

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

AVALIAÇÃO DE UM MODELO HIPERELÁSTICO INCOMPRESSÍVEL: ANÁLISE DE
RESTRICÇÕES, IMPLEMENTAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS
CONSTITUTIVOS

por

Felipe Tempel Stumpf

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Agosto de 2009.

**AVALIAÇÃO DE UM MODELO HIPERELÁSTICO INCOMPRESSÍVEL: ANÁLISE
DE RESTRIÇÕES, IMPLEMENTAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS
CONSTITUTIVOS**

por

Felipe Tempel Stumpf
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Profa. Dra. Maria Madalena de Camargo Forte

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz

Prof. Dr. Horácio Antônio Vielmo
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 20 de Agosto de 2009.

*Dedico este trabalho aos meus pais
Waldyr e Elisabeth e ao meu irmão Marcelo*

“Existe uma teoria que diz que, se um dia alguém descobrir exatamente para que serve o Universo e por que ele está aqui, ele desaparecerá instantaneamente e será substituído por algo ainda mais estranho e inexplicável. Existe uma segunda teoria que diz que isso já aconteceu.”

Douglas Adams

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Waldyr e Elisabeth, de quem devo ter herdado o gosto pela ciência e pesquisa;

Ao Marcelo Stumpf que, apesar de ser meu irmão mais novo, é o meu grande ídolo;

À minha avó Elisabeth, por ter me emprestado tão gentilmente seu apartamento desde a época do meu ingresso no curso de graduação;

À Ana Rita, pelo apoio, incentivo, carinho, dedicação, amizade e tantos momentos de felicidade que nenhuma outra pessoa seria capaz de me proporcionar. Te amo!,

Ao meu professor orientador Rogério (Rato) Marczak, pelos ensinamentos, paciência e incentivo, apesar do seu péssimo gosto para times de futebol;

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela oportunidade de concessão de bolsa de estudos;

A todos os professores e bolsistas de graduação e pós-graduação do Grupo de Mecânica Aplicada (GMAp), por estarem sempre dispostos a ajudar, independentemente do que estiverem fazendo;

Ao PROMEC, pela oportunidade e apoio;

Ao meu primo Erich Nakasu, pela incomparável contribuição das inúmeras conversas sem sentido que, geralmente, chegavam a conclusões igualmente sem sentido, mas sempre com elevado conteúdo científico;

RESUMO

Apesar do crescente número de publicações estudando as diferentes propriedades e o comportamento peculiar inerente dos materiais hiperelásticos submetidos a deformações, as quais muitas vezes propõem modelos matemáticos para caracterizá-los, muito pouco esforço é observado no sentido de conferir a este modelo matemático propriedades básicas como garantia de unicidade das soluções, estabilidade numérica ou mesmo comportamento físico condizente com a realidade. Este trabalho apresenta uma revisão das diferentes restrições matemáticas que devem ser impostas às equações da função energia de deformação dos modelos hiperelásticos para garantir-lhes estas propriedades básicas desejadas aplicadas à família de modelos de Hoss-Marczak [Hoss, 2009]. Como resultado, obtém um conjunto de desigualdades que devem ser satisfeitas pelas constantes constitutivas destes modelos.

Posteriormente estes mesmos modelos são implementados em um programa comercial de elementos finitos e casos de deformações homogêneas e não-homogêneas são simulados para comparar os seus resultados com aqueles obtidos utilizando-se modelos consagrados pela literatura.

Por fim, este trabalho apresenta uma metodologia de otimização multi-critério das constantes hiperelásticas baseada na minimização do erro entre dados teóricos e experimentais não somente de um ensaio, como usualmente é feito, e sim da soma dos erros de dois ou mais ensaios. As curvas dos ajustes teóricos assim obtidas são confrontadas com as experimentais e, através da comparação direta entre os coeficientes de correlação não-linear das curvas, conclui-se que a metodologia proposta fornece resultados superiores a outras metodologias.

ABSTRACT

“Assessment of a hyperelastic model for incompressible materials: analysis of restrictions, numerical implementation and optimization of the constitutive parameters.”

In spite of the increasing in the number of publications proposing hyperelastic models to better characterize different types of rubber-like materials, the number of them concerned with aspects related to unicity of solution, numerical stability or plausibility of the physical behavior is much smaller. This work presents a literature review of the various types of mathematical restrictions that should be verified in strain energy density functions for hyperelastic constitutive models. These restrictions are verified for the HMI constitutive models [Hoss, 2009]. As a result, a set of inequalities that must be respected by the constitutive parameters of those models is obtained.

In order to further assess the performance of the HMI models, their strain energy functions are implemented in a commercial finite element software. Different cases of homogeneous and non-homogeneous deformations are analyzed and the results are compared to those obtained when using some classical constitutive models.

Finally, a multi-objective optimization procedure is implemented to obtain the best possible set of constitutive parameters for a general hyperelastic model. The method allows one to fit the chosen model to more than one set of experimental data. Theoretical predictions obtained using the proposed method are compared with experimental curves through non-linear fitting coefficients. The results show that the methodology generates better predictions than those obtained by adjusting the parameters against a single set of experimental data or combining multiple single-objective fittings.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Introdução.....	1
1.2. Objetivos do trabalho	3
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
3. CONCEITOS ELEMENTARES DE ELASTICIDADE NÃO-LINEAR.....	11
3.1. Descrição do Movimento.....	11
3.2. Medidas de deformação.....	13
3.2.1. Tensor gradiente de deformação	13
3.2.2. Tensores de deformação de Cauchy-Green.....	14
3.2.3. Tensor deformação de Green-Lagrange	15
3.2.4. Tensor deformação de Almansi.....	15
3.2.5. Tensor deformação infinitesimal.....	16
3.2.6. Alongamento	16
3.3. Medidas de tensão	17
3.3.1. Tensão de Cauchy.....	17
3.3.2. Tensores tensão de Piola-Kirchhoff	18
3.4. Relações constitutivas	19
4. APLICAÇÕES DE RESTRIÇÕES AOS MODELOS HIPERELÁSTICOS HMI.....	24
4.1. Objetividade da função W	26
4.2. Imposição de restrições aos modelos HMI.....	27
5. IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS HIPERELÁSTICOS HMI EM PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS.....	32
5.1. Resultados das implementações sob deformações homogêneas	33
5.2. Análises de casos sob deformações não-homogêneas.....	36
6. OBTENÇÃO DAS CONSTANTES HIPERELÁSTICAS UTILIZANDO DADOS DE DOIS OU MAIS ENSAIOS.....	44
6.1. Metodologia e implementação.....	46

6.2. Resultados.....	51
7. CONCLUSÕES.....	71
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	74
ANEXO I.....	80
ANEXO II.....	82
ANEXO III.....	83
ANEXO IV.....	87
ANEXO V.....	88

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres Romanos

a_i	Funções escalares
b_i	Funções escalares
B	Ensaio de tração biaxial
\mathbf{B}	Tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda
\mathcal{B}	Região tridimensional fechada que define um corpo
\mathbf{b}	Vetor forças de corpo
b	Constante hiperelástica
C	Região fechada arbitrária no espaço euclidiano tridimensional na configuração instantânea
C^0	Região fechada arbitrária no espaço euclidiano tridimensional na configuração indeformada
\mathbf{C}	Tensor de deformação de Cauchy-Green à direita; vetor contendo as constantes hiperelásticas a serem minimizadas
C_2	Constante hiperelástica
C_{i0}, C_{0i}, C_{ii}	Constantes hiperelásticas
\bar{C}	Grupo de constantes obtido por combinação linear de C_T , C_B e C_P
C_T	Conjunto de constantes obtidas para o ensaio de tração uniaxial
C_B	Conjunto de constantes obtidas para o ensaio de tração biaxial
C_P	Conjunto de constantes obtidas para o ensaio de cisalhamento puro
$d\mathbf{f}$	Vetor infinitesimal de força
ds	Área infinitesimal na qual atua $d\mathbf{f}$
dm	Diferencial de massa
\mathbf{E}	Tensor de deformação de Green-Lagrange
E	Energia mecânica total; função erro a ser minimizada

e_B	Soma dos erros de cada ponto entre curvas teórica e experimental do ensaio de tração biaxial
e_p	Soma dos erros de cada ponto entre curvas teórica e experimental do ensaio de cisalhamento puro
e_T	Soma dos erros de cada ponto entre curvas teórica e experimental do ensaio de tração uniaxial
F	Tensor gradiente de deformação
FI	Modelo hiperelástico de Fung
G	Tensor de deformação de Almansi
GI	Modelo hiperelástico de Gent
HDR	Borracha de alto amortecimento
HMI	Família de modelos de Hoss-Marczak
HMLSI	Modelo hiperelástico de Hoss-Marczak Low Strain
HMHSI	Modelo hiperelástico de Hoss-Marczak High Strain
I	Matriz identidade
I_B, II_B, III_B	Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor B de Cauchy-Green à esquerda
I_C, II_C, III_C	Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor C de Cauchy-Green à direita
I_L	Constante hiperelástica
J	Jacobiano da transformação
J_L	Constante hiperelástica
MRI5	Modelo hiperelástico de Mooney-Rivlin de 5 termos
MRI9	Modelo hiperelástico de Mooney-Rivlin de 9 termos
n	Vetor normal à área ds
n	Constante hiperelástica
NR55	Borracha natural 55% de negro de fumo

OI2	Modelo hiperelástico de Ogden de 2 termos
P	Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff
\mathcal{P}	Região tridimensional fechada arbitrária do corpo \mathcal{B}
p	Pressão hidrostática
P	Ensaio de cisalhamento puro
PSI	Modelo hiperelástico de Pucci-Saccomandi
Q	Matriz de rotação arbitrária
R	Tensor ortogonal qualquer
R^2	Coefficiente de correlação
S	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff
S_{12}	Tensão cisalhante no plano 1-2
t	Instante de tempo
t	Vetor tração na área ds por conta da força $d\mathbf{f}$
t_B	Tensão teórica para ensaio de tração biaxial
t_P	Tensão teórica para ensaio de cisalhamento puro
t_T	Tensão teórica para ensaio de tração uniaxial
T	Tensor de tensão arbitrário
T	Ensaio de tração uniaxial
u	Vetor deslocamento
U	Tensor de alongamento à direita
v	Volume do corpo deformado
v	Vetor velocidade
V	Volume do corpo indeformado
V	Tensor de alongamento à esquerda
W	Densidade de energia potencial elástica por unidade de volume; função energia de deformação
w_B	Peso do ensaio de tração biaxial

w_P	Peso do ensaio de cisalhamento puro
w_T	Peso do ensaio de tração uniaxial
\mathbf{x}	Vetor posição final de um ponto
\mathbf{X}	Vetor posição inicial de um ponto
YI3	Modelo hiperelástico de Yeoh de 3 termos
YI5	Modelo hiperelástico de Yeoh de 5 termos

Caracteres gregos

α	Constante hiperelástica
β	Constante hiperelástica
ε	Tensor deformação infinitesimal; deformação de engenharia
λ	Alongamento (ou <i>stretch</i>)
μ	Constante hiperelástica
Π	Potência mecânica total
ρ	Constante hiperelástica
σ	Tensor de tensão de Cauchy

Operadores matemáticos

$\det(\cdot)$	Determinante da matriz
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$(\cdot)^{-T}$	Operação de inversão da transposta de uma matriz
$\operatorname{div}(\cdot)$	Operação de divergente
$\operatorname{tr}(\cdot)$	Operação de traço de um tensor
$\operatorname{cof}(\cdot)$	Matriz de co-fatores de uma matriz

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1. Descrição do movimento de um corpo durante o processo de deformação.....	12
Figura 3.2. Esquematização de uma seção de um corpo sob equilíbrio.....	17
Figura 4.1. Algoritmo de verificação da Equação 4.25.....	30
Figura 5.1. Dimensões dos corpos de prova numéricos.....	34
Figura 5.2. Resultados numéricos e experimentais para tração uniaxial da borracha de Treloar.	35
Figura 5.3. Resultados numéricos e experimentais para compressão uniaxial da borracha HDR.	35
Figura 5.4. Resultados numéricos e experimentais para cisalhamento puro da borracha natural NR55	36
Figura 5.5. Bloco quadrado submetido a compressão uniaxial combinada com cisalhamento puro.....	37
Figura 5.6. Resultados de banda de pressão hidrostática	38
Figura 5.7. Resultados de tensão cisalhante S_{12}	39
Figura 5.8. Dimensões e condições de contorno do caso de deformação não-homogênea.....	40
Figura 5.9. Resultados de tensão principal máxima.....	41
Figura 5.10. Resultados de deformação principal máxima	42
Figura 6.1. Metodologia seguida para o Ajuste Multi-Critério.....	45
Figura 6.2. Conjunto de dados experimentais e ajuste teórico obtido por mínimos quadrados....	46
Figura 6.3. Diferenças entre valores experimental e teórico das tensões.....	47
Figura 6.4. Equação da tensão para ensaio de tração uniaxial	48
Figura 6.5. Equação da tensão para ensaio de tração biaxial	48
Figura 6.6. Equação da tensão para ensaio de cisalhamento puro	48
Figura 6.7. Variáveis envolvidas no cálculo do R^2 não linear.....	52
Figura 6.8. Modelo HMLSI ajustado para dados de Treloar	53
Figura 6.9. Modelo HMLSI ajustado para dados de NR55.....	53
Figura 6.10. Modelo HMHSI ajustado para dados de Treloar	54
Figura 6.11. Modelo HMHSI ajustado para dados de NR55	54
Figura 6.12. Modelo MRI9 ajustado para dados de Treloar	55
Figura 6.13. Modelo MRI9 ajustado para dados de NR55.....	55
Figura 6.14. Modelo YI3 ajustado para dados de Treloar.....	56
Figura 6.15. Modelo YI3 ajustado para dados de NR55	56
Figura 6.16. Modelo GI ajustado para dados de Treloar.....	57
Figura 6.17. Modelo GI ajustado para dados de NR55	57

Figura 6.18. Modelo PSI ajustado para dados de Treloar	58
Figura 6.19. Modelo PSI ajustado para dados de NR55	58
Figura 6.20. Modelo FI ajustado para dados de Treloar	59
Figura 6.21. Modelo FI ajustado para dados de NR55.....	59
Figura 6.22. Modelo OI2 ajustado para dados de Treloar.....	60
Figura 6.23. Modelo OI2 ajustado para dados de NR55	60
Figura 6.24. Curva de predições para T utilizando constantes ajustadas para B, P e pelo método proposto. Modelo utilizado: HMLSI.....	62
Figura 6.25. Curva de predições para B utilizando constantes ajustadas para T, P e pelo método proposto. Modelo utilizado: HMLSI.....	63
Figura 6.26. Curva de predições para P utilizando constantes ajustadas para T, B e pelo método proposto. Modelo utilizado: HMLSI.....	64
Figura 6.27. Modelo HMLSI utilizado para ajustar constantes da borracha de silicone utilizando o método da Equação 6.1 ($w_T = w_P = \frac{1}{4}$ e $w_B = \frac{1}{2}$) e o método multi-critério da Equação 6.9 proposto neste trabalho.....	66
Figura 6.28. Dimensões da placa analisada.....	67
Figura 6.29. Configurações deformadas para a peça analisada.....	68
Figura 6.30. Resultados de máxima tensão principal para os modelos HMLSI e HMHSI.....	69
Figura 6.31. Resultados sob forma das bandas de pressão hidrostática para os modelos HMLSI e HMHSI	70
Figura V.1. Demonstração gráfica de conjunto convexo e não convexo.....	88
Figura V.2. Demonstração gráfica de função convexa e não convexa (ou côncava).....	89

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 6.1. Coeficiente de regressão não-linear para as curvas da Figura 6.24.....	62
Tabela 6.2. Coeficiente de regressão não-linear para as curvas da Figura 6.25.....	63
Tabela 6.3. Coeficiente de regressão não-linear para as curvas da Figura 6.26.....	64
Tabela 6.4. Constantes hiperelásticas para os modelos HMLSI e HMHSI para amostras de borracha de silicone.....	68
Tabela 6.5. Reação na aresta inferior da peça para os três casos	69
Tabela III.1. Dados experimentais de deformação e tensão para borracha NR55	84
Tabela III.2. Dados experimentais de deformação e tensão de Treloar	86
Tabela III.3. Dados experimentais de deformação e tensão da borracha HDR	86
Tabela III.4. Dados experimentais de deformação e tensão da borracha de silicone.....	86

1. INTRODUÇÃO

1.1. Introdução

O crescimento das aplicações de materiais elastoméricos na indústria através das últimas décadas tornou necessário que engenheiros e analistas entendessem melhor o comportamento não-linear entre tensão e deformação deste tipo de material. Desde estudos iniciais como o de Mooney [1940] propondo uma função energia de deformação que relacionava tensão com deformação para elastômeros, diversos autores têm proposto seus próprios modelos, baseados tanto em observações fenomenológicas como na estrutura molecular destes materiais.

Quando um sólido qualquer é submetido a um conjunto de forças externas, o trabalho exercido por estas fica acumulado de alguma forma para que, uma vez retiradas as forças, o corpo possa retornar à sua posição inicial. No âmbito da elasticidade, é postulada a existência de uma *função densidade de energia de deformação* que, além de ser escrita somente em função dos componentes de deformação, deve ainda satisfazer o Princípio da Conservação de Energia Mecânica.

Apesar de, na formulação constitutiva dos problemas de hiperelasticidade baseada no Princípio da Conservação da Energia Mecânica, as trocas térmicas entre a peça e o meio serem negligenciadas, Treloar [1973] mostrou que esta é uma consideração que levará inerentemente a resultados imprecisos. Segundo Treloar [1973], problemas de elasticidade envolvendo elastômeros não podem ser considerados estáticos, como usualmente é feito para materiais metálicos, por exemplo, e sim cinéticos. Foi mostrado ainda que a quantidade de calor cedido pela peça ao meio durante um processo de extensão, por exemplo, deve ser idêntico à quantidade de trabalho exercido pelas forças externas. Naturalmente, a recíproca é verdadeira para um processo de retração, ao longo do qual, calor é absorvido pela peça.

A incorporação da influência de efeitos térmicos sob o comportamento mecânico de elastômeros é ainda tema ativo de pesquisa e é observado que não existem, até os dias de hoje, trabalhos consistentes que tenham apresentado bons resultados ao tentar este acoplamento. No presente trabalho será seguida a linha clássica de desenvolvimento da hiperelasticidade, ou seja, as equações constitutivas satisfazem o Princípio da Conservação da Energia Mecânica e qualquer efeito de natureza térmica é negligenciado.

A função energia de deformação para materiais metálicos é amplamente conhecida e difundida entre os engenheiros e assume uma forma quadrática que garante a eles uma relação

linear entre tensão e deformação. Quando se trabalha com materiais elastoméricos, no entanto, principalmente pela tamanha diversidade de diferentes borrachas e pela influência considerável que pequenas quantidades de aditivos ou até mesmo que o processo de vulcanização tem sob o comportamento mecânico do produto final, não há uma forma consagrada para a energia de deformação aplicável. É neste sentido que vêm sendo aplicados os maiores esforços dos pesquisadores da área: propor uma função que seja aplicável à grande maioria dos elastômeros, tanto modelando adequadamente a curva tensão-deformação obtida após determinado ensaio experimental como predizendo com razoável acuracidade estas curvas para casos diferentes de deformação não ensaiados.

Por modelo hiperelástico, entende-se determinada função energia de deformação proposta que vise modelar o comportamento mecânico de materiais hiperelásticos. Dentre os modelos hiperelásticos mais consagrados, considerando isotropia, estão os modelos de Mooney-Rivlin [Rivlin e Saunders, 1951], Neo-Hookeano [Treloar, 1973], Arruda-Boyce [Arruda e Boyce, 1993], Yeoh [Yeoh, 1990], Gent-Thomas [Gent e Thomas, 1958], Ogden [Ogden, 1972], Knowles [Knowles, 1977], entre outros. Uma revisão bastante completa contemplando diversos modelos hiperelásticos diferentes é encontrada em Hoss [2009].

A grande maioria dos modelos hiperelásticos são funções escritas em termos dos principais invariantes de deformação (entre os citados, Mooney-Rivlin, Neo-Hookeano, Yeoh, Gent-Thomas e Knowles), com algumas exceções de modelos escritos em função dos principais alongamentos (entre os citados, Arruda-Boyce e Ogden). Na Seção 3.4 serão comentadas algumas das características atreladas a cada um destes tipos de expressão.

Baseado em observações e no desempenho de mais de 40 modelos hiperelásticos distintos, Hoss [2009] desenvolveu uma família de modelos heurísticos com o objetivo de não somente representar com acuracidade a curva tensão-deformação obtida experimentalmente para materiais elastoméricos isotrópicos incompressíveis como também prover uma boa predição do comportamento desta curva para deformações outras que não aquelas ensaiadas. É exatamente durante a tentativa de predição do comportamento do material para formas de deformação diferentes das ensaiadas que a maioria dos modelos hiperelásticos desempenha de maneira insatisfatória.

Foi através da identificação dos termos nas equações hiperelásticas responsáveis por determinadas de suas características (como enrijecimento acentuado para grandes deformações e perda de rigidez para deformações moderadas) que Hoss [2009] chegou a duas equações hiperelásticas denominadas Hoss-Marczak Low Strain (HMLSI) e Hoss-Marczak High Strain (HMHSI), que juntas formam a família de modelos hiperelásticos HMI. Cabe salientar que

ambos os modelos devem ser utilizados na modelagem apenas de elastômeros isotrópicos e incompressíveis (por este segundo motivo que a letra 'I' está incorporada nas siglas dos modelos).

O modelo HMLSI é uma formulação híbrida que consiste na adição de um termo exponencial ao modelo *Power-law* básico proposto por Knowles [1977], responsável por melhorar a qualidade dos ajustes e previsões para baixas faixas de deformação [Yeoh, 1993].

O modelo HMHSI é basicamente uma forma aprimorada do modelo HMLSI, que considera a influência do segundo invariante do tensor de deformação através de seu logaritmo natural, buscando a melhor captura do efeito de enrijecimento em grandes deformações. Na sequência deste texto serão apresentadas as equações características de ambos os modelos.

No entanto, é notado que, apesar do grande número de estudos nos quais se propõem modelos com razoável concordância entre dados experimentais e previsão teórica, há pouca preocupação dos autores em relação a requisitos matemáticos de estabilidade numérica e unicidade de soluções que devem ser preenchidos pelas funções energia de deformação.

1.2. Objetivos do trabalho

O primeiro objetivo do presente trabalho é aplicar as devidas restrições matemáticas à família de modelos hiperelásticos HMI proposta por Hoss [2009], procurando obter, com isto, relações matemáticas restritivas entre suas diferentes constantes constitutivas. Uma vez obtidas tais relações, estas deverão necessariamente ser satisfeitas sempre que um dos modelos da família HMI for utilizado para modelagem de um determinado elastômero.

Objetiva-se também, uma vez determinadas quais são as condições que as constantes constitutivas dos modelos HMI devem satisfazer, implementar estes modelos hiperelásticos em um código comercial de elementos finitos para verificar seu desempenho numérico através da simulação de alguns casos tanto de deformação homogênea como de deformação não-homogênea.

Para analisar seus desempenhos numéricos, dados de diferentes ensaios realizados em diferentes borrachas serão utilizados para levantamento das constantes hiperelásticas de vários modelos propostos pela bibliografia, como Mooney-Rivlin [Rivlin e Saunders, 1951], Yeoh [Yeoh, 1990], Pucci-Saccomandi [Pucci e Saccomandi, 2002], Ogden [Ogden, 1972], entre outros, juntamente com os modelos HMI. Todos estes modelos hiperelásticos serão inseridos em um programa comercial de elementos finitos através de subrotinas escritas em código FORTRAN, e os ensaios experimentais serão repetidos numericamente. Esta primeira abordagem busca verificar a validade das implementações, através da comparação dos resultados

numéricos com os experimentais. Uma vez garantido que as subrotinas estão modelando o comportamento do material da maneira desejada, serão simulados problemas mais complexos de deformação não-homogênea.

Como último objetivo, este trabalho pretende apresentar uma metodologia de ajuste baseada em uma otimização multi-critério das constantes hiperelásticas, que consistirá na minimização do erro não somente entre dados teóricos e experimentais de um ensaio, como usualmente é feito hoje em dia, e sim da soma dos erros entre dados teóricos e práticos para dois ou mais ensaios. Para avaliação dos resultados, as curvas dos ajustes teóricos serão confrontadas com as experimentais e comparadas através de seus coeficientes de regressão não-lineares.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os primeiros trabalhos voltados para a investigação de restrições em modelos hiperelásticos datam de meados do Século XX. Truesdell [1956] foi um dos pioneiros nesta área ao propor condições à função energia de deformação utilizando tanto critérios físicos como critérios empíricos ou puramente matemáticos [Bilgili, 2004]. Através da determinação de tais restrições, ele buscava garantir que “problemas fisicamente possíveis tivessem soluções fisicamente plausíveis” [Truesdell, 1956].

Basicamente pode-se dizer que os critérios de natureza física buscam garantir que não haja nenhuma inconformidade com as leis fundamentais da física durante o processo de deformação dos corpos. Os critérios puramente matemáticos estão relacionados com a existência e unicidade das soluções e estabilidade matemática dos modelos, enquanto que os critérios empíricos foram criados a partir da observação do comportamento de dados experimentais encontrados na literatura.

Pensando em materiais isotrópicos compressíveis em geral, Truesdell e Noll [1965] citam as seguintes condições para garantir seu comportamento fisicamente plausível:

- a) Desigualdades P-C: A desigualdade P-C (pressão-compressão) garante que o volume de um sólido compressível isotrópico deve reduzir quando submetido à compressão e aumentar quando submetido à tração.
- b) Desigualdades T-E: As desigualdades T-E (tração-extensão) garantem que, durante o alongamento de um cubo de material isotrópico compressível ao longo de uma de suas direções principais a força de tração deve ser aumentada ao se manter as faces paralelas a esta direção fixas.
- c) Condição IFS: A condição IFS (do inglês *invertibility of force-stretch*) espera garantir que a aplicação de pares de forças opostas normais às faces de um cubo unitário de material isotrópico gere uma, e apenas uma condição de deformação puramente homogênea.
- d) Desigualdades E-T: Garantindo a aplicação das condições IFS, as desigualdades E-T (extensão-tração) objetivam garantir que, se um par de forças opostas em um cubo homogeneamente deformado com faces perpendiculares aos eixos principais é aumentado em magnitude enquanto os demais pares são mantidos constantes, o cubo irá se alongar nesta direção correspondente.

- e) Desigualdades O-F: Também conhecidas como desigualdade C-N [Coleman e Noll, 1959], as desigualdades O-F (do inglês *ordered forces*) garantem, considerando novamente um bloco de material isotrópico compressível em equilíbrio com pares de forças iguais e opostas atuando nas faces, que o maior alongamento se dará na direção da maior força.
- f) Desigualdades de B-E: As desigualdades de B-E [Baker e Ericksen, 1954] são muito semelhantes às desigualdades O-F, mas foram explicitadas em função das tensões principais ao invés das forças.

As formulações de todas as condições acima são baseadas nas equações da teoria da elasticidade (ver Truesdell e Noll, 1965).

A partir das desigualdades O-F e desigualdades B-E, Truesdell e Noll [1965] observaram que elas se encaixavam em uma condição maior, à qual deram o nome de desigualdade E (desigualdade empírica) e escreveram em função dos coeficientes b_i da equação constitutiva para materiais isotrópicos elásticos sob grandes deformações (Equação 3.39 deste texto).

Em se tratando de materiais incompressíveis, é assegurado que o processo de deformação seja isocórico, conseqüentemente eliminando a possibilidade de aplicação da maioria das desigualdades citadas acima. Para estes materiais, as desigualdades P-C, T-E e E-T são eliminadas, uma vez que levam em conta mudança no volume da peça, restando para serem aplicadas a materiais elásticos isotrópicos incompressíveis, somente as desigualdades O-F e B-E.

Uma vez que as desigualdades O-F e B-E são semelhantes, mas apenas escritas sob pontos de vista diferentes e ambas se enquadram no conceito maior das desigualdades E, serão abordadas aqui somente as desigualdade empíricas.

As equações de Baker-Ericksen, aplicadas a um material elástico isotrópico incompressível geram duas desigualdades envolvendo as primeiras derivadas da função energia de deformação, as quais serão mais bem explicadas nas seções subsequentes deste texto.

As restrições matemáticas aos modelos constitutivos visam garantir ao modelo existência e unicidade nas soluções e estabilidade numérica. Segundo Balzani *et al.* [2006], na estrutura das simulações computacionais via métodos de Newton, o tratamento matemático de problemas básicos de valores de contorno é baseado em métodos diretos de cálculo das variações. Neste contexto, as equações constitutivas, representadas pelas funções energia de deformação, devem não somente refletir o comportamento adequado do material analisado, como também preencher

requisitos gerais de convexidade, visando obter tanto um comportamento físico plausível para o material como também uma estabilidade numérica adequada.

As desigualdades de Coleman e Noll (equivalentes às desigualdades O-F) implicam na propriedade de convexidade da função energia de deformação em relação ao gradiente de deformação, mas esta condição não é adequada quando se trata de grandes deformações, uma vez que, além de excluir o efeito da flambagem, ainda é incompatível com o princípio da indiferença de referencial (que ainda será abordado neste texto) [Schröder *et al.*, 2005].

A propriedade de convexidade mais importante quando se trata de cálculos de variações multidirecionais é a chamada *quase-convexidade*, introduzida por Morrey [1952], que está diretamente ligada à existência de minimizadores de alguns princípios variacionais em elasticidade não-linear. A propriedade de convexidade que está ligada à estabilidade do modelo é a *elipticidade forte* [Sendova e Walton, 2008] e a condição que a garante é conhecida como *condição de Legendre-Hadamard* [Hartmann e Neff, 2003].

Pelo fato de a quase-convexidade se tratar de uma condição global em forma de desigualdade integral, ela se torna uma condição muito difícil de ser tratada [Balzani *et al.*, 2006; Kambouchev *et al.*, 2006; Sendova e Walton, 2008; Hartmann e Neff, 2003]. Tendo em vista esta inadequação prática ao se trabalhar com a condição de quase-convexidade, trabalha-se com outra condição de convexidade: a *policonvexidade*, introduzida por Ball [1977]. Esta propriedade é, ao contrário da condição de quase-convexidade, uma propriedade satisfeita localmente.

A policonvexidade de uma função contínua e finita implica na automática satisfação de outra propriedade matemática, chamada *convexidade de posto um* e, em se tratando de funções suficientemente suaves, a convexidade de posto um é equivalente à propriedade de elipticidade forte, ou seja, automaticamente a condição de Legendre-Hadamard é satisfeita [Balzani *et al.*, 2006]. Além de automaticamente satisfazer as propriedades de convexidade de posto um e de elipticidade forte, a policonvexidade automaticamente garante o preenchimento dos requisitos da quase-convexidade [Schröder *et al.*, 2005]. Aplicações destas propriedades a materiais transversalmente isotrópicos ou anisotrópicos são encontradas em Balzani *et al.* [2006], Schröder *et al.* [2005], Sendova e Walton, [2008] e Kambouchev *et al.* [2006].

Ogden [1984] (em seu Apêndice A) e Hartmann e Neff [2003] mostraram que a aplicação das condições de policonvexidade à função energia de deformação a materiais hiperelásticos isotrópicos garante que as desigualdades de Baker-Ericksen sejam atendidas. No entanto, o contrário não é necessariamente verdade.

Em resumo, ao garantir a policonvexidade da energia de deformação, garante-se a sua quase-convexidade, a convexidade de posto um (que para funções suaves equivale à elipticidade

forte), a existência de ondas com velocidades reais (assegurando a estabilidade do material) e satisfação das desigualdades de Baker-Ericksen.

A diferença precisa entre a propriedade local de elipticidade e a quase-convexidade ainda é tema ativo de pesquisas, uma vez que exemplos contrários existem, nos quais se mostra elipticidade, mas não quase-convexidade. No entanto, estes exemplos não são nem isotrópicos nem possuem a propriedade de indiferença de referencial (para um ponto de vista estritamente mecânico, estes dois conceitos se equivalem) [Hartmann e Neff, 2003].

Weiss [1994] e Bilgili [2004] avaliam que as condições de convexidade da energia de deformação são restritivas demais. Ambos os autores reforçam a ideia de que, forçando esta restrição e, por conseguinte, garantindo unicidade das soluções, podem-se perder algumas soluções múltiplas interessantes que se deseje captar. Segundo Bilgili [2004], a convexidade aplicada a alguns modelos de bases polinomiais obriga a utilização de parâmetros não-negativos, contrariando uma grande quantidade de bons ajustes teórico-experimentais obtidos utilizando parâmetros negativos. Weiss [1994] comenta ainda que a condição de convexidade pode ser incompatível com a objetividade da função energia de deformação.

