemente discretizada em segmentos de estruturas, sendo que a área do elemento pode ser requerida para ser uniforme ou variar linearmente em cada segmento. Neste trabalho a seção transversal dos elementos é constante por elemento, não apresentando variação ao longo do comprimento.

O estudo da otimização topológica de estrutura discretizada baseia-se numa estrutura inicial, conhecida como universo de barras (*ground structure*), no qual ocorre a ótima conectividade dos elementos com todos os possíveis nós. Durante a otimização da estrutura, as áreas de alguns elementos tenderão a zero, mas são elementos que durante o processo de otimização não serão removidos, mas sim desprezados na resposta final do problema. O resultado final da estrutura, cada membro possua valores diferentes de áreas, não se preocupando em utilizar somente as dimensões existente no comércio. Como o estudo realizado nesta dissertação teve como objetivo iniciar o estudo sobre a estabilidade estrutural, não se teve preocupação com os valores das áreas que serão obtidos, podendo variar continuamente dentro de uma faixa previamente estabelecida.

Normalmente a área do elemento não tende a um valor zero, mas sim muito próximo ao mesmo,

pelo simples motivo que este elemento poderá voltar à estrutura durante a otimização, além de facilitar o cálculo do gradiente. A otimização topológica via otimização de tamanho, apresenta boas aproximações da geometria ótima, se o universo de elementos for formado por um número grande de elementos, isto é, possibilitando todas as conectividades possíveis entre os nós.

Dois importantes propriedades nos problemas de otimização topológica são consideradas:

- expressar a função objetivo e as restrições;
- convexidade da função objetivo.

A função objetivo, volume, e a restrição de flexibilidade são funções convexas. Quando o problema de minimização for obter o mínimo volume, tendo como restrição flexibilidade, pode-se afirmar que o resultado obtido é o mínimo global. No problema que envolva a restrição de flambagem, então não se pode garantir que seja o mínimo global, pois esta restrição não é uma função convexa.

A função objetivo pode sofrer uma penalização, sendo expressa da seguinte forma:

$$V = \int lv^{\frac{1}{n}} \quad , \quad (5.1)$$

$$n \geq 1 \quad ,$$

a expressão 5.1 é uma função não convexa para expoentes maiores do que um. A vantagem de utilizar a função objetivo penalizada refere-se em obter as variáveis de projeto no valor máximo ou mínimo, evitando desta forma os valores intermediários.

Assumindo algumas aproximações e simplificações, o problema de otimização pode ser resolvido através da programação linear seqüencial, onde as restrições e as função objetivo são expressas na forma linear. Para encontrar-se o ótimo global, utiliza-se sucessivas iterações de um algoritmo eficiente.

A convexidade do problema garantirá que algum local mínimo representará a ótima solução global para o problema. Este trabalho nas últimas três décadas vem sendo desenvolvido, mas normalmente os problemas de otimização envolvem funções que são não lineares e não convexas. Para uma função não convexa pode-se encontrar vários mínimos locais, sendo que nenhum pode ser afirmado como sendo o mínimo global.

## 5.2 Definição do universo de barras

De acordo com Rozvany em 1995, no projeto topológico, os elementos deveriam poder ser adicionados ou removidos durante o processo e conseqüentemente o modelo de elementos finitos e as variáveis de projeto mudariam. Esse tipo de fenômeno torna-se complexo no processo e pode influenciar na análise; e outra dificuldade encontrada refere-se ao número de elementos, podendo aumentar drasticamente, tornando-se uma estrutura de análise impraticável (a não ser que se limite



o número de elementos existente em uma estrutura).

Na otimização topológica, ambas as variáveis de topologia como de tamanho são simultaneamente otimizadas. Um problema que poderá ocorrer na otimização topológica é que este trabalhe com uma malha fixa. As estruturas discretizadas são geralmente caracterizadas pelo fato que o modelo de elementos finitos da estrutura não é modificado durante o processo de otimização.

Este tipo de aproximação pode apresentar como desvantagem de não se obter o ótimo de uma solução. Um outro problema que pode ser mencionado se refere na obtenção da solução, pois a mesma poderia apresentar um ótimo singular ou local.

O estudo realizado por Rozvany em 1995 e Beckers e Fleury em 1997, a otimização topológica é baseada inicialmente em um universo de elementos, onde obtém-se a ótima conectividade dos elementos, isto é, com todos os possíveis nós. Este tipo de estrutura é uma aproximação discretizada de um universo de barras na busca da solução exata. De acordo com este estudo, as áreas dos elementos poderão tender para zero, e conseqüentemente poderão ser removidas automaticamente da estrutura, de maneira a melhorar a eficiência computacional, isto poderia ser considerado como uma vantagem.

No problema prático de otimização topológica, a estrutura discretizada é caracterizada pelo fato que o modelo de elementos finitos não é modificado durante o processo de otimização. As variáveis de projeto estarão limitadas por um limite superior e outro inferior, sendo que nenhum elemento poderá atingir o valor zero para seção transversal, como é proposto neste trabalho. Para o caso que pudesse adicionar ou eliminar elementos de uma estrutura, a solução para otimização seria mais complicada, isto é, no caso de um elemento atingir o valor zero, a mesma poderia tornar-se um mecanismo. Além disto, haveria o problema da determinação da sensibilidade para um elemento que não exista na estrutura, sendo que a necessidade determinar este gradiente é devido a possibilidade do mesmo poder voltar, problemas relacionados a isto foi estudado por Cheng em 1992.

Dorn, Gomory e Grenberg em 1964 foram os primeiros a utilizar estrutura discretizada contendo um universo de barras. Eles estabeleceram os pontos nodais, onde os elementos gerados poderiam se conectar com alguns pontos ou com todos os pontos possíveis.

### 5.2.1 Conectividade com todos os nós

Quando cada nó da estrutura é conectado com todos os outros, o número de elementos  $m$  é proporcional ao quadrado no número de nós,

$$m \simeq 0.5nt(nt - 1) \quad , \quad (5.2)$$

onde:

$$nt = nx * ny, \quad (5.3)$$

onde  $n_x$  é o número de nós na direção horizontal (comprimento),  $n_y$  é o número de nós na direção vertical (altura) e  $nt$  é o número total de nós. Na prática, o número de elementos não é estritamente igual para  $0.5nt(nt - 1)$ , porque não se pode ter dois ou mais elementos na mesma direção.

A vantagem de utilizar-se um universo de elementos, é que todas as possíveis conectividades podem ser feitas, obtendo-se diferentes direções possíveis. Para obtenção da ótima solução, o resultado fica próximo ou igual ao resultado ideal. Apresentando a desvantagem de ter um número alto de elementos, o tempo computacional torna-se alto e o custo elevado. Na prática o número elevado de elementos dependendo da estrutura, torna-se desnecessário.

### 5.2.2 Conectividade somente com os nós vizinhos

Cada nó da estrutura é conectada somente com o nó vizinho (figura 5.1), desta maneira reduzindo-se o número de elementos, então o número total é dado por:

$$m = 4nt - 3(n_x + n_y) + 2 \quad , \quad (5.4)$$

sendo oito elementos no máximo por nó.

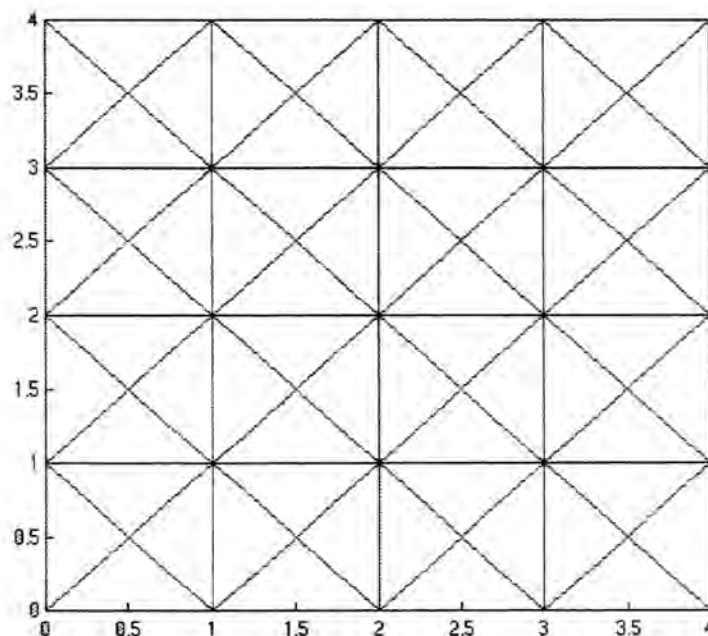


Figura 5.1: Exemplo de primeira vizinhança.

A vantagem é que o número de elementos é linearmente proporcional ao número de nós, isto possibilita considerar uma estrutura com dimensões maiores. A desvantagem será o número reduzido de direções, obtendo-se uma solução inferior ao que poderia ser alcançado com um maior número de elementos.



A conectividade somente com os primeiros nós vizinhos torna-se muito restrita a solução. Outros graus de vizinhança podem definir o universo de elementos, consistindo esta conectividade não somente do primeiro grau de vizinhança. Três tipos de vizinhança foram relatados por Beckers e Fleury em 1997, conforme segue a seguir (colocar figura):

- segunda vizinhança (figura 5.2): cada nó é ligado as duas primeiras vizinhanças e o número de elementos é dado por

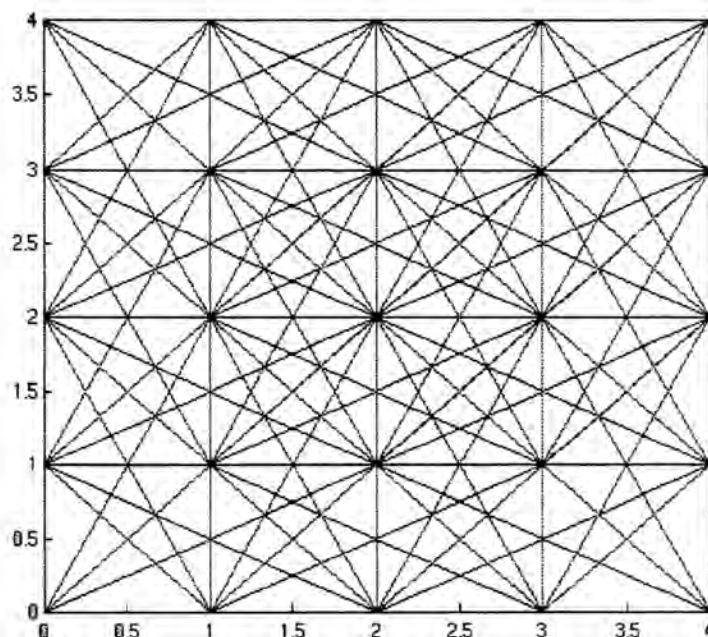


Figura 5.2: Exemplo de segunda vizinhança.

$$m = 8nt - 9(nx + ny) + 10 \quad ; \quad (5.5)$$

- terceira vizinhança (figura 5.3): cada nó é ligado as três primeiras vizinhanças, e o número de elementos é dado por

$$m = 16nt - 27(nx + ny) + 46 \quad ; \quad (5.6)$$

-quarta vizinhança (figura 5.4): cada nó é ligado as quatro primeiras vizinhanças, e o número de elementos é dado por

$$m = 24nt - 51(nx + ny) + 110 \quad . \quad (5.7)$$

A vantagem de utilizar-se vizinhanças maiores, torna-se importante por aumentar o número de direções dos elementos, obtendo-se assim uma solução superior do que utilização da ordem de primeira vizinhança.

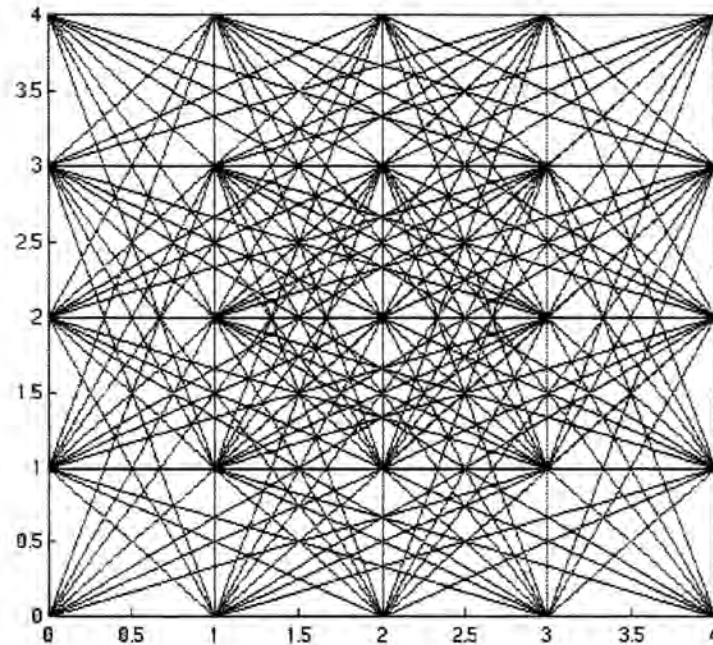


Figura 5.3: Exemplo de terceira vizinhança.

