

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

# **Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Laminados, Baseada em Confiabilidade, Utilizando Algoritmos Genéticos e Redes Neurais Artificiais**

por

Paulo André Menezes Lopes

Tese Apresentada para Obtenção do  
Título de Doutor em Engenharia

Porto Alegre, setembro de 2009.

**Paulo André Menezes Lopes**

# **Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Laminados, Baseada em Confiabilidade, Utilizando Algoritmos Genéticos e Redes Neurais Artificiais**

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia. Orientação: Prof. Armando Miguel Awruch. Co-orientação: Prof. Herbert Martins Gomes.

Porto Alegre, setembro de 2009.

Esta Tese de Doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Área de Concentração : Estruturas.

---

Orientador: Prof. Dr. Armando Miguel Awruch

---

Co-Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

---

Coordenador do PPGEC: Prof. Dr. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho.

Banca Examinadora :

- Prof. Dr. Domingos Alves Rade (Faculdade de Engenharia Mecânica/Universidade Federal de Uberlândia – Uberlândia - MG)
- Prof. Dr. Leonardo Dagnino Chiwiacowsky (Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – São Leopoldo - RS).
- Prof. Dr. Ruy Carlos Ramos de Menezes (Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Civil – Porto Alegre – RS)

Porto Alegre, setembro de 2009.



*Dedico este trabalho a  
meus pais e à minha irmã.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao orientador, Prof. Armando M. Awruch, pelas valiosas sugestões e por ter acreditado no meu potencial para realizar este trabalho. Ao co-orientador, Prof. Herbert M. Gomes, pela ajuda diária em transpor todas as dificuldades e pelo enorme incentivo.

Aos meus pais e minha irmã, pelo apoio emocional e carinho dispensado durante toda minha caminhada.

A todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

# SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS .....	ii
SUMÁRIO .....	iii
LISTA DE TABELAS .....	vii
LISTA DE FIGURAS .....	ix
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xiii
RESUMO .....	xviii
ABSTRACT .....	xix
CAPÍTULO 1 .....	20
1. INTRODUÇÃO .....	20
1.1 Objetivos, justificativas e organização do trabalho .....	21
CAPÍTULO 2 .....	26
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	26
2.1 Materiais compósitos laminados .....	26
2.2 Confiabilidade de materiais compósitos laminados .....	26
2.3 Otimização de materiais compósitos laminados com restrição de confiabilidade .....	28
2.4 Redes neurais artificiais em problemas de engenharia .....	32
2.4.1 Redes neurais na mecânica estrutural .....	33
CAPÍTULO 3 .....	37
3. MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS E ELEMENTO FINITO UTILIZADO .....	37
3.1 Introdução .....	37
3.2 Compósitos laminados .....	38
3.2.1 Lâmina ortotrópica .....	39
3.2.2 Seqüência de lâminas .....	40
3.2.3 Relações de tensão-deformação .....	42
3.3 Critério de falha para laminados .....	45
3.3.1 Critérios de falha de resistência para compósitos laminados .....	47
3.3.1.1 Teoria de falha da máxima tensão .....	47
3.3.1.2 Teoria de falha da máxima deformação .....	48
3.3.1.3 Teoria de falha de Tsai-Hill .....	49
3.3.1.4 Teoria de falha de Tsai-Wu .....	50

3.3.2	Comparação entre resultados experimentais e as teorias de falha.....	51
3.4	Elemento finito empregado na análise estrutural.....	54
3.4.1	Elemento triangular plano para cascas e placas.....	54
3.4.2	Elemento triangular plano para placas e cascas de compósito laminado ..	54
3.4.3	Exemplos numéricos de validação do elemento - Análise de tensões.....	56
3.4.3.1	Análise linear de tensões em placa apoiada submetida à carga de pressão	57
3.4.3.2	Análise não-linear de tensões em placa engastada submetida à carga de	58
	pressão	
CAPÍTULO 4	.....	63
4.	CONFIABILIDADE EM ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS.....	63
4.1	Introdução .....	63
4.2	Análise de confiabilidade de lâminas de materiais compósitos unidirecionais	63
4.2.1	Método de simulação de Monte Carlo.....	64
4.2.1.1	Geração de amostras para simulação .....	66
4.2.1.2	Variáveis antitéticas .....	67
4.2.2	Método de simulação de Monte Carlo com amostragem por importância	68
4.2.3	<i>First order reliability method</i> (FORM).....	69
4.2.1.3	Algoritmo de Rackwitz –Fiessler.....	70
4.3	Análise de confiabilidade de laminados de materiais compósitos unidirecionais	72
4.3.1	FORM aplicado para sistemas em série. ....	76
4.4	Exemplo numéricos .....	77
4.4.1	Análise da confiabilidade de lâminas de materiais compósitos unidirecionais	78
4.2.1.4	Confiabilidade no estado uniaxial de tensão.....	78
4.2.1.5	Confiabilidade no estado plano de tensões .....	80
4.4.1.1	Efeito da variação do ângulo de orientação das fibras .....	82
4.4.1.2	Efeito de correlação entre as resistências e tensões aplicadas .....	84
4.4.2	Análise da confiabilidade de laminados de materiais compósitos .....	85
CAPÍTULO 5	.....	88
5.	OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE COM A.G.....	88
5.1	Introdução .....	88
5.2	Processo de otimização via algoritmos genéticos.....	88

5.3	Operadores genéticos utilizados .....	92
5.4	Exemplo numéricos .....	95
5.4.1	Projeto ótimo, com restrição de confiabilidade, de uma coluna metálica .....	95
5.4.2	Otimização, sem restrição, de laminados de materiais compósitos.....	99
5.4.2.1	Otimização do ângulo de orientação das fibras sob condições determinísticas 100	
5.4.2.2	Otimização do ângulo de orientação das fibras sob condições probabilísticas .....	101
5.4.3	Otimização de placas de laminados de compósitos com restrição de confiabilidade 102	
5.4.3.1	Resultados para tensões locais calculadas por expressão analítica ..	105
5.4.3.2	Resultados obtidos com tensões locais calculadas por elemento finito triangular plano para cascas e placas .....	111
CAPÍTULO 6 .....		116
6.	R.N.A. PARA ACELERAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO DE COMPÓSITOS COM A.G. 116	
6.1	Introdução .....	116
6.2	Redes neurais artificiais .....	116
6.3	Rede neural perceptron de multicamada (RNPM).....	117
6.4	Redes neurais com funções de base radial (RNBR) .....	120
6.4.1	Projeto de uma rede generalizada com funções de base radial.....	123
6.5	Geração de amostras para treinamento da rede neural artificial .....	126
6.6	Resultados numéricos .....	127
6.6.1	EXEMPLO 1 .....	127
6.6.1.1	Primeiro caso – carga uniaxial .....	128
6.6.1.2	Segundo caso – Carregamento Biaxial.....	130
6.6.1.3	Terceiro caso – cargas axiais e momentos .....	131
6.6.2	EXEMPLO 2 – Casca semi-cilíndrica compósita com carga de pressão	135
6.6.3	EXEMPLO 3 - Otimização de placas de laminados de compósitos com restrição de confiabilidade .....	138
6.6.4	EXEMPLO 4 – Otimização baseada em confiabilidade da orientação de lâminas de estrutura compósita com comportamento não linear.....	139
6.6.4.1	Análise utilizando o método dos elementos finitos.....	140

6.6.4.2	Análise utilizando Redes Neurais Artificiais .....	142
6.6.4.3	Comparação de tempos de Processamento.....	145
CAPÍTULO 7	.....	146
7.1	CONCLUSÕES .....	146
7.2	Sugestões para trabalhos futuros.....	147
CAPÍTULO 8.	.....	149
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	149

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Propriedades mecânicas de lâminas de compósitos laminados (Jones, 1998). .....	42
Tabela 3.2 – Propriedades do Material. ....	58
Tabela 3.3 – Tensões no ponto próximo ao centro da placa para faces superior e inferior.	58
Tabela 3.4 – Propriedades do material e dados geométricos.....	60
Tabela 4.1 - Valores Médios da Resistência do Material Usado (MPa).....	78
Tabela 4.2 - Parâmetros do material (unidade: MPa).....	86
Tabela 4.3 - Parâmetros das Tensões (unidade: GPa). ....	86
Tabela 5.3 - Variáveis de projeto.....	95
Tabela 5.4 - Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias. ....	96
Tabela 5.5 - Dados de entrada do programa de Algoritmos Genéticos.....	99
Tabela 5.6 - Comparação de resultados para os valores do vetor de projeto ótimo ( <b>d</b> ) e custo mínimo do perfil T.....	97
Tabela 5.7 - Médias e coeficiente de variação das resistências do Grafite/Epóxi (T300/5208) (MPa). ....	100
Tabela 5.8 - Médias e desvios padrões das tensões aplicadas no plano do laminado (GPa). .....	100
Tabela 5.9 - Propriedades mecânicas determinísticas do material. ....	103
Tabela 5.10 - Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias.....	103
Tabela 5.11 - Dados de entrada do programa de Algoritmos Genéticos.....	104
Tabela 5.12 - Resultados da otimização das espessuras do laminado (Monte Carlo)...	106
Tabela 5.13 - Resultados da otimização das espessuras do laminado (Monte Carlo com amostragem por importância).....	107
Tabela 5.14 - Resultados da otimização das espessuras do laminado (FORM para sistemas em série). ....	109
Tabela 5.15 - Resultados da otimização das espessuras do laminado (FORM). ....	110
Tabela 5.16 - Diferenças relativas para a espessura total do laminado ( $h_t$ ).....	111
Tabela 5.17 - Resultados da otimização das espessuras do laminado (FORM para sistemas em série). ....	113
Tabela 5.18 - Resultados da otimização das espessuras do laminado (FORM). ....	114
Tabela 5.19 - Diferenças relativas para a espessura total do laminado ( $h_t$ ).....	114

Tabela 6.1 – Propriedades mecânicas e resistências do Vidro – Epóxi.....	128
Tabela 6.2 – Tempo de processamento usando elementos finitos e redes neurais. ....	129
Tabela 6.3 - Resultados dos tempos de processamento usando elementos finitos e redes neurais artificiais RNBR (carregamento biaxial).....	130
Tabela 6.4 - Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias. ....	132
Tabela 6.5 - Comparação dos valores do tempo de processamento para diversos métodos usando redes neurais e elementos finitos para o cálculo da confiabilidade de um laminado composto com cargas axiais e momento.....	134
Tabela 6.6 – Parâmetros estatísticos para as variáveis aleatórias.....	136
Tabela 6.7 - Comparação dos valores do tempo de processamento para diversos métodos usando redes neurais e elementos finitos para o cálculo da confiabilidade de uma casca semi-cilíndrica com carregamento de pressão na superfície. ....	137
Tabela 6.8 - Comparação dos valores do tempo de processamento usando redes neurais ou elementos finitos para otimização da espessura total do exemplo do item 5.3.3. ....	138
Tabela 6.9 - Erros relativos em % usando redes neurais ou elementos finitos para otimização da espessura total do exemplo do item 5.3.3.....	139
Tabela 6.10 – Parâmetros do algoritmo genético. ....	140
Tabela 6.11 – Comparação dos tempos de processamento para otimização dos ângulos das lâminas usando o método dos elementos finitos e Redes Neurais Artificiais. ....	145

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Fluxograma geral do processo de otimização.....	25
Figura 3.1 – Propriedades elásticas de uma lâmina de compósito. ....	39
Figura 3.2 – Sistema de coordenadas para uma lâmina unidirecional.....	47
Figura 3.3 – Comparação entre dados experimentais e critério de falha da máxima tensão – adaptado de (Kaw, 2006).....	52
Figura 3.4 – Comparação entre dados experimentais e critério de falha da máxima deformação – adaptado de (Kaw, 2006).....	52
Figura 3.5 – Comparação entre dados experimentais e critério de falha de.....	53
Tsai-Hill – adaptado de (Kaw, 2006). ....	53
Figura 3.6 – Comparação entre dados experimentais e critério de falha de.....	53
Tsai-Wu – adaptado de (Kaw, 2006).....	53
Figura 3.7 - Graus de liberdade do elemento triangular plano para placa e casca. ....	55
Figura 3.8 – Malha de elementos finitos para placa retangular simplesmente apoiada. ....	57
Figura 3.9 – Tensões nas faces superior e inferior da placa. ....	59
Figura 3.10 – Malha de elementos finitos e indicação do ponto de integração onde são comparadas as tensões calculadas. ....	60
Figura 3.11 – Curva tensão $S_x$ – nível de carga para faces superior e inferior do laminado no primeiro ponto de integração do elemento 1. ....	61
Figura 3.12 – Curva tensão $S_y$ – nível de carga para faces superior e inferior do laminado no primeiro ponto de integração do elemento 1. ....	61
Figura 3.13 – Curva tensão $S_{xy}$ – nível de carga para faces superior e inferior do laminado no primeiro ponto de integração do elemento 1. ....	62
Figura 4.1 - Sistema laminado.....	73
Figura 4.2 - FORM aplicado para múltiplas funções de estado limite – adaptado de Miki (1997). ....	77
Figura 4.3 - Efeito do coeficiente de variação da tensão de tração em condição uniaxial de carga. ....	79
Figura 4.4 - Efeito do coeficiente de variação da tensão de corte em condição uniaxial de carga. ....	79
Figura 4.5 - Efeito dos Valores Médios de $S_1$ e $S_6$ .....	80
Figura 4.6 - Efeito do Coeficiente de Variação de $S_1$ . ....	81

Figura 4.7 - Efeito do Coeficiente de Variação de $S_6$ .....	81
Figura 4.8 - Efeito do desvio padrão do ângulo de orientação das fibras sobre condição de carregamento de tração uniaxial $CV(S_1) = 0$ .....	82
Figura 4.9 - Efeito do desvio padrão do ângulo de orientação das fibras sobre condição de carregamento de tração uniaxial $CV(S_1) = 0.6$ .....	82
Figura 4.10 - Efeito do desvio padrão do ângulo de orientação das fibras sobre condição corte puro.....	83
Figura 4.11 - Efeito da variação do ângulo de orientação sobre um estado plano de tensões ( $S_1$ variável).....	84
Figura 4.12 - Efeito da variação do ângulo de orientação sobre um estado plano de tensões ( $S_6$ variável).....	84
Figura 4.13 - Efeito do coeficiente de correlação entre as tensões de tração e corte (estado plano de tensões).....	85
Figura 4.14 - Configuração dos laminados multiaxiais.....	86
Figura 5.1 - Estrutura básica do AG (Gomes, 2001).....	89
Figura 5.5 - Comparação entre os índices de confiabilidade para os casos analisados...98	
Figura 5.6 - Comparação entre os custos mínimos da coluna de aço considerada em função dos índices de confiabilidade.....	99
Figura 5.7 - Ângulo de orientação ótimo de laminados multiaxiais em condições determinísticas.....	100
Figura 5.8 - Ângulo de orientação ótimo de laminados multiaxiais em condições probabilísticas.....	101
Figura 5.9 - Desenho esquemático do laminado utilizado nas otimizações.....	102
Figura 5.10 - Esquema de aplicação das cargas no laminado.....	103
Figura 5.11 - Evolução das espessuras das lâminas do melhor indivíduo em função do número de gerações (Monte Carlo).....	105
Figura 5.12 - Evolução da espessura total do laminado do melhor indivíduo em função do número de gerações (Monte Carlo).....	106
Figura 5.13 - Evolução das espessuras das lâminas do melhor indivíduo em função do número de gerações (Monte Carlo com amostragem por importância).....	107
Figura 5.14 - Evolução da espessura total do laminado do melhor indivíduo em função do número de gerações (Monte Carlo com amostragem por importância).....	107

Figura 5.15 - Evolução das espessuras das lâminas do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM para sistemas em série). .....	108
Figura 5.16 - Evolução da espessura total do laminado do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM para sistemas em série). .....	108
Figura 5.17 - Evolução das espessuras das lâminas do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM). .....	109
Figura 5.18 - Evolução da espessura total do laminado do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM). .....	110
Figura 5.19 - Evolução das espessuras das lâminas do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM para sistemas em série). .....	112
Figura 5.20 - Evolução da espessura total do laminado do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM para sistemas em série). .....	112
Figura 5.21 - Evolução das espessuras das lâminas do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM). .....	113
Figura 5.22 - Evolução da espessura total do laminado do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM). .....	114
Figura 6.1 Neurônio, a unidade de processamento neural mais simples. ....	117
Figura 6.2 - Arquitetura genérica de uma RNPM 3:3:2 – retirado de Gomes (2001). ..	120
Figura 6.3 - Esquema geral de um neurônio de base radial. ....	121
Figura 6.4 - Esquema geral de uma rede neural de base radial – retirado de Gomes (2001). .....	122
Figura 6.5 - Esquema de geração do conjunto de amostras para treinamento da rede neural artificial. ....	127
Figura 6.6 – Probabilidade de falha do laminado com carga uniaxial de tração $N_I$ . ....	128
Figura 6.7 - Comparação dos custos computacionais para $P_f < 0,5$ (carga uniaxial). ..	129
Figura 6.8 – Probabilidade de falha para o compósito laminado sob condições de carregamento biaxial. ....	130
Figura 6.9 – Comparação dos tempos de processamento para probabilidades de falha $P_f < 0,8$ (carregamento biaxial). ....	131
Figura 6.10 - Treinamento da RNPM. (a) Correlação entre os valores de Tsai-Wu usando RNPM e elementos finitos, (b) Erro quadrático médio durante o processo de aprendizagem. .	133
Figura 6.11 - Treinamento da RNBR. (a) Correlação entre os valores de Tsai-Wu usando RNBR e elementos finitos, (b) Erro quadrático médio durante o processo de aprendizagem. .	133

Figura 6.12 - Geometria e Condições de Contorno da casca de compósito com carga de pressão. .....	135
Figura 6.13 - Curva carga – deslocamento, não linear, no centro da estrutura para uma casca semi – cilíndrica com 12,6 mm de espessura. ....	136
Figura 6.14 – Histórico do índice de confiabilidade do melhor indivíduo e da média dos indivíduos durante as gerações (elementos finitos). ....	141
Figura 6.15 – Histórico dos ângulos das lâminas do melhor indivíduo durante as iterações (elementos finitos). ....	141
Figura 6.16 – Histórico do índice de confiabilidade do melhor indivíduo e da média dos indivíduos durante as iterações (Rede de Base Radial). ....	143
Figura 6.17 – Histórico dos ângulos das lâminas do melhor indivíduo durante as iterações (Rede de Base Radial). ....	143
Figura 6.18 – Histórico do índice de confiabilidade do melhor indivíduo e da média dos indivíduos durante as iterações (Rede Perceptron). ....	144
Figura 6.19 – Histórico dos ângulos das lâminas do melhor indivíduo durante as iterações (Rede Perceptron). ....	144

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras romanas minúsculas.

$f_x(\cdot)$	função de densidade de probabilidade conjunta.
$F$	função de ativação.
$f_{x_i}(x_i)$	função de densidade de probabilidade marginal.
$f_w^k(\mathbf{x})$	função de distribuição de probabilidade conjunta de amostragem.
$f_x(\mathbf{x})$	função de distribuição de probabilidade conjunta original das variáveis aleatórias.
$g(x)$	função de estado limite.
$h$	espessura total do laminado.
$h(\cdot)$	espessura da cada lâmina.
$i$	entrada de um neurônio.
$lim_{inf}$	limite inferior da variável de projeto.
$lim_{sup}$	limite superior da variável de projeto.
$m_i(\mathbf{U})$	função de estado limite linearizada.
$n$	número de lâminas do laminado.
$n_f$	número de pontos no domínio de falha.
$n_s$	número de simulações.
$n_v$	número de variáveis.
$o_{pk}$	saída desejada do neurônio.
$t$	espessura de cada lâmina.
$u_i$	variáveis normais padronizadas.
$x$	direção paralela as fibras do laminado.
$x_{pi}$	amostra de entrada para treinamento.
$y$	direção perpendicular as fibras do laminado.
$y_{pi}$	saída do neurônio.

## Letras romanas maiúsculas.

$C'$	matriz constitutiva da lâmina do material compósito nas direções dos eixos locais do laminado.
$\bar{C}$	matriz constitutiva da lâmina do material compósito.
$C_{ij}$	matriz de constante ortotrópicas.
$CV[ ]$	coeficiente de variação da variável aleatória.
$E$	erro quadrático médio do sistema.
$E$	módulo de elasticidade.
$E[ ]$	média da variável aleatória.
$E_1$	módulo de elasticidade na direção das fibras do material compósito.
$E_2$	módulo de elasticidade perpendicular a direção das fibras do material compósito.
$E_f$	módulo de elasticidade das fibras do material compósito.
$E_m$	módulo de elasticidade da matriz do material compósito.
$E_p$	erro quadrático para cada padrão entrada-saída.
$F_{xi}(x_i)$	função de probabilidade acumulada marginal.
$F_{xy}$	parâmetro do critério de Tsai-Wu.
$\left\{ \begin{matrix} t+\Delta t \\ t+\Delta t \end{matrix} F^{(i-1)} \right\}$	vetor de forças nodais equivalentes.
$F_{xi}^{-1}$	função inversa acumulada da variável aleatória $i$ .
$F_{pen}$	fator de penalização.
$G$	função de base radial.
$G_f$	módulo de cisalhamento das fibras do material compósito.
$G_m$	módulo de cisalhamento da matriz do material compósito.
$H(U)$	função de estado limite linearizada.
$I[g(X)]$	função indicadora.
${}^tK_L$	matriz de rigidez linear.
${}^tK_{NL}$	matriz de rigidez não-linear.
$M(X)$	função margem de segurança.
$M_1$	momento em torno do eixo 2-2.

$N_1$	carga normal atuando na direção 1-1.
$N_{12}$	carga de corte atuando no plano 12.
$N_2$	carga normal atuando na direção 2-2.
$NET$	combinação linear.
$P$	número de padrões de treinamento.
$P_f$	probabilidade de falha.
$\{t+\Delta t P\}$	vetor de cargas externas.
$\hat{P}_f$	probabilidade de falha estimada.
$Pen$	penalização aplicada na função de custo.
$Q_i$	matriz de rigidez do grupo $i$ de lâminas.
$R_x^C$	resistência a compressão na direção x.
$R_y^C$	resistência a compressão na direção y.
$R_x^T$	resistência a tração na direção x.
$R_y^T$	resistência a tração na direção y.
$R_{xy}$	resistência ao cisalhamento no plano xy.
Resolução	resolução das soluções.
$(S_x^C)_{ult}$	tensão longitudinal última de compressão na direção x.
$(S_y^C)_{ult}$	tensão longitudinal última de compressão na direção y.
$(S_x^T)_{ult}$	tensão longitudinal última de tração na direção x.
$(S_y^T)_{ult}$	tensão longitudinal última de tração na direção y.
$(S_{xy})_{ult}$	tensão última de cisalhamento no plano x-y.
$S_1$	tensão longitudinal atuando na direção 1.
$S_2$	tensão longitudinal atuando na direção 2.
$S_6$	tensão de cisalhamento atuando no plano 1-2.
$SD[ ]$	desvio padrão da variável aleatória.
$S_x$	tensão longitudinal atuando na direção x.
$S_{xy}$	tensão de cisalhamento atuando no plano x-y.
$S_y$	tensão longitudinal atuando na direção y.
$T$	matriz de rotação.

$T_p$	tempo de processamento.
$U^*$	ponto de projeto.
$U$	variáveis aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo [0,1].
$V_f$	fração de volume das fibras do material compósito.
$V_m$	fração de volume da matriz do material compósito.
$w_0$	peso sináptico da camada de saída.
$w_{pi}$	pesos sinápticos.
$x$	direção paralela às fibras do laminado.
$X$	variáveis aleatórias geradas com função de distribuição de probabilidades requeridas.
$X$	vetor de variáveis aleatórias.
$X_1$	direção paralela às fibras do material compósito.
$X_2$	direção perpendicular às fibras do material compósito.
$Z$	variáveis gaussianas padrões não correlacionadas.

### Letras gregas minúsculas

$\alpha$	parâmetro de momento.
$\beta$	índice de confiabilidade.
$\beta_{req}$	índice de confiabilidade requerido pelo sistema.
$(\gamma_{xy})_{ult}$	deformação última de cisalhamento no plano x-y.
$\gamma_{xy}$	deformação de cisalhamento no plano x-y.
$\gamma$	deformações causadas pelas tensões de cisalhamento.
$\lambda$	parâmetro de regularização.
$\hat{\delta}_{Pf}$	coeficiente de variação da probabilidade de falha.
$\delta$	deformação total.
$\delta_f$	deformação das fibras do material compósito.
$\delta_m$	deformação da matriz do material compósito.
$\epsilon_y$	deformação longitudinal na direção y.
$(\epsilon_x^C)_{ult}$	deformação longitudinal última de compressão na direção x.
$(\epsilon_y^C)_{ult}$	deformação longitudinal última de compressão na direção y.

$(\varepsilon_x^T)_{ult}$	deformação longitudinal última de tração na direção x.
$(\varepsilon_y^T)_{ult}$	deformação longitudinal última de tração na direção y.
$\varepsilon_x$	deformação longitudinal na direção x.
$\varepsilon$	deformações causadas pelas tensões normais.
$\theta$	ângulo de orientação das fibras.
$\mu_M$	média da função margem de segurança $M(X)$ .
$\nu_i$	razão de disposição das fibras.
$\eta$	taxa de aprendizagem.
$\rho$	peso específico do material.
$\rho_f$	peso específico das fibras do material compósito.
$\rho_m$	peso específico da matriz do material compósito
$\rho_x$	coeficientes de correlação.
$\sigma$	tensões normais atuando no laminado.
$\sigma_M$	desvio padrão da função margem de segurança $M(X)$ .
$\hat{\sigma}_{Pf}$	desvio padrão da probabilidade de falha.
$\tau$	tensões de cisalhamento atuando no laminado.
$\nu_{12}$	coeficiente de Poisson.
$\phi^{-1}(U)$	inversa da distribuição acumulada da função Gaussiana padrão.

## RESUMO

Lopes, P. A. M., **Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Laminados, Baseada em Confiabilidade, Utilizando Algoritmos Genéticos e Redes Neurais Artificiais.** Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 147p., 2009.

A resistência e a rigidez de materiais compósitos variam consideravelmente devido a mudanças no tipo de material, espessura das camadas, ângulo de orientação das fibras e seqüência das lâminas. O projeto de uma estrutura ótima pode ser obtido dada uma determinada condição de carga. Vários métodos de otimização determinísticos foram desenvolvidos para tratar esse problema. Algumas vezes a orientação ótima das fibras muda quando as condições de carga variam e o desempenho da estrutura é altamente afetado pelas variáveis de projeto e condições de carregamento. Dessa forma, a otimização deste tipo de estrutura utilizando a confiabilidade como restrição é um importante problema a ser tratado. Este trabalho trata do problema da otimização de estruturas de materiais compósitos laminados com restrição de confiabilidade utilizando algoritmos genéticos e redes neurais. A análise da estrutura é feita via elementos finitos e as tensões na direção dos eixos principais de cada lâmina são utilizadas para o cálculo do índice de confiabilidade da estrutura, sendo a função de estado limite o critério de Tsai-Wu para falha de materiais compósitos laminados. A análise de confiabilidade é feita através de um dos seguintes métodos: FORM com um ponto de linearização, FORM para sistemas em série, Monte Carlo Direto e Monte Carlo com Amostragem por Importância. O processo de otimização via Algoritmos Genéticos (com suas fases de geração, seleção e cruzamento dos indivíduos da população), é usado em conjunto com os métodos de determinação do índice de confiabilidade e análises por elementos finitos. Isto gera um alto custo computacional, o qual é contornado utilizando-se Redes Neurais do tipo Perceptron e Base Radial, treinadas para substituir a análise via elementos finitos, diminuindo consideravelmente o tempo de processamento. É mostrado por meio de diversos exemplos que esta metodologia pode ser usada sem perda de precisão e com economia de tempo de processamento até mesmo em exemplos fortemente não lineares.

Palavras-chave: Materiais Compósitos, Confiabilidade, Algoritmos Genéticos, Elementos Finitos, Redes Neurais Artificiais.

## ABSTRACT

Lopes, P. A. M., **Reliability based design optimization of composite structures using genetic algorithms and artificial neural networks.** Tese (Doutorado em Engenharia Civil)- Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 147p., 2009.

Strength and stiffness of composite materials vary considerable due to changes in the material to be used, the thickness of each layer, the fiber orientation angles and the stacking sequence. The optimum structural design may be obtained for a specific load condition. Several optimization criteria were been developed to treat that problem. Sometimes the optimal fiber orientation angles are highly dependent on the load conditions and the structural performance is also influenced by the design variables and acting loads. Thus, structural optimization using a reliability index as a constraint is an important problem to be analyzed. This work deals with the problem of reliability based optimization of laminated composite structures, using genetic algorithms and neural networks. The analysis of the structure is carried out by finite elements and the stress in the direction of the principal axes of each lamina are used to the calculation of the reliability index of the structure, where the limit state function is the Tsai-Wu criterion assuming first ply failure. The reliability analyses are accomplished through one of the following methods: FORM with one linearization point, FORM for in-series systems, Direct Monte Carlo and Monte Carlo with Importance Sampling. The optimization process through Genetic Algorithms (with its phases of generation, selection and crossover of the individuals of the population), is used jointly with the reliability evaluation methods and analysis by finite elements. This leads to high computational costs, which are overcome using trained Neural Networks of the type Perceptron and Radial Base to substitute the analysis with finite elements, reducing considerably the processing time. Several examples are used to show that this methodology can be used without loss of accuracy and with large computational timesaving even for strongly non-linear problems.

Keywords: Composite Materials, Reliability, Genetic Algorithms, Finite Elements, Artificial Neural Networks.

---

## CAPÍTULO 1

### 1. INTRODUÇÃO

Um dos principais objetivos de um projetista estrutural é obter o melhor projeto utilizando a menor quantidade de recursos possível. A medida da qualidade de um projeto estrutural depende da relação existente entre a sua aplicação, seja ela relacionada a requisitos de rigidez ou resistência, e os recursos utilizados, medidos em termos de peso e/ou custo. Dessa forma, o melhor projeto geralmente significa aquele de menor custo/peso com determinadas restrições de rigidez ou resistência, ou mesmo que possua a máxima rigidez ou resistência que pode ser atingida com os recursos disponíveis.

Nas últimas décadas, a otimização matemática, a qual trata da maximização ou minimização de uma função de custo com funções de restrição, despontou como uma poderosa ferramenta para análise estrutural, substituindo a forma clássica e dispendiosa da tentativa e erro. No início da década de 90 surgiram os primeiros trabalhos aplicando tais ferramentas em estruturas de materiais compósitos, entre os quais podemos citar: Murotsu *et al.* (1994), Conceição *et al.* (1996), Kogiso *et al.* (1997), Mahadevan & Liu (1998), Kogiso *et al.* (1998), Todoroki & Sasai (1999), Richard & Perreux (2000), Conceição (2001) e Conceição & Hoffbauer (2009).

O uso de materiais compósitos no projeto estrutural ganhou popularidade nas últimas três décadas, devido a várias vantagens que estes materiais têm em relação aos materiais clássicos, tais como alumínio, aço e outras ligas metálicas. Dentre essas vantagens se podem destacar: suas altas razões rigidez/peso e resistência/peso, excelente resistência à corrosão, baixa expansão térmica, bom desempenho em fadiga e tolerância a dano, facilidade de transporte e manuseio, baixo consumo de energia na fabricação do material e da estrutura em si. Todas essas características têm difundido o uso deste tipo de material e daí a necessidade de analisar de forma adequada seu complexo comportamento.

O projeto ótimo de estruturas de materiais compósitos tem sido realizado principalmente através de processos determinísticos, nos quais as resistências e os carregamentos são considerados livres de incertezas Tsai (1987) e Park (1982). Por outro lado, sabe-se que, devido à natureza anisotrópica do material compósito, o comportamento da estrutura é altamente sensível a variações no carregamento e nas resistências. É necessário destacar que os defeitos originados inevitavelmente nos processos tecnológicos de fabricação tornam aleatória a variação dos parâmetros relacionados às resistências,

tornando o problema estocástico. Considerações similares podem ser feitas em relação às características aleatórias das ações externas e efeitos ambientais (cargas e efeitos higro-térmicos).

Na engenharia estrutural o projeto de estruturas utiliza o conceito básico de que a resistência de um componente ou de um conjunto de componentes deve, no mínimo, satisfazer os efeitos das cargas ou combinações de cargas aplicadas. Se o carregamento e a resistência são tratados como variáveis aleatórias, então a tarefa principal do projetista é assegurar que a resistência superará as solicitações durante a vida útil da estrutura. Entretanto, devido à natureza aleatória do problema, esta condição não pode ser garantida de forma absoluta. Em vez disso, afirmações só podem ser feitas em termos da probabilidade de que um determinado critério de segurança seja atingido. Em termos de engenharia, este enfoque probabilístico é definido como confiabilidade. Uma forma alternativa de encarar o problema é considerar o desempenho insatisfatório do sistema. Neste caso, a probabilidade de falha pode ser calculada, e o termo risco pode ser associado a esta condição da estrutura. Dessa forma, risco e confiabilidade são considerados termos complementares.

Verifica-se que os resultados obtidos para o projeto ótimo de uma estrutura de material compósito laminado são bem diferentes quando se usa uma abordagem determinística ou probabilística. Neste trabalho, o processo de otimização possui como restrição ou função de custo, o índice de confiabilidade da estrutura. O cálculo deste índice é feito através de métodos tais como: Monte Carlo Direto, Monte Carlo com Amostragem por Importância, FORM (*First Order Reliability Method*) com um ponto de linearização e FORM aplicado para sistemas em série. O critério de falha adotado neste trabalho é o critério de falha de resistência de Tsai-Wu aplicado para cada uma das lâminas do laminado. Utiliza-se ainda o critério de *first ply failure* (falha da primeira lâmina), ou seja, a falha do laminado acontece quando uma de suas lâminas não satisfaz o critério de Tsai-Wu.

## **1.1 Objetivos, justificativas e organização do trabalho.**

O objetivo desse trabalho é utilizar ferramentas de inteligência artificial atuais e eficazes (Algoritmos Genéticos (AGs) e Redes Neurais Artificiais (RNAs)) no processo de otimização de estruturas de materiais compósitos laminados, onde a confiabilidade atua como função de custo ou restrição.

A otimização baseada em confiabilidade de materiais compósitos laminados ainda é um assunto relativamente recente e diferentes técnicas analíticas e numéricas têm sido utilizadas para tornar os modelos mais próximos das situações reais. Por outro lado, o alto custo computacional do processo é um problema que ainda necessita do desenvolvimento de ferramentas matemáticas para ser tratado com eficiência.

A utilização de AGs no lugar de métodos clássicos de otimização, baseados em gradientes, justifica-se para o caso de materiais compósitos laminados devido a duas razões. Primeiramente os métodos clássicos podem ser aplicados para tratar estruturas convencionais, cujas variáveis de projeto são contínuas. No entanto, devido a questões de manufatura, algumas das variáveis envolvidas no dimensionamento de materiais compósitos podem assumir apenas valores discretos. Além disso, os métodos matemáticos baseados em gradientes são mais apropriados para busca de soluções ótimas em espaços de resposta suaves e contínuos, o que também não ocorre nos problemas envolvendo compósitos laminados. Os AGs se baseiam nos mecanismos da evolução natural. Sua implementação mostra-se bastante adequada com relação às exigências elencadas acima, porém surgem outros problemas, sobretudo o alto custo computacional do processo.

O tempo de processamento é um dos principais problemas enfrentados quando se trabalha com otimização utilizando AG. Esse problema é ainda mais grave quando a restrição é a confiabilidade, o que implica um aumento significativo do número de análises da estrutura através do programa de elementos finitos. Dessa forma, justifica-se a aplicação de RNAs para simular a resposta (valor da função de estado limite) do programa de elementos finitos e diminuir o alto custo computacional.

Por outro lado, este trabalho pode ser considerado uma seqüência natural das teses e dissertações desenvolvidas no PPGEC / UFRGS (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul). Duarte (2002) desenvolveu um elemento finito isoparamétrico hexaédrico de oito nós, com apenas um ponto de integração (e o correspondente controle do travamento volumétrico e de cisalhamento) aplicado para materiais homogêneos. Andrade (2005) aplicou o mesmo elemento na análise estática e dinâmica de placas e cascas de materiais compósitos laminados. Almeida (2006) utilizou o elemento DKT para otimização de placas e cascas de materiais compósitos laminados. Gomes (2001) e Boésio (2002) aplicaram os Métodos de Monte Carlo e FORM, no primeiro caso em estruturas de concreto armado, e no segundo, na análise da vida útil devido à fadiga de veículos comerciais do tipo “ônibus” trafegando em estradas com irregularidades. No que diz respeito ao uso de redes neurais para

aceleração do processo de otimização, bons resultados foram obtidos por Gomes (2001) e Gomes e Awruch (2004) utilizando Redes Neurais Artificiais do tipo Perceptron e Base Radial.

Esta tese não tem a pretensão de esgotar o tema, mas sim de dar os primeiros passos para a integração de todas estas ferramentas no projeto de estruturas reais de materiais compósitos, bem como levantar importantes questões que podem ser discutidas em trabalhos futuros.

A figura 1.1 apresenta um fluxograma geral do processo de otimização a ser implementado neste trabalho. Acompanhando o fluxograma, os passos para a obtenção da solução ótima podem ser listados da seguinte forma:

**Passo 1** - Geração da população inicial (de forma aleatória) de indivíduos. No caso específico deste trabalho um indivíduo representa uma determinada configuração do laminado.

**Passo 2** – Verificar a variabilidade da população, através de medidas estatísticas tais como média e desvio padrão dos indivíduos. Caso a variabilidade esteja dentro dos limites pré-estabelecidos ir para o passo 6, senão ir para o passo 3 (na primeira iteração o algoritmo passa direto para o passo 3).

**Passo 3** - Calcular o índice de confiabilidade  $\beta$  para cada indivíduo da população. Nesta etapa podem ser escolhidos os métodos de análise de confiabilidade FORM com um ponto de linearização, FORM para sistemas em série, Monte Carlo Direto e Monte Carlo com Amostragem por Importância.

Durante o processo, independentemente do método utilizado, é necessário verificar se a função de estado limite está na zona de segurança ou de falha. Neste trabalho a função de estado limite é representada pelo critério de ruptura de Tsai-Wu, sendo necessário conhecer as tensões atuando nos eixos locais do laminado.

As tensões nos eixos locais podem ser calculadas utilizando funções explícitas, programas de elementos finitos ou uma rede neural treinada. As funções explícitas têm a vantagem de ter um baixo custo computacional, porém limitam-se à análise de estruturas com forma geométrica e carregamentos simples (como placas com cargas distribuídas). O uso de um programa de elementos finitos torna possível a análise de estruturas com qualquer formato e carregamentos genéricos, porém pode gerar um custo computacional muito alto, principalmente quando a análise de confiabilidade é feita através de métodos de simulação (Monte Carlo). O uso de redes neurais treinadas pode unir as características de

---

generalidade dos elementos finitos com o baixo custo computacional das funções explícitas e a aplicação de tal ferramenta é um dos principais objetivos deste trabalho.

**Passo 4** – Depois de calculado o índice de confiabilidade,  $\beta$  é comparado com um índice de confiabilidade requerido  $\beta_{req}$ , estabelecido na entrada de dados do programa. Caso  $\beta \leq \beta_{req}$  aplica-se uma penalidade na função de custo, senão a função de custo é calculada de forma ponderada em relação ao valor obtido para  $\beta$ .

**Passo 5** – Com base na função de custo de cada indivíduo da população, selecionam-se os melhores para gerar a próxima população (através do processo de *crossover*) e volta-se para o passo 2.

**Passo 6** – Fim do processo de otimização.

A seguir apresenta-se a estrutura dos capítulos envolvidos neste trabalho.

O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica dos trabalhos realizados por outros pesquisadores, nas áreas de confiabilidade de materiais compósitos laminados, otimização via algoritmos genéticos e aceleração de análise estrutural usando redes neurais treinadas.

O capítulo 3 descreve brevemente aspectos relativos ao material compósito considerado, bem como o elemento finito proposto para a análise estrutural. São apresentados, também neste capítulo, alguns resultados de análise estrutural obtidos pelo programa de elementos finitos em questão.

O capítulo 4 apresenta os métodos utilizados para o cálculo da confiabilidade da estrutura de compósito laminado, bem como exemplos que comprovam suas eficácias.

O capítulo 5 apresenta o método de otimização baseado em AG bem como exemplos de aplicação em estruturas de materiais compósitos, considerando o índice de confiabilidade como restrição.

O capítulo 6 apresenta os aspectos teóricos das redes neurais utilizadas para a aceleração da análise estrutural, bem como os resultados da aplicação das mesmas em problemas de otimização de compósitos com restrição de confiabilidade.

O capítulo 7 apresenta as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Por fim, o capítulo 8 traz as referências bibliográficas utilizadas.