Hartmann [2001] propõe a restrição de obrigatoriedade da não-negatividade das constantes hiperelásticas de modelos polinomiais, como Neo-Hookeano [Treloar, 1973] e Mooney-Rivlin [Rivlin e Saunders, 1951], pois segundo Truesdell e Noll [1965], assim o fazendo, tanto se garante a positividade da energia de deformação como se satisfazem as desigualdades de Baker-Ericksen. No entanto, apesar de isto levar a uma perda de precisão durante o ajuste das curvas experimentais, é garantido que nenhum fenômeno fisicamente impossível irá ocorrer fora da região de interesse [Hartmann, 2001].

A conclusão a que se chega é que, para a função energia de deformação de um material hiperelástico isotrópico incompressível, a restrição mais ampla é a policonvexidade, uma vez que a satisfazendo, satisfazem-se automaticamente as desigualdades de Baker-Ericksen e assegura-se a elipticidade (estabilidade) do problema. No Capítulo 4, tanto as funções energia de deformação aqui estudadas como as restrições acompanhadas dos métodos com que elas serão aplicadas serão apresentados de maneira mais completa.

Comentários e definições matemáticas das propriedades de convexidade, quase-convexidade e policonvexidade de funções são encontradas no Anexo V do presente trabalho.

Dadas estas condições para que a função energia de deformação tanto modele o material de maneira fisicamente plausível como garanta estabilidade matemática durante os cálculos, a seguir serão avaliadas restrições sob a formulação constitutiva dos materiais hiperelásticos. Como a formulação constitutiva de elasticidade é tema consolidado na literatura, aqui somente

serão feitos comentários sobre as restrições que já foram aplicadas no passado, quando do desenvolvimento da teoria.

Em considerando sólidos elásticos sob deformações isotérmicas, a função energia de deformação é uma função do tensor gradiente de deformação somente. Green [1838] mostrou que a função energia de deformação deve ser dependente apenas dos seis termos independentes do tensor de deformação de Cauchy [Rivlin e Smith, 1987]. Mais de um século mais tarde, Truesdell [1960] apresentou uma proposta atribuindo-a a Noll, mais interessante do que a inicialmente proposta por Green, uma vez que poderia ser utilizada para inserir na equação constitutiva a restrição chamada de *princípio da indiferença do referencial* (conhecido também por *princípio da objetividade*) do material de tal maneira que o funcional constitutivo dependesse do histórico do tensor de deformação [Rivlin e Smith, 1987].

O princípio da indiferença do referencial aplicada à elasticidade busca garantir que a resposta da função energia de deformação seja independente do sistema coordenado de referência adotado. Bertram e Svendsen [2001] concordam que o princípio da indiferença de referencial do material é baseado em duas afirmações: primeiramente a de que o tensor de tensão se transforma como um tensor objetivo frente a uma mudança de observador e, segundo, a de que as equações constitutivas não dependem do observador. Isto quer dizer que um movimento de corpo livre aplicado ao sólido não deve alterar o modo como ele responde às deformações.

Em seu trabalho, Bertram e Svendsen [2001] identificam como três os conceitos básicos por trás da formulação básica do princípio da indiferença de referencial, ou objetividade. O mais fraco dos três, a indiferença de referencial Euclidiano, requer grandezas físicas associadas a observadores Euclidianos, tais como tensões ou fluxo de calor se transformem co-rotacionalmente entre elas. O segundo é o conceito de invariância de forma, que requer que as relações constitutivas sejam independentes do observador. Por último, a indiferença frente a movimentos de corpo rígido requer que a resposta do material seja independente frente a rotações arbitrárias de corpo rígido em relação a um único observador.

Os dois primeiros conceitos formam juntos o princípio da indiferença do referencial proposto por Truesdell e Noll [1965]. Mais do que isto, Bertram e Svendsen [2001] mostraram que a indiferença frente a movimentos de corpo rígido é equivalente ao princípio da indiferença de referencial. Em resumo, se um dos três princípios comentados no parágrafo anterior for satisfeito, os outros dois se tornam equivalentes entre si [Bertram e Svendsen, 2001].

Segundo Korobeynikov [2008], uma vez que as equações constitutivas são escritas sob forma tensorial, é assegurada a invariância em relação à escolha do sistema de referência adotado. Beatty [1987] afirma que a função energia de deformação de um sólido hiperelástico

satisfaz a condição de indiferença de referencial se ela for escrita em termos do tensor gradiente de deformação, do tensor de alongamento à direita ou do tensor de Cauchy-Green à direita. No entanto, em se tratando de materiais isotrópicos, apesar de os tensores de Cauchy-Green à esquerda e Cauchy-Green à direita serem dois tensores distintos, seus invariantes serão sempre iguais entre si [Beatty, 1987], levando à conclusão de que a função energia de deformação escrita em termos dos invariantes do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita também preencha automaticamente os requisitos de indiferença do referencial.

Conforme já exposto no Capítulo 1, um dos objetivos do presente trabalho é apresentar uma metodologia de otimização multi-critério das constantes constitutivas aplicável a qualquer modelo hiperelástico. Um método de obtenção destas constantes de ajuste foi desenvolvido por Twizell e Ogden [1983] baseado em uma adaptação do algoritmo de otimização de mínimos quadrados não-lineares de Levenberg-Marquardt [Marquardt, 1963]. Neste trabalho, a metodologia foi aplicada aos dados experimentais de somente uma amostra de borracha e um modelo hiperelástico. Utilizando um conceito semelhante, através de uma rotina escrita em MatLab e aplicando-a a oito diferentes modelos e dados experimentais de três diferentes tipos de elastômeros, o presente trabalho faz uma proposta de otimização dos parâmetros constitutivos para este tipo de material.

3. CONCEITOS ELEMENTARES DE ELASTICIDADE NÃO-LINEAR

Os materiais poliméricos como os elastômeros, que são o objeto de estudo deste trabalho, apresentam um comportamento inerentemente não-linear entre as grandezas de força e deslocamento (ou tensão e deformação) (não-linearidade material). Além disto, em praticamente todos os casos envolvendo deformações em elastômeros, a consideração clássica de pequenas deformações e deslocamentos amplamente aplicada por engenheiros não é aplicável (não-linearidade geométrica).

O estudo destes problemas não-lineares leva à necessidade de uma base teórica um pouco mais ampla do que aquela necessária para entendimento dos problemas puramente lineares. Serão, portanto, introduzidos conceitos de diferentes medidas de deformação e tensão aplicáveis a problemas com grandes deslocamentos. Uma abordagem através do *Princípio da Conservação da Energia Mecânica* será feita para dedução da necessidade de uma função energia de deformação e a particularização para hiperelasticidade gerará a forma desta função em termos dos principais invariantes ou dos principais alongamentos da deformação.

3.1. Descrição do Movimento

O ramo da Física que trata da descrição do movimento dos corpos é a Cinemática. Por corpo, entende-se a idealização de que este se trata de um conjunto de partículas de modo que, independente do instante de tempo t , cada partícula ocupa apenas um ponto da região fechada C no espaço euclidiano tridimensional. Reciprocamente, cada ponto da região C é ocupado por somente uma partícula. Considera-se, portanto, que não há espaços vazios no interior do corpo.

A posição de cada ponto do corpo, no instante de tempo t , pode ser totalmente caracterizada através do vetor posição \mathbf{x} escrito em função de suas coordenadas (x_1, x_2, x_3) . Chamando as configurações inicial (ou de referência) e instantânea do corpo respectivamente de C^0 e C e os vetores posição de um ponto em cada uma destas configurações por \mathbf{X} e \mathbf{x} respectivamente, o movimento de dado ponto no instante de tempo t pode ser mapeado através do processo χ através de:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (3.1)$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{X} são representados graficamente na Figura 3.1.

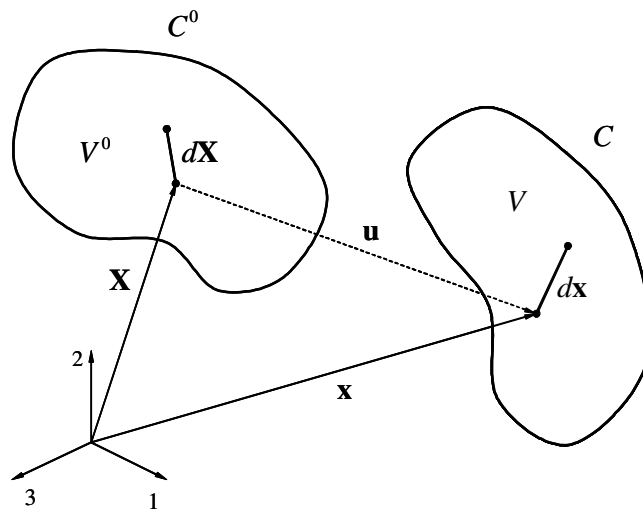


Figura 3.1. Descrição do movimento de um corpo durante o processo de deformação

Neste tipo de escrita da cinemática da deformação, considera-se conhecida a forma indeformada do corpo C^0 e por isso é chamada de uma descrição *lagrangeana* do processo. Na grande maioria das aplicações de mecânica dos sólidos, é justamente a configuração indeformada que conhecemos, tornando esta a forma mais adequada para abordar o problema.

Quando a variável independente for a posição instantânea do corpo C no instante de tempo t , a atenção é fixada em determinada região do espaço (ao invés da região do corpo) e a descrição da deformação é chamada de *euleriana*. Esta abordagem é muito mais comum em Mecânica dos Fluidos do que Mecânica dos Sólidos, embora em alguns casos desta última, como forjamento, se utilize com frequência formulação euleriana. Descreve-se o movimento de um ponto do corpo, pela formulação euleriana, através de:

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (3.2)$$

Para fins de análise, ambas as abordagens levarão ao mesmo resultado final, embora o emprego da descrição de maneira errônea leve a complicações matemáticas sérias durante o desenvolvimento do problema. Como este trabalho é voltado para o estudo de problemas no âmbito da elasticidade estática, todo o equacionamento será feito através de uma descrição lagrangeana da deformação.

A forma de mapeamento entre as posições inicial e final é feita através do chamado *Jacobiano* da deformação identificado por J :

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \quad (3.3)$$

Para não violar os preceitos da mecânica dos sólidos de indestrutibilidade da matéria (um volume finito não pode ser transformado em um volume nulo) e interpenetrabilidade da matéria (uma porção da matéria não pode penetrar em outra) [Bittencourt, 2006], a condição de positividade do Jacobiano J deve ser satisfeita:

$$J > 0 \quad (3.4)$$

Uma medida mais interessante para o analista de um problema de mecânica dos sólidos é o deslocamento espacial de um ponto do corpo C no instante de tempo t , que é medido através da simples subtração das coordenadas espaciais deste ponto entre as configurações instantânea e inicial.

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (3.5)$$

O deslocamento \mathbf{u} será um vetor com tantas componentes quanto o número de eixos do sistema coordenado.

3.2. Medidas de deformação

A deformação de um corpo está diretamente ligada a efeitos de mudança na sua forma ou volume. É a partir desta medida que mais tarde se torna possível a mensuração dos esforços internos ao corpo, ou tensões. Existem diferentes meios de medir a deformação de um corpo sob ação de carregamentos, tanto através de medidas lagrangeanas como eulerianas. As formas mais comuns encontradas na bibliografia serão abordadas na sequência do texto.

3.2.1. Tensor gradiente de deformação

O tensor gradiente é diretamente a matriz jacobiana da transformação de coordenadas e pode ser escrito em função dos vetores posição ou do vetor deslocamento, conforme:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (3.6)$$

onde δ_{ij} se refere aos componentes da matriz identidade.

O gradiente de deformação é uma maneira de quantificar as mudanças de forma e tamanho do corpo no instante t . Ele define a transformação de um vetor infinitesimal $d\mathbf{X}$ na posição indeformada no vetor $d\mathbf{x}$ da configuração instantânea deformada, ou seja:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (3.7)$$

A relação entre o volume do corpo antes e depois da deformação é definida pelo determinante do tensor gradiente de deformação, já conhecido como Jacobiano da deformação:

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{dv}{dV} \quad (3.8)$$

No caso de deformações isocóricas, único caso analisado neste trabalho, não ocorre alteração no volume do corpo e a Equação 3.8 vale a unidade.

O tensor \mathbf{F} é o mais fácil de ser implementado, uma vez que trabalha com as derivadas diretas dos vetores de posição final. No entanto, apresenta as desvantagens de não ser simétrico e não se anular em movimentos de corpo rígido.

Como qualquer outro tensor de segunda ordem, o gradiente de deformação pode ser decomposto através do teorema da decomposição polar em um produto de outros dois tensores de segunda ordem: um tensor simétrico positivo definido e um tensor ortogonal.

Assim o fazendo, \mathbf{F} é decomposto como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{R}\mathbf{U} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{V}\mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde \mathbf{R} é um tensor ortogonal, de tal maneira que $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ e $\det(\mathbf{R}) = 1$, \mathbf{U} é o *tensor de alongamento à direita* e \mathbf{V} é o *tensor de alongamento à esquerda*.

A decomposição polar implica dizer que a transformação de um elemento $d\mathbf{X}$ na configuração indeformada no elemento $d\mathbf{x}$ na configuração deformada pode ser obtida de duas maneiras: primeiro alongando o elemento em \mathbf{U} e em seguida aplicando a rotação \mathbf{R} ou então primeiro aplicando a rotação \mathbf{R} e depois o alongando em \mathbf{V} . Os tensores \mathbf{U} e \mathbf{V} têm a propriedade de apresentarem os mesmos autovalores (ou alongamentos principais), mas diferentes autovetores (direções principais).

3.2.2. Tensores de deformação de Cauchy-Green

Visando eliminar a falta de simetria apresentado pelo tensor gradiente de deformação, foram definidos o *tensor deformação de Cauchy-Green à direita* \mathbf{C} e o *tensor deformação de Cauchy-Green à esquerda* \mathbf{B} .

O tensor de Cauchy-Green à direita (\mathbf{C}) é uma medida lagrangeana de deformação e é escrita em notação tensorial ou indicial através de:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \frac{\partial x_K}{\partial X_i} \frac{\partial x_K}{\partial X_j} = \mathbf{U}^2 \quad (3.10)$$

O tensor de Cauchy-Green à esquerda também é uma medida lagrangeana de deformação, embora seu inverso seja utilizado para descrições eulerianas. Sua escrita em notação tensorial ou indicial é dada por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial x_j}{\partial X_K} = \mathbf{V}^2 \quad (3.11)$$

Apesar de terem eliminado a falta de simetria do gradiente de deformação, estas duas medidas continuam a não se anular em casos de deformação nula ou movimentos de corpo rígido. Ambos os tensores, nestes dois casos, se igualam à matriz identidade.

3.2.3. Tensor deformação de Green-Lagrange

O *tensor deformação de Green-Lagrange* preenche o requisito de se anular na falta de deformações e mantém a propriedade da simetria. Isto foi feito através da simples subtração da matriz identidade do tensor de Cauchy-Green à direita. Em notação tanto tensorial como indicial o tensor deformação de Green-Lagrange é escrito como:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_K}{\partial X_i} \frac{\partial x_K}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \quad (3.12)$$

Este tensor é comumente escrito em função dos deslocamentos, assumindo a forma:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (3.12)$$

O tensor de Green-Lagrange \mathbf{E} , a exemplo do tensor de Cauchy-Green à direita \mathbf{C} é uma medida lagrangeana de deformação.

3.2.4. Tensor deformação de Almansi

O equivalente euleriano do tensor de Green-Lagrange é o *tensor deformação de Almansi* \mathbf{G} , definido por:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) \quad (3.13)$$

Ou em termos dos deslocamentos:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (3.14)$$

3.2.5. Tensor deformação infinitesimal

Muitas vezes o processo de deformação envolve deslocamentos e deformações de ordem infinitesimal e, para efeitos de simplificação dos cálculos, considera-se que a forma deformada do corpo C pode ser confundida com a sua forma indeformada C^0 . Assim o fazendo, os termos de alta ordem dos tensores de deformação se tornam desprezíveis. A equação do *tensor deformação infinitesimal* ou simplesmente *tensor deformação de Green* em notação indicial em função dos deslocamentos é a seguinte:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (3.15)$$

Esta é a definição de deformação mais comumente usada na engenharia, mas cabe ressaltar que este tipo de medida de deformação vale apenas quando se trabalha com deformações infinitesimais, ou seja, para problemas de grandes deformações ou deslocamentos e até mesmo de instabilidades, como flambagem, deve-se utilizar de outros mecanismos de medida de deformação mais adequados.

3.2.6. Alongamento

O alongamento é a razão entre o comprimento deformado $d\mathbf{x}$ e o indeformado $d\mathbf{X}$ de uma determinada fibra do material. Comumente conhecido pela letra grega λ , sua definição matemática é tal que:

$$\lambda = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} \quad (3.16)$$

O tensor alongamento se relaciona com o tensor deformação de Green-Lagrange através de:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{E} + \mathbf{I} \quad (3.17)$$

O alongamento é muito usado quando se trata de materiais que exibem grandes deformações como é o caso dos elastômeros. Nas aplicações mais usuais, este valor é, em geral, em torno de 3 ou 4, mas não é raro atingir alongamentos de até 8 ou 9.

3.3. Medidas de tensão

O exemplo das medidas de deformação, existem diferentes tipos de se medir as tensões atuantes em um corpo ao longo do processo de deformação. Apesar de ser um dos conceitos mais importantes da mecânica dos sólidos, o conceito de tensão é bastante abstrato. Timoshenko e Goodier [1951] definem tensão como sendo a intensidade das forças internas por unidade de área agindo para manter em equilíbrio um corpo o qual, externamente, é submetido a diferentes solicitações (forças, momentos e vinculações).

Para fins de entendimento deste texto, serão abordados aqui os conceitos de *tensão de Cauchy* e *tensões de Piola-Kirchhoff*.

3.3.1. Tensão de Cauchy

A tensão de Cauchy é também conhecida como *tensão verdadeira*, pois mede os esforços internos em relação à forma deformada do corpo (instantânea), caracterizando uma medida euleriana de tensão. Por ser relativa à forma deformada, é favorecido seu uso em problemas de grande deformação, mas o fato de que esta geralmente não é uma conhecida do analista faz com que esta medida de tensão não seja a mais adequada para abordagem destes problemas.

Considerando que a força $d\mathbf{f}$ atua na área infinitesimal ds em uma superfície virtual interior ao corpo em deformação conforme Figura 3.2, o vetor tração \mathbf{t} é definido pela Equação 3.18.

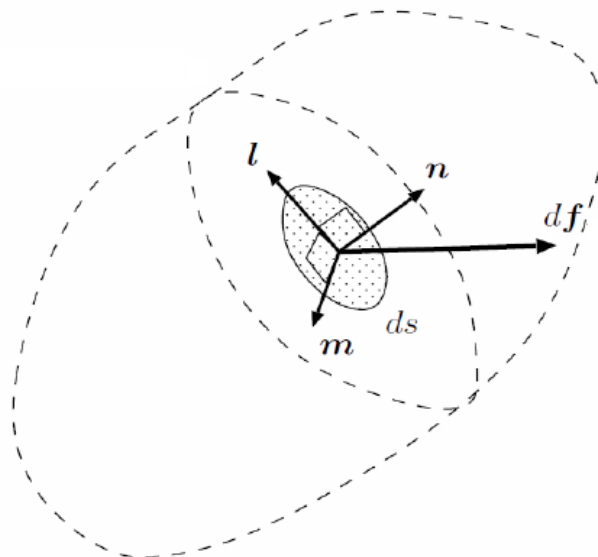


Figura 3.2. Esquematização de uma seção de um corpo sob equilíbrio.

$$\mathbf{t} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{f}}{ds} \quad (3.18)$$

A decomposição de \mathbf{t} nas coordenadas normal e tangenciais gera os componentes de tensão σ_{nn} , σ_{nm} e σ_{nl} . De maneira generalizada, para um ponto qualquer do corpo com vetor normal \mathbf{n} , as trações se relacionam com os componentes de tensão através de:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (3.19)$$

O tensor de tensão de Cauchy carrega as características de ser simétrico e se anular na ausência de deformações.

3.3.2. Tensores tensão de Piola-Kirchhoff

O tensor de Cauchy é muito usado quando se analisa problemas de deformações infinitesimais, mas como já foi comentado, quando se trabalha com grandes deformações, sua utilização não se torna tão atraente. Os *tensores de Piola-Kirchhoff* fornecem uma alternativa para abordagem de problemas de grandes deformações através de uma medida de tensão referente à configuração indeformada do corpo, ou seja, são medidas lagrangeanas de tensão.

O *Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff* \mathbf{P} se relaciona com o tensor gradiente de deformação \mathbf{F} e o tensor de tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ a partir do jacobiano da deformação:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (3.20)$$

onde J é o jacobiano da deformação dado pela Equação 3.8 e o índice “ $-T$ ” indica a operação de transposta da inversa da matriz \mathbf{F} .

O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff relaciona a força instantânea na área instantânea, mas calculada por unidade da área indeformada e expressa em termos da normal indeformada. Uma vez que este é em geral um tensor não-simétrico, pode levar a futuras complicações durante a formulação das equações constitutivas.

O *Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff* \mathbf{S} é uma forma semelhante ao tensor \mathbf{P} , com a diferença que relaciona a força na configuração indeformada com área também na configuração indeformada e é uma medida simétrica sempre que $\boldsymbol{\sigma}$ também o for. Sua relação com a tensão de Cauchy e o gradiente de deformação é dada por:

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (3.21)$$

Os tensores de Piola-Kirchhoff se relacionam entre si através de:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \quad (3.22)$$

Em pequenas deformações, ambos os tensores de Piola-Kirchhoff são idênticos ao tensor tensão de Cauchy.

3.4. Relações constitutivas

Definida uma forma de descrição do movimento de um corpo sob deformação conforme Seção 3.1, definidas diferentes relações possíveis entre os deslocamentos e as deformações conforme Seção 3.2 e definido o conceito de tensão e as relações entre estas e as forças e deslocamentos que as causam conforme Seção 3.3, para que um problema da elasticidade estática seja completamente descrito, necessita-se ainda de uma maneira de relacionar as tensões com as deformações. Ao conjunto de equações que relacionam estas duas grandezas se dá o nome de *equações constitutivas*. A derivação da necessidade de uma equação constitutiva será feita através de uma abordagem energética através do *princípio da conservação da energia mecânica*.

A aplicação das equações que serão desenvolvidas se restringe a processos em que não é considerada a variação da energia térmica do sistema, ou seja, qualquer tipo de troca térmica entre o corpo e o meio é negligenciado. Considerando, portanto, que todo o processo de deformação acontece isotermicamente, o princípio da conservação da energia mecânica diz que, para qualquer parte $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ do corpo \mathcal{B} , a taxa temporal da energia mecânica total $E(\mathcal{S}, t)$ é balanceada pela potência mecânica total $\Pi(\mathcal{S}, t)$ [Beatty, 1987].

A potência mecânica total $\Pi(\mathcal{S}, t)$ nada mais é do que a taxa de trabalho exercido pelas forças externas ao corpo. A energia mecânica total $E(\mathcal{S}, t)$ é a soma das energias cinética e energia potencial elástica em \mathcal{S} . Assumindo que esta energia potencial elástica apresenta uma densidade $W(\mathbf{X}, t)$ por unidade de volume, o princípio da conservação da energia mecânica é descrito por:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{S}} \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dm + \int_{\mathcal{S}} W dV \right) = \int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV \quad (3.23)$$

onde \mathbf{v} é o vetor velocidade, $\partial \mathcal{S}$ indica o contorno do domínio \mathcal{S} , \mathbf{t} é o vetor tração agindo no diferencial de área da , \mathbf{b} são as forças de corpo, dm é o diferencial de massa (multiplicação

da massa específica ρ pelo diferencial de volume dV), dV é o diferencial de volume e W é a função densidade por unidade de volume da energia potencial elástica.

Garantindo que a massa específica do material se mantenha constante durante todo o processo, o termo

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} W dV \quad (3.24)$$

é equivalente à chamada *potência das tensões*, geralmente escrita sob forma de integral no domínio do produto interno entre a tensão de Cauchy e a componente simétrica derivada da decomposição do tensor taxa de deformação.

Da equivalência entre a Equação 3.24 e a potência das tensões, pode-se chegar à seguinte relação entre o segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , a função densidade de energia de deformação W e o tensor deformação de Green \mathbf{E} :

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (3.25)$$

Qualquer tipo de material que se queira analisar na mecânica dos sólidos apresenta uma forma para a função energia de deformação. Para os materiais metálicos, por exemplo, W é uma função quadrática em termos do tensor deformação de Cauchy \mathbf{E} e um tensor de quarta ordem chamado *tensor constitutivo* cujos componentes são escritos em função de algumas propriedades mecânicas destes materiais. A dedução da forma que a função W deve ter para hiperelasticidade é feita a seguir.

Beatty [1987] faz uma dedução para mostrar as relações entre a função W e os tensores tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ e primeiro de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} . Partindo da Equação 3.23 e considerando conservação de massa, a equação do equilíbrio para o caso estático dada por

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} = 0, \quad (3.26)$$

a Equação 3.20 e o teorema da divergência, chega-se à seguinte equação diferencial para o balanço de energia mecânica:

$$\frac{dW(\mathbf{X}, t)}{dt} = \text{tr} \left(\mathbf{P} \frac{d\mathbf{F}^T}{dt} \right) \equiv \mathbf{P} \frac{d\mathbf{F}}{dt} \quad (3.27)$$

onde tr indica a operação de traço do tensor.

Um sólido hiperelástico é definido como um material cuja energia potencial elástica é dada pela *função energia de deformação* [Beatty, 1987]:

$$W(\mathbf{X}, t) = W(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}) \quad (3.28)$$

A aplicação da Equação 3.27 na Equação 3.28, juntamente com a utilização do princípio do balanço de energia mecânica, leva às seguintes equações constitutivas gerais para um sólido hiperelástico:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (3.29)$$

em termos do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, e

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad (3.30)$$

em termos da tensão de Cauchy.

Escrever as tensões em função do gradiente de deformação \mathbf{F} , por este ser um tensor não simétrico, implica na impossibilidade de aplicações futuras de certas simplificações nos cálculos. Então, utilizando o princípio da indiferença do referencial, as Equações 3.29 e 3.30 podem ser reescritas em função do tensor deformação de Cauchy-Green à direita \mathbf{C} [Beatty, 1987].

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.31)$$

em termos do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1}\mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (3.32)$$

em termos da tensão de Cauchy. A função W escrita em função de \mathbf{F} está diferenciada da escrita em função de \mathbf{C} porque, apesar de terem o mesmo significado físico, têm formas matemáticas diferentes.

A equação equivalente à Equação 3.31, mas para o segundo tensor de Piola-Kirchhoff é:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \tilde{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.33)$$

Em se tratando de materiais isotrópicos a função energia de deformação W é idêntica se escrita em termos de \mathbf{B} ou \mathbf{C} . Isto não quer dizer que \mathbf{B} e \mathbf{C} sejam tensores iguais, pois isto

geralmente não é verdade. No entanto, apesar de serem tensores distintos e apresentarem autovetores (direções principais) distintos, seus autovalores (valores principais) são sempre iguais. Se seus autovalores são os mesmos, seus invariantes também o serão.

A condição de isotropia leva à necessidade de a função W ser independente do referencial adotado, ou seja:

$$W(\mathbf{C}, \mathbf{B}) = W(\mathbf{Q}(\mathbf{C}, \mathbf{B})\mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \quad (3.34)$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz de rotação qualquer.

Uma maneira de escrever W em função da deformação de maneira que ela seja invariante frente a mudanças no sistema de referência é através dos principais invariantes de deformação, ou seja:

$$W = f(I_C, II_C, III_C) = f(I_B, II_B, III_B) \quad (3.35)$$

onde I_C , II_C , III_C , I_B , II_B e III_B são os três principais invariantes dos tensores \mathbf{C} e \mathbf{B} respectivamente, dados por:

$$\begin{aligned} I_C &= C_{ii} = \text{tr} \mathbf{C} \\ II_C &= \frac{1}{2}(C_{ii}C_{jj} - C_{ij}C_{ji}) = \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbf{C})^2 - \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbf{C}^2) \\ III_C &= \det \mathbf{C} \end{aligned} \quad (3.36)$$

As Equações 3.36, apesar de expressas em função de \mathbf{C} , são exatamente as mesmas quando escritas em função de \mathbf{B} .

No caso de incompressibilidade do material, foco deste trabalho, o terceiro invariante da deformação, dado pelo determinante do tensor deformação vale a unidade (conforme visto na Seção 3.2.1) e a função energia de deformação passa a ser escrita somente em função do primeiro e segundo invariantes, ou seja:

$$W = W(I_{C,B}, II_{C,B}) \quad (3.37)$$

Além de escrever a função energia de deformação em termos dos invariantes da deformação, é possível também fazê-lo em termos dos alongamentos principais λ_i . No entanto, segundo Hoss [2009], “a vantagem de se expressar em função dos invariantes é que se dissociam as equações de um sistema de coordenadas particular”. Entre os modelos mais conhecidos

escritos em função dos alongamentos estão os modelos de Ogden [Ogden, 1972], Arruda-Boyce [Arruda e Boyce, 1993] e Hyperfoam [Ogden, 1984].

Nota-se que as Equações 3.31, 3.32 e 3.33 relacionam tensão com deformação através da derivada de W com respeito ao tensor \mathbf{C} , mas isto não é muito desejável, uma vez que torna os cálculos mais complexos. Por isso, pretende-se obter a uma forma na qual elas sejam escritas de uma maneira mais adequada. Segundo Atkin e Fox [1980] para o caso tridimensional mais geral, a tensão de Cauchy se relaciona com o tensor de Cauchy-Green à esquerda através de:

$$\boldsymbol{\sigma} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{B} + a_2 \mathbf{B}^2 \quad (3.38)$$

onde os coeficientes a_i são funções escalares dos invariantes de \mathbf{B} . Aplicando o teorema de Cayley-Hamilton e alguns rearranjos matemáticos chega-se à forma mais geral da relação constitutiva para um material isotrópico elástico sob grandes deformações [Truesdell e Noll, 1965]:

$$\boldsymbol{\sigma} = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{B} + b_2 \mathbf{B}^{-1} \quad (3.39)$$

Considerando incompressibilidade do material (eliminando assim a influência do terceiro invariante) e escrevendo as funções b_i em termos das derivadas de W em relação aos invariantes de \mathbf{B} , a Equação 3.39 é reescrita como [Atkin e Fox, 1980; Bonnet e Wood, 1997]:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2 \frac{\partial W}{\partial I} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial II} \mathbf{B}^{-1} \quad (3.40)$$

A Equação 3.40 é a relação constitutiva para materiais sólidos hiperelásticos isotrópicos incompressíveis. A definição da forma da função energia de deformação é talvez o passo mais importante e onde se deve tomar maior cuidado quando se quiser realizar uma análise estrutural destes materiais.

4. APLICAÇÕES DE RESTRIÇÕES AOS MODELOS HIPERELÁSTICOS HMI

Em sua dissertação de mestrado, Hoss [2009] a partir da observação do desempenho de uma série de modelos hiperelásticos, propôs uma nova família de equações para modelar o comportamento de elastômeros isotrópicos incompressíveis submetidos a deformações. A estas equações ele deu o nome de *Hoss-Marczak Low Strain (HMLSI)* que busca descrever melhor os efeitos sob baixos níveis de deformação e *Hoss-Marczak High Strain (HMHSI)* que pretende modelar de forma mais fiel o efeito de enrijecimento sob grandes deformações. Não são levados em conta, nestes modelos, efeitos dissipativos devidos a carregamentos cíclicos como histerese e *Efeito de Mullins* [Mullins, 1969].

Pelos resultados mostrados em seu trabalho, não só o ajuste das curvas aos dados experimentais se mostrou bastante preciso, como também a capacidade de predição do comportamento do material frente a outras formas de deformação. Esta última característica talvez seja o ponto forte dos seus modelos e onde eles mais se destaquem frente aos demais.

O modelo HMLSI é escrito em termos do primeiro invariante de deformação e é uma formulação híbrida construída através da adição de um termo exponencial ao modelo *Power-law* básico de Knowles [1977], responsável por melhorar a qualidade dos ajustes e predições para baixas faixas de deformação [Yeoh, 1993]. Sua equação característica é a seguinte:

$$W = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(I-3)}) + \frac{\mu}{2b} \left[\left(1 + \frac{b(I-3)}{n} \right)^n - 1 \right] \quad (4.1)$$

onde α , β , μ , b e n são as constantes do material e I é o primeiro invariante da deformação.