### 5.3 Formulação do problema

Conforme Haftka e Gürdal em 1996, a variável de projeto, função objetivo e restrições são resumidas na formulação do problema de otimização. O problema a seguir é formulado com uma função objetivo.

$$\begin{aligned}
 & \text{minimo} && f(v) \\
 & \text{sujeito} && g_j(v) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g, \\
 & && h_k(v) = 0, \quad k = 1, \dots, n_e,
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

onde  $v$  corresponde a um vetor de variáveis de projeto com componentes  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se a restrição de desigualdade for

$$g_j(v) \leq 0, \tag{5.9}$$

podendo ser transformado para uma função maior que zero, se multiplicado por -1.

O problema de otimização é dito ser linear quando a função objetivo e as restrições são funções lineares da variável de projeto, eles podem ser expresso da seguinte forma

$$f(v) = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = c^t v. \tag{5.10}$$

Problemas de otimização linear são resolvidos através da programação linear. O problema de otimização é dito não linear, se a função objetivo ou restrições são funções não lineares da variável

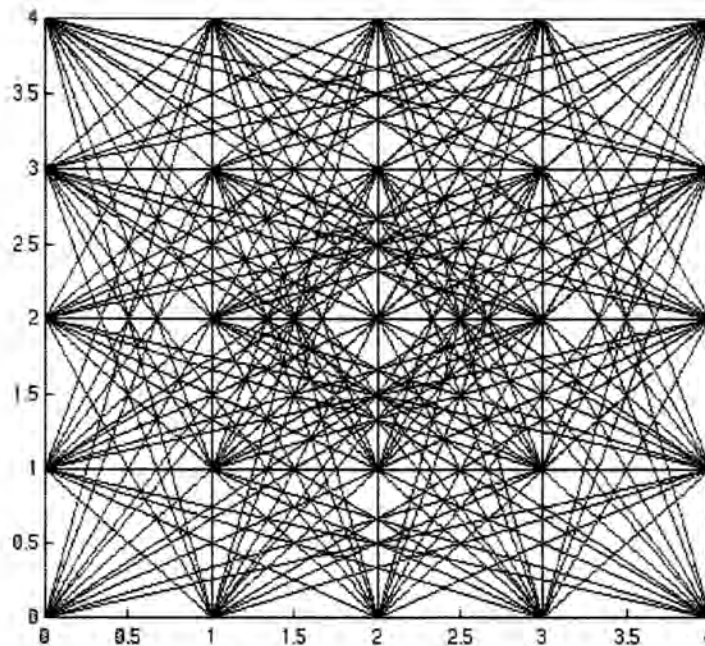


Figura 5.4: Exemplo de quarta vizinhança.

de projeto.

Se todas as restrições do projeto forem satisfeitas, então o projeto está no domínio admissível, isto é, encontra-se dentro da região limitada pelas restrições. Caso alguma restrição não seja satisfeita, então o projeto se encontra no domínio não admissível.

De acordo com Bendsoe e Kikuchi em 1992, o universo de elementos é dado por  $n$  pontos nodais e  $m$  possíveis conectividades. Partindo desta estrutura formada por elementos discretizados, busca-se a solução que satisfaça a solução ótima. Sendo que  $v_i, l_i$  corresponde a seção transversal e comprimento do elemento  $i$ , respectivamente. Esse problema de estruturas discretizadas será assumido que todos os elementos serão do mesmo material, com módulo de Young  $E$ . O volume da estrutura é

$$V = \sum_{i=1}^m v_i l_i \quad (5.11)$$

Neste trabalho busca-se obter o mínimo valor da função objetivo, na qual esta função será representada pelo volume, sendo que as restrições são flexibilidade e flambagem. Este problema poderá ser formulado de três formas diferentes [Haftka e Gürdal em 1996, Bendsoe em 1995, Cheng em 1992], sendo a primeira forma considera a minimização do volume com restrição de flexibilidade, tendo como valores limites para área (um valor de área inferior e superior)

$$\begin{array}{ll}
\text{mínimo} & \sum_{i=1}^m v_i l_i \\
\text{sujeito} & \sum_{i=1}^m f_i^k u_i^k \leq F_{\text{limite}}^k \\
& \text{área}_{\text{inf}} \leq \sum_{i=1}^m v_i \leq \text{área}_{\text{sup}} \quad ,
\end{array} \quad (5.12)$$

onde o superíndice  $k$  se refere ao caso de carregamento em questão. A segunda forma busca o mínimo volume tendo como restrição a estabilidade estrutural e valores limites para seção transversal

$$\begin{array}{ll}
\text{mínimo} & \sum_{i=1}^m v_i l_i \\
\text{sujeito} & \lambda_i^k \leq P_{\text{critico}} \\
& \text{área}_{\text{inf}} \leq \sum_{i=1}^m v_i \leq \text{área}_{\text{sup}} \quad ,
\end{array} \quad (5.13)$$

o valor de  $\lambda$  é determinado através de um problema de autovalores, onde o menor valor em módulo corresponderá ao primeiro valor de carga crítica. A terceira formulação busca o mínimo valor do volume, mas tendo como restrição flexibilidade, flambagem e valores limites para área.

$$\begin{array}{ll}
\text{mínimo} & \sum_{i=1}^m v_i l_i \\
\text{sujeito} & \sum_{i=1}^m f_i^k u_i^k \leq F_{\text{limite}}^k \\
& \lambda_i^k \leq P_{\text{critico}} \\
& \text{área}_{\text{inf}} \leq \sum_{i=1}^m v_i \leq \text{área}_{\text{sup}} \quad .
\end{array} \quad (5.14)$$

As funções de restrição, tanto a restrição de flambagem como a de flexibilidade, são aproximadas utilizando-se as derivadas de primeira ordem das restrições impostas. Woo utilizou aproximação das restrições por um método generalizado híbrido, onde este é mais conservativo do que a série de Taylor, mas este trabalho utilizará a expansão na série de Taylor. Esta expansão é necessária para tornar-se a função na forma linear, então posteriormente utilizar a programação linear seqüencial. As funções das restrições expandidas na forma de Taylor apresentam-se da seguinte forma:

-Flambagem:

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\partial \lambda}{\partial v} (v - v_0) \quad . \quad (5.15)$$

-Flexibilidade:

$$F = F_0 + \frac{\partial F}{\partial v} (v - v_0) \quad . \quad (5.16)$$

#### 5.4 Programação matemática linear seqüencial

A programação matemática é uma importante ferramenta na área de engenharia para solucionar problemas. No caso deste trabalho é utilizada para encontrar o ótimo resultado para uma estrutura discretizada. O método da programação linear [Arora, 1989] é a solução matemática para encontrar os valores mínimos ou máximos para uma função objetivo, sujeita as restrições. Tanto



a função custo, como as restrições podem ser funções não-lineares, então utiliza-se do artifício da linearização da função, no qual os termos das funções podem ser expandidos na série de Taylor [Haftka e Gürdal, 1996; Tada e Minami, 1993].

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0} \\
 \text{sujeito} \quad & g_j(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} \geq 0 \\
 & h_j(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} = 0 \\
 & a_{inf} \leq (x_i - x_{0i}) \leq a_{sup} \quad ,
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

onde  $n$  é o número de variáveis do projeto. A última restrição é conhecida como limites móveis, garantido desta forma que a variação das variáveis de projeto não sejam excessivamente grandes, de maneira a garantir a linearização do problema. Este tipo de restrição é importante para convergência do problema.

A resolução do problema apresentado pela equação 5.17, fornece os valores das variáveis de projeto ( $x_i, i = 1 \dots n$ ). Estes valores são utilizados para resolver o problema de otimização, que é um processo iterativo, até o momento em que a função objetivo atinja um máximo ou mínimo. A este tipo de problema onde as funções são linearizadas, damos o nome de programação linear seqüencial (SLP) [Haftka e Gürdal, 1996, Cheng, 1992].

Um problema associado à programação linear seqüencial está ligado na escolha dos limites móveis, pois a escolha errada do mesmo poderá causar a não convergência do problema. A escolha do tamanho dos limites móveis dependerá do valor do gradiente, para valores pequenos de gradientes pode-se partir com limites altos, caso contrário os mesmos deverão ser baixos, pois certamente qualquer violação destas regras causará a falha do programa, isto é, o problema não terá uma convergência. A escolha de limites móveis pequenos demais poderá causar a parada prematura do problema. Para se considerar um limite móvel baixo ou alto, dependerá do valor do gradiente, isto é, para o caso onde a restrição do problema é a flexibilidade, o valor do gradiente para esta restrição é baixo, então pode-se partir com limites altos, já para o caso onde a restrição é a flambagem, os valores das derivadas são altos, então os valores devem ser baixos. Durante o processo de otimização, os limites podem aumentar ou diminuir, conforme a convergência do problema. Esses valores são modificados conforme o sinal da variável nas três últimas iterações [Pedersen, 1973]. Se o sinal da variável nas três últimas iterações for positivo ou negativo, o valor do limite móvel será diminuindo, conforme critério adotado, neste caso foi de 0.8, mas quando a variável de projeto apresenta uma variação do sinal nas três últimas iterações, isto significa que o problema ainda não começou apresentar convergência, então os limites móveis serão aumentados, sendo este aumento de 1,20.

Uma característica interessante dos problemas de programação matemática linear é a de que as derivadas da função objetivo em relação às variáveis de projeto são constantes, não necessariamente nulas. Isto significa que o ponto extremo se encontra na fronteira e não no interior do domínio admissível. Sendo as restrições também lineares, o ponto de ótimo deve se encontrar na



intersecção de duas ou mais restrições, ao menos que a restrição seja paralela ao contorno definido pela função objetivo [Haftka e Gürdal, 1996; Cheng, 1992]. Os algoritmos para a solução dos problemas de programação matemática linear são baseados nesta importante característica [Cardoso, 2000].

Algumas vantagens da programação linear são:

1. O problema do ótimo singular é eliminado;
2. Estruturas com um elevado número de elementos e nós podem ser eficientemente resolvidas;
3. O ótimo global é procurado em um número finitos de passos (normalmente é o ótimo local);
4. Algumas propriedades da ótima topologia podem ser investigada.

## 6 RESULTADOS

Este capítulo tem como objetivo apresentar resultados obtidos com o uso da formulação desenvolvida. A implementação computacional da formulação resultou no programa de otimização de pórticos e treliças, que foi elaborado a partir das equações de sensibilidade, problema de autovalores e equações de equilíbrio, sendo utilizado a linguagem do Matlab e Fortran-77. O problema de autovalores é resolvido através do Matlab, onde utiliza o método de QZ. Para permitir a comparação dos resultados obtidos aqui, serão utilizados problemas de teste da bibliografia especializada.

Para a resolução de problemas que tenham restrição de flexibilidade, a derivada é obtida de maneira fácil e os resultados são obtidos facilmente. Em se tratando de problemas com restrições de flambagem, a derivada de autovalores simples é obtida sem grandes problemas, mas para o caso de autovalores repetidos apresenta-se com uma certa dificuldade a obtenção das derivadas.

Antes de obter a formulação utilizada neste trabalho, a primeira opção foi partir do critério da mínima energia potencial, mas a derivada analítica obtida apresentou valor errado, quando comparado com o método das diferenças finitas. No decorrer dos problemas apresentados concluiu-se que autovalores repetidos ocorriam, sendo que a primeira tentativa foi em utilizar duas derivadas de autovalores simples obtidas pelo método analítico. Essa consideração não apresentou bons resultados, provocando saltos na convergência do problema.

As unidades dos problemas é utilizada no sistema internacional. A seção transversal de cada elemento é considerada maciça e circular, sendo o material adotado para fins de teste o aço.

### 6.1 Elemento de viga

O primeiro resultado apresentado, figura 6.1, refere-se da otimização de uma coluna, na qual é aplicada uma força unitária no topo e considerando um engaste na base (restrição das duas translações e a rotação). A função objetivo é o volume tendo como restrição a carga de flambagem. O valor da carga crítica é determinado através do problema de autovalores e autovetores, onde o menor autovalor em módulo representará a carga de flambagem, e os autovetores os modos de flambagem. Esta coluna é composta por dez elementos e a análise inicial determinou a carga de flambagem com o valor de 41, sendo imposta que a mesma deverá suporta uma carga de 70. Após a otimização, como era de esperar, a seção transversal do elemento diminuiu no sentido do engaste para a extremidade, mostrando que a formulação do problema está correta.

A figura 6.2 representa o primeiro e o segundo modo de flambagem, obtidos através da utilização do Ansys.

Os gráficos apresentados nas figuras 6.3 e 6.4 representam respectivamente a convergência da função objetivo e da restrição de flambagem. Pode-se observar no gráfico 6.4 que este problema ativou apenas o primeiro autovalor, não ocorrendo autovalores duplos, e a primeira formulação apresentada para autovalores distintos foi utilizada. Pode-se observar que os valores obtidos para o problema de autovalores coincidiram com o resultado do Ansys, sendo o primeiro autovalor



Figura 6.1: Estrutura otimizada - coluna

igual a 70 e o segundo 370. Essa grande diferença entre os autovalores possibilitou a utilização da expressão do gradiente para autovalores simples. Conforme o aumento da complexibilidade da estrutura, as distâncias entre os autovalores começam a diminuir. Esta observação pode ser confirmada nos exemplos que seguem.