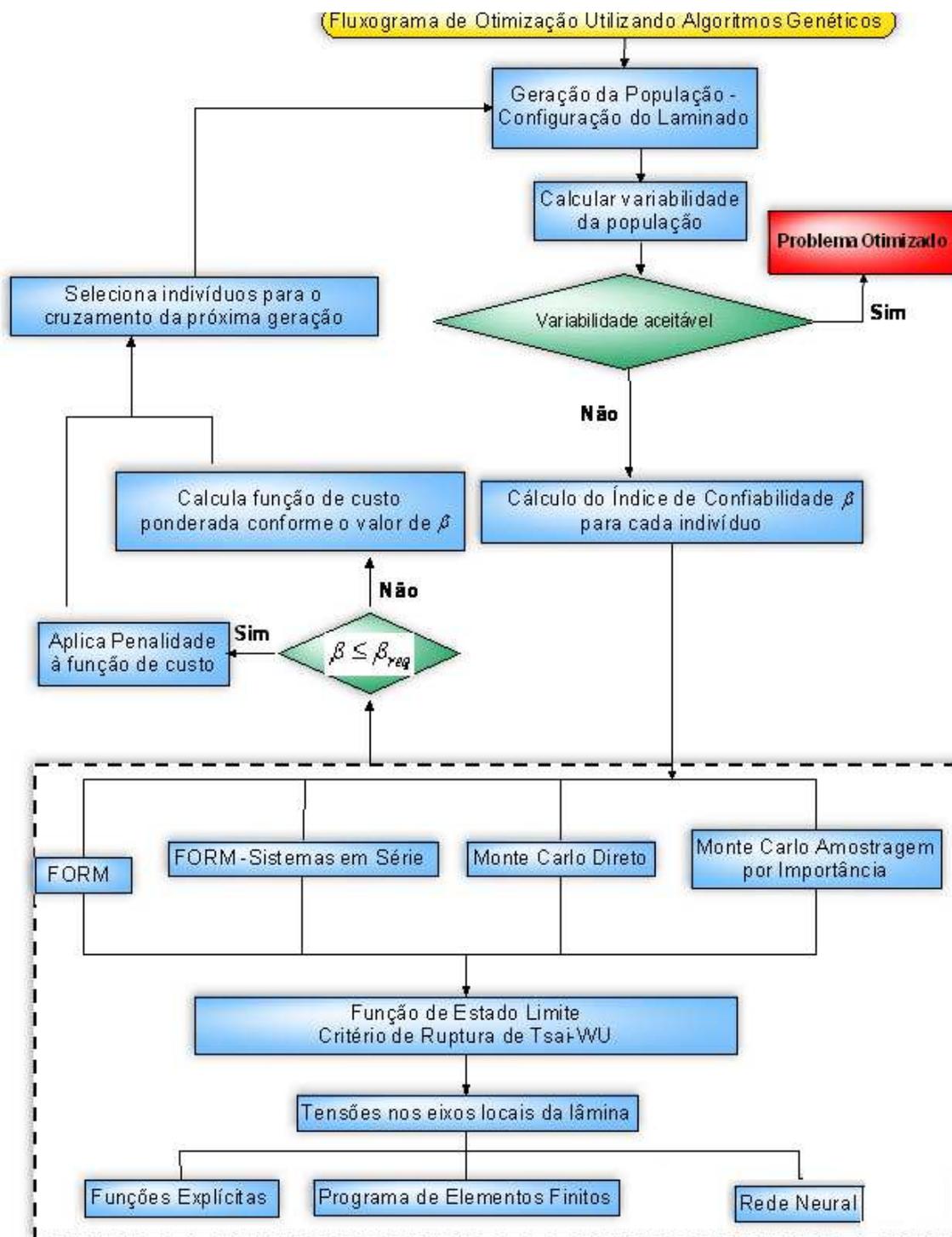


Figura 1.1 - Fluxograma geral do processo de otimização.

---

## CAPÍTULO 2

### 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 Materiais compósitos laminados

A bibliografia sobre a mecânica dos materiais compósitos e a análise de estruturas de materiais laminados é muito extensa, abordando uma variedade enorme de áreas, e isto se deve fundamentalmente às vantagens que este tipo de material oferece nos diversos campos da engenharia, assim como em outras áreas (medicina, confecção de artigos esportivos, etc.). Devido à grande quantidade de artigos em periódicos e eventos, destacam-se aqui apenas alguns importantes livros que tratam dos materiais compósitos, tais como: Jones (1998), Vinson & Sierakowski (1987), Tsai & Han (1980), Gürdal, Haftka & Hajela (1999), Middleton (1990), Schwartz (1984) e Daniel & Ishai (1994).

#### 2.2 Confiabilidade de materiais compósitos laminados

A teoria e os métodos para a análise da confiabilidade estrutural se desenvolveram extensamente nas últimas três décadas. Estes avanços teóricos, vinculados a uma quantificação mais precisa das incertezas associadas às cargas e às resistências das estruturas, têm estimulado o interesse no tratamento probabilístico das mesmas. Ainda que grandes avanços do ponto de vista computacional tenham ocorrido, permanecem alguns obstáculos em implementações práticas. Uma enorme quantidade de trabalhos tem sido publicada em periódicos durante as últimas três décadas. Dentre os livros texto sobre o tema pode-se citar: Ang & Tang (1975), Elishakoff (1984), Ghanem & Spanos (1991), Melchers (1990), Thoft – Christensen & Murotsu (1986), Helder & Mahadevan (2000), Sundararajan (1995), Kleiber & Hien (1992), entre outros.

Miki *et al.* (1990) utilizaram o método AFOSM (*Advanced First Order Second Moment*) para estimar a confiabilidade de lâminas de materiais compósitos, sendo a função de estado limite o critério de ruptura de Tsai-Wu. Neste trabalho também foram determinados os ângulos de orientação das fibras que conduziam à maior confiabilidade, para diversos estados de tensão plana. Ficou demonstrada também a superioridade do

---

método AFOSM sobre o FOSM (*First Order Second Moment*), o qual tende a superestimar o índice de confiabilidade  $\beta$  e é dependente da função de estado limite utilizada.

Murotsu *et al.* (1994) obtiveram o projeto ótimo de estruturas de materiais compósitos laminados, sob condições probabilísticas de carregamento e propriedades do material. Com a finalidade de estimar a probabilidade de falha do sistema, formado por todas as lâminas do laminado, Murotsu utilizou o método *mutiple-checkpoint* para tratar o problema da existência de múltiplas funções de estado limite. O problema de otimização foi definido para calcular o número de lâminas, orientação das fibras e relação entre as espessuras de cada lâmina, tendo como restrição o índice de confiabilidade. A função de estado limite utilizada em cada lâmina foi o critério de ruptura de Tsai-Wu.

Yushanov & Bogdanovich (1998) desenvolveram um processo analítico, baseado na teoria dos processos estocásticos, para o cálculo da confiabilidade de estruturas de materiais compósitos laminados. O cálculo da probabilidade de falha foi feito utilizando a teoria das raras passagens do campo vetorial aleatório de deformações além da zona de deformações permitidas. Os resultados foram comparados com o método de Monte Carlo e ficou demonstrada sua eficácia e considerável ganho em termos de esforço computacional. Entretanto, as expressões desenvolvidas só podem ser aplicadas para casos de carregamentos atuando no plano do laminado.

Kam & Chang (1997) calcularam índices de confiabilidade para laminados de materiais compósitos utilizando, como funções de estado limite, os critérios de ruptura de Tsai-Wu, via FORM, e da Máxima Tensão, via integração direta. Os resultados foram comparados com experimentos que obtiveram a carga de ruptura para a condição de *first – ply failure*, ou seja, quando a primeira falha em qualquer uma das camadas do laminado é considerada a falha de toda a estrutura.

Lin (2000b) utilizou o método de Monte Carlo na obtenção do índice de confiabilidade de placas de materiais compósitos sujeitas a flambagem. A análise estrutural foi feita utilizando elementos finitos estocásticos. Os resultados obtidos foram comparados com experimentos.

Lin (2000a) obteve o índice de confiabilidade de placas de materiais compósitos carregadas transversalmente com várias configurações de camadas e ângulos de orientação, utilizando várias funções de estado limite tais como: Tsai-Wu, Máxima Tensão, Hoffman e Tsai - Hill. Os métodos utilizados para o cálculo da confiabilidade

foram Monte Carlo, método  $\beta$  e FOSM. Os resultados obtidos foram comparados com experimentos.

Frangopol & Recek (2003) utilizaram o método de Monte Carlo para calcular a confiabilidade de placas sujeitas a um estado plano de tensões, sendo o critério de ruptura considerado o de Tsai-Wu. Neste trabalho são apresentadas as diferenças de comportamento, no que diz respeito ao índice de confiabilidade, quando são acrescentadas lâminas ao laminado da placa de compósito.

Onkar *et al.* (2005) calcularam o índice de confiabilidade para laminados de materiais compósitos sujeitos a cargas e propriedades mecânicas randômicas. Os critérios de falha utilizados foram os de Tsai-Wu e Hoffman. O índice de confiabilidade foi calculado de duas formas: 1) soluções analíticas para a carga de falha foram obtidas usando a teoria de placas de Kirchhoff-Love; 2) soluções para a carga de falha através de elementos finitos estocásticos baseados na teoria *layer-wise* para placas.

### **2.3 Otimização de materiais compósitos laminados com restrição de confiabilidade**

O processo de otimização do projeto estrutural, incluindo diversos tipos de critérios para atingir este objetivo, é uma tarefa particularmente complicada. Existem basicamente duas alternativas gerais para os problemas de otimização. A primeira são os métodos baseados no cálculo de gradientes das funções envolvidas (geralmente referenciados como programação matemática), tendo o cálculo da sensibilidade o maior custo computacional; a outra alternativa consiste na aplicação de métodos de otimização baseados na análise combinatória e numa procura probabilística do extremo da função objetivo, comumente chamadas de estratégias estocásticas. A segunda alternativa apresenta algumas vantagens sobre a primeira, no sentido que não precisa de informações sobre gradientes, evitando o custoso processo da análise de sensibilidade. Os métodos de otimização baseados na análise combinatória resultam mais robustos e apresentam um comportamento global superior em relação aos métodos de programação matemática. Entretanto, sua convergência para o extremo global é mais lenta. Existem numerosos periódicos dedicados ao tema de otimização, e em particular a otimização de projetos estruturais. Por esta razão serão aqui mencionados apenas alguns livros texto que abordam este tema. Entre os textos que abordam o problema de otimização estrutural usando métodos de programação matemática, podem-se destacar os de Vanderplaats (1984), Arora (1989), Bendsoe (1995), Banichuk (1990) e Haftka &

Gürdal (1992). Algoritmos de procura direta probabilística com estratégias evolutivas podem ser encontrados nos textos de Goldberg (1989), Davis (1991) e Holland (1975), embora nenhum deles tenha como objetivo aplicações à Mecânica Estrutural.

No Centro de Mecânica Aplicada Computacional (CEMACOM), do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC), têm sido realizadas algumas dissertações de mestrado e teses de doutorado envolvendo temas relativos a Materiais Compósitos, tais como as de Marques S.P.C. (1994), Marques D.C.S.C. (1994), Oliveira (2001) e Andrade (2005), a confiabilidade estrutural nas teses de Gomes (2001) e Boésio (2002) e a otimização estrutural nas teses de Muñoz-Rojas (2003), Boésio (2002) e na dissertação de Almeida (2006).

A seguir serão citados apenas alguns trabalhos que tratam da otimização estrutural com restrições de confiabilidade, uma vez que a bibliografia nesta área é extensa.

Thanedar & Kodiyalam (1992) otimizaram problemas estruturais simples, nos quais o índice de confiabilidade, calculado através dos métodos clássicos de Monte Carlo e FORM, foi considerado uma restrição do sistema. O problema de otimização foi resolvido utilizando o método NLP (*nonlinear programming problem*).

Chen & Duan (1994) resolveram o problema da otimização de treliças planas e espaciais com restrição de confiabilidade. Neste trabalho as cargas atuantes nas treliças foram consideradas variáveis aleatórias correlacionadas. O problema foi resolvido utilizando um método misto e o índice de confiabilidade foi obtido através do método FOSM.

Reddy *et al.* (1994) desenvolveram um método para o cálculo do índice de confiabilidade, chamado de SIA (*Safety Index Approach*), o qual, comparado com métodos clássicos, diminui o número de chamadas da função de estado limite e dos gradientes, diminuindo o custo computacional, que é um dos empecilhos no campo da otimização estrutural com restrição de confiabilidade.

Enevoldsen & Sorensen (1994) apresentaram soluções de otimização com restrição de confiabilidade para problemas estruturais mais complexos, incluindo sistemas em série e também a inclusão de elementos finitos para a análise da estrutura.

Wang & Grandhi (1995) desenvolveram um método para a estimativa do índice de confiabilidade expandindo as funções de estado limite em termos de variáveis de projeto intermediárias. Foram analisadas estruturas de treliças, pórticos e placas, com a finalidade de demonstrar a diminuição do custo computacional.

Stocki *et al.* (2001) desenvolveram dois métodos de otimização discreta chamados: método de transformação e método de numeração controlada. Foi demonstrada, através da análise de treliças, a diminuição no custo computacional do processo de otimização com restrição de confiabilidade em comparação com métodos clássicos.

Lee *et al.* (2002) compararam a eficiência entre os métodos MPFP (*most probable failure point*) e MPTP (*minimum performance target point*), que estimam o valor do índice de confiabilidade da estrutura. Utilizando exemplos de análise de estruturas de treliças e vigas, mostraram que o método MPTP diminui os problemas de convergência na procura do ponto mais provável de falha, presente no MPFP, reduzindo dessa forma o esforço computacional.

Dimou & Koumousis (2003) utilizaram um algoritmo genético com tamanho de população calibrado, no qual a co-evolução das diferentes populações utilizadas é controlada na fase de reprodução, com base em dados estatísticos de cada população. O método foi aplicado para a otimização com restrição de confiabilidade de treliças e revelou-se robusto e mais rápido do que os algoritmos genéticos clássicos.

Cheng *et al.* (2006) aplicaram a técnica da programação seqüencial aproximada (SAP) para os problemas de confiabilidade estrutural com restrições de confiabilidade. Foi utilizada uma técnica para aproximar o índice de confiabilidade, baseada em uma expansão linear em série de Taylor, com o objetivo de diminuir o custo computacional. Vários exemplos são apresentados para comprovar a eficiência do método proposto e seu alto desempenho computacional.

Em seguida citaremos trabalhos na área de otimização, com restrição de confiabilidade, aplicados especificamente para o caso de materiais compósitos.

Wetherhold (1981) e Maekawa & Fjuii (1982) publicaram os primeiros trabalhos analisando a confiabilidade de compósitos laminados usando um critério de falha macroscópico e dados estatísticos sobre a variação das resistências ao longo das direções principais do material.

Conceição *et al.* (1996) realizaram a otimização baseada em confiabilidade de materiais compósitos utilizando as teorias de *first ply failure* e *last ply failure* (na qual um modelo de degradação foi aplicado às propriedades mecânicas e à variação das cargas devido à ruptura da matriz do compósito). A análise estrutural foi realizada através do método dos elementos finitos, utilizando o elemento de casca isoparamétrico degenerado.

Kogiso *et al.* (1997) trataram do problema da otimização do ângulo de orientação das fibras de placas simétricas de laminados compósitos sujeitas a flambagem com restrição de confiabilidade. A confiabilidade foi calculada modelando a falha por flambagem como um sistema em série. Através de exemplos numéricos ficou demonstrada a diferença entre a otimização determinística e a probabilística.

Mahadevan & Liu (1998) propuseram um procedimento para a otimização de compósitos laminados com restrições de confiabilidade. O problema foi formulado para considerar a minimização do peso do laminado (função objetivo). O método FORM (*First Order Reliability Method*) foi utilizado para calcular a confiabilidade de cada lâmina e do laminado como um todo, utilizando modelos de sistemas em série. O critério de Tsai-Wu foi utilizado como função de estado limite para cada lâmina do material. A otimização foi realizada através de um algoritmo de programação seqüencial quadrática (SQP).

Kogiso *et al.* (1998) analisaram o efeito da correlação entre as variáveis aleatórias no problema de otimização com confiabilidade de placas de compósitos sujeitas a flambagem. Através de exemplos numéricos ficou demonstrado que a correlação afeta de maneira considerável o projeto de tais estruturas sujeitas a carga de flambagem e que a não consideração da correlação conduz a soluções piores do que as obtidas através de condições determinísticas.

Todoroki & Sasai (1999) utilizaram algoritmos genéticos com *recessive – gene-like – repair* como ferramenta para a otimização das seqüências de lâminas de cilindros sujeitos a falha por flambagem. Os resultados foram comparados com os obtidos através do método de penalidade (*penalty method*) e ficou demonstrada a superioridade dos algoritmos genéticos inclusive no que diz respeito a custo computacional.

Richard & Perreux (2000) estudaram o problema da otimização com restrição de confiabilidade de materiais compósitos, usando um critério de falha baseado em considerações termodinâmicas e levando em consideração incertezas estatísticas no cálculo da probabilidade de falha de estrutura.

Conceição (2001) utilizou algoritmos genéticos para otimizar estruturas de materiais compósitos com restrições de confiabilidade e comportamento não-linear geométrico.

Conceição & Hoffbauer (2009) utilizaram um algoritmo alternativo RDO (*Robust Design Optimization*) em substituição aos clássicos algoritmos RBDO (*Reliability Based Design Optimization*) e aplicaram na solução de um problema de uma

---

casca cilíndrica de material compósito formada por várias lâminas. O objetivo era determinar, dado um valor de confiabilidade, a configuração ótima dos ângulos de orientação de cada lâmina.

## 2.4 Redes neurais artificiais em problemas de engenharia

O cérebro humano é a mais sofisticada rede neural biológica e é frequentemente muito mais eficiente, adaptável e tolerante que os computadores convencionais nos campos do reconhecimento, controle e aprendizado. Embora a velocidade de processamento de neurônios biológicos seja muito mais lenta que a dos computadores digitais, o seu poder de processamento paralelo massivo supera a sua deficiência de velocidade (Beale & Jackson, 1990).

O desenvolvimento de redes neurais artificiais (RNA) foi inspirado na Neurociência, ou seja, a ciência que estuda o cérebro, os neurônios biológicos e as sinapses. As RNA pretendem imitar o comportamento biológico do aprendizado e dos processos de tomada de decisão, sem entretanto tentar ser realista do ponto de vista biológico. Redes Neurais Artificiais representam modelos simplificados do cérebro humano e podem ser usadas para resolver problemas nos quais métodos convencionais aplicados a computadores encontram dificuldades.

Houve um crescente interesse em RNA durante anos recentes. A primeira onda de interesse emergiu depois da introdução de neurônios simplificados por McCulloch e Pitts (1943). Estes neurônios foram apresentados como modelos de neurônios biológicos e também como componentes conceituais para circuitos que poderiam executar certas tarefas computacionais. Depois da publicação do livro *Perceptrons*, em 1969, escrito por Minsky e Papert (1969), no qual foi descrita a ineficiência dos perceptrons em alguns problemas, foram poucos os pesquisadores que continuaram com trabalhos nesse campo. O interesse voltou após a descoberta das redes de retropropagação (*back-propagation*) e o desenvolvimento de novos algoritmos de treinamento e de implementações físicas (*hardwares*) para aplicações com redes neurais.

RNA podem se caracterizadas como modelos computacionais baseados no processamento distribuído em paralelo com propriedades particulares como a habilidade de aprender, generalizar, classificar e de organizar dados. Há vários modelos de RNA desenvolvidos para diversas tarefas computacionais específicas. Em princípio, eles

podem ser divididos em dois grupos, modelos de redes de treinamento supervisionado e modelos de rede de treinamento não supervisionado. Eles podem ter uma arquitetura de alimentação à frente (*feedforward*), recorrentes ou realimentadas (*feedback*), ou uma combinação de ambas. Uma rede de arquitetura de alimentação à frente tem uma estrutura de camadas onde as unidades em cada camada recebem as entradas da(s) camada(s) prévia(s) e envia suas saídas para a(s) camada(s) subsequente(s). As redes com arquitetura de realimentação têm laços de realimentação entre unidades de camadas não necessariamente subsequentes. Em redes de realimentação a direção do fluxo de dados viaja através da cadeia não necessariamente em um único sentido. Isto significa que a saída de uma unidade pode ser a entrada de outras unidades da cadeia. O treinamento supervisionado conta com a disponibilidade da resposta conhecida *a priori* (a saída desejada da rede), para cada entrada do conjunto de treinamento. Portanto, a rede é treinada utilizando dados de entrada e os correspondentes dados de saída fornecidos por um supervisor externo. As redes neurais de retro-propagação (*back-propagation*) e as redes neurais de propagação em sentido contrário (*counterpropagation*) são exemplo de redes com treinamento supervisionado e que têm arquiteturas de alimentação à frente. De forma diferente, no treinamento não supervisionado, a rede neural forma a sua própria classificação dos dados de treinamento. Assim, uma unidade de saída é treinada para responder padrões de estímulos contidos nos dados de entrada para os quais a rede desenvolveu sua própria representação. Redes não supervisionadas frequentemente têm uma arquitetura recorrente e são exemplos desse tipo de redes as Redes de Kohonen (Kohonen, 1984), as redes da Teoria de Ressonância Adaptável (ART – *Adaptive Resonant Theory*) Grossberg (1987), as redes de Hopfield (1982) e as Redes de Recozimento de Campo Médio (MFA – *Mean Field Annealing*) Peterson & Soderberg (1987).

#### **2.4.1 Redes neurais na mecânica estrutural.**

A aplicação de RNA na Mecânica Estrutural ganhou interesse nos anos recentes. Os modelos de RNA adotados para Mecânica Estrutural podem ter diferentes arquiteturas ou podem possuir diferentes padrões de conectividade. RNA têm sido usadas como ferramenta computacional em várias áreas da Mecânica Estrutural, entre elas, identificação, avaliação, otimização, análise e projeto. A seguir serão descritas algumas aplicações das RNA na mecânica estrutural.

Hajela & Berke (1991 e 1992) exploraram a aplicação de redes de retro-propagação no dimensionamento e na análise estrutural. Foi dada ênfase ao uso das redes neurais para representar as relações de força-deslocamento usadas na determinação da resposta de deslocamentos ou tensões em análises estruturais estáticas. A análise foi usada no dimensionamento do peso mínimo de sistemas estruturais com restrições de projeto especificadas.

Mukherjee & Deshpande (1995a e 1995b) estudaram a aplicação de redes neurais no projeto preliminar de estruturas. A aplicação de RNA no projeto de uma viga de único vão de concreto armado foi explorada. As entradas da rede consistiam no vão da viga, tipo de aço escolhido, tipo de concreto e carga aplicada. As saídas eram a área de aço tracionado, largura e profundidade da viga, custo da viga por metro e sua capacidade portante a flexão.

VanLuchene & Sun (1990) aplicaram uma rede com alimentação à frente (*feedforward*) na simulação da análise estrutural de uma placa retangular simplesmente apoiada. O objetivo era prever a localização e a magnitude do momento máximo na placa quando sujeita a uma carga concentrada. As entradas da rede incluíam quatro quantidades: as dimensões da placa nas direções x-y e as coordenadas x-y dos pontos onde a carga era aplicada. As saídas consistiam em seis quantidades: a localização e o valor do máximo momento à flexão em ambas as direções.

Shieh (1994b) usou uma combinação de RNA com um modelo computacional baseado no Método dos Mínimos Quadrados em um procedimento de reanálise estrutural. O modelo substituiu completamente o módulo de reanálise estrutural via elementos finitos e os cálculos foram feitos num ambiente de Processamento Massivamente Paralelo (PMP). O modelo foi testado para a obtenção de peso mínimo de estruturas de treliças. O mesmo autor fez outro estudo (Shieh, 1994a) onde substituiu o método dos gradientes conjugados pré-condicionado baseado na solução de sistemas de equações lineares por uma rede neural treinada. O modelo foi formulado em uma máquina em ambiente de Processamento Massivamente Paralelo e obteve relativo sucesso.

Conforme mencionado anteriormente, o uso de algoritmos genéticos para otimização, em conjunto com métodos de obtenção do índice de confiabilidade e elementos finitos para análise estrutural conduz a um alto custo computacional. Neste trabalho, sugere-se o uso de redes neurais treinadas com a finalidade de substituir a

análise via elementos finitos, diminuindo dessa forma, o custo computacional total. Na literatura existem alguns autores que já utilizaram esta técnica em vários trabalhos.

Lou & Perez (1995) usaram o modelo de rede neural de Hopfield em conjunto com o sistema de memória associativa bidirecional (BAM) como alternativa aos métodos clássicos de análise estrutural.

Jenkins (1999) desenvolveu uma rede neural treinada, com retro-propagação de erro, para realizar a re-análise de estruturas. Mudanças de projeto na geometria, propriedades do material, topologia, cargas aplicadas e apoios conduziram a bons resultados sem a necessidade da análise total da estrutura, o que levou a um ganho significativo em termos de custo computacional.

Reich & Barai (2000) desenvolveram uma metodologia para modelar redes neurais com a finalidade de representar relações funcionais de dados empíricos de engenharia. Foram utilizadas redes multicamada do tipo perceptron.

Papadrakakis & Lagaros (2004) melhoraram a performance de redes neurais usando uma função de ativação adaptativa com parâmetros ajustados durante o processo de treinamento. A rede resultante foi aplicada em problemas de otimização estrutural.

Elhew *et al.* (2006) desenvolveram redes neurais para substituir a análise estrutural via elementos finitos, com o objetivo de acelerar a obtenção da confiabilidade da estrutura. Foram usados métodos clássicos para a obtenção do índice de confiabilidade (FORM e Monte Carlo) e apresentados exemplos que comprovaram a eficiência da rede, tanto em precisão quanto em tempo de processamento.

Haj-Ali & Kim (2007) desenvolveram redes neurais para simular um modelo constitutivo não linear de compósito polimérico reforçado por fibras (FPR). A rede foi treinada utilizando dados experimentais obtidos de ensaios de tração e compressão e cisalhamento puro.

Chau (2007) e Cheng & Li (2008) aplicaram redes neurais para simular a função de estado limite, evitando o custoso processo de análise via elementos finitos, em problemas de otimização com restrição de confiabilidade. O problema de otimização foi tratado com o uso de algoritmos genéticos e ficou demonstrado, através de exemplos estruturais e não estruturais, o ganho significativo de desempenho computacional quando estas duas ferramentas são conjugadas para tratar esse tipo de problema.

Gudur & Dixit (2008) desenvolveram uma rede neural de base radial para substituir a análise via elementos finitos para a análise de problemas de *cold flat*

*rolling*, diminuindo sensivelmente o tempo de processamento e possibilitando o controle em tempo real do processo.

No Centro de Mecânica Aplicada Computacional (CEMACOM), do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC), a tese de Gomes (2001) aplicou redes neurais multicamada do tipo perceptron e redes de base radial para acelerar o processo do cálculo do índice de confiabilidade de estruturas de concreto armado.

---

## CAPÍTULO 3

### 3. MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS E ELEMENTO FINITO UTILIZADO

#### 3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar um breve resumo sobre o modelo de material compósito utilizado neste trabalho, bem como o elemento finito que foi escolhido para a análise estrutural. Primeiramente são apresentadas definições gerais, a nomenclatura utilizada, bem como a matriz constitutiva do material compósito laminado. Posteriormente, são discutidos os critérios de falha mais comuns e o critério de falha adotado neste trabalho. No final são apresentadas, de forma resumida, as equações do elemento DKT e exemplos mostrando a eficiência do mesmo na análise estrutural.

Materiais compósitos são confeccionados a partir de dois ou mais materiais, comumente referidos como constituintes. Dependendo da forma como se arranjam os constituintes, o compósito resultante pode ter características combinadas ou substancialmente diferentes destes. Algumas vezes, as propriedades do compósito podem até serem superiores a de seus constituintes individualmente.

A eficiência dos materiais compostos e suas inúmeras vantagens como, por exemplo, suas altas razões rigidez/peso e resistência/peso, excelente resistência à corrosão, baixa expansão térmica, bom desempenho em fadiga e tolerância a dano, facilidade de transporte e manuseio, baixo consumo de energia na fabricação do material e da estrutura em si, têm difundido seu uso e daí a necessidade de analisar-se de forma eficiente seu complexo comportamento.

A classificação mais tradicional (Jones, 1988) para os materiais compósitos inclui quatro tipos: os compósitos particulados, os compósitos floculados, os compósitos reforçados por fibras e os compósitos laminados. A última forma de compósito, os laminados, é formada pela união de lâminas finas - compostas por um material denominado matriz, geralmente menos resistente - reforçadas por fibras, mais resistentes. Este tipo de compósito é o mais usado em estruturas de alto desempenho,

sendo o material utilizado nas análises que seguem, por isso será abordado diretamente, deixando os demais de lado.

### 3.2 Compósitos laminados

A evolução tecnológica de materiais estruturais tem sido governada pela pesquisa por um material que tenha uma alta relação resistência-peso, um custo de fabricação baixo e uma melhor durabilidade. Estruturas mais elaboradas, tais como aquelas usadas em espaçonaves, aeronaves de alta velocidade e embarcações, necessitam destas características. Recentemente, diferentes tipos de materiais compósitos têm sido desenvolvidos buscando atingir a excelência quanto à rigidez e resistência, tolerância ao dano, resposta à fadiga e resistência a corrosão. Compósitos laminados têm demanda crescente, já que podem suprir quase todos estes requerimentos particulares.

Laminado é um tipo de material compósito formado a partir da união de várias lâminas, que por sua vez, originam-se da imersão de fibras de alta resistência numa matriz, geralmente menos resistente. Estes materiais estão encontrando um número grande de aplicações no projeto de estruturas, especialmente aquelas que exigem pouco peso e requerimentos rigorosos quanto à rigidez e resistência. Pode-se comparar o Módulo Elástico do Grafite/Epóxi, que é aproximadamente  $E = 70$  GPa, com o Módulo do Alumínio, que é de  $E = 73$  GPa. Entretanto, o peso específico do Grafite/Epóxi é aproximadamente de  $\rho = 15$  KN/m<sup>3</sup> e o do Alumínio de  $\rho = 26$  K N/m<sup>3</sup>, chegando numa relação entre  $E/\rho$  para o compósito de  $4,7 \times 10^6$  e para o Alumínio de  $2,8 \times 10^6$ , mostrando que o compósito tem esta relação 1,7 vezes maior; ou seja, quando se avalia resistência acoplada ao peso, os laminados ficam ainda mais atraentes (Jones, 1998).

As propriedades das lâminas dos materiais laminados (resistência, rigidez, condutibilidade térmica) dependem da forma dos reforços nos mesmos. A inclinação das fibras num laminado introduz uma dependência direcional para a maioria das propriedades, e materiais que possuem esta dependência são chamados de anisotrópicos. Um caso especial de anisotropia é a existência de dois planos de simetria mutuamente perpendiculares, sendo que tais materiais são chamados de ortotrópicos, e suas propriedades são definidas no plano da lâmina em duas direções – ao longo das fibras e na direção perpendicular à orientação das mesmas.

### 3.2.1 Lâmina ortotrópica

Um exemplo típico de material ortotrópico são os compósitos reforçados por fibras, nos quais a porção que caracteriza a matriz do material e que engloba as fibras é geralmente isotrópica, o mesmo acontecendo com as fibras, que têm muito mais rigidez do que a matriz. Entretanto, quando ambas são combinadas, as propriedades do compósito passam a ser anisotrópicas.

Na figura 3.1 é mostrada uma lâmina isoladamente (reforçada por fibras), que pode ser carregada ao longo das fibras ( $X_1$ ) ou na direção transversal às fibras ( $X_2$ ). Se o mesmo carregamento aplicado na direção  $X_1$  primeiramente, for depois aplicado na direção  $X_2$ , observa-se que a deformação ao longo das fibras é menor do que a deformação na direção perpendicular às fibras. As propriedades de rigidez de um laminado na direção da fibra ( $E_f$ ,  $G_f$ ,  $V_f$ ) são muito mais próximas da rigidez da fibra, já a rigidez na direção perpendicular às fibras ( $E_m$ ,  $G_m$ ,  $V_m$ ) é governada pela rigidez da matriz, sendo  $E$ ,  $G$  e  $V$  o módulo de elasticidade longitudinal, módulo de elasticidade ao cisalhamento e a fração de volume, respectivamente.

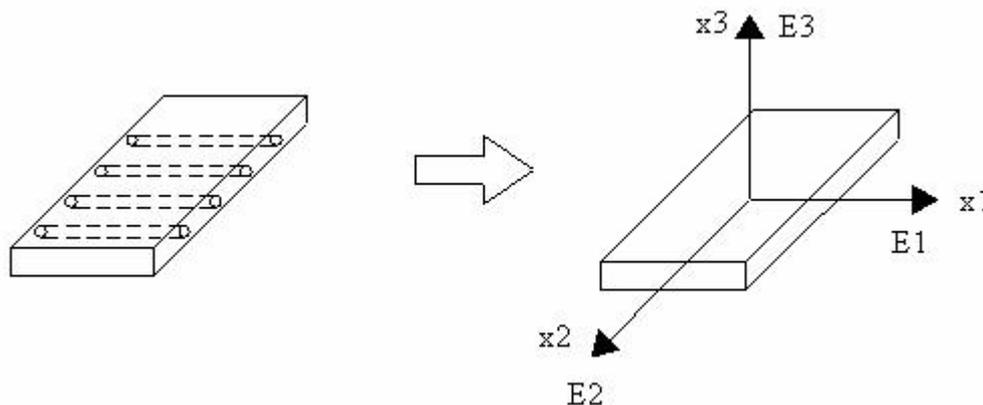


Figura 3.1 – Propriedades elásticas de uma lâmina de compósito.

Uma das maneiras para estimar as propriedades de um material compósito é através da soma das propriedades de seus constituintes ponderadas por seus respectivos volumes. Este método é comumente chamado de Regra das Misturas (*Rule of Mixtures*), e emprega a fração de volume dos constituintes para estimar as propriedades do compósito. Por exemplo, um laminado reforçado com fibras que tem uma fração de

volume de fibras ( $V_f$ ) e uma fração de volume da matriz ( $V_m$ ), deve satisfazer a seguinte expressão, admitindo-se que não haja vazios (Jones, 1998):

$$V_f + V_m = 1. \quad (3.1)$$

Baseado na regra das misturas, a massa específica  $\rho$  é estimada a partir das propriedades dos constituintes,  $\rho_f$  e  $\rho_m$  (Jones, 1998):

$$\rho = \rho_f V_f + \rho_m V_m = \rho_f V_f + \rho_m (1 - V_f) = \rho_m + V_f (\rho_f - \rho_m). \quad (3.2)$$

O Módulo de Elasticidade longitudinal  $E_1$  do compósito pode ser calculado também através dos módulos de seus constituintes  $E_f$  e  $E_m$ , usando a mesma regra:

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m = E_m + V_f (E_f - E_m). \quad (3.3)$$

Como se pode observar, para as propriedades longitudinais (ao longo das fibras), este procedimento é equivalente ao de duas molas conectadas em paralelo, sendo que a deformação total ( $\delta$ ) do compósito é igual tanto para as fibras quanto para a matriz.

$$\delta = \delta_f = \delta_m. \quad (3.4)$$

Já para as propriedades perpendiculares à direção das fibras, o cálculo requer um modelo mais sofisticado. Entretanto, boas estimativas para o Módulo de Elasticidade Transversal  $E_2$  são obtidas pela modelagem das fibras e da matriz como duas molas conectadas em série (Jones, 1998):

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \Rightarrow E_2 = \frac{E_m E_f}{V_f E_m + V_m E_f}. \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Seqüência de lâminas

Anteriormente foi discutido o comportamento de cada lâmina separadamente, mas o objetivo principal do estudo é a análise das lâminas unidas (*stacking sequence*). A orientação das fibras na seqüência de lâminas é medida em relação ao eixo de referência do laminado. Quando a orientação segue o sentido horário é considerada positiva. Uma listagem da seqüência de orientações padrão para um laminado começa da lâmina superior para a lâmina inferior. Tendo um laminado com  $n$  lâminas, cada uma feita do mesmo material compósito e com a mesma espessura  $t$ , começando com a lâmina do topo com a orientação  $\theta_1$ , o laminado é representado por:

$$[\theta_1 / \theta_2 / \dots / \theta_n]. \quad (3.6)$$

A espessura total do laminado é:

$$h = n \cdot t. \quad (3.7)$$

Quando a orientação de uma lâmina coincide com a dos eixos de referência do laminado,  $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 90^\circ$ , estas lâminas são chamadas de lâminas orientadas segundo os eixos do laminado (*on-axis layer*).

Quando várias lâminas com a mesma orientação existem em um laminado, é comum que este grupo seja representado pelo seu ângulo particular, juntamente com o número de repetições subscrito a ele. Por exemplo, o laminado  $[0_2, 45_4, -45_2]$  tem no topo duas lâminas orientadas ao longo do seu eixo, seguidas por quatro orientadas a  $45^\circ$  (horário) e mais duas com orientação de  $-45^\circ$  (anti-horário). Quando se tem um grupo de lâminas repetidas, o número de repetições é subscrito a este grupo colocado entre parênteses. Para o laminado  $[0_2 / (0_2 / 45_2 / 90)_3 / 0_2]$ , têm-se inserido entre as duas lâminas do topo e as duas da base ( com inclinação  $0^\circ$ ), o grupo  $0_2 / 45_2 / 90$  repetido três vezes.

Um laminado é dito simétrico se a orientação das fibras nas lâminas da metade inferior é uma imagem especular em relação às lâminas da metade superior, por exemplo,  $[-45/30/0/45/45/0/30/-45]_T$  (o sub-índice *T* foi usado para designar que foi escrita toda a seqüência de lâminas do laminado), e como este laminado é simétrico, pode-se representar só a parte superior com  $[-45/30/0/45]_S$ .

Laminados que têm orientações alternando com  $0^\circ$  e  $90^\circ$  são chamados de laminados com fibras em cruz segundo os eixos (*cross-ply*). Por exemplo,  $[90_2/0]_S$  é um *cross-ply*, embora suas primeiras duas lâminas não alternem, sendo da mesma orientação ( $90^\circ$ ). Um outro caso especial é quando se tem todas as lâminas do laminado com o mesmo ângulo, somente mudando o sinal ( $\theta = \pm\alpha$ ), sendo chamado de laminado com fibras em ângulo (*angle-ply*). Por exemplo, um laminado simétrico com *angle-ply*  $30^\circ$ , pode ser representado por  $[30/-30/-30/30]_S$  ou  $[\pm 30_2]_S$ .

A Tabela 3.1 mostra as propriedades mecânicas de compósitos laminados, normalmente utilizados em estruturas, tendo também a fração do volume que é ocupado por fibras ( $V_f$ ).

Tabela 3.1 – Propriedades mecânicas de lâminas de compósitos laminados (Jones, 1998).

Material	Constituintes	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$V_f$
T300/5208	Grafite/Epóxi	181	10,30	7,17	0,28	0,70
AS4/3501	Grafite/Epóxi	138	8,96	7,10	0,30	0,66
B(4)/5505	Boro/Epóxi	204	18,50	5,59	0,23	0,50
Kevlar49/Ep	Aramida/Epóxi	76	5,50	2,30	0,34	0,60
Scotchply1002	Vidro/Epóxi	38,6	8,27	4,14	0,26	0,45

### 3.2.3 Relações de tensão-deformação

Para uma lâmina ortotrópica, as relações de tensão-deformação ( $\sigma = \bar{C} \varepsilon$ ) nas direções principais do material são dadas pela seguinte equação matricial com nove constantes independentes:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

As expressões para as constantes  $C_{ij}$  em termos das constantes ortotrópicas,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{31}$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{31}$ ,  $\nu_{23}$  e  $\nu_{32}$ , são as seguintes (Jones, 1998):

$$C_{11} = \frac{E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}, C_{12} = \frac{E_1(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})}{\Delta}, C_{13} = \frac{E_1(\nu_{31} + \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}; \quad (3.9-3.11)$$

$$C_{21} = \frac{E_2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})}{\Delta}, C_{22} = \frac{E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})}{\Delta}, C_{23} = \frac{E_2(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})}{\Delta}; \quad (3.12-3.14)$$

$$C_{31} = \frac{E_3(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})}{\Delta}, C_{32} = \frac{E_3(\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21})}{\Delta}, C_{33} = \frac{E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\Delta}; \quad (3.15-3.17)$$

onde

$$\Delta = I - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32} \quad (3.18)$$

e

$$C_{44} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{13}, \quad C_{66} = G_{12}. \quad (3.19-3.21)$$

Pode-se observar que existem três módulos de elasticidade longitudinais, três módulos de cisalhamento e seis coeficientes de Poisson, dando um total de doze constantes. Entretanto, somente nove são independentes. Três relações adicionais são dadas abaixo, mostrando a dependência entre os coeficientes de Poisson:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}. \quad (3.22-3.24)$$

Como foi comentado anteriormente, estas relações são válidas para as direções principais da lâmina em questão, sendo que para ter estas relações na direção dos eixos do laminado deve-se fazer uma rotação da matriz  $\bar{C}$  (que é um tensor de quarta ordem), através da seguinte equação:

$$C' = T' \bar{C} T, \quad (3.25)$$

onde

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 & -cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2cs & 2cs & 0 & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

sendo,  $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$  e  $\theta$  o ângulo que as fibras formam com o eixo do laminado.

Depois de efetuar as operações necessárias, a matriz  $C'$ , que vem dada por:

$$C' = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & C'_{14} & 0 & 0 \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & C'_{24} & 0 & 0 \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} & C'_{34} & 0 & 0 \\ C'_{41} & C'_{42} & C'_{43} & C'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & C'_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{65} & C'_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Expressando cada um dos termos não-nulos acima em função da matriz constitutiva inicial  $\bar{C}$  e dos co-senos e senos ( $c$  e  $s$ ), obtém-se:

$$C'_{11} = c^4 C_{11} + s^4 C_{22} + c^2 s^2 (C_{12} + C_{21} + 4C_{44}), \quad (3.28)$$

$$C'_{12} = c^4 C_{12} + s^4 C_{21} + c^2 s^2 (C_{11} + C_{22} - 4C_{44}), \quad (3.29)$$

$$C'_{13} = c^2 C_{13} + s^2 C_{23} , \quad (3.30)$$

$$C'_{14} = c^3 s (C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) + cs^3 (C_{21} - C_{22} + 2C_{44}) , \quad (3.31)$$

$$C'_{21} = c^4 C_{21} + s^4 C_{12} + c^2 s^2 (C_{11} + C_{22} - 4C_{44}) , \quad (3.32)$$

$$C'_{22} = c^4 C_{22} + s^4 C_{11} + c^2 s^2 (C_{12} + C_{21} + 4C_{44}) , \quad (3.33)$$

$$C'_{23} = c^2 C_{23} + s^2 C_{13} , \quad (3.34)$$

$$C'_{24} = c^3 s (C_{21} - C_{22} + 2C_{44}) + cs^3 (C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) , \quad (3.35)$$

$$C'_{31} = c^2 C_{31} + s^2 C_{32} , \quad (3.36)$$

$$C'_{32} = c^2 C_{32} + s^2 C_{31} , \quad (3.37)$$

$$C'_{33} = C_{33} , \quad (3.38)$$

$$C'_{34} = cs (C_{31} - C_{32}) , \quad (3.39)$$

$$C'_{41} = c^3 s (C_{11} - C_{21} - 2C_{44}) + cs^3 (C_{12} - C_{22} + 2C_{44}) , \quad (3.40)$$

$$C'_{42} = c^3 s (C_{12} - C_{22} + 2C_{44}) + cs^3 (C_{11} - C_{21} - 2C_{44}) , \quad (3.41)$$

$$C'_{43} = cs (C_{13} - C_{23}) , \quad (3.42)$$

$$C'_{44} = c^2 s^2 (C_{11} - C_{21} - C_{12} + C_{22} - 2C_{44}) + c^4 C_{44} + s^4 C_{44} , \quad (3.43)$$

$$C'_{55} = c^2 C_{55} + s^2 C_{66} , \quad (3.44)$$

$$C'_{56} = cs (C_{55} - C_{66}) , \quad (3.45)$$

$$C'_{65} = cs (C_{55} - C_{66}) , \quad (3.46)$$

$$C'_{66} = c^2 C_{66} + s^2 C_{55} . \quad (3.47)$$

Esta matriz constitutiva ( $C'$ ) é utilizada para o cálculo da matriz de rigidez por elemento, dentro da análise via elementos finitos.