O modelo para grandes deformações HMHSI é uma forma aprimorada do HMLSI, ao qual foi adicionado um termo dependente do segundo invariante de deformação, sob forma de seu logaritmo natural. É exatamente este termo adicionado que confere à curva uma maior fidelidade ao efeito de enrijecimento acentuado que os elastômeros experimentam quando submetidos a altas deformações.

$$W = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(I-3)}) + \frac{\mu}{2b} \left[\left(1 + \frac{b(I-3)}{n} \right)^n - 1 \right] + C_2 \ln \left(\frac{II}{3} \right) \quad (4.2)$$

onde α , β , μ , b , n e C_2 são as constantes do material e I e II são o primeiro e segundo invariante da deformação respectivamente.

É sobre estas duas equações que serão aplicadas as restrições matemáticas comentadas no Capítulo 1 e que, juntamente com suas devidas derivadas, serão implementadas em subrotinas em FORTRAN para análise de alguns problemas em elementos finitos.

É para esta futura aplicação das Equações 4.1 e 4.2 nas subrotinas, que aqui serão apresentadas as derivadas necessárias de cada modelo para suas implementações, que são as primeira e segunda derivadas em relação a ambos os invariantes de deformação.

Para o modelo HMLSI:

$$\frac{\partial W}{\partial I} = \alpha e^{-\beta(I-3)} + \frac{\mu}{2} \left(1 + \frac{b(I-3)}{n} \right)^{n-1} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial II} = \frac{\partial^2 W}{\partial II^2} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I^2} = -\alpha\beta e^{-\beta(I-3)} + \frac{\mu}{2n} b(n-1) \left(1 + \frac{b(I-3)}{n} \right)^{n-2} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I \partial II} = 0 \quad (4.6)$$

Para o modelo HMHSI:

$$\frac{\partial W}{\partial I} = \alpha e^{-\beta(I-3)} + \frac{\mu}{2} \left(1 + \frac{b(I-3)}{n} \right)^{n-1} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial II} = \frac{C_2}{II} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I^2} = -\alpha\beta e^{-\beta(I-3)} + \frac{\mu}{2n} b(n-1) \left(1 + \frac{b(I-3)}{n} \right)^{n-2} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial II^2} = -\frac{C_2}{II^2} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I \partial II} = 0 \quad (4.11)$$

Estas derivadas serão utilizadas também para aplicação das restrições matemáticas à função energia de deformação, conforme mostrado na Seção 4.2.

4.1. Objetividade da função W

O *princípio da objetividade* ou *princípio da indiferença de referencial* garante que, se observarmos um corpo sob a mesma configuração, mas de um ponto de vista rotacionado, as tensões devem ser rotacionadas da mesma quantidade [Marsden e Hughes, 1983]. Matematicamente isto equivale a dizer que, dado um tensor de tensão qualquer \mathbf{T} , a seguinte identidade deve ser satisfeita:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{QF}) = \mathbf{QT}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) \quad (4.12)$$

onde \mathbf{X} é o vetor posição, \mathbf{F} é o tensor gradiente de deformação e \mathbf{Q} é uma matriz ortogonal de rotação arbitrária.

Aplicado à hiperelasticidade, este princípio equivale a dizer que [Marsden e Hughes, 1983]:

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{QF}) = W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) \quad (4.13)$$

Ou seja, a função densidade de energia escrita em termos do tensor gradiente de deformação, quando este sofrer uma rotação em relação ao observador, permanecerá imutável. Truesdell e Noll [1965] afirmam que a função energia de deformação W é objetiva se, e somente se o tensor de tensão de Cauchy é simétrico, isto é, se o balanço de momento angular é satisfeito.

Marsden e Hughes [1983] mostram que a indiferença de referencial é equivalente à afirmação de que W é dependente de \mathbf{F} através do tensor de Cauchy-Green à direita \mathbf{C} .

A conclusão à que se chega é de que uma condição suficiente e necessária para preenchimento do requisito de indiferença do referencial por parte da função energia de deformação W é tal que:

$$W = W(\mathbf{X}, \mathbf{C}) \quad (4.14)$$

Em se tratando de materiais isotrópicos, no entanto, apesar dos tensores de Cauchy-Green à esquerda \mathbf{C} e Cauchy-Green à direita \mathbf{B} serem dois tensores distintos, seus invariantes serão sempre iguais entre si [Beatty, 1987], fazendo com que a função energia de deformação escrita em termos dos invariantes do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita também automaticamente preencha os requisitos de indiferença do referencial.

Este último argumento sustenta o cumprimento do requisito da indiferença do referencial por parte dos modelos de Hoss-Marczak das Equações 4.1 e 4.2.

4.2. Imposição de restrições aos modelos HMI

No Capítulo 2 foi feita uma revisão geral de diferentes tipos de restrições matemáticas que devem ser aplicadas à equação da função energia de deformação visando garantir tanto a estabilidade matemática dos cálculos como um comportamento fisicamente plausível ao material. Conforme a conclusão a que se chegou comentada no Capítulo 2, a restrição puramente matemática da policonvexidade é a mais indicada para ser aplicada e é responsável por garantir a estabilidade matemática e unicidade de soluções, enquanto a garantia de resposta física adequada é tida com a satisfação das desigualdades de Baker-Ericksen.

A policonvexidade de W é garantida quando o Hessiano de $W(I, II)$ é positivo definido [Bilgili, 2004], ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial I^2} &> 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial II^2} &> 0 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial I^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial II^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial I \partial II} \right)^2 &> 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Alguns autores, como Bilgili [2004] e Weiss [1994], concordam que a condição de policonvexidade, por garantir unicidade nas soluções e muitas vezes ir de encontro a observações experimentais, é restritiva demais quando comparadas com as desigualdades empíricas ou de Baker-Ericksen.

As desigualdades de Baker-Ericksen foram escritas visando garantir que a tensão principal máxima sempre ocorra na direção do alongamento principal máximo. Mais especificamente, as tensões principais σ_i devem apontar nas mesmas direções dos alongamentos principais λ_i . Matematicamente, isto é escrito sob a seguinte forma [Weiss, 1994; Truesdell e Noll, 1965; Marzano, 1983; Wilber e Criscione, 2005]:

$$(\sigma_i - \sigma_j)(\lambda_i - \lambda_j) > 0 \quad \text{para} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (4.16)$$

Truesdell e Noll [1965] demonstram que uma forma de escrever a desigualdade (4.16) em termos dos coeficientes b_1 e b_2 da Equação 3.39 é:

$$\begin{aligned}
b_1 - \frac{1}{\lambda_i^2 \lambda_j^2} b_2 &> 0 && \text{para } \lambda_i \neq \lambda_j \\
b_1 - \frac{1}{\lambda_i^4} b_2 &\geq 0 && \text{para } \lambda_i = \lambda_j
\end{aligned}
\tag{4.17}$$

onde i, j e k são permutações de 1, 2 e 3.

Para problemas de isotropia e incompressibilidade, Truesdell e Noll [1965] através da condição de deformação isocórica $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ demonstram que as Equações 4.17 assumem a forma:

$$\begin{aligned}
b_1 &> \lambda_j^2 b_2 && \text{para } \lambda_i \neq \lambda_k \\
b_1 &\geq \lambda_j^2 b_2 && \text{para } \lambda_i = \lambda_k
\end{aligned}
\tag{4.18}$$

onde i, j e k são permutações de 1, 2 e 3.

Da combinação das desigualdades (4.18), Truesdell e Noll [1965] inferem que:

$$\begin{aligned}
b_1 &\geq \frac{I}{3} b_2 \geq b_2 \\
b_1 I &\geq b_2 II \geq 3b_2 \\
b_1 II &\geq 3b_2
\end{aligned}
\tag{4.19}$$

Sabendo das Equações 3.39 e 3.40 que b_1 e b_2 são dados por:

$$\begin{aligned}
b_1 &= 2 \frac{\partial W}{\partial I} \\
b_2 &= -2 \frac{\partial W}{\partial II}
\end{aligned}
\tag{4.20}$$

Truesdell e Noll [1965] por inspeção das Equações 4.19 chegam às seguintes condições suficientes para satisfação das desigualdades de Baker-Ericksen da Equação 4.16:

$$\begin{aligned}
b_1 &> 0 \\
b_2 &\leq 0
\end{aligned}
\tag{4.21}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial I} &> 0 \\
\frac{\partial W}{\partial II} &\geq 0
\end{aligned}
\tag{4.22}$$

Aplicando estas condições aos modelos da família HMI chega-se às seguintes condições a serem preenchidas pelos parâmetros constitutivos dos modelos HMLSI e HMHSI:

Para HMLSI:

$$\frac{\partial W}{\partial I} = \alpha e^{-\beta(I-3)} + \frac{\mu}{2} \left(1 + \frac{b(I-3)}{n} \right)^{n-1} > 0 \quad (4.23)$$

Para HMHSI:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial I} &= \alpha e^{-\beta(I-3)} + \frac{\mu}{2} \left(1 + \frac{b(I-3)}{n} \right)^{n-1} > 0 \\ \frac{\partial W}{\partial II} &= \frac{C_2}{II} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por inspeção da segunda condição das Equações 4.24, infere-se que a constante de ajuste C_2 do modelo HMHSI deve ser não-negativa. A condição da Equação 4.23 é idêntica à primeira condição das Equações 4.24, o que quer dizer que um único grupo de restrições para as constantes de ajustes vale tanto para o modelo HMLSI como HMHSI.

Temos, portanto, duas condições a serem satisfeitas pelos modelos da família HMI para que estes não violem as desigualdades de Baker-Ericksen.

$$\alpha e^{-\beta(I-3)} + \frac{\mu}{2} \left(1 + \frac{b(I-3)}{n} \right)^{n-1} > 0 \quad (4.25)$$

$$C_2 \geq 0 \quad (4.26)$$

A desigualdade (4.25) envolve além dos parâmetros constitutivos dos modelos HMLSI e HMHSI, o primeiro invariante de deformações, ou seja, para que ela seja plenamente satisfeita, deve ser verificada a cada ponto da faixa de deformações.

Para automatizar a verificação da desigualdade da Equação 4.25, foi escrito um algoritmo no *software* Maple [Maple, 2003] o qual, uma vez inseridas as constantes obtidas, retorna um resultado indicando a satisfação ou não desta condição.

Primeiramente é procurada uma possível raiz da equação da primeira derivada da função energia de deformação (lado esquerdo da Equação 4.25) através do método de Newton-Raphson [Sülli e Mayers, 2003]. O caso de a função ter raízes múltiplas não é analisado, pois a existência de uma única raiz já exclui a possibilidade de satisfação da Equação 4.25.

Em não apresentando uma raiz real, significa que a função é totalmente positiva ou totalmente negativa. Calcula-se seu valor no primeiro ponto da faixa de deformação ($I = 3$) e verifica-se seu sinal. Em caso de a função ser negativa, a condição da Equação 4.25 não é verificada e este conjunto de constantes não satisfaz as desigualdades de Baker-Ericksen. O caso contrário indica satisfação da Equação 4.25.

No caso de a função $\frac{\partial W}{\partial I}$ apresentar, no mínimo, uma raiz real, é verificada automaticamente a não satisfação da Equação 4.25.

A Figura 4.1 apresenta o algoritmo utilizado, cujo código é encontrado no Anexo II.

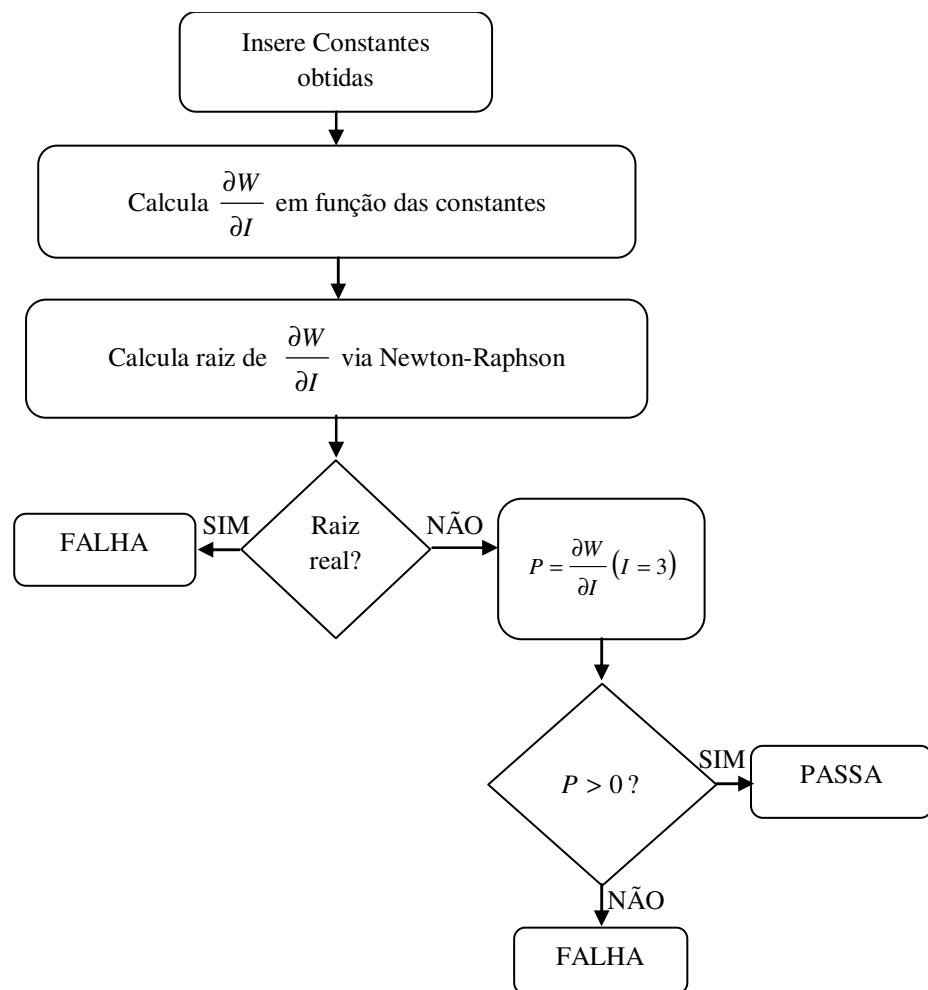


Figura 4.1. Algoritmo de verificação da Equação 4.25.

Eventualmente, os dados teóricos podem se ajustar aos experimentais com precisão satisfatória mesmo utilizando-se um grupo de constantes que viole as condições (4.25) e (4.26), no entanto, para casos de deformações complexas ou fora da região para a qual foram ajustadas as curvas, não será garantido que o material se comporte sempre de maneira fisicamente possível [Bilgili, 2004; Hartmann, 2001].

Finalmente, é importante mencionar que a verificação ou imposição de restrições é uma etapa raramente considerada na grande maioria dos trabalhos propondo formas de energia de deformação para elastômeros. Embora exista um número grande de funções energia de deformação, consagradas ou não, é notório que boa parte destas falha em cumprir uma ou mais das restrições aqui discutidas. Modelos de origem micromecânica, por considerarem relações químicas e termodinâmicas na sua dedução, são teoricamente mais consistentes, embora sua aplicabilidade nem sempre seja tão boa, na prática. Já os modelos fenomenológicos como os HMI, embora se revistam de maior potencial prático do ponto de vista do ajuste de parâmetros, muito raramente são verificados quanto a restrições. Não obstante, ainda são os modelos mais empregados em programas de elementos finitos para aplicações de engenharia.

5. IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS HIPERELÁSTICOS HMI EM PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

As capacidades dos modelos HMI de se ajustarem a dados experimentais de um determinado ensaio e predizerem com adequada precisão o comportamento de elastômeros para deformações diferentes das ensaiadas já foram mostradas e discutidas por Hoss [2009]. Neste trabalho busca-se verificar o desempenho dos modelos desta família quando implementados em um código comercial de elementos finitos e submetidos tanto a casos de deformações homogêneas como não-homogêneas.

O programa utilizado foi o Abaqus 6.7 [Abaqus, 2007], que traz a possibilidade de inserção de novos modelos hiperelásticos através da subrotina *uhyper* escrita em código FORTRAN. As subrotinas escritas para os modelos HMLSI e HMHSI utilizadas neste trabalho são encontradas no Anexo I.

As informações que o usuário necessita informar à subrotina são, além dos valores das constantes de ajuste do modelo hiperelástico e da própria função energia de deformação W , as suas seguintes derivadas:

$$\frac{\partial W}{\partial I}, \frac{\partial W}{\partial II}, \frac{\partial^2 W}{\partial I^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial II^2} \text{ e } \frac{\partial^2 W}{\partial I \partial II} \quad (5.1)$$

As Equações 4.3 a 4.11 trazem estas derivadas aplicadas para os modelos HMLSI e HMHSI.

Para cada incremento de deformação, a subrotina lê do algoritmo de solução os valores dos invariantes de deformação, temperatura do elemento e informações da malha e computa os valores das derivadas da Equação 5.1, que depois são utilizados para cálculo das tensões. O método de determinação das tensões a partir das derivadas da Equação 5.1 é encontrado em Abaqus [2007].

Inicialmente, com o propósito de verificar a validade das implementações, foram ajustadas constantes para diferentes modelos hiperelásticos (incluindo HMLSI e HMHSI) a partir de dados experimentais de ensaios de deformações homogêneas e tais ensaios foram repetidos numericamente. Por fim, estes resultados foram confrontados com os próprios dados experimentais e a qualidade dos mesmos foi analisada. Os modelos hiperelásticos utilizados para comparação foram os seguintes:

Yeoh de 5 termos (YI5) [Yeoh, 1990]:

$$W = C_{10}(I-3) + C_{20}(I-3)^2 + C_{30}(I-3)^3 + C_{40}(I-3)^4 + C_{50}(I-3)^5 \quad (5.2)$$

Mooney-Rivlin de 5 termos (MRI5) [Rivlin e Saunders, 1951]:

$$W = C_{10}(I - 3) + C_{01}(II - 3) + C_{11}(I - 3)(II - 3) + C_{20}(I - 3)^2 \quad (5.3)$$

Como o programa de elementos finitos utilizado não oferece como opções de modelos hiperelásticos estes das Equações 5.2 e 5.3, os mesmos também tiveram de ser implementados em FORTRAN seguindo a mesma metodologia que foi utilizada para os modelos HMI.

Neste trabalho, os dados experimentais utilizados foram de ensaio de tração uniaxial (T), tração biaxial (B) e cisalhamento puro (P) [Marczak *et al.*, 2006] para uma amostra de borracha natural (NR55) [Marczak *et al.*, 2006]. Para estes mesmos modos de deformação, foi também utilizado o conjunto de dados de Treloar [Jones *et al.*, 1975]. Dados de ensaios de compressão uniaxial (C) [Marczak *et al.*, 2006] e cisalhamento puro para borracha de alto amortecimento (HDR) foram retirados de Amin *et al.* [2006]. Os conjuntos de dados experimentais aqui utilizados se encontram no Anexo III do presente trabalho.

5.1. Resultados das implementações sob deformações homogêneas

O objetivo desta seção é verificar a qualidade e validade das implementações através das subrotinas escritas em FORTRAN. Por esta razão, se entendeu desnecessário repetir numericamente todos estes ensaios, escolhendo-se apenas alguns deles para análise. Foram utilizados os dados de tração uniaxial de Treloar, compressão uniaxial da borracha HDR e cisalhamento puro da borracha natural NR55 para tais análises.

O ensaio numérico de tração uniaxial foi realizado em uma tira retangular bidimensional sob estado plano de tensões com dimensões conforme a Figura 5.1.(a) considerando o conjunto de dados experimentais de Treloar. Foi aplicado um deslocamento prescrito que gerasse 700% de deformação, neste caso equivalendo a 700 mm. Para a simulação do ensaio de compressão uniaxial, foi utilizado um bloco sólido conforme dimensões da Figura 5.1.(b) sob o qual foi aplicado um deslocamento prescrito que gerasse uma deformação de -50%, neste caso equivalendo a 25 mm no sentido da compressão. Os dados utilizados nesta verificação foram aqueles obtidos por Amin *et al.* [2006] para a borracha HDR. O ensaio numérico de cisalhamento puro foi realizado com os dados do ensaio correspondente obtidos por Marczak *et al.* [2006] para a borracha natural NR55 em uma tira retangular de dimensões conforme a Figura 5.1.(c) considerando estado plano de tensões. Foi aplicado um deslocamento prescrito que gerasse deformação de 130%, neste caso equivalendo a 64 mm.

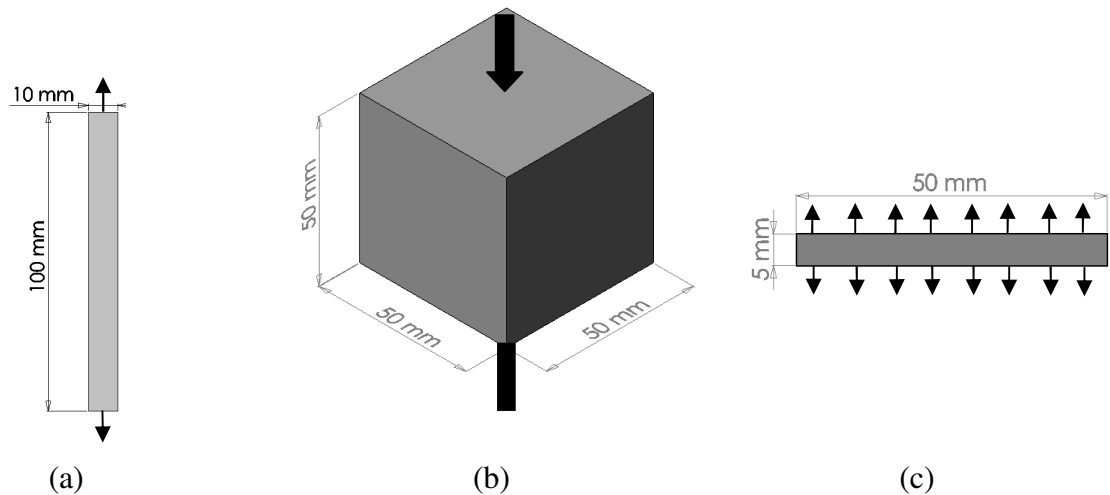


Figura 5.1. Dimensões dos corpos de prova utilizados na simulação numérica de: (a) tração uniaxial, (b) compressão uniaxial e (c) cisalhamento puro.

Uma rotina escrita em MatLab foi utilizada para ajustar as constantes de cada modelo através do método dos Mínimos Quadrados [Björck, 1996] e os resultados de tensão *versus* deslocamento obtidos numericamente no Abaqus para cada ensaio foram confrontados com os dados experimentais gerando os gráficos das Figuras 5.2, 5.3 e 5.4.

Na Figura 5.2, são mostrados os resultados para os dados da borracha de Treloar sob ensaio de tração uniaxial considerando os quatro modelos hiperelásticos comparados. Os resultados do ensaio de compressão uniaxial da amostra de borracha HDR para os modelos analisados são mostrados na Figura 5.3. Por fim, para os mesmos quatro modelos, a Figura 5.4 apresenta os resultados obtidos numericamente durante o ensaio de cisalhamento puro da borracha natural NR55.

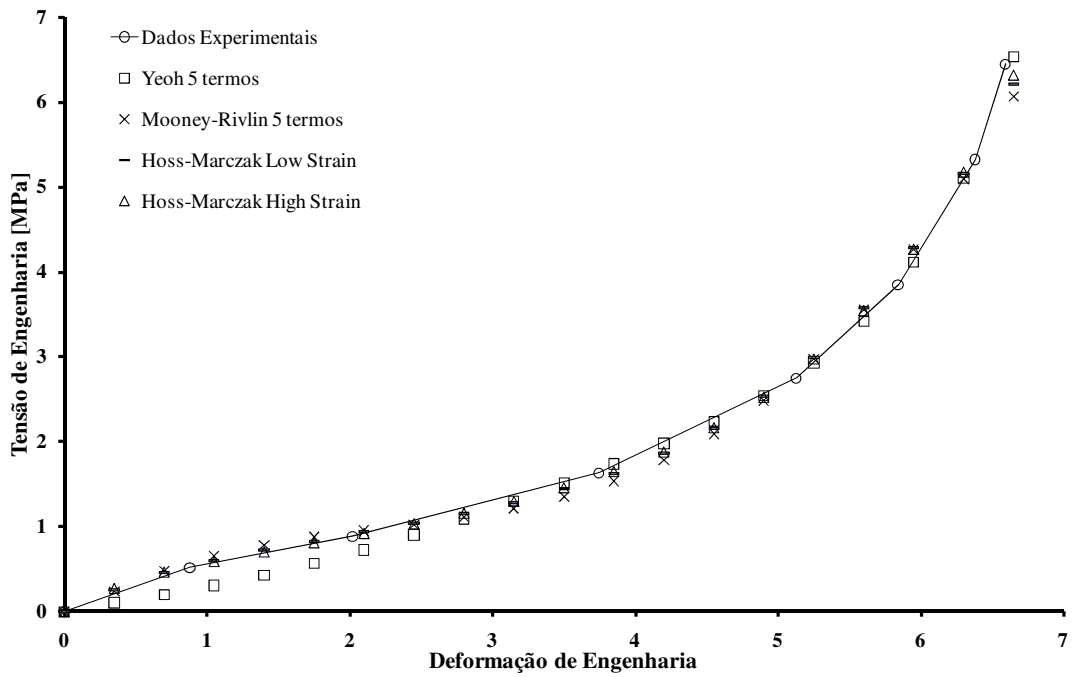


Figura 5.2. Resultados numéricos e experimentais para tração uniaxial em amostras de borracha de Treloar.

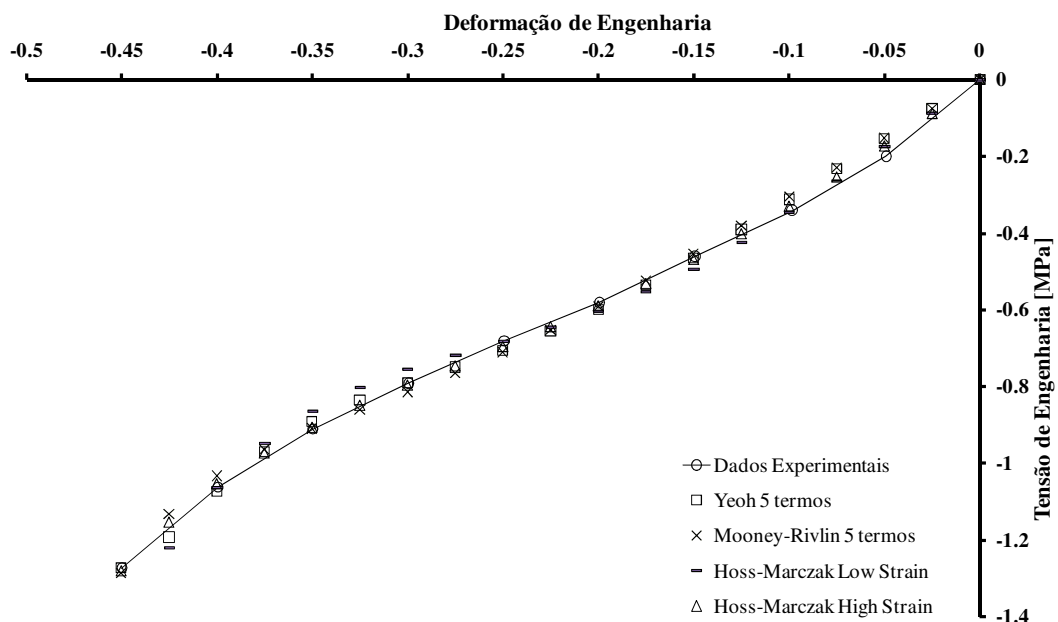


Figura 5.3. Resultados numéricos e experimentais para compressão uniaxial em amostras de borracha HDR.

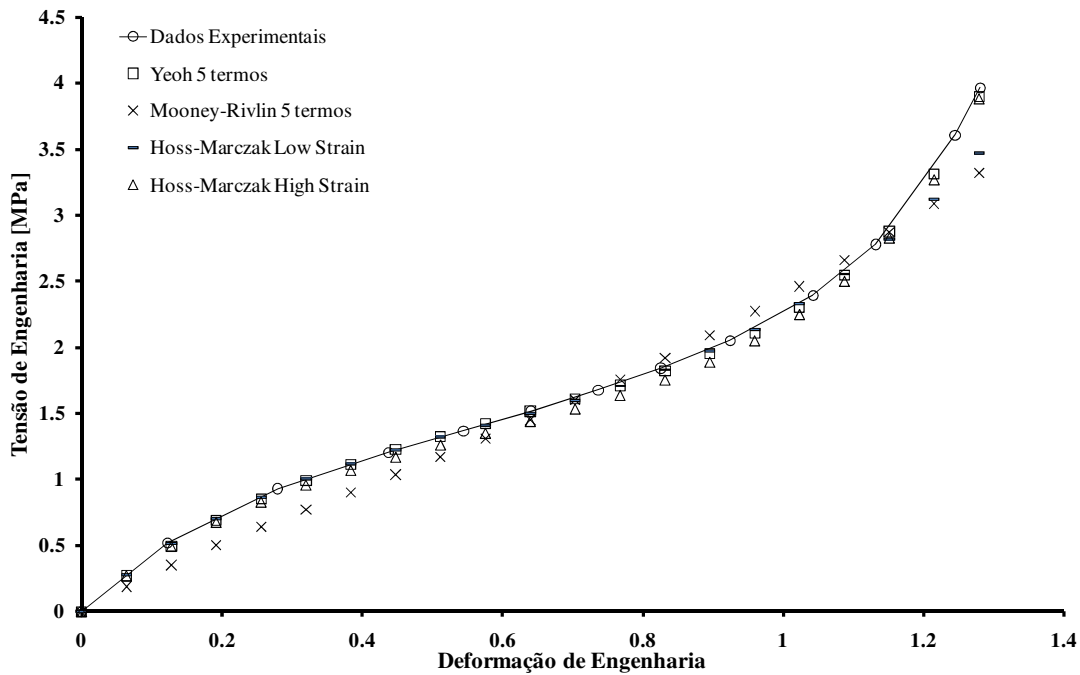


Figura 5.4. Resultados numéricos e experimentais para cisalhamento puro em amostras de borracha natural NR55.

Esses resultados são suficientes para confirmar a validade das implementações feitas no Abaqus através das subrotinas em FORTRAN. Esta mesma metodologia será empregada para análises de casos de deformações não-homogêneas, conforme será visto na próxima seção.

É importante salientar que para todos os casos das Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 as constantes hiperelásticas obtidas foram suficientes para satisfazer as desigualdades de Baker-Ericksen.

5.2. Análises de casos sob deformações não-homogêneas.

Uma vez garantida a validade da metodologia de implementação no Abaqus através de rotinas em FORTRAN, visando verificar o desempenho dos modelos HMI frente a casos mais complexos de deformação, partiu-se para estes tipos de análise em elementos finitos.

O primeiro caso analisado se trata de um problema de estado plano de tensões no qual um bloco inicialmente quadrado de dimensões conforme ilustrado na Figura 5.5 é submetido simultaneamente a compressão uniaxial e cisalhamento. As condições de contorno que geram a compressão e cisalhamento foram aplicadas sob forma de deslocamento prescrito e seus valores e direções também são mostrados na Figura 5.5.