A figura 6.5 representa um pórtico (torre) no qual está submetido a uma força unitária (posição da força  $(1,10)$ ), estando restringido nas direções  $x$  e  $y$  na posição  $(2,0)$  e na posição  $(0,0)$  na direção  $y$ , sendo composto por 92 elementos. A carga inicial de flambagem corresponde a 11487 e deseja-se que atinja um valor de 30000. Através do procedimento de otimização deseja-se que o volume seja minimizado com restrição de flambagem global. Uma vez que a restrição de flambagem é uma função não convexa, o resultado obtido é apenas um mínimo local, e este resultado é mostrado na figura 6.5

A figura 6.7 representa o primeiro e segundo modo de flambagem, obtidos no Ansys. Neste problema pode-se observar que o primeiro e o segundo autovalor coincidiram numericamente, o que pode ser confirmado pelo gráfico 6.9. Autovalores repetidos ocorrem freqüentemente no processo de otimização, à medida que há mudança nas variáveis de projeto (áreas) da estrutura. Para tornar possível a otimização estrutural, considera-se um plano formado por estes dois vetores, sendo os gradientes são obtidos a partir deste plano, pois não se pode obter as derivadas diretamente em relação a variável de projeto. A não consideração de autovalores repetidos causará instabilidade na convergência. Nas iterações finais deste problema pode-se notar esta instabilidade, pois o terceiro autovalor coincidiu com os dois primeiros, provocando desta forma uma instabilidade no gráfico

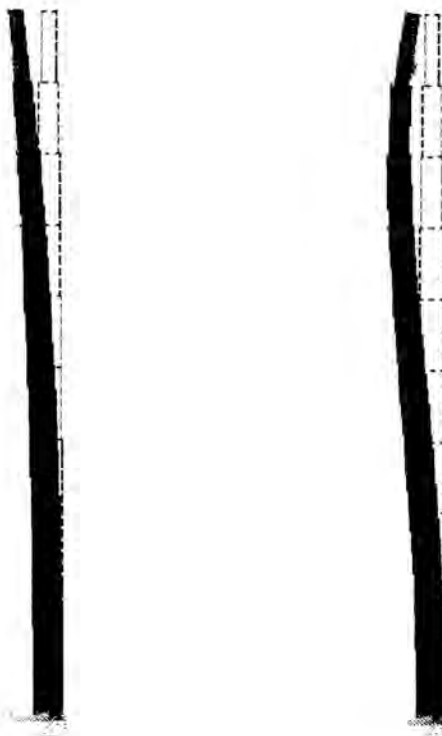


Figura 6.2: Primeiro e Segundo Modo de Flambagem da coluna

de convergência do volume, mostrado na figura 6.8. Não está implementado neste programa o tratamento de três autovalores repetidos.

Considera-se a coincidência a partir de uma diferença nos autovalores de até cinco por cento. Isto pode ser observado no valor calculado para a carga crítica da estrutura otimizada, no qual o valor desejado não respeita exatamente a restrição, mas este erro é pequeno o suficiente para ser desprezado. Para este tipo de problema observa-se a convergência do volume considerando as quatro últimas iterações, considerando a variação desta média entre duas iterações menor do que meio por cento.

Os dois autovalores na última iteração obtidos para resposta final desta estrutura foram de 30013 e 34667, na iteração anterior os três autovalores ficaram em torno dos 30000, este é o

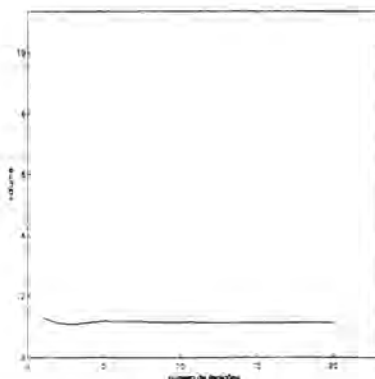


Figura 6.3: Gráfico de convergência do volume para coluna

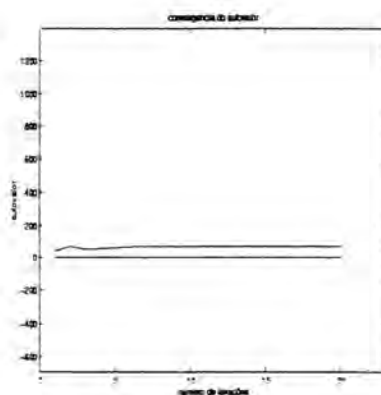


Figura 6.4: Gráfico de convergência de autovalores para coluna

motivo da instabilidade.

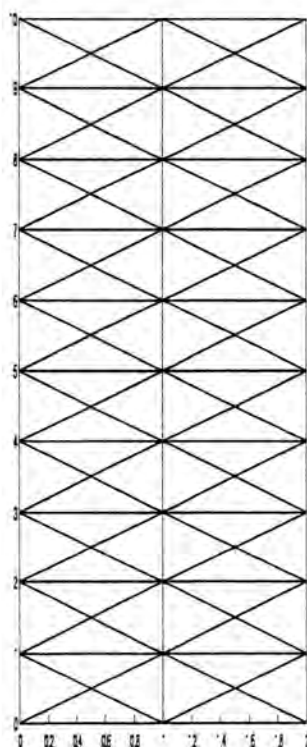


Figura 6.5: Malha de vizinhança de primeira ordem de uma torre

O exemplo apresentado na figura 6.10 considerou um caso com múltiplas forças aplicadas, todas de valor unitário. De acordo com a malha apresentada na figura 6.5, as restrições estão colocadas nas direção de  $x$  e  $y$  na posição  $(2,0)$  e na direção  $y$  na posição  $(0,0)$ , as forças de compressão são aplicadas nas posições  $(0,10)$  e  $(2,10)$ . O valor inicial da carga crítica é de 11426, correspondendo para cada valor de força aplicada, e deseja-se que a estrutura suporte o valor de 30000. A função objetivo deste problema é otimizar o volume com a restrição de flambagem. Os modos de flambagem das figuras 6.11 e ??, foram obtidos pelo Ansys, e seus respectivos autovalores coincidiram com os obtidos no programa implementado.

O gráfico apresentado na figura 6.13, mostra uma perfeita convergência para o problema, pois



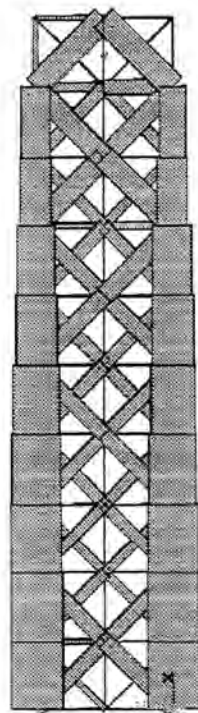


Figura 6.6: Estrutura Otimizada - torre com caso de carregamento simples

o terceiro autovalor não coincide com os dois primeiros. O motivo deste problema ter apresentado estabilidade, foi devido ao aumento de casos de carregamentos, essa condição em problemas de otimização além de proporcionar a estabilidade, reproduz resultados coerentes. Esse resultado obtido pode ser considerado como sendo a ótima solução para o problema, mas lembrando que este resultado corresponde ao mínimo local, pois a restrição de flambagem é uma função não convexa.

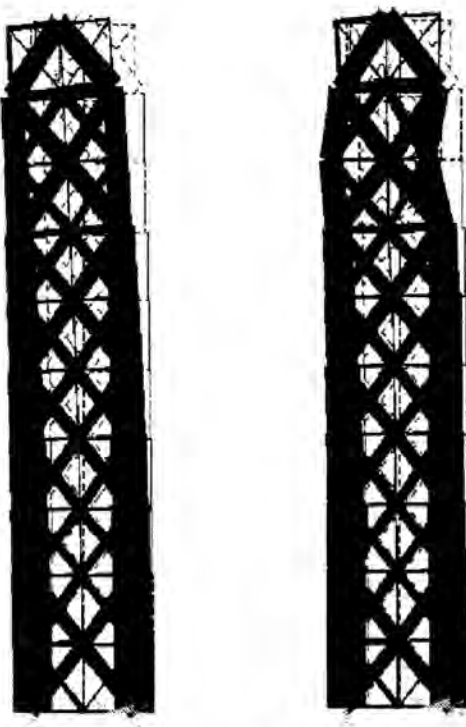


Figura 6.7: Primeira e segundo modo de flambagem para torre com um caso de carregamento simples

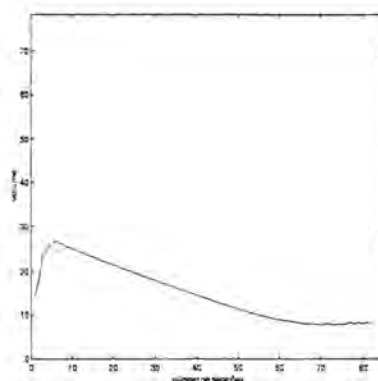


Figura 6.8: Gráfico de convergência do volume para torre com um caso de carregamento simples

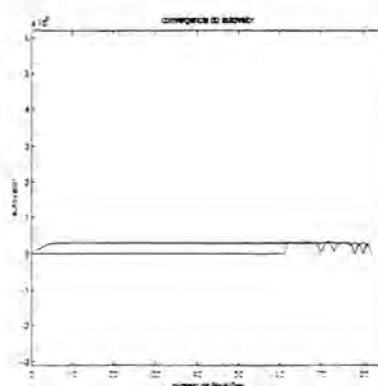


Figura 6.9: Gráfico de convergência do autovalor para torre com um caso de carregamento simples

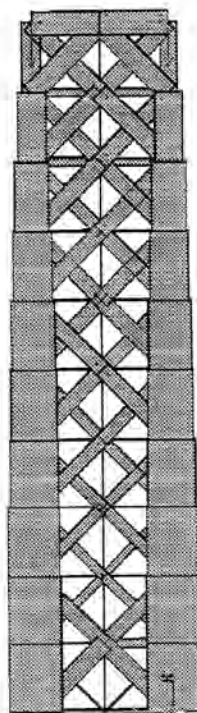


Figura 6.10: Estrutura otimizada - torre com múltiplos casos de carregamento

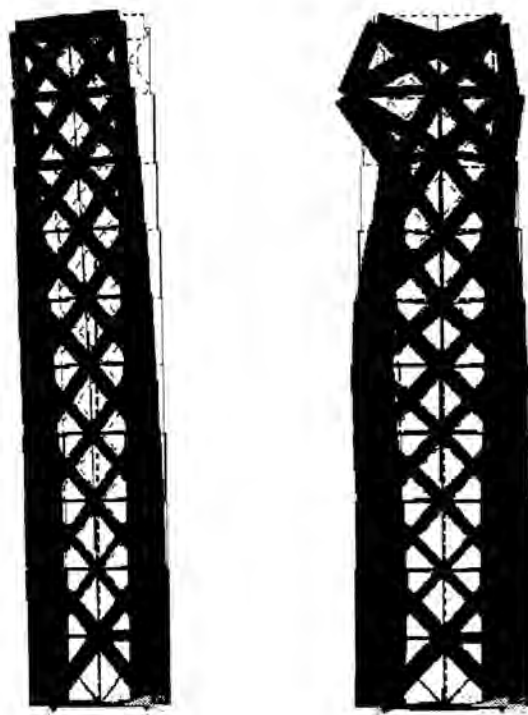


Figura 6.11: Primeiro e segundo modo de flambagem para torre com múltiplos casos de carregamento

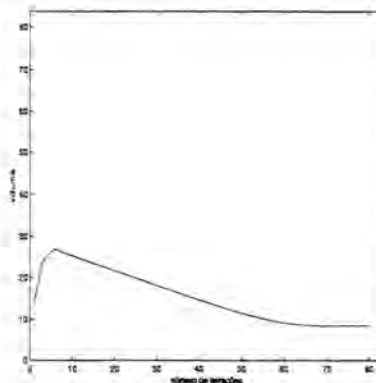


Figura 6.12: Gráfico de convergência do volume para torre com múltiplos casos de carregamentos

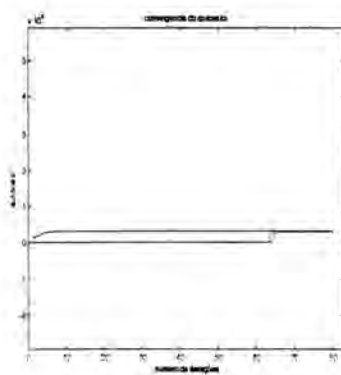


Figura 6.13: Gráfico de convergência do autovalor para torre com múltiplos casos de carregamento

As soluções dos problemas apresentados nas figuras 6.15, 6.17, 6.19 e 6.21, representam a minimização do volume com restrição a flexibilidade. O tamanho da estrutura utilizado é o mesmo para todos os resultados citados, mas tendo somente a diferença na quantidade de elementos utilizados dentro destas malhas (figuras 6.14, 6.16, 6.18 e 6.20). Esse tipo de malha é classificado de acordo a vizinhança utilizada, neste problema são respectivamente: primeira vizinhança com 173 elementos, segunda vizinhança com 307 elementos, terceira vizinhança com 505 elementos e quarta vizinhança com 641 elementos.