Cabe aqui salientar que estas relações de tensão e deformação não incluem os efeitos higrotérmicos que geram tensões e deformações na lâmina. Os materiais compósitos são geralmente produzidos em altas temperaturas e depois resfriados até atingirem a temperatura ambiente. Para compósitos com matriz polimérica, esta variação de temperatura fica em torno de 200°C a 300°C, sendo que para compósitos com matriz de cerâmica esta variação pode chegar a 1000°C. Devido à diferença entre os valores dos coeficientes de expansão térmica da matriz e das fibras, surgem tensões residuais quando a lâmina é resfriada. Além disso, o processo de resfriamento induz

deformações na lâmina. Por outro lado, muitos materiais poliméricos que formam a matriz da lâmina podem absorver ou perder umidade. Esta mudança de umidade leva a uma expansão ou contração do material, gerando tensões e deformações semelhantes às aquelas causadas pelas variações de temperatura (Kaw, 2006).

Neste trabalho não são consideradas tensões e deformações causadas pelos efeitos higrotérmicos. Embora estes efeitos tornem o modelo estrutural mais realista, o objetivo principal desta tese é criar uma nova ferramenta para otimização de materiais compósitos com restrições de confiabilidade incorporando algoritmos genéticos e redes neurais. A inclusão dos efeitos higrotérmicos pode ser feita posteriormente em trabalhos futuros.

### 3.3 Critério de falha para laminados.

Um laminado irá falhar devido ao crescimento de cargas mecânicas ou térmicas. A falha do laminado, entretanto, pode não ser catastrófica. É possível que algumas das lâminas inicialmente falhem (*first ply load*) e que o compósito continue a suportar mais cargas até que todas as lâminas falhem (*last ply load*). Mesmo as lâminas com falha podem contribuir para a rigidez e resistência do laminado. A degradação das propriedades de rigidez e resistência de cada lâmina depende da filosofia adotada pelo projetista.

Neste trabalho, a falha do compósito é baseada na falha da primeira lâmina (*first ply failure*), uma vez que este critério é o mais utilizado pelos autores, justificado pela possibilidade de detecção e reparação ou troca de componentes da estrutura antes que a mesma falhe por completo (Kaw, 2006).

O projeto de uma estrutura depende do critério de falha considerado. No presente trabalho, serão analisados critérios de falha de resistência de um laminado sujeito a carregamento estático. No entanto, podem-se citar outros fatores no projeto mecânico, tais como (Kaw, 2006):

- **Efeitos ambientais de longo tempo** – Levam em consideração os efeitos de longo tempo da temperatura, umidade, atmosfera corrosiva e outros fatores ambientais sobre os compósitos. Tais fatores podem diminuir a adesão entre os materiais das fibras e da matriz, bem como modificar as propriedades mecânicas dos mesmos.

- **Tensões interlaminares** – Devido às diferenças entre os módulos de elasticidade e os ângulos de orientação das fibras das camadas de um compósito laminado, são geradas tensões interlaminares. Estas tensões, que são normais ao plano do laminado e de cisalhamento, podem ser suficientemente grandes para causar a delaminação (descolamento) entre as lâminas. Eventualmente o processo de delaminação pode ser o critério de falha dominante para a estrutura.
- **Resistência ao impacto** – A resistência de materiais compósitos ao impacto é importante em problemas de projéteis atingindo aeronaves ou mesmo em um amortecedor de um veículo trafegando sobre uma pista irregular. A resistência ao impacto depende de vários fatores, tais como: material do sistema, resistência entre as lâminas, seqüência de disposição das lâminas, natureza do impacto (velocidade, massa e tamanho do objeto impactante). O impacto reduz a resistência do laminado e também inicia o processo de delaminação.
- **Resistência à fratura** – Nos compósitos, os mecanismos de fratura são complicados. As trincas podem crescer localizadas nas fibras, matriz, entre fibra e matriz e entre as lâminas. Mecânica da fratura em compósitos ainda é um assunto aberto porque existem vários mecanismos de falha e o desenvolvimento de um critério uniforme parece quase impossível.
- **Resistência à Fadiga** – Com o passar do tempo as estruturas ficam sujeitas a carregamentos cíclicos, tais como as cargas de sustentação atuando na asa de um avião. Esta carga cíclica enfraquece o material e confere ao mesmo tempo uma vida finita. Parâmetros de fadiga para materiais compósitos são obtidos usando, por exemplo, dados relativos a tensões de pico atuantes durante o carregamento, como uma função do número de ciclos. O pico de tensões é então comparado com a resistência estática da estrutura. Se esses picos de tensão são consideravelmente menores do que a resistência última do compósito, a fadiga não influencia no projeto da estrutura.
- **Características não-mecânicas** – Também são importantes no projeto de estruturas de materiais compósitos. Dentre elas pode-se citar:

resistência ao fogo, condutividade térmica e elétrica, potencial de reciclagem, interferência eletromagnética, etc.

### 3.3.1 Critérios de falha de resistência para compósitos laminados

Em um laminado, a resistência está relacionada com a resistência de cada lâmina (*first ply load*). As teorias de falha são geralmente baseadas nas resistências aos esforços normais e de cisalhamento de uma lâmina unidirecional.

No caso de uma lâmina unidirecional, o material possui dois eixos, sendo um paralelo as fibras (eixo  $x$ ) e outro perpendicular às mesmas (eixo  $y$ ), conforme é ilustrado na figura 3.2. Dessa forma, surgem quatro parâmetros normais de resistência, um para tração e outro para compressão em cada um dos dois eixos do material. O quinto parâmetro de resistência é a resistência ao cisalhamento.

Dessa forma, as teorias de falha resumem-se a achar as tensões nos eixos locais e então compará-las com os cinco parâmetros de resistência da lâmina unidirecional.

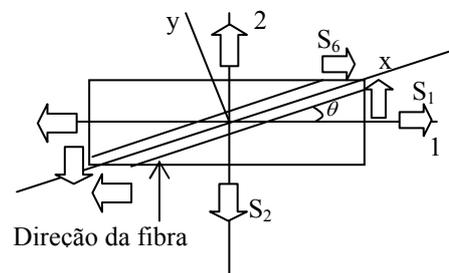


Figura 3.2 – Sistema de coordenadas para uma lâmina unidirecional.

#### 3.3.1.1 Teoria de falha da máxima tensão

Conhecidas as tensões nos eixos locais da lâmina  $(S_x, S_y, S_{xy})$ , a mesma é considerada em estado de falha se:

$$-(S_x^C)_{ult} < S_x < (S_x^T)_{ult}, \text{ ou} \quad (3.48)$$

$$-(S_y^C)_{ult} < S_y < (S_y^T)_{ult}, \text{ ou} \quad (3.49)$$

$$-(S_{xy})_{ult} < S_{xy} < (S_{xy})_{ult}, \quad (3.50)$$

onde

$(S_x^T)_{ult}$  = tensão longitudinal última de tração na direção  $x$ .

$(S_x^C)_{ult}$  = tensão longitudinal última de compressão na direção  $x$ .

$(S_y^T)_{ult}$  = tensão longitudinal última de tração na direção  $y$ .

$(S_y^C)_{ult}$  = tensão longitudinal última de compressão na direção  $y$ .

$(S_{xy})_{ult}$  = tensão última de cisalhamento no plano  $x$ - $y$ .

Os cinco parâmetros de resistência são tratados como números positivos e as tensões normais são positivas se de tração e negativas se de compressão.

Cada componente de tensão é comparada com a correspondente resistência; dessa forma as tensões não interagem umas com as outras.

### 3.3.1.2 Teoria de falha da máxima deformação

Conhecidas as deformações nos eixos locais da lâmina  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ , a mesma é considerada em estado de falha se:

$$-(\varepsilon_x^C)_{ult} < \varepsilon_x < (\varepsilon_x^T)_{ult}, \text{ ou} \quad (3.51)$$

$$-(\varepsilon_y^C)_{ult} < \varepsilon_y < (\varepsilon_y^T)_{ult}, \text{ ou} \quad (3.52)$$

$$-(\gamma_{xy})_{ult} < \gamma_{xy} < (\gamma_{xy})_{ult}, \quad (3.53)$$

onde

$(\varepsilon_x^T)_{ult}$  = deformação longitudinal última de tração na direção  $x$ .

$(\varepsilon_x^C)_{ult}$  = deformação longitudinal última de compressão na direção  $x$ .

$(\varepsilon_y^T)_{ult}$  = deformação longitudinal última de tração na direção  $y$ .

$(\varepsilon_y^C)_{ult}$  = deformação longitudinal última de compressão na direção  $y$ .

$(\gamma_{xy})_{ult}$  = deformação última de cisalhamento no plano  $x$ - $y$ .

As deformações últimas podem ser determinadas a partir das resistências últimas e dos módulos de elasticidade, assumindo uma relação linear entre tensão e deformação até a falha. A teoria de falha da máxima deformação é semelhante ao critério de falha da máxima tensão no sentido de que não há interação entre os componentes de deformação. Entretanto, as duas teorias apresentam resultados diferentes devido ao fato de que as deformações locais na lâmina incluem o efeito de Poisson.

### 3.3.1.3 Teoria de falha de Tsai-Hill.

É baseada no critério da energia de distorção (critério de von Mises) para materiais isotrópicos. A energia de distorção é uma parcela da energia de deformação de um corpo. A energia de deformação consiste de duas parcelas; uma delas relacionada à mudança de volume do corpo, chamada de energia de dilatação, e outra ligada a mudanças na forma do corpo, chamada de energia de distorção. O material é considerado em estado de falha quando a energia de distorção é maior do que a energia de distorção do material na condição de falha. Baseado neste critério, Tsai (Tsai, 1968) propôs a seguinte condição de falha para a lâmina unidirecional submetida a um estado plano de tensões:

$$(G_2 + G_3)S_x^2 + (G_1 + G_3)S_y^2 - 2G_3S_xS_y + 2G_6S_{xy}^2 < 1, \quad (3.54)$$

onde

$$G_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{[(S_y^T)_{ult}]^2} - \frac{1}{[(S_x^T)_{ult}]^2} \right); \quad (3.55)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{[(S_x^T)_{ult}]^2} \right); \quad (3.56)$$

$$G_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{[(S_x^T)_{ult}]^2} \right); \quad (3.57)$$

$$G_6 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{[(S_{xy})_{ult}]^2} \right). \quad (3.58)$$

Usando as equações (3.55-3.58) em conjunto com (3.54) chega-se à seguinte expressão reduzida do critério de falha de Tsai-Hill para uma lâmina unidirecional:

$$\left[ \frac{S_x}{(S_x^T)_{ult}} \right]^2 - \left[ \frac{S_x S_y}{(S_x^T)_{ult}^2} \right] + \left[ \frac{S_y}{(S_y^T)_{ult}} \right]^2 + \left[ \frac{S_{xy}}{(S_{xy})_{ult}} \right]^2 < 1. \quad (3.59)$$

Diferentemente dos critérios de máxima tensão e máxima deformação, o critério de Tsai-Hill leva em consideração interações entre três componentes de resistência  $((S_x^T)_{ult}, (S_y^T)_{ult}$  e  $(S_{xy})_{ult}$ ), entretanto não é feita distinção entre as resistências últimas de compressão e de tração. Tal fato pode resultar em uma carga de falha subestimada, uma vez que a resistência última de tração é geralmente consideravelmente menor do que a de compressão.

### 3.3.1.4 Teoria de falha de Tsai-Wu

É baseada na teoria de falha da energia total de deformação de Beltrami. Tsai & Wu, 1971 aplicaram esta teoria de falha para uma lâmina de material compósito em estado plano de tensões. A falha da lâmina é atingida se a condição:

$$H_1 S_x + H_2 S_y + H_6 S_{xy} + H_{11} S_x^2 + H_{22} S_y^2 + H_{66} S_{xy}^2 + 2H_{12} S_x S_y < 1 \quad (3.60)$$

é violada, onde

$$H_1 = \frac{1}{(S_x^T)_{ult}} - \frac{1}{(S_x^C)_{ult}} ; \quad (3.61)$$

$$H_{11} = \frac{1}{(S_x^T)_{ult} (S_x^C)_{ult}} ; \quad (3.62)$$

$$H_2 = \frac{1}{(S_y^T)_{ult}} - \frac{1}{(S_y^C)_{ult}} ; \quad (3.63)$$

$$H_{22} = \frac{1}{(S_y^T)_{ult} (S_y^C)_{ult}} ; \quad (3.64)$$

$$H_6 = 0 ; \quad (3.65)$$

$$H_{66} = \frac{1}{(S_{xy})_{ult}^2} . \quad (3.66)$$

A única componente que não pode ser determinada diretamente a partir dos cinco parâmetros de resistência é  $H_{12}$ . Esta componente é determinada experimentalmente e pode assumir valores diversos dependendo do tipo de experimento realizado:

$$H_{12} = -\frac{1}{2(S_x^T)_{ult}^2}, \text{ Tsai-Hill (Hill,1950)} ; \quad (3.67)$$

$$H_{12} = -\frac{1}{2(S_x^T)_{ult} (S_x^C)_{ult}}, \text{ Hoffman (Hoffman,1967)} ; \quad (3.68)$$

$$H_{12} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{(S_x^T)_{ult} (S_x^C)_{ult} (S_y^T)_{ult} (S_y^C)_{ult}}}, \text{ Mises-Hencky (Tsai,1980)}. \quad (3.69)$$

Neste trabalho adotaremos o valor de  $H_{12}$  conforme apresentado na equação (3.69).

### 3.3.2 Comparação entre resultados experimentais e as teorias de falha

Tsai (1980) comparou os resultados de várias teorias de falha com alguns resultados experimentais. Ele considerou uma lâmina submetida a um carregamento uniaxial na direção 1. As tensões de falha foram obtidas experimentalmente para condições de tração e compressão utilizando vários ângulos de orientação para as fibras.

Após determinar as tensões e deformações locais, as quatro teorias de falha foram aplicadas para determinar a carga última em função do ângulo de orientação das fibras.

As comparações para os quatro critérios de falha são mostradas nas figuras 3.3 a 3.6. As seguintes observações podem ser feitas:

- As diferenças entre os critérios de máxima tensão e máxima deformação em relação aos dados experimentais são bem pronunciadas.
- Os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu apresentam uma boa compatibilidade com os resultados experimentais.
- A variação de resistência da lâmina em função do ângulo de orientação das fibras é suave nas teorias de Tsai-Hill e Tsai-Wu, possuindo variações bruscas nas teorias de máxima tensão e máxima deformação, as quais correspondem às mudanças nos modos de falha presentes nestes critérios.

Com base nestes resultados experimentais e no fato que a maioria dos autores adota o critério de Tsai-Wu para determinar a falha do material compósito laminado, este foi o critério escolhido nas análises de confiabilidade realizadas em capítulos posteriores.

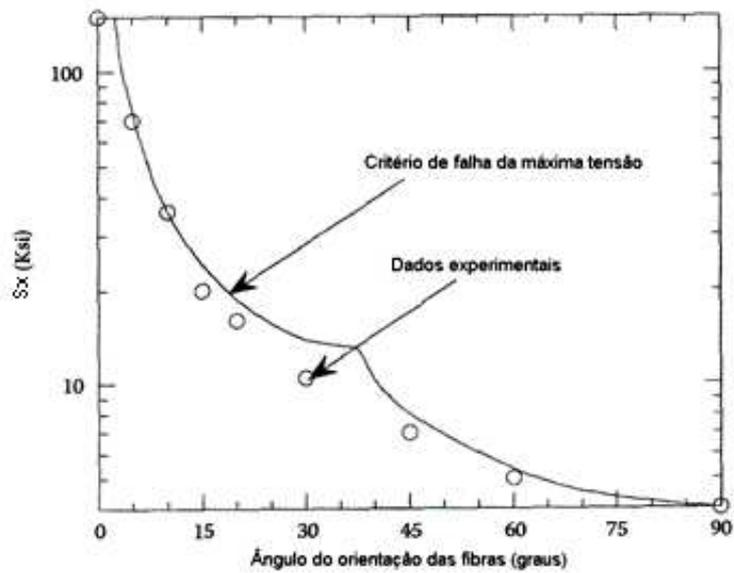


Figura 3.3 – Comparação entre dados experimentais e critério de falha da máxima tensão – adaptado de (Kaw, 2006).

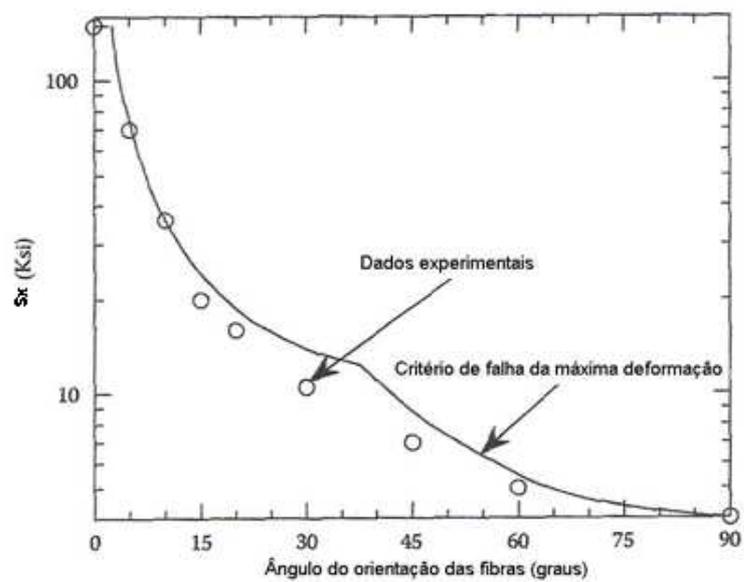


Figura 3.4 – Comparação entre dados experimentais e critério de falha da máxima deformação – adaptado de (Kaw, 2006).

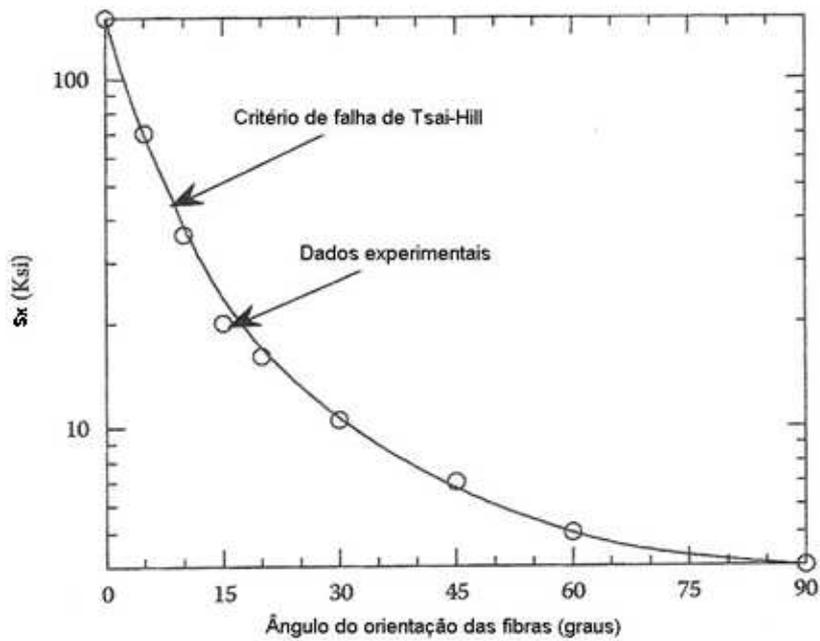


Figura 3.5 – Comparação entre dados experimentais e critério de falha de Tsai-Hill – adaptado de (Kaw, 2006).

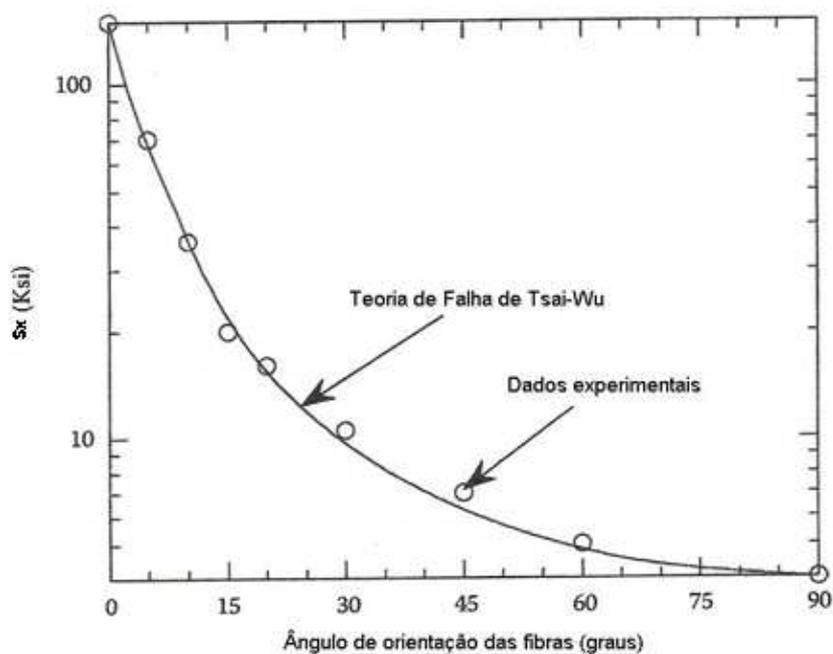


Figura 3.6 – Comparação entre dados experimentais e critério de falha de Tsai-Wu – adaptado de (Kaw, 2006).

### 3.4 Elemento finito empregado na análise estrutural

Não é o objetivo principal desta tese apresentar novidades no campo do desenvolvimento de elementos finitos para a análise de estruturas de materiais compósitos laminados. Dessa forma, é apresentado resumidamente o elemento utilizado bem como exemplos que comprovam a sua eficiência.

#### 3.4.1 Elemento triangular plano para cascas e placas

A formulação deste elemento consiste em sobrepor um elemento de placa fina a um elemento de estado plano de tensões (desconsiderando deformações por corte transversal). Adicionalmente são introduzidos termos para que o acoplamento entre efeitos de membrana e flexão, presentes no caso de laminados não-simétricos, possa ser considerado.

Problemas que envolvam rotações e deslocamentos finitos podem ser tratados graças à formulação Lagrangeana atualizada adotada para o elemento (Bathe & Ho, 1981). Nestas situações emprega-se uma solução incremental-iterativa utilizando o Método do Controle por Deslocamentos Generalizados (MCDG) (Yang & Shieh, 1990).

Maiores detalhes sobre a formulação deste elemento podem ser encontrados em (Almeida, 2006).

#### 3.4.2 Elemento triangular plano para placas e cascas de compósito laminado

Descrevem-se a seguir, em maiores detalhes, o elemento supra mencionado. Sua formulação é baseada no elemento triangular de estado plano de tensões *Constant Stress Triangular Element* (CST) e no elemento triangular para placas finas *Discret Kirchhoff Triangular Element* (DKT) (Bathe *et al.* 1980). O comportamento do elemento segue a teoria clássica de laminados (TCL) que adota as seguintes considerações (Daniel & Ishai, 1994):

- a) Cada lâmina é quase-homogênea e ortotrópica;
- b) O laminado é delgado se comparado às suas dimensões laterais e suas lâminas estão sob estado plano de tensões;

- c) Os deslocamentos são pequenos se comparados à espessura do laminado, consideração essa válida para teoria com linearidade geométrica;
- d) Os deslocamentos são contínuos no laminado;
- e) Deslocamentos no plano variam linearmente ao longo da espessura do laminado;
- f) Deformações transversais por cisalhamento são ignoradas. Essa consideração e a anterior implicam que linhas retas normais ao plano médio continuam retas e normais a este após a deformação;
- g) As relações deformação-deslocamento e tensão-deformação são lineares;
- h) Distâncias normais ao plano médio permanecem constantes, ou seja, a deformação normal na direção perpendicular ao plano médio  $\varepsilon_z$  é ignorada.

O elemento triangular possui três nós, localizados em seus vértices. A cada nó são atribuídos seis graus de liberdade (gdl), totalizando 18 gdl por elemento. Dois deslocamentos no plano e uma rotação, perpendicular ao plano médio do elemento, formam os gdl de membrana. Os gdl de flexão são constituídos pelo deslocamento perpendicular ao plano e as duas rotações no plano, conforme pode ser verificado na figura 3.7.

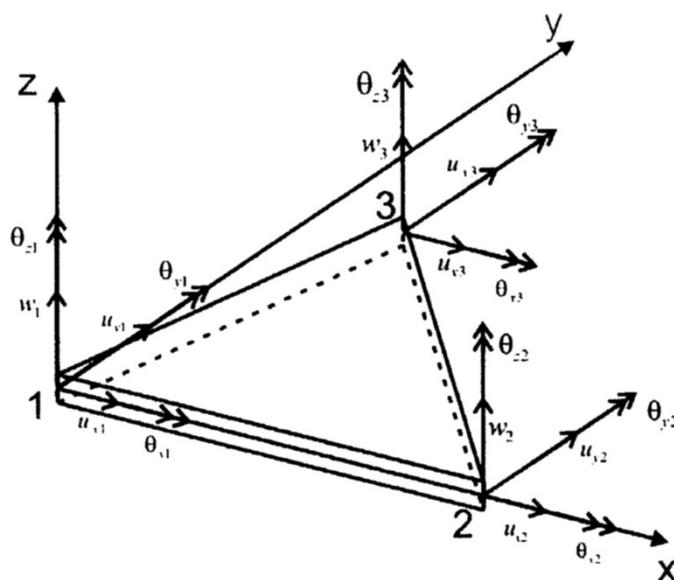


Figura 3.7 - Graus de liberdade do elemento triangular plano para placa e casca.

Baseado no princípio dos trabalhos virtuais pode-se estabelecer uma expressão, no contexto de uma análise incremental-iterativa pelo MEF, da seguinte forma:

$$\left( \left[ {}^t K_L \right] + \left[ {}^t K_{NL} \right] \right) \{ \Delta U^{(i)} \} = \left\{ {}^{t+\Delta t} P \right\} - \left\{ {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \right\} \quad (3.70)$$

sendo  $\left[ {}^t K_L \right]$  e  $\left[ {}^t K_{NL} \right]$  respectivamente as matrizes de rigidez linear e não-linear no instante  $t$ . O vetor de incremento de deslocamentos é dado por  $\{ \Delta U^{(i)} \}$ , enquanto  $\left\{ {}^{t+\Delta t} P \right\}$  e  $\left\{ {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \right\}$  são o vetor de cargas externas e o vetor de forças nodais equivalentes devidas às forças internas no instante  $t + \Delta t$ , sendo este último oriundo da iteração anterior. Cada um dos termos da equação (3.70) é apresentado em maiores detalhes em Almeida (2006).

### 3.4.3 Exemplos numéricos de validação do elemento - Análise de tensões.

Para o cálculo da confiabilidade da estrutura de compósito laminado é necessário avaliar o critério de falha de Tsai-Wu e verificar se a estrutura encontra-se ou não na zona de segurança. O conhecimento adequado das tensões atuando nos eixos locais do laminado é fundamental para que os resultados sejam precisos. Dessa forma, serão apresentados dois exemplos do cálculo de tensões utilizando o elemento finito em questão, tendo como objetivo a validação do mesmo. Para tanto são abordados dois exemplos simples, mas que ilustram satisfatoriamente o funcionamento da ferramenta desenvolvida em (Almeida, 2006). Em ambos os casos as estruturas consistem em placas submetidas a carregamento de pressão transversal, sendo o primeiro um caso de análise linear e o segundo mais sofisticado, levando-se em conta os efeitos de não linearidade geométrica.

Dada a dificuldade em se encontrar referência na literatura para comparação dos resultados, os problemas foram tratados também no programa ABAQUS (2004), servindo essa solução para a validação da análise executada. A modelagem da estrutura no programa comercial também se deu por um elemento finito de casca triangular, que utiliza a mesma teoria do elemento utilizado neste trabalho. São utilizadas as mesmas malhas e as tensões são comparadas diretamente nos pontos de integração. Assim se

evita as possíveis diferenças decorrentes do emprego de diferentes métodos de suavização, utilizados para extrapolar os valores dessas variáveis para os nós da malha.

### 3.4.3.1 Análise linear de tensões em placa apoiada submetida à carga de pressão

Neste primeiro exemplo a placa retangular simplesmente apoiada apresentada na figura 3.8 é submetida a um carregamento de pressão uniforme na sua superfície. A partir da análise linear dos deslocamentos são calculadas as tensões na face superior e inferior das lâminas em cada um dos três pontos de integração de todos os elementos.

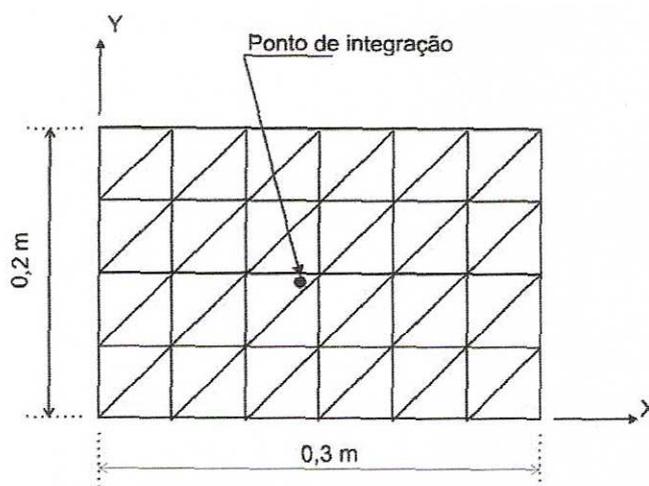


Figura 3.8 – Malha de elementos finitos para placa retangular simplesmente apoiada.

As propriedades do material constituinte das lâminas estão definidas na tabela 3.2. O exemplo considera um laminado de 4 camadas com a seqüência de laminação  $[\pm 45_2]$  e uma espessura total de 0,508mm. Toda extensão da placa foi modelada, pois o material não apresenta planos de simetria. A malha utilizada é de  $(4 \times 6) \times 2$  elementos. As bordas têm as translações restritas e os giros livres enquanto o carregamento é de  $10^{-3}$  MPa.

Ao se comparar o resultado das componentes de tensões obtidas pelas duas soluções, não foram encontradas diferenças superiores a 0,1%. Tendo em vista a impossibilidade de apresentar o enorme número de dados que foram comparados (3 componentes de tensão x 4 lâminas x 2 faces x 3 pontos de integração x 48 elementos = 3560 valores), resume-se a apresentação aos valores obtidos para a face superior e inferior da laminado no ponto indicado pela figura 3.8, através da tabela 3.3.

Tabela 3.2 – Propriedades do Material.

$E_1$	$132,4 \times 10^3$ MPa
$E_2$	$10,75 \times 10^3$ MPa
$G_{12}$	$5,65 \times 10^3$ MPa
$\nu_{12}$	0,24
$t_{\text{laminada}}$	$1,27 \times 10^{-4}$ m

Tabela 3.3 – Tensões no ponto próximo ao centro da placa para faces superior e inferior.

Componente (MPa)	Face superior			Face inferior		
	$S_x$	$S_y$	$S_{xy}$	$S_x$	$S_y$	$S_{xy}$
Elemento triangular plano	-80,22	-10,09	-3,76	80,25	9,75	-2,91
ABAQUS	-80,22	-10,09	-3,76	80,25	9,75	-2,91

Na figura 3.9 são apresentadas as distribuições de tensão nas faces inferior e superior da placa. Essas são originadas de um processo de suavização que extrapola o valor das componentes dos pontos de integração dos elementos para os nós da malha. O deslocamento vertical máximo da placa para esse exemplo é de 17,24 mm.

### 3.4.3.2 Análise não-linear de tensões em placa engastada submetida à carga de pressão

Nesse exemplo são apresentados os resultados da análise de tensões de uma placa quadrada (de lado  $a$  e espessura  $h$ ) laminada submetida a um carregamento de pressão uniformemente distribuído. O laminado é formado por duas camadas  $[90,0]$ , fabricadas em grafite/epoxy e tem todas suas bordas engastadas. As propriedades do material e a geometria da placa estão definidas na Tabela 3.4.

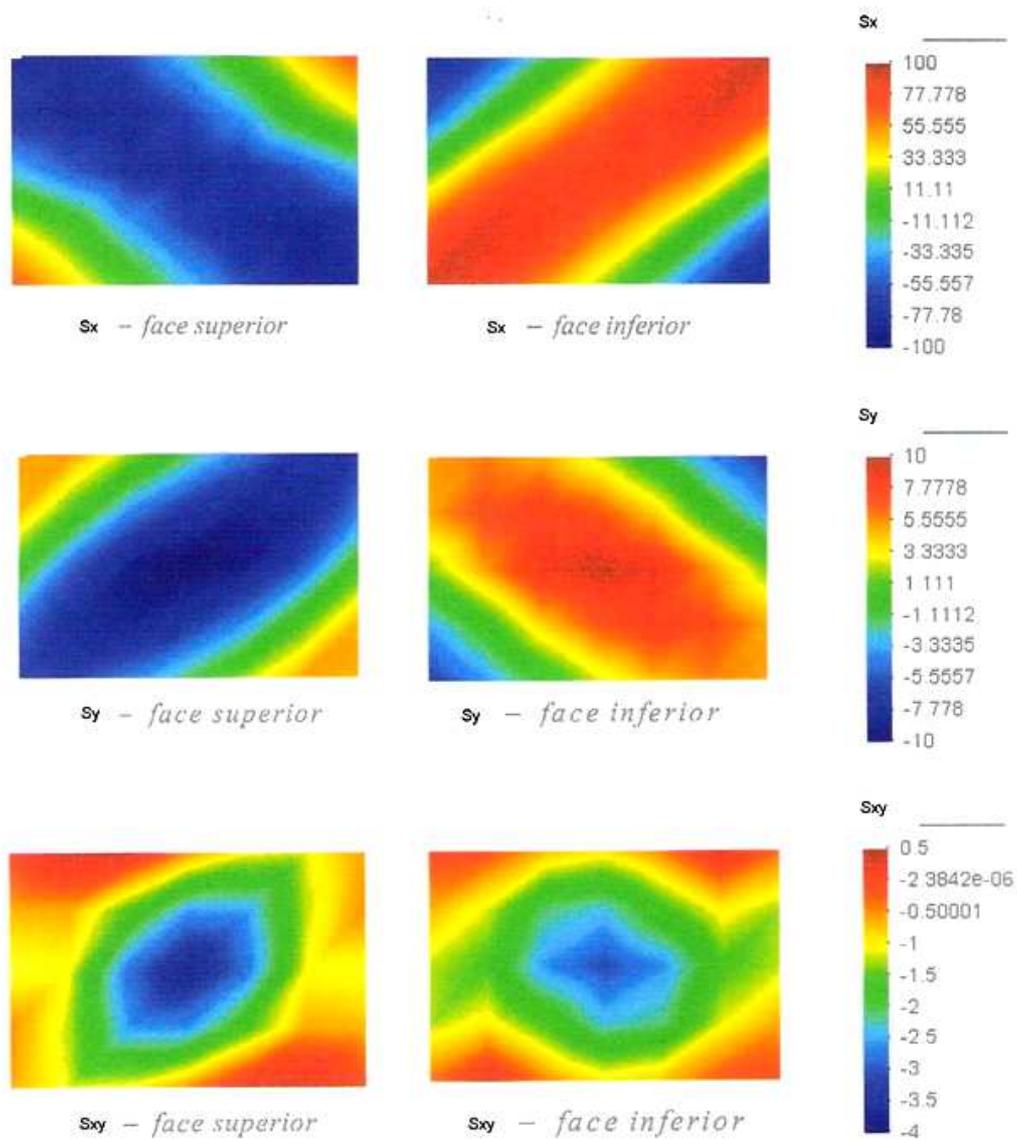


Figura 3.9 – Tensões nas faces superior e inferior da placa.

Tabela 3.4 – Propriedades do material e dados geométricos.

$E_1$	$1,38 \times 10^5$ MPa
$E_2$	$9,65 \times 10^3$ MPa
$G_{12}$	$4,83 \times 10^3$ MPa
$\nu_{12}$	0,30
a	0,23 m
h	1 mm

Aqui também são considerados os efeitos de não-linearidade geométrica na obtenção dos deslocamentos, o que se reflete diretamente nas tensões calculadas para as sucessivas configurações deformadas obtidas a cada passo do método de resolução. A modelagem utilizada é uma malha de  $(10 \times 10) \times 2$  elementos, conforme se observa na figura 3.10. Nessa figura também está indicado o primeiro ponto de integração do elemento 1, local onde serão comparadas as tensões obtidas pelo programa utilizado e pela referência.

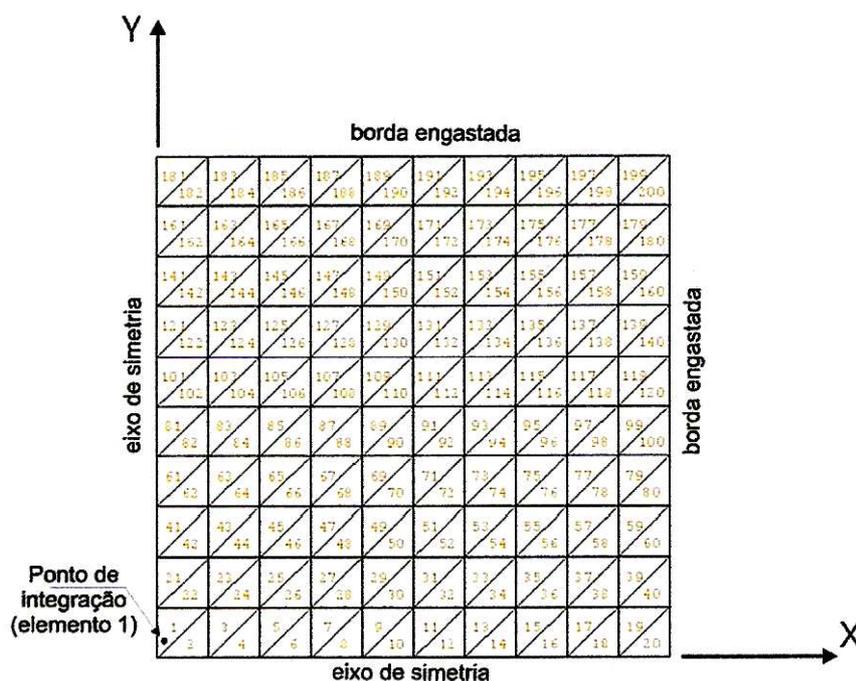


Figura 3.10 – Malha de elementos finitos e indicação do ponto de integração onde são comparadas as tensões calculadas.

Nas figuras 3.11, 3.12 e 3.13 são apresentadas a evolução das tensões segundo os eixos principais do material para a face superior e inferior no ponto indicado anteriormente. Como o método de resolução é diferente em cada programa, as tensões são calculadas para configurações deformadas distintas e por isso só podem ser comparadas através de curvas. A análise é realizada até uma pressão máxima de  $9 \times 10^{-3}$  Pa, sendo esse valor alcançado quando o nível de carga é igual a 1,0.

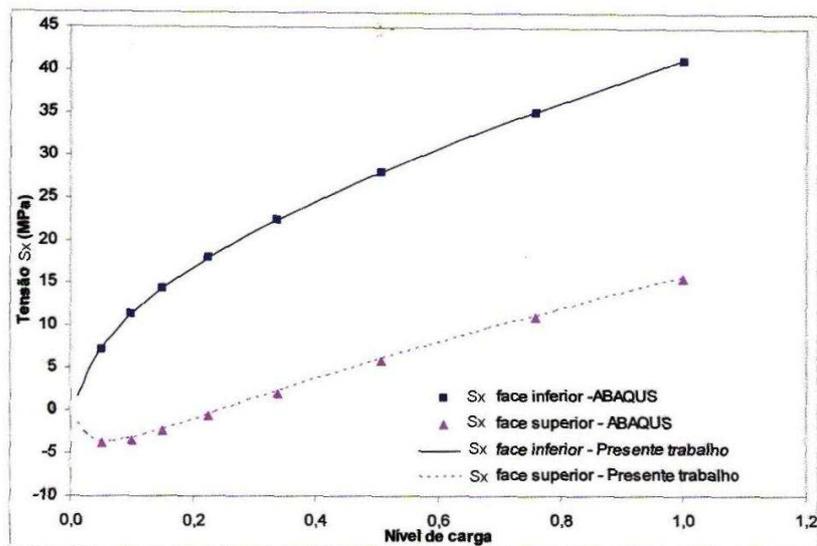


Figura 3.11 – Curva tensão Sx – nível de carga para faces superior e inferior do laminado no primeiro ponto de integração do elemento 1.

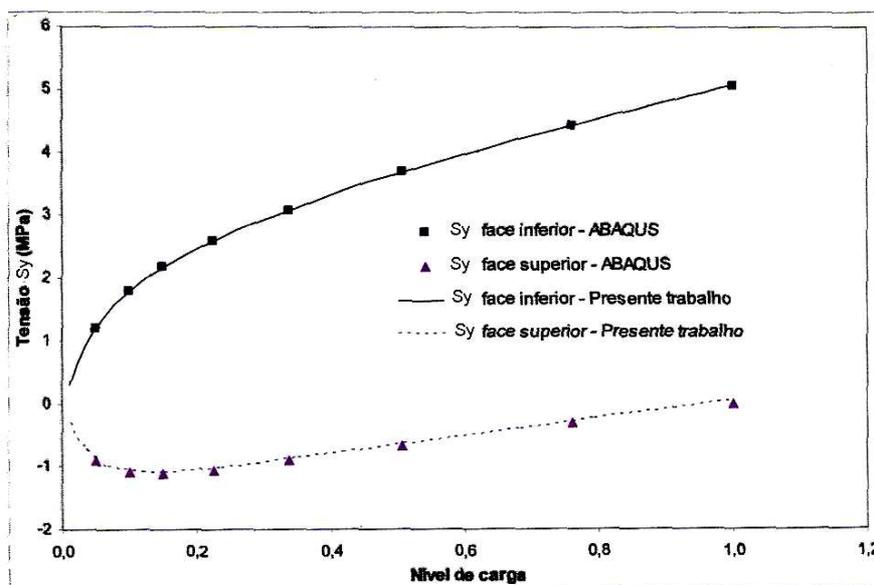


Figura 3.12 – Curva tensão Sy – nível de carga para faces superior e inferior do laminado no primeiro ponto de integração do elemento 1.