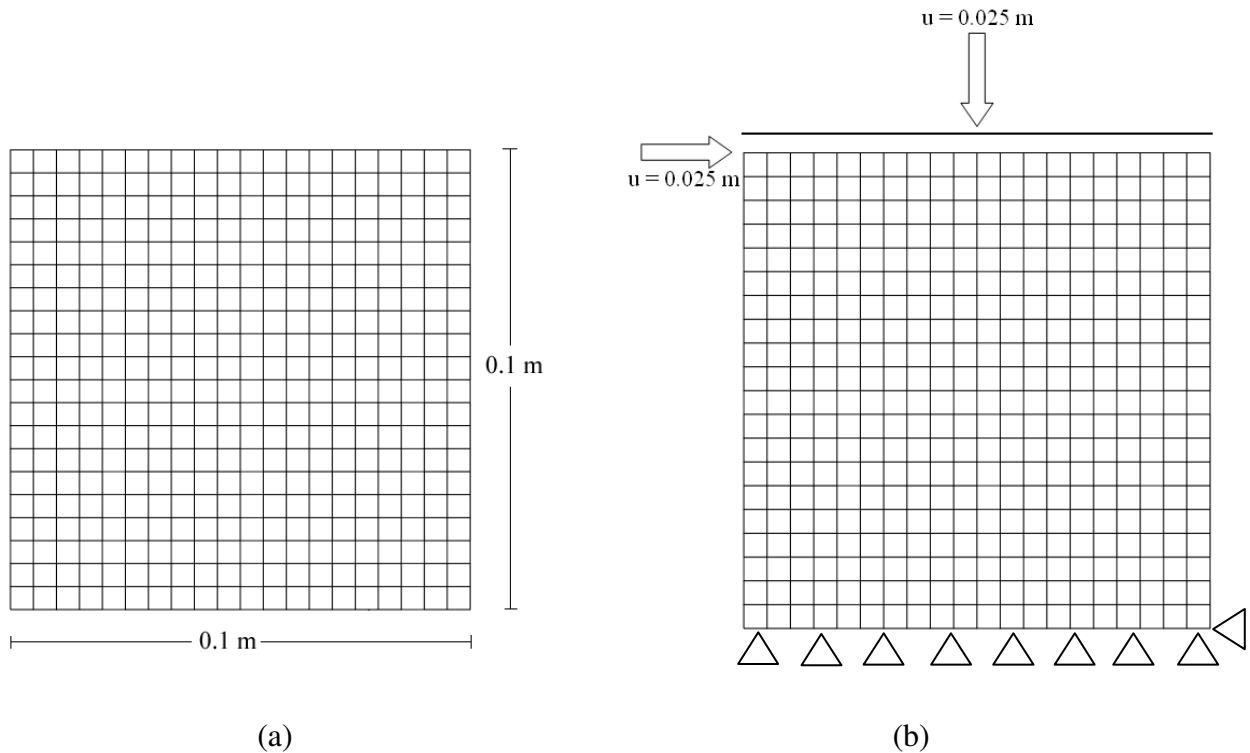


Figura 5.5. Bloco quadrado submetido a compressão uniaxial combinada com cisalhamento.

(a) Dimensões e (b) Condições de contorno.

Para esta simulação foram utilizados os mesmos modelos hiperelásticos que aqueles da Seção 5.1: HMLSI (Equação 4.1), HMHSI (Equação 4.2), YI5 (Equação 5.2) e MRI5 (Equação 5.3).

Os deslocamentos foram aplicados simultaneamente divididos em 20 passos de carga espaçados igualmente entre si e as constantes hiperelásticas utilizadas foram as mesmas que aquelas obtidas para o ensaio de compressão uniaxial da borracha HDR da Figura 5.3. Ao contrário das simulações com HMLSI e HMHSI, ocorreram problemas de convergência das soluções quando foram utilizados os modelos YI5 e MRI5, o que levou à necessidade de uso de um novo modelo para servir de base de comparação para os da família HMI. Este novo modelo escolhido foi o de Yeoh de 3 termos [Yeoh, 1990], para o qual também foi escrita uma subrotina em FORTRAN, apesar de o Abaqus apresentá-lo como opção de material hiperelástico.

A Equação do modelo de Yeoh de 3 termos (YI3) é dada por [Yeoh, 1990]:

$$W = C_{10}(I - 3) + C_{20}(I - 3)^2 + C_{30}(I - 3)^3 \quad (5.4)$$

A Figura 5.6 mostra o resultado não suavizado sob forma das bandas de pressão hidrostática para a peça da Figura 5.5 quando analisada com os três modelos considerados. Pode-

se notar uma boa concordância tanto qualitativamente como quantitativamente entre os diferentes modelos hiperelásticos.

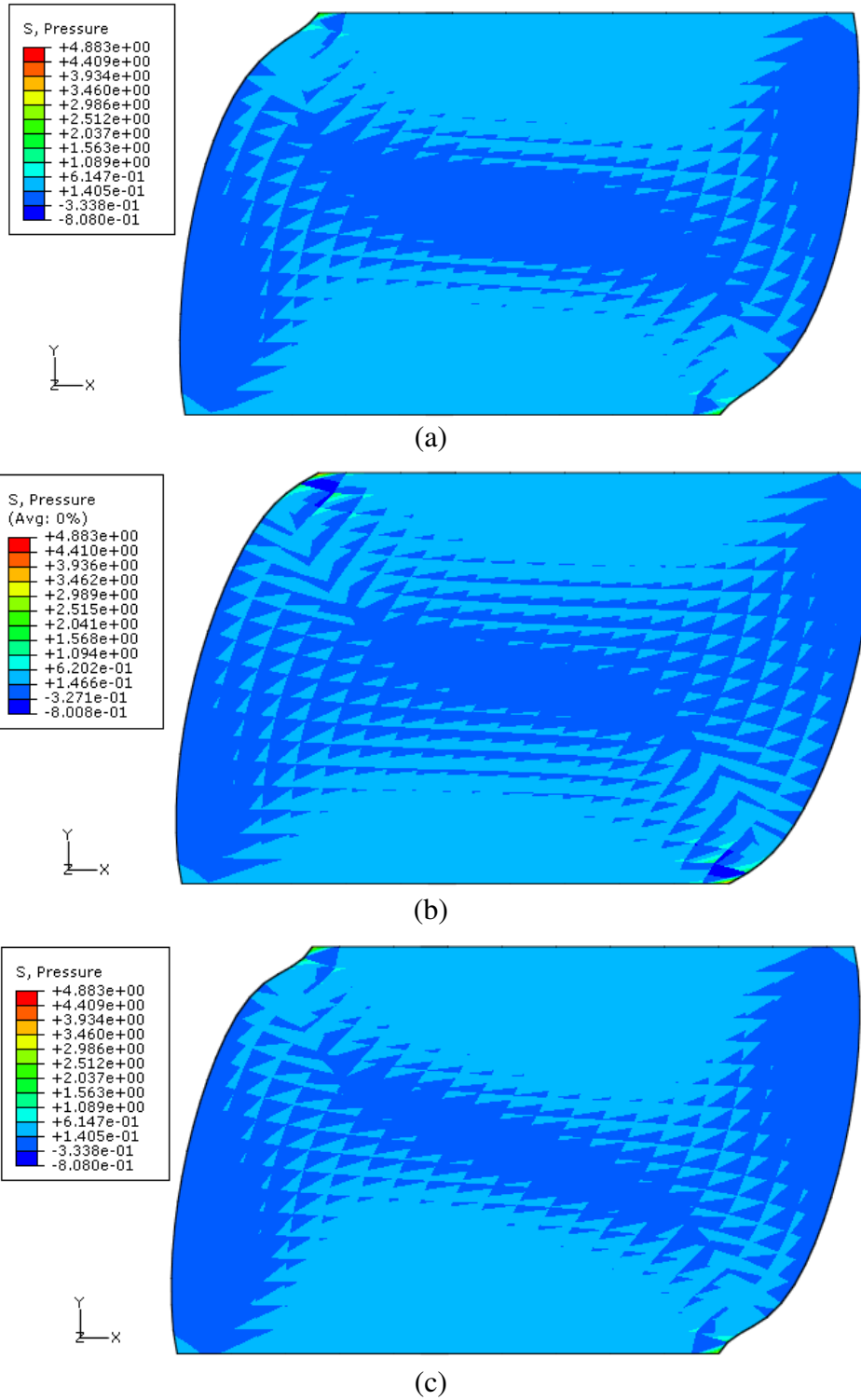


Figura 5.6. Resultados de banda de pressão hidrostática para os modelos (a) HMLSI, (b) HMHSI e (c) YI3 para o modelo da Figura 5.5

Com a finalidade de facilitar uma interpretação comparativa dos resultados, as escalas de resultado das Figuras 5.6-a, 5.6-b e 5.6-c foram artificialmente configuradas para mostrar os mesmos valores de pressão máxima e mínima para todos os casos.

A Figura 5.7 mostra, para este mesmo caso, os resultados de tensão de cisalhamento no plano xy . Pode-se notar que, além do fato de qualitativamente os resultados terem se mostrado bastante semelhantes, os valores de tensão máxima e mínima foram muito parecidos entre os modelos analisados.

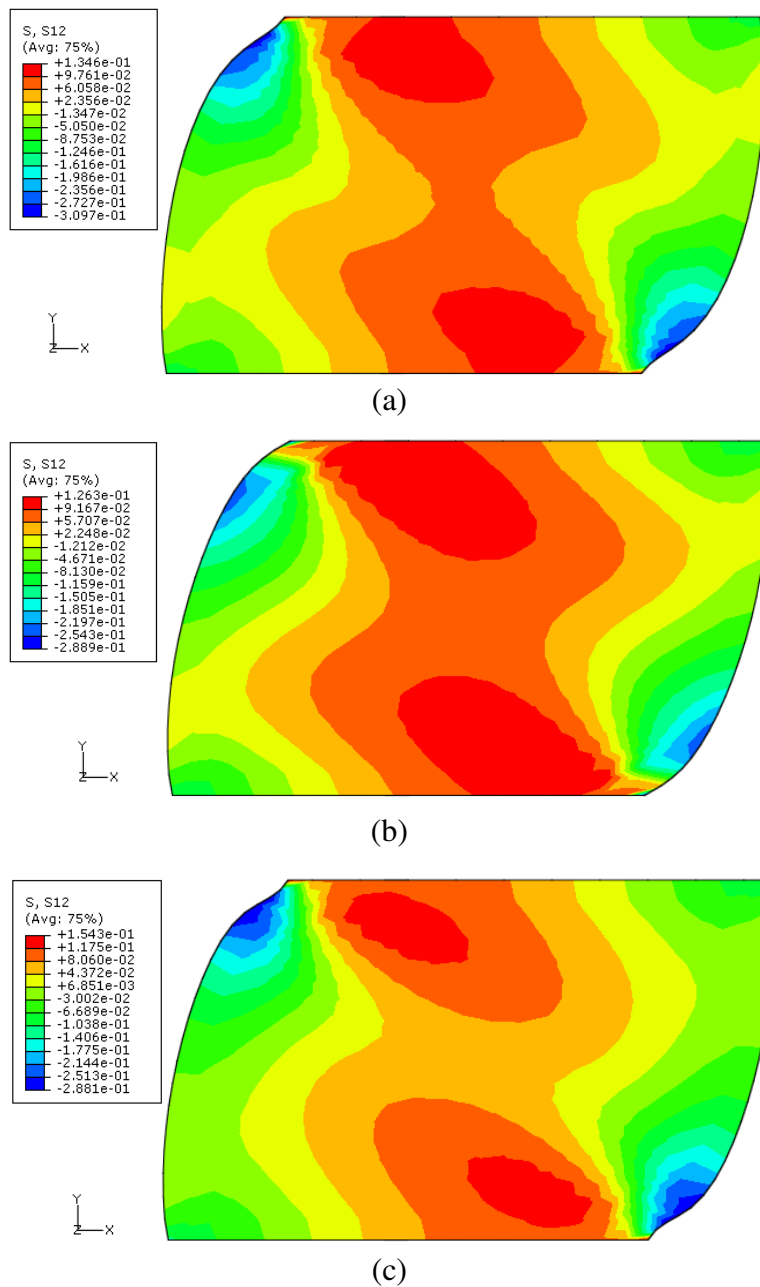


Figura 5.7. Resultados de tensão cisalhante S_{12} para os modelos (a) HMLSI, (b) HMHSI e (c)

YI3 para o modelo da Figura 5.5

Ao contrário do que foi feito para a Figura 5.6, para a Figura 5.7 as escalas não sofreram alterações.

Foi analisado também outro caso de deformação não-homogênea através da mesma metodologia já utilizada. Trata-se novamente de um problema bidimensional sob estado plano de tensões, porém tratando-se de uma tira de borracha inicialmente dobrada cuja malha, dimensões e condições de contorno estão mostradas na Figura 5.8.

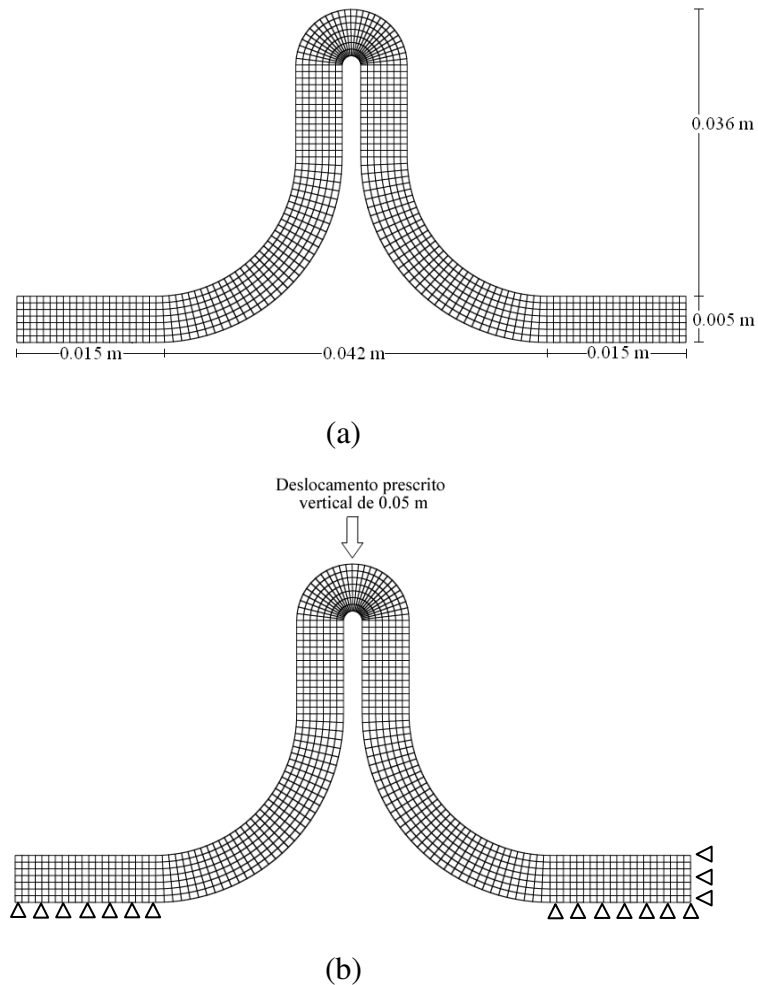


Figura 5.8. Dimensões e condições de contorno do caso de deformação não-homogênea.

(a) Malha e dimensões e (b) condições de contorno.

Para determinação dos parâmetros hiperelásticos, foram utilizados os dados experimentais de tração uniaxial de Treloar. Para as simulações foram considerados, além dos modelos hiperelásticos da família HMI, os modelos de Yeoh de 5 termos (Equação 5.2), Mooney-Rivlin de 5 termos (Equação 5.3) e Yeoh de 3 termos (Equação 5.4). As curvas de ajuste dos modelos YI5, MRI5, HMLSI e HMHSI para o conjunto de dados utilizado se encontram na Figura 5.2.

O modelo de Mooney-Rivlin de 5 termos apresentou novamente problemas de convergência da solução, assim como ocorrido durante o caso anteriormente analisado. A Figura 5.9 mostra os resultados sob forma de tensão principal máxima para a peça analisada considerando cada modelo utilizado. Entre os modelos analisados, os resultados foram muito semelhantes tanto qualitativamente como quantitativamente.

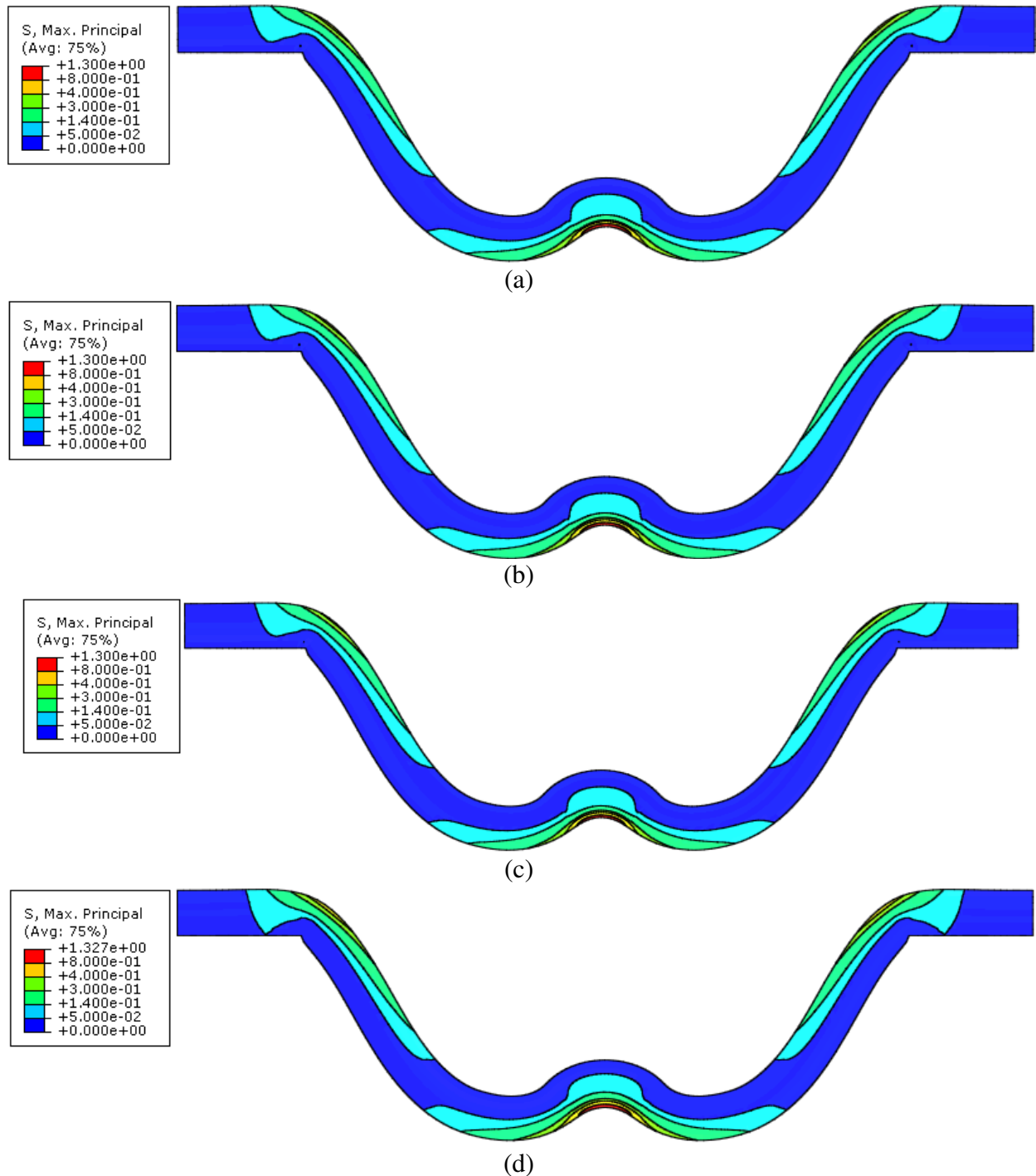


Figura 5.9. Resultados de tensão principal máxima para os modelos (a) Yeoh de 3 termos, (b) Yeoh de 5 termos, (c) Hoss-Marczak Low Strain e (d) Hoss-Marczak High Strain.

Na Figura 5.10 estão os resultados suavizados de pressão hidrostática para este caso. Novamente é notada boa concordância qualitativa e quantitativa entre os diferentes modelos.

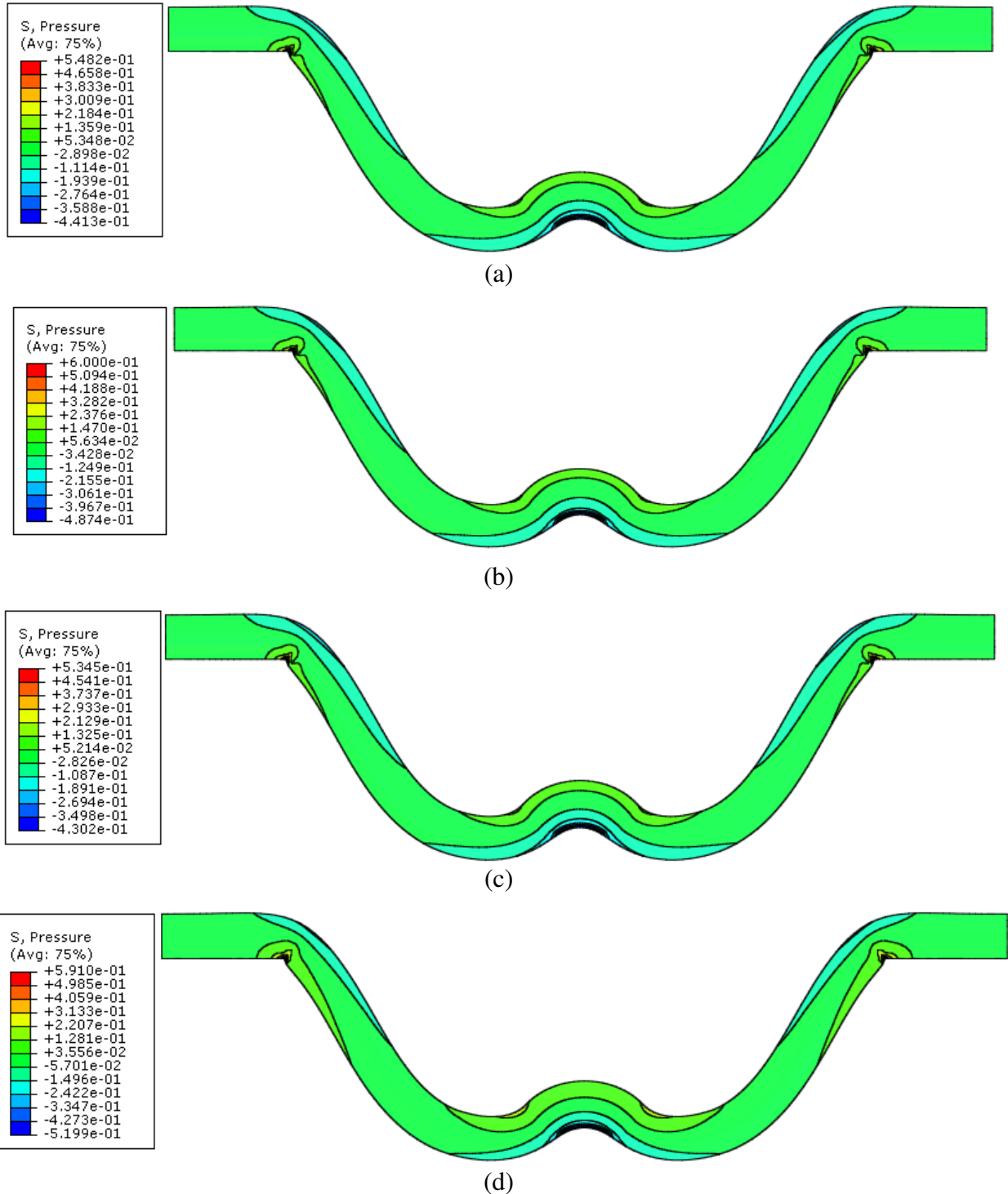


Figura 5.10. Resultados de deformação principal máxima para os modelos (a) Yeoh de 3 termos, (b) Yeoh de 5 termos, (c) Hoss-Marczak Low Strain e (d) Hoss-Marczak High Strain.

Após todas estas análises feitas, considerando os três casos de deformação homogênea cujos resultados numéricos se aproximaram muito bem dos experimentais (conforme Figuras 5.2, 5.3 e 5.4) e considerando os dois casos de deformações não-homogêneas cujos resultados apresentaram boas concordâncias tanto qualitativas como quantitativas entre diferentes modelos hiperelásticos considerados, chega-se às conclusões tanto de que a metodologia de implementação através de rotinas em FORTRAN no Abaqus 6.7 é válida, como de que os modelos da família HMI também oferecem resultados promissores quando aplicados em códigos de simulação numérica.

Sob outro contexto, no fim do Capítulo 6 será realizado um novo teste de deformações não-homogêneas com os modelos HMI.

6. OBTENÇÃO DAS CONSTANTES HIPERELÁSTICAS UTILIZANDO DADOS DE DOIS OU MAIS ENSAIOS.

Hoss [2009] propôs uma metodologia de ajuste das constantes hiperelásticas baseada na combinação linear das constantes obtidas para diferentes ensaios e ponderadas de acordo com a influência desejada para cada tipo de deformação. Matematicamente, as constantes são obtidas por [Hoss, 2009]:

$$\bar{C} = w_T C_T + w_P C_P + w_B C_B \quad (6.1)$$

onde \bar{C} é o novo grupo de constantes obtido através da combinação linear das constantes de tração uniaxial, cisalhamento puro e tração biaxial (C_T , C_P e C_B) ponderadas pelos pesos w_T , w_P e w_B respectivamente.

A Equação 6.1 é utilizada então para obter um novo grupo de constantes hiperelásticas \bar{C} visando melhorar o ajuste de cada curva proporcionalmente aos pesos (w_T , w_B e w_P) a elas atribuídos sem incorrer na perda de precisão das demais. A Figura 6.1 apresenta a sequência dos passos para aplicação deste ajuste a um conjunto de dados experimentais.

Após ajustar um conjunto de dados experimentais a um dado modelo, as curvas de predições para outras deformações geralmente não são tão boas quanto à ajustada. O objetivo do método é obter um conjunto de constantes que melhore o comportamento das curvas de predições sem incorrer na perda de precisão da curva ajustada. Apesar de ser uma tentativa de melhorar o desempenho das curvas, este método não consiste em um problema de otimização multi-objetivo propriamente dito, o que quer dizer que o conjunto de pesos adotado pelo analista via Equação 6.1 não necessariamente minimizará a soma dos erros entre dados teóricos e experimentais.

O que se propõe neste trabalho é uma metodologia de ajuste das constantes que elimine o procedimento iterativo “A” identificado na Figura 6.1, adquirindo diretamente um único conjunto de constantes hiperelásticas que minimize a soma total dos erros entre tensão teórica e experimental quando se dispõe de dados de dois ou mais ensaios distintos. Trata-se, portanto de um método de *otimização multi-critério*.

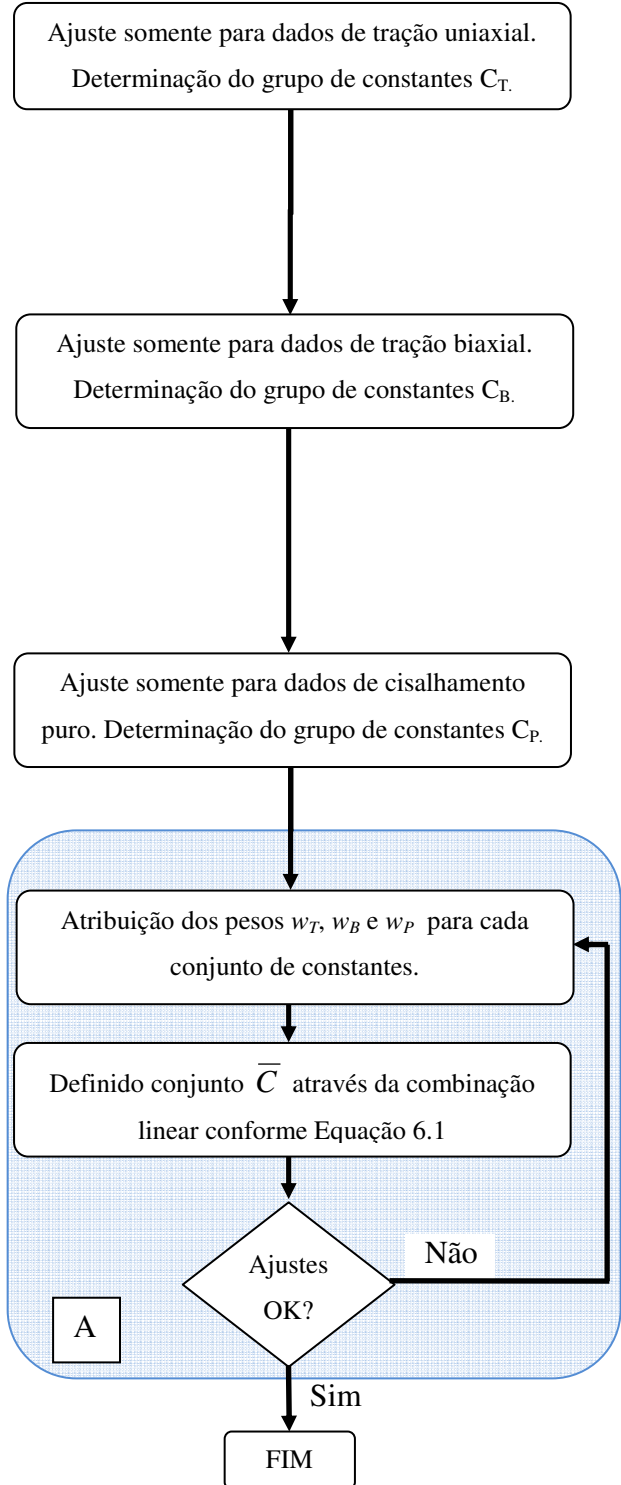
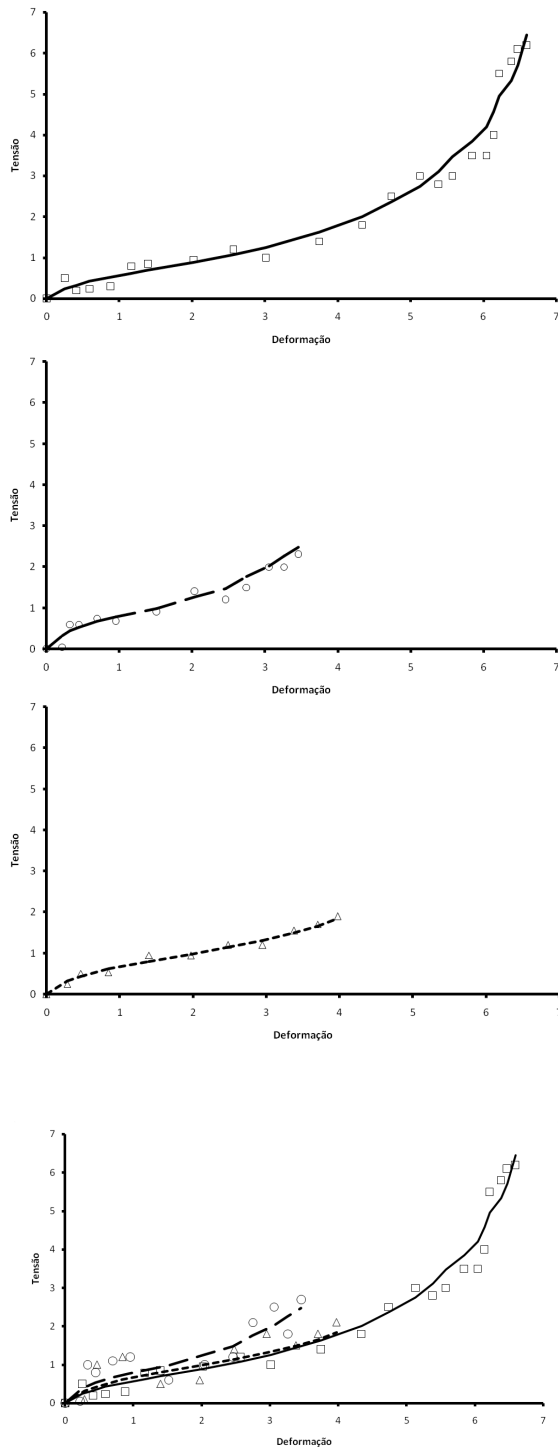


Figura 6.1. Metodologia seguida para o ajuste proposto por Hoss [2009].

O método mais utilizado para obtenção dos parâmetros hiperelásticos que melhor adapte um modelo aos valores experimentais é o Método dos Mínimos Quadrados [Björck, 1996], que utiliza como parâmetro de erro, para uma curva tensão-deformação, o quadrado da diferença entre tensão teórica - calculada pela equação característica do modelo - e experimental, conforme a Figura 6.2.