As quatro malhas (figuras 6.14, 6.16, 6.18 e 6.20) apresentam restrições na direção  $x$  e  $y$  na posição  $(0,5)$  e na direção  $x$  na posição  $(0,0)$ , e carga aplicada é unitária na direção de  $y$ , estando localizada na posição  $(8,0)$ . A solução apresentada na figura 6.15 parte de uma volume inicial de 20.61, terminando com 8,54, a segunda solução (figura 6.17) parte do volume inicial de 54.53 e termina com 7.4, o terceiro caso (figura 6.19) o volume inicial é 121.13 e o final é 7.8 e no quarto caso (figura 6.21) o volume inicial é 192.1 e o final é 7.48. Conforme o aumento do número de elementos dentro da malha, existe um aumento da rigidez, no primeiro caso a flexibilidade apresentada no início é de  $6.05e-5$ , sendo imposta que a flexibilidade de  $6.0e-5$ , e este valor foi utilizado para os quatro problemas apresentados. Conforme a malha vai apresentando um refinamento, ou aumento de elementos no seu espaço, o resultado vai se aproximando do contínuo, sendo uma forma fácil de verificar o resultado apresentado, conforme mostrado na bibliografia. Nestes exemplos o peso próprio não foi considerado como um caso de carregamento. Quando utiliza-se o valor limite de flexibilidade muito afastado do valor inicial de flexibilidade, pode-se perceber que existe uma instabilidade na convergência do problema. A verificação da convergência é realizada através da média das quatro últimas iterações, considerando que a convergência foi atingida quando a diferença for menor que meio por cento.

Os resultados apresentados nas figuras 6.23, 6.24 partiram de uma malha (figura 6.22) de dimensão  $(20 \times 20)$ , possuindo a quantidade de 3160 elementos, utilizando-se da vizinhança de segunda ordem. As restrições impostas para estas estruturas estão aplicadas na direção de  $x$  e  $y$  no ponto  $(0,20)$  e somente na direção de  $x$  na posição  $(0,0)$ . A solução da figura 6.23 se diferencia da 6.24 pela carga aplicada. Respectivamente para a primeira solução a carga unitária está na posição  $(20,0)$  e para a segunda na posição  $(20,10)$ . Os resultados mostrados aqui se aproximam da solução do contínuo.

## 6.2 Elemento de barra

Utilizando-se elementos de barra, procura-se obter o mínimo volume para os dois exemplos a seguir apresentados. O primeiro caso, tratando-se de uma ponte, tem restrição de flexibilidade e para o segundo caso, que representa uma torre, tem restrição de flambagem.

A solução do primeiro problema de treliça considera múltiplos casos de carregamento, partindo de uma malha inicial conforme mostrado na figura 6.25, onde utiliza-se uma malha de segunda ordem de vizinhança. As forças são aplicadas na direção  $y$ , sendo de valor unitárias e se encontram



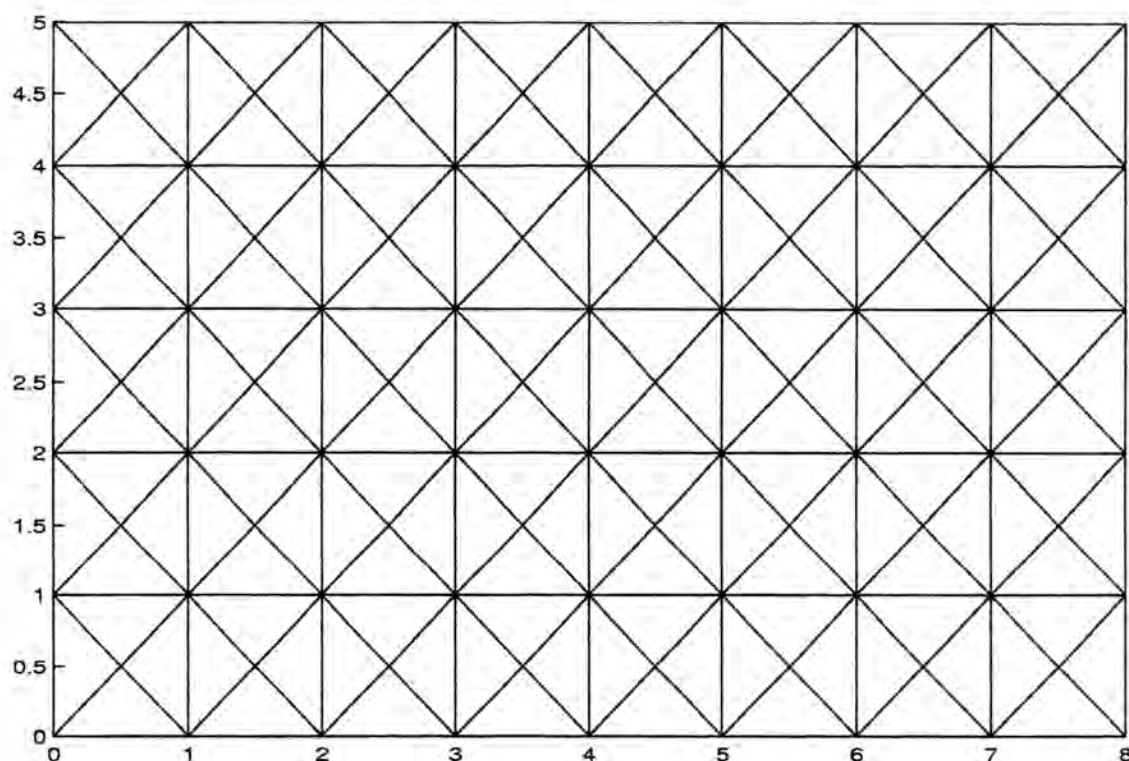


Figura 6.14: Malha de primeira vizinhança com o tamanho de 8 por 5

nas posições (3,0) e (5,0). Os vínculos aplicados no problema estão localizados na posições (0,0) e (8,0), nas direções de  $x$  e  $y$ . O resultado apresentado refere-se a minimização de volume tendo como restrição a flexibilidade. O volume inicial da estrutura é de 46.35, e após a otimização obtém-se 11.79, este resultado é mostrado na figura 6.26. Este resultado pode ser melhorado conforme aumenta-se a ordem de vizinhança, isto significa uma redução de volume, e a busca da melhor topologia.

O segundo resultado apresentado, trata-se da minimização do volume com restrição de flambagem. A malha utilizada é de primeira ordem de vizinhança, conforme mostrado na figura 6.27, e neste problema não é utilizado problemas com múltiplos casos de carregamento. Aplica-se uma força unitária na direção de  $y$  na posição (1,10) e os vínculos são aplicados nas direções de  $x$  e  $y$  nas posições (0,0) e (1,0). O resultado mostrado foi interrompido na iteração 50, conforme figura 6.28, porque os valores obtidos depois apresentavam-se perturbados, podendo ser causado por dois motivos diferentes. O primeiro seria que o segundo autovalor estivesse coincidindo com o primeiro e segundo motivo por não apresentar restrição local de flambagem. O primeiro e o segundo modo de flambagem podem ser observados na figura 6.29.

Este exemplo foi utilizado o gradiente obtido por diferenças finitas. O motivo da utilização desse método ao invés do método analítico direto, é por causa do problema apresentado, pois os gradientes obtidos utilizando-se o método analítico para os casos hiperestáticos apresentaram-se errado, sendo que para casos isostáticos os valores da sensibilidade obtidos coincidiram com os valores da diferenças finitas.