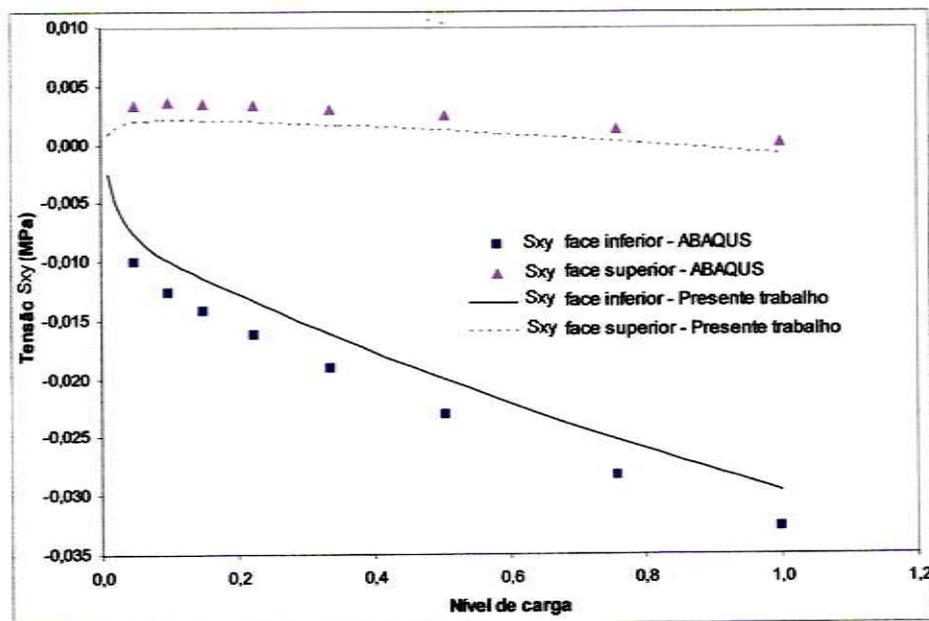


Figura 3.13 – Curva tensão  $S_{xy}$  – nível de carga para faces superior e inferior do laminado no primeiro ponto de integração do elemento 1.

Fica comprovado que o elemento em questão aproxima de forma satisfatória os resultados de tensões nos eixos locais das lâminas, independentemente da análise ser linear ou não – linear geométrica. Portanto, fica validado o seu uso em conjunto com o critério de ruptura de Tsai-Wu a fim de verificar se o laminado encontra-se ou não na zona de falha.

## CAPÍTULO 4

### 4. CONFIABILIDADE EM ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS

#### 4.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os métodos empregados para a determinação do índice de confiabilidade das estruturas de materiais compósitos laminados analisadas neste trabalho.

Serão tratados os métodos de simulação de Monte Carlo com e sem amostragem por importância e o método de primeira ordem FORM (*First Order Reliability Method*) com um ponto de linearização, bem como o aplicado para sistemas em série.

#### 4.2 Análise de confiabilidade de lâminas de materiais compósitos unidirecionais

Existem diversos métodos para calcular o índice de confiabilidade de sistemas estruturais, entre os quais se podem destacar o Método de Simulação de Monte Carlo com ou sem amostragem por importância e FORM (*First Order Reliability Method*). Enquanto o Método de Monte Carlo está baseado na simulação de amostras geradas aleatoriamente seguindo-se uma dada distribuição de probabilidade, verificando se a mesma está na zona de segurança ou de falha (cujas fronteiras são definidas pela função de estado limite), os métodos FORM conduzem a formulações matematicamente elegantes que requerem saber “a priori” a definição de uma função de falha e que seja diferenciável. Ambos os métodos exigem o correto conhecimento das médias, variâncias e tipo de distribuição das variáveis aleatórias.

A função de estado limite de materiais compósitos unidirecionais pode ser escrita como:

$$M(\mathbf{X}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad (4.1)$$

onde  $M$  representa a margem de segurança e  $\mathbf{X}$  o vetor das  $n$  variáveis aleatórias que afetam a resistência do material.  $M \leq 0$  significa falha e  $M > 0$  que o material está no

domínio de segurança (Ang & Tang, 1975). A probabilidade de falha pode ser calculada usando a função de densidade de probabilidade conjunta  $f_x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$P_f = \iint \dots \int_D f_x(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n ; \quad (4.2)$$

onde D é a região onde  $M \leq 0$ .

#### 4.2.1 Método de simulação de Monte Carlo

Dado um conjunto de  $n$  variáveis aleatórias  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , cada uma delas completamente caracterizada pela sua respectiva função densidade de probabilidade marginal (FDP)  $f_{X_i}(x_i)$  e respectiva função distribuição acumulada marginal (FPA)  $F_{X_i}(x_i)$ , então a probabilidade de falha, associada a uma função de estado limite  $g(\mathbf{X})$  que define uma região de falha e outra de segurança, pode ser calculada por:

$$P_f = \int_{\{\mathbf{X}/g(\mathbf{X}) \leq 0\}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \int_{\mathbf{X}} I[g(\mathbf{X})] \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (4.3)$$

onde  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  é a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis, e  $I[g(\mathbf{X})]$  é uma função indicadora, definida por:

$$I[g(\mathbf{X})] = \begin{cases} 1 & \text{se } g(\mathbf{X}) \leq 0; \\ 0 & \text{se } g(\mathbf{X}) > 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Com o uso da função indicadora é possível calcular a integral da equação (4.3) sobre todo domínio e não só na região de falha. Além disso, o resultado da equação (4.3) representa o valor esperado (valor médio) da função indicadora. Dessa, forma a probabilidade de falha pode ser estimada através da seguinte expressão:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{ns} \sum_j^{ns} I[g(\mathbf{X}^j)], \quad (4.5)$$

onde  $ns$  é o número de simulações e  $\mathbf{x}^j$  é o  $j$ -ésimo vetor de amostras simulado contendo as  $n$  variáveis e  $\hat{P}_f$  é o valor esperado da probabilidade de falha.

O  $\sum_j^{ns} I[g(\mathbf{x}^j)]$  representa o número de simulações que caíram na região de falha ( $nf$ ) e a equação (4.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\hat{P}_f = \frac{nf}{ns}. \quad (4.6)$$

Obviamente, a precisão da estimativa de  $\hat{P}_f$  depende do número de simulações ( $ns$ ) realizadas. Para uma pequena probabilidade de falha e/ou um pequeno número de simulações, a estimativa de  $\hat{P}_f$  dada pela equação (4.6) pode acarretar um considerável erro. A precisão da equação (4.6) pode ser estudada de diversas formas. Uma delas é calcular a variância ou o coeficiente de variação da probabilidade de falha estimada ( $\hat{\delta}_{P_f}$ ), que pode ser calculada assumindo que cada simulação se constitua em um processo de Bernoulli. Portanto, o número de falhas em  $ns$  simulações pode ser considerado seguindo uma distribuição Binomial. Assim, o desvio padrão pode ser avaliado aproximadamente por:

$$\hat{\sigma}_{P_f} = \sqrt{\frac{(1-\hat{P}_f)\hat{P}_f}{ns}}. \quad (4.7)$$

Para a avaliação da precisão estatística do estimador da probabilidade de falha, o respectivo coeficiente de variação é uma boa medida. Ele é definido como (Haldar & Mahadevan, 2000):

$$\hat{\delta}_{P_f} = \frac{\hat{\sigma}_{P_f}}{\hat{P}_f} = \sqrt{\frac{(1-\hat{P}_f)}{ns \cdot \hat{P}_f}} \quad (4.8)$$

Valores da ordem de 0,05 para o coeficiente de variação conduzem a uma indicação de que o valor médio de  $P_f$  está estimando de forma adequada a probabilidade de falha.

A equação (4.8) mostra que a estimativa do coeficiente de variação depende da probabilidade de falha estimada. Nos problemas tratados neste trabalho, a probabilidade de falha avaliada encontra-se geralmente menor do que  $10^{-5}$ , o que conduz a um número médio de  $10^6$  simulações para atingir uma precisão satisfatória. Desta forma, o custo computacional torna-se muito alto, existindo técnicas que podem reduzir substancialmente o número de simulações necessárias, algumas das quais serão abordadas a seguir.

#### 4.2.1.1 Geração de amostras para simulação

Para a geração das amostras utilizadas na simulação direta de Monte Carlo, emprega-se a técnica da transformação inversa. Basicamente é necessário conhecer a função de probabilidade acumulada marginal inversa de cada uma das variáveis envolvidas no problema  $F_{x_i}^{-1}(x_i)$  e, caso haja correlação entre as mesmas, a matriz de coeficientes de correlação  $\rho_x$ .

Começa-se por gerar um número de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo de [0,1] igual ao número de simulações pelo número de variáveis básicas a serem geradas ( $n_s * n_v$ ) designadas por  $U^j$ , onde  $U^j$  representa o vetor da j-ésima simulação contendo os valores das  $i$  variáveis básicas.

Variáveis gaussianas padrões não correlacionadas são geradas a partir do vetor de números aleatórios uniformemente distribuídos, utilizando a inversa da distribuição acumulada da função Gaussiana padrão  $\phi^{-1}(U^j)$ , de acordo com a relação abaixo:

$$Z^j = \phi^{-1}(U^j). \quad (4.9)$$

Caso as variáveis apresentem correlação, é utilizada a decomposição de Cholesky e a correlação é aplicada às variáveis Gaussianas padrão não correlacionadas, obtendo-se as variáveis Gaussianas padrão correlacionadas  $Z^j$  (Haldar & Mahadevan, 2000).

Então, as variáveis aleatórias geradas com função de distribuição de probabilidades requeridas são dadas por:

$$\mathbf{X}^j = F_{x_i}^{-1}(\mathbf{Z}^j) \quad (4.10)$$

onde  $F_{x_i}^{-1}$  é a inversa da função distribuição acumulada marginal da variável aleatória  $i$  e  $\mathbf{X}^j$  é o vetor das variáveis aleatórias básicas para a  $j$ -ésima simulação.

#### 4.2.1.2 Variáveis antitéticas

A técnica das variáveis antitéticas é empregada para a redução da variância da estimativa da probabilidade de falha na Simulação Direta de Monte Carlo, diminuindo assim o número de simulações necessário para obter-se uma probabilidade de falha com determinada precisão. Uma correlação negativa é induzida entre diferentes ciclos de simulação de forma a diminuir a variância do estimador da média da probabilidade de falha. Se  $\mathbf{u}$  é um vetor de números aleatórios uniformemente distribuídos entre  $[0,1]$  (de dimensão  $n$ ) e é utilizado num primeiro estágio para gerar amostras das variáveis no espaço real  $\mathbf{X}$  e calcular uma estimativa da probabilidade de falha  $\hat{P}_f^{\mathbf{u}}$ , então o vetor de mesma dimensão com valores  $\mathbf{1}-\mathbf{u}$  pode ser usado para gerar novas amostras negativamente correlacionadas e assim se ter uma estimativa da probabilidade de falha  $\hat{P}_f^{\mathbf{1}-\mathbf{u}}$  (Ang & Tang, 1975). Portanto, após  $2n$  simulações, a estimativa da probabilidade de falha pode ser calculada como:

$$\hat{P}_f = \frac{\hat{P}_f^{\mathbf{u}} + \hat{P}_f^{\mathbf{1}-\mathbf{u}}}{2}, \quad (4.11)$$

cuja variância é:

$$\sigma_{\hat{P}_f}^2 = \frac{\sigma_{\hat{P}_f^{\mathbf{u}}}^2 + \sigma_{\hat{P}_f^{\mathbf{1}-\mathbf{u}}}^2 + 2Cov(\hat{P}_f^{\mathbf{u}}, \hat{P}_f^{\mathbf{1}-\mathbf{u}})}{4}. \quad (4.12)$$

A covariância entre as duas estimativas da probabilidade de falha ( $Cov(\hat{P}_f^{\mathbf{u}}, \hat{P}_f^{\mathbf{1}-\mathbf{u}}) < 0$ ) certamente será negativa, uma vez que assim o é a covariância entre os vetores aleatórios ( $Cov(\mathbf{u}, \mathbf{1}-\mathbf{u}) < 0$ ), reduzindo assim a variância na estimativa da probabilidade de falha.

#### 4.2.2 Método de simulação de Monte Carlo com amostragem por importância

Com o objetivo de diminuir o número de simulações para a redução do coeficiente de variação do estimador da probabilidade de falha dada pela equação (4.8), pode-se utilizar a técnica de Amostragem por Importância. Dessa forma a equação (4.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P_f = \int_{\mathbf{X}} I[g(\mathbf{X})] \cdot \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{f_{\mathbf{W}}^k(\mathbf{X})} \cdot f_{\mathbf{W}}^k(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (4.13)$$

onde  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  é a função densidade de probabilidade conjunta original das variáveis aleatórias e  $f_{\mathbf{W}}^k(\mathbf{X})$  é a função densidade de probabilidade conjunta de amostragem, sendo  $k$  um índice para diferenciar diversas funções de amostragem utilizadas. Esta distribuição deve ser escolhida criteriosamente de forma a trazer as simulações para próximo da superfície de falha (fronteira). Existem várias técnicas que têm como finalidade última obter a função de amostragem mais adequada. Neste trabalho será utilizado o conceito de *IFM-point* (*Iterative Fast Monte Carlo point*; Bucher *et al.* (1988)). Este método utiliza apenas uma função de amostragem, criteriosamente posicionada no “centro de massa ponderado” dos pontos de uma simulação pertencentes ao domínio de falha e com uma matriz de correlação representativa destes pontos, é possível obter-se reduções significativas na variância do estimador da probabilidade de falha (Gomes (2001)).

O coeficiente de variação da probabilidade de falha pode ser calculado de uma maneira semelhante à utilizada para Monte Carlo Direto, sendo uma indicação do grau de aproximação do estimador da probabilidade de falha. O limite de 5% para o coeficiente de variação da probabilidade de falha pode ser utilizado como critério de parada para as simulações com amostragem por importância adaptativa.

Para a geração das amostras  $\mathbf{X}$  tem-se um procedimento idêntico ao de simulação direta de Monte Carlo, lembrando-se que as amostras são geradas a partir da função de amostragem e não da função original (Gomes, 2001).

### 4.2.3 *First order reliability method (FORM)*

A integração da equação (4.2) é difícil quando se trata com várias variáveis aleatórias, caso do presente estudo. Além disso, a função  $f_x(\mathbf{X})$  geralmente não é conhecida se não houver dados estatísticos suficientes. Dessa forma, para obter um índice de confiabilidade  $\beta$  costuma-se usar o primeiro e o segundo momentos (média e variância) da margem de segurança  $M$  de equação (4.1).

Quando a função  $M$  é linear e as variáveis aleatórias são independentes e normalmente distribuídas, o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser definido como:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}, \quad (4.14)$$

onde  $\mu_M$  e  $\sigma_M$  representam respectivamente a média e o desvio padrão da função  $M$ . Quando a margem de segurança é não-linear, os valores aproximados de  $\mu_M$  e  $\sigma_M$  são obtidos pela linearização da função  $M$  através da expansão da função em série de Taylor truncada no termo linear. O ponto no qual é feito o desenvolvimento da série de Taylor afeta os valores de  $\mu_M$  e  $\sigma_M$ .

O método conhecido como FOSM (*First – Order Second – Moment*) utiliza as médias das variáveis aleatórias para desenvolver a série de Taylor, o valor de  $\beta$  pode ser obtido analiticamente, porém seu valor tende a ficar superestimado (Ang & Tang, 1975). Além disso, o método FOSM fornece um valor para o índice de confiabilidade que depende da expressão matemática utilizada para representar a função margem de segurança  $M$ , mesmo que as expressões para a margem de segurança forneçam valores idênticos. Dessa forma, um método que obtém o mesmo valor de  $\beta$ , independentemente da função utilizada para calcular a margem de segurança foi proposto por Hasofer-Lind (Haldar & Mahadevan, 2000), e é conhecido como AFOSM (*Advanced First-Order Second – Moment*). No caso de variáveis aleatórias independentes, as variáveis aleatórias  $x$  são transformadas em variáveis normais padronizadas  $u_i$  fazendo-se:

$$u_i = \Phi^{-1} \left[ F_{x_i}(x_i) \right], \quad (4.15)$$

onde  $F_{x_i}(x_i)$  e  $\Phi^{-1}$  são respectivamente a função de distribuição de probabilidade acumulada e a inversa da função de distribuição normal padrão da variável  $x_i$ . Dessa forma, a margem de segurança no espaço real  $\mathbf{X}$  é transformada para o espaço Gaussiano padrão  $\mathbf{U}$ :

$$H(\mathbf{U}) \approx M(T(\mathbf{U})) = M(\mathbf{X}) \quad , \quad (4.16)$$

onde  $T$  é a transformação entre variáveis não correlacionadas normais padrão para variáveis no espaço real. A linearização da função de estado limite é feita em um ponto  $\mathbf{U}^*$  que tenha a menor distância entre a superfície de falha  $H(\mathbf{U}) = 0$  e a origem do espaço  $\mathbf{U}$ . O ponto  $\mathbf{U}^*$  é chamado de ponto de projeto e  $\beta$  é calculado como a distância entre a origem e este ponto.

$$\beta = \min(\mathbf{U}^{*T} \cdot \mathbf{U}^*)^{1/2} \quad . \quad (4.17)$$

A procura pelo ponto de projeto é, portanto, um problema de otimização do tipo:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f = (\mathbf{U}^{*T} \cdot \mathbf{U}^*)^{1/2} \\ \text{com a restrição} & H(\mathbf{U}) = 0 \end{cases} \quad . \quad (4.18)$$

#### 4.2.1.3 Algoritmo de Rackwitz –Fiessler

Para resolver o problema da equação (4.18) utiliza-se o algoritmo proposto por Rackwitz – Fiessler (1978), que pode ser descrito da seguinte forma:

**Passo 1:** Definir a função que representa a margem de segurança  $M$ .

**Passo 2:** Assumir valores iniciais para o ponto de projeto  $x_i^*$   $i=1,2,\dots,n$ , e calcular o correspondente valor da função  $M$  (considera-se aqui, como partida para o processo

iterativo, os valores iniciais do ponto de projeto, admitido como sendo as médias das variáveis de projeto).

**Passo 3:** Calcular a média e o desvio padrão, no ponto de projeto, da distribuição normal equivalente para variáveis que não têm distribuição normal. As coordenadas do ponto de projeto no espaço normal padrão são:

$$u_i^* = \frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N} .$$

**Passo 4:** Calcular as derivadas parciais  $\frac{\partial M}{\partial x_i}$  no ponto de projeto  $x_i^*$ .

**Passo 5:** Calcular as derivadas parciais  $\frac{\partial M}{\partial u_i}$  no espaço normal padrão equivalente,

usando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial M}{\partial u_i} = \frac{\partial M}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_i} = \frac{\partial M}{\partial x_i} \cdot \sigma_{X_i}^N .$$

**Passo 6:** Calcular um novo valor para o ponto de projeto  $u_i^*$  no espaço normal padrão equivalente através da seguinte expressão:

$$u_{i\ k+1}^* = \frac{1}{|\nabla M(u_{i\ k}^*)|^2} \left[ \nabla M(u_{i\ k}^*)^t u_{i\ k}^* - M(u_{i\ k}^*) \right] \nabla M(u_{i\ k}^*) .$$

**Passo 7:** Calcular a distância deste novo ponto até a origem e estimar novo índice de confiabilidade

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^*)^2} .$$

**Passo 8:** Verificar a convergência de  $\beta$  para um determinado valor de tolerância pré-determinado.

**Passo 9:** Calcular os valores do ponto de projeto no espaço original fazendo:

$$x_i^* = \mu_{X_i}^N + \sigma_{X_i}^N \cdot u_i^* .$$

**Passo 10:** Calcular o valor de  $M$  para o novo ponto de projeto e verificar o critério de convergência para  $M$ .

**Passo 11:** Se ambos os critérios de convergência dos passos 8 e 10 forem satisfeitos, deve-se parar o algoritmo. Senão, repetir os passos de 3 a 11.

No algoritmo acima descrito, todas as variáveis do espaço original são assumidas como não correlacionadas. Caso exista correlação entre as mesmas calcula-se, via decomposição de Cholesky, uma matriz de covariância que transforma as variáveis correlacionadas em não-correlacionadas (Ang & Tang, 1975 e Haldar & Mahadevan, 2000).

#### 4.3 Análise de confiabilidade de laminados de materiais compósitos unidirecionais

Considerando uma placa fina de material compósito unidirecional (fibras orientadas em somente uma direção), submetida a um estado plano de tensões, conforme figura 3.2 e substituindo a equação (3.60), que representa o critério de falha de Tsai-Wu, na equação (4.1), a margem de segurança  $M$  toma a seguinte forma:

$$M = 1 - \sum_{i=x}^y \left[ \left( \frac{1}{(S_i^T)_{ult}} - \frac{1}{(S_i^C)_{ult}} \right) S_i + \frac{S_i^2}{(S_i^T)_{ult} (S_i^C)_{ult}} \right] + \frac{S_{xy}^2}{(S_{xy}^2)_{ult}} + \frac{2 F_{xy} S_y S_x}{\sqrt{(S_x^T)_{ult} (S_x^C)_{ult} (S_y^T)_{ult} (S_y^C)_{ult}}} , \quad (4.19)$$

sendo  $-1/2$  o valor adotado para o parâmetro  $F_{xy}$ , de acordo com a equação (3.69).

A fim de atingir suas especificações de projeto, os materiais compósitos laminados são compostos pela junção de várias lâminas de compósitos com diferentes ângulos de orientação das fibras, espessuras e materiais, conforme mostra a figura 4.1.

A placa está submetida a um estado plano de tensões  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_6$ , onde os subscritos 1, 2 e 6 representam o eixo principal da placa, o eixo perpendicular ao eixo 1 e o corte com relação aos eixos 1-2, respectivamente. As lâminas do laminado são divididas em  $N$  grupos, de acordo com a orientação de suas fibras. Cada grupo de lâminas tem o seu próprio ângulo de orientação das fibras  $\theta_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) e razão de disposição das fibras  $\nu_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ), definida como a razão entre a soma das espessuras de todas as lâminas com o mesmo ângulo de orientação e a espessura total do laminado.

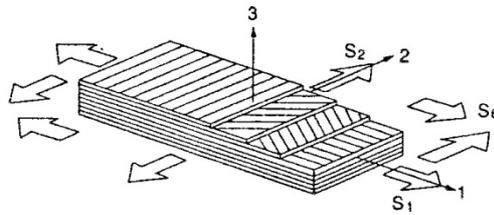


Figura 4.1 - Sistema laminado.

A distribuição de tensões no laminado é expressa como:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \nu_i \begin{bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{6i} \end{bmatrix} . \quad (4.20)$$

onde  $S_{1i}$ ,  $S_{2i}$  e  $S_{6i}$  são as tensões no grupo  $i$  de lâminas com a mesma orientação das fibras, as quais podem ser calculadas como:

$$\begin{bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{6i} \end{bmatrix} = Q_i \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} . \quad (4.21)$$

onde  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_6$  representam as deformações correspondentes a  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_6$  respectivamente.  $Q_i$  é a matriz de rigidez do grupo  $i$  de lâminas e é construída como segue:

$$Q_i = \begin{bmatrix} Q_{i11} & Q_{i12} & Q_{i16} \\ Q_{i12} & Q_{i22} & Q_{i26} \\ Q_{i16} & Q_{i26} & Q_{i66} \end{bmatrix} , \quad (4.22)$$

onde

$$\begin{aligned}
Q_{i11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta_i + U_3 \cos 4\theta_i, \\
Q_{i22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta_i + U_3 \cos 4\theta_i, \\
Q_{i12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta_i, \\
Q_{i66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta_i, \\
Q_{i16} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta_i + U_3 \sin 4\theta_i, \\
Q_{i26} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta_i - U_3 \sin 4\theta_i;
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{8} (3q_{11} + 3q_{22} + 2q_{12} + 4q_{66}), \\
U_2 &= \frac{1}{2} (q_{11} - q_{22}), \\
U_3 &= \frac{1}{8} (q_{11} + q_{22} - 2q_{12} - 4q_{66}), \\
U_4 &= \frac{1}{8} (q_{11} + q_{22} + 6q_{12} - 4q_{66}), \\
U_5 &= \frac{1}{8} (q_{11} + q_{22} - 2q_{12} + 4q_{66});
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
q_{11} &= \frac{E_{x_i}}{1 - \nu_{x_i} \nu_{y_i}}, \\
q_{22} &= \frac{E_{y_i}}{1 - \nu_{x_i} \nu_{y_i}}, \\
q_{12} &= \frac{\nu_{x_i} E_{x_i}}{1 - \nu_{x_i} \nu_{y_i}} = \frac{\nu_{y_i} E_{y_i}}{1 - \nu_{x_i} \nu_{y_i}}, \\
q_{66} &= E_{x_{y_i}} \quad ;
\end{aligned} \tag{4.25}$$

onde os subscritos  $x_i, y_i$  e  $s_i$  indicam os eixos paralelos às fibras, perpendiculares e na direção do corte do grupo  $i$  de lâminas, conforme figura 3.2;  $\theta_i$  representa os ângulos entre as fibras das lâminas e a direção 1,  $E_{x_i}$  e  $E_{y_i}$  são os módulos de elasticidade longitudinais nas direções x e y,  $E_{x_{y_i}}$  é o módulo de elasticidade transversal no plano x-y e  $\nu_{x_i}, \nu_{y_i}$  são os coeficientes de Poisson nas direções x e y.

Substituindo a equação (4.21) na equação (4.20) e isolando as deformações  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_6$  tem-se :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \left( \sum_{i=1}^N v_i Q_i \right)^{-1} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Então, as tensões no grupo  $i$  de lâminas são obtidas substituindo a equação (4.26) em (4.21):

$$\begin{bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{6i} \end{bmatrix} = Q_i \left( \sum_{i=1}^N v_i Q_i \right)^{-1} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

As tensões nos eixos 1-2 são então rotacionadas para os eixos  $x_i, y_i$  utilizando a matriz de rotação:

$$\begin{bmatrix} S_{x_i} \\ S_{y_i} \\ S_{s_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{6i} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

onde  $m = \cos \theta_i$  e  $n = \sin \theta_i$ .

Utilizando o critério de ruptura de Tsai-Wu para definir a função de estado limite do grupo  $i$  de lâminas tem-se:

$$M_i = 1 - \left\{ \sum_{k=x_i}^{y_i} \left[ \left( \frac{1}{(S_k^T)_{ult}} - \frac{1}{(S_k^C)_{ult}} \right) S_k + \frac{S_k^2}{(S_k^T)_{ult} (S_k^C)_{ult}} \right] + \frac{S_{xyi}^2}{(S_{xy}^2)_{ult i}} + \frac{2 F_{x_i y_i}^* S_{y_i} S_{x_i}}{\sqrt{(S_x^T)_{ult i} (S_x^C)_{ult i} (S_y^T)_{ult i} (S_y^C)_{ult i}}} \right\}, \quad (4.29)$$

onde  $F_{x_i y_i}^*$  é assumido como  $-1/2$  (Gürdal et al., 1999).

Neste trabalho, o cálculo da confiabilidade da equação (4.29) é realizado utilizando os métodos, anteriormente descritos, de Monte Carlo, Monte Carlo com amostragem por importância e FORM, assumindo que todo laminado colapsa quando uma de suas lâminas falha (*first ply failure*). Este comportamento é típico de sistemas com diversas funções de falha em série. Portanto, com o objetivo de avaliar a precisão

dos resultados obtidos pelo método FORM clássico, também foi utilizado o método de FORM aplicado para sistemas em série, o qual está descrito a seguir.

#### 4.3.1 FORM aplicado para sistemas em série.

A resistência do laminado é modelada como um sistema em série, ou seja, é considerado que a falha de qualquer lâmina causa a falha de todo o laminado. Conseqüentemente, a probabilidade de falha  $P_f$  é dada por:

$$P_f = P \left[ \bigcup_{i=1}^N M_i \leq 0 \right], \quad (4.30)$$

onde  $N$  é o número de lâminas. O vetor de variáveis aleatórias contendo as tensões, resistências e outras propriedades do material,  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , é transformado para o espaço padrão  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  usando a transformação de Rossenblatt (Ang & Tang (1975)). As funções de estado limite no espaço  $\mathbf{U}$  são representadas por  $h_i(\mathbf{U})$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), correspondendo às funções de estado limite da equação (4.29). Conforme é mostrado na figura 4.2, o contorno entre a região de falha e de segurança para o laminado consiste de múltiplas superfícies de estado limite:  $h_i(\mathbf{U}) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). A utilização de FORM com apenas um ponto de linearização pode não conduzir a resultados satisfatórios, uma vez que utiliza apenas um ponto de linearização pertencente a uma das superfícies de estado limite. Utiliza-se então um algoritmo que apropriadamente seleciona múltiplos pontos nos contornos (Murotsu *et al.*, 1994). Baseado nestes pontos, o método “de checagem múltipla de pontos” (Murotsu *et al.*, 1994) é aplicado para calcular a probabilidade de falha do laminado. As funções de estado limite são linearizadas nos pontos  $N_B$  selecionados,  $\mathbf{U}^1, \mathbf{U}^2, \dots, \mathbf{U}^{N_B}$ , conforme ilustrado na figura 4.2:

$$m_i(U) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{k(i)}(\mathbf{U})}{\partial U_j} \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^i} \cdot (U_j - U_j^i) \quad (i = 1, 2, \dots, N_B), \quad (4.31)$$

onde  $\mathbf{U}^i = (U^i_1, U^i_2, \dots, U^i_n)^T$  e  $h_{k(i)}(\mathbf{U})$  é a função de estado limite calculada no ponto selecionado  $\mathbf{U}^i$ . A probabilidade de falha do sistema  $P_f$ , definida pela equação (4.30) é aproximada usando as funções de estado limite linearizadas  $m_i(\mathbf{U})$  ( $i = 1, 2, \dots, N_B$ ):

$$P_f \approx P \left[ \bigcup_{i=1}^{N_B} m_i(\mathbf{U}) \leq 0 \right]. \quad (4.32)$$

O índice de confiabilidade  $\beta$  é definido utilizando a probabilidade de falha estimada na equação (4.32):

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_f). \quad (4.33)$$

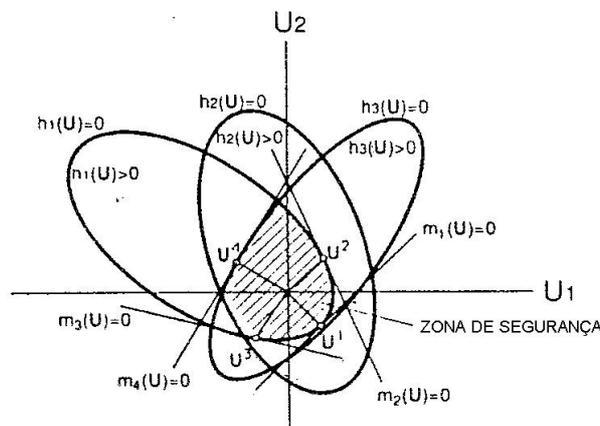


Figura 4.2 - FORM aplicado para múltiplas funções de estado limite – adaptado de Miki (1997).

#### 4.4 Exemplo numéricos

A seguir serão apresentadas algumas simulações numéricas do cálculo do índice de confiabilidade a fim de que fique demonstrada a eficiência e precisão dos métodos anteriormente descritos.

Primeiramente serão tratados problemas envolvendo apenas uma lâmina, onde foi aplicado o método FORM. Em seguida é apresentada a comparação dos índices de confiabilidade para laminados constituídos por várias lâminas. Nestes casos, se utilizou os métodos de Monte Carlo Direto, Monte Carlo com amostragem por importância, FORM e FORM para sistemas em série.

#### 4.4.1 Análise da confiabilidade de lâminas de materiais compósitos unidirecionais

Nos exemplos apresentados a seguir, o material compósito utilizado é o Grafite/Epoxy (T300/5208) e é assumido que suas resistências tenham uma distribuição de probabilidades do tipo Normal. A tabela 4.1 apresenta os valores médios das resistências ao longo da direção das fibras. Todos os coeficientes de variação CV (relação entre desvio padrão e média dos valores) são assumidos como 0,1 (Miki *et al.*, 1990).

Tabela 4.1 - Valores Médios da Resistência do Material Usado (MPa).

Material	Tipo	$R_x^T$	$R_x^C$	$R_y^T$	$R_y^C$	$R_{xy}$
T300/5208	Grafite/Epoxy	1500	1500	40	246	68

As tensões aplicadas  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_6$  também foram consideradas normalmente distribuídas e os valores médios e coeficientes de variação foram apropriadamente escolhidos para cada simulação. Os valores dos coeficientes de variação estão compreendidos na faixa de 0 a 0,6.

Com exceção da última simulação, é considerado que todas as variáveis são não-correlacionadas.

#### 4.2.1.4 Confiabilidade no estado uniaxial de tensão

##### Efeito do Valor Médio de Tensões

Um aumento dos valores médios das tensões uniaxiais de tração, compressão e corte leva a uma redução do índice de confiabilidade ( $\beta$ ). O ângulo de orientação das fibras ( $\theta$ ) que produz a máxima confiabilidade é  $0^\circ$  para tensões uniaxiais de tração e compressão (ver figura 4.3) e  $45^\circ$  para corte puro (ver figura 4.4). Como pode ser observado na figura 4.3, os valores do índice de confiabilidade não foram estimados para ângulos de orientação das fibras inferiores a  $3^\circ$ , uma vez que estes ultrapassaram o limite máximo para o valor de  $\beta$  utilizado no programa de confiabilidade.

## Efeito da Variação das Tensões

A figura 4.3 mostra os efeitos do coeficiente de variação (CV) para tensão uniaxial de tração e a figura 4.4 mostra o efeito de CV para a situação de corte puro. Verifica-se que o índice de confiabilidade diminui com o aumento de CV. Pode-se observar ainda que, nos dois casos apresentados nas figuras 4.3 e 4.4, o ângulo de orientação das fibras que produz o maior índice de confiabilidade não é afetado pela variação de CV.

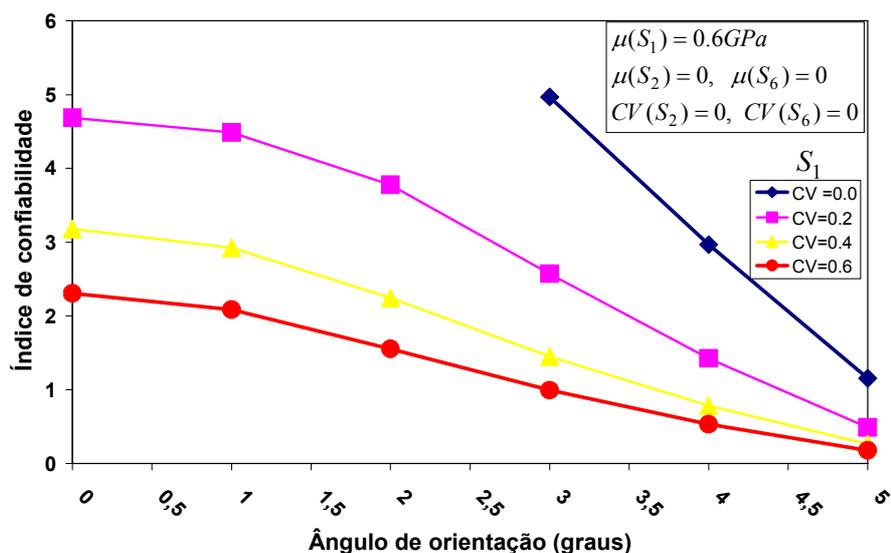


Figura 4.3 - Efeito do coeficiente de variação da tensão de tração em condição uniaxial de carga.

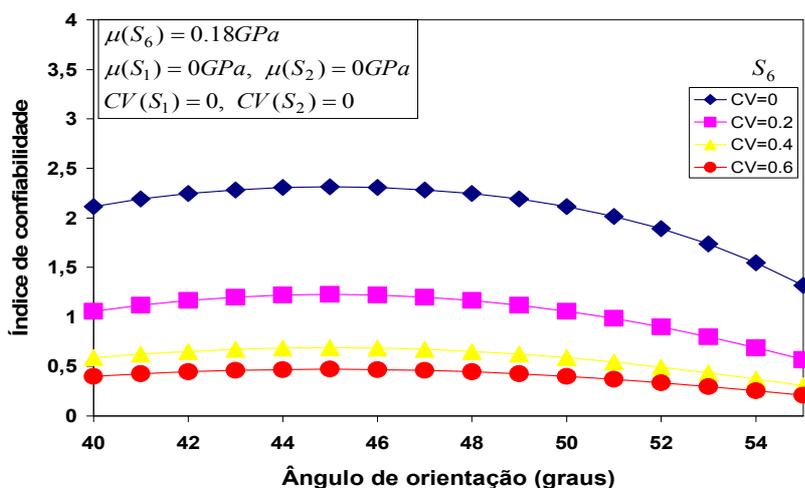


Figura 4.4 - Efeito do coeficiente de variação da tensão de corte em condição uniaxial de carga.

#### 4.2.1.5 Confiabilidade no estado plano de tensões

##### Efeito do Valor Médio de Tensões

A figura 4.5 mostra a relação entre o índice de confiabilidade ( $\beta$ ) e o ângulo de orientação das fibras ( $\theta$ ) sobre condição de tensão de tração ao longo do eixo 1 ( $S_1$ ) e tensão de corte ( $S_6$ ). Os valores médios das tensões  $S_1$  e  $S_6$  foram considerados respectivamente 0,3 e 0,25 GPa (tensões de referência). O efeito de  $S_6$  é reduzido quando  $S_1$  aumenta e vice-versa. A linha azul (◆) mostra a condição de tensões de referência e a máxima confiabilidade é obtida para aproximadamente  $\theta = 30^\circ$ . As linhas finas mostram os resultados para o valor médio da tensão  $S_1$  sendo aumentado e diminuído de 10%. Resumindo, o ângulo de orientação das fibras que produz a máxima confiabilidade aumenta com uma diminuição do valor médio de  $S_1$  e diminui quando o valor médio de  $S_1$  aumenta.

As linhas tracejadas mostram os resultados para o valor médio da tensão de corte  $S_6$  sendo aumentada e diminuída em 10%. O índice de confiabilidade diminui quando o valor médio de  $S_6$  aumenta e o ângulo de orientação das fibras que produz a máxima confiabilidade diminui com uma redução do valor médio de  $S_6$ .

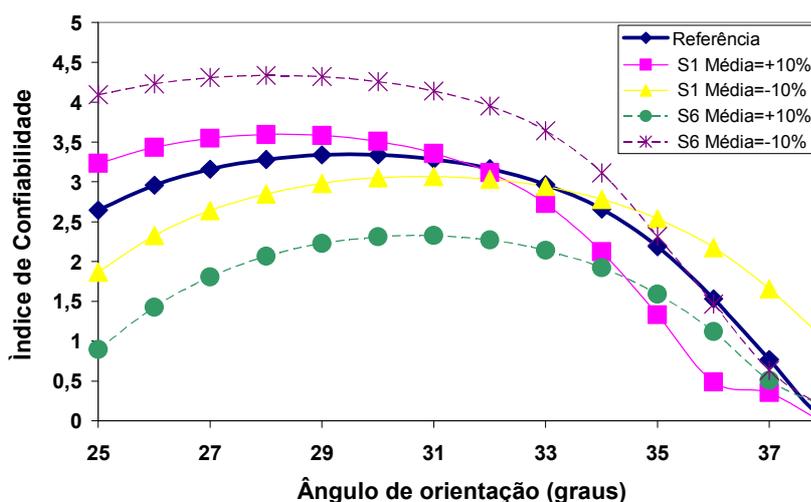


Figura 4.5 - Efeito dos Valores Médios de  $S_1$  e  $S_6$ .

## Efeito da Variação das Tensões

A figura 4.6 mostra a relação entre o índice de confiabilidade ( $\beta$ ) e o ângulo de orientação das fibras ( $\theta$ ) sobre condição de tensão de tração ao longo do eixo 1 ( $S_1$ ) e tensão de corte ( $S_6$ ) e o efeito do coeficiente de variação (CV) atuando em  $S_1$ . O índice de confiabilidade diminui com um aumento de CV e o ângulo de orientação das fibras que produz o maior  $\beta$  muda muito pouco. A figura 4.7 mostra o efeito do CV aplicado na tensão de corte  $S_6$ . Novamente, o índice de confiabilidade diminui com um aumento de CV, entretanto o ângulo de orientação das fibras que produz a máxima confiabilidade muda significativamente.

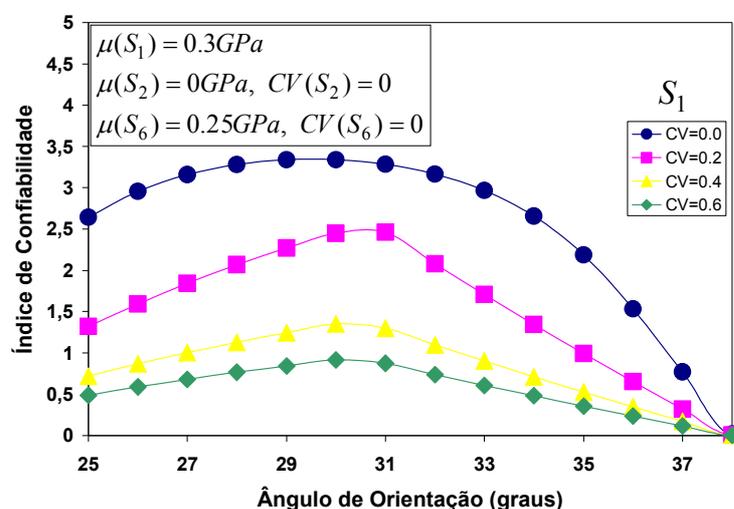


Figura 4.6 - Efeito do Coeficiente de Variação de  $S_1$ .

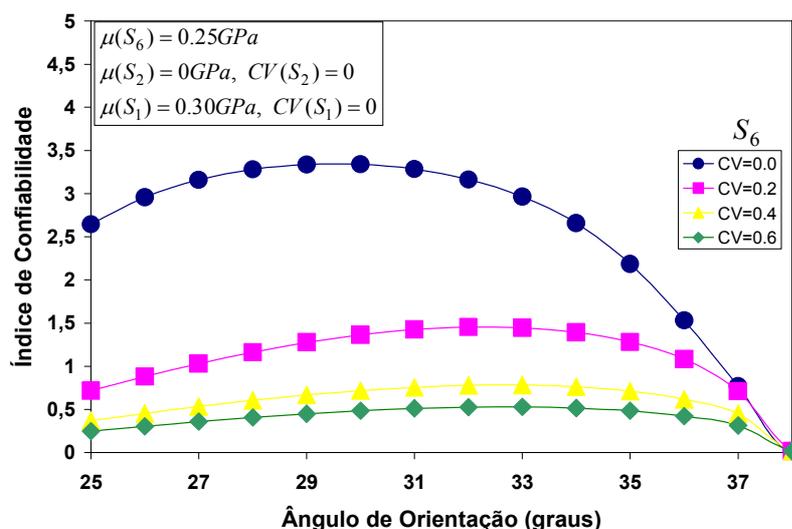


Figura 4.7 - Efeito do Coeficiente de Variação de  $S_6$ .