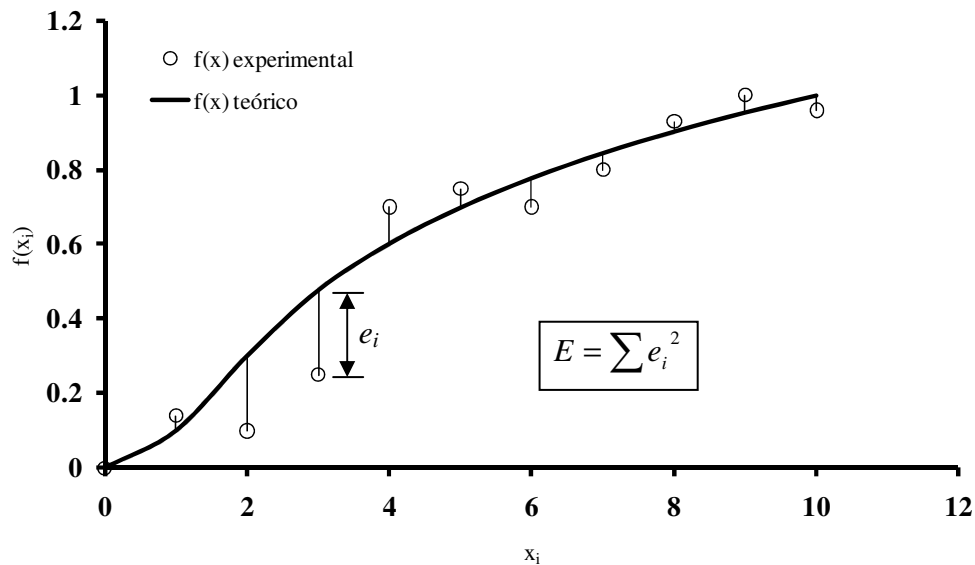


Figura 6.2. Conjunto de dados experimentais e ajuste teórico obtido por mínimos quadrados.

Para cada valor de x_i , o erro é tido como o quadrado da diferença entre $f(x)$ teórico e $f(x)$ experimental, e a função erro E a ser minimizada é, portanto:

$$E = \sum_{n=1}^{nt} \left(f(x)_{\text{teórico}} - f(x)_{\text{experimental}} \right)^2 \quad (6.2)$$

onde nt é o número total de pontos aos quais se quer ajustar a função.

A partir do momento em que se deseja ajustar dois ou mais modelos aos dados experimentais e não somente um único modelo, o método de ajuste por mínimos quadrados não é o mais adequado de ser empregado. No entanto, o mesmo conceito de erro empregado no ajuste por mínimos quadrados será utilizado neste trabalho para propor uma metodologia de obtenção de um único grupo de constantes que *minimize a soma dos erros* entre as tensões teórica e experimental para dados de dois ou mais ensaios.

6.1. Metodologia e implementação

O objetivo é utilizar um algoritmo que promova a minimização *simultânea* do erro para tração uniaxial, tração biaxial e cisalhamento puro (estes três serão os casos de deformações

homogêneas analisados aqui, mas obviamente outras deformações podem ser adicionalmente consideradas), gerando um único conjunto de constantes hiperelásticas *ótimo* que promove, para o modelo em estudo, o *menor erro possível* entre valores de tensão teóricos e experimentais.

Para que se possa começar a escrever este problema, é necessário escrever uma equação erro geral resultado da soma dos erros de todos os ensaios. Antes, no entanto, é necessário escrever as equações de tensões teóricas em função tanto das constantes hiperelásticas como das deformações experimentais. A Figura 6.3 mostra esquematicamente uma visualização dos erros que serão somados a fim de se obter a equação geral a ser minimizada.

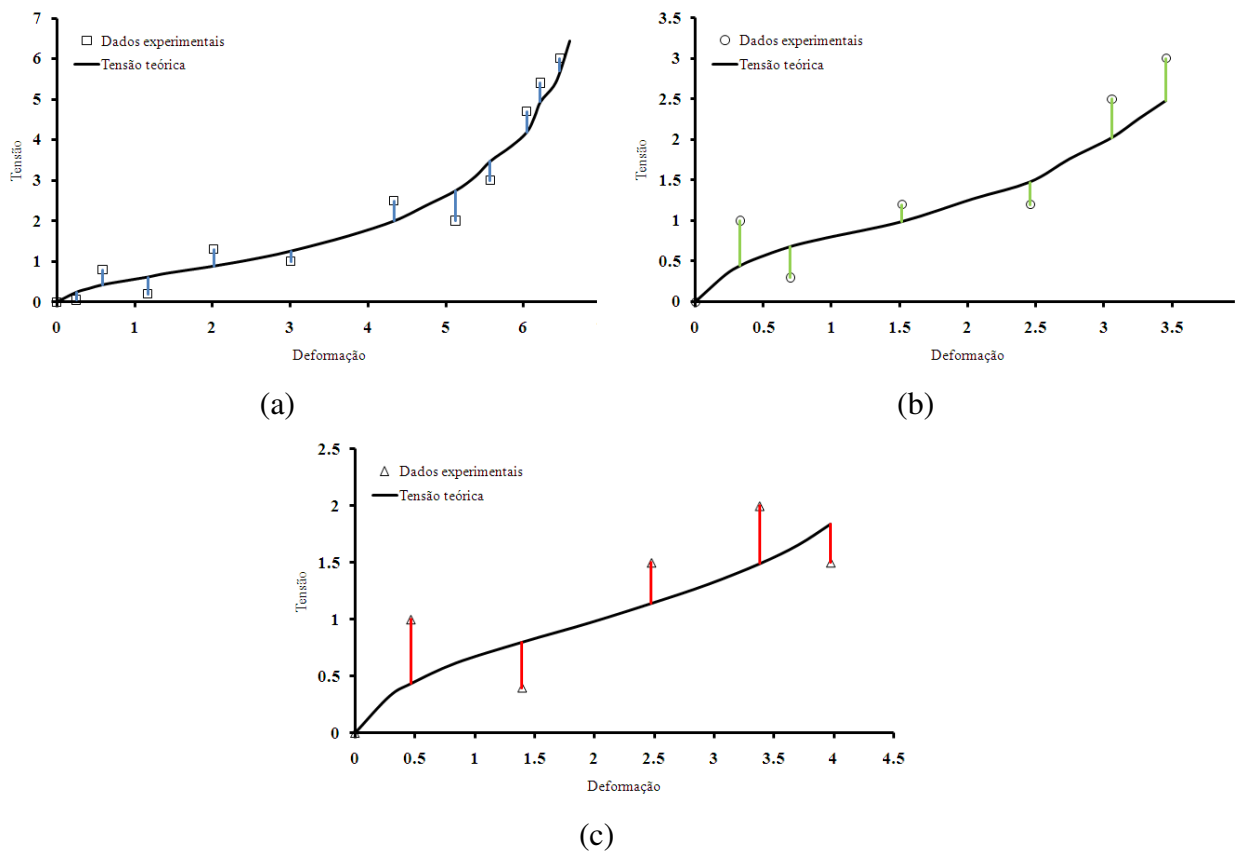


Figura 6.3. Diferenças entre valores experimental e teórico das tensões para os ensaios de:

(a) Tração uniaxial, (b) Tração biaxial e (c) Cisalhamento puro.

A fim de entender a dedução destas equações para cada modelo, é necessário conhecer as equações gerais de tensão para cada um dos três ensaios aqui considerados (T, B e P), conforme pode ser visto nas Figuras 6.4, 6.5 e 6.6.

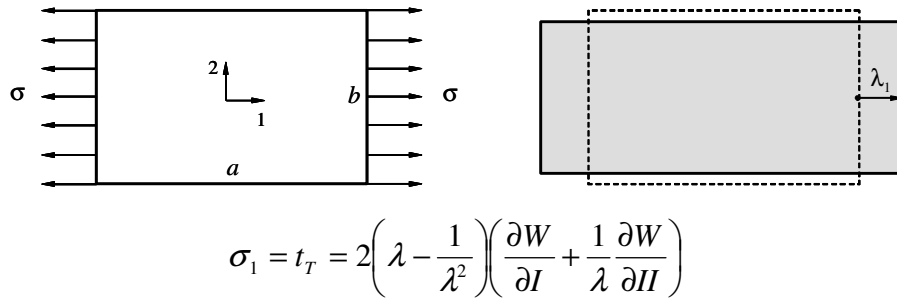


Figura 6.4. Equação da tensão para ensaio de tração uniaxial.

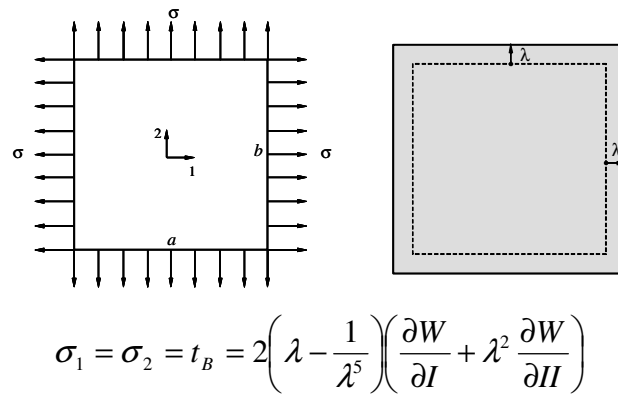


Figura 6.5. Equação da tensão para ensaio de tração biaxial.

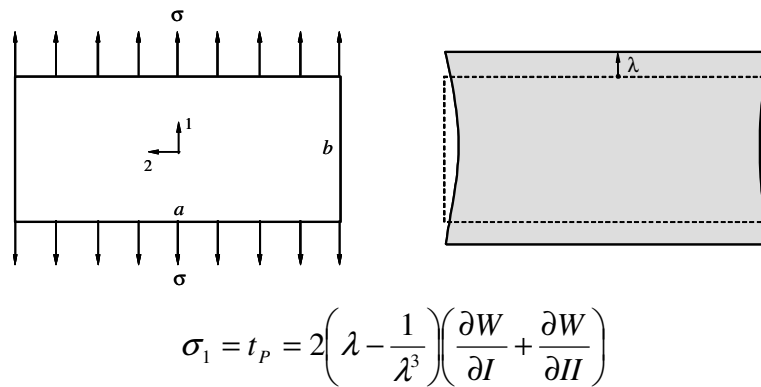


Figura 6.6. Equação da tensão para ensaio de cisalhamento puro.

A aplicação das derivadas da função energia de deformação de cada modelo da família HMI (Equações 4.3, 4.4 para HMLSI e Equações 4.7 e 4.8 para HMHSI) nas equações das Figuras 6.4, 6.5 e 6.6 levam às seguintes relações teóricas para tensão em tração uniaxial, tração biaxial e cisalhamento puro em função das deformações para estes modelos:

Para HMLSI:

$$t_T = 2 \left(\varepsilon + 1 - \frac{1}{(\varepsilon + 1)^2} \right) \left(\frac{1}{2} \mu \left(\left(1 + \frac{b}{n} \right) \left((\varepsilon + 1)^2 + \frac{2}{\varepsilon + 1} - 3 \right) \right)^{n-1} + \alpha e^{\left(-\beta \left((\varepsilon + 1)^2 + \frac{2}{\varepsilon + 1} - 3 \right) \right)} \right) \quad (6.3)$$

$$t_B = 2 \left(\varepsilon + 1 - \frac{1}{(\varepsilon + 1)^5} \right) \left(\frac{1}{2} \mu \left(1 + \frac{b \left(2(\varepsilon + 1)^2 + \frac{1}{(\varepsilon + 1)^4} - 3 \right)}{n} \right)^{n-1} + \alpha e^{\left(-\beta \left(2(\varepsilon + 1)^2 + \frac{1}{(\varepsilon + 1)^4} - 3 \right) \right)} \right) \quad (6.4)$$

$$t_P = 2 \left(\varepsilon + 1 - \frac{1}{(\varepsilon + 1)^3} \right) \left(\frac{1}{2} \mu \left(1 + \frac{b \left((\varepsilon + 1)^2 + \frac{1}{(\varepsilon + 1)^2} - 2 \right)}{n} \right)^{n-1} + \alpha e^{\left(-\beta \left((\varepsilon + 1)^2 + \frac{1}{(\varepsilon + 1)^2} - 2 \right) \right)} \right) \quad (6.5)$$

Para HMHSI:

$$t_T = 2 \left(\varepsilon + 1 - \frac{1}{(\varepsilon + 1)^2} \right) \left(\frac{1}{2} \mu \left(\left(1 + \frac{b}{n} \right) \left((\varepsilon + 1)^2 + \frac{2}{\varepsilon + 1} - 3 \right) \right)^{n-1} + \alpha e^{\left(-\beta \left((\varepsilon + 1)^2 + \frac{2}{\varepsilon + 1} - 3 \right) \right)} + \frac{C_2}{\left(2\varepsilon + 2 + \frac{1}{(\varepsilon + 1)^2} \right) (\varepsilon + 1)} \right) \quad (6.6)$$

$$t_B = 2 \left(\varepsilon + 1 - \frac{1}{(\varepsilon + 1)^5} \right) \left(\frac{1}{2} \mu \left(1 + \frac{b \left(2(\varepsilon + 1)^2 + \frac{1}{(\varepsilon + 1)^4} - 3 \right)}{n} \right)^{n-1} + \alpha e^{\left(-\beta \left(2(\varepsilon + 1)^2 + \frac{1}{(\varepsilon + 1)^4} - 3 \right) \right)} + \frac{C_2 (\varepsilon + 1)^2}{(\varepsilon + 1)^4 + \frac{2}{(\varepsilon + 1)^2}} \right) \quad (6.7)$$

$$t_p = 2 \left(\varepsilon + 1 - \frac{1}{(\varepsilon + 1)^3} \right) \left[\frac{1}{2} \mu \left(1 + \frac{b \left((\varepsilon + 1)^2 + \frac{1}{(\varepsilon + 1)^2} - 2 \right)}{n} \right)^{n-1} + \right. \\ \left. + \alpha e \left(-\beta \left((\varepsilon + 1)^2 + \frac{1}{(\varepsilon + 1)^2} - 2 \right) \right) + \frac{C_2}{(\varepsilon + 1)^2 + 1 + \frac{1}{(\varepsilon + 1)^2}} \right] \quad (6.8)$$

onde ε é o valor de deformação de engenharia calculado dos ensaios experimentais.

Para cada ponto experimental de deformação de um dado ensaio, são calculadas as tensões das Equações 6.3 a 6.8 que, depois de diminuídas das experimentais, são elevadas ao quadrado e somadas, constituindo uma equação de erro a ser minimizada para cada ensaio (e_T para tração uniaxial, e_P para cisalhamento puro e e_B para tração biaxial). Finalmente, a função erro E a ser minimizada é constituída pela soma de duas ou mais das funções erro de cada ensaio. Esta função erro total é então computada através de:

$$E = e_T + e_P + e_B = \sum_{i=1}^{n_T} (t_{T_i} - t_{E_i})_T^2 + \sum_{j=1}^{n_P} (t_{T_j} - t_{E_j})_P^2 + \sum_{k=1}^{n_B} (t_{T_k} - t_{E_k})_B^2 \quad (6.9)$$

onde n_T , n_P e n_B são o número de pontos experimentais de tração uniaxial, cisalhamento puro e tração biaxial respectivamente, t_T e t_E são os valores de tensão teórica e experimental respectivamente e os sub-índices T , P e B são referentes aos dados dos ensaios de tração uniaxial, cisalhamento puro e tração biaxial respectivamente. Obviamente, outros tipos de ensaios podem ser inseridos em (6.9).

A Equação 6.9 é função das constantes de ajustes dos modelos e encontrar o valor destas constantes que minimizem a função erro E pode ser escrito como um problema de otimização sem restrições [Beveridge e Schechter, 1970] de acordo com:

$$\min_{\mathbf{C}} E(\mathbf{C}) \quad (6.10)$$

onde \mathbf{C} é o vetor contendo as constantes do modelo e $E(\mathbf{C})$ é a função erro a qual, uma vez atribuídos os valores escalares para cada constante C_i , retorna um escalar.

Para resolver o problema de minimização da Equação 6.10 foi utilizada a rotina *fminsearch* do MatLab, que utiliza o método de otimização de Nelder-Mead [Nelder e Mead, 1965]. Um exemplo da utilização do comando *fminsearch* se encontra no Anexo IV deste texto.

6.2. Resultados

6.2.1. Dados experimentais de Treloar e NR55

Os dados para borracha natural NR55 e de Treloar (já comentados no Capítulo 5) para os três ensaios (T, B e P) foram utilizados para testar esta metodologia em seis diferentes modelos hiperelásticos, além dos modelos HMLSI e HMHSI. Estes seis modelos são:

Modelo de Mooney-Rivlin de 9 termos (MRI9) [Rivlin e Saunders, 1951]:

$$W = \sum_{i+j=1}^3 C_{ij} (I-3)^i (II-3)^j \quad (6.11)$$

Modelo de Yeoh de três termos (YI3) [Yeoh, 1990]

$$W = C_{10} (I-3) + C_{20} (I-3)^2 + C_{30} (I-3)^3 \quad (6.12)$$

Modelo de Gent (GI) [Gent, 1996]:

$$W = -\frac{\mu}{2} (I_L - 3) \ln \left[1 - \frac{I-3}{I_L-3} \right] \quad (6.13)$$

Modelo de Pucci-Saccomandi (PSI) [Pucci e Saccomandi, 2002]:

$$W = -\frac{\mu J_L}{2} \ln \left(1 - \frac{I-3}{J_L} \right) + C_2 \ln \left(\frac{II}{3} \right) \quad (6.14)$$

Modelo de Fung (FI) [Fung, 1967]:

$$W = \frac{\mu}{2b} (e^{b(I-3)} - 1) \quad (6.15)$$

Modelo de Ogden de 2 parâmetros (OI2) [Ogden, 1972]:

$$W = \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (6.16)$$

A verificação da qualidade dos ajustes entre dados teóricos e experimentais foi feita através de um estimador de erro. Em se tratando de relações lineares, um método eficiente de se avaliar a qualidade entre o ajuste teórico aos dados experimentais é o cálculo do coeficiente de correlação linear R^2 , que pode assumir valores entre 0 (ajuste ruim) e 1 (ajuste perfeito). No entanto, quando se trabalha com relações não-lineares como as curvas típicas de tensão-deformação de materiais elastoméricos, torna-se necessária a utilização de um coeficiente de correlação próprio para estes casos. Hoss [2009] propôs um estimador de erro R^2 não-linear calculado por:

$$R^2 = 1 - \frac{S_{reg}}{S_{tot}}$$

$$S_{reg} = \sum_{i=1}^n (t_e - t_t)^2$$

$$S_{tot} = \sum_{i=1}^n (t_e - \bar{t}_e)^2$$
(6.17)

onde t_e e t_t representam respectivamente os valores de tensão experimental e teórico e \bar{t}_e é o valor médio das tensões experimentais ao longo do intervalo em análise.

Doravante, sempre que for citado “ R^2 ” se estará referindo ao estimador não-linear da Equação 6.17.

As representações geométricas de S_{reg} e S_{tot} são mostradas na Figura 6.7.

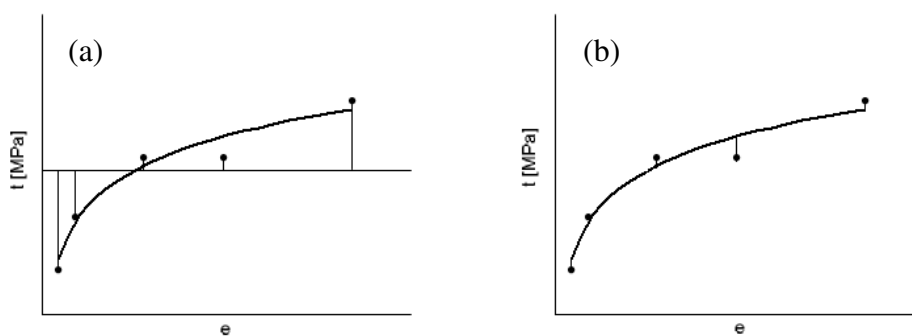
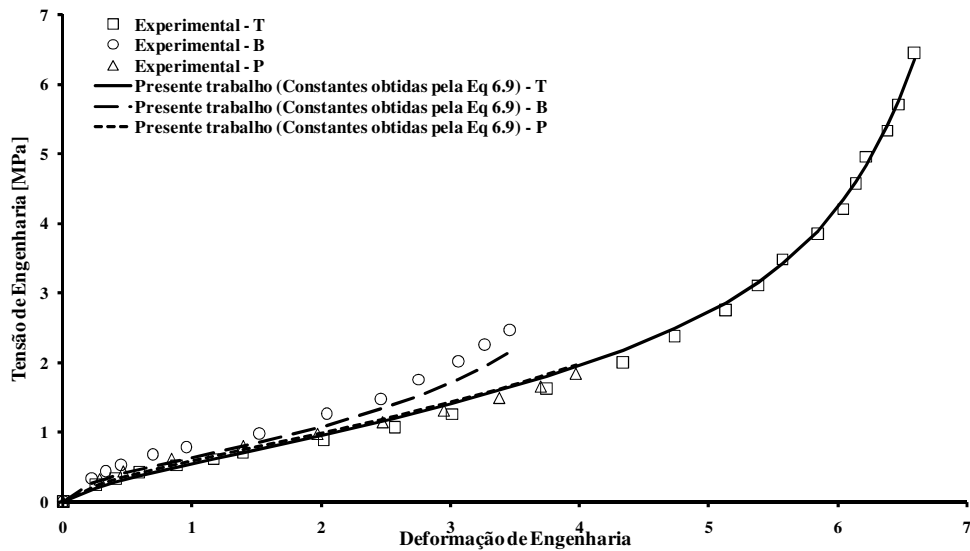


Figura 6.7. Variáveis envolvidas no cálculo do R^2 não linear. (a) - S_{tot} . (b) - S_{reg} .

Fonte: [Hoss, 2009].

Ao contrário do coeficiente de correlação linear, que somente pode assumir valores entre zero e um, ao calcular o coeficiente não-linear, se o valor de S_{reg} for muito maior do que S_{tot} , R^2 pode assumir valores negativos, o que simplesmente indica que o modelo hiperelástico não se ajusta bem ao conjunto de dados experimentais utilizados.

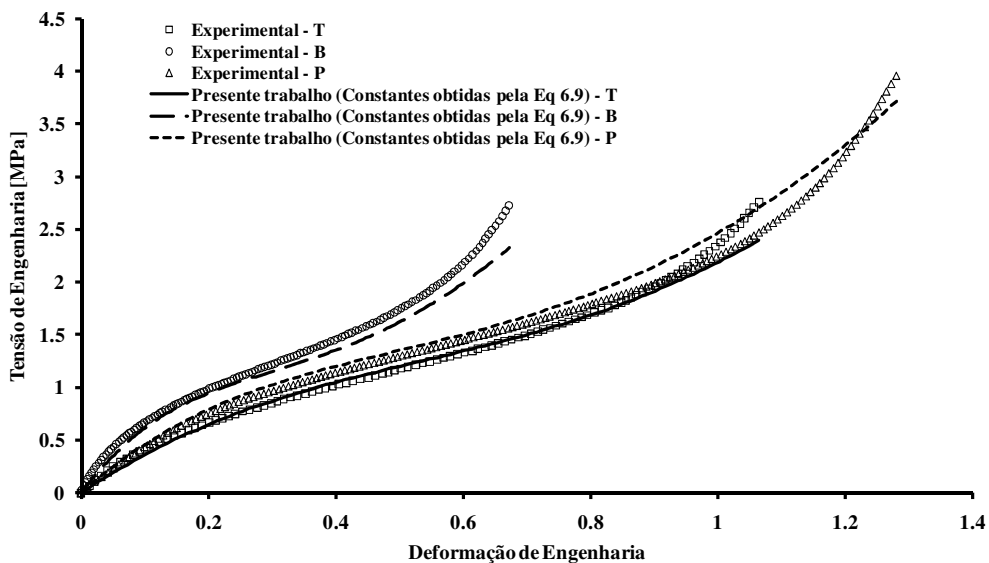
As Figuras 6.8 a 6.23 mostram os resultados obtidos ao se aplicar esta metodologia de determinação das constantes para cada um dos modelos citados e os dois tipos de borracha considerados. As constantes obtidas em cada caso e os coeficientes de correlação não-linear R^2 se encontram listadas ao lado dos seus respectivos gráficos.



Constantes	
α	1,53E-1
β	-1,06E-2
b	1,66E-1
n	24,8
μ	1,73E-4

Ajuste	R^2
T	0,9976
B	0,9225
P	0,9669

Figura 6.8. Modelo HMLSI ajustado para dados de Treloar.



Constantes	
α	5,12E-1
β	8,78E-1
b	2,21
n	2,09
μ	3,1E-1

Ajuste	R^2
T	0,9823
B	0,9627
P	0,9822

Figura 6.9. Modelo HMLSI ajustado para dados de NR55.

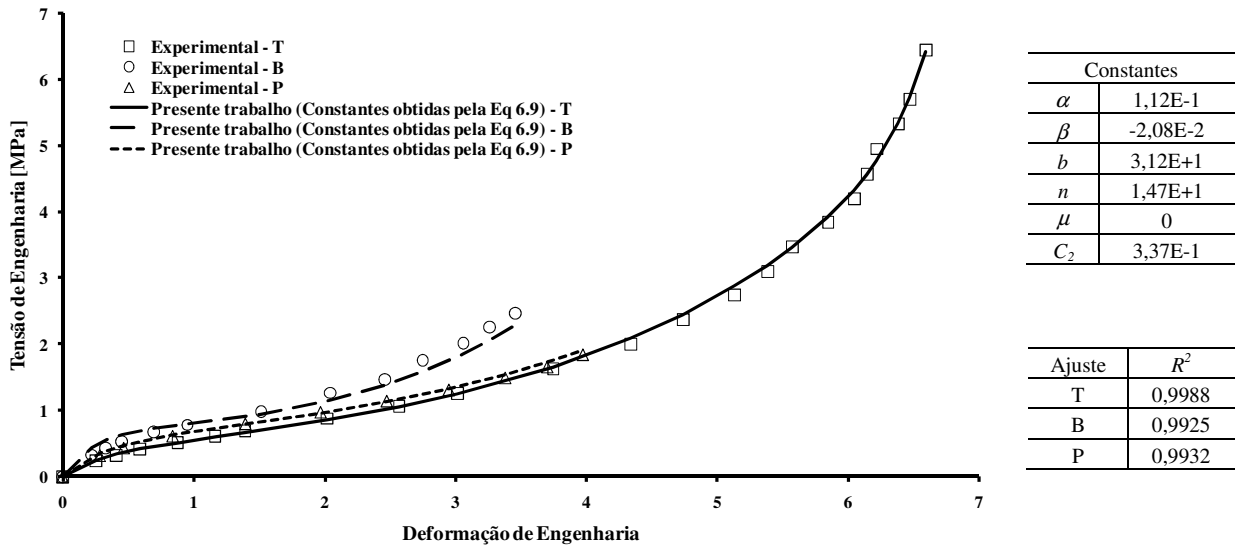


Figura 6.10. Modelo HMHSI ajustado para dados de Treloar.

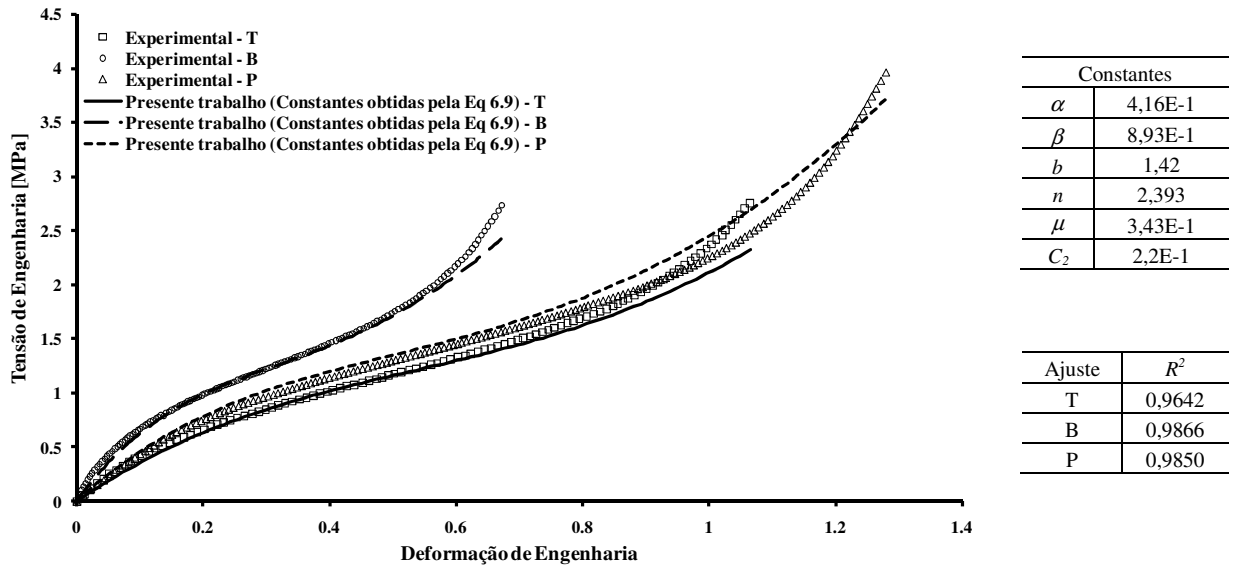
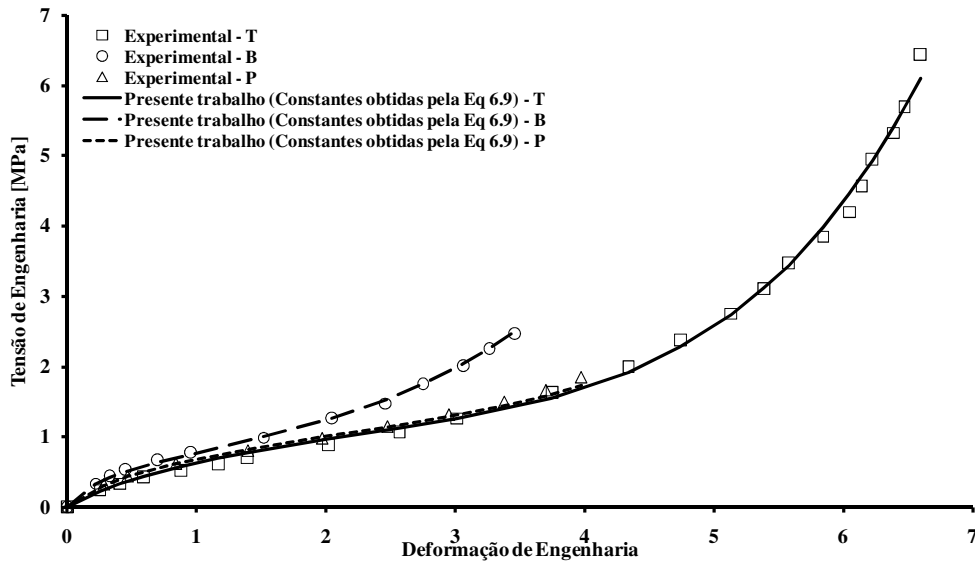


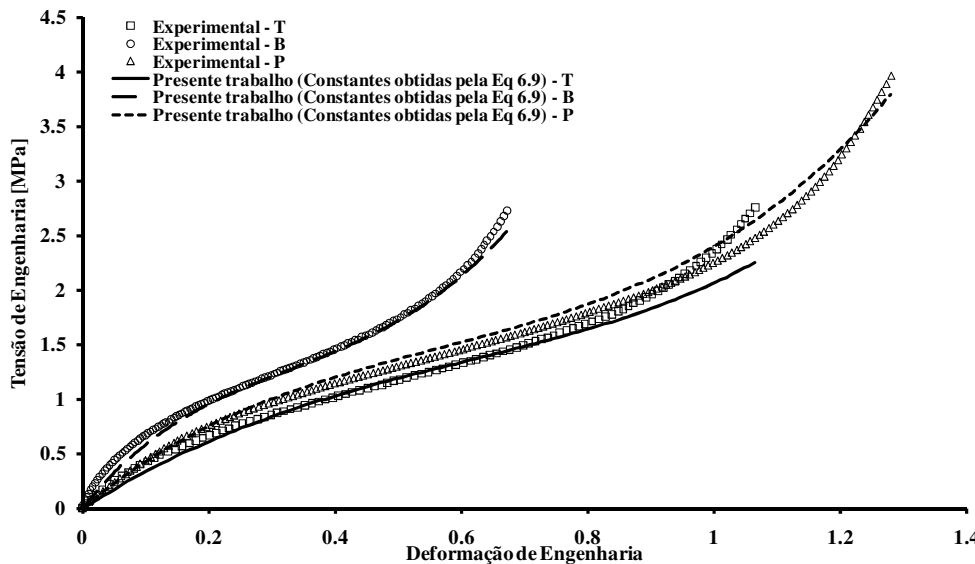
Figura 6.11. Modelo HMHSI ajustado para dados de NR55.