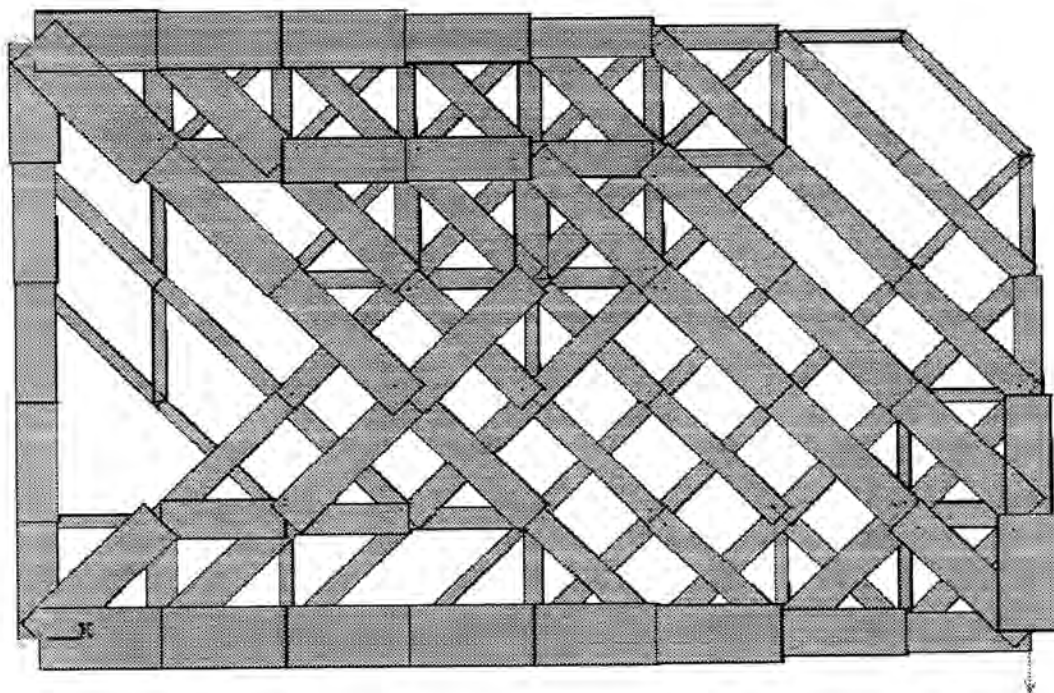


Figura 6.15: Estrutura otimizada - viga - malha de primeira vizinhança

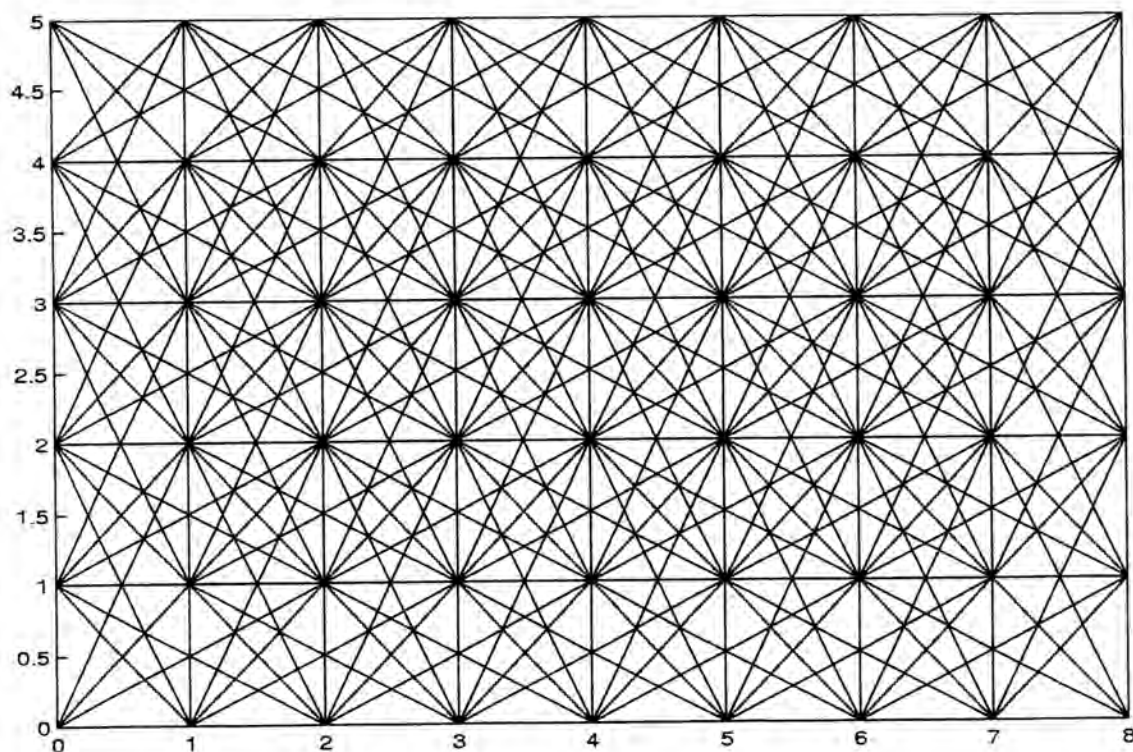


Figura 6.16: Malha de segunda vizinhança com o tamanho de 8 por 5

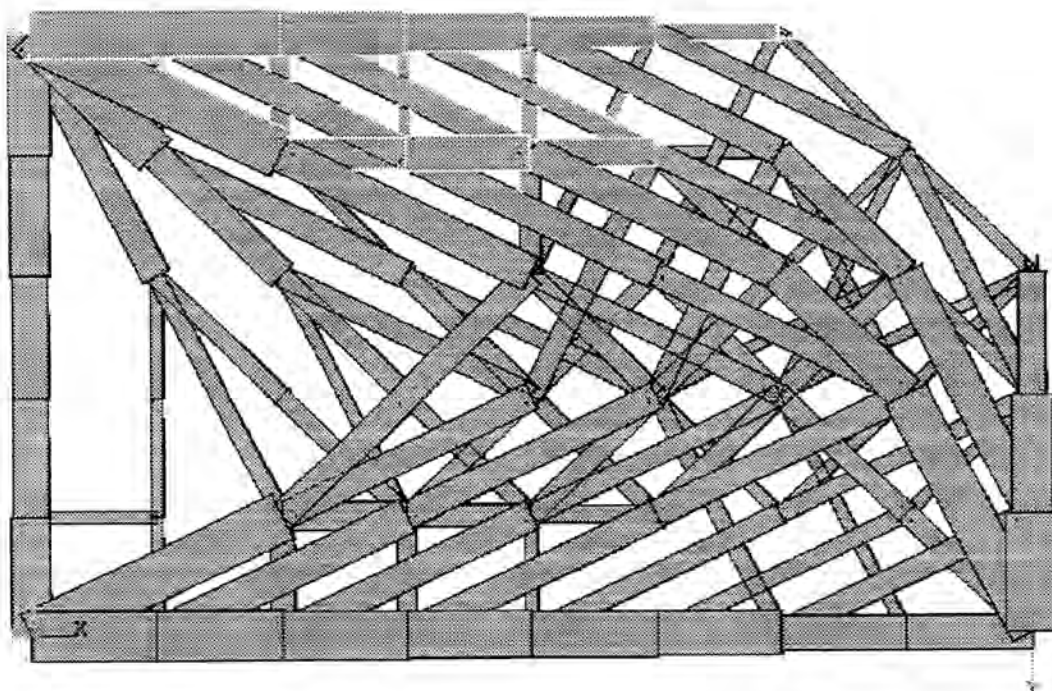


Figura 6.17: Estrutura otimizada - viga - malha de segunda vizinhança

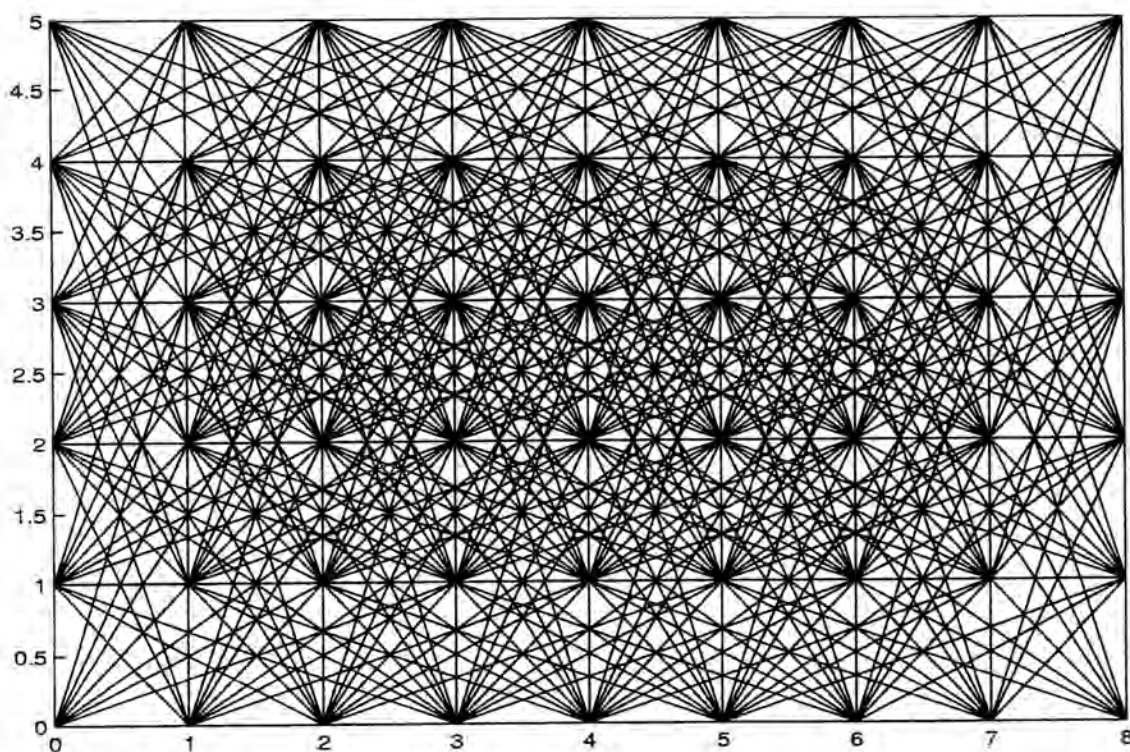


Figura 6.18: Malha de terceira vizinhança com tamanho de 8 por 5



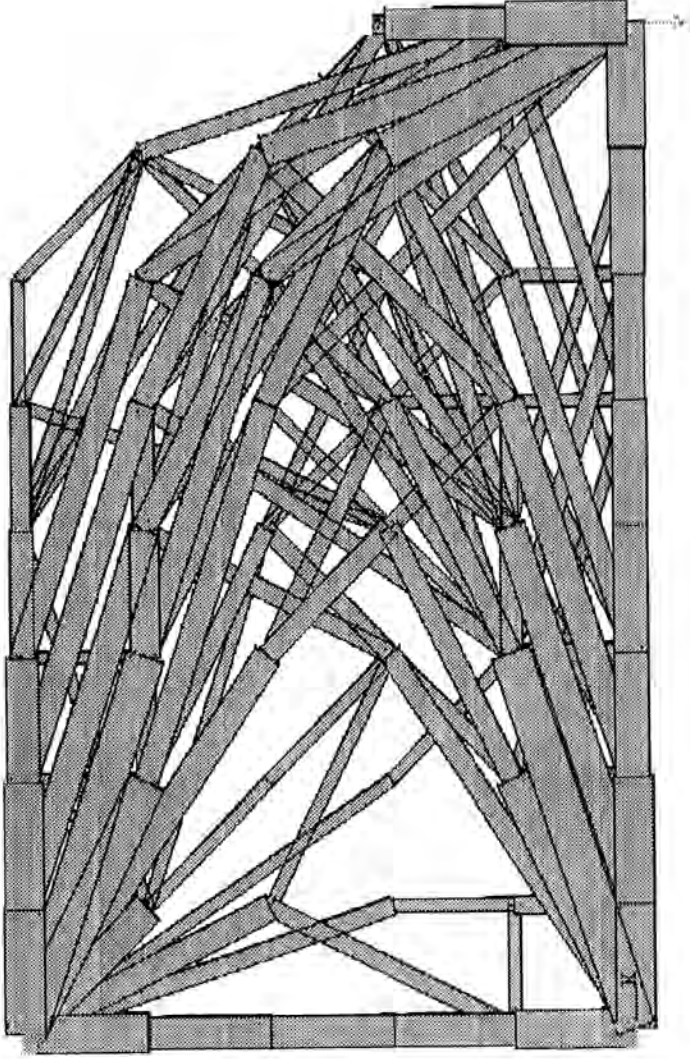


Figura 6.19: Estrutura otimizada - viga - malha de terceira vizinhança

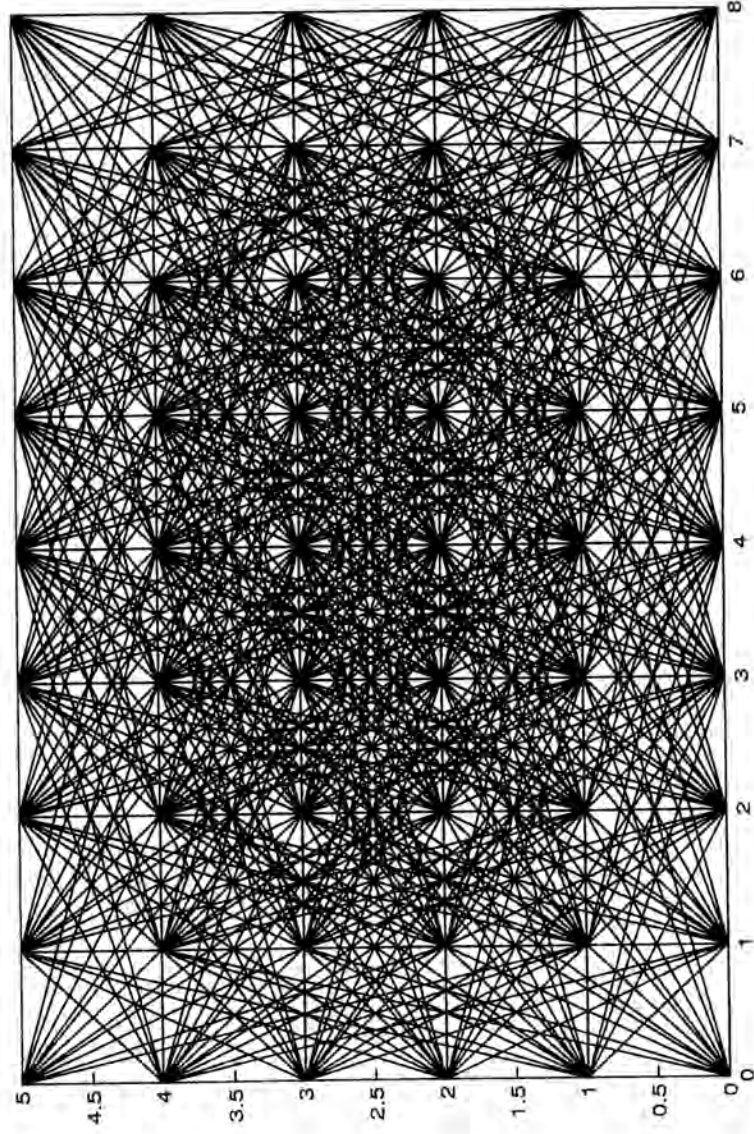


Figura 6.20: Malha de quarta vizinhança com o tamanho de 8 por 5

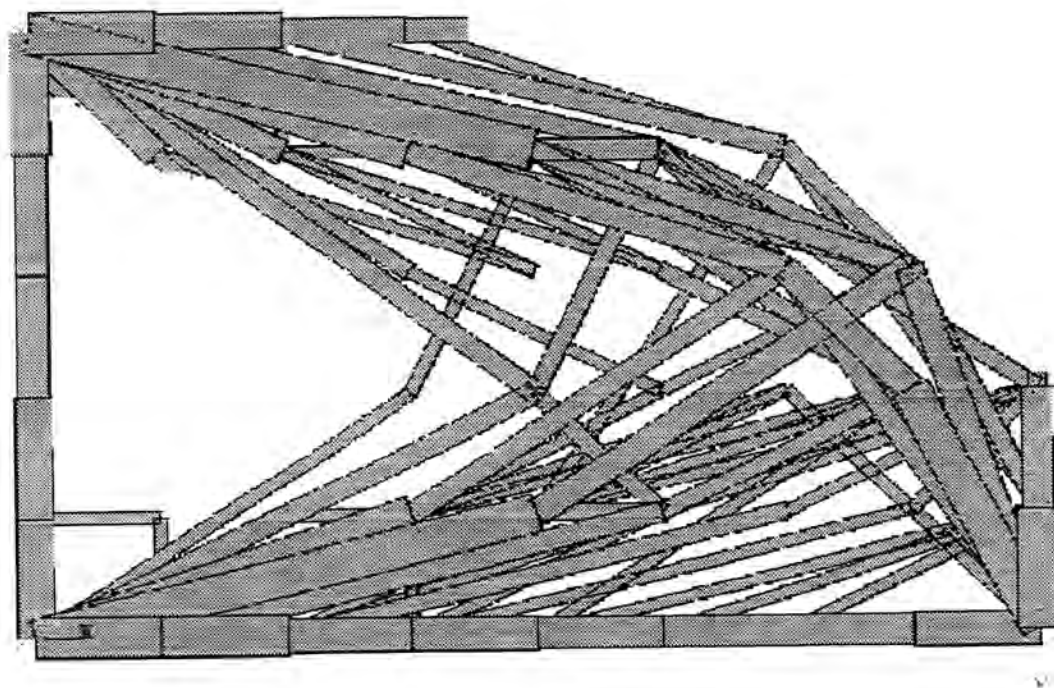


Figura 6.21: Estrutura otimizada - viga - malha de quarta vizinhança

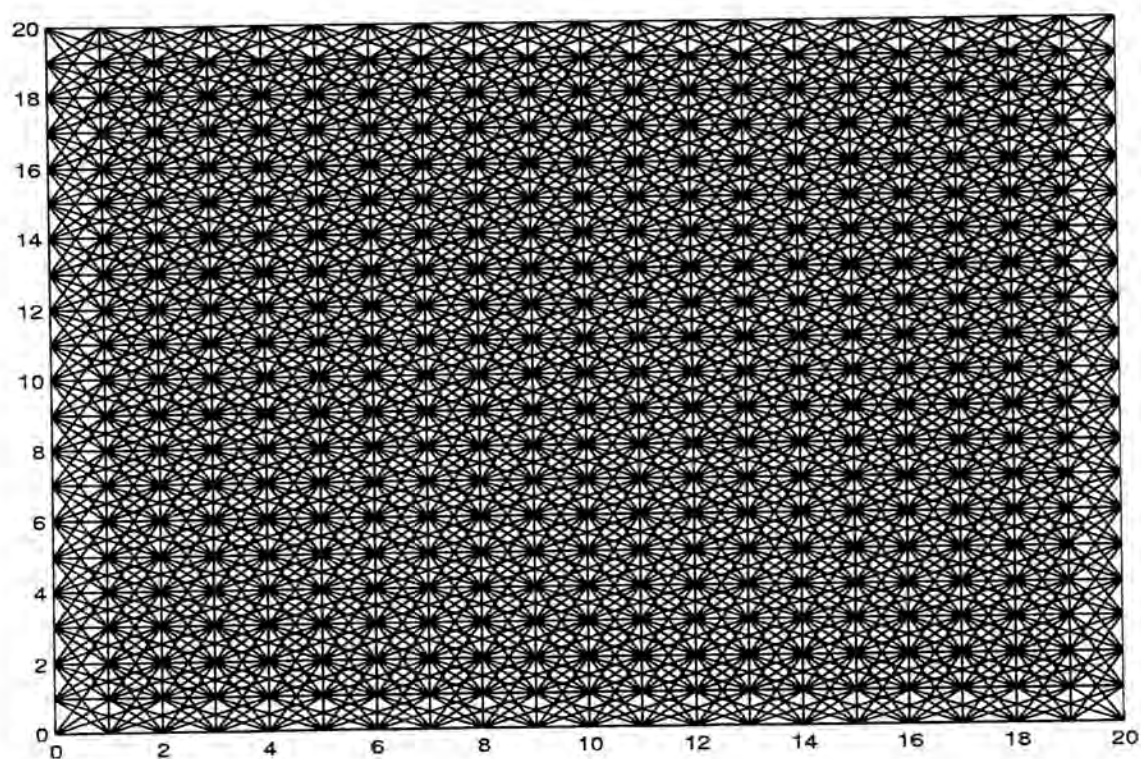


Figura 6.22: Malha de segunda vizinhança com tamanho de 20 por 20.



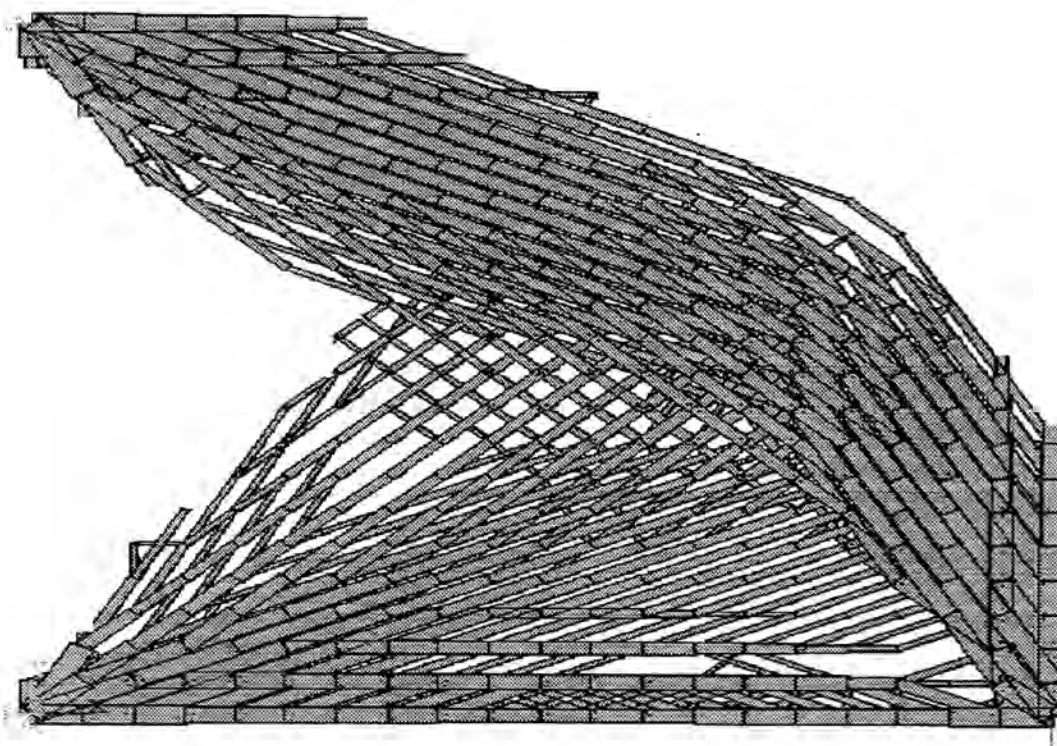