#### 4.4.1.1 Efeito da variação do ângulo de orientação das fibras

Nas seções anteriores o ângulo de orientação das fibras foi tratado como uma variável determinística. Aqui ele passa a ser considerado como uma variável aleatória.

Os efeitos da variação do ângulo de orientação das fibras sobre uma condição de carregamento de tração uniaxial são apresentados nas figuras 4.8 e 4.9. A figura 4.8 exhibe o caso onde o CV (coeficiente de variação) da tensão aplicada é zero, enquanto que a figura 4.9 considera um CV de 0,6. Em ambos os casos, o desvio padrão (SD) do ângulo de orientação das fibras varia de 0 a 3 graus.

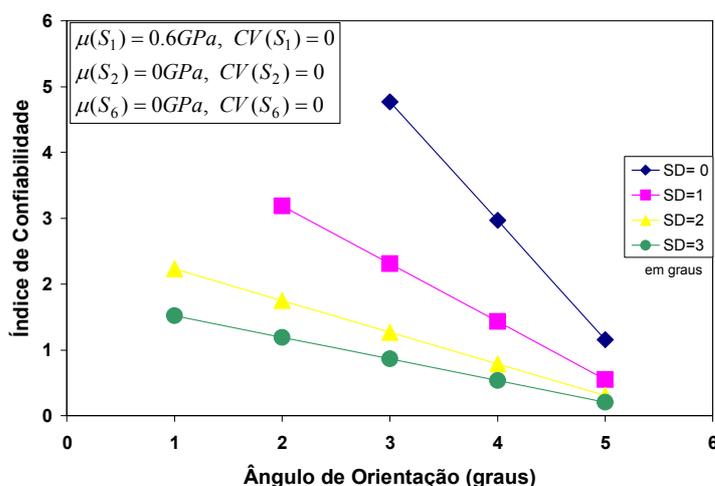


Figura 4.8 - Efeito do desvio padrão do ângulo de orientação das fibras sobre condição de carregamento de tração uniaxial  $CV(S_1) = 0$ .

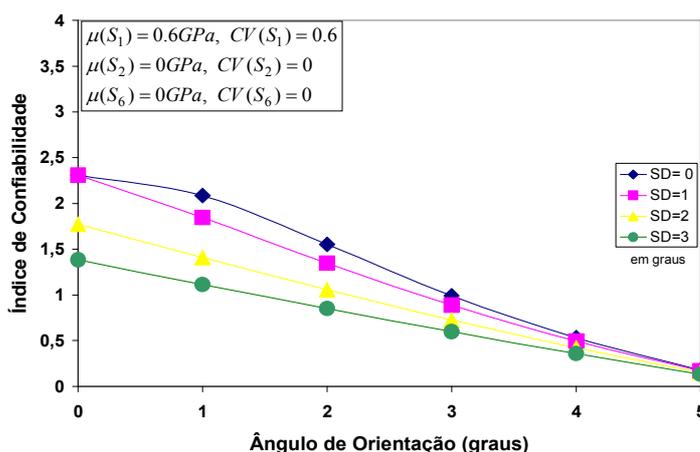


Figura 4.9 - Efeito do desvio padrão do ângulo de orientação das fibras sobre condição de carregamento de tração uniaxial  $CV(S_1) = 0.6$ .

Pode-se observar que quanto maior a variação do ângulo de orientação das fibras menor é o índice de confiabilidade obtido e que a redução deste índice é menor quanto maior for o desvio padrão (SD) do ângulo de orientação. Comparando as figuras 4.8 e 4.9, observa-se que quanto maior o CV de  $S_1$  menor é a variação da confiabilidade e, portanto, a precisão do ângulo de orientação, no processo de fabricação, torna-se menos rigorosa para tensões com grande variabilidade.

O efeito da variação do ângulo de orientação em uma condição de tensão pura de corte é mostrado na fig. 4.10. Percebe-se que o valor máximo de confiabilidade não é alterado pela variação do ângulo de orientação para os casos da tensão  $S_6$  ser tratada com CV=0 ou CV=0,6. Isso significa que a precisão na fabricação do ângulo de orientação das fibras não é fundamental neste caso, supondo que os ângulo de orientação estejam normalmente distribuídos.

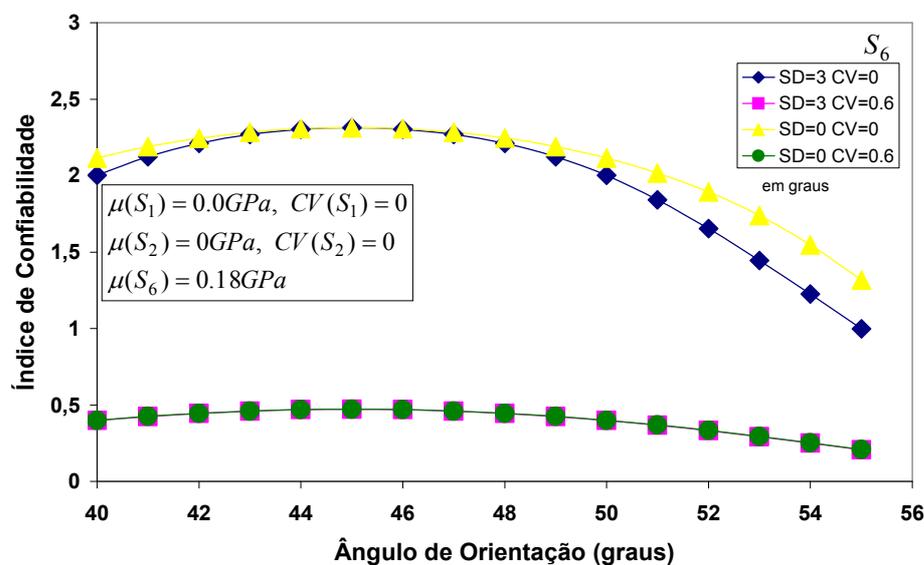


Figura 4.10 - Efeito do desvio padrão do ângulo de orientação das fibras sobre condição corte puro.

O efeito da variação do ângulo de orientação para uma condição geral de tensões planas é apresentado nas figuras 4.11 e 4.12. Os valores médios das tensões de tração e corte foram consideradas respectivamente 0,3 e 0,25 GPa. A figura 4.11 apresenta o caso da variação da tensão de tração. Percebe-se que o índice de confiabilidade decresce consideravelmente com um aumento da variação dos ângulos de orientação, quando as variações das tensões aplicadas são pequenas. As variações de confiabilidade são pequenas quando as tensões aplicadas possuem alto valor de coeficiente de variação.

Fenômeno semelhante ocorre para o caso da variação da tensão de corte, conforme figura 4.12.

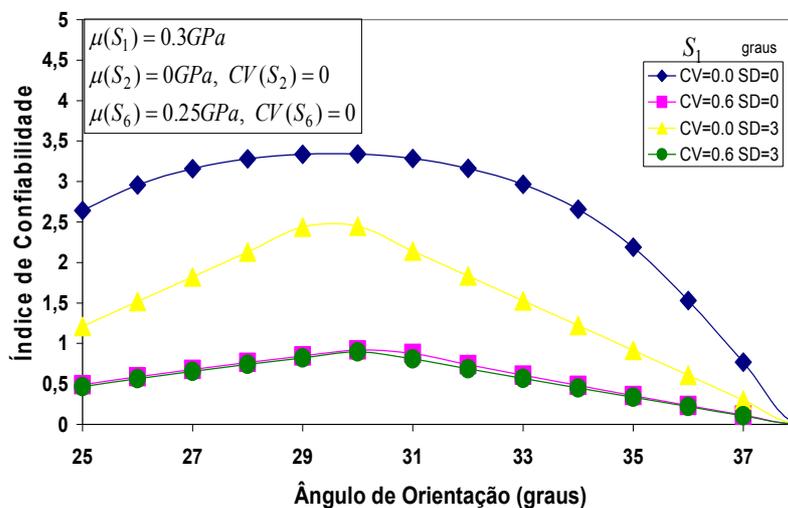


Figura 4.11 - Efeito da variação do ângulo de orientação sobre um estado plano de tensões ( $S_1$  variável).

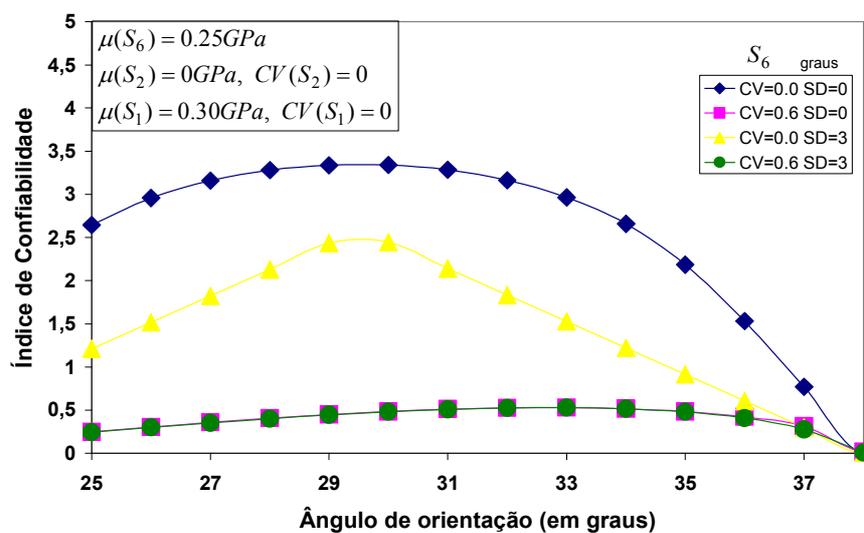


Figura 4.12 - Efeito da variação do ângulo de orientação sobre um estado plano de tensões ( $S_6$  variável).

#### 4.4.1.2 Efeito de correlação entre as resistências e tensões aplicadas

Foi assumido que as resistências e as tensões aplicadas não possuem correlação. Entre as resistências, embora exista certa correlação devido à dependência entre a resistência em uma determinada direção e a interface entre as fibras e a matriz do

material compósito, é experimentalmente difícil obter estes dados e tais coeficientes de correlação ainda não estão disponíveis na literatura.

O coeficiente de correlação entre a resistência de tração e de corte, no estado plano de tensões, foi obtido através de soluções numéricas e o efeito deste coeficiente sobre o índice de confiabilidade não se mostrou relevante (Miki *et al.*, 1990).

O efeito do coeficiente de correlação entre as tensões aplicadas é apresentado na figura 4.13. Pode-se observar que o maior coeficiente de correlação positivo produz a maior confiabilidade, enquanto que o maior coeficiente de correlação negativo produz a menor confiabilidade. Observa-se também que o ângulo de orientação das fibras que produz a maior confiabilidade muda com uma variação do coeficiente de correlação, mas essa variação só torna-se considerável para grandes valores de coeficiente de correlação.

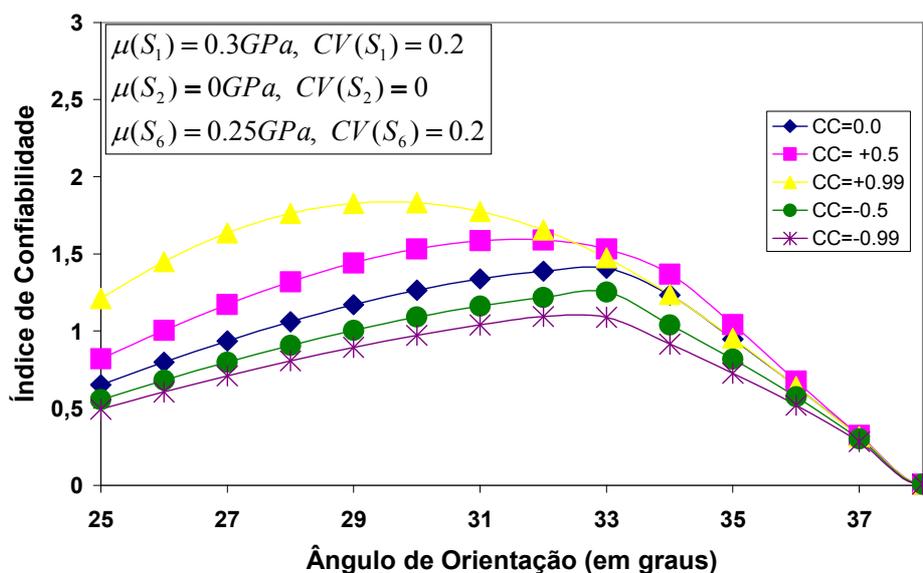


Figura 4.13 - Efeito do coeficiente de correlação entre as tensões de tração e corte (estado plano de tensões).

#### 4.4.2 Análise da confiabilidade de laminados de materiais compósitos

O próximo exemplo trata do cálculo do índice de confiabilidade ( $\beta$ ) de um laminado de material compósito constituído por várias lâminas. O objetivo é verificar a precisão dos diversos métodos de confiabilidade anteriormente expostos, comparando-os com o resultados obtidos por Miki *et al.* (1997).

O material utilizado nos cálculos é o grafite/epóxi (T300/5208). As médias e os coeficientes de variação das resistências estão listados na tabela 4.2. As médias e os desvios padrões das tensões  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_6$  são apresentados na tabela 4.3. As tensões aplicadas e as resistências do laminado são consideradas descorrelacionadas e com distribuição de probabilidade normal.

Tabela 4.2 - Parâmetros do material (unidade: MPa).

Material	$E(R_x^T)$	$E(R_x^C)$	$E(R_y^T)$	$E(R_y^C)$	$E(R_{xy})$	CV
T300/5208 Grafite/Epóxi	1500	1500	40	246	68	0,1

Tabela 4.3 - Parâmetros das Tensões (unidade: GPa).

$E(S_1)$	$E(S_2)$	$E(S_6)$	$SD(S_1)$	$SD(S_2)$	$SD(S_6)$
0,1	-0,1~0,1	0	0,03	0,03	0

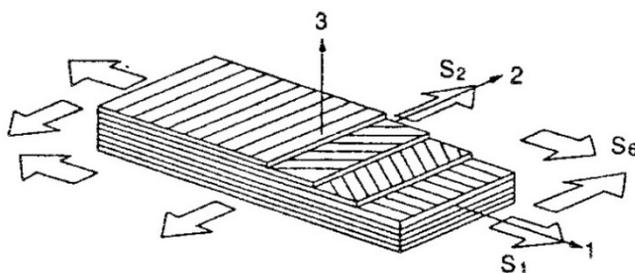


Figura 4.14 - Configuração dos laminados multiaxiais.

Laminados biaxiais  $[+\theta/-\theta]_s$  com  $CV(S_6) = 0$  foram utilizados nas simulações. A figura 4.15a apresenta uma comparação entre os resultados obtidos por Miki *et al.* (1997), FORM com um ponto de linearização, FORM para sistemas em série, Monte Carlo Direto e Monte Carlo com Amostragem por Importância. A figura (4.15b) apresenta os respectivos ângulos de orientação das fibras. Pode-se observar que os índices de confiabilidade obtidos por todos os métodos seguem a mesma tendência dos resultados apresentados por Miki *et al.* (1997), apresentando uma precisão satisfatória.

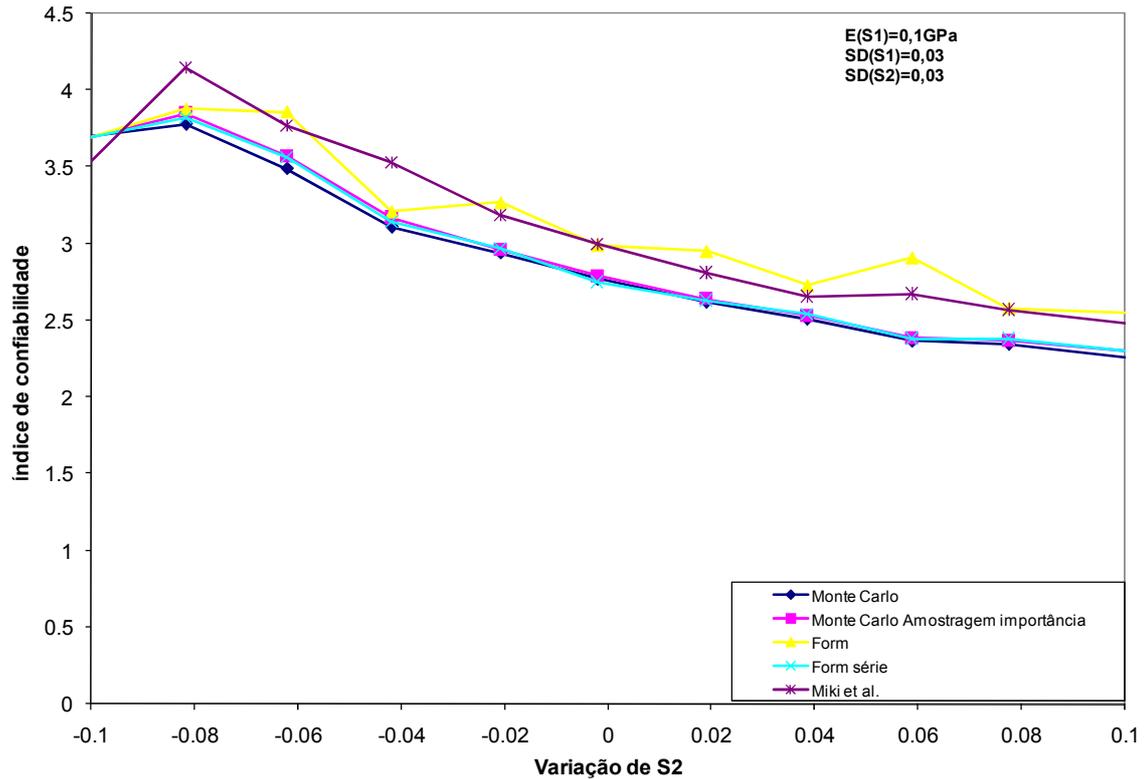


Figura 4.15a. Validação dos Métodos de confiabilidade aplicados em laminados de materiais compósitos.

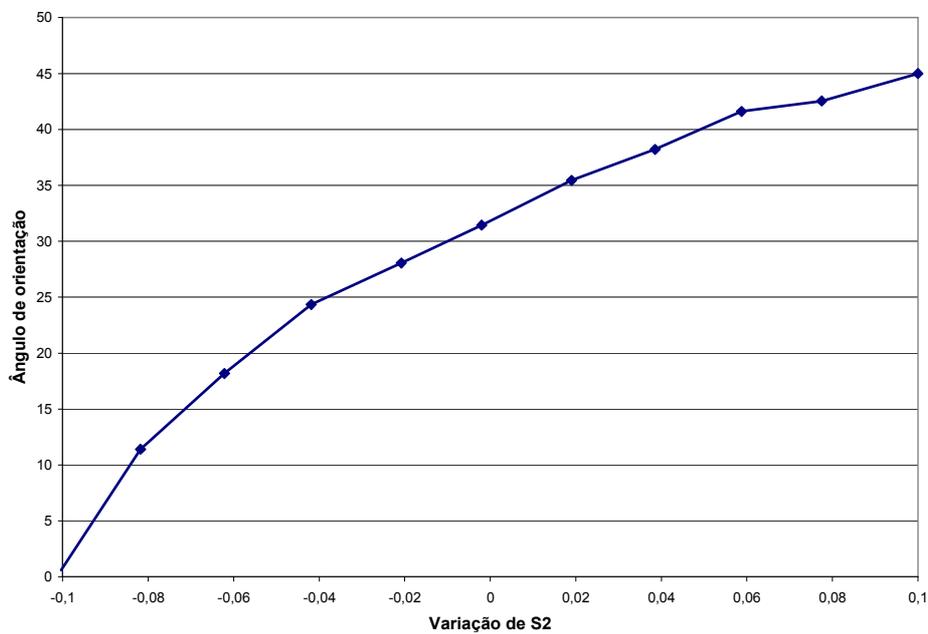


Figura 4.15b. Variação do ângulo de orientação das fibras.

---

## CAPÍTULO 5

### 5. OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE COM A.G.

#### 5.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os algoritmos utilizados na otimização de laminados de materiais compósitos com restrições de confiabilidade. O processo de otimização é feito utilizando algoritmos genéticos (AGs). AGs são algoritmos de procura baseados nos conceitos da seleção natural e na sobrevivência do indivíduo mais apto. O projeto da seqüência ótima de lâminas em laminados de materiais compósitos é um problema de mínimo global e devido as suas características de procura os AGs se mostram superiores aos métodos determinísticos de otimização, os quais muitas vezes convergem para soluções que representam um mínimo local (Goldberg, 1989). Além disso, em projetos comerciais desse tipo de estrutura, os ângulos de orientação das fibras, a quantidade e a espessura das camadas são variáveis discretas, fato esse que corrobora para a utilização de AGs, visto que esta ferramenta computacional é indicada para problemas envolvendo estes tipos de variáveis. Uma breve descrição dos AGs é apresentada, bem como alguns exemplos de validação, em problemas estruturais e envolvendo laminados de matérias compósitos.

#### 5.2 Processo de otimização via algoritmos genéticos

Os algoritmos genéticos foram concebidos por John Holland na década de 70 (Holland, 1975). Sua popularização deu-se mais tarde por Goldberg, aluno de Holland, através de seus trabalhos voltados ao campo da engenharia ou mesmo abordando temas teóricos sobre o assunto (Goldberg, 1989).

Conforme a definição de Goldberg, AGs são “métodos de busca baseados na mecânica da seleção natural e na genética natural”. Quando uma população de organismos vivos evolui por sucessivas gerações, as características úteis para a sobrevivência tendem a serem transmitidas ao longo do tempo. Isso ocorre porque os indivíduos que as possuem têm mais chances de sobreviverem e se reproduzirem, originando descendentes com características semelhantes ou mesmo superiores às suas. São em estruturas biológicas denominadas cromossomos que estão armazenadas, na

forma de genes, as informações determinantes das características de cada indivíduo. Os processos de reprodução ocorrem através da mecânica da genética natural, baseados em operações onde é realizada mescla de informação genética entre os cromossomos pertencentes a dois indivíduos, além de eventuais modificações sobre alguns genes. Essas operações são realizadas de forma aleatória, porém estruturada, resultando na evolução das espécies.

Os AGs imitam o processo natural, na forma de um sistema artificial, por meio de operações que se equivalem aos mecanismos genéticos da natureza. Seu elemento principal é o indivíduo ou organismo, que representa uma solução possível no espaço de resposta (conjunto de todas as soluções possíveis). Ele é constituído por um ou mais cromossomos, que por sua vez são formados por vários genes, como ilustra a figura 5.1. A representação desses cromossomos se dá através de strings (conjunto de dados concatenados), nas quais cada dado representa um gene. Como na natureza, os genes contêm informações que determinam as características do indivíduo, estando nesse caso codificadas por meio de números binários ou outros alfabetos mais complexos. Cada gene do cromossomo representa uma variável de otimização, cujos valores possíveis são determinados pela codificação empregada no processo.

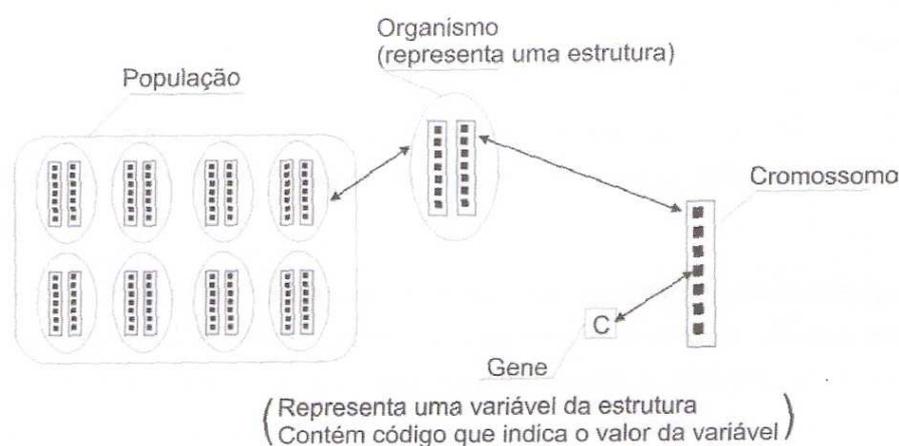


Figura 5.1 - Estrutura básica do AG. Adaptado de Gomes, 2001.

Em cada passo ou geração do algoritmo existe um grupo de indivíduos que forma uma população. Os componentes da geração inicial normalmente são criados de forma aleatória, sem utilizar nenhuma informação sobre o problema a ser tratado. Após a primeira, cada geração é formada por alguns indivíduos presentes na anterior e por filhos gerados a partir desses. A seleção dos componentes das sucessivas populações é

---

baseada na aptidão, sendo escolhidos dentre os pré-existentes e os recém criados, utilizando como critério o princípio da sobrevivência do mais apto (método da roleta). A aptidão também determina as chances de participação do indivíduo num processo de reprodução para criação de um filho. As duas etapas mencionadas, envolvendo a formação da população de filhos e a formação da geração seguinte a partir da existente e dos filhos criados, compõem o mecanismo básico do AG. Elas tem como pré-requisito o valor da aptidão de cada indivíduo, cuja avaliação é de fundamental importância para o bom funcionamento do algoritmo, sendo normalmente derivado de uma função objetivo que traduz o alvo da otimização. Essa função tem como variáveis as características relevantes no problema, sejam elas desejáveis ou não. Sua função é equivalente à mensuração da adaptação de um organismo vivo a um ambiente natural.

Como ocorre na natureza, a evolução das populações se dá pela procriação dos organismos que as compõem. Nos AGs o processo de reprodução é constituído basicamente por três fases. Na primeira é selecionado dentre os indivíduos da população existente o par de pais que participarão da geração do novo filho. Essa seleção é realizada por um mecanismo probabilístico, onde os mais aptos têm maiores chances de serem escolhidos. Uma vez definidos os participantes, procede-se a segunda fase, onde um organismo filho é gerado pela aplicação do operador de recombinação. Sua atuação consiste em mesclar informação genética dos cromossomos dos pais para formar um novo indivíduo. Desse processo resulta um filho que tem características semelhantes às dos pais e provavelmente apresenta boa aptidão, já que seus genitores foram escolhidos com base nesse aspecto. Existem muitas formas de programar o operador de recombinação, devendo ser estudado para cada aplicação o método mais eficiente.

A última fase da reprodução ocorre após a obtenção do filho, que é então submetido a operações de mutação. Essas operações consistem na introdução de nova informação genética nos cromossomos, tendo como objetivo auxiliar o algoritmo na produção de indivíduos mais aptos. Sua atuação se dá pela modificação de genes através da substituição do valor original por outro utilizado na codificação da variável. Isso não acontece sempre, mais sim segundo uma probabilidade de ocorrência, que pode ser maior ou menor para cada problema. Os genes a serem modificados ou mesmo o novo valor atribuído a eles é determinado de forma aleatória, o que torna esses mecanismos responsáveis pela capacidade exploratória do AG. Outra função da mutação é a prevenção contra a perda de informação genética decorrente da uniformização da população na fase final da otimização.

Os AGs têm muitas vantagens em relação aos métodos determinísticos de otimização. A primeira delas é a característica intrínseca de lidar com variáveis discretas. Isso é extremamente interessante nos problemas de engenharia, pois na prática se trabalha com um número restrito de opções disponíveis no mercado ou com padronização da fabricação. Os métodos tradicionais empregam variáveis contínuas, que no final do processo têm que ser arredondadas para os valores praticáveis e assim, normalmente, acabam perdendo a qualidade alcançada. Outro aspecto de fundamental importância no AG é a forma como são avaliadas as soluções. Em vez de utilizarem derivadas ou gradientes, como ocorre nos algoritmos de otimização clássicos, os AGs trabalham com funções objetivo baseadas em dados simples dos indivíduos. Essa característica torna o método indicado para problemas que envolvam funções descontínuas, uma vez que as técnicas baseadas em gradientes são incapazes de tratar esses casos. Além disso, diferentemente dos métodos de otimização tradicionais, que realizam a busca focando em uma única solução por vez, se deslocando de um ponto para outro no espaço de resposta, os AGs trabalham com uma população de indivíduos a cada geração. Com isso o algoritmo é capaz de explorar simultaneamente diferentes áreas do espaço de resposta, mantendo a busca em regiões prósperas já identificadas enquanto procura por outras. Tal capacidade é decorrente da forma como a posição dos novos pontos de avaliação é determinada. Devido a mecanismos probabilísticos como a mutação, os pontos se deslocam facilmente, varrendo todas as regiões, independentemente das características do espaço de resposta. Assim, mantendo vários pontos de busca previne-se a convergência a mínimos locais, por parte dos métodos baseados em gradientes, quando o ponto de partida é mal escolhido. Todos esses aspectos resultam num aumento das chances de se encontrar a solução ótima ou outras com qualidade semelhante, mesmo nos problemas que apresentam os espaços de resposta mais adversos.

Embora as operações de seleção, recombinação e mutação sejam suficientes para a realização da otimização por AG, existem outros operadores que também podem compor a reprodução. Eles foram desenvolvidos em vários trabalhos (Nagendra *et al.*, 1993 e Todoroki & Haftka, 1998), todos com o objetivo de melhorar o desempenho do algoritmo. Dentre os mais utilizados para a otimização de compósitos estão os operadores de permutação (*gene-swap*), de adição ou subtração de camadas (*stack addition e stack deletion*) e de reparo (*repair operator*). Todas essas formas de aprimoramento dos AG são de fundamental importância para sua viabilização, pois uma

das características mais problemáticas do método é o alto custo computacional das análises de possíveis soluções. Em muitos problemas as análises necessárias são bastante complexas, envolvendo métodos numéricos que consomem muito esforço computacional. No caso específico do problema de otimização de estruturas de compósitos laminados baseada em confiabilidade, para cada indivíduo da população deve ser avaliada sua confiabilidade, utilizando um programa de elementos finitos. O cálculo da confiabilidade de forma isolada, devido à pequena probabilidade de falha requerida, já causa por si só um grande esforço computacional, principalmente quando se utilizam métodos de simulação, tais como Monte Carlo ou Monte Carlo com amostragem por importância. Dessa forma, o custo computacional final pode tornar-se muito alto. O desenvolvimento de novas técnicas e operadores que melhoram o desempenho dos AGs, juntamente com um aumento da capacidade de processamento proporcionada pelos computadores mais modernos e outras ferramentas heurísticas, como por exemplo, Redes Neurais Treinadas, torna a utilização dos AGs cada vez mais interessante.

### 5.3 Operadores genéticos utilizados

As variáveis de projeto utilizadas nas otimizações foram os ângulos de orientação das fibras e as espessuras das lâminas do laminado de material compósito.

Cada variável de projeto possui um valor decimal chamado de fenótipo e um valor binário correspondente chamado de genótipo. A tabela 5.1 apresenta exemplos genéricos de variáveis de projeto e seus respectivos genótipos e fenótipos.

Tabela 5.1 – Exemplos de fenótipos e genótipos de variáveis de projeto.

Variável	Fenótipo	Genótipo
1	15	01111
2	9	01001
3	7	00111

Na tabela 5.2 são listadas os dados de entrada do programa de AG.

Tabela 5.2 - Dados de entrada do programa de AG.

maxpop	Número de indivíduos de cada população
nger	Número de gerações
pc	Probabilidade de cruzamento
pm	Probabilidade de mutação
tol	Critério de parada (desvio padrão dos indivíduos da população)
nvar	Número de variáveis de projeto
Lim <sub>inf</sub>	Limite inferior das variáveis de projeto (m)
Lim <sub>sup</sub>	Limite superior das variáveis de projeto (m)
n	Número de bits de cada variável de projeto

Uma vez definida a população inicial, são aplicados operadores genéticos em todos os indivíduos, com o objetivo de gerar a próxima geração, conforme ilustra a figura 5.2. Durante a aplicação dos operadores genéticos não existe interação entre a geração T e T+1 e o tamanho das populações permanece inalterado.



Figura 5.2 Esquema de aplicação dos operadores genéticos.

Os três operadores genéticos (reprodução, *crossover* e mutação) dependem de escolhas aleatórias, fato esse que caracteriza o AG como um método de otimização probabilístico.

Os indivíduos são escolhidos para reprodução através de um sistema de roleta (*roulette wheel*), contendo setores com pesos proporcionais ao valor da função de custo de cada um (Goldberg, 1989).

Após escolhidos os indivíduos é realizado o cruzamento. Primeiramente é decidido se irá ocorrer cruzamento ou não, baseado na probabilidade de cruzamento ( $p_c$ ). Mesmo que não ocorra, o indivíduo ainda pode ter seu genótipo modificado devido à probabilidade de mutação ( $p_m$ ). Se o cruzamento ocorre é gerado de forma aleatória uma posição de corte. A posição de corte é um número inteiro compreendido entre  $[1, \text{número de bits}(n) - 1]$ . Após o cruzamento, os filhos gerados ainda têm a possibilidade de sofrer alteração devido à probabilidade de mutação ( $p_m$ ). A figura 5.3 ilustra o processo de cruzamento.

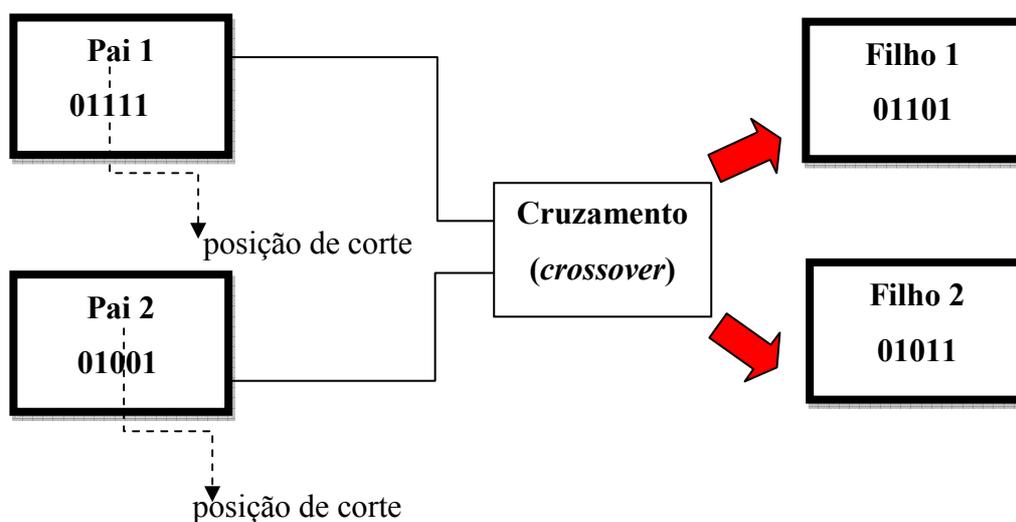


Figura 5.3 Processo de cruzamento para geração de indivíduos da próxima geração.

Ocorrendo a mutação é calculada, de forma aleatória, a posição onde ocorrerá a troca do material genético no cromossomo (bit 0 passa para 1, ou vice versa). A figura 5.4 ilustra o processo de mutação em um indivíduo.

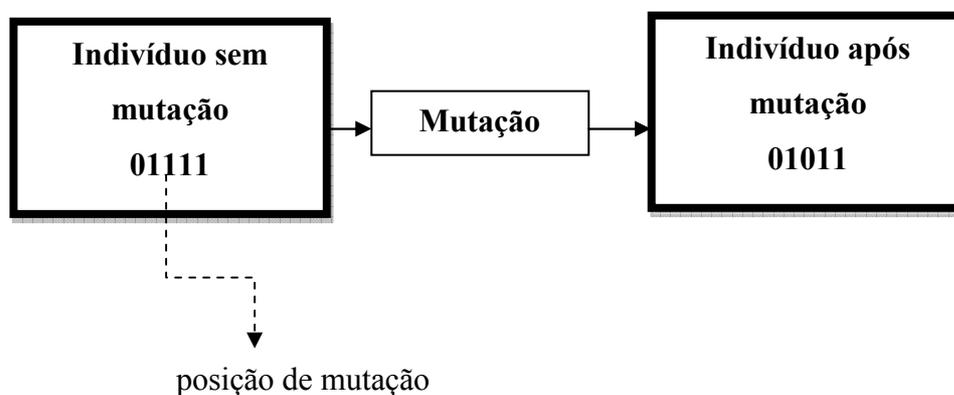


Figura 5.4 Exemplo da aplicação do operador genético de mutação.

A geração das populações encerra quando é atingido o número máximo de gerações ( $n_{ger}$ ), ou quando o desvio padrão dos indivíduos que compõem a população for menor do que uma determinada tolerância ( $tol$ ).

## 5.4 Exemplo numéricos

### 5.4.1 Projeto ótimo, com restrição de confiabilidade, de uma coluna metálica

Com o objetivo de validar o procedimento desenvolvido para a otimização de estruturas de materiais compósitos utilizando AGs, com restrição de confiabilidade, primeiramente foi analisado o problema do projeto de uma coluna de metal com formato T (Cheng, 2006). O objetivo do exemplo é determinar as dimensões da coluna ( $b$ ,  $d$  e  $h$ ) que produzem o menor custo ( $c(\mathbf{d})$ ) e atingem um nível mínimo de confiabilidade pré-estabelecido ( $\beta_{esp}$ ), seguindo o algoritmo abaixo:

$$\begin{aligned} & \text{Determinar } b, d \text{ e } h \\ & \text{tal que } c(\mathbf{d}) \rightarrow \textit{mínimo} \\ & \text{sujeito } \beta \geq \beta_{esp}. \end{aligned}$$

As dimensões da seção transversal são tratadas como variáveis aleatórias enquanto que seus valores médios são tratados como variáveis de projeto. A função de custo tem a seguinte forma:

$$c(\mathbf{d}) = bd + 5h. \quad (5.1)$$

As variáveis de projeto são listadas na tabela 5.3. O vetor de variáveis aleatórias independentes é definido como  $\mathbf{X} = (F_S, P_1, P_2, P_3, B, D, H, F_0, E)$ , com características estocásticas apresentadas na tabela 5.4.

Tabela 5.3 - Variáveis de projeto.

Variável	Símbolo
Média da largura da alma	b (mm)
Média da espessura da alma	d (mm)
Média da altura do perfil de aço	h (mm)

A função de estado limite (falha da coluna à flambagem), em termos das variáveis aleatórias  $\mathbf{X}$ , das dimensões da coluna ( $b$ ,  $d$ ,  $h$ ) e das funções auxiliares  $A_s, \mu_s, \mu_i, \varepsilon_b, F = P_1 + P_2 + P_3$  é definida como:

$$G(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = F_s - F \left( \frac{1}{A_s} + \frac{F_0}{\mu_s} \cdot \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b - F} \right) \quad (5.2)$$

onde

$$\begin{aligned} A_s &= 2BD, \\ \mu_s &= BDH, \\ \mu_i &= \frac{1}{2}BDH^2, \\ \varepsilon_b &= \frac{\pi^2 E \mu_1}{L^2}. \end{aligned}$$

As médias da largura e da espessura da alma tem os limites inferiores 200 mm e 10 mm e os limites superiores 400 mm e 30 mm, respectivamente. O intervalo (100 mm, 500 mm) define a altura média do perfil T. O comprimento L do perfil é assumido como sendo de 7500 mm.

Tabela 5.4 - Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias.

Variável	Símbolo	Distribuição	Média / Desvio Padrão
Tensão de escoamento	$F_s$	Lognormal	400/35 (MPa)
Peso próprio	$P_1$	Normal	500.000/50.000 (N)
Carga variável	$P_2$	Gumbel	600.000/90.000 (N)
Carga variável	$P_3$	Gumbel	600.000/90.000 (N)
Largura do Flange	$B$	Lognormal	b/3 (mm)
Espessura do Flange	$D$	Lognormal	d/2 (mm)
Altura do perfil	$H$	Lognormal	h/5 (mm)
Deflexão inicial	$F_0$	Normal	30/10 (mm)
Módulo de elasticidade	$E$	Weibull	21.000/4200 (MPa)

Os parâmetros utilizados pelo programa da AG estão listados na tabela 5.5.

Tabela 5.5 - Dados de entrada do programa de Algoritmos Genéticos.

Número de indivíduos de cada população	100
Número de gerações	100
Probabilidade de cruzamento	100%
Probabilidade de mutação	1%
Critério de parada (desvio padrão dos indivíduos da população)	1,00e-05
Número de variáveis de projeto	3
Limite inferior da variável de projeto b	100 (mm)
Limite superior das variáveis de projeto b	500(mm)
Limite inferior da variável de projeto d	10(mm)
Limite superior das variáveis de projeto d	35(mm)
Limite inferior da variável de projeto h	50(mm)
Limite superior das variáveis de projeto h	250(mm)
Número de bits de cada variável de projeto	16

A tabela 5.6 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos por Kuschel e Rackwitz (1997), Cheng (2006) e o presente método de otimização utilizando algoritmos genéticos.  $\beta_{res}$  representa o índice de confiabilidade atingido pelas três formas de solução adotadas.

Tabela 5.6 - Comparação de resultados para os valores do vetor de projeto ótimo (**d**) e custo mínimo do perfil T.

$\beta_{esp}$	Método	Vetor de projeto otimizado			Custo mínimo	$\beta_{res}$
		b(mm)	d(mm)	h(mm)		
3,132	Kuschel e Rackwitz	200,00	17,50	100,00	4000,00	3,13217
	Cheng	200,09	17,50	100,00	4000,84	3,13311
	AGs (este trabalho)	200,78	17,53	100,00	4019,60	3,16750
7,427	Kuschel e Rackwitz	216,67	30,00	100,00	7000,00	7,42624

	Cheng	216,71	30,00	100,01	7001,37	7,42731
	AGs (este trabalho)	220,39	29,61	100,00	7025,3	7,43680
9,605	Kuschel e Rackwitz	316,67	30,00	100,00	10000,00	9,60397
	Cheng	316,86	29,99	100,08	10002,82	9,60508
	AGs (este trabalho)	320,00	29,68	106,27	10031,00	9,59920
11,065	Kuschel e Rackwitz	400,00	30,00	200,00	13000,00	11,0645
	Cheng	399,98	29,97	207,33	13024,25	11,0653
	AGs (este trabalho)	400,00	30,00	184,71	12942,00	11,0580

As figuras 5.5 e 5.6 apresentam, respectivamente, uma comparação entre os resultados obtidos para os índices de confiabilidade e custo mínimo da coluna de aço considerada, para cada um dos casos analisados (quatro valores de  $\beta_{res}$ ). Pode-se perceber que todos os métodos de otimização conduzem para resultados semelhantes.