Constantes	
C_{01}	1,84E-1
C_{10}	7,63E-3
C_{11}	-9,71E-5
C_{20}	-1,88E-3
C_{30}	4,72E-5

Ajuste	R^2
T	0,9965
B	0,9987
P	0,9919

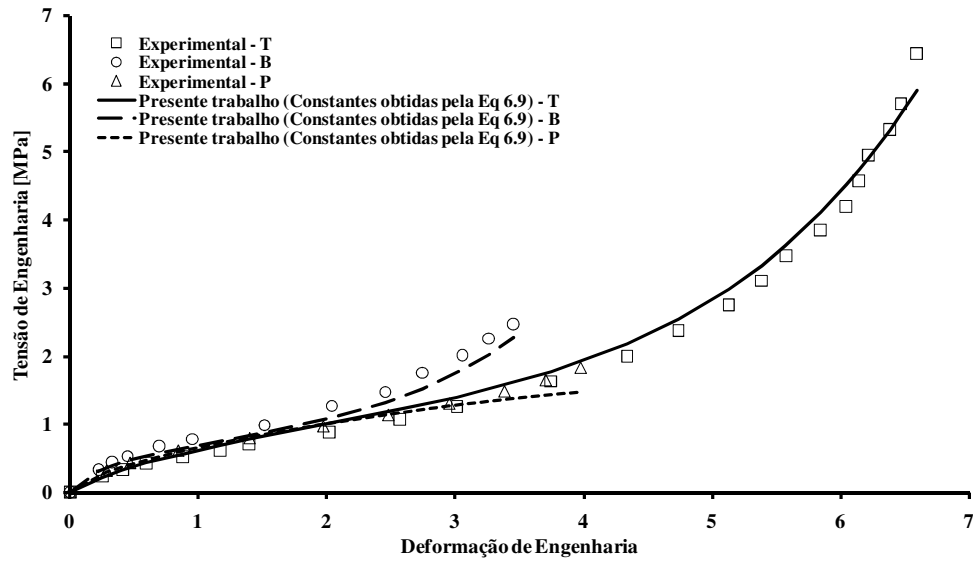
Figura 6.12. Modelo MRI9 ajustado para dados de Treloar.



Constantes	
C_{01}	6,02E-1
C_{10}	2,23E-2
C_{11}	5,39E-3
C_{20}	-6,44E-2
C_{30}	1,85E-2

Ajuste	R^2
T	0,9536
B	0,9915
P	0,9898

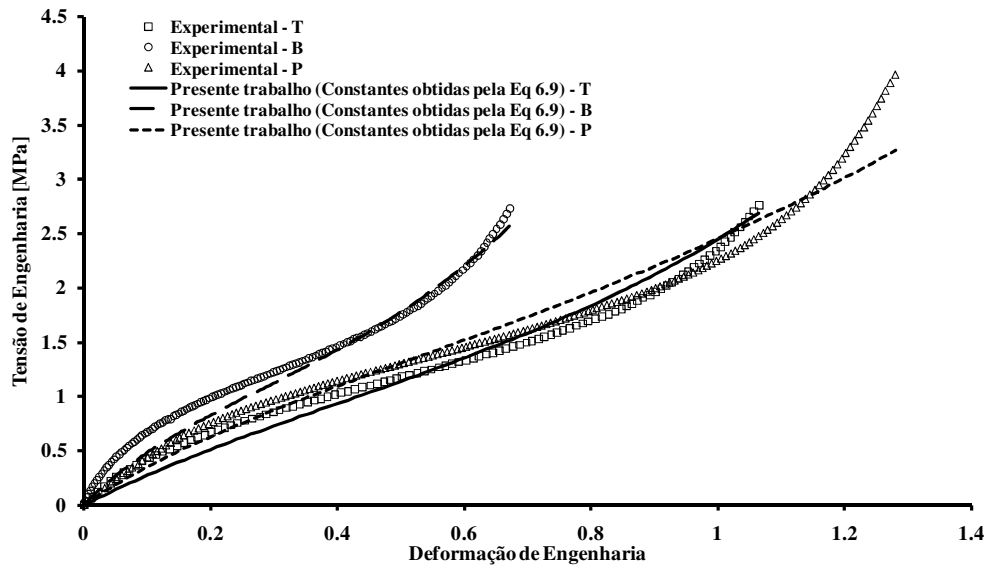
Figura 6.13. Modelo MRI9 ajustado para dados de NR55.



Constantes	
C_{10}	1,82E-1
C_{20}	-8,29E-4
C_{30}	3,31E-5

Ajuste	R^2
T	0,9901
B	0,9510
P	0,9235

Figura 6.14. Modelo YI3 ajustado para dados de Treloar.



Constantes	
C_{10}	5,01E-1
C_{20}	2,71E-2
C_{30}	7,41E-3

Ajuste	R^2
T	0,9719
B	0,9659
P	0,9618

Figura 6.15. Modelo YI3 ajustado para dados de NR55.

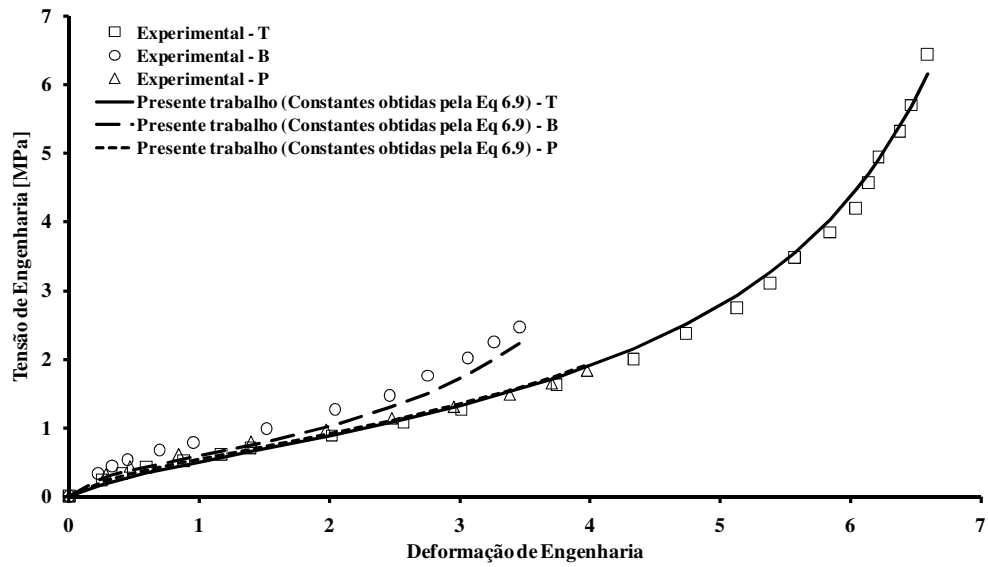


Figura 6.16. Modelo GI ajustado para dados de Treloar.

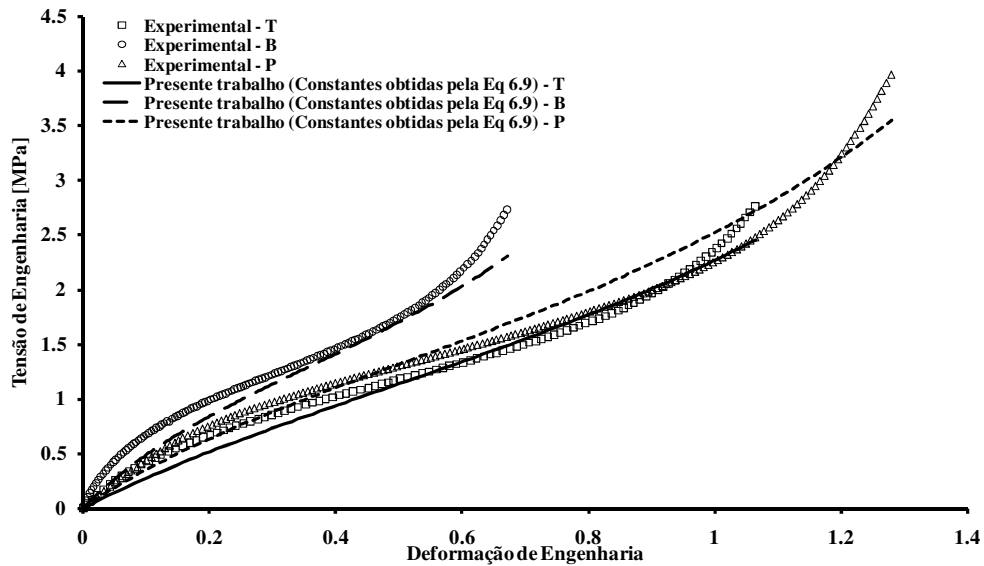
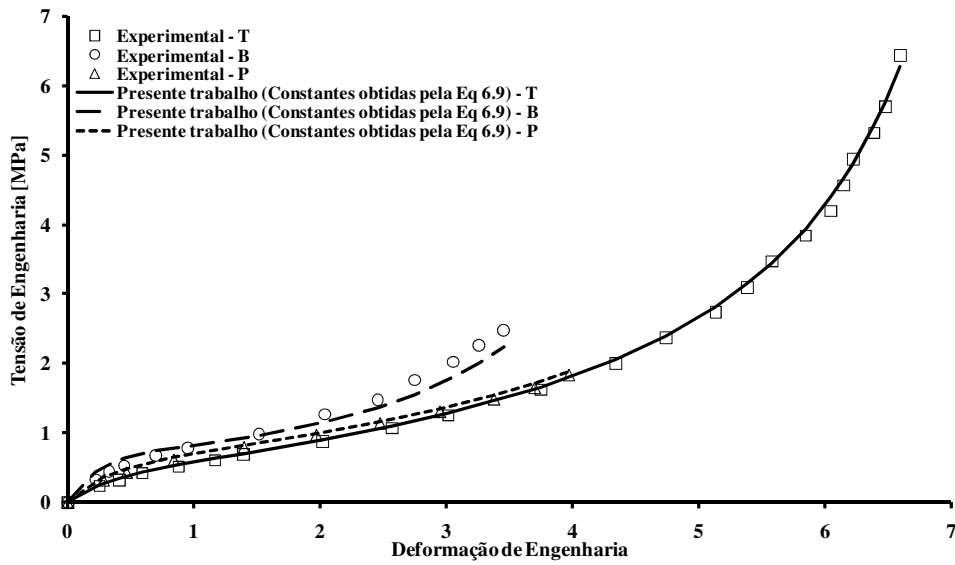


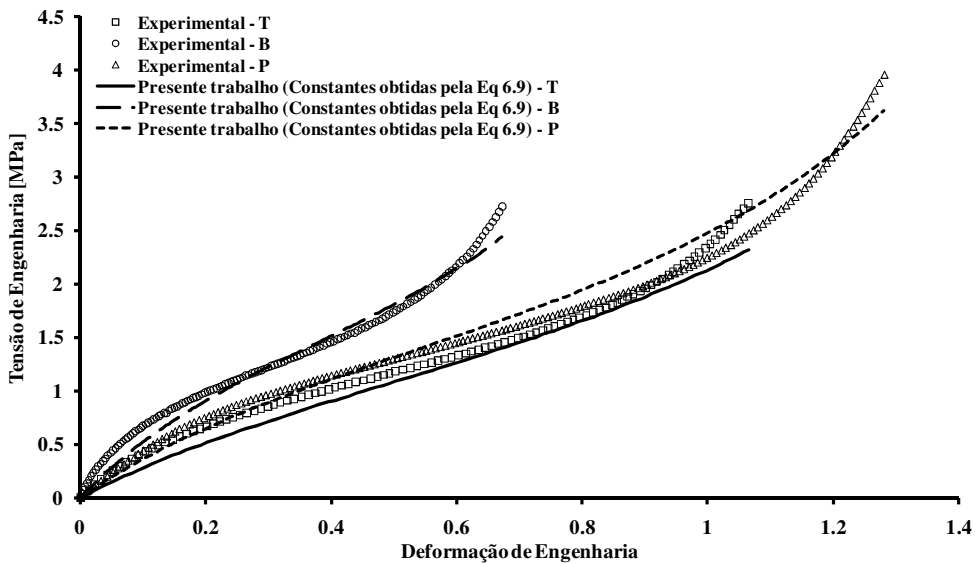
Figura 6.17. Modelo GI ajustado para dados de NR55.



μ	2,54E-1
J_L	82,3
C_2	2,94E-1

Ajuste	R^2
T	0,9986
B	0,9547
P	0,9944

Figura 6.18. Modelo PSI ajustado para dados de Treloar.



Constantes	
μ	8,32E-1
J_L	10,3
C_2	3,19E-1

Ajuste	R^2
T	0,9539
B	0,9764
P	0,9768

Figura 6.19. Modelo PSI ajustado para dados de NR55.

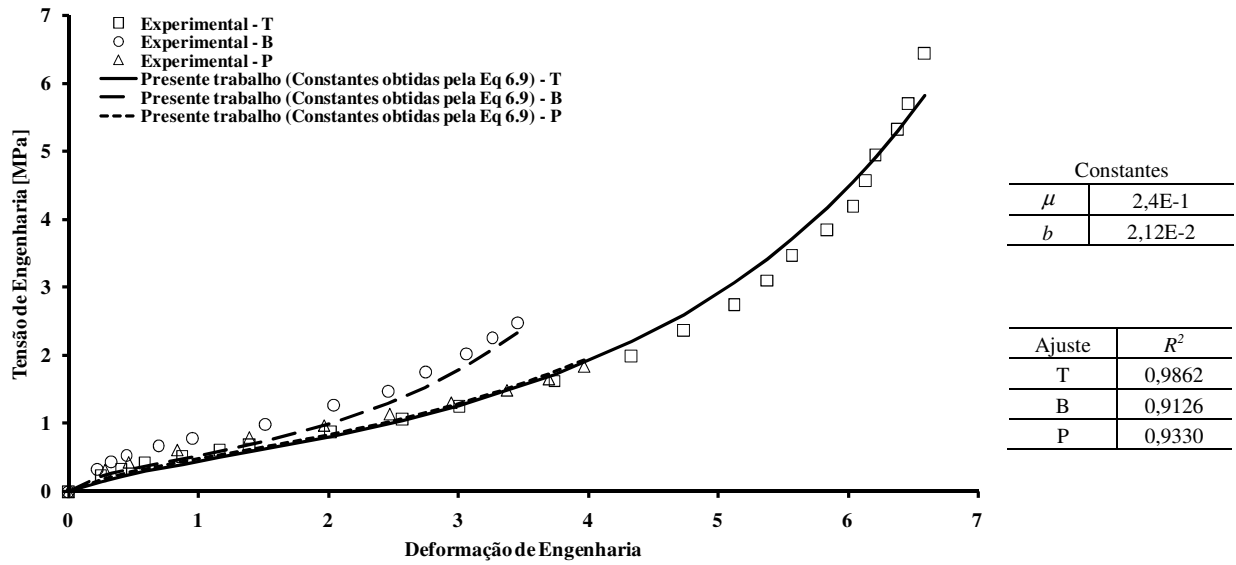


Figura 6.20. Modelo FI ajustado para dados de Treloar.

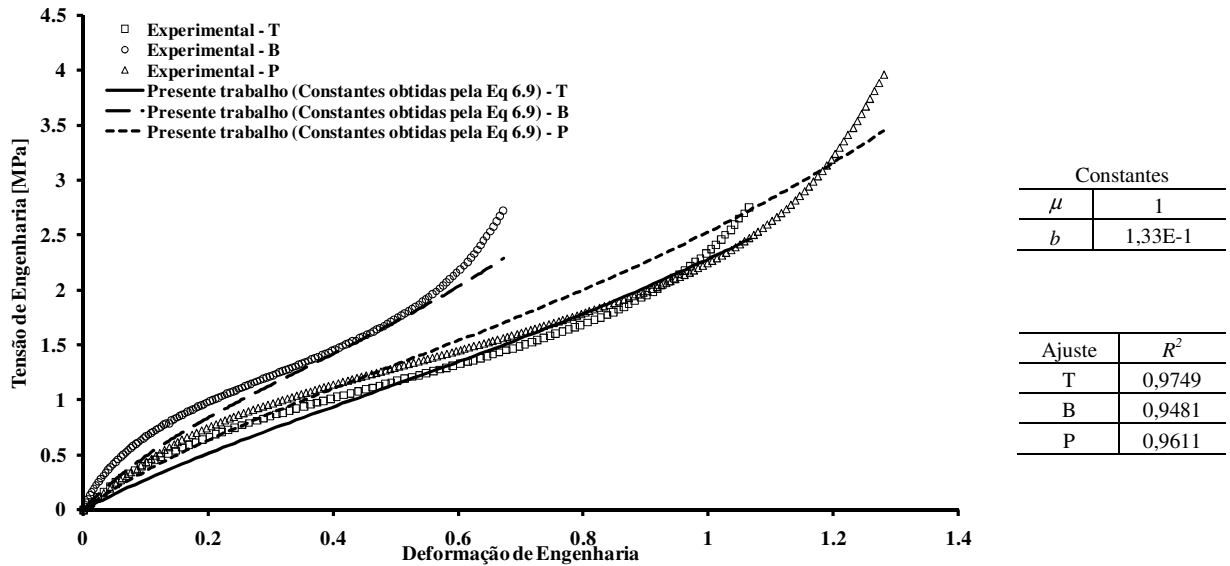


Figura 6.21. Modelo FI ajustado para dados de NR55.

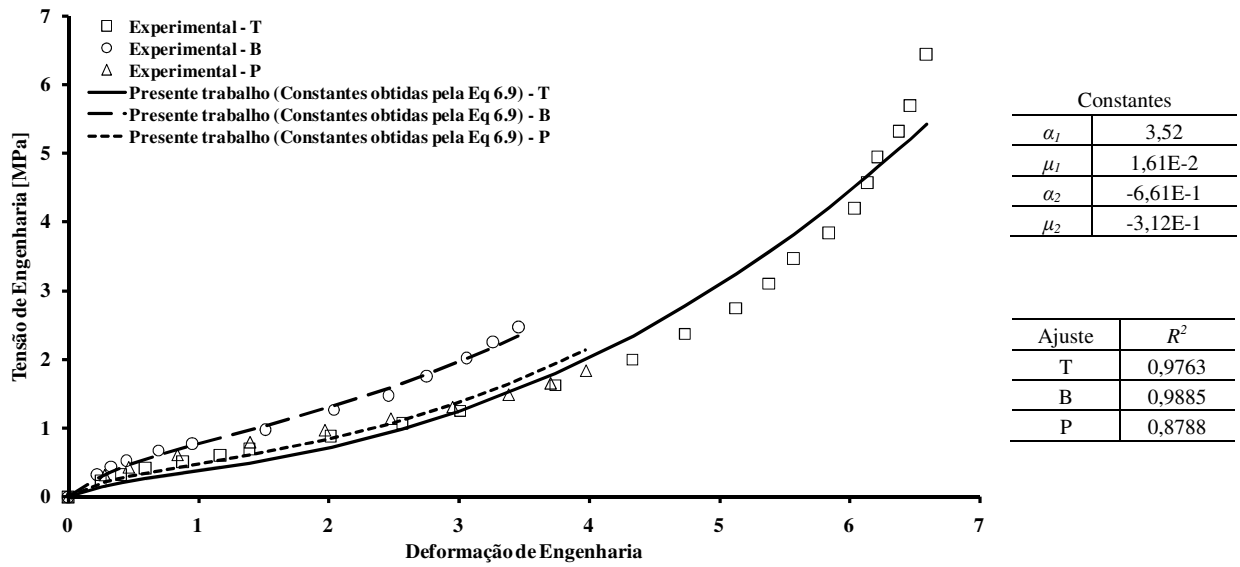


Figura 6.22. Modelo OI2 ajustado para dados de Treloar.

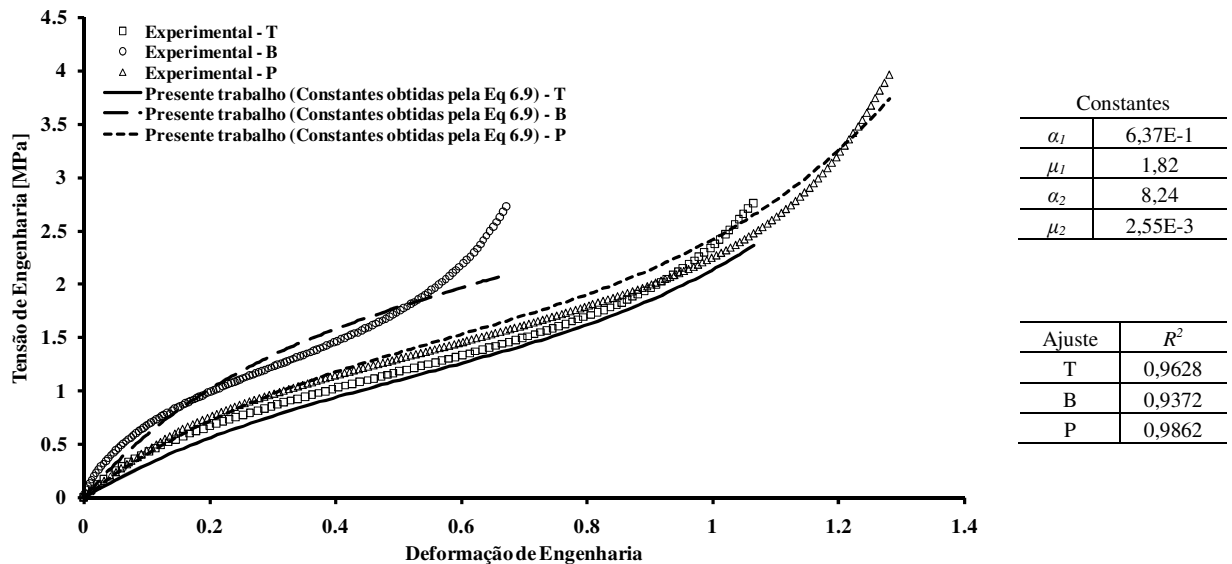


Figura 6.23. Modelo OI2 ajustado para dados de NR55.

Vale ressaltar que para ambos os modelos HMLSI e HMHSI as constantes obtidas através do método aqui proposto satisfizeram as duas condições necessárias para atendimento das desigualdades de Baker-Ericksen conforme Equações 4.25 e 4.26.

O modelo HMHSI destacou-se ao ajustar os dados de Treloar (conforme Figura 6.10) com R^2 superior a 0,99 para as três curvas (T, B e P). Valores de R^2 de mesmas magnitudes ocorrem para o modelo de Mooney-Rivlin de 9 termos para os mesmos dados de Treloar. O modelo de Yeoh 3 termos mostrou dificuldade ao ajustar o último trecho da curva de cisalhamento puro, mas mesmo assim seu coeficiente de correlação foi de 0,92, o que pode ser considerado bom. Com exceção do ajuste para a curva de cisalhamento puro do modelo de Ogden de 2 termos, a qual apresentou um coeficiente R^2 de 0,87, todos os outros ajustes apresentaram uma correlação superior a 0,91, o que pode ser considerado bastante satisfatório.

Das Figuras 6.15, 6.17, 6.19, 6.21 e 6.23 nota-se que a amostra de borracha NR55 empregada constitui um teste bastante rigoroso, onde os modelos consagrados como GI, PSI, FI, YI3 e OI2 não desempenharam tão bem como quando são empregados para ajuste de um modo de deformação.

6.2.2. Dados experimentais para amostras de borracha de silicone.

Dados experimentais dos três ensaios (T, B e P) retirados de Meunier *et al.* [2008] (os quais se encontram no Anexo III deste texto) para amostras de borracha de silicone também foram utilizados para verificar o potencial do método de ajuste multi-critério das constantes aqui proposto. Por se tratar de um grupo de ensaios realizados sob baixos níveis de deformação (máximo de cerca de 110%), foi empregado somente o modelo de Hoss-Marczak Low Strain para tal análise de comparação. O objetivo é comparar a qualidade somente das curvas de predições, uma vez que a grande maioria dos modelos hiperelásticos consegue ajustar as curvas um único ensaio com precisão satisfatória. Para tal análise, foi seguida a seguinte metodologia: ajustar constantes para um determinado ensaio e plotar somente as curvas de predições para as outras formas de deformação.

Como resultado, os dados experimentais de, por exemplo, tração uniaxial, serão postos em um gráfico juntamente com a curva de *predição para tração uniaxial* com as constantes ajustadas para tração biaxial e com a curva de *predição para tração uniaxial* com as constantes ajustadas para cisalhamento puro. Repetindo-se este processo três vezes, temos os resultados das Figuras 6.24, 6.25 e 6.26. Em todos os três casos, também é ilustrada a curva utilizando as constantes pelo método aqui proposto (otimização multi-critério das Equações 6.9 e 6.10).

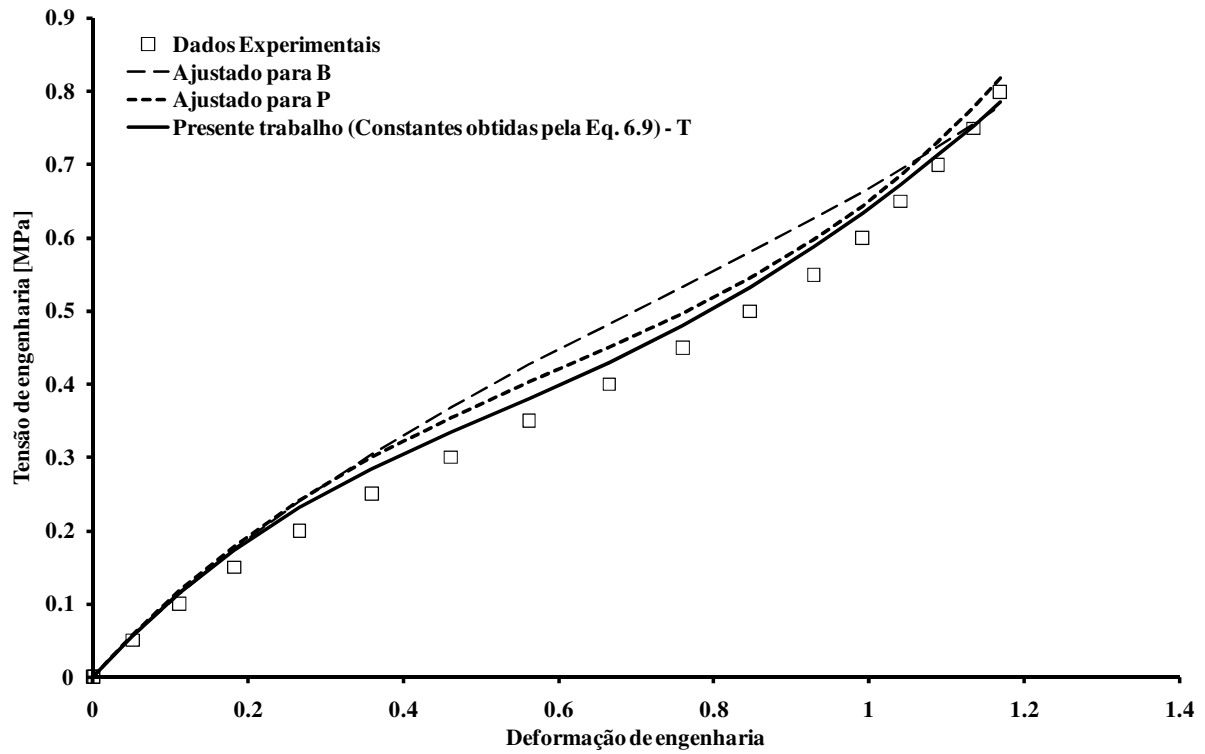


Figura 6.24. Curva de predições para T utilizando constantes ajustadas para B, P e pelo método proposto. Modelo utilizado: HMLSI

Tabela 6.1. Coeficiente de regressão não-linear para as curvas da Figura 6.24.

Ajuste	R^2
B	0,9629
P	0,9803
Presente trabalho	0,9906

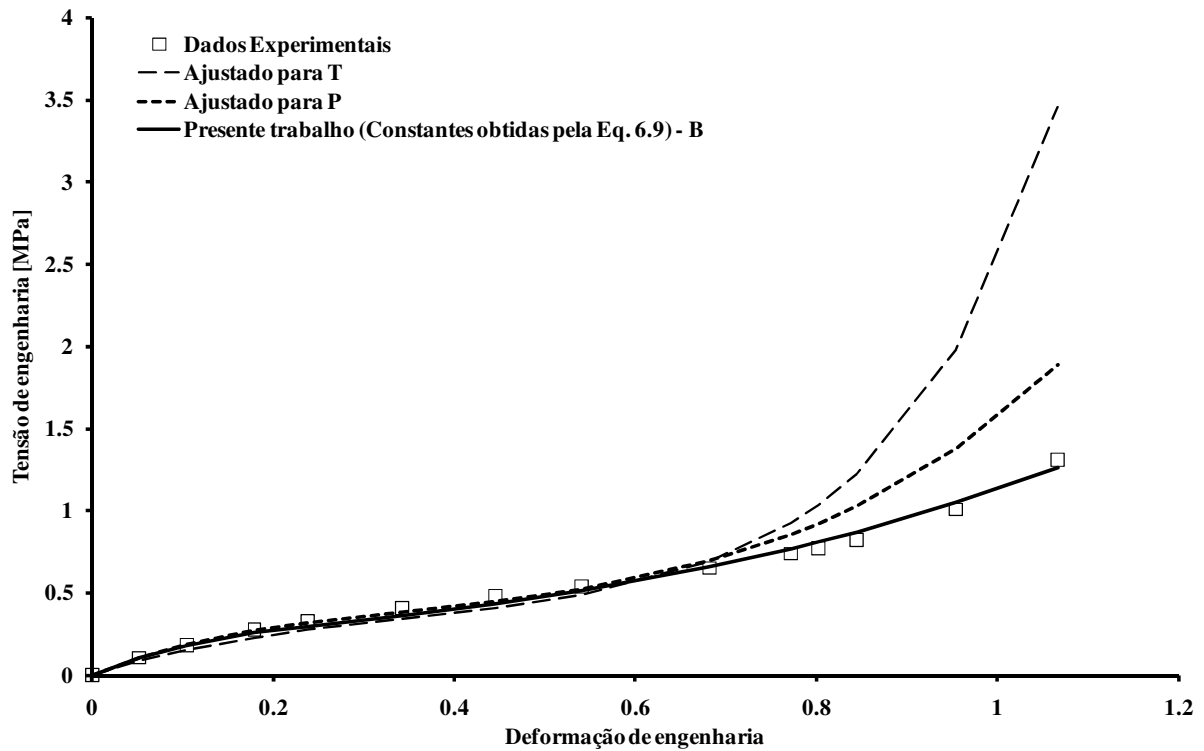


Figura 6.25. Curva de predições para B utilizando constantes ajustadas para T, P e pelo método proposto. Modelo utilizado: HMLSI

Tabela 6.2. Coeficiente de regressão não-linear para as curvas da Figura 6.25.

Ajuste	R^2
T	-0,791
P	0,8306
Presente trabalho	0,9948

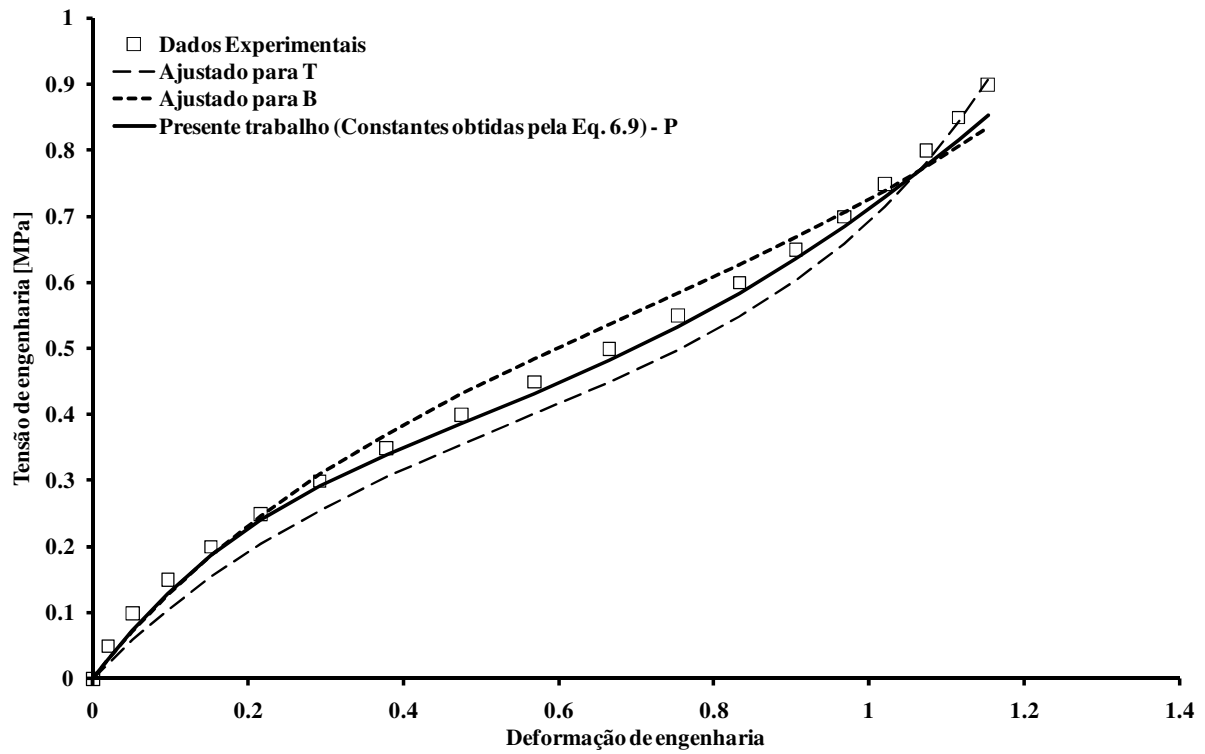


Figura 6.26. Curva de predições para P utilizando constantes ajustadas para T, B e pelo método proposto. Modelo utilizado: HMLSI

Tabela 6.3. Coeficiente de regressão não-linear para as curvas da Figura 6.26.