Figura 6.23: Estrutura otimizada - viga - um caso de carregamento na extremidade

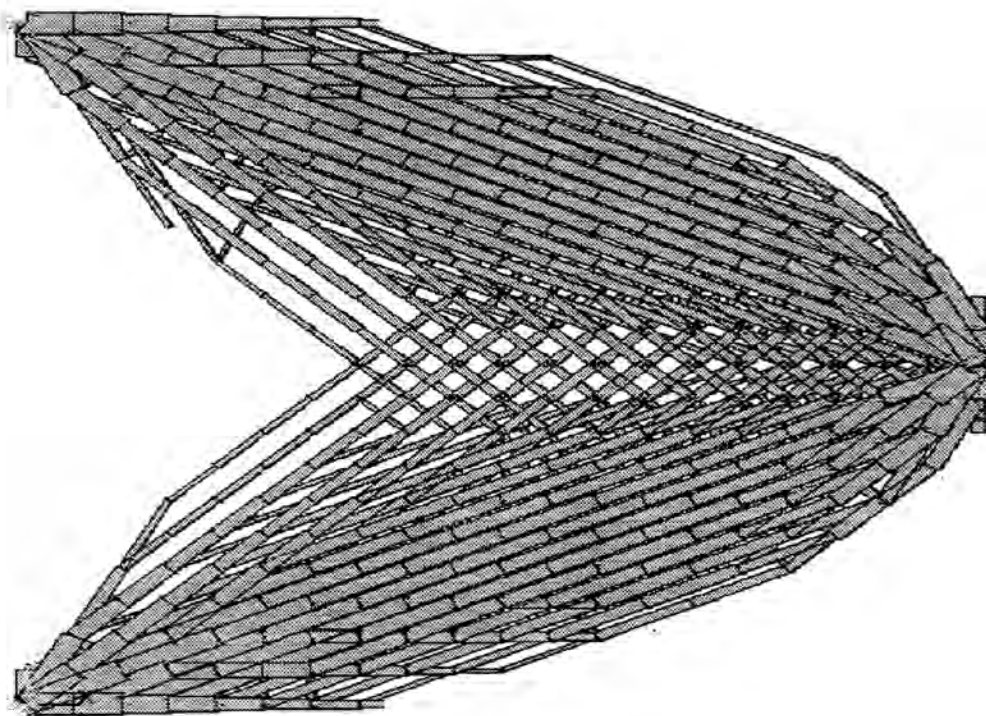


Figura 6.24: Estrutura otimizada - viga - com um caso de carregamento

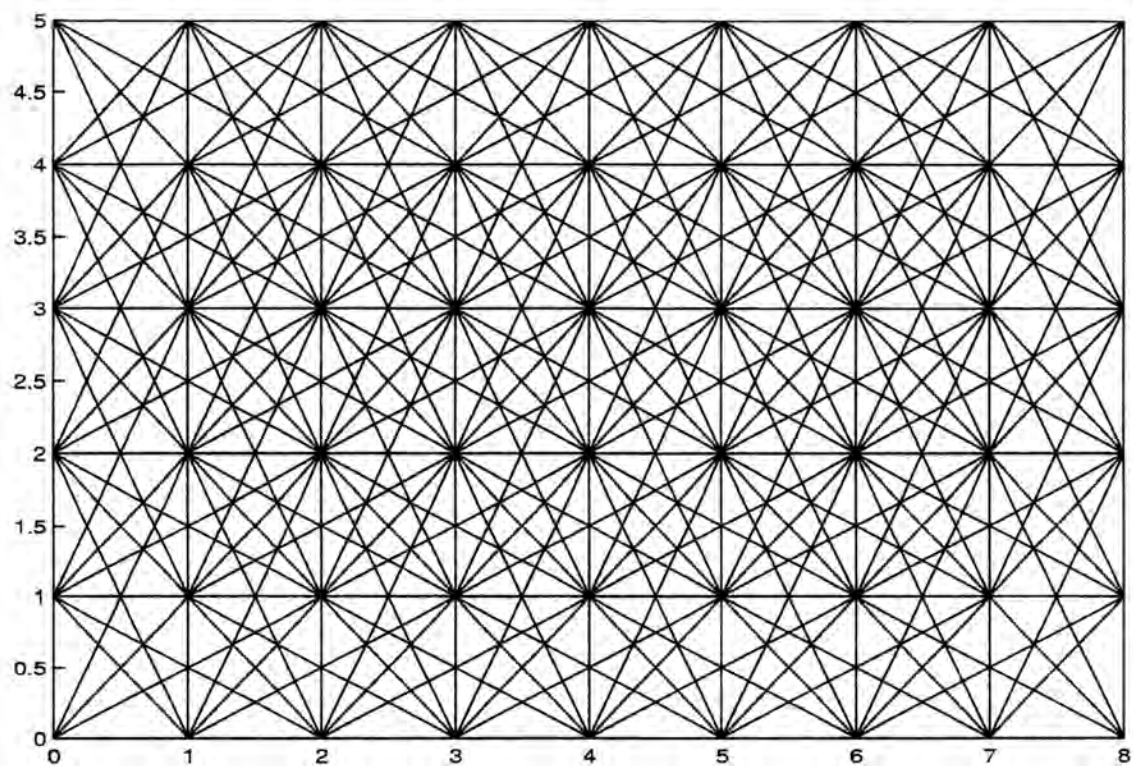


Figura 6.25: Malha de segunda ordem de vizinhança - caso da ponte - múltiplos casos de carregamentos

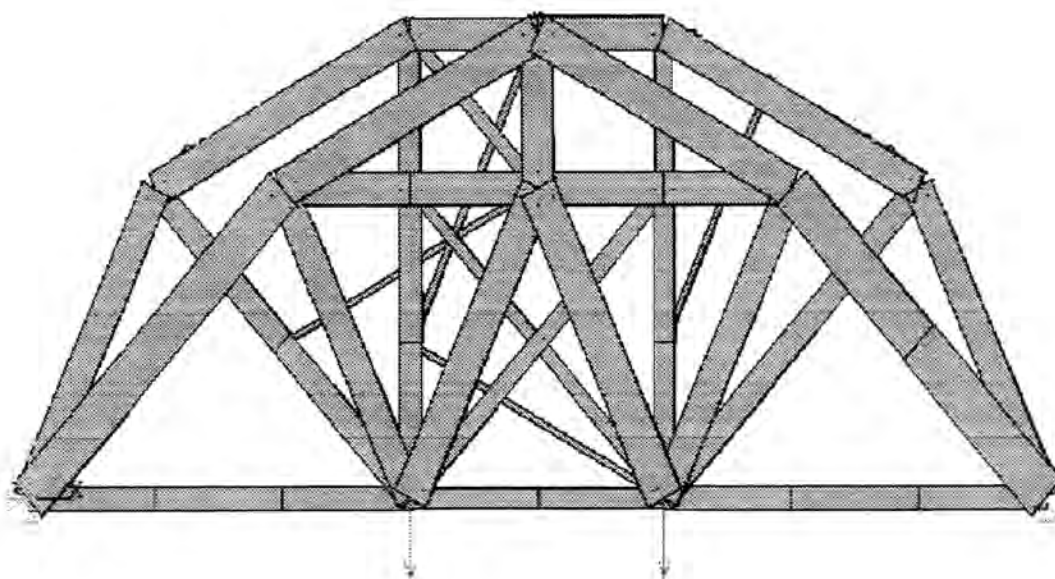


Figura 6.26: Estrutura otimizada - treliça - ponte

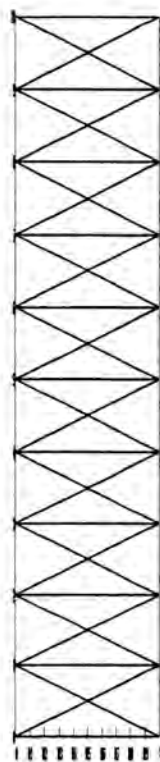


Figura 6.27: Malha de primeira ordem de vizinhança - torre - caso de carregamento simples

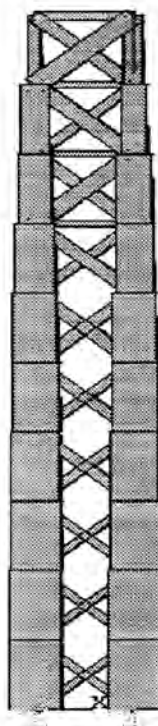


Figura 6.28: Estrutura otimizada - treliça - torre

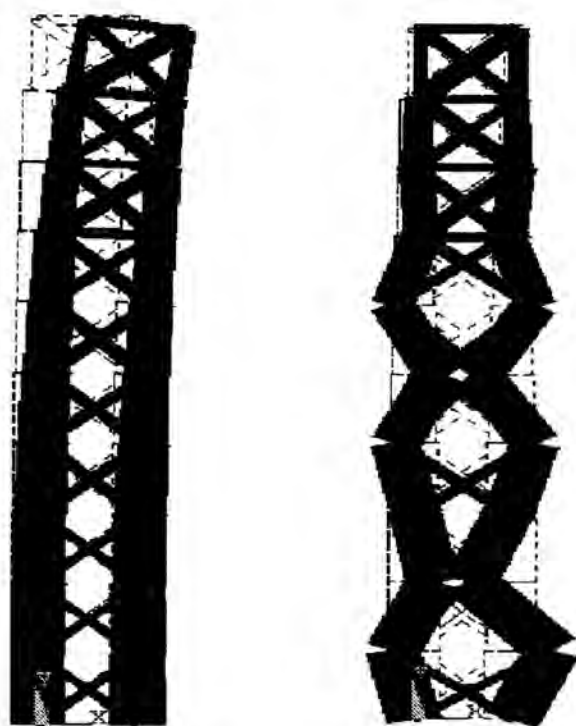


Figura 6.29: Primeiro e segundo modo de flambagem da torre - treliça

## 7 CONCLUSÃO

Neste capítulo são apresentadas as conclusões obtidas no desenvolvimento deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros nesta área.