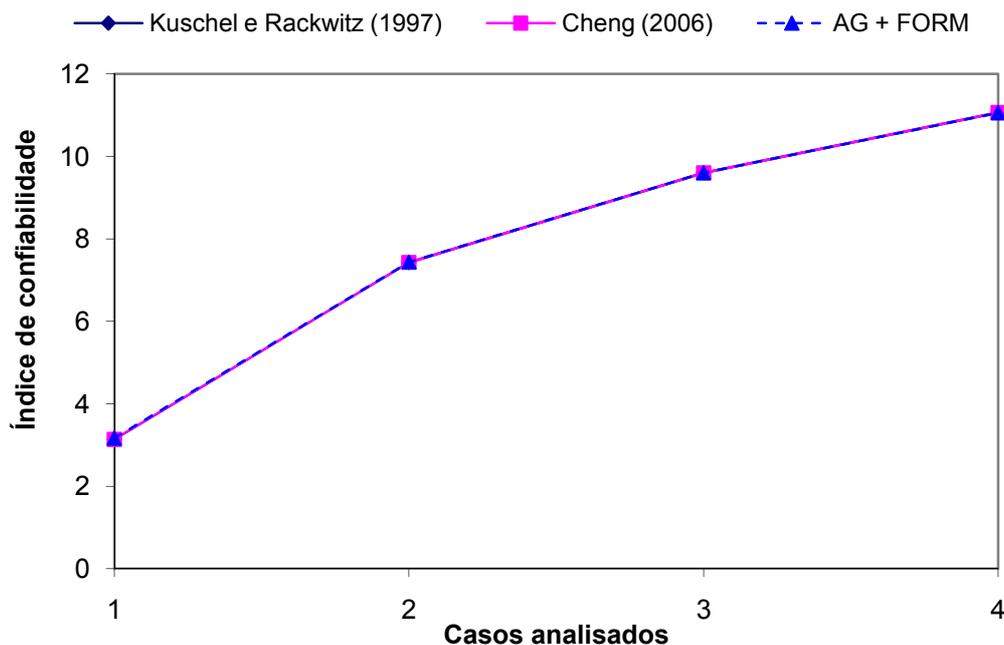


Figura 5.5 - Comparação entre os índices de confiabilidade para os casos analisados.

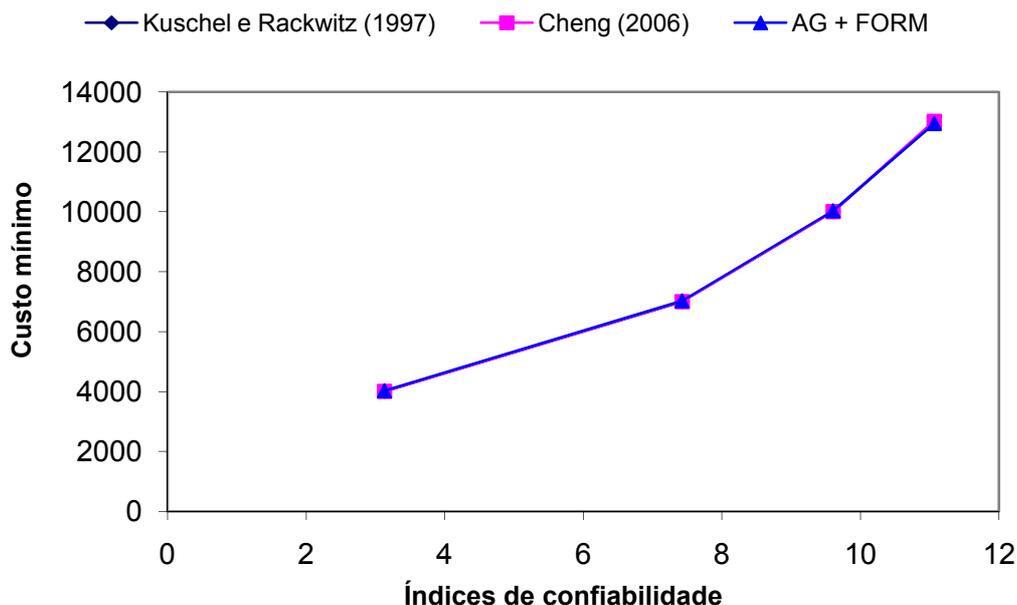


Figura 5.6 - Comparação entre os custos mínimos da coluna de aço considerada em função dos índices de confiabilidade.

#### 5.4.2 Otimização, sem restrição, de laminados de materiais compósitos

Nos exemplos apresentados a seguir são tratados problemas de otimização do ângulo de orientação das fibras de estruturas de laminados de materiais compósitos. Inicialmente são apresentados os resultados de otimização (maximização) determinística, onde a função de custo é a razão de resistência (*strength ratio*) (Tsai & Hahn, 1980), definida como a razão entre o máximo carregamento suportado pelo laminado e o carregamento aplicado, e o problema não possui restrições. A seguir, são apresentados casos de otimização (maximização), sem restrição, onde a função de custo é o próprio índice de confiabilidade. Em ambos os casos é considerado que as espessuras das camadas (*ply ratios*) são constantes e iguais. As soluções obtidas em ambos os casos são comparadas com as obtidas por Miki *et al.* (1997).

O material utilizado nos cálculos é o Grafite/Epóxi (T300/5208). As variáveis aleatórias consideradas são as resistências do material e as tensões aplicadas, sendo todas decorrelacionadas e com distribuição de probabilidade normal. Na tabela 5.7 estão listadas as médias e os coeficientes de variação das resistências do material, enquanto que na tabela 5.8 são apresentadas as médias e os desvios padrões das tensões atuando no plano do laminado.

Tabela 5.7 - Médias e coeficiente de variação das resistências do Grafite/Epóxi (T300/5208) (MPa).

Material	$E(R_x^T)$	$E(R_x^C)$	$E(R_y^T)$	$E(R_y^C)$	$E(R_{xy})$	CV
T300/5208 Grafite/Epóxi	1500	1500	40	246	68	0,1

Tabela 5.8 - Médias e desvios padrões das tensões aplicadas no plano do laminado (GPa).

$E(S_1)$	$E(S_2)$	$E(S_6)$	$SD(S_1)$	$SD(S_2)$	$SD(S_6)$
0,1	-0,1 ~ 0,1	0	0,03	0,03	0 ~ 0.031

#### 5.4.2.1 Otimização do ângulo de orientação das fibras sob condições determinísticas

São considerados laminados biaxiais  $[+\theta/-\theta]_s$ , triaxiais  $[0^\circ / +\theta / -\theta]_s$  e tetraaxiais  $[0^\circ / +\theta / -\theta / 90^\circ]_s$ . É admitido um estado plano de tensões, conforme figura 3.2, com  $S_1 = 0,1 \text{ GPa}$ ,  $S_6 = 0$  e  $S_2$  variando de  $-0,1$  a  $0,1 \text{ GPa}$ . A figura 5.7 apresenta os resultados do ângulo de orientação ótimo das fibras para os laminados biaxiais, triaxiais e tetraaxiais, respectivamente, em condições determinísticas. Conforme antes mencionado, a função de custo considerada é a razão de resistência (*strength ratio*) e não há restrições. Os resultados são comparados com os obtidos por Miki *et al.* (1997).

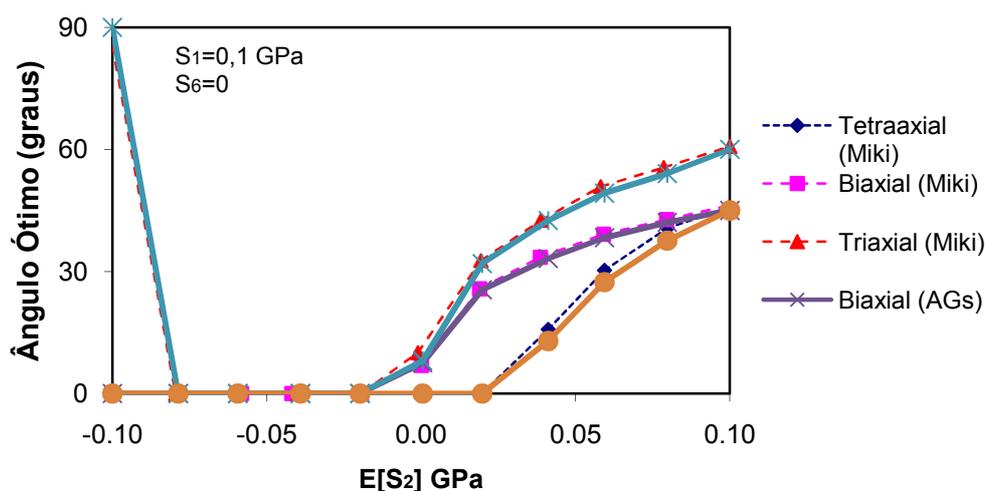


Figura 5.7 - Ângulo de orientação ótimo de laminados multiaxiais em condições determinísticas.

### 5.3.2.2 Otimização do ângulo de orientação das fibras sob condições probabilísticas

O problema de otimização no qual a função de custo é o índice de confiabilidade consiste em determinar os ângulos de orientação ótimos que levam à máxima confiabilidade do sistema. Ou seja:

$$\begin{aligned} &\text{Determinar } \theta_i (i=1,2,\dots,N) \\ &\text{tal que } \beta \rightarrow \text{máximo} \\ &\text{sujeito } -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ. \end{aligned} \quad (5.3)$$

São considerados laminados biaxiais  $[+\theta/-\theta]_s$ , tri axiais  $[0^\circ/+\theta/-\theta]_s$  e tetra axiais  $[0^\circ/+\theta/-\theta/90^\circ]_s$  e é assumido  $SD[S_6]=0$ . A figura 5.8 apresenta os resultados para o ângulo de orientação ótimo das fibras para os laminados multiaxiais, em condições probabilísticas. As variáveis aleatórias são as mesmas apresentadas nas tabelas 5.7 e 5.8. Os resultados são comparados com os obtidos por Miki *et al.* (1997). Em todos os casos utilizou-se FORM para sistemas em série para a obtenção do índice de confiabilidade.

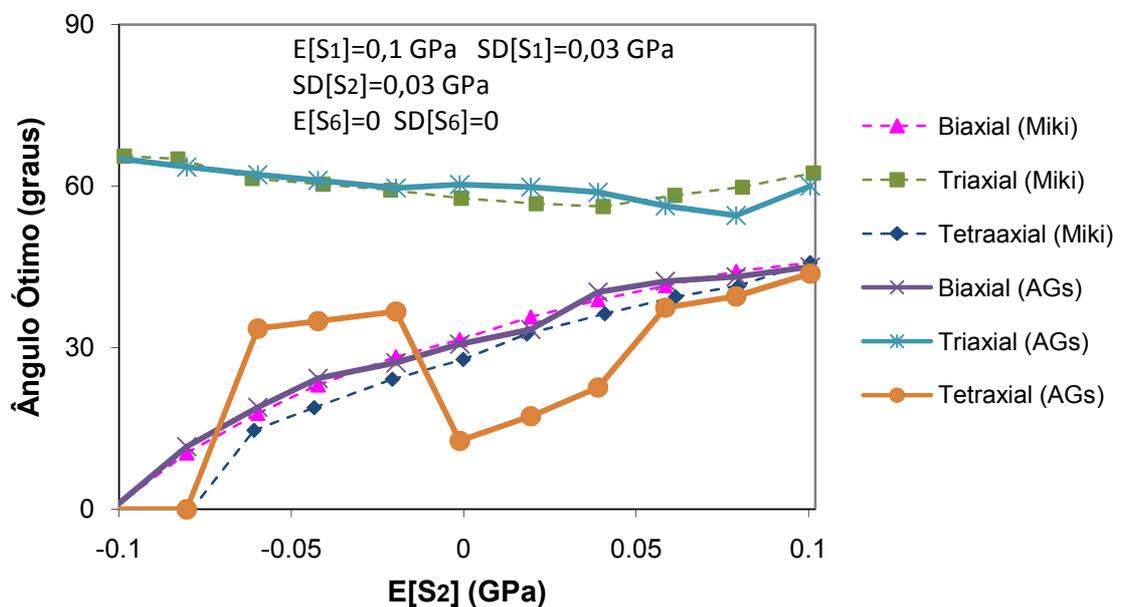


Figura 5.8 - Ângulo de orientação ótimo de laminados multiaxiais em condições probabilísticas.

Duas considerações podem ser feitas com relação aos problemas tratados. Primeiramente, com exceção da otimização do laminado tetra axial, os resultados mostram uma boa concordância com aqueles apresentados por Miki *et al.* (1997), o

qual usa técnicas clássicas de otimização baseadas em gradientes. Observa-se ainda que os ângulos de orientação ótimos obtidos nos processos determinísticos e probabilísticos são muito diferentes. Pode-se observar que, de uma forma geral, os valores ótimos dos ângulos aumentam quando as tensões aplicadas são tratadas como variáveis aleatórias. Isto significa que os laminados otimizados aproximam-se de placas quase isotrópicas, Jones (1998), quando sob condições probabilísticas.

#### 5.4.3 Otimização de placas de laminados de compósitos com restrição de confiabilidade

Os exemplos apresentados a seguir tratam da otimização das espessuras das lâminas ( $h_i (i = 1, 2, \dots, N)$ ), sendo  $N$  o número de lâminas do laminado, de uma placa de material compósito, com comportamento linear geométrico. Em todos os casos a função de custo utilizada é a espessura total do laminado ( $h_t$ ) e a restrição é o índice de confiabilidade requerido pelo sistema ( $\beta_{req}$ ), o qual é definido pelo usuário. O problema de otimização assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{Determinar } h_i (i = 1, 2, \dots, N) \\ & \text{tal que } h_t \rightarrow \text{mínima} \\ & \text{com restrição } \beta = \beta_{req} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Os resultados apresentados a seguir consideram um laminado composto por 4 lâminas ( $N = 4$ ), com ângulos de orientação constantes em cada lâmina e seguindo a seguinte distribuição  $[0^0, 45^0, 45^0, 0^0]$ , conforme figura 5.9.

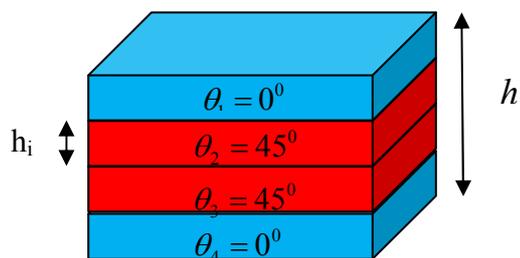


Figura 5.9 - Desenho esquemático do laminado utilizado nas otimizações.

O material utilizado foi o Grafite/Epóxi (T300/5208). A tabela 5.9 apresenta as propriedades mecânicas determinísticas do material em questão. Neste exemplo são

consideradas 9 variáveis aleatórias, sendo 4 cargas ( $N_1, N_2, N_{12}$  e  $M_1$ ), dispostas conforme figura 5.10, e 5 resistências ( $R_x^T, R_x^C, R_y^T, R_y^C$  e  $R_{xy}$ ). As propriedades estatísticas das variáveis aleatórias estão listadas na tabela 5.10.

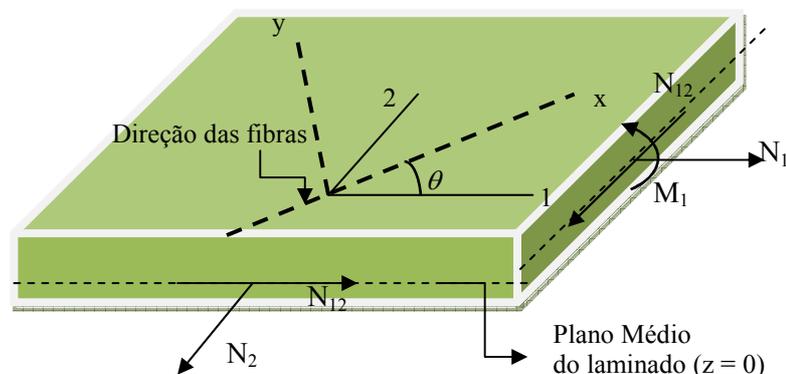


Figura 5.10 - Esquema de aplicação das cargas no laminado.

Tabela 5.9 - Propriedades mecânicas determinísticas do material.

Material	E1	E2	E12	$\nu_{12}$
T300/5208 Grafite/Epóxi	181 GPa	10,30 GPa	40	0,28

Tabela 5.10 - Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias.

Nº	Símbolo	Unidade	Média	C.V.	Tipo de Distribuição
1	$N_1$	KN/m	100,0	0,20	Lognormal
2	$N_2$	KN/m	200,0	0,20	Lognormal
3	$N_{12}$	KN/m	40,0	0,20	Lognormal
4	$M_1$	N.m/m	0,1	0,20	Lognormal
5	$R_x^T$	MPa	1500,0	0,20	Lognormal
6	$R_x^C$	MPa	1500,0	0,20	Lognormal
7	$R_y^T$	MPa	40,0	0,20	Lognormal
8	$R_y^C$	MPa	246,0	0,20	Lognormal
9	$R_{xy}$	MPa	68,0	0,20	Lognormal

Em todos os resultados é adotado como valor do índice de confiabilidade requerido  $\beta_{req} = 3,0$ . A otimização é realizada através de AGs, cujos dados de entrada estão listados na tabela 5.11. O índice de confiabilidade foi calculado por cada um dos métodos descritos no capítulo 4 (Monte Carlo, Monte Carlo com amostragem por importância, FORM e FORM para sistemas em série). A função de estado limite considerada foi o critério de ruptura de Tsai-Wu, já apresentado no capítulo 3, e o cálculo das tensões nos eixos locais do laminado foi feito utilizando a teoria clássica de placas de compósitos através de uma solução fechada, conforme formulação apresentada na seção 4.3, e através de um programa de elementos finitos que utiliza o elemento triangular plano para placas e cascas, descrito no capítulo 3.

Tabela 5.11 - Dados de entrada do programa de Algoritmos Genéticos.

Número de indivíduos de cada população	30
Número de gerações	30
Probabilidade de cruzamento	100%
Probabilidade de mutação	1%
Critério de parada (desvio padrão dos indivíduos da população)	1,00e-05
Número de variáveis de projeto	4 (espessuras)
Limite inferior das variáveis de projeto (m)	0,5e-03
Limite superior das variáveis de projeto (m)	3,0e-03
Número de bits de cada variável de projeto	16

A resolução das possíveis soluções é calculada através da seguinte expressão:

$$\text{Resolução} = \frac{\lim_{\text{sup}} - \lim_{\text{inf}}}{2^n - 1}, \quad (5.5)$$

onde  $n$  é o número de bits assumido para cada variável de projeto.

A função de custo é a soma das espessuras da cada lâmina e o fator de penalização ( $F_{pen}$ ) adotado foi de 100000,00. O código apresentado na equação (5.6) mostra como é feita a penalização da função de custo, em função do índice de confiabilidade calculado ( $\beta$ ), para cada indivíduo da população.

$$\begin{aligned}
 & \text{Se } \beta \neq \beta_{req} \text{ então} \\
 & \quad Pen = Fpen * (\beta_{req} - \beta)^2 \\
 & \text{Senão} \\
 & \quad Pen = 0.0 \\
 & \text{Fim Se} \\
 & \text{Função de custo} = \frac{l}{(1 + (h(1) + h(2) + h(3) + h(4))) * (1 + Pen)}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

onde  $h(i)$ ,  $i = 1,4$  representam as respectivas espessuras das lâminas do laminado.

### 5.4.3.1 Resultados para tensões locais calculadas por expressão analítica

#### A) Índice de Confiabilidade calculado por Monte Carlo.

As figuras 5.11 e 5.12 apresentam a evolução das espessuras ótimas e da espessura total do laminado respectivamente, em função do número de gerações.

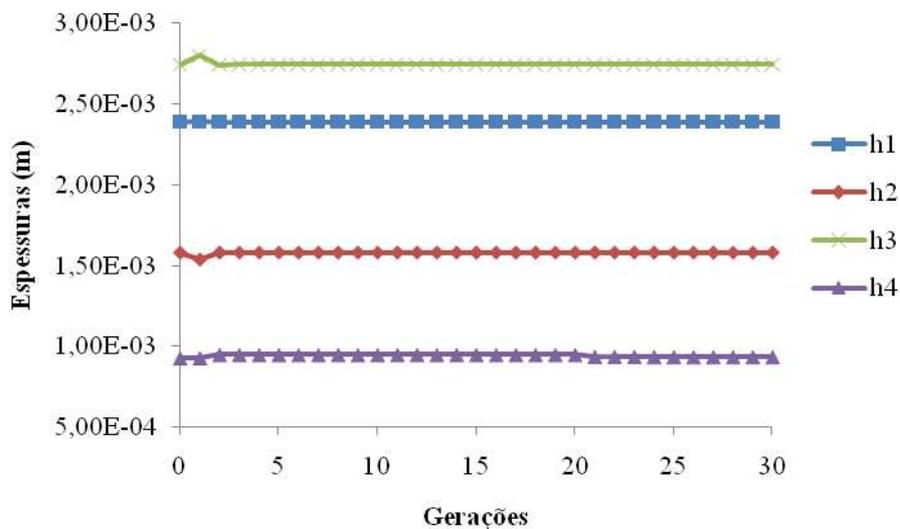


Figura 5.11 - Evolução das espessuras das lâminas do melhor indivíduo em função do número de gerações (Monte Carlo).

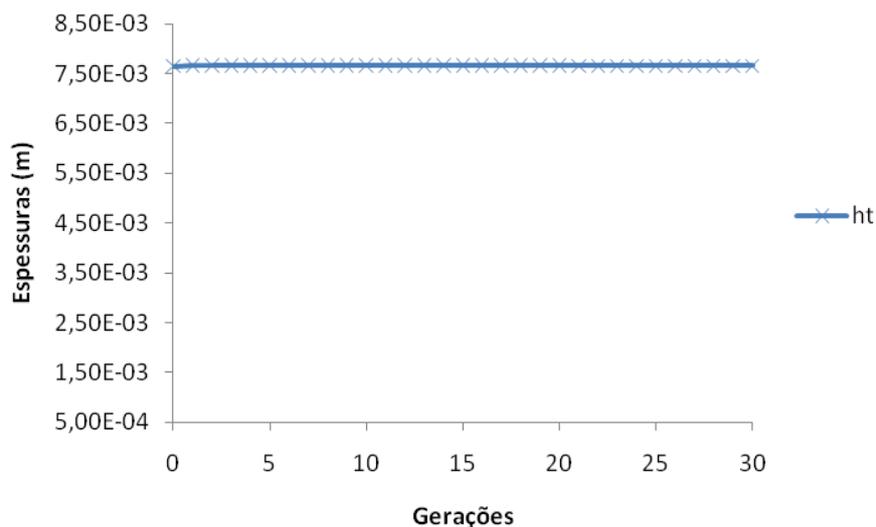


Figura 5.12 - Evolução da espessura total do laminado do melhor indivíduo em função do número de gerações (Monte Carlo).

Tabela 5.12 - Resultados da otimização das espessuras do laminado (Monte Carlo).

h1(m)	2,39e-03
h2(m)	1,58e-03
h3(m)	2,74e-03
h4(m)	9,37e-04
ht(m)	7,66e-03
Índice de confiabilidade do laminado	3,000
Tempo total de otimização (%)	100,00
Tempo total de otimização (s)	34824,62 = 9,67 h

O tempo total de otimização é calculado como uma porcentagem da otimização utilizando o método de Monte Carlo, aplicado aqui para calcular o índice de confiabilidade, quando a função de estado limite é avaliada através de uma solução fechada.

### B) Índice de Confiabilidade calculado por Monte Carlo com amostragem por importância

As figuras 5.13 e 5.14 apresentam a evolução das espessuras ótimas e da espessura total do laminado, respectivamente, em função do número de gerações.

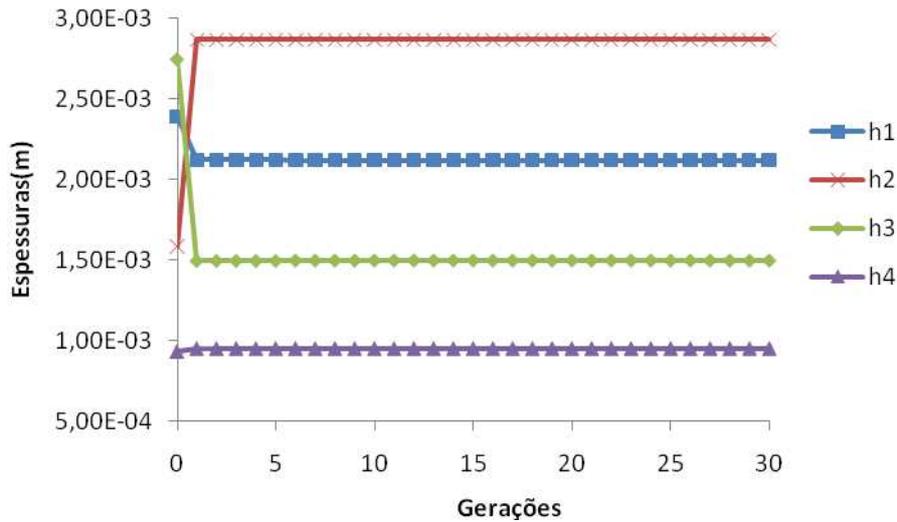


Figura 5.13 - Evolução das espessuras das lâminas do melhor indivíduo em função do número de gerações (Monte Carlo com amostragem por importância).

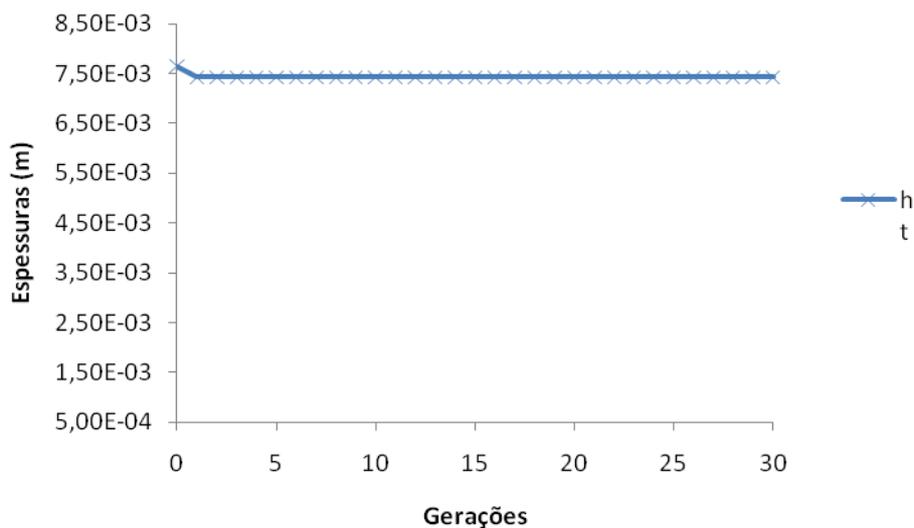


Figura 5.14 - Evolução da espessura total do laminado do melhor indivíduo em função do número de gerações (Monte Carlo com amostragem por importância).

Tabela 5.13 - Resultados da otimização das espessuras do laminado (Monte Carlo com amostragem por importância).

h1(m)	2,12e-03
h2(m)	2,87e-03
h3(m)	1,50e-03

h4(m)	9,50e-04
ht(m)	7,30e-03
Índice de confiabilidade do laminado	2,981
Tempo total de otimização (%)	30,12
Tempo total de otimização (s)	10447,39 = 2,90 h

### C) Índice de Confiabilidade calculado por FORM para sistemas em série

As figuras 5.15 e 5.16 apresentam a evolução das espessuras ótimas e da espessura total do laminado respectivamente, em função do número de gerações.

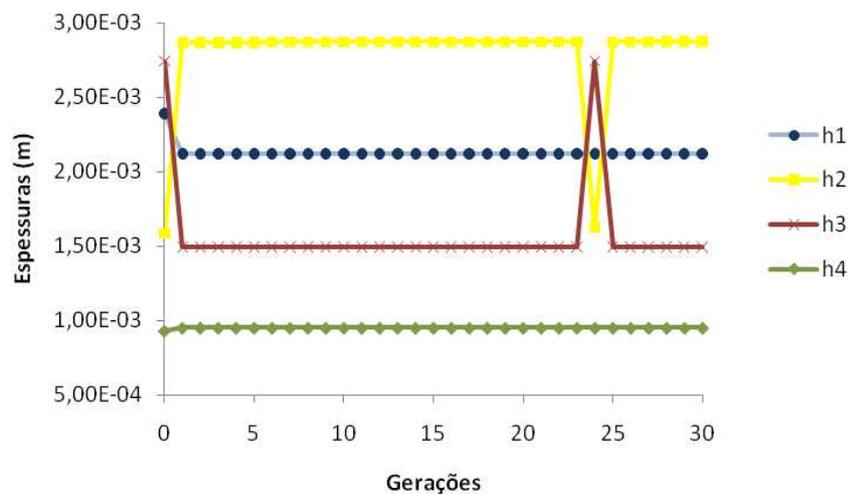


Figura 5.15 - Evolução das espessuras das lâminas do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM para sistemas em série).

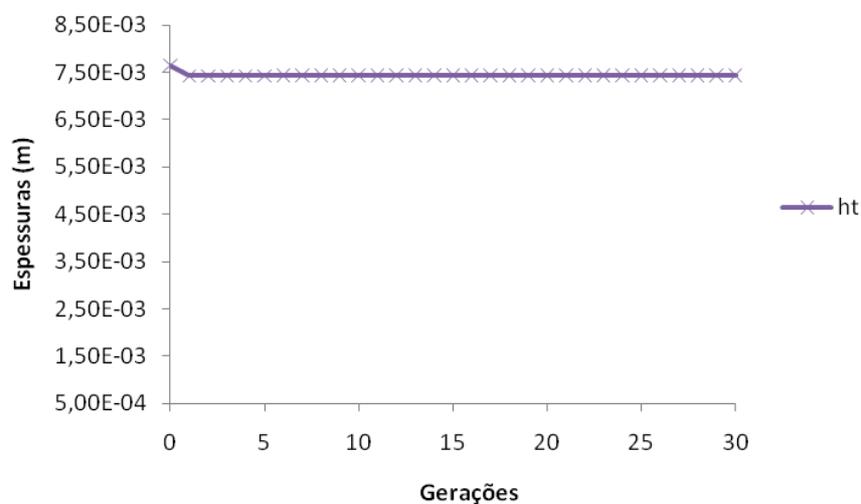


Figura 5.16 - Evolução da espessura total do laminado do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM para sistemas em série).

Tabela 5.14 - Resultados da otimização das espessuras do laminado (FORM para sistemas em série).

h1(m)	2,12e-03
h2(m)	2,87e-03
h3(m)	1,49e-03
h4(m)	9,50e-04
ht(m)	7,42e-03
Índice de confiabilidade do laminado	2,978
Tempo total de otimização (%)	5,94
Tempo total de otimização (s)	1912,57 = 0,53h

#### D) Índice de Confiabilidade calculado por FORM

As figuras 5.17 e 5.18 apresentam a evolução das espessuras ótimas e da espessura total do laminado respectivamente, em função do número de gerações.

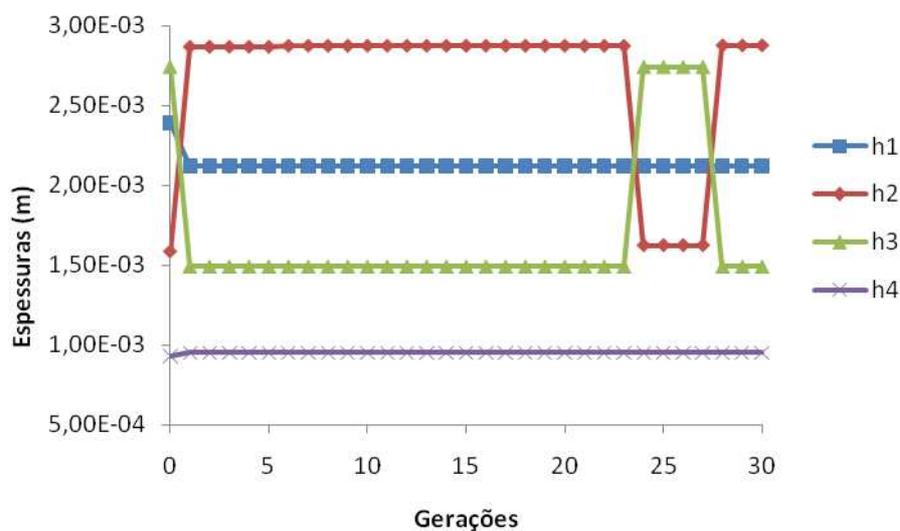


Figura 5.17 - Evolução das espessuras das lâminas do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM).

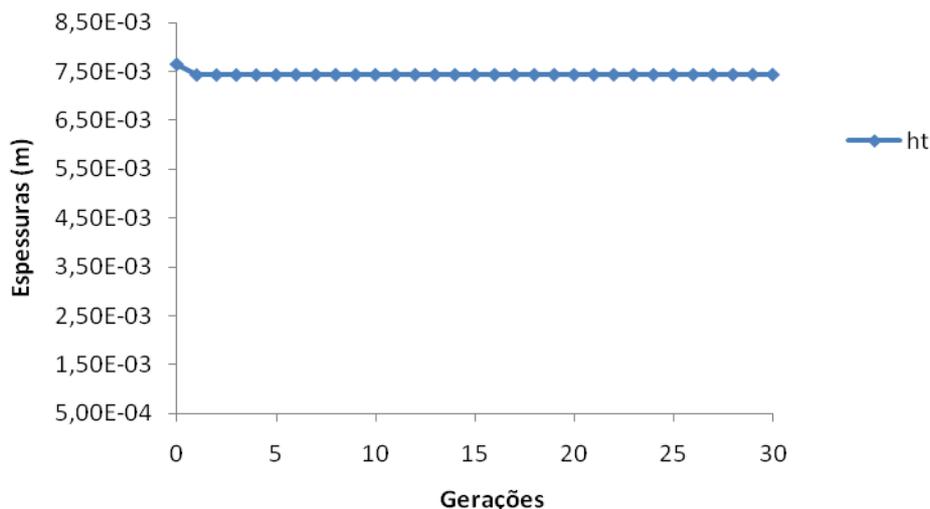


Figura 5.18 - Evolução da espessura total do laminado do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM).

Tabela 5.15 - Resultados da otimização das espessuras do laminado (FORM).

h1(m)	2,12e-03
h2(m)	2,87e-03
h3(m)	1,49e-03
h4(m)	9,50e-04
ht(m)	7,42e-03
Índice de confiabilidade do laminado	2,978
Tempo total de otimização (%)	0,67
Tempo total de otimização (s)	233,67 = 3,9 min

Com base nestes resultados, pode-se elencar as seguintes considerações:

- Independentemente do método utilizado para o cálculo do índice de confiabilidade, os resultados obtidos para a espessura total do laminado ( $h_t$ ) são muito próximos. A tabela 5.16 apresenta as diferenças relativas, considerando a solução de Monte Carlo como referência.
- Os tempos totais de otimização são, como já previsto em função da pequena probabilidade de falha, consideravelmente maiores para os resultados obtidos com métodos de simulação (Monte Carlo e Monte Carlo A.I.).

- Com exceção dos resultados obtidos com Monte Carlo, pode-se observar uma variação nas espessuras ótimas  $h_2$  e  $h_3$ . Estas variações na solução ótima podem indicar a presença de mínimos locais que fornecem índices de confiabilidade muito próximos. Tal fato só acentua a importância da utilização de AGs, devido a sua capacidade de varrer todo o espaço de soluções possíveis.

Tabela 5.16 - Diferenças relativas para a espessura total do laminado ( $h_t$ ).

Método	Diferença relativa (%)
Monte Carlo	0
Monte Carlo A.I	4,31
FORM série	3,13
FORM	3,13

#### 5.4.3.2 Resultados obtidos com tensões locais calculadas por elemento finito triangular plano para cascas e placas

Devido ao alto custo computacional para a realização da otimização utilizando AGs em conjunto com elementos finitos (para avaliação da função de estado limite), nesta seção serão apresentados somente os resultados obtidos com FORM e FORM para sistemas em série. O capítulo 6 apresenta alguns exemplos de otimização utilizando Monte Carlo e Monte Carlo A.I, sendo o programa de elementos finitos simulado por redes neurais, o que diminui sensivelmente o tempo de processamento.

##### A) Índice de Confiabilidade calculado por FORM para sistemas em série

As figuras 5.19 e 5.20 apresentam a evolução das espessuras ótimas e da espessura total do laminado respectivamente, em função do número de gerações.

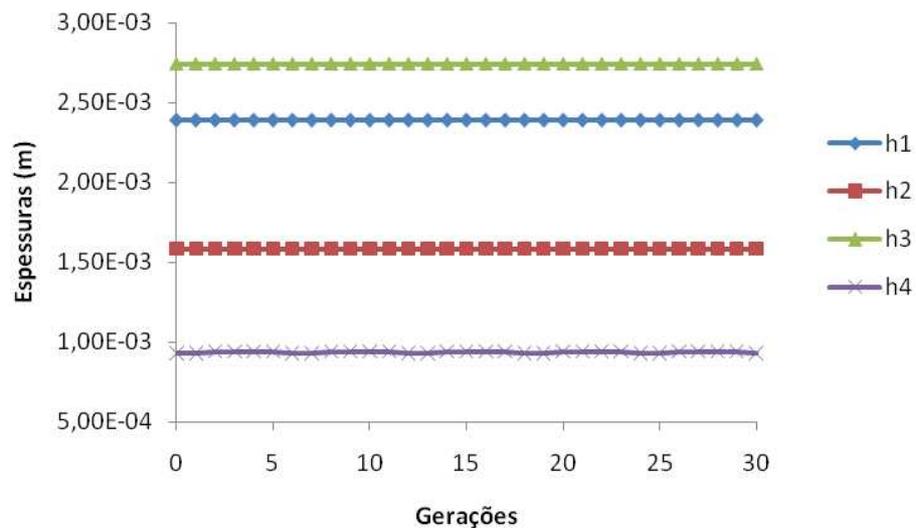


Figura 5.19 - Evolução das espessuras das lâminas do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM para sistemas em série).

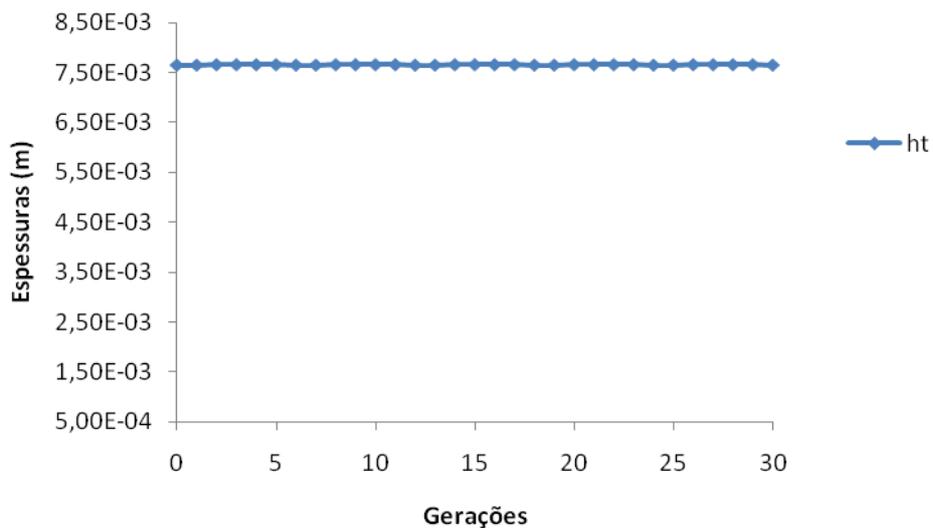


Figura 5.20 - Evolução da espessura total do laminado do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM para sistemas em série).

Tabela 5.17 - Resultados da otimização das espessuras do laminado (FORM para sistemas em série).

h1(m)	2,39e-03
h2(m)	1,58e-03
h3(m)	2,74e-03
h4(m)	9,40e-04
ht(m)	7.65e-03
Índice de confiabilidade do laminado	2,999
Tempo total de otimização (%)	37,36
Tempo total de otimização (s)	13010,48 = 3,61h

### B) Índice de Confiabilidade calculado por FORM

As figuras 5.21 e 5.22 apresentam a evolução das espessuras ótimas e da espessura total do laminado respectivamente, em função do número de gerações.

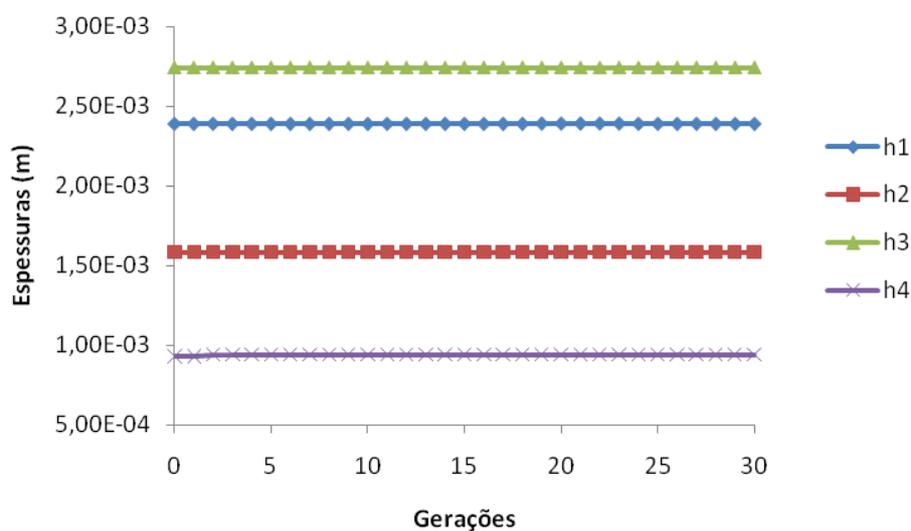


Figura 5.21 - Evolução das espessuras das lâminas do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM).

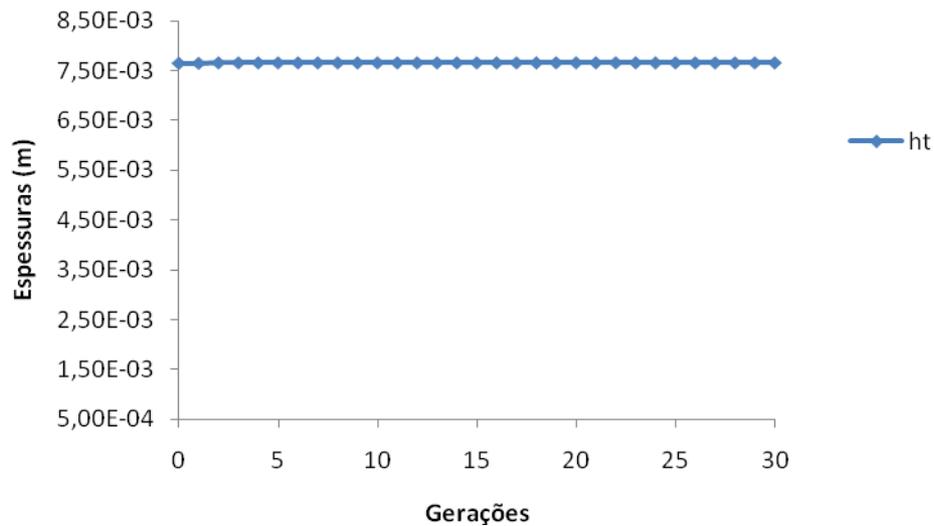


Figura 5.22 - Evolução da espessura total do laminado do melhor indivíduo em função do número de gerações (FORM).