Ajuste	R^2
T	0,9783
B	0,9896
Presente trabalho	0,9941

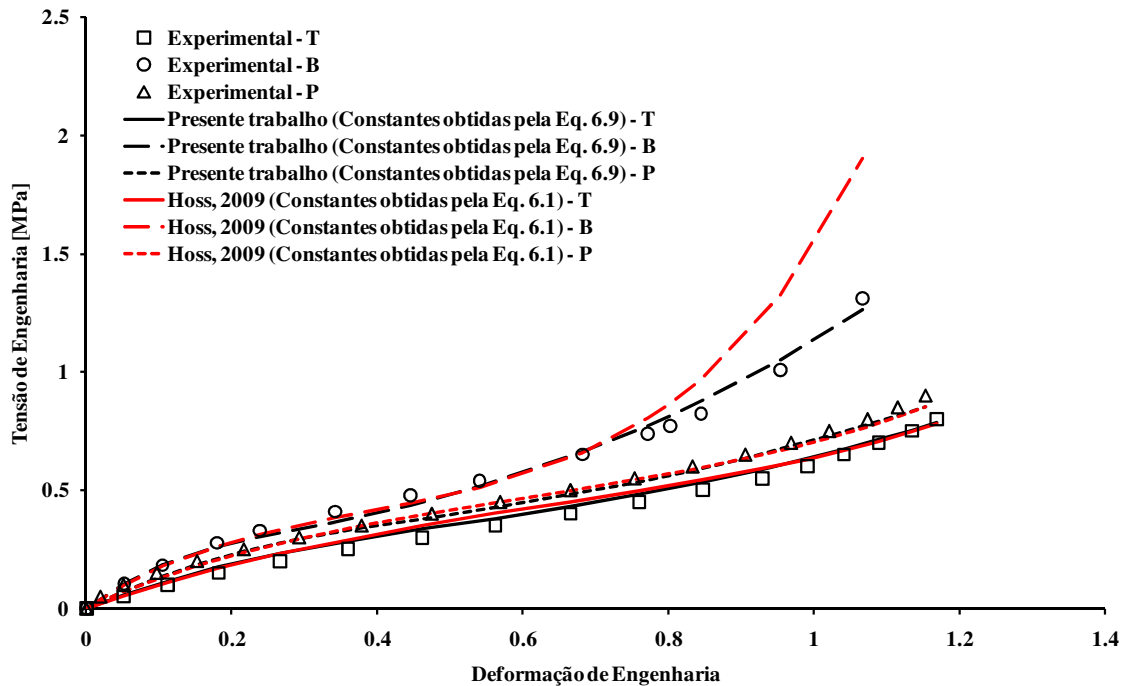
As Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3 apresentam os valores do coeficiente de regressão R^2 não-linear para os casos apresentados nas Figuras 6.24, 6.25 e 6.26. Nos três casos, o coeficiente de correlação não-linear R^2 foi maior para curva tensão-deformação utilizando as constantes obtidas pelo método aqui proposto. Mesmo quando as previsões pelo método tradicional são visualmente boas, como no caso das Figuras 6.24 e 6.26, ao aplicar a metodologia multi-critério de obtenção das constantes, o coeficiente R^2 fica ainda maior, indicando melhora na qualidade dos ajustes.

Uma última comparação será feita entre o método multi-critério proposto por este trabalho e o ajuste da Equação 6.1 proposto por Hoss [2009]. Foram utilizados os mesmos dados das amostras de borracha de silicone de Meunier *et al.* [2008] e novamente o modelo considerado foi o HMLSI. Para ajustar as constantes pelo método do Multi-Critério foram utilizados os seguintes conjuntos de pesos das Equações 6.18:

$$\begin{aligned}
 w_T &= 1/3 & w_B &= 1/3 & w_P &= 1/3 \\
 w_T &= 1/2 & w_B &= 1/4 & w_P &= 1/4 \\
 w_T &= 1/4 & w_B &= 1/2 & w_P &= 1/4 \\
 w_T &= 1/4 & w_B &= 1/4 & w_P &= 1/2
 \end{aligned}
 \tag{6.18}$$

Cada um dos três conjuntos de dados experimentais (T, B e P) foi utilizado com cada conjunto de pesos das Equações 6.18. Foram gerados, portanto, doze diferentes conjuntos de constantes, contra apenas um conjunto pelo método aqui proposto. Para evitar sobrecarregar o texto com uma grande quantidade de gráficos comparativos, aqui será apresentado somente o melhor resultado obtido pelo método de ajuste das constantes de Hoss [2009] comparado com o método multi-critério apresentado no presente trabalho.

O melhor resultado, tanto da curva de deformação para a qual o modelo foi ajustado, como das previsões para outras deformações pelo método usado por Hoss [2009] foi obtido quando se utilizou os dados de tração uniaxial da borracha de silicone e aplicou-se o terceiro grupo de pesos das Equações 6.18 ($w_T = w_P = 1/4$ e $w_B = 1/2$). A Figura 6.27 apresenta estes resultados.



	Método da Eq.6.1	Multi-critério
α	0,0194	0,136
β	-0,369	-0,145
b	-0,433	1,88
n	3,93	0,0589
μ	0,248	0,3376

Figura 6.27. Modelo HMLSI utilizado para ajustar constantes da borracha de silicone utilizando o método da Equação 6.1 ($w_T = w_P = 1/4$ e $w_B = 1/2$) e o método multi-critério da Equação 6.9 proposto neste trabalho.

Ambos os grupos de constantes obtidos que são apresentados na Figura 6.27 satisfazem as equações de Baker-Ericksen conforme restrições apresentadas nas Equações 4.25 e 4.26.

Observa-se na Figura 6.27 que as curvas de tração uniaxial e cisalhamento puro teóricas de ambos os métodos seguiram com fidelidade os dados experimentais, mas a curva de tração biaxial ajustada pela Equação 6.1, no último terço da faixa de deformação divergiu consideravelmente do comportamento desejado.

Obviamente, em busca de um melhor ajuste para as curvas consideradas, qualquer outro grupo de pesos além daqueles da Equação 6.18 poderia ter sido usado, desde que a soma de w_T , w_B e w_P resultasse na unidade, no entanto é impossível garantir que haja tal conjunto de pesos que leve a um resultado, no mínimo, igual ao do método multi-critério proposto.

Vale, portanto, deixar claro que ambos os métodos são uma busca de melhorar o ajuste simultâneo de duas ou mais curvas tensão-deformação para um material elastomérico, mas somente o método aqui proposto consiste, estritamente falando, em uma otimização de compromisso, uma vez que busca os parâmetros ótimos no sentido de minimizar o erro total entre os dados teóricos e experimentais.

Em seu trabalho, Meunier *et al.* [2008] analisou numericamente e comparou com um ensaio experimental o caso de uma placa perfurada construída com borracha de silicone submetida a um esforço de tração, gerando um campo de deformações heterogêneo. Com o objetivo de verificar o desempenho de um modelo hiperelástico cujas constantes tenham sido determinadas pela metodologia aqui proposta quando este for utilizado em um *software* de análise numérica, este caso será reanalisado neste trabalho. Pela falta de algumas informações a respeito da geometria desta placa, para sua análise neste trabalho algumas dimensões tiveram de ser determinadas apenas visualmente. A Figura 6.28 mostra o modelo geométrico utilizado.

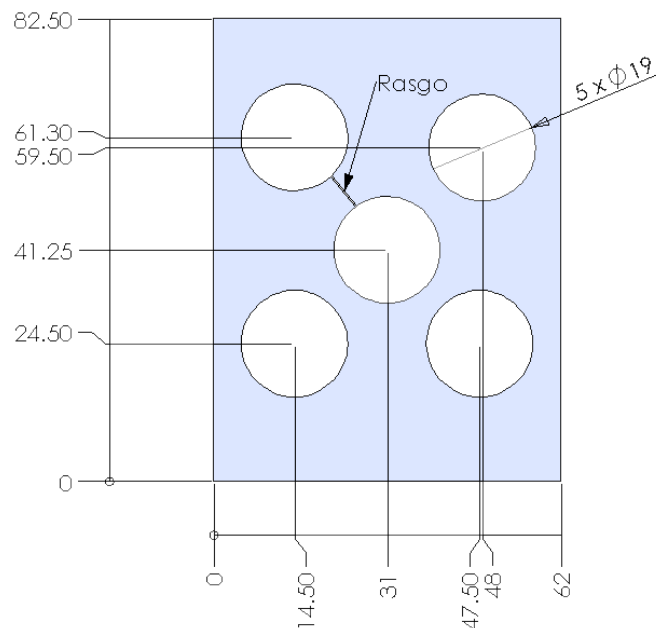


Figura 6.28. Dimensões (em milímetros) da placa analisada.

As condições de contorno aplicadas à peça são as seguintes: engaste na aresta inferior e uma carga no sentido de tração distribuída na sua aresta superior, que pode ser em forma de força ou de deslocamento prescrito. Para uma força de 20 N de tração, Meunier *et al.* [2008] observaram experimentalmente um deslocamento vertical da aresta superior de 57,3 mm. Neste trabalho será aplicado um deslocamento prescrito de 57,3 mm na aresta superior da peça da Figura 6.28 e verificada a carga de reação na aresta inferior, que deverá ser comparada com o valor experimental de 20 N.

Ambos os modelos da família HMI foram utilizados para realização desta comparação. A Tabela 6.4 apresenta as constantes obtidas para os modelos HMLSI e HMHSI quando utilizados os dados experimentais das amostras de silicone:

Tabela 6.4. Constantes hiperelásticas para os modelos HMLSI e HMHSI para amostras de borracha de silicone.

	HMLSI	HMHSI
α	2.21E-02	-2.22E-01
β	1.62	1.50E-01
b	2.61E-01	7.52
n	3.68	1.01
μ	2.53E-01	6.30E-01
C_2	Não aplicável	1.57E-01

Inseridas estas constantes nas respectivas subrotinas de cada modelo, foi rodado no Abaqus 6.7 um problema de estado plano de tensões para a placa da Figura 6.28 considerando uma espessura uniforme igual à da peça real de 1,75 mm. A Figura 6.29 mostra o resultado das configurações deformadas utilizando cada um dos modelos considerados comparando com a foto do ensaio experimental.

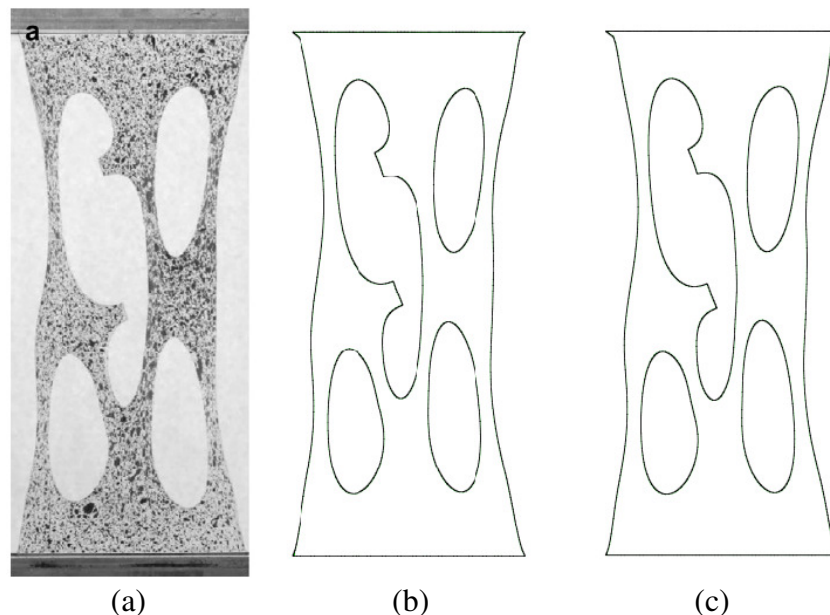


Figura 6.29. Configurações deformadas para a peça analisada. (a) Foto experimental (FONTE: Meunier *et al.*[2008]), (b) modelo HMLSI e (c) modelo HMHSI.

Cabe ressaltar que o modelo geométrico virtual não é exatamente igual à peça real, pois não foi possível obter as informações completas a respeito da geometria da peça. Levando-se este fato em conta, pode-se concluir que, quantitativamente os resultados numéricos foram muito semelhantes aos experimentais para ambos os modelos.

A Tabela 6.5 mostra os resultados obtidos numericamente para a força de reação na aresta inferior para ambos os casos e compara com o valor experimental:

Tabela 6.5. Reação na aresta inferior da peça para os três casos.

	Força de reação [N]
HMLSI	20,76
HMHSI	20,37
Experimental	20,00

Quantitativamente os resultados também se mostraram bastante precisos, indo ao encontro das conclusões já tiradas quanto à potencialidade do método de determinação das constantes aqui proposto.

As Figuras 6.30 e 6.31 mostram os resultados da tensão máxima principal e as bandas de pressão hidrostática respectivamente para este caso. Embora estes resultados não tenham sido apresentados em Meunier *et al.* [2008], boas concordâncias tanto qualitativas como quantitativas são verificadas entre os modelos HMLSI e HMHSI para ambas as análises.

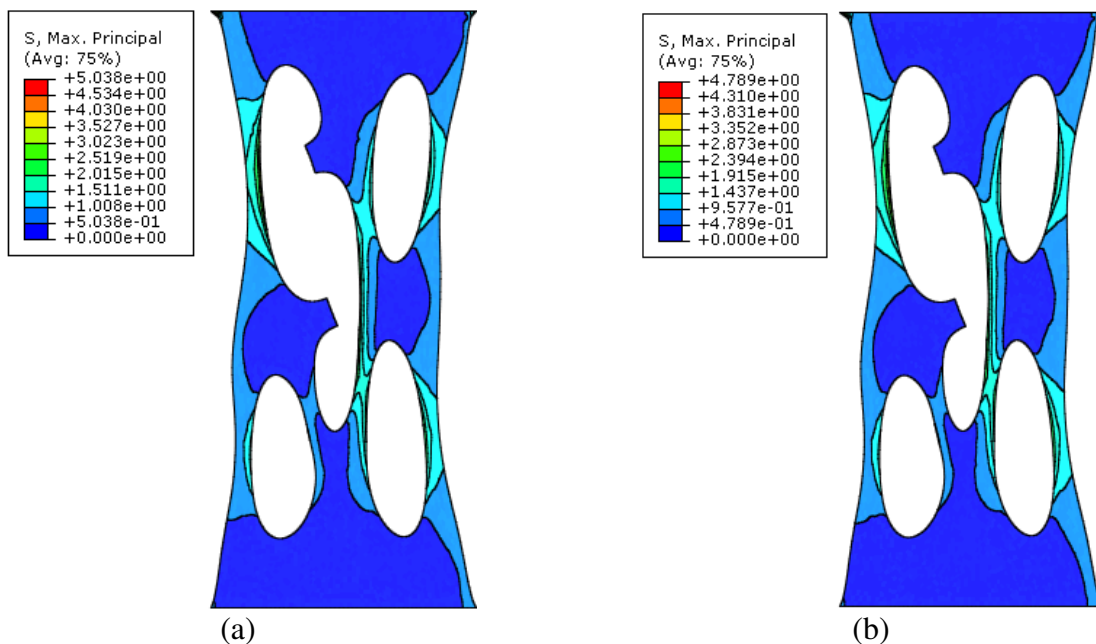


Figura 6.30. Resultados de máxima tensão principal para os modelos de: (a) HMLSI e (b) HMHSI.

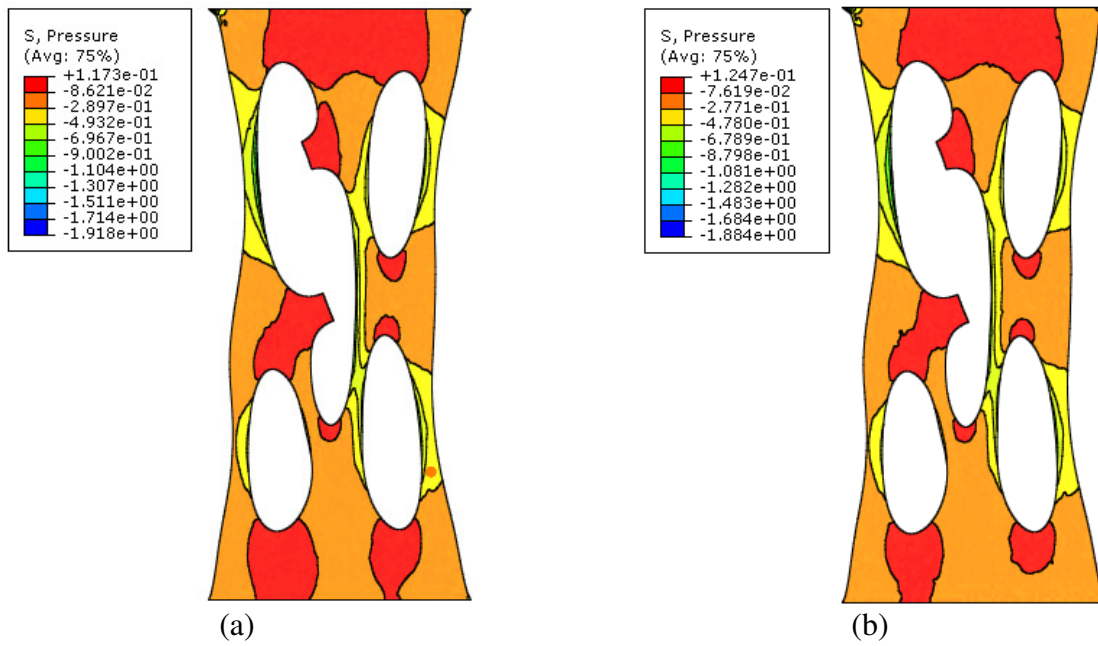


Figura 6.31. Resultados sob forma das bandas de pressão hidrostática para os modelos de:

(a) HMLSI e (b) HMHSI.

7. CONCLUSÕES

Apesar de serem raros os trabalhos nos quais os autores, além de propor um modelo hiperelástico, ainda se preocupam com a plausibilidade física do seu comportamento, este tipo de análise é de fundamental importância para garantir, além de um comportamento físico admissível tanto na faixa de ajuste como fora dela, unicidade de soluções (quando requerida) e estabilidade numérica. Tais propriedades são garantidas através de restrições matemáticas às equações hiperelásticas que, na maioria das vezes, acabam aparecendo sob forma de desigualdades a serem satisfeitas pelas constantes constitutivas dos modelos.

No Capítulo 4, entendendo-se que a exigência da policonvexidade da função energia de deformação seria restritiva demais por garantir unicidade de soluções, foram aplicadas as desigualdades de Baker-Ericksen à família de modelos HMI, responsáveis por assegurar ao material um comportamento fisicamente plausível. O primeiro objetivo do presente trabalho foi alcançado ao se obter duas condições sob forma de desigualdade entre os diferentes parâmetros de ajuste dos modelos.

No Capítulo 5, foi alcançado também o objetivo de implementação dos modelos HMI em um programa de análise numérica. Foram descritas as implementações dos modelos HMLSI e HMHSI no *software* Abaqus 6.7 através de rotinas escritas em código FORTRAN. A verificação da validade e qualidade das implementações foi feita ao repetir-se numericamente os ensaios dos quais se conheciam dados experimentais e, uma vez estas constatadas, analisou-se casos de deformações não-homogêneas. Comparativamente a modelos consagrados na literatura (Yeoh e Mooney-Rivlin), os modelos HMLSI e HMHSI apresentaram bons desempenhos tanto qualitativamente como quantitativamente para dois casos distintos.

Além do bom comportamento dos modelos HMI já verificado por Hoss [2009] para casos analíticos de deformações homogêneas, foi constatado neste trabalho que estes também respondem com adequada precisão a casos de deformações mais complexos quando analisados numericamente através do método dos elementos finitos, servindo o presente trabalho também como uma complementação do trabalho de Hoss [2009].

O Capítulo 6 apresentou uma proposta de metodologia de obtenção de um único grupo de constantes hiperelásticas que minimize a soma dos erros entre dois ou mais conjuntos de dados teóricos e experimentais, através de uma rotina escrita em código MatLab e utilizando o conceito de erro semelhante ao do método dos mínimos quadrado. Foram confrontadas curvas tensão-deformação teóricas e experimentais para oito diferentes modelos hiperelásticos e dois diferentes tipos de borracha e, através da comparação direta entre os coeficientes de correlação não-lineares

das curvas, a metodologia proposta apresentou resultados muito convincentes, ficando evidenciado o cumprimento do terceiro e último objetivo proposto ao trabalho.

Por fim, utilizando esta metodologia proposta, foram ajustadas as constantes dos modelos HMLSI e HMHSI para dados experimentais de uma borracha de silicone e repetido numericamente um ensaio de deformações não-homogêneas com geometria complexa. Uma concordância muito boa foi verificada entre as formas deformadas teórica e experimental, além de os resultados de força de reação entre ambos terem sido bastante semelhantes. Estes resultados mostram o potencial da metodologia proposta para obtenção de constantes hiperelásticas no sentido de otimizar, através de um único conjunto de constantes, o comportamento da curva tensão-deformação para dois ou mais tipos de deformações ensaiados.

Sugestões para continuidade da pesquisa

Inicialmente, os modelos hiperelásticos de Hoss-Marczak foram criados desconsiderando-se efeitos de dissipação de energia durante o processo de deformação (como histerese ou efeito de Mullins [Mullins, 1969]), portanto seria interessante adaptá-los para que também modelassem tais comportamentos.

Estas adaptações seriam de extrema importância para analisar os modelos HMI também sob casos dinâmicos de carregamento, uma vez que neste trabalho somente foram considerados casos estáticos.

Termos que levem em conta efeito de incompressibilidade também podem ser incorporados nos modelos HMLSI e HMHSI e a execução de testes seria de extrema importância para avaliar seus comportamentos.

Uma vez conhecidas as desigualdades que devem ser satisfeitas pelos parâmetros constitutivos dos modelos HMI, estas podem ser incluídas em um código de otimização multi-objetivo *com restrições*, tendo assim a certeza de sempre obter constantes que satisfaçam as desigualdades de Baker-Ericksen. Em outras palavras, a Equação 6.9 seria reescrita como:

$$\min_{\mathbf{C}} E(\mathbf{C}) \mid g_i(\mathbf{C}) \geq 0 \quad (7.1)$$

onde $\mathbf{C} = \{\alpha, \beta, b, n, \mu, C_2\}$ e g_i contém cada uma das restrições a serem cumpridas.

Além das amostras de borracha analisadas neste trabalho, seria interessante testar os modelos HMI ao se utilizar outros tipos de materiais, como compostos orgânicos e tecidos biológicos.

Por fim, um importante passo para tornar os modelos HMI mais abrangentes no sentido de modelar com maior fidelidade os fenômenos físicos envolvidos no processo de deformação de elastômeros seria a incorporação, nas suas equações, de termos que levem em consideração a influência da temperatura nos resultados de deformações e tensões.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS, 2007. **Abaqus Version 6.7 Documentation**.

AMIN, A.F.M.S., WIRAGUNA, S.I., BHUIYAN, A.R., OKUI, Y., 2006. “Hyperelasticity Model for Finite Element Analysis of Natural and High Damping Rubbers in Compression and Shear”, **Journal of Engineering Mechanics**, vol.132, pp.54-64.

ARRUDA, E.M., BOYCE, M.C., 1993. “A Three-dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials”. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol.41, pp.389-412.

ATKIN, R., FOX, N., 1980. “**An Introduction to the Theory of Elasticity**”, Longman, New York.

BAKER, M., ERICKSEN, J.L., 1954. “Inequalities Restricting the Form of the Stress-Deformation Relation for Isotropic Elastic Solids and Reiner-Rivlin Fluids”, **Journal of the Washington Academy of Science**, vol.44, pp.33-35.

BALL, J.M., 1977. “Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity”, **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, vol.63, pp.337-403.

BALZANI, D., NEFF, P., SCHRÖDER, J., HOLZAPFEL, G.A., 2006. “A Polyconvex Framework for Soft Biological Tissues. Adjustment to Experimental Data”, **International Journal of Solids and Structures**, vol.43, pp.6052-6070.

BEATTY, M.F., 1987. “Topics in Finite Elasticity: Hyperelasticity of Rubber, Elastomers and Biological Tissues – with Examples”, **Applied Mechanics Reviews**, vol.40, pp.1699-1734.

BERTRAM, A., SVENDSEN, B., 2001. “On Material Objectivity and Reduced Constitutive Equations”, **Archive of Mechanics**, vol.53, pp.653-675.

BEVERIDGE, G.S.G., SCHECHTER, R.S., 1970. “**Optimization: Theory and Practice**”, McGraw-Hill, New York.

BILGILI, E., 2004. “Restricting the Hyperelastic Models for Elastomers Based on Some Thermodynamical, Mechanical and Empirical Criteria”, **Journal of Elastomers and Plastics**, vol.36, pp.159-175.

BJÖRK, Å., 1996. “**Numerical Methods for Least Squares Problems**”, SIAM.

BONNET, J., WOOD, R., 1997. “**Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**”, Cambridge University Press, New York.

COLEMAN, B.D., NOLL, W., 1959. “On Certain Steady Flows of General Fluids”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, vol.3, pp.289-303.

FUNG, Y.C.B., 1967. “Elasticity of Soft Tissues in Sample Elongation”, **American Journal of Physiology**, vol.213, pp.1532-1544.

GENT, A.N., THOMAS, A.G., 1958. “Forms for the Stored (Strain) Energy Function for Vulcanized Rubber”. **Journal of Polymer Science**, vol.28, pp.625-628.

GENT, A.N., 1996. “A New Constitutive Relation for Rubber”, **Rubber Chemistry and Technology**, vol.69, pp.59-61.

GREEN, G., 1838. “On the Laws of Reflexion and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallised Media”, **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, vol.7.

HARTMANN, S., 2001. “Parameter Estimation of Hyperelasticity Relations of Generalized Polynomial-Type with Constraint Conditions”, **International Journal of Solids and Structures**, vol.38, pp.7999-8018.

HARTMANN, S., NEFF, P., 2003. “Polyconvexity of Generalized Polynomial-Type Hyperelastic Strain Energy Functions for Near-Incompressibility”, **International Journal of Solids and Structures**, vol.40, pp.2767-2791.

HOSS, L., 2009. “**Modelos Constitutivos Hiperelásticos para Elastômeros Incompressíveis: Ajuste, Comparação de Desempenho e Proposta de um Novo Modelo**”, Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, p.290.

JONES, D., TRELOAR, L., 1975. “The Properties of Rubber in Pure Homogeneous Strain”, **Journal of Physics D: Applied Physics**, vol.8, pp.1285-1304.

KAMBOUCHEV, N., RADOVITZKY, R., FERNANDEZ, J., 2006. “Anisotropic Materials which Can be Modeled by Polyconvex Strain Energy Functions”, **47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference**, Newport.

KNOWLES, J.K., 1977. “The Finite Anti-plane Shear Field Near the Tip of a Crack for a Class of Incompressible Elastic Solids”. **International Journal of Fracture**, vol.13, pp.611-639.

KOROBAYNIKOV, S.N., 2008. “Objective Tensor Rates and Applications in Formulation of Hyperelastic Relations”, **Journal of Elasticity**, vol.93, pp.105-140.

MAPLE, 2003. **Maple 9.01 User's Manual**.

MARCZAK, R.J., GHELLER, J.J., HOSS, L., 2006. “**Caracterização de Elastômeros para Simulação Numérica**” Centro Tecnológico de Polímeros SENAI, São Leopoldo.

MARQUARDT, D.W., 1963. “An Algorithm for Least Squares Estimation of Non-Linear Parameters”, **Journal of Applied Mathematics**, vol.11, pp.431-441.

MARSDEN, J.E., HUGHES, T.J.R., 1983. “**Mathematical Foundations of Elasticity**”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

MARZANO, S., 1983. "An Interpretation of Baker-Ericksen Inequalities in Uniaxial Deformation and Stress", **Meccanica**, vol.18, pp.233-235.

MEUNIER, L., CHAGNON, G., FAVIER, D., ORGÉAS, L., VACHER, P., 2008. "Mechanical Experimental Characterization and Numerical Modelling of an Unfilled Silicone Rubber", **Polymer Testing**, vol.27, pp.765-777.

MOONEY, M., 1940. "A theory of large elastic deformation". **Journal of Applied Physics**, vol.11, pp.582-592.

MORREY, C.B., 1952. "Quasi-convexity and the Lower Semicontinuity of Multiple Integrals", **Pacific Journal of Mathematics**, vol.2, pp.25-53.

MULLINS, L., 1969. "Softening of Rubber by Deformation", **Rubber Chemistry and Technology**, vol.42, pp.339-362.

NELDER, J.A., MEAD, R., 1965, "A Simplex Method for Function Minimization", **Computer Journal**, vol.7, pp.308-313.

OGDEN, R.W., 1972. "Large Deformation Isotropic Elasticity – On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids". **Proceedings of the Royal Society of London, Series A**, vol.326, pp.565-584.

OGDEN, R.W., 1984. "**Non-Linear Elastic Deformations**". Dover Publications, New York.

PUCCI, E., SACCOMANDI, G., 2002. "A Note on the Gent Model for Rubber-like Materials". **Rubber Chemistry and Technology**, vol.75, pp.839-851.

RIVLIN, R.S., SAUNDERS, D.W., 1951. "Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. VII. Experiments on the Deformation of Rubber". **Philos. Trans. R. Soc. Lon. Series A**, vol.243, pp.251-288.

RIVLIN, R.S., SMITH, G.F., 1987. "A note on Material Frame Indifference", **International Journal of Solids and Structures**, vol.23, pp.1639-1643.

ROCKAFELLAR, R.T., 1970. "**Convex Analysis**", Princeton University Press, Princeton.

SCHRÖDER, J., NEFF, P., BALZANI, D., 2005. "A Variational Approach for Materially Stable Anisotropic Hyperelasticity", **International Journal of Solids and Structures**, vol.42, pp.4352-4371.

SENDOVA, T., WALTON, J.R., 2008. "Constitutive Restrictions for a Hyperelastic Laminar Material with one Fiber Family, Based upon Strain Invariants Yielding Orthogonal Stress Response Terms" **CanCNSM: Canadian Conference on Nonlinear Solid Mechanics**, Toronto.

SÜLLI, E., MAYERS, D., 2003. "**An Introduction to Numerical Analysis**", Cambridge University Press, New York.

TIMOSHENKO, S., GOODIER, J.N., 1951. "**Theory of Elasticity**", McGraw-Hill, New York.

TRELOAR, L.R.G., 1973. "The Elasticity and Related Properties of Rubbers". **Reports on Progress in Physics**, vol.36, pp.755-829.

TRUESDELL, C., 1956. "The Main Unsolved Problem in Finite Elasticity Theory (em lingual Alemã)". **Z. Angew. Math. Phys.**, vol.36, pp.97-103, tradução para língua Inglesa em *Foundations of Elasticity Theory*, International Science Review Series, Gordon and Breach, New York.

TRUESDELL, C., 1960. "Principles of Continuum Mechanics", **Socony Mobil Colloquium Lectures in Pure and Applied Science**, No.5.

TRUESDELL, C., NOLL, W., 1965. "**The nonlinear Field Theories of Mechanics**" Flüge's Handbuch der Physik Vol III/3, Springer, Berlin/Heidelberg.

TWIZZELL, E.H., OGDEN, R.W., 1983. “Non-Linear Optimization of the Material Constants in Ogden’s Stress-Deformation Function for Incompressible Isotropic Elastic Materials”, **Journal of the Australian Mathematical Society – Series B**, vol.24, pp.424-434.

WEISS, J.A., 1994. “A Constitutive Model and Finite Element Representation for Transversely Isotropic Soft Tissues”, **Tese de Doutorado**, Utah University, Salt Lake City.