O estudo tratou da otimização estrutural de treliças e pórticos no plano, tendo como função objetivo o volume sujeita as restrições de estabilidade estrutural e flexibilidade. Utilizando-se das funções de restrições obteve o mínimo valor para a função objetivo (volume), através da variação da variável de projeto.

Um dos objetivos do problema foi a determinação das derivadas das funções de custo e das restrições. O cálculo da sensibilidade utilizou o método analítico direto ou diferenças finitas, onde as derivadas foram obtidas em relação a variável de projeto (seção transversal). As derivadas da função objetivo e da flexibilidade não se tem problemas para se obter, o mesmo ocorre para derivada de flambagem, quando existir apenas um autovalor. Para o caso onde ocorrem autovalores repetidos, a derivada não é obtida de maneira direta em relação a variável de projeto, é necessário fazer as considerações que foram demonstrada neste trabalho.

As derivadas desenvolvidas pelo método analítico direto para flambagem, não são válidas para estruturas compostas por elementos de barras, em situações hiperestática. Para esse tipo de situação utiliza-se a derivada obtida pelo método de diferenças finitas. Outro detalhe importante a ser mencionado, trata-se do fator de correção utilizado para se obter o valor correto da derivada de flambagem através do método analítico direto. Esse fator é aplicado no deslocamento, que é multiplicado por um número entre zero e um.

A bibliografia sobre autovalores utilizados para resolver problemas de frequência natural é ampla, mas para problemas de flambagem há poucos trabalhos disponíveis apesar de serem problemas semelhantes. Recentemente começou-se apresentar um estudo sobre autovalores repetidos, pois este tipo de situação causa instabilidade na solução, isto significa que o resultado ótimo não é possível de se obter. Foi desenvolvido uma expressão analítica para o gradiente de autovalores duplos, mas para o caso onde o terceiro autovalor coincidir com os dois primeiros esta formulação perde sua validade, sendo necessário ter sido considerado a existência de três autovalores repetidos. Autovalores foram considerados numericamente idênticos quando a diferença entre o primeiro e o segundo e o primeiro e o terceiro não fosse maior do que cinco por cento.

As soluções obtidas para estrutura na busca do mínimo volume com restrição de flexibilidade ou flambagem, tornaram-se possível pela utilização do programa que foi desenvolvido, utilizando-se da linguagem fortran e matlab. Alguns dos resultados obtidos foram confrontados com a bibliografia existente, verificando-se que o problema desenvolvido apresenta-se correto. Os resultados apresentados para terem aplicabilidade maior será necessário o desenvolvimentos do programa com outras restrições, juntamente com as normas de projeto.

A utilização do método da programação matemática facilita a implementação de novas formulações quando comparado com o método do critério de ótimo. Neste trabalho foi utilizada a programação linear seqüencial com limites móveis variáveis, que apresentaram-se eficientes para



resolução dos problemas, que é um método bem estabelecido e satisfatório.

### **7.1 Sugestões para trabalhos futuros**

Para trabalhos futuros relacionados à otimização de estruturas compostas por barras e vigas, sugere-se que seja implementado em 3D com objetivo de aproximar-se da realidade. Para isto é necessário considerar as restrições de tensão, frequência natural, deslocamento, flambagem, tendo como função objetivo o peso. Uma extensão bastante simples seria também incluir uma restrição de flambagem local para elementos de barra através da fórmula da carga crítica de Euler.

A seção transversal considerada como variável de projeto deve ser limitada pelas dimensões existente no mercado, o que implicaria em uma programação inteira, fora do escopo deste trabalho. Neste programa foi considerado uma seção transversal circular maciça, mas poderá ser estendido para qualquer tipo de seção transversal existente. As normas de projeto da ABNT para estruturas deverão ser consideradas.

Um ponto importante a ser desenvolvido trata-se do gradiente de autovalores repetidos, pois o mesmo deve ser desenvolvido para  $n$  autovalores idênticos, para que seja evitado a instabilidade do problema. Realizando-se estas sugestões o problema torna-se aplicável à construção de pórticos e treliças.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Achtziger, W., em 1999. Local Stability of Trusses in the Context of Topology optimization Part I: Exact Modelling, *Structural Optimization*, vol. 17, pp. 235 - 246.

Achtziger, W., em 1999. Local Stability of Trusses in the Context of Topology optimization Part I: Exact Modelling, *Structural Optimization*, vol. 17, pp. 247 - 258.

Adelman, H. M., Haftka, R. T., 1986. Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems, *AIAA Journal*, vol.24, pp. 823-832.

Allwood, R. J. e Chung, Y. S., em 1984. Minimum-Weight Design of Trusses by an Optimality Criteria Method, *International Journal for Numerical in Engineering*, vol. 20, pp. 697 - 713.

Arora, S., J., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill, New York.

Beckers, M. e Fleury, C., em 1997. A Primal-Dual Approach in Truss Topology Optimization, *An International Journal Computers & Structures*, vol. 64, pp. 77 - 88.

Brandon, J. A., 1984. Derivation and Significante of Second-Order Modal Design Sensitivities, *AIAA Journal*, vol. 22, pp. 723 - 724. Cardani, C. e Mantegza, P, em 1979. Calculation of Eigenvalue and Eigenvector Derivatives for Algebraic Flutter and Divergence Eigenproblems, *AIAA Journal*, vol. 17, pp. 408 - 412.

Cardoso, E. L., 2000. Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas, *Dissertação de Mestrado, UFRGS, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.*

Chen, J. L. e Ho, J. S., em 1992. Direct Variational Method for Sizing Design Sensitivity Analysis of Beam an Frame Structures, *Computers & Structures*, vol. 42, pp. 503 - 509.

Chen, J. L. e Ho, J. S., em 1993, Developing a Computer-aided Optimum Structural Design System by Using Commercial Finite Element Programs, *Advances in Engineering Software*, vol. 17, pp. 79 - 86.

Cheu, S., em 1989. Sensitivity Analysis and Shape Optimization of Axisymmetric Structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, pp. 95 - 108.

Choi K. K., Haug, E. J., Seong, H. G., em 1983. An Iterative Method for Finite Dimensional

Structural Optimization Problems With Repeated Eigenvalues, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 93 -112

Dailley, R. L., 1989. Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues, *AIAA*, vol. 27, pp. 486 -491.

Díaz, A. R. e Kikuchi, N., em 1992. Solutions to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 35, pp. 1487 - 1502.

Dorn, W. S., Gomory, R. E., e Greenberg, H. J., em 1964. Automatic design of optimal structures, *J. Mec.*, vol. 3, pp. 25 - 52.

Fox, R. L., Kapoor, 1968. Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors, *AIAA Journal*, vol. 6, pp. 2426-2429.

Fox, R. L., Kapoor, M. P., 1970. Structural Optimization in the Dynamics Response Regime: A Computational Approach, *AIAA Journal*, vol. 8, pp. 1798 - 1804.

Garg, S., 1973. Derivatives of Eigensolutions for a General Matrix, *AIAA Journal*, vol. 11, pp. 1191 - 1194.

Godoy, L. A., Taroco, E. O., Feijoo, R. A., em 1994. Second-Order Sensitivity Analysis in Vibration and Buckling Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 3999 - 4014.

Gutkowski, W., Bauer, J. e Iwanow, A., em 1985. Discrete Structural Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 51, pp. 71 - 78.

Haftka, R. T., em 1985. Sensitivity Calculations for Iteratively Solved Problems, *International Journal for Numerical in Engineering*, vol. 21 pp. 1535 - 1546.

Hirai, I., Kashiwaki, M., 1977. Short Communication Derivatives of Eigenvectors of Locally Modified Structural, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, pp. 1769 - 1773.

Hou, G. J. W., Kenny, S. P., em 1992. Eigenvalue and Eigenvector Approximate Analysis for Repeated Eigenvalue Problems, *AIAA Journal*, vol. 30, pp. 2317 - 2324.

Hsieh, C. C. e Arora J. S., em 1984. Structural Design Sensitivity Analysis with General Boundary Conditions: Static Problem, *International Journal for Numerical in Engineering*, vol. 20 pp. 1661 - 1670.

Imai, K., em 1983. Structural Optimization to Include Material Selection, *International Journal for Numerical in Engineering*, vol.19, pp. 217 - 235.

Khan, M. R., em 1984. Optimality Criterion Techniques Applied to Frames Having General Cross-Sectional Relationships, *AIAA Journal*, vol. 22, pp. 669 - 676.

Kirsch, U., em 1989. Optimal Topologies of Structures, *Apply Mechanic Rev*, vol. 42, pp. 223 - 238.

Kolakowski, P. e Holnicki-Szulc, J., em 1998. Sensitivity Analysis of Truss Structures (Virtual Distortion Method Approach), *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 43, pp. 1085 - 1108.

Kumar, V., Lee S. J. e German, M. D., em 1989. Finite Element Design Sensitivity Analysis and its Integration with Numerical Optimization Techniques for Structural Design, *Computes & Structures*, vol. 32, pp. 883 - 897.

Lajczok, M., em 1987. Optimization of Equivalent Periodic Truss Structures, *AIAA Journal*, vol. 25, pp. 502 - 504.

Liebermann, S., Gerdes, D., Rozvany, G. I. N. and Zho, M., em 1994. Topology Design of Tubular Structures with a Variety of Design Constraints, *Tubular Structures Symposium*, Melbourne, Australia.

Lin, R. M., Wang, Z., Lim, M. K., em 1996. A Pratical algorithm for the efficient computation of Eigenvector sensitives, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 130, pp. 355 - 367.

Liu, Z., Chen, S., Yu, M., Zhao, Y., 1994. Contribution of the Truncated Modes to Eigenvector Derivatives, *AIAA Journal*, vol. 32, pp. 1551 - 1553.

Manickarajah, D., Xie, Y. M., Steven, G. P., em 1998. An evolutionary method for optimization of plate buckling resistance, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 29, pp. 205 - 230.

Masur, E. F., em 1984. Optimal Structural Design Under Multiple Eigenvalue Constraints, In-

ternational Journal Solids Structures, vol. 20 pp. 211 - 231.

McGee, O. G., Phan, K. F., em 1992. Adaptable Optimality Criterion Techniques for Large-Scale Space Frames With Multiple Frequency Constraints, *Computer & Structures*, vol. 42, pp. 197 - 210.

Michel, A. G. M., 1904, The Limits of Economy of Material in Frame Structures, *Phil. Mag.*, vol.o, pp. 305-316.

Miura, H., Schmit, L. A. Jr., 1978. Seconde Order Aproximation of Natural Frequency Constraints in Structural Synthesis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 13, pp. 337 - 351.

Nakagiri, S., Suzuki, K., em 1997. Interval Estimation of Eigenvalue Problem Based on Finite Element Sensitivity Analysis and Convex Model, *JSME International Journal*, vol. 40, pp. 228 -233.

Nelson, R. B., 1976. Simplified of Eigenvector Derivatives, *AIAA*, vol. 14, pp.1201 - 1205.

Nha, C. D., Xie, Y. M. e Steven, G. P., em 1998. An Evolutionary Structural Optimization Method for Sizing Problems with Discrete Design Variables, *Computers & Structures*, vol. 68, pp. 419 - 431.

Ohsaki, M., Fujisawa, K., Katoh, N., Kanno, Y., em 1999. Semi-definite Programming for Topology Optimization of Trusses unde Multiple Eigenvalue Constraints, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 180, pp. 203 - 217.

Ojalvo, I. U., 1988. Efficient Computation of Modal Sensitivities for System with Repeated Frequencies, *AIAA*, vol. 26, pp. 361 - 366.

Ojalvo, I. U., Zhang, L. M., 1996. Efficient Eigenvector Sensitivities by a New Procedure Based on Lanczos Vectors, *AIAA Journal*, vol. 34, pp. 2392 -2394.