Tabela 5.18 - Resultados da otimização das espessuras do laminado (FORM).

h1(m)	2,39e-03
h2(m)	1,58e-03
h3(m)	2,74e-03
h4(m)	9,40e-04
ht(m)	7.65e-03
Índice de confiabilidade do laminado	2,995
Tempo total de otimização (%)	3,54
Tempo total de otimização (s)	1232,79 = 0,34h

A tabela 5.19 apresenta as diferenças relativas, considerando a solução de Monte Carlo com função explícita como referência.

Tabela 5.19 - Diferenças relativas para a espessura total do laminado ( $h_t$ ).

Método	Diferença relativa (%)
FORM série + Finitos	0,13
FORM + Finitos	0,13

Os resultados evidenciam que a otimização da espessura total do laminado utilizando elementos finitos apresenta resultados muito próximos daqueles nos quais se usou função explícita. Entretanto, o tempo de processamento é sensivelmente maior na otimização via elementos finitos.

---

## CAPÍTULO 6

### 6. R.N.A. PARA ACELERAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO DE COMPÓSITOS COM A.G.

#### 6.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar exemplos, nos quais o tempo de processamento da otimização de laminados de materiais compósitos com restrição de confiabilidade é reduzido através da utilização de Redes Neurais Artificiais Treinadas (RNAT). As RNAT substituem a análise por elementos finitos (FEA), diminuindo sensivelmente o custo computacional para a obtenção do índice de confiabilidade da estrutura. Inicialmente é feita uma rápida revisão sobre RNAT, dando especial ênfase para as Redes Neurais Perceptron e de Base Radial, as quais são utilizadas neste trabalho. Posteriormente, exemplos de aplicação de RNAT na substituição da FEA são apresentados e comparados com resultados da literatura.

#### 6.2 Redes neurais artificiais

Não há um conceito universalmente aceito sobre a definição de redes neurais artificiais. De acordo com Haykin (1994), uma rede neural é um processador distribuído, massivamente paralelo que tem a capacidade natural de adquirir conhecimento experimental e torná-lo disponível para uso. Elas lembram o cérebro em dois aspectos:

- As redes neurais, através do processo de aprendizado, adquirem conhecimento;
- As conexões inter-neurônios, conhecidas como pesos sinápticos, são usadas para guardar o conhecimento.

De acordo com Nigrin (1993), a rede neural é um circuito composto de um grande número de elementos de processamento simples. Cada elemento opera somente localmente sua informação recebida. Além do mais, cada elemento opera

assincronamente. Portanto, não há um tempo de processamento para o sistema em geral (o tempo do sistema não depende do tempo das unidades).

As redes neurais são compostas de muito processadores simples (unidades), cada uma tendo uma pequena porção de memória. Os canais de comunicação (conexões), os quais usualmente transportam dados numéricos, estão inter-conectados de várias maneiras possíveis, ligando as unidades. As unidades somente operam sobre seus dados de entrada recebidos através das conexões.

Existem muitos modelos de RNA, desenvolvidos para tarefas computacionais específicas. Estes modelos podem ser divididos em dois grupos: os com ou sem treinamento supervisionado. Neste trabalho, são utilizadas Redes Neurais Perceptron de Multicamada e Redes Neurais de Base Radial. Ambas possuem treinamento supervisionado, arquitetura *feed-forward* (Haykin, 1994) e têm sido largamente utilizadas como aproximações universais para funções desconhecidas com várias variáveis de entrada e saída. As redes neurais aprendem através dos exemplos e exibem alguma capacidade de generalização além dos dados de treinamento.

### 6.3 Rede neural perceptron de multicamada (RNPM)

Para a RNPM, a unidade de processamento mais simples é representada por um único neurônio, conforme indicado na figura 6.1.

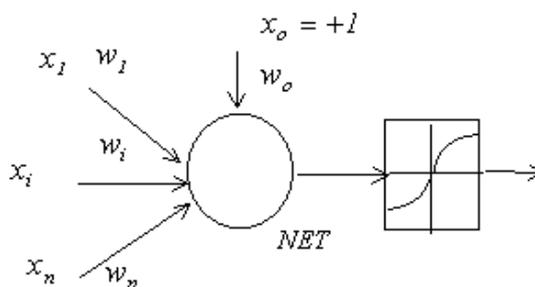


Figura 6.1 Neurônio, a unidade de processamento neural mais simples.

O neurônio é a unidade mais básica de uma rede neural e, como uma unidade de processamento, irá receber entradas ( $x_i$ ) através das conexões dos axônios. Então, algum processamento será feito aos dados de entrada para obter o dado de saída. Esta transformação é feita em dois estágios. Primeiro, usualmente é empregada uma

combinação linear com todos os dados de entrada para obter um escalar, chamado de *NET*. Os coeficientes da transformação linear são chamados de “pesos”, definidos como  $w_i$ . Num segundo estágio, é usada uma transformação não-linear (ou linear) com o escalar *NET*. A função não-linear é geralmente chamada de “função de ativação” e denotada como  $f$ . Como no comportamento dos neurônios naturais, a função de ativação irá decidir quando, como e se o neurônio irá disparar a saída ( $i$ ). Como indicado na figura 6.1, há uma entrada com um valor constante ( $x_0 = +1$ ) e seu respectivo peso ( $w_0$ ), o qual está relacionado com um parâmetro na função de ativação chamado de limiar. Por conveniência, o limiar foi considerado como uma incógnita na equação a qual fornece a correspondente saída. O limiar define uma translação no eixo  $x$  na função de ativação original. Resumidamente, todo processo pode ser escrito como (Haykin, 1994):

$$i = f(NE T) = f\left(\sum_{k=0}^n w_k x_k\right) \quad (6.1)$$

Esta unidade de processamento unitária pode ser conectada a outras para gerar a Rede Neural Perceptron, figura 6.2. As formas como os neurônios são conectados e as formas como eles operam são muito diferentes, originando uma grande variedade de arquiteturas de rede. A maioria das RNAs possui alguma forma de treinamento, onde os pesos das conexões são ajustados, baseados nos dados de treinamento. Uma RNPM geral consiste de várias camadas totalmente conectadas, ou seja, todos neurônios pertencentes a uma camada estão conectados com as camadas anterior e posterior. Esta arquitetura é indicada pelo número do vetor de entrada, seguido pelo número de neurônios em cada camada (exemplificando, 1:12:1 indica uma rede com um vetor de entrada seguido por uma camada escondida com 12 neurônios e uma camada de saída com um neurônio). O número de camadas escondidas e o número de neurônios nestas camadas dependem da complexidade do sistema que está sendo modelado. Para um sistema mais complexo é necessário um maior número de unidades nas camadas escondidas. Na prática, o número ótimo de unidades escondidas é determinado por tentativa e erro. Existem diversos tipos de função de ativação. Neste trabalho, a função tangente hiperbólica ( $f(x)=\tanh(x)$ ) é utilizada nas camadas escondidas e uma função de ativação linear é usada na camada de saída.

No processo de treinamento da rede neural, para um determinado padrão de entrada  $x_{pi}$  (onde  $p$  faz referência ao padrão e  $i$  significa um neurônio de entrada), os ajustes nos pesos ( $w_{pi}$ ) tem lugar nas ligações (sinapses) da rede neural, com o objetivo de obter a saída desejada  $o_{pk}$  ou, no caso deste trabalho, o valor da função de estado limite para esta amostra específica,  $y_{pk}$  (onde o índice  $p$  faz referência ao padrão e  $k$  significa uma saída do neurônio). Para cada padrão entrada-saída, o quadrado do erro pode ser escrito como:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_k (y_{pk} - o_{pk})^2, \quad (6.2)$$

onde  $k$  é o número de neurônios na camada de saída. Portanto, o erro médio do sistema é dado por:

$$E = \frac{1}{2P} \sum_p E_p, \quad (6.3)$$

onde  $P$  é o número de padrões de treinamento. Implementando um algoritmo para minimizar a função de erro, os pesos podem ser calculados e uma função de estado limite aproximada pode ser obtida.

O algoritmo de retro-propagação, apresentado por Haykin (1994), é usado para ajustar os diferentes pesos, bem como as derivadas de  $o_{pk}$  com respeito aos dados de entrada que serão utilizadas na análise de confiabilidade da estrutura. Maiores detalhes sobre o uso de RNPM podem ser encontrados em Haykin (1994). Uma vez que este primeiro ajuste é realizado, a rede analisa outro par  $x_{pi}$  e  $y_{po}$ , e novamente ajusta os pesos para essa nova amostra. De um modo similar, o processo continua até que todos os pares entrada-saída sejam considerados. Uma vez finalizado este processo a rede terá um conjunto de pesos sinápticos estabilizados e que satisfazem todos os pares entrada-saída com um erro médio menor do que uma determinada tolerância ( $10^{-3}$ ). Mais detalhes podem ser encontrados em Gomes & Awruch (2004). Durante o processo de aprendizagem, alguns parâmetros, tais como: arquitetura de rede, taxa de aprendizagem  $\eta$ , função de ativação e parâmetro de momento  $\alpha$  devem ser apropriadamente informados. A arquitetura, que depende da complexidade do problema, é selecionada por tentativa e erro; a taxa de aprendizagem é considerada  $\eta = 0.1$ , parâmetro de

momento  $\alpha = 0.4$  e uma arquitetura de 10:10:1 foi adotada para todos exemplos aqui considerados.

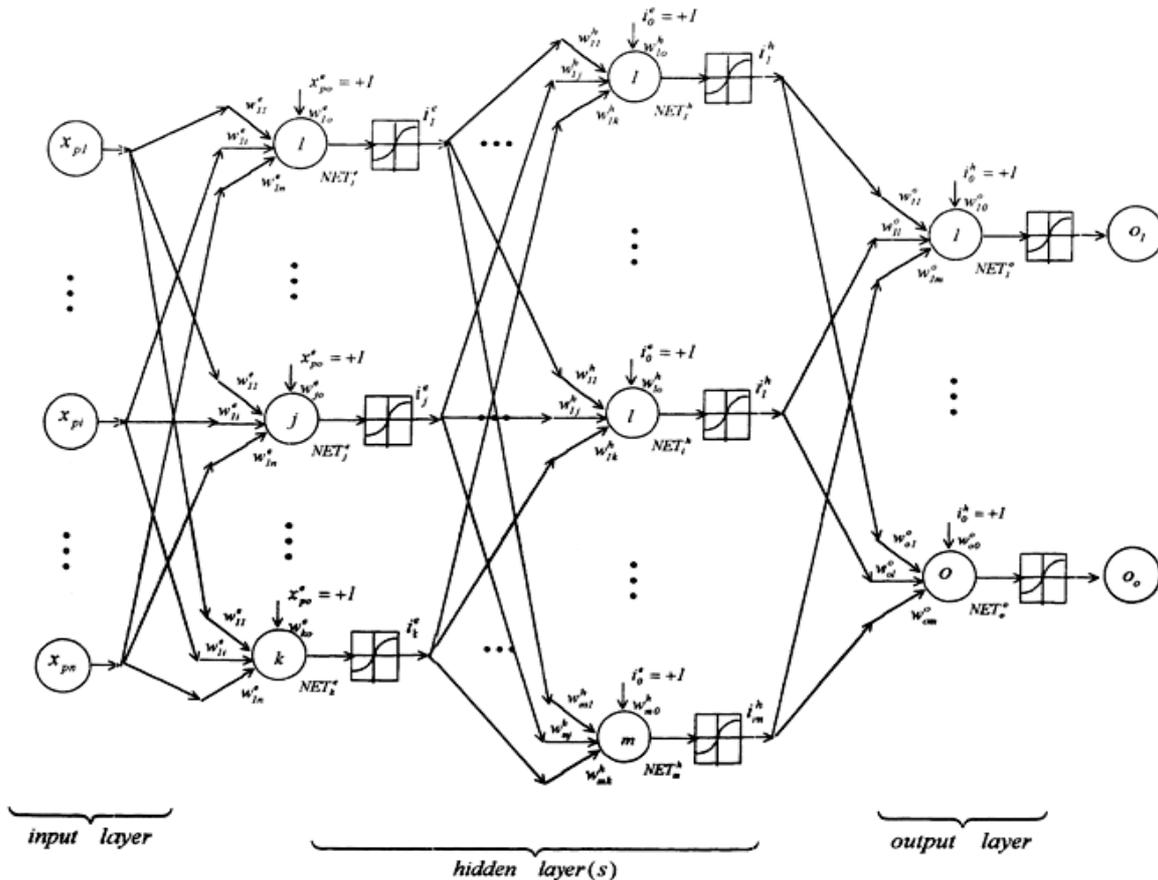


Figura 6.2 - Arquitetura genérica de uma RNPM 3:3:2 – retirado de Gomes (2001).

#### 6.4 Redes neurais com funções de base radial (RNBR)

O projeto de uma rede neural pode ser visto como um problema de adaptação (aproximação) de hipersuperfícies em um espaço multidimensional. Assim, o aprendizado da rede é equivalente a encontrar as características da superfície multidimensional que melhor se ajustam aos dados de treinamento. De forma correspondente, a generalização pode ser entendida como o uso da superfície multidimensional ajustada para a interpolação (ou extrapolação) de dados de validação ou teste. Tal ponto de vista na verdade é a motivação que está por trás do método das funções de base radial de forma que ele remete a trabalhos tradicionais de pesquisa de interpolação em espaços multidimensionais.

A construção de redes neurais com funções de base radial na sua forma mais básica envolve apenas três camadas, as quais são inteiramente diferentes entre si. A camada de entrada é composta por neurônios de entrada (sensores). A segunda camada é uma camada escondida de dimensão suficiente e que serve para propósitos diferentes que daqueles presentes nas redes mais comuns como as de percéptrons multicamada. Esta camada é composta por modelos de neurônios diferentes dos usualmente empregados. Na figura 6.3 é apresentado um esquema de um neurônio com função de base radial, na sua forma mais simples.

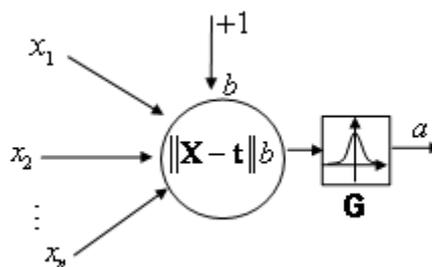


Figura 6.3 - Esquema geral de um neurônio de base radial.

Assim como nos neurônios das redes percéptrons, o neurônio com função de base radial recebe o vetor de entrada  $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$  pelos seus axônios, os quais não possuem pesos sinápticos como nos percéptrons. No corpo do neurônio é então calculada a norma Euclidiana da distância entre o vetor de entrada e o centro fixo  $\mathbf{t}$  do neurônio. Então este resultado é multiplicado pelo limiar  $b$  o qual tem valor de entrada constante e igual a +1. O valor do limiar  $b$  permite que a sensibilidade do neurônio seja ajustada de forma que responda a vetores de entrada que estejam mais ou menos distantes de seu centro, possibilitando que outros neurônios com centros próximos àquele também respondam aos vetores de entrada. O produto resultante é passado por uma função não linear de base radial  $G$  (função de ativação) para então resultar na saída  $a$ , de forma que a saída tem valor máximo quando o vetor de entrada for igual ao centro do neurônio. Todo o processo pode ser resumido como se segue:

$$q = G(\|\mathbf{X} - \mathbf{t}\| \cdot b). \quad (6.4)$$

Devido ao fato de se utilizar funções de ativação não lineares, a transformação do espaço de entrada para o espaço das unidades escondidas é dita do tipo não linear.

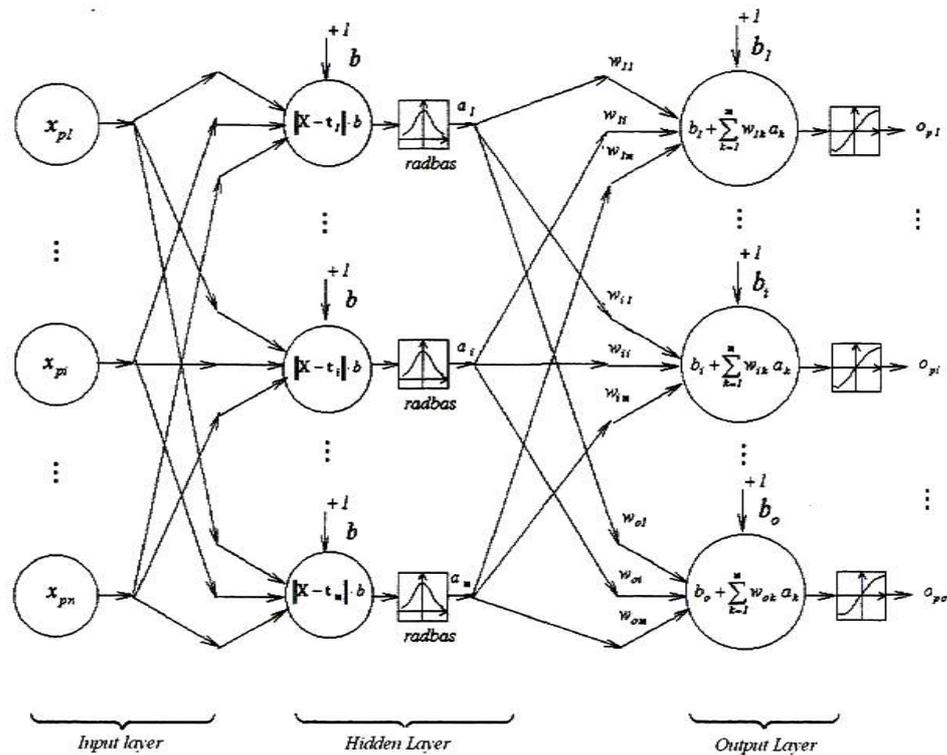


Figura 6.4 - Esquema geral de uma rede neural de base radial – retirado de Gomes (2001).

A terceira camada é a camada de saída e fornece a resposta da rede aos padrões apresentados à mesma. A transformação do espaço das unidades escondidas para o espaço das unidades de saída é dita do tipo linear uma vez que esta camada é composta por neurônios que possuem função de ativação do tipo linear. Assim como as redes neurais do tipo percéptrons, largamente utilizada, nesta camada cada neurônio possui associado aos seus axônios tanto pesos sinápticos quanto limiars. Assim, a camada de saída apenas soma ponderadamente as saídas da camada anterior escondida, formada por funções de bases radiais, pelos pesos sinápticos correspondentes e fornece o valor da saída. Na figura 6.4 é mostrada uma arquitetura geral de uma rede com função de base radial para um vetor de entrada de dimensão  $n$  e  $p$  amostras de treinamento, uma camada escondida com  $m$  neurônios com função de base radial, sendo  $m \leq n$ , e uma camada de saída com  $o$  neurônios do tipo lineares.

### 6.4.1 Projeto de uma rede generalizada com funções de base radial

Dado um conjunto de  $N$  diferentes pontos  $\{\mathbf{x}_i \in \mathfrak{R}^p / i = 1, 2, \dots, N\}$  que representam os valores de entrada e um correspondente número de  $N$  números reais  $\{d_i \in \mathfrak{R}^o / i = 1, 2, \dots, N\}$  que representam as saídas desejadas, constituindo uma amostra de treinamento, então com uma rede com funções de base radial é possível encontrar uma função  $F : \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^o$ , tal que satisfaça a seguinte condição de interpolação:

$$F(\mathbf{x}_i) = \mathbf{d} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.5)$$

A solução da equação anterior utilizando as funções de Green como funções de base remetem às “redes de regularização” que constituem uma classe de redes com funções de base radial cuja camada escondida contém um número de neurônios igual ao número  $N$  de pontos da amostra, centrados cada um em cada amostra  $\mathbf{x}_i$ . Este tipo de solução é quase sempre evitado, pois é proibitivamente dispendioso para implementar em termos computacionais para o caso de grandes valores de  $N$ .

Utilizando a técnica padrão variacional do Método de Galerkin, uma solução aproximada  $F^*(\mathbf{x})$  pode se encontrada para contornar a solução regularizada, anteriormente mencionada. De acordo com esta técnica, a solução aproximada é expandida em termos de uma base finita, como descrito a seguir:

$$F^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (6.6)$$

onde  $\{\varphi_i(\mathbf{x}) / i = 1, 2, \dots, M\}$  é um novo conjunto de funções de base que se assume, sem perda de generalidade, que sejam linearmente independentes. Tipicamente o número de funções de base é menor que o número de pontos da amostra ( $M \leq N$ ) e os  $w_i$  constituem um novo conjunto de pesos. Por motivos que serão óbvios mais tarde, as funções de base não lineares  $\varphi_i$  devem atender a certa condição. A propriedade a que deve obedecer a função de base radial é aquela definida pelo enunciado a seguir (Gomes, 2001):

Sejam  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$  pontos distintos em  $\mathfrak{R}^p$ . Então, a matriz de interpolação  $\Phi$ ,  $N$  por  $N$ , cujos elementos são  $\varphi_{ij} = G(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{t}_i\|)$ , sendo  $G$  uma função de base radial, deverá ser positiva definida.

Funções que satisfazem tal condição e que são geralmente empregadas em redes na forma de funções de base radial são citadas a seguir (Gomes, 2001):

- Função multi quadrática inversa

$$G(r) = \frac{1}{(r^2 + c^2)^{1/2}}, \text{ para } c > 0 \text{ e } r \geq 0; \quad (6.7)$$

- Função *spline* de placa fina

$$G(r) = (pr)^2 \ln(pr), \text{ para } p > 0 \text{ e } r \geq 0; \quad (6.8)$$

e

$$G(r) = (qr)^4 \ln(qr), \text{ para } q > 0 \text{ e } r \geq 0; \quad (6.9)$$

- Função Gaussiana

$$G(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \text{ para } \sigma > 0 \text{ e } r \geq 0. \quad (6.10)$$

Assim, utilizando-se alguma das funções de base radial anteriormente enunciada, pode-se escrever que:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|) \text{ para } i = 1, 2, \dots, M, \quad (6.11)$$

onde o conjunto de centros  $\{\mathbf{t}_i / i = 1, 2, \dots, M\}$  devem ser determinados. Esta escolha particular para o centro das funções de base radial  $\mathbf{t}$  deve ser tal que garanta a obtenção dos dados originais das amostras, no caso em que  $M=N$ , fazendo-se:

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{x}_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, M, \quad (6.12)$$

onde o conjunto de centros  $\{t_i / i = 1, 2, \dots, M\}$  devem ser determinados. Esta escolha particular para o centro das funções de base radial deve ser tal que garanta que no caso em que  $M=N$ , fazendo-se

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{x}_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, M, \quad (6.13)$$

ao menos a solução pontual será obtida. Pode-se então re-definir  $F^*(\mathbf{x})$  como sendo (Gomes, 2001):

$$F^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w_i G(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_i) = \sum_{i=1}^M w_i G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|). \quad (6.14)$$

Então se tem que determinar o novo conjunto de pesos  $\{w_i / i = 1, 2, \dots, M\}$  de forma a minimizar uma função de custo, definida por:

$$\zeta(F^*) = \sum_{i=1}^M \left( \mathbf{d}_i - \sum_{j=1}^M w_j G(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{t}_j\|) \right)^2 + \lambda \|\mathbf{P}\mathbf{F}^*\|^2, \quad (6.15)$$

onde  $\mathbf{P}$  é um operador diferencial invariante tanto a rotações quanto a translações. A solução do problema de minimização sem restrições anteriormente definido pode ser obtido chegando-se à seguinte equação que minimiza a função custo:

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{G}_0) \mathbf{W} = \mathbf{G}^T \mathbf{d} \quad (6.16)$$

onde,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1) & G(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_2) & \cdots & G(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_M) \\ G(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}_1) & G(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}_2) & \cdots & G(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(\mathbf{x}_N, \mathbf{t}_1) & G(\mathbf{x}_N, \mathbf{t}_2) & \cdots & G(\mathbf{x}_N, \mathbf{t}_M) \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

e

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} G(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_1) & G(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) & \cdots & G(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_M) \\ G(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1) & G(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_2) & \cdots & G(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(\mathbf{t}_N, \mathbf{t}_1) & G(\mathbf{t}_N, \mathbf{t}_2) & \cdots & G(\mathbf{t}_N, \mathbf{t}_M) \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

com

$$\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T \quad (6.19)$$

e

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_N]^T, \quad (6.20)$$

sendo  $\lambda$  o parâmetro de regularização. Note-se que quando o parâmetro de regularização aproxima-se de zero, o vetor de pesos  $\mathbf{w}$  converge para a solução de norma mínima (pseudo-inversa) do problema de aproximação pelos mínimos quadrados do sistema de equações sobredeterminado, assim:

$$\mathbf{w} = \mathbf{G}^+ \mathbf{d} \quad \text{para } \lambda = 0, \quad (6.21)$$

onde a pseudo-inversa da matriz  $\mathbf{G}$ , é definida como:

$$\mathbf{G}^+ = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T. \quad (6.22)$$

Note-se que no vetor  $\mathbf{w}$  devem estar incluídos os pesos sinápticos da camada de saída bem como seus limiares. Nos algoritmos implementados neste trabalho, um neurônio de base radial é adicionado por vez na camada escondida. O neurônio adicionado é centrado na amostra do vetor de entrada que produz maior erro quadrático médio na saída. O erro quadrático é monitorado até atingir certa tolerância assim como o número máximo de neurônios da camada escondida (que no máximo tem a dimensão da amostra – solução regularizada) quando então para-se o processo e é dito que a rede está treinada.

## 6.5 Geração de amostras para treinamento da rede neural artificial

Para gerar as amostras de treinamento para a rede neural artificial, primeiramente é realizada uma procura em direções aleatórias (no espaço padrão não-correlacionado) por pontos no entorno da função de estado limite, de forma que  $H(\mathbf{U}) = 0$ . Uma vez que esses pontos são encontrados, os valores médios das funções de distribuição das variáveis aleatórias são deslocados com a finalidade de obter

amostras (usando Monte Carlo) próximas a vizinhança da região de falha/segurança. Um outro conjunto de amostras aleatórias centrado nos valores médios das variáveis aleatórias é adicionado ao conjunto original de amostras de forma a proporcionar um melhor comportamento da função de estado limite simulada em pontos que estão longe da região de falha. Isto é particularmente importante se um método baseado em derivadas, tal como FORM, é utilizado. A figura 6.5 mostra esquematicamente como essas amostras são geradas no espaço Gaussiano padrão não-correlacionado, para uma função de estado limite de duas variáveis aleatórias. Neste trabalho, o número de direções aleatórias de procura é três vezes o número de variáveis aleatórias.

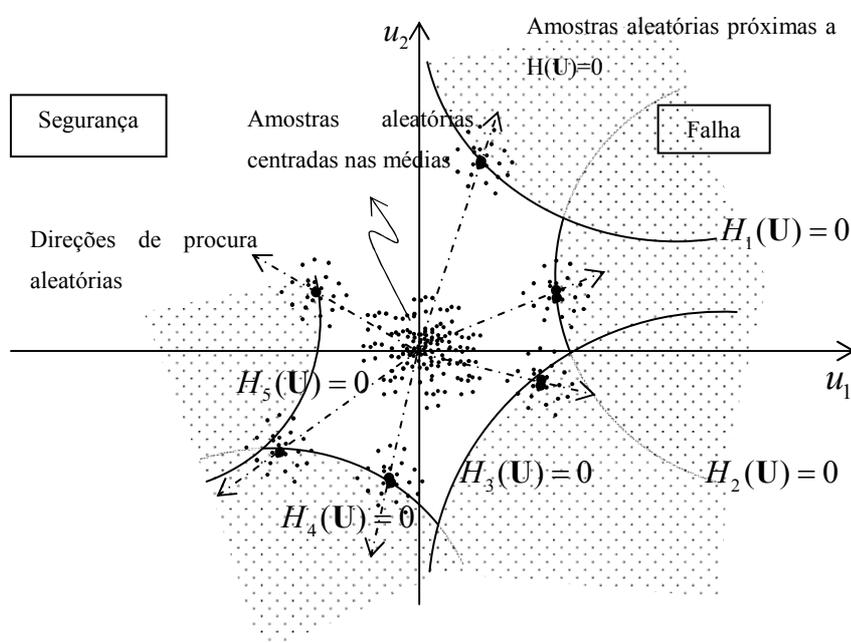


Figura 6.5 - Esquema de geração do conjunto de amostras para treinamento da rede neural artificial.

## 6.6 Resultados numéricos

### 6.6.1 EXEMPLO 1

Nos exemplos apresentados a seguir as simulações foram realizadas usando o material compósito vidro-epóxi, cujas propriedades mecânicas e de resistência estão listadas na tabela 6.1. Estas variáveis foram inicialmente tratadas como determinísticas. O laminado é formado por duas lâminas, com ângulos de orientação  $0^\circ$  e  $90^\circ$

respectivamente. Três casos de carregamento são analisados: tração axial, tração biaxial e múltiplas cargas. Um modelo de elementos finitos com uma malha regular de 200 elementos triangulares foi utilizado para determinar as tensões locais nos eixos principais do laminado.

Tabela 6.1 – Propriedades mecânicas e resistências do Vidro – Epóxi.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{21}$	$G_{12}$ (GPa)	$R_x^t$ (MPa)	$R_x^c$ (MPa)	$R_y^t$ (MPa)	$R_y^c$ (MPa)	$R_{xy}$ (MPa)
55	18	0.25	0.08	8	1500	-1250	50	-200	100

### 6.6.1.1 Primeiro caso – carga uniaxial

Uma carga aleatória de tração  $N_I$ , atuando no plano do laminado, com distribuição de probabilidade lognormal e coeficiente de variação de 20 % é considerada (Frangopol e Recek, 2003). Os resultados da probabilidade de falha  $P_f$ , calculadas usando elementos finitos e uma RNBR (com uma arquitetura 1:13:1) são apresentados na figura 6.6. Com o objetivo de verificar a precisão dos resultados de  $P_f$  também são feitas comparações com os resultados obtidos por Frangopol e Recek (2003).

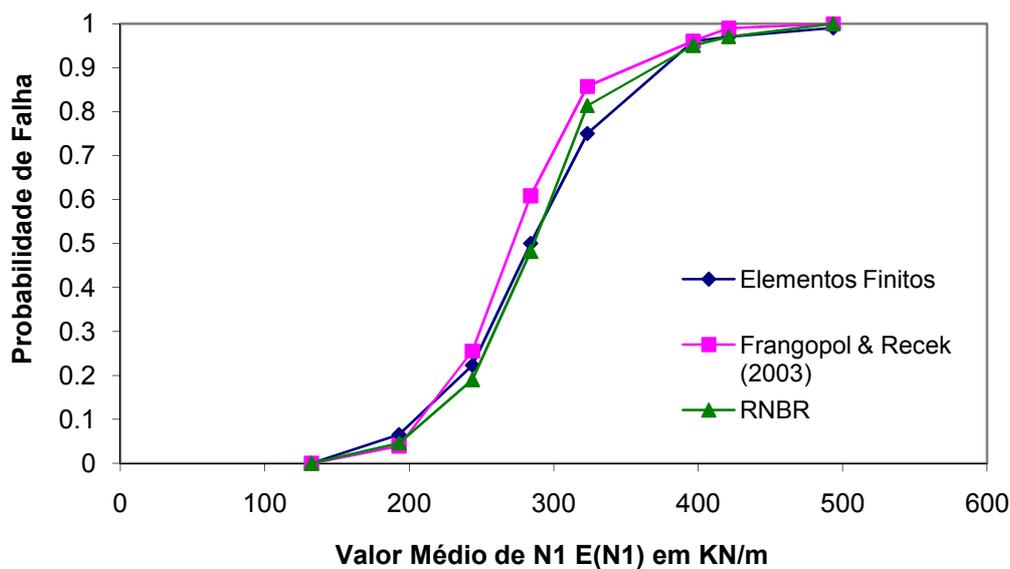


Figura 6.6 – Probabilidade de falha do laminado com carga uniaxial de tração  $N_I$ .

Resultados para o tempo de processamento  $T_p$  usando elementos finitos e redes neurais estão listados na tabela 6.2. Os valores de  $T_p$  são apresentados como uma porcentagem do maior tempo de processamento de todas as simulações. O tempo de processamento usando RNBR para o cálculo de  $P_f$ , inclui o tempo de treinamento, o qual é feito utilizando elementos finitos.

Tabela 6.2 – Tempo de processamento usando elementos finitos e redes neurais.

Média $N_x$ (KN/m)	$P_f$		$T_p$	
	Elementos Finitos	RNBR	Elementos Finitos	RNBR
192.984	0,065	0,0460	100	0,75
243.717	0,223	0,1898	12,99	0,46
284.056	0,500	0,4817	3,98	0,43
323.154	0,750	0,8133	1,33	0,39
396.586	0,960	0,9500	0,33	0,40
420.998	0,970	0,9700	0,33	0,40
493.364	0,990	1,0000	0,33	0,40

Os resultados evidenciam que o uso de RNBR reduz consideravelmente o custo computacional para o cálculo da probabilidade de falha, especialmente nos caso em que  $P_f$  é menor do que 0.5.

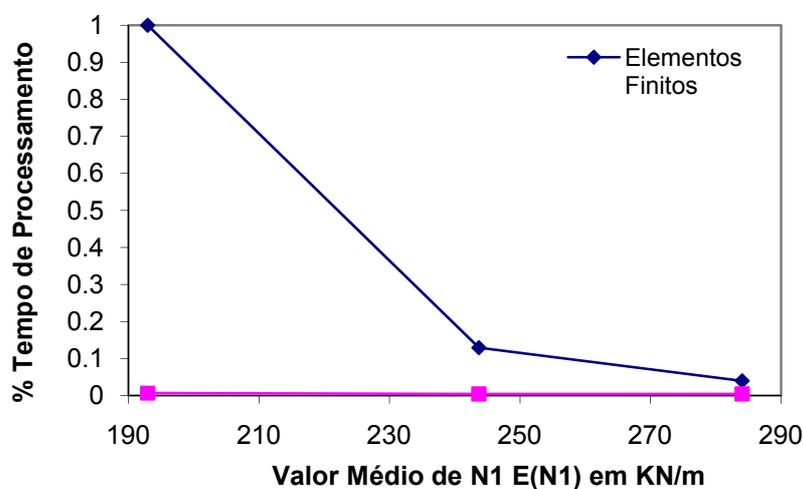


Figura 6.7 - Comparação dos custos computacionais para  $P_f < 0,5$  (carga uniaxial).

### 6.6.1.2 Segundo caso – Carregamento Biaxial

Uma carga aleatória  $N_2$  atuando perpendicularmente a direção da carga  $N_1$  é agora adicionada. A distribuição de probabilidade, valor médio  $E(N_2)$  e o coeficiente de variação são os mesmos consideradas para  $N_1$  do primeiro exemplo. Uma rede RNBR, com a mesma arquitetura usada no exemplo 1 é treinada para este caso. Figura 6.8 apresenta os resultados da probabilidade de falha  $P_f$  calculada usando elementos finitos e RNBR. Os resultados obtidos por Frangopol e Recek (2003) são utilizados para comparação. A tabela 6.3 apresenta o tempo de processamento  $T_p$  usando elementos finitos e RNBR.

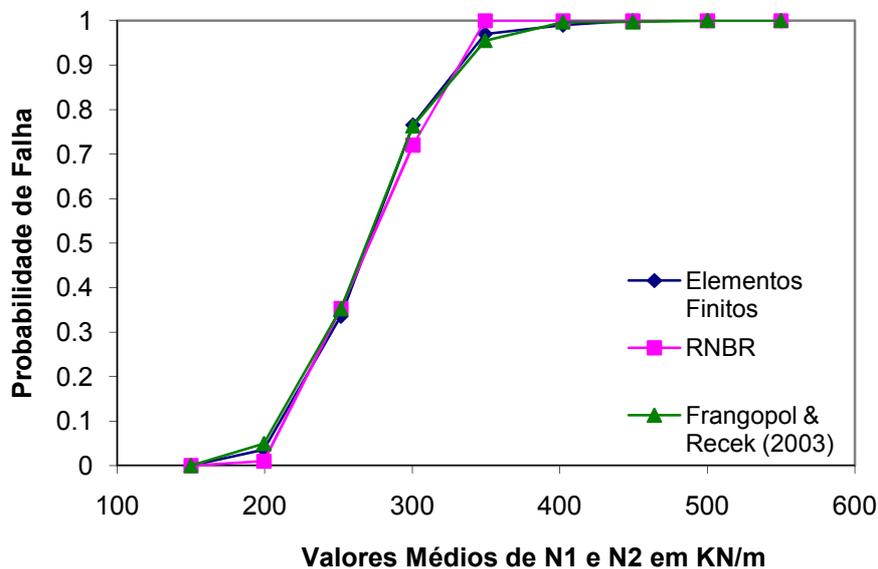


Figura 6.8 – Probabilidade de falha para o compósito laminado sob condições de carregamento biaxial.

Tabela 6.3 - Resultados dos tempos de processamento usando elementos finitos e redes neurais artificiais RNBR (carregamento biaxial).

Média	$P_f$	$P_f$	$T_p$	$T_p$
$N_1=N_2$	Elementos	RNBR	Elementos	RNBR
(kN/m)	Finitos		Finitos	
199,524	0,036	0,010	100	1,73
251,559	0,336	0,354	7,32	0,36

300,541	0,765	0,720	1,32	0,40
349,293	0,970	1,000	0,33	0,40
402,107	0,990	1,000	0,33	0,40
449,601	1,000	1,000	0,33	0,40
500,270	1,000	1,000	0,33	0,40
549,87	1,000	1,000	0,33	0,40

Novamente, fica evidente que há uma drástica redução no tempo de processamento quando se usa redes neurais artificiais para pequenos valores de  $P_f$ . Comparações do tempo de processamento entre ambos os métodos, para  $P_f < 0,8$  são apresentadas na figura 6.9.

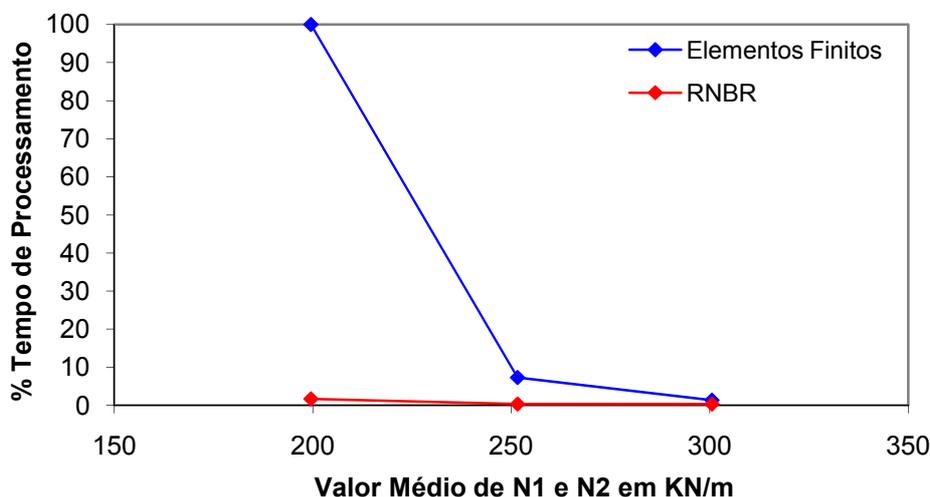


Figura 6.9 – Comparação dos tempos de processamento para probabilidades de falha  $P_f < 0,8$  (carregamento biaxial).

### 6.6.1.3 Terceiro caso – cargas axiais e momentos

Nesta simulação, 12 variáveis aleatórias são consideradas. Cargas aleatórias  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_{12}$ ,  $M_1$  são aplicadas em um laminado de material compósito composto por 4 lâminas, com espessuras  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $h_4$  e ângulos de orientação  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  respectivamente. As espessuras são consideradas não-correlacionadas e com distribuição de probabilidade Log-Normal, enquanto que os ângulos de orientação também são não correlacionados, porém com distribuição de probabilidade Normal. As propriedades mecânicas e as resistências do material são consideradas variáveis

determinísticas relacionadas ao Vidro/Epóxi, conforme tabela 6.1. Os parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias estão listados na tabela 6.4, onde CV significa coeficiente de variação. A probabilidade de falha é calculada para uma função de estado limite onde o critério de Tsai-Wu para falha da primeira lâmina é considerado.

Tabela 6.4 - Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias.

Variáveis Aleatórias	Unidade	$\mu$	CV	Tipo de Distribuição
$N_x$	kN/m	10	0.2	Log-Normal
$N_y$	kN/m	20	0.2	Log-Normal
$N_{xy}$	kN/m	40	0.2	Log-Normal
$M_x$	N/m	0.1	0.2	Log-Normal
$\theta_1$	grau	0	2	Normal
$\theta_2$	grau	45	2	Normal
$\theta_3$	grau	45	2	Normal
$\theta_4$	grau	0	2	Normal
$h_1$	m	0.001	0.01	Log-Normal
$h_2$	m	0.001	0.01	Log-Normal
$h_3$	m	0.001	0.01	Log-Normal
$h_4$	m	0.001	0.01	Log-Normal

As figuras 6.10 e 6.11 apresentam as correlações entre os valores calculados de Tsai-Wu usando RNPM (com uma arquitetura de 12:10:10:1), RNBR (com uma arquitetura 12:128:1) e elementos finitos (foram utilizadas 131 amostras com 12 variáveis aleatórias). As figuras 6.10 e 6.11 também mostram o erro quadrático médio durante o processo de treinamento, para ambos os tipos de redes neurais. O coeficiente de correlação é expresso como  $R^2$  nos gráficos. Fica claro que a RNBR apresenta uma melhor correlação, uma vez que necessita de um menor número de iterações durante o processo de aprendizagem do que a tradicional RNPM.