WILBER, J.P., CRISCIONE, J.C., 2005. “The Baker-Ericksen Inequalities for Hyperelastic Models Using a Novel Set of Invariants of Hencky Strain”, **International Journal of Solids and Structures**, vol.42, pp.1547-1559.

YEOH, O.H., 1990. “Characterization of Elastic Properties of Carbon Black Filled Rubber Vulcanizates”. **Rubber Chemistry and Technology**, vol.63, pp.792-805.

YEOH, O.H., 1993. “Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber”. **Rubber Chemistry and Technology**, vol.66, pp.754-771.

ANEXO I

Subrotina escrita em código FORTRAN para implementação do modelo HMLSI no Abaqus 6.7:

```

* MODELO HOSS-MARCZAK LOW STRAIN
  subroutine uhyper (bi1,bi2,aj,u,ui1,ui2,ui3,temp,noel,
.                   cmname,incmpflag,numstatev,statev,
.                   numfieldv,fieldv,fieldvinc,numprops,props)

  include 'aba_param.inc'

  character*8 cmname
  dimension ui1(3),ui2(6),ui3(6),statev(*),fieldv(*),
.          fieldvinc(*),props(*)

c  INSERCAO DAS CONSTANTES HIPERELASTICAS
  c10 = INSERIR VALOR DA CONSTANTE  $\alpha$ 
  c20 = INSERIR VALOR DA CONSTANTE  $\beta$ 
  c30 = INSERIR VALOR DA CONSTANTE b
  c40 = INSERIR VALOR DA CONSTANTE n
  c50 = INSERIR VALOR DA CONSTANTE  $\mu$ 

c  INSERCAO DA FUNCAO DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMACAO
  if(incmpflag.eq.0) then
c  CASO COMPRESSIVEL:
    u = (c10/c20)*exp(-c20*(bi1-3))-(c50/(2*c30))*(((1+(c30/c40)*
    & (bi1-3))**c40)-1)
  else
c  CASO INCOMPRESSIVEL:
    u = (c10/c20)*exp(-c20*(bi1-3))-(c50/(2*c30))*(((1+(c30/c40)*
    & (bi1-3))**c40)-1)
  end if

c  INSERCAO DAS DERIVADAS DE W
  ui1(1) = c10*exp(-c20*(bi1-3)) - (c50/2)*(1+(c30/c40)*
    & (bi1-3))**(c40-1)
  ui1(2) = 0.
  ui1(3) = 0.
  ui2(1) = -c10*c20*exp(-c20*(bi1-3)) - (c50/(2*c40))*
    & (c40-1)*c30*(1+(c30/c40)*(bi1-3))**(c40-2)
  ui2(2) = 0.
  ui2(3) = 0.
  ui2(4) = 0.
  ui2(5) = 0.
  ui2(6) = 0.
  ui3(1) = 0.
  ui3(2) = 0.
  ui3(3) = 0.
  ui3(4) = 0.
  ui3(5) = 0.
  ui3(6) = 0.

  return
  end

```


Subrotina escrita em código FORTRAN para implementação do modelo HMHSI no Abaqus 6.7:

```

* MODELO HOSS-MARCZAK HIGH STRAIN
  subroutine uhyper(bi1,bi2,aj,u,ui1,ui2,ui3,temp,noel,
.                  cmname,incmpflag,numstatev,statev,
.                  numfieldv,fieldv,fieldvinc,numprops,props)

  include 'aba_param.inc'

  character*8 cmname
  dimension ui1(3),ui2(6),ui3(6),statev(*),fieldv(*),
.          fieldvinc(*),props(*)
c INSERCAO DAS CONSTANTES HIPERELASTICAS

  c10 = INSERIR VALOR DA CONSTANTE  $\alpha$ 
  c20 = INSERIR VALOR DA CONSTANTE  $\beta$ 
  c30 = INSERIR VALOR DA CONSTANTE b
  c40 = INSERIR VALOR DA CONSTANTE n
  c50 = INSERIR VALOR DA CONSTANTE  $\mu$ 
  c60 = INSERIR VALOR DA CONSTANTE  $C_2$ 

c INSERCAO DA FUNCAO DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMACAO
  if(incmpflag.eq.0) then
c CASO COMPRESSIVEL:
    u = (c10/c20)*exp(-c20*(bi1-3))-(c50/(2*c30))*(((1+(c30/c40))*
    & (bi1-3))**c40)-1)-c60*log(bi2/3)
  else
c CASO INCOMPRESSIVEL:
    u = (c10/c20)*exp(-c20*(bi1-3))-(c50/(2*c30))*(((1+(c30/c40))*
    & (bi1-3))**c40)-1)-c60*log(bi2/3)

  end if

c INSERCAO DAS DERIVADAS DE W
  ui1(1) = c10*exp(-c20*(bi1-3)) - (c50/2)*(1+(c30/c40))*
& (bi1-3)**(c40-1)
  ui1(2) = -c60/bi2
  ui1(3) = 0.
  ui2(1) = -c10*c20*exp(-c20*(bi1-3)) - (c50/(2*c40))*
& (c40-1)*c30*(1+(c30/c40)*(bi1-3))**c40-2)
  ui2(2) = c60/(bi2**2)
  ui2(3) = 0.
  ui2(4) = 0.
  ui2(5) = 0.
  ui2(6) = 0.
  ui3(1) = 0.
  ui3(2) = 0.
  ui3(3) = 0.
  ui3(4) = 0.
  ui3(5) = 0.
  ui3(6) = 0.

  return
end

```

ANEXO II

O algoritmo para verificação da positividade da função $\frac{\partial W}{\partial I}$ foi escrito no *software*

Maple conforme:

```

c10: = INSERIR VALOR DA CONSTANTE  $\alpha$  :
c20: = INSERIR VALOR DA CONSTANTE  $\beta$  :
c30: = INSERIR VALOR DA CONSTANTE  $b$  :
c40: = INSERIR VALOR DA CONSTANTE  $n$  :
c50: = INSERIR VALOR DA CONSTANTE  $\mu$  :

## CÁLCULO DAS DERIVADAS DA FUNÇÃO ENERGIA DE DEFORMAÇÃO EM RELAÇÃO AO
PRIMEIRO INVARIANTE DE DEFORMAÇÃO  $bi_3$ .
f:=c10/c20*(1-exp(-c20*(bi1-3)))+c50/(2*c30)*(((1+c30*(bi1-
3)/c40)^c40)-1);
df:=diff(f,bi1);
ddf:=diff(df,bi1);

## CÁLCULO DA RAÍZ DA PRIMEIRA DERIVADA DA FUNÇÃO ENERGIA DE DEFORMAÇÃO
## ATRAVÉS DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON. NÚMERO DE ITERAÇÕES = 50.
x:=Vector(50):
n:=3:
for i from 1 to 50 do
df1(i):=eval(subs(bi1=n, df)):
ddf1(i):=eval(subs(bi1=n, ddf)):
x[i]:=n-df1(i)/ddf1(i):
n:=x[i]:
od:
x[50];

## VERIFICA POSITIVIDADE DA FUNÇÃO df:
if type(x[50],numeric)=true then
    ddfteste:=eval(subs(bi1=x[50], ddf));
    if (ddfteste<>0) then
        print(FALHA)
    else
        ponto:=eval(subs(bi1=3,df));
        if (ponto>0) then
            print(PASSA);
        else
            print(FALHA);
        end if;
    end if;
else
    ponto:=eval(subs(bi1=3,df));
    if (ponto>0) then
        print(PASSA);
    else
        print(FALHA);
    end if;
end if;

```

ANEXO III

A seguir são apresentadas as Tabelas III.1, III.2, III.3 e III.4 com os dados experimentais de tensão e deformação para as borrachas NR55 [Marczak *et al.*, 2006], Treloar [Jones *et al.*, 1975], HDR [Amin *et al.*, 2006] e silicone [Meunier *et al.*, 2008], respectivamente, empregados no presente trabalho.

Tabela III.1. Dados experimentais de deformação e tensão para borracha NR55.

N55					
UNIAXIAL		BIAXIAL		CISALHAMENTO	
Def	Tens	Def	Tens	Def	Tens
0	0	0	0	0	0
0.013173	0.067493	0.002284	0.037035	0.010734	0.059616
0.022706	0.122799	0.004796	0.070248	0.021583	0.108524
0.031698	0.170091	0.007308	0.103278	0.032664	0.155911
0.042221	0.215172	0.010049	0.135382	0.042822	0.197213
0.050924	0.256204	0.013017	0.168288	0.051707	0.23759
0.061872	0.294346	0.016557	0.199469	0.059786	0.274
0.07209	0.331216	0.020097	0.23071	0.069251	0.311986
0.082178	0.365922	0.023865	0.260042	0.07606	0.345679
0.09223	0.398546	0.027861	0.290052	0.086217	0.378775
0.103614	0.429188	0.031744	0.317474	0.091757	0.408935
0.113874	0.460153	0.035627	0.343848	0.100298	0.440019
0.1232	0.488826	0.039509	0.368742	0.108493	0.468278
0.135243	0.516538	0.043391	0.396103	0.115764	0.496971
0.147037	0.543559	0.047502	0.418532	0.122227	0.519579
0.158219	0.570611	0.051384	0.442318	0.129729	0.549141
0.169079	0.596299	0.055495	0.464873	0.137232	0.573052
0.179255	0.620352	0.059834	0.487241	0.145311	0.597996
0.190456	0.643838	0.063602	0.506774	0.150852	0.619896
0.2014	0.667422	0.067713	0.527603	0.157546	0.643481
0.211714	0.689879	0.071595	0.546706	0.16574	0.66424
0.222107	0.71129	0.07582	0.566054	0.173935	0.686195
0.231915	0.733281	0.079474	0.585158	0.180745	0.705216
0.242115	0.753824	0.083699	0.603336	0.18894	0.726735
0.253571	0.775483	0.087695	0.620898	0.197019	0.745375
0.264952	0.794915	0.091806	0.638399	0.204637	0.764776
0.277722	0.814219	0.095917	0.655283	0.212023	0.78184
0.287577	0.834128	0.099685	0.670935	0.219179	0.80086
0.298812	0.852405	0.103795	0.687018	0.226566	0.817869
0.308476	0.871407	0.107792	0.702053	0.233953	0.835314
0.318789	0.890574	0.111902	0.716719	0.240531	0.849986
0.329664	0.908795	0.116013	0.733172	0.248033	0.868137
0.340022	0.926346	0.120352	0.747099	0.256112	0.88368
0.352691	0.944297	0.124577	0.761642	0.26373	0.900091
0.363463	0.962587	0.128345	0.777293	0.271348	0.914438
0.373858	0.978529	0.132684	0.791158	0.279427	0.93047
0.384217	0.99624	0.136909	0.789001	0.287506	0.944598
0.395852	1.013976	0.140906	0.817101	0.295124	0.959598
0.405303	1.031494	0.145245	0.830164	0.303203	0.972803
0.416323	1.047365	0.14947	0.842982	0.311514	0.988236
0.427394	1.065122	0.153466	0.855614	0.318208	1.001551
0.43914	1.08113	0.158034	0.869109	0.326287	1.01568
0.451832	1.098552	0.162145	0.882912	0.333673	1.028185
0.462129	1.11521	0.166369	0.89499	0.341176	1.042313

Continuação					
UNIAXIAL		BIAXIAL		CISALHAMENTO	
Def	Tens	Def	Tens	Def	Tens
0.473704	1.131931	0.170823	0.907561	0.348447	1.055356
0.483077	1.148226	0.175048	0.919946	0.35618	1.068616
0.492492	1.165724	0.179614	0.931408	0.363221	1.079484
0.501916	1.180919	0.184068	0.943548	0.370377	1.094266
0.513476	1.19806	0.188521	0.956365	0.377417	1.106438
0.52601	1.214544	0.192974	0.967888	0.384689	1.119263
0.536938	1.231202	0.19777	0.981014	0.391844	1.130785
0.547675	1.247524	0.202224	0.992598	0.399693	1.143827
0.560064	1.265773	0.206905	1.003876	0.407772	1.155239
0.569819	1.281563	0.211587	1.015768	0.414928	1.167955
0.580185	1.299028	0.216268	1.02686	0.423007	1.179041
0.591409	1.316158	0.221064	1.038444	0.429702	1.191866
0.602582	1.332376	0.225631	1.049167	0.437665	1.203387
0.614422	1.349576	0.230199	1.060629	0.444475	1.215234
0.623176	1.367571	0.234995	1.071967	0.452324	1.226429
0.635066	1.383819	0.239677	1.082812	0.460864	1.238819
0.645278	1.402139	0.244473	1.095137	0.468482	1.250123
0.654957	1.419228	0.249039	1.105366	0.475869	1.261969
0.665256	1.438199	0.253721	1.117321	0.483371	1.272078
0.676374	1.45591	0.258517	1.127652	0.490758	1.284794
0.68719	1.473884	0.263313	1.140963	0.497567	1.296206
0.69775	1.492489	0.268337	1.149097	0.504954	1.308271
0.706527	1.510456	0.273362	1.163393	0.512572	1.31903
0.716974	1.528951	0.278271	1.174238	0.520189	1.331203
0.726045	1.5482	0.28341	1.184837	0.528153	1.342072
0.736834	1.566719	0.288434	1.196669	0.536117	1.35381
0.746179	1.586524	0.293687	1.207514	0.544197	1.36457
0.755446	1.606595	0.29871	1.219468	0.550659	1.376852
0.766364	1.626638	0.303735	1.23093	0.558162	1.388155
0.776606	1.648778	0.308531	1.243008	0.565664	1.399893
0.786105	1.668463	0.313783	1.254716	0.573281	1.411089
0.795061	1.689116	0.318807	1.266794	0.58113	1.423262
0.806769	1.711186	0.323831	1.277516	0.58944	1.435108
0.81744	1.733663	0.328856	1.288731	0.596365	1.446738
0.827993	1.755887	0.33388	1.300069	0.60329	1.456085
0.83807	1.778442	0.339132	1.311777	0.609293	1.469888
0.848048	1.804289	0.344385	1.325704	0.616795	1.481409
0.856081	1.828315	0.349866	1.335316	0.624527	1.493799
0.864174	1.853119	0.35489	1.348997	0.632837	1.504885
0.872358	1.880331	0.360256	1.360212	0.640685	1.517384
0.881806	1.906031	0.365395	1.373398	0.648188	1.529122
0.892394	1.933201	0.370534	1.385969	0.654536	1.541187
0.901593	1.961445	0.375901	1.398294	0.662385	1.552599
0.910831	1.990647	0.381381	1.411111	0.671387	1.565641
0.918884	2.020123	0.386634	1.425161	0.678082	1.577923

Continuação Tabela III.1. Dados experimentais de deformação e tensão para borracha NR55.

Continuação					
UNIAXIAL		BIAXIAL		CISALHAMENTO	
Def	Tens	Def	Tens	Def	Tens
0.927358	2.051192	0.392115	1.438471	0.684891	1.589878
0.937684	2.082824	0.397824	1.452398	0.693778	1.60216
0.944883	2.115919	0.403305	1.467309	0.700357	1.614767
0.952773	2.149674	0.409356	1.481483	0.707859	1.627483
0.962062	2.184837	0.414838	1.494793	0.715361	1.640309
0.971009	2.220966	0.420205	1.508473	0.722287	1.651829
0.978642	2.257541	0.425571	1.524988	0.729673	1.665415
0.987007	2.295553	0.430824	1.540147	0.736367	1.678567
0.996596	2.336457	0.436191	1.545939	0.744677	1.691609
1.004143	2.376337	0.442014	1.567876	0.75218	1.704652
1.011558	2.419025	0.447609	1.581926	0.760259	1.718128
1.020487	2.462917	0.453319	1.596222	0.766491	1.730736
1.026605	2.508152	0.458913	1.612736	0.773763	1.744648
1.035424	2.555243	0.464394	1.628757	0.782188	1.757691
1.042	2.603459	0.469876	1.646504	0.789575	1.771711
1.048794	2.654023	0.475242	1.660802	0.796385	1.785515
1.057041	2.704187	0.480609	1.678302	0.803195	1.799101
1.065288	2.758468	0.48609	1.696295	0.809196	1.812903
		0.491685	1.714658	0.817507	1.827359
		0.497508	1.732775	0.825586	1.842032
		0.503331	1.752493	0.833203	1.856161
		0.508813	1.773198	0.841513	1.869856
		0.514294	1.790576	0.8489	1.885506
		0.520003	1.812267	0.856633	1.900832
		0.526169	1.830877	0.864597	1.916374
		0.531649	1.85306	0.872676	1.931699
		0.537131	1.874751	0.880756	1.947784
		0.542383	1.897428	0.888373	1.963761
		0.547636	1.920104	0.895875	1.980172
		0.552888	1.944136	0.902454	1.996585
		0.558598	1.968169	0.909264	2.013757
		0.564535	1.993434	0.917689	2.031038
		0.570245	2.02067	0.924268	2.04832
		0.575612	2.047291	0.932347	2.066253
		0.581206	2.074281	0.939041	2.084613
		0.586573	2.10312	0.946775	2.103307
		0.59194	2.13122	0.954161	2.122654
		0.597535	2.16277	0.961548	2.141131
		0.603359	2.194196	0.969858	2.161998
		0.609068	2.226486	0.976552	2.182432
		0.615005	2.259269	0.983247	2.203735
		0.620715	2.297228	0.990749	2.225037
		0.62574	2.331907	0.998252	2.246991
		0.630763	2.372085	1.005868	2.268947
		0.635445	2.410782	1.013256	2.292858

Continuação					
UNIAXIAL		BIAXIAL		CISALHAMENTO	
Def	Tens	Def	Tens	Def	Tens
		0.640241	2.453178	1.021335	2.316552
		0.645379	2.49434	1.028029	2.341766
		0.65086	2.537723	1.03634	2.366764
		0.656341	2.581104	1.043033	2.39285
		0.661594	2.628429	1.05042	2.419151
		0.666846	2.678219	1.05723	2.447193
		0.672098	2.728996	1.064963	2.476321
				1.07235	2.505449
				1.078929	2.533925
				1.087123	2.566966
				1.094048	2.599354
				1.10155	2.633048
				1.109052	2.66761
				1.116324	2.703694
				1.124288	2.739344
				1.131444	2.778905
				1.138831	2.818902
				1.145756	2.859769
				1.153835	2.902374
				1.160529	2.944979
				1.167454	2.99041
				1.174841	3.038015
				1.182343	3.086055
				1.189152	3.137137
				1.19654	3.189308
				1.202195	3.242129
				1.209582	3.297995
				1.216392	3.356251
				1.22297	3.415594
				1.231396	3.477328
				1.237951	3.539496
				1.244645	3.604926
				1.25157	3.672964
				1.258264	3.742741
				1.265189	3.814474
				1.272807	3.886425
				1.280656	3.963158

Tabela III.2. Dados experimentais de deformação e tensão de Treloar

TRELOAR					
UNIAXIAL		BIAXIAL		CISALHAMENTO	
Def	Tens	Def	Tens	Def	Tens
0	0	0	0	0	0
0.2525	0.2404	0.2215	0.3328	0.2838	0.32064
0.4082	0.3283	0.3288	0.4440	0.4672	0.43448
0.5908	0.4241	0.4482	0.5326	0.8410	0.61522
0.8783	0.5208	0.6956	0.6786	1.3965	0.79944
1.1658	0.6127	0.9535	0.7838	1.9710	0.97410
1.3930	0.7005	1.5159	0.9871	2.4763	1.14181
2.0188	0.8843	2.0403	1.2686	2.9505	1.31039
2.5684	1.0728	2.4573	1.4755	3.3797	1.49113
3.0115	1.2565	2.7480	1.7605	3.7016	1.65623
3.7438	1.6288	3.0578	2.0212	3.9733	1.84045
4.3362	2.0010	3.2603	2.2593		
4.7365	2.3733	3.4558	2.4774		
5.1288	2.7503				
5.3814	3.1050				
5.5720	3.4773				
5.8420	3.8495				
6.0422	4.1994				
6.1391	4.5716				
6.2169	4.9487				
6.3821	5.3249				
6.4694	5.7020				
6.5917	6.4465				

Tabela III.3. Dados experimentais de deformação e tensão da borracha HDR.

HDR			
COMPRESSÃO		CISALHAMENTO	
Def	Tens	Def	Tens
0	0	0	0
-0.04924	-0.20047	0.271353	0.593753
-0.0985	-0.34089	0.599374	0.810071
-0.14942	-0.46114	0.967394	1.071814
-0.19949	-0.58155	1.370331	1.422462
-0.24958	-0.68179	1.795338	2.213437
-0.29967	-0.79203		
-0.34975	-0.91227		
-0.39984	-1.06271		
-0.44992	-1.27318		

Tabela III.4. Dados experimentais de deformação e tensão da borracha de silicone.

SILICONE					
UNIAXIAL		BIAXIAL		CISALHAMENTO	
Def	Tens	Def	Tens	Def	Tens
0	0	0	0	0	0
0.00128	0	0.05214	0.10562	0.01934	0.05
0.05121	0.05	0.10439	0.18323	0.05109	0.1
0.11112	0.1	0.17914	0.27826	0.09667	0.15
0.18168	0.15	0.23769	0.33067	0.15208	0.2
0.26634	0.2	0.34198	0.4099	0.21636	0.25
0.35957	0.25	0.44495	0.48013	0.29238	0.3
0.46155	0.3	0.54026	0.54148	0.37829	0.35
0.56204	0.35	0.6813	0.65218	0.47465	0.4
0.66554	0.4	0.7714	0.73989	0.56868	0.45
0.75993	0.45	0.80176	0.77316	0.66517	0.5
0.84698	0.5	0.84419	0.8252	0.75336	0.55
0.92893	0.55	0.95375	1.01068	0.83298	0.6
0.99148	0.6	1.06626	1.31358	0.90548	0.65
1.04127	0.65			0.96832	0.7
1.08914	0.7			1.0208	0.75
1.13461	0.75			1.07331	0.8
1.16898	0.8			1.11493	0.85
				1.15316	0.9

ANEXO IV

O procedimento adotado para obtenção das constantes através do comando *fminsearch* do MatLab foi o seguinte:

- Criação de uma rotina que lê um arquivo em formato “.dat” contendo todos os dados experimentais colocados em sequência, que guarde-os em vetores contendo os valores de tensão ou deformação referentes a cada ensaio distinto.
- Estas matrizes são utilizadas para escrever as funções erro de cada ensaio de acordo com as Equações 6.3 a 6.5 ou Equações 6.6 a 6.8 (para os modelos HMI). Cada função erro fica escrita em termos das constantes hiperelásticas de cada modelo;
- Soma das funções erros de cada ensaio conforme Equação 6.9, gerando a função que será minimizada.
- Criação de um *handle* que chame a função erro:

```
fhandle = @NOME_DA_FUNÇÃO_QUE_CALCULA_O_ERRO;
```

- Definição de um vetor contendo as estimativas iniciais das constantes hiperelásticas;
- Utilização da linha de comando que chama a função *fminsearch*:

```
[C,fval] = fminsearch (fhandle,chute_inicial,options,tenstrac,...
    deftrac,tenscis,defcis,tensbia,defbia)
```

onde *tenstrac*, *deftrac*, *tenscis*, *defcis*, *tensbia*, *defbia* são os vetores criados na rotina de leitura contendo respectivamente os dados experimentais de: tensão do ensaio de tração uniaxial, deformação do ensaio de tração uniaxial, tensão do ensaio de cisalhamento puro, deformação do ensaio de cisalhamento puro, tensão do ensaio de tração biaxial e deformação do ensaio de tração biaxial. A variável *chute_inicial* é o vetor contendo as estimativas iniciais das constantes;

- Como resultado, o programa gera o vetor **C** com as constantes que minimizam a função *fhandle* e o escalar *fval* igual ao valor da função minimizada.

ANEXO V

Primeiramente, para introduzir o conceito de convexidade de uma função, é preciso esclarecer o que é um *conjunto convexo*. Um conjunto convexo é um conjunto de elementos em um espaço vetorial tal que, qualquer reta que una quaisquer dois pontos pertencentes a este conjunto, deve estar completamente contida dentro do mesmo. A Figura V.1 mostra dois exemplos, onde um é um conjunto convexo e outro não.

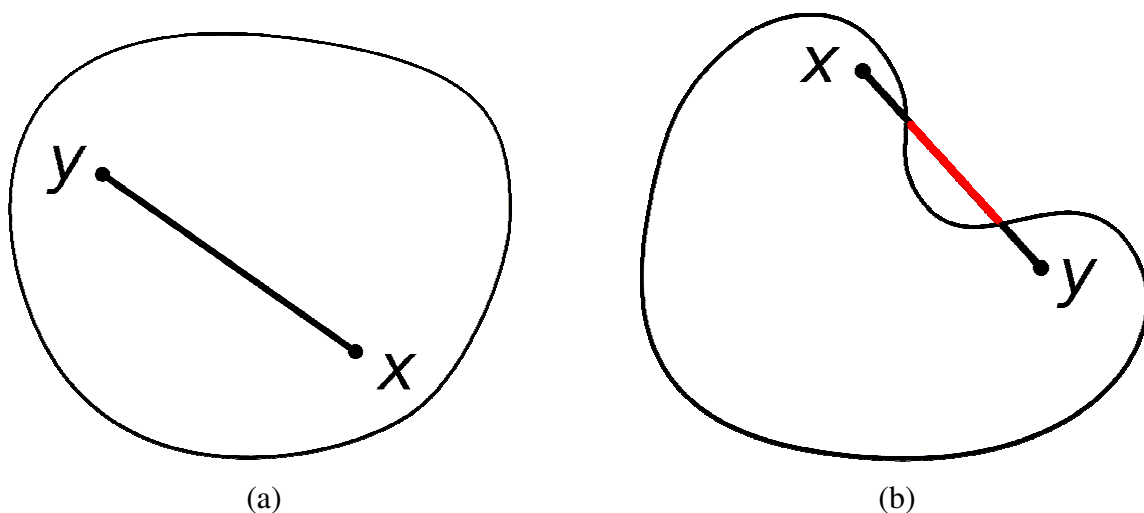


Figura V.1. Demonstração gráfica de um conjunto (a) convexo e (b) não convexo.

Como exemplos de conjuntos convexos podem ser citados: um ponto, uma reta, um segmento de reta, qualquer poliedro, entre outros. Para as aplicações referentes ao assunto deste trabalho, os conjuntos mais importantes, e que satisfazem a propriedade de convexidade são os conjuntos \mathfrak{R}^n .

Definindo C como um domínio convexo (por exemplo, \mathfrak{R}^n) e uma função $f : C \rightarrow (-\infty, +\infty]$, a função f será convexa se e somente se

$$f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad 0 < \lambda < 1, \quad \forall x, y \in C \quad (\text{V.1})$$

No plano bidimensional, por exemplo, a Equação V.1 quer dizer que, qualquer reta unindo quaisquer dois pontos da função f deve se localizar completamente acima do gráfico da função f . Sob este ponto de vista, a Figura V.2 mostra graficamente um exemplo de função convexa e um exemplo de função não convexa (ou côncava).

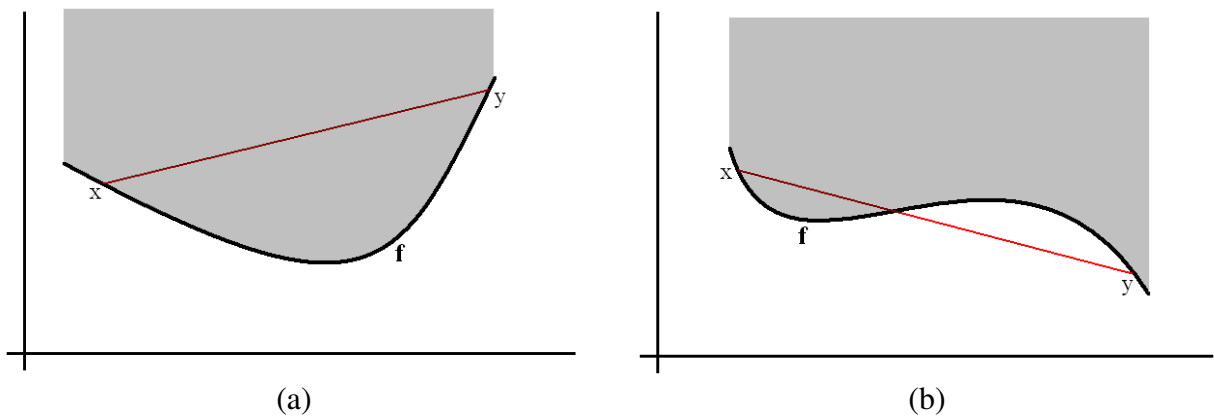


Figura V.2. Demonstração gráfica de uma função (a) convexa e (b) não convexa (ou côncava).

Pode-se notar pelas Figuras V.2-a e V.2-b que uma função será convexa se e somente se a região acima dela preencher os requisitos de um conjunto convexo (conforme Figura V.1).

Como exemplos de funções convexas, podem ser citadas:

- $ax + b$ em \mathfrak{R} , $\forall a, b \in \mathfrak{R}$;
- e^{ax} $\forall a \in \mathfrak{R}$;
- x^α em \mathfrak{R}_{++} , para $\alpha \geq 1$ ou $\alpha \leq 0$;
- $|x|^P$ em \mathfrak{R} , para $P \geq 1$;
- $x \log x$ em \mathfrak{R}_{++} ,

entre outras.

Demais exemplos de funções convexas e propriedades são encontrados em Rockafellar [1970].

Morrey [1952] introduziu o conceito da quase-convexidade de funções, que é a mais importante propriedade de convexidade quando se trata de cálculos de variações multidirecionais. Convencionando Ω como um domínio aberto de \mathfrak{R}^n , $\mathbf{M}^{n \times n}$ o conjunto de todas matrizes e $\mathbf{S}^{n \times n} \subset \mathbf{M}^{n \times n}$ o subespaço de todas matrizes simétricas, a função contínua $f : \mathbf{M}^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{R}$ é dita quase-convexa se

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{A}) dx \leq \int_{\Omega} f(\mathbf{A} + \text{grad } \varphi) dx \quad (\text{V.2})$$

para toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{M}^{n \times n}$ e qualquer função suave $\varphi : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$ com suporte compacto em Ω .

Ou, equivalentemente, uma função $f : C \rightarrow \mathfrak{R}$, onde C é um subconjunto convexo em um espaço vetorial real, será quase-convexa se

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max(f(x), f(y)), \quad 0 < \lambda < 1, \quad \forall x, y \in C \quad (\text{V.3})$$

A propriedade da policonvexidade nada mais é do que a extensão da condição de convexidade a funções definidas nos espaços das matrizes. Ela é uma propriedade satisfeita localmente e, portanto, mais fácil de ser lidada do que a propriedade da quase-convexidade. Levando em consideração que o tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda é um funcional dos deslocamentos através de

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \nabla \mathbf{u}(\nabla \mathbf{u})^T \quad (\text{V.4})$$

e que a função energia de deformação W é um funcional do tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda através de seus invariantes, tal que

$$W = \hat{W}(I_B, II_B, III_B) \quad (\text{V.5})$$

o produto dos funcionais \mathbf{B} e W

$$W(\mathbf{u}) = \hat{W} \cdot \mathbf{B} = \hat{W}(\mathbf{B}(\mathbf{u})) \quad (\text{V.6})$$

será policonvexo se:

- \hat{W} for convexo;
- o mapeamento $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{u})$ for fracamente contínuo.

No âmbito da elasticidade, sabendo que os seguintes mapeamentos são fracamente contínuos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \rightarrow \nabla \mathbf{u} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \rightarrow \text{cof}(\nabla \mathbf{u}) \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} \rightarrow \text{cof}(\mathbf{B}) \\ \mathbf{u} \rightarrow \det(\nabla \mathbf{u}) \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} \rightarrow \det(\mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

diz-se que uma função energia de deformação W será policonvexa se existir uma função convexa \hat{W} que tenha os argumentos \mathbf{B} , $\text{cof}(\mathbf{B})$ e $\det(\mathbf{B})$ tal que

$$W(\mathbf{F}) = \hat{W}(\mathbf{F}, \text{cof}(\mathbf{F}), \det(\mathbf{F})) \quad (\text{V.8})$$

Uma propriedade deste tipo de função é que, se existirem funções \hat{W}_i que sejam convexas com respeito aos seus respectivos argumentos, então a função

$$W(\mathbf{B}) = \hat{W}_1(\mathbf{B}) + \hat{W}_2(\text{cof}(\mathbf{B})) + \hat{W}_3(\det(\mathbf{B})) \quad (\text{V.9})$$

será policonvexa.

Esta propriedade pode ser muito útil quando se quiser escrever um novo modelo constitutivo através da combinação de outros modelos mais simples.