Pedersen, N. L., em 1973, Optimal Joint Positions for Space Trusses, *Journal of the Structural Divison, ST12*.

Pedersen, N. L., em 2000. Maximization of eigenvalues using topology optimization, *Structural Optimization*. To appear



Plaut, R. H., Huseyin, K., 1973. Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors in Non-Self-Adjoint Systems, *AIAA Journal*, vol. 11, pp. 250 - 251.

Rogers, L. C., 1970. Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors, *AIAA Journal*, vol. 8, pp. 943 - 944.

Rozvany, G. I. N., em 1995. Layout Optimization of Structures, *Appl. Mech. Rev.*, vol. 48, No.2, pp. 41 - 119.

Rudisill, C. S., 1974. Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors for a General Matrix, *AIAA Journal*, vol. 12, pp. 721 - 722.

Sadek, E. A., em 1986. Dynamic Optimization of Framed Structures with Variable Layout, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, pp. 1273 - 1294.

Sadek, E. A., em 1989. An Optimality Criterion Method for Dynamic Optimization of Structures, *International Journal for Numerical in Engineering*, vol. 28 pp. 579 - 592.

Song, D., Han, W., Chen, S., Qiu, Z., 1996. Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues, *AIAA Journal*, vol. 34, pp. 859 - 862.

Sutter, T. R., Camarda, C. J., Walsh, J. L., Adelman, H. M., em 1988. Comparison of Several Methods for Calculating Vibration Mode Shape Derivatives, *AIAA Journal*, vol.26, pp. 1506 - 1511.

Tada, Y., Minami E., em 1993. Optimum Design of 3-D Truss Structure and Its Effect on Control. *JSME International Journal*, vol. 36, pp. 90 - 96.

Tseng C. H. e Lu, T. W., em 1990. Minimax Multiobjective Optimization in Structures Design, *International Journal for Numerical in Engineering*, vol. 30 pp. 1213 - 1228.

Vanhonacker, P., 1980. Differential and Difference Sensitives of Natural Frequencies and Mode Shapes of Mechanical Structures, *AIAA Journal*, vol. 18, pp. 1511 - 1514.

Venkayya, V. B., em 1978. Structural Optimization: A Review and some Recommendations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 13, pp. 203 -228.

Wang, B. P., 1991. Improved Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics, *AIAA*, vol. 29, pp. 1018 - 1020.

Wang, J. Z., Huang, Z. C. e Zhang, Q. J. em 1993. Sensitivities of Mechanical Structures to Structural Parameters, *Computer & Structures*, vol. 49, pp. 557 - 560.

Woo, T. H., em 1987. Space Frame Optimization Subject to Frequency Constraints, *AIAA Journal*, vol. 25, pp. 1396 - 1404.

Wu, C. C. e Arora, J. S., em 1987. Design Sensitivity Analysis and Optimization of Nonlinear Structural Response Using Incremental Procedure, *AIAA Journal*, vol.25, pp. 1118 - 1125.

Xu, T., Chen, S. e Liu, Z., em 1994. Pertubation Sensitivity of Generalized Modes of Defective Systems, *Computers & Structures*, vol. 52, pp. 179 - 185.

Zheng, S., Ni, W. e Wenliang, W., em 1998. Combined Method for Calculating Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues, *AIAA Journal*, vol. 36, pp. 428 - 431.

## APÊNDICE A

Este apêndice apresenta uma descrição simplificada do programa implementado nesta dissertação. O primeiro fluxograma, figura 7.1, apresenta os principais blocos do programa, estando dividido em quatro partes principais, sendo o fluxograma básico do programa de otimização topológica implementado.

O primeiro bloco apresentado na figura 7.1 trata da entrada de dados, onde as coordenadas, conectividades, número de elementos, nós, restrições e forças são informados. Esta malha inicial foi gerada no programa MALHA, desenvolvido no laboratório GMAP. Este programa permite disser qual o tipo de vizinhança que será composta a malha da estrutura, conforme foi apresentado nesta dissertação.

A segunda figura 7.2 apresenta o fluxograma para solução das equações de equilíbrio, utilizado para problemas onde somente apresenta restrição de flexibilidade. No terceiro fluxograma, figura 7.3, além de apresentar o fluxograma para solução das equações de equilíbrio, apresenta a solução do problema de autovalores e autovetores, onde o menor autovalor em módulo representa a carga crítica e o seu respectivo autovetor o modo de flambagem. Este fluxograma é utilizado para problemas que apresentam a restrição de flambagem. Para verificação dos resultados obtidos com esta parte do programa, todos os problemas que tinham restrição de estabilidade estrutural foram verificados os seus modos de flambagem no Ansys, conforme mostrado no capítulo dos resultados.

A figura 7.4, esta relacionada diretamente com programa de otimização, pois neste fluxograma apresenta o cálculo das derivadas de flambagem ou flexibilidade e a linearização do problema. As novas áreas para os elementos são obtidas através da programação linear, onde busca se obter o mínimo da função objetivo.

O fluxograma da figura 7.5 mostra a determinação dos limites móveis para cada elemento. Se para as três últimas iterações não houver variação do sinal na variável de projeto, o limite é aumentado, caso contrário é diminuído. O valor adotado para o aumento ou diminuição do limite móvel é de acordo com o problema a ser solucionado.

O último bloco da figura 7.1 trata da convergência do problema. Esta é avaliada pela variação da função objetivo e pela satisfação das função das restrições. Se em duas iterações sucessivas a variação da função custo for inferior ou igual 0.0001 e as restrições forem satisfeitas, o problema é terminado.

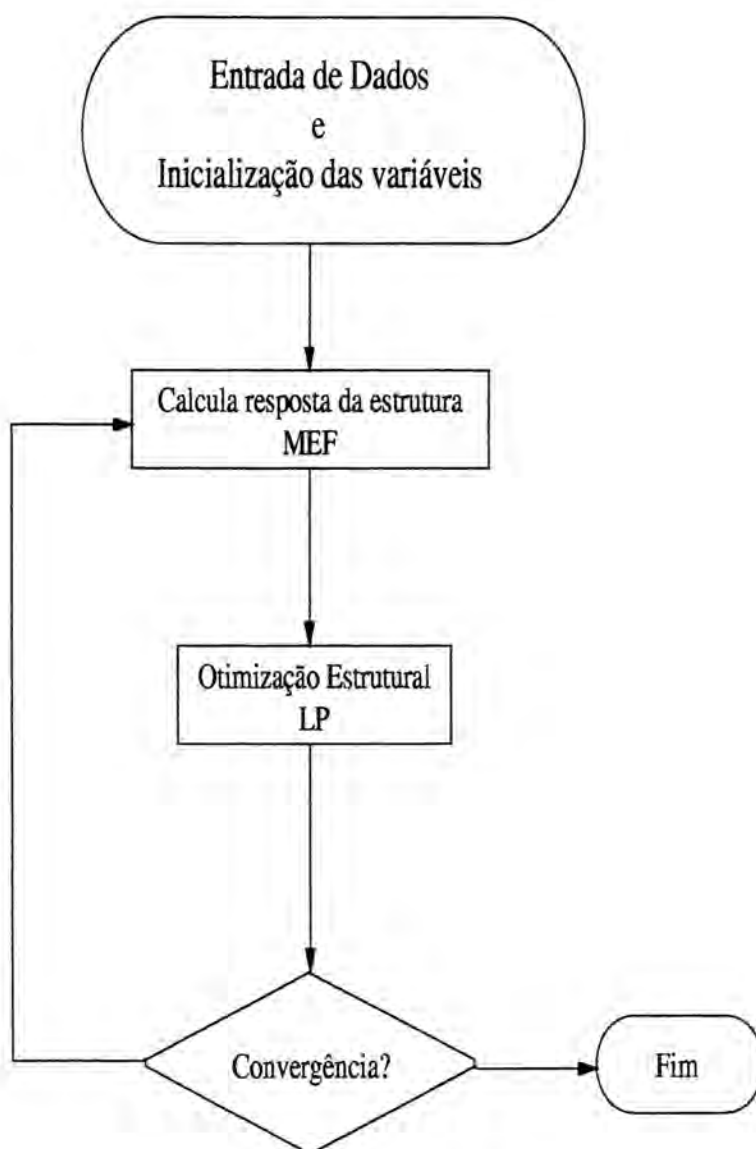


Figura 7.1: Fluxograma do programa



Figura 7.2: Cálculo da resposta da estrutura (flexibilidade)

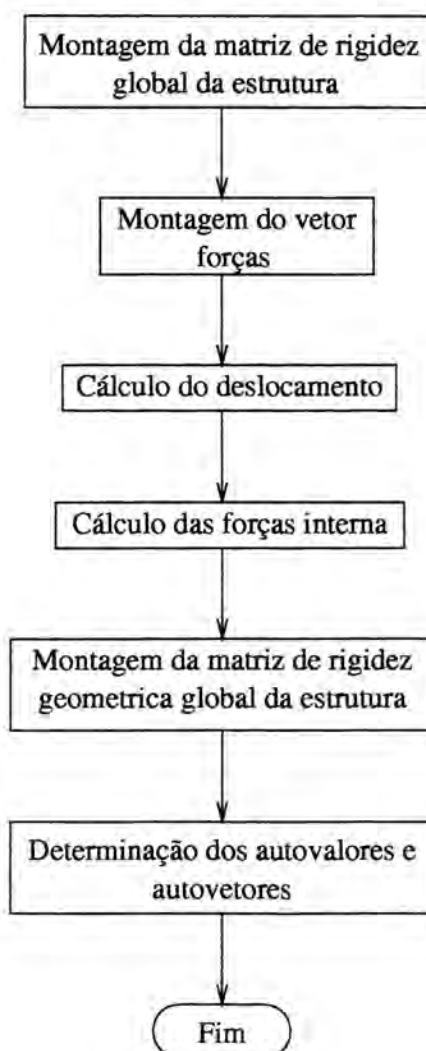


Figura 7.3: Cálculo da resposta da estrutura (flambagem)





Figura 7.4: Etapas do procedimento de otimização utilizado neste trabalho

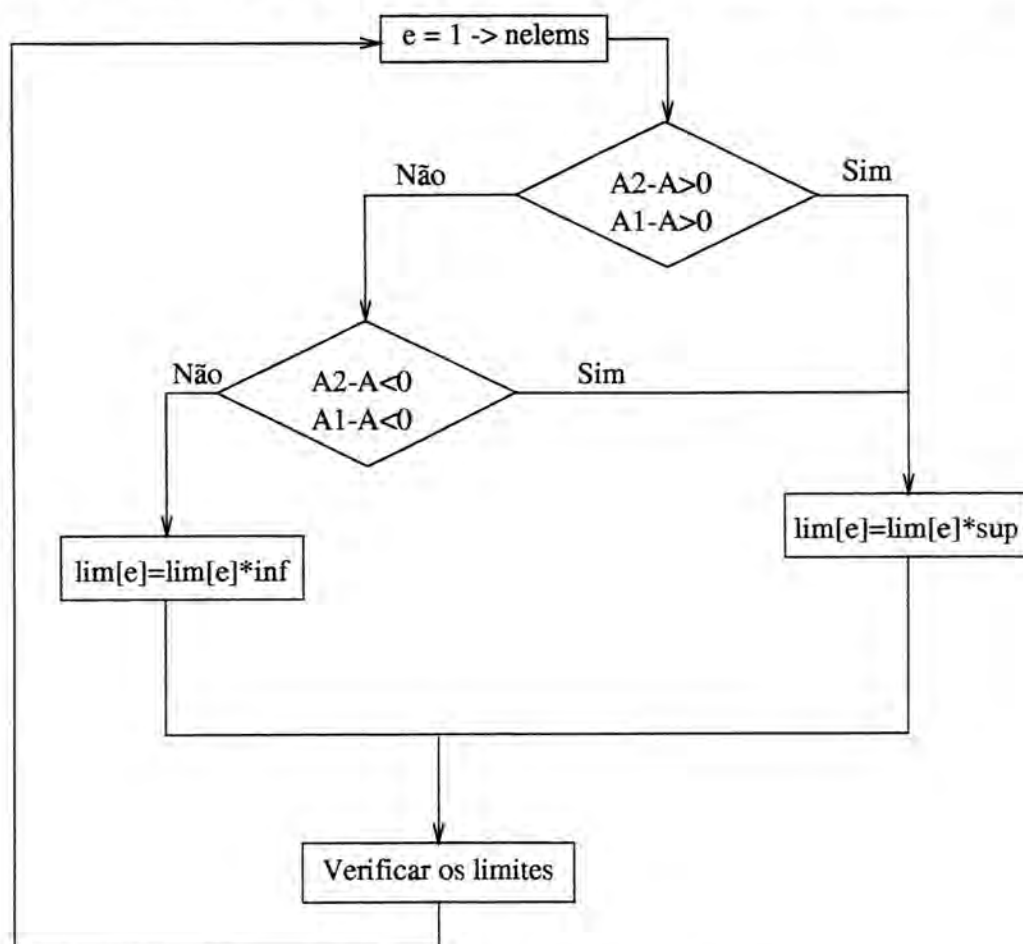


Figura 7.5: Determinação dos limites móveis