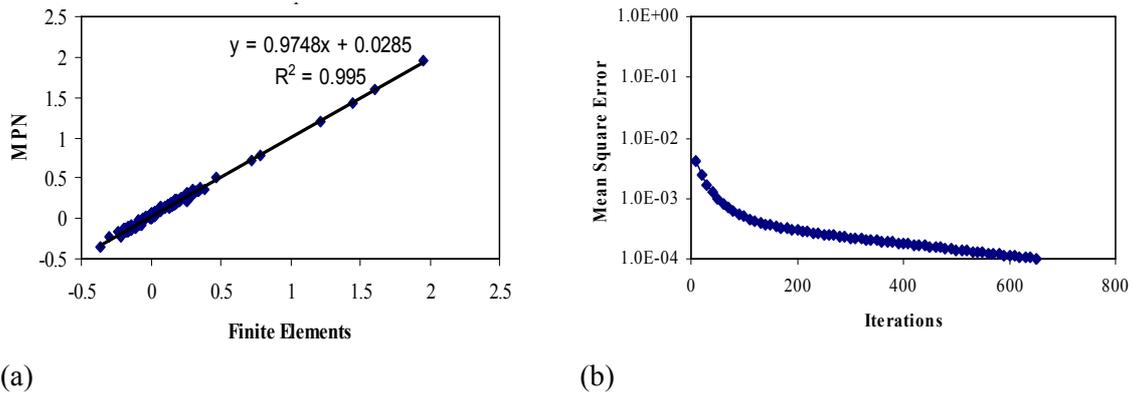


Figura 6.10 - Treinamento da RNPM. (a) Correlação entre os valores de Tsai-Wu usando RNPM e elementos finitos, (b) Erro quadrático médio durante o processo de aprendizagem.

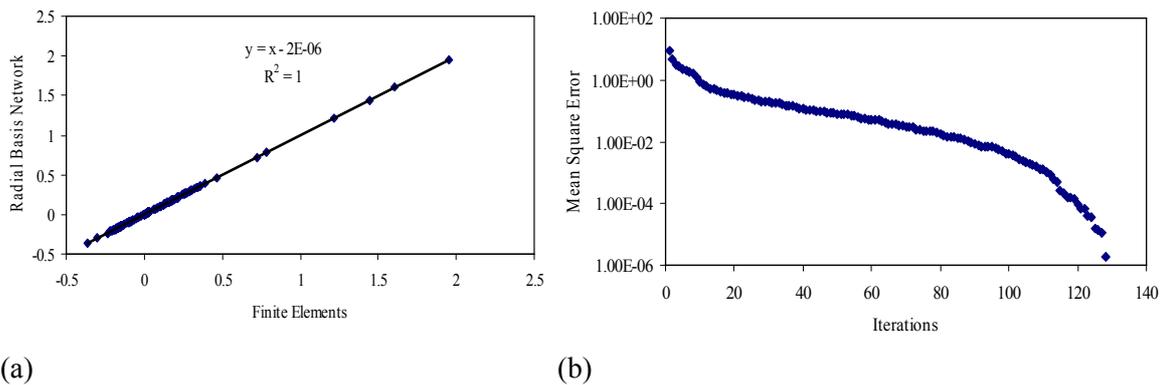


Figura 6.11 - Treinamento da RNBR. (a) Correlação entre os valores de Tsai-Wu usando RNBR e elementos finitos, (b) Erro quadrático médio durante o processo de aprendizagem.

A tabela 6.5 apresenta os resultados dos tempos de processamento e índices de confiabilidade atingidos, usando os métodos anteriormente descritos.

Tabela 6.5 - Comparação dos valores do tempo de processamento para diversos métodos usando redes neurais e elementos finitos para o cálculo da confiabilidade de um laminado compósito com cargas axiais e momento.

Método	Tempo de Processamento Relativo	Número de Simulações (NS)	Número de Pontos de Falha (NF)	Probabilidade de Falha (Pf)	Coefficiente de Variação (Pf)	Índice de Confiabilidade ( $\beta$ )
MC	1,000E+00	5900	375	6,36E-02	5,00E-02	1,526
MC-AI	3,082E-01	1800	-	6,65E-02	4,85E-02	1,503
FORM	1,885E-02	112	-	5,20E-02	-	1,625
FORM Série	1,107E-01	672	-	5,21E-02	-	1,625
RNBR treinamento	1,567E-01					
MC + RNBR	1,573E-01	10000	640	6,40E-02	3,82E-02	1,522
MC-AI+ RNBR	6,101E-04	1800	-	6,70E-02	4,95E-02	1,498
FORM+ RNBR	1,778E-04	56	-	6,02E-02	-	1,553
FORM Série + RNBR	2,229E-03	56	-	6,02E-02	-	1,553
RNPM treinamento	1,471E-01					
MC+ RNPM	4,688E-04	10000	610	6,10E-02	3,92E-02	1,546
MC-AI + RNPM	1,573E-04	1900	-	6,08E-02	4,97E-02	1,548
FORM + RNPM	1,577E-01	84	-	6,29E-02	-	1,531
FORM Série +RNPM	2,232E-03	1800	-	1,29E-01	-	1,147

Legenda :

MC : Monte Carlo.

MC – AI : Monte Carlo com Amostragem por Importância.

RNBR : Rede Neural de Base Radial.

RNPM : Rede Neural Percéptron Multicamada.

Fica clara a vantagem do uso de redes neurais para o cálculo do índice de confiabilidade, mesmo considerando o tempo de treinamento da rede. A precisão dos resultados também é satisfatória do ponto de vista de engenharia (é assumido como índice de confiabilidade padrão o método de Monte Carlo em conjunto com elementos finitos), fato esse comprovado pelos resultados obtidos usando Monte Carlo e elementos finitos e Monte Carlo e RNBR. Os resultados mostram ainda que, como esperado, a RNBR treinada apresenta melhores resultados do que a RNPM treinada, uma vez que a correlação entre os valores de Tsai-Wu obtidos com elementos finitos e RNBR foram superiores.

### 6.6.2 EXEMPLO 2 – Casca semi-cilíndrica compósita com carga de pressão

Neste exemplo, o índice de confiabilidade é calculado usando um modelo de elementos finitos de uma casca semi-cilíndrica com comportamento não linear geométrico. É aplicada uma carga de pressão  $P=250000$  Pa ao longo da superfície externa da estrutura. As dimensões e as condições de contorno estão indicadas na figura 6.12, Almeida (2006).

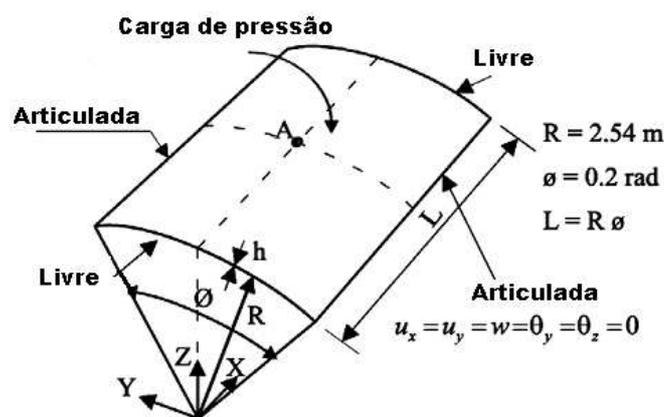


Figura 6.12 - Geometria e Condições de Contorno da casca de compósito com carga de pressão.

A espessura do laminado é de 12,6 mm, sendo composto por 28 lâminas com ângulos de orientação  $[90_4^0, \mp 45^0, 90_4^0, \mp 45^0, 90_2^0]_s$  orientados com relação a direção longitudinal da casca. O material considerado é o vidro-epóxi, com propriedades mecânicas  $E_1=39\text{GPa}$ ,  $E_2=8,6\text{GPa}$ ,  $E_{12}=3,8\text{GPa}$  e  $\nu_{12} = 0,28$  e resistências  $R'_x = 1080$  MPa,  $R^c_x = 620$  MPa,  $R'_y = 39$  MPa,  $R^c_y = 128$  MPa,  $R_{xy} = 89\text{MPa}$ . A função de estado limite é o critério de Tsai-Wu. Uma típica curva carga – deslocamento no centro da estrutura, usando valores determinísticos, está indicada na figura 6.13.

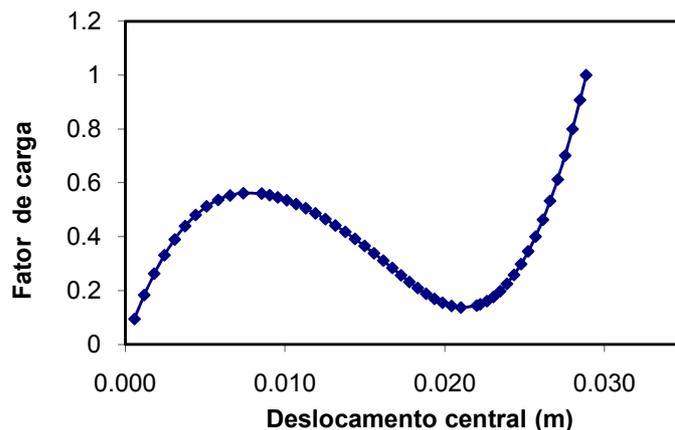


Figura 6.13 - Curva carga – deslocamento, não linear, no centro da estrutura para uma casca semi – cilíndrica com 12,6 mm de espessura.

São consideradas 5 variáveis aleatórias para este exemplo, conforme está indicado na tabela 6.5, onde  $\mu$  representa o valor médio e CV é o coeficiente de variação.

Tabela 6.6 – Parâmetros estatísticos para as variáveis aleatórias.

Variável Aleatória	Unidade	$\mu$	CV	Distribuição de Probabilidade
$R_x^t$	Pa	$1,08 \times 10^9$	0,2	Log-Normal
$R_x^c$	Pa	$6,2 \times 10^8$	0,2	Log-Normal
$R_y^t$	Pa	$3,9 \times 10^7$	0,2	Log-Normal
$R_y^c$	Pa	$1,28 \times 10^8$	0,2	Log-Normal
$R_{xy}$	Pa	$8,9 \times 10^7$	0,2	Log-Normal

Os resultados para diferentes formas de calcular o índice de confiabilidade estão indicados na tabela 6.6.

Tabela 6.7 - Comparação dos valores do tempo de processamento para diversos métodos usando redes neurais e elementos finitos para o cálculo da confiabilidade de uma casca semi-cilíndrica com carregamento de pressão na superfície.

Método	Tempo de Processamento Relativo	Número de Simulações (NS)	Número de Pontos de Falha (NF)	Probabilidade de Falha (Pf)	Coefficiente de Variação (Pf)	Índice de Confiabilidade ( $\beta$ )
MC-AI	1,000E+00	15250	-	1,9570E-02	5,00E-02	2,063
FORM	2,000E-02	28	-	2,5820E-02		1,946
FORM Série	8,100E-02	120	-	2,5820E-02	-	1,946
RNBR treinamento	3,2E-02					
MC + RNBR	2,940E-01	21500	399	1,8560E-02	4,9600E-02	2,084
MC-AI+ RNBR	1,580E-01	14500	-	1,9650E-02	4,9370E-02	2,061
FORM+ RNBR	1,000E-03	147	-	1,6650E-02	-	2,128
FORM Série + RNBR	3,000E-03	315	-	1,6710E-02	-	2,127
RNPM treinamento	3,000E-02					
MC+ RNPM	2,050E-01	17500	398	2,2740E-02	4,9550E-02	2,000
MC-AI + RNPM	1,060E-01	118500	-	2,0710E-02	4,973E-02	2,039
FORM + RNPM	3,000E-03	350	-	2,0870E-02	-	2,036
FORM Série +RNPM	9,000E-03	1750	-	2,0870E-02	-	2,036

Neste exemplo, Monte Carlo usando elementos finitos para análise da função de estado limite não foi utilizado, uma vez que o custo computacional é muito alto. O mesmo conjunto de amostras foi usado para treinar ambas as redes neurais (RNBR e RNPM). O número de amostras geradas foi de 500, seguindo a metodologia apresentada no item 6.5. Pode ser observado na tabela 6.7 que o melhores resultados são obtidos por MC-AI com uma RNBR treinada, quando comparados com MC-AI com elementos finitos (referência para as comparações). Provavelmente melhores resultados podem ser obtidos pela RNBR se mais amostras forem utilizadas para o treinamento da rede. Considerando o tempo de processamento para o cálculo da confiabilidade, uma redução drástica foi obtida usando qualquer uma das redes treinadas. Esta redução é da ordem de 80% para MC-AI + RNBR e 87% para MC-AI + RNPM, sendo que, independente do método usado para análise de confiabilidade, a maior parte deste tempo foi gasto na geração das amostras para treinamento (onde o programa de elementos finitos é utilizado).

### 6.6.3 EXEMPLO 3 - Otimização de placas de laminados de compósitos com restrição de confiabilidade

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos pelas redes neurais RNBR e RNPM no problema de otimização, com restrição de confiabilidade, apresentado no capítulo 5, seção 5.3.3. O procedimento usado aqui foi o de treinar as redes de forma que elas, a partir de uma determinada configuração do laminado (um indivíduo da população dos AGs), fornecessem diretamente o índice de confiabilidade. Esta forma de treinamento difere da apresentada nas seções 6.6.1 e 6.6.2, onde a rede treinada substituíria o programa de elementos finitos e forneceria como resultado o valor da função de estado limite para cada indivíduo da população. O índice de confiabilidade usado para treinamento foi calculado usando FORM (sendo o valor da função de estado limite obtido pelo programa de elementos finitos). Utilizaram-se 300 amostras, obtidas conforme seção 6.5, e as arquiteturas de rede foram: RNBR (4:300:1) e RNPM (4:10:10:10:1). A tabela 6.8 compara o custo computacional usando redes ou elementos finitos. O tempo de processamento de referência considerado é o do método FORM para sistemas em série usando elementos finitos para avaliação da função de estado limite. A tabela 6.9 apresenta os erros relativos, tomando como referência a solução com FORM e elementos finitos.

Tabela 6.8 - Comparação dos valores do tempo de processamento usando redes neurais ou elementos finitos para otimização da espessura total do exemplo do item 5.3.3.

Método	Tempo de processamento (s)	Tempo de Processamento Relativo	h1	h2	h3	h4	ht	( $\beta$ )	
FORM Série	13010,48	1,000E+00	2,390E-03	1,580E-03	2,740E-03	9,400E-04	7,650E-03	2,999	
FORM	1232,79	9,475E-02	2,390E-03	1,580E-03	2,740E-03	9,400E-04	7,650E-03	2,995	
RNBR - treinamento	329,43	2,500E-02							
RNBR - simulação	0,440	3,381E-05	2,377E-02	1,576E-02	2,724E-02	9,075E-04	7,585E-01	3,000	
RNPM - treinamento	294,25	2,260E-02							
RNPM - simulação	0,300	2,305E-05	2,390E-02	1,541E-02	2,745E-02	9,319E-04	7,608E-01	3,000	

Tabela 6.9 - Erros relativos em % usando redes neurais ou elementos finitos para otimização da espessura total do exemplo do item 5.3.3.

Método	H1	H2	H3	H4	Ht
RNBR - simulação	0,544	0,253	0,584	3,510	0,850
RNPM - simulação	0,000	2,468	0,182	0,862	0,549

Os resultados mostram uma drástica redução do tempo de processamento quando a otimização é realizada utilizando redes. Os erros relativos são pequenos, não ultrapassando 3,51% (espessura H4 utilizando RNBR).

#### 6.6.4 EXEMPLO 4 – Otimização baseada em confiabilidade da orientação de lâminas de estrutura compósita com comportamento não linear

Neste exemplo, a estrutura da casca cilíndrica de 28 camadas, analisada anteriormente frente à probabilidade de falha por ruptura (função de estado limite superfície de Tsai-Wu), será otimizada. Nesta otimização, parâmetros anteriormente assumidos, como por exemplo simetria da disposição dos laminados, possibilidade de ocorrência de no máximo quatro laminados contíguos de mesma orientação, serão também assumidos. Também serão assumidas as mesmas variáveis aleatórias anteriormente indicadas, quais sejam, os cinco parâmetros da superfície de ruptura de Tsai-Wu (5 variáveis aleatórias). Neste caso tem-se um problema de otimização com 7 variáveis (devido à simetria e à variação das lâminas duas a duas). Por motivos práticos construtivos, assumiu-se que o espaço de procura que estas variáveis de projeto poderiam ter seriam:  $-45^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ . Desta forma, utilizando-se o algoritmo genético aqui descrito, definiu-se uma quantidade de *bits* por variável de projeto igual a 2, de forma que para as orientações pode-se ter a codificação binária 00, 01, 10, 11 correspondente aos ângulos anteriormente indicados. Isto totaliza  $4^7=16384$  combinações de ângulos para a construção da estrutura. Caso o número de orientações não fosse uma potência de 2, poderia-se trabalhar facilmente com uma lista de orientações com codificação binária que gere combinação superior ao tamanho da lista, preenchendo-se o resto da lista com a mesma orientação da última lâmina da lista.

Neste exemplo, como visto anteriormente, o índice de confiabilidade da estrutura frente à chance de vir a sofrer ruptura é de  $\beta=2,063$ , índice este, calculado e

confirmado pelos mais diversos métodos de avaliação de confiabilidade. A configuração do laminado neste caso é  $[90_2^0, 90_2^0, \pm 45^0, 90_2^0, 90_2^0, \pm 45^0, 90_2^0]_s$ .

#### 6.6.4.1 Análise utilizando o método dos elementos finitos

Devido ao tempo de processamento requerido para as análises partiu-se para a otimização dos ângulos impondo-se um índice de confiabilidade para a estrutura de  $\beta=5,0$ , utilizando-se FORM como método de avaliação de confiabilidade. A malha de elementos finitos assim como os parâmetros para a análise não linear são os mesmos utilizados anteriormente. Os parâmetros utilizados pelo algoritmo genético de otimização são os indicados na tabela 6.10:

Tabela 6.10 – Parâmetros do algoritmo genético.

No. de Variáveis de projeto ( $n$ )	7
Valores discretos das variáveis de projeto	$-45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$ e $90^\circ$
No. de Bits por variável de projeto ( $b$ )	2
Probabilidade de Mutação ( $p_M$ )	1%
Probabilidade de Crossover ( $p_c$ )	90%
Tamanho da população ( $n_{pop}$ )	300
No. máximo de gerações ( $ngen$ )	100
Função de Custo a ser maximizada ( $f$ )	$f = 1/(1 + c \beta - 5 )$
Critério de parada pelo Coeficiente de Variação da função de Custo $CV = \sigma_f / \mu_f$	5%
Coeficiente de penalização $c$	100

Os resultados obtidos utilizando-se como função de estado limite análises feitas em elementos finitos, são os indicados abaixo:

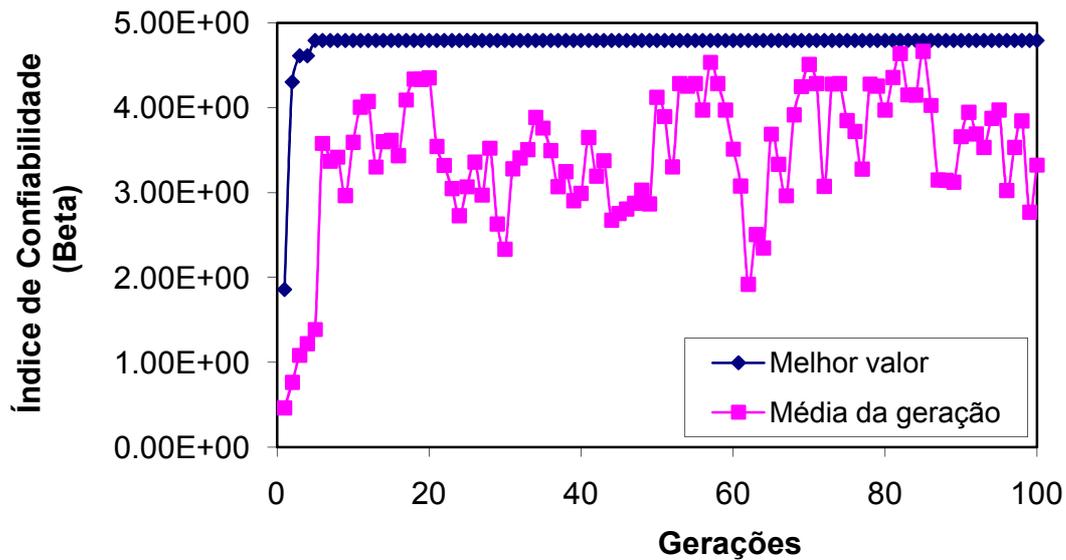


Figura 6.14 – Histórico do índice de confiabilidade do melhor indivíduo e da média dos indivíduos durante as gerações (elementos finitos).

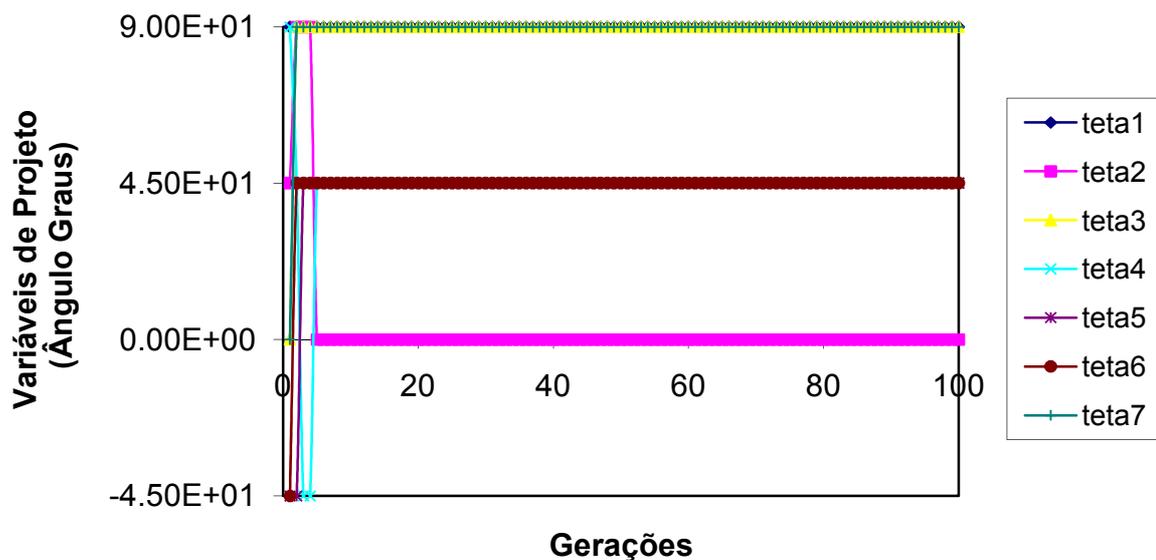


Figura 6.15 – Histórico dos ângulos das lâminas do melhor indivíduo durante as iterações (elementos finitos).

A melhor combinação de ângulos que fornece índice de confiabilidade mais próximo do valor desejado é  $[90_2^0, 0_2^0, 90_2^0, 45_2^0, 45_2^0, 45_2^0, 90_2^0]_s$ , cujo valor do índice de confiabilidade avaliado foi de  $\beta=4,792$ . Obviamente, neste caso em que se tem variáveis de projeto discretas (não podendo assumir qualquer valor), os índices de confiabilidade

correspondentes não poderão assumir qualquer valor, sendo o resultado da otimização uma combinação de ângulos que mais se aproxima do valor de confiabilidade colocado como restrição. Percebe-se assim que foi possível, mantendo a mesma quantidade de lâminas da estrutura, apenas alterando a orientação das mesmas, aumentar a confiabilidade do projeto anteriormente de  $\beta=2,063$  para  $\beta=4,792$ , situação esta bastante desejável, visto que não há aumentos de custo da produção deste novo laminado.

#### **6.6.4.2 Análise utilizando Redes Neurais Artificiais**

Para este exemplo, diferentemente do exemplo anterior que apenas analisava a confiabilidade, optou-se por treinar a rede neural não para substituir a análise de elementos finitos completa (valor mais desfavorável da função de Tsai-Wu em um ponto de integração qualquer da estrutura). A rede neural foi treinada para substituir toda a análise de confiabilidade. Assim, para uma dada combinação de ângulos das lâminas, a Rede Neural será treinada para indicar qual o índice de confiabilidade correspondente. Desta forma, a arquitetura da rede neural utilizada possui 7 entradas (ângulos dos laminados) na camada de entrada e 1 saída (índice de confiabilidade). No caso de Redes Perceptron uma arquitetura do tipo (7:10:10:10:1) foi suficiente para o aprendizado. No caso das Redes Artificiais de Base Radial uma arquitetura do tipo (7:120:1) foi suficiente. Os parâmetros utilizados nas redes neurais, tais como taxa de aprendizado, tolerância para convergência, tipos de função de ativação, momentum, etc. foram os mesmos utilizados nos exemplos anteriores, apenas alterando-se a arquitetura das redes.

O treinamento escolhido foi o da geração de 150 amostras uniformemente distribuídas ao longo do espaço de procura (total de 16384 combinações). Para cada uma das 150 amostras (combinações de ângulos) foi calculado o índice de confiabilidade utilizando-se o método FORM. Esta é a fase mais demorada na análise com as redes neurais visto que análises completas em elementos finitos são necessárias para a geração das amostras de treinamento. As amostras assim geradas foram então utilizadas para treinamento das redes e, posteriormente, o algoritmo genético foi utilizado para otimizar os ângulos das camadas utilizando-se destas redes neurais treinadas. Resultados referentes aos históricos de otimização por algoritmos genéticos utilizando redes neurais treinadas são apresentados abaixo:

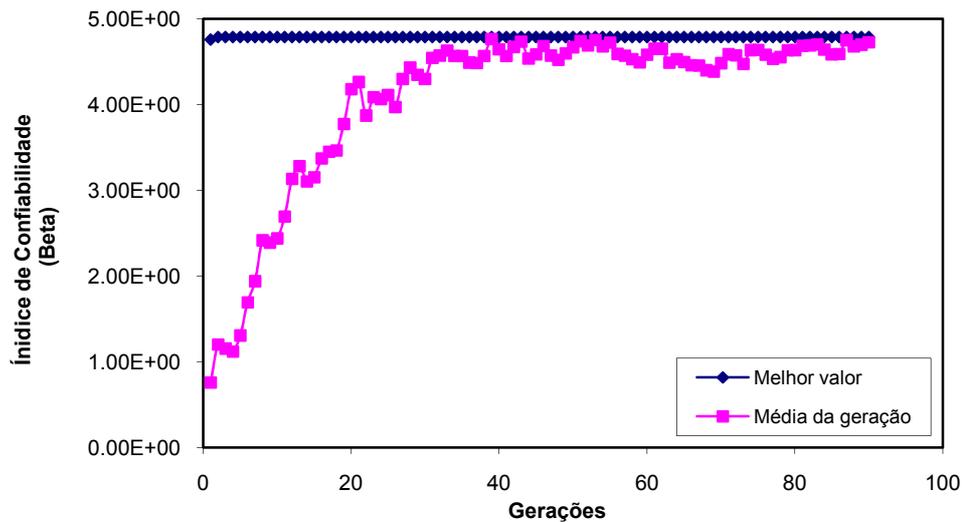


Figura 6.16 – Histórico do índice de confiabilidade do melhor indivíduo e da média dos indivíduos durante as iterações (Rede de Base Radial).

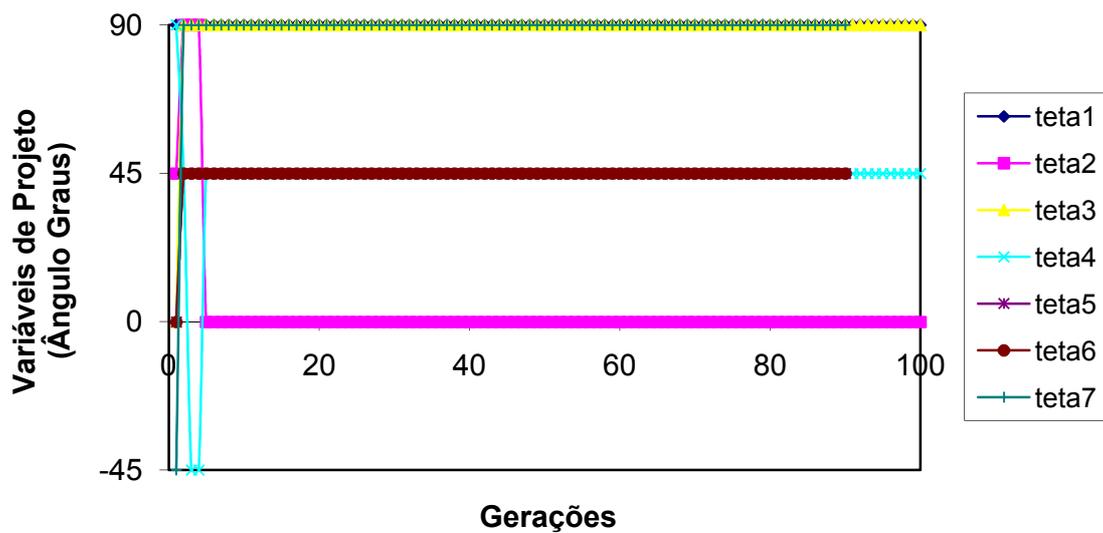


Figura 6.17 – Histórico dos ângulos das lâminas do melhor indivíduo durante as iterações (Rede de Base Radial).

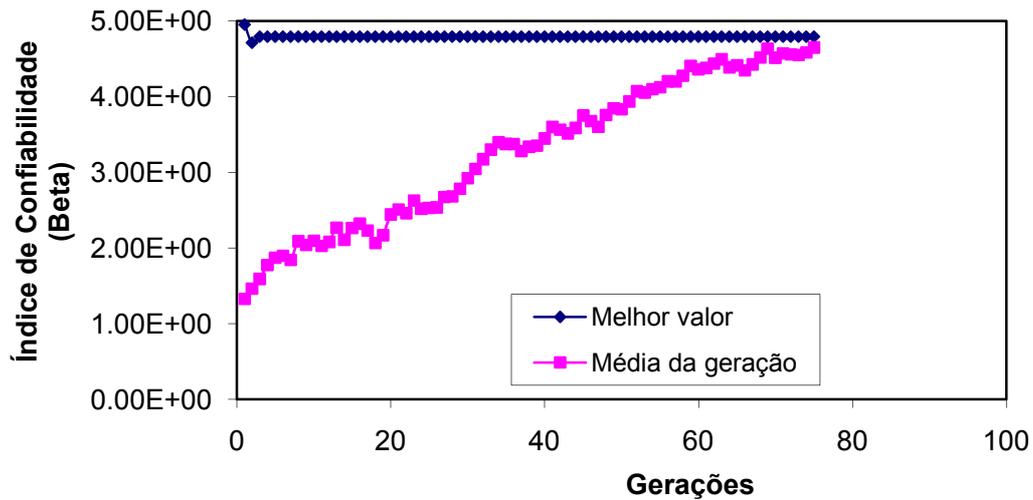


Figura 6.18 – Histórico do índice de confiabilidade do melhor indivíduo e da média dos indivíduos durante as iterações (Rede Perceptron).

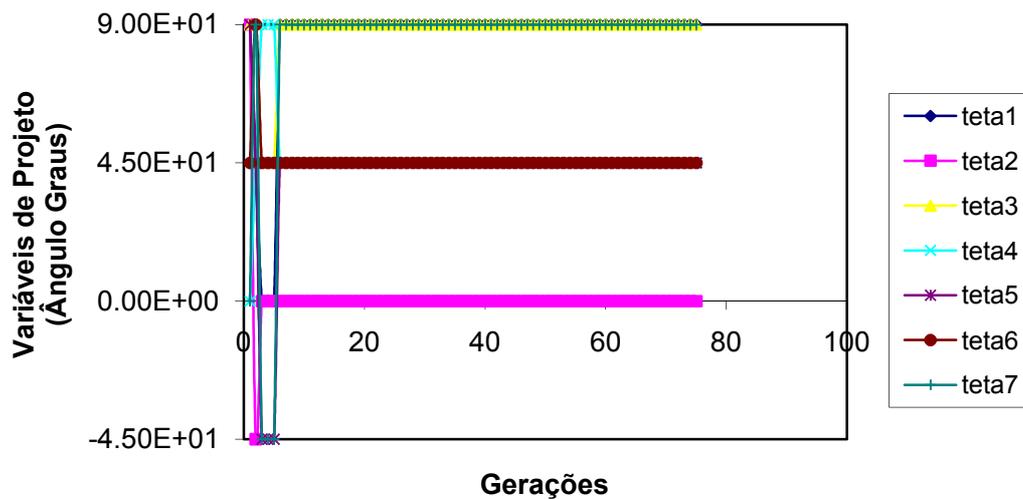


Figura 6.19 – Histórico dos ângulos das lâminas do melhor indivíduo durante as iterações (Rede Perceptron).

Com ambas as redes, o valor ótimo de combinação de ângulos foi exatamente o mesmo encontrado com a otimização utilizando-se o método dos elementos finitos, ou seja,  $[90_2^0, 0_2^0, 90_2^0, 45_2^0, 45_2^0, 45_2^0, 90_2^0]_s$  cujo valor do índice confiabilidade avaliado é de  $\beta=4,791$ . Uma pequena diferença do índice de confiabilidade com redes neurais para o

valor exato pode ser explicado por uma falta de ajuste perfeito da rede neural com os dados de treinamento.

### 6.6.4.3 Comparação de tempos de Processamento

A tabela 6.11 mostra os tempos de processamento e valores obtidos para as otimizações utilizando-se análises por elementos finitos e Redes Neurais Artificiais.

Tabela 6.11 – Comparação dos tempos de processamento para otimização dos ângulos das lâminas usando o método dos elementos finitos e Redes Neurais Artificiais.

Método	Tempo de Processamento (s)	Tempo de Processamento Relativo	$\theta_1$ (°)	$\theta_2$ (°)	$\theta_3$ (°)	$\theta_4$ (°)	$\theta_5$ (°)	$\theta_6$ (°)	$\theta_7$ (°)	( $\beta$ )
Genéticos+FORM+MEF	62203,128	1,00E+00	90	0	90	45	45	45	90	4,792
RNBR –treinamento (150 amostras)	6510,234	1,05E-01								
Genéticos+FORM+RNBR	20,215	3,25E-04	90	0	90	45	45	45	90	4,790
RNPM –treinamento (150 amostras)	7410,375	1,19E-01								
Genéticos+FORM+RNPM	14,524	2,33E-04	90	0	90	45	45	45	90	4,791

---

## CAPÍTULO 7

Neste capítulo serão apresentadas as conclusões para este trabalho, juntamente com algumas sugestões para futuras pesquisas que possam dar continuidade neste campo de estudo.

### 7.1 CONCLUSÕES

Como principais conclusões obtidas neste trabalho, pode-se citar:

- Todos os métodos usados para determinar o índice de confiabilidade da estrutura obtiveram resultados semelhantes. Os resultados obtidos com os métodos de simulação de Monte Carlo serviram para validar o uso de FORM e FORM para sistemas em série. O alto custo computacional dos métodos de simulação, tornou inviável a utilização dos mesmos nos problemas de otimização com AGs e função de estado limite avaliada por elementos finitos.
- Os AGs mostraram-se eficazes para obter as soluções ótimas de vários problemas envolvendo materiais compósitos laminados, com ou sem restrição de confiabilidade. Pode-se destacar a sua capacidade de procura pelo mínimo global, sem depender do cálculo de gradientes, possibilitando o trabalho com variáveis de projeto discretas. No caso específico de otimização com restrição de confiabilidade, os AGs mostraram-se capazes de tratar de forma eficaz um problema envolvendo uma função altamente não linear.
- As RNAs foram utilizadas com sucesso para diminuir o custo computacional do processo de otimização. Tanto em exemplos nos quais as RNAs simulavam o programa de elementos finitos para obter o valor da função de estado limite, quanto nos casos em que foram treinadas para calcular de forma direta o índice de confiabilidade, os resultados apresentaram erros relativos pequenos e drástica diminuição do custo computacional.
- As RNAs conseguiram simular tanto problemas lineares quanto aqueles nos quais havia a consideração da não-linearidade geométrica.

- Com relação ao tipo de RNA utilizada, podemos concluir que os dois tipos de rede (RNBR e RNPM) tiveram desempenho satisfatório e muito semelhante.
- Foi possível criar um pacote para o projeto de estruturas de materiais compósitos que agrega várias ferramentas (AGs + métodos para cálculo de confiabilidade + RNAs) e obtiveram-se bons resultados.

## 7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestão para trabalhos futuros que possam vir a dar prosseguimento a este tema de pesquisa pode-se citar os seguintes itens:

- Inserir outras funções de falha usuais para materiais compósitos tais como: máxima deformação, máxima tensão, Tsai-Hill, Hoffman. Levar em consideração os efeitos higrotérmicos e falha por delaminação.
- Utilizar elementos finitos que possibilitem a avaliação mais precisa dos efeitos de corte.
- Obter dados estatísticos, através de experimentos, relativos a propriedades mecânicas, resistências, carregamento, espessuras e ângulo de orientação das fibras.
- Avaliar o índice de confiabilidade através do método SORM.
- Incorporar campos estocásticos no modelo de elementos finitos.
- Usar o pacote desenvolvido para projetar estruturas mais complexas e usadas em aplicações práticas.
- Aumentar a eficiência dos AGs, incorporando novas técnicas que diminuam o custo computacional.
- Usar redes de computadores com processamento em paralelo para acelerar o processo de otimização.
- Melhorar o processo de treinamento das RNAs, desenvolvendo novas técnicas para geração das amostras, que produzam ao mesmo tempo resultados eficientes e sejam mais enxutas.
- Pesquisar novas arquiteturas de rede e métodos heurísticos.

- Utilização de métodos híbridos no processo de otimização, conjugando métodos determinísticos com probabilísticos.

---

## CAPÍTULO 8.

### 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

ABAQUS, v 6.5-1. ABAQUS Analysis User's Manual. ABAQUS INC., 2004.

ALMEIDA, F. S., Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Laminados utilizando Algoritmos Genéticos, **Dissertação de Mestrado**, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre 2006.

ANDRADE, L.G., Análise Estática e Dinâmica de Placas e Cascas de Materiais Compósitos Laminados usando Elementos Finitos Hexaédricos de Oito Nós com Integração Reduzida, **Dissertação de Mestrado**, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre 2005.

ANG, A. H-S; TANG, W.H. Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol I, J. Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1975.

ANG, A. H-S; TANG, W.H. Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol II, J. Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1975.

ARORA, J.S. Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill, New York, NY, 1989.

BANICHUK, N.V. Introduction to Optimization of Structures, Springer Verlag, Berlim, 1990.

BATHE, K.J.; HO, L.; BATOZ, J., A Study of Three-node Triangular Plate Bending Elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, V.15, pp 1771 – 1812, 1980.

BATHE, K.J.; HO, L., A Simple and Effective Element for Analysis of General Shell Structures. **Computers and Structures**, V.13, pp 673 – 681, 1981.

BEALE, R; JACKSON, T., Neural Computing: An Introduction, TOP Publishing Ltd., Bristol, England, 1990.

BELYTSCHKO, T., LIU, W. K. E MORAM, B., Finite Elements for Nonlinear Continua and Structures, Evanston: Wiley, 1996.

---

BENDSOE, M.P. Optimization of Structural Topology Shape and Material, Springer Verlag, Berlin, 1995.

BOÉSSIO, M.L., Análise e Dimensionamento de Estruturas de Ônibus Considerando a Fadiga e Utilizando Ferramentas de Confiabilidade e Otimização, **Tese de Doutorado**, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre 2002.

BUCHER, C.G.; NIENSTEDT, J.; OUYPORNPRASERT, W., Adaptive Sampling – an Iterative Fast Monte Carlo Procedure. **Structural Safety**, V.5, N°2, pp 119-126,1988.

CHAU, K.W., Reliability and Performance-Based Design by Artificial Neural Network. **Advances in Engineering Software**, V. 38, pp 145-149, 2007.

CHEN, J.J; DUAN B.Y., Structural Optimization by Displaying the Reliability Constraints, **Computers and Structures**, V. 50, pp 777-783, 1994.

CHENG, G.; XU, L.; JIANG, L., A Sequential Approximate Programming Strategy for Reliability- Based Structural Optimization. **Computers and Structures**, V. 84, pp 1353-1367, 2006.

CHENG, J.; LI, Q.S., Reliability Analysis of Structures Using Artificial Neural Network Based Genetic Algorithms. **Compu. Methods Appl. Mech. Engrg**, article in press, 2008.

CONCEIÇÃO A., C.A.; MARQUES A.T.; GONÇALVES J.F., Reliability Based Design with a Degradation Model of Laminated Composite Structures, **Structural Optimization**, V.12, pp 16-28, 1996.

CONCEIÇÃO A., C.A., A Hierarchical Genetic Algorithm for Reliability Based Design of Geometrically Non-Linear Composite Structures, **Composite Structures**, V. 54, pp 37 – 47, 2001.

CONCEIÇÃO A., C.A.; HOFFBAUER L.N., An Approach for Reliability Based Robust Design Optimisation of Angle Ply Composites, **Composite Structures**, V. 90, pp 53 – 59, 2009.

---

DANIEL, I.M.; ISHAI, O., Engineering Mechanics of Composite Materials, Oxford University Press, 1994.

DAVIS, I. Handbook of Genetic Algorithms, Van Nostrand Reinhold, New York, NY, 1991.

DIMOU, C.K.; KOUMOUSIS, V.K., Competitive Genetic Algorithms with Application to Reliability Optimal Design, **Advances in Engineering Software**, V. 34, pp 773 – 785, 2003.

DUARTE FILHO, L.A., Análise Estática e Dinâmica Linear e não Linear Geométrica através de Elementos Hexaédricos de Oito Nós com um Ponto de Integração, **Dissertação de Mestrado**, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre 2002.

ELHEWY, A.H.; MESBAHI, E.; PU, Y., Reliability Analysis of Structures Using Neural Network Method. **Probabilistic Engineering Mechanics**, V.21, pp 44-53, 2006.

ELISHAKOFF, I., Probabilistic Methods in the Theory of Structures, J. Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1984.

ENEVOLDSEN, I.; SORENSEN J.D., Reliability-Based Optimization in Structural Engineering. **Structural Safety**, V.15, pp 169-196, 1994.

FRANGOPOL, D.M.; RECEK, S., Reliability of Fiber-Reinforced Composite Laminated Plates. **Probabilistic Engineering Mechanics**, V.18, pp 119-137, 2003.

GHANEM, R.G.; SPANOS P.D., Stochastic Finite Elements. A Spectral Approach, Springer – Verlag, Berlin, 1991.

GOLDBER, D.E. Genetic Algorithms in search Optimization and Machine Learning, Addison-Wesley, New York, NY, 1989.

GOMES, H.M., Técnicas de Avaliação da Confiabilidade em Estruturas de Concreto Armado, **Tese de Doutorado**, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre 2001.

GOMES, H.M.; AWRUCH A.M., Reliability of Reinforced Concrete Structures Using Stochastic Finite Elements. **Engineering Computations**, V.19, issue 7, pp764-786, 2004.

GROSSBERG, S., Competitive Learning: From Interactive Activation to Adaptive Resonance. *Cognitive Science (Publication)*, V.11, pp 23-63, 1987.

GUDUR, P.P.; DIXIT U.S., A Neural Network-Assisted Finite Element Analysis of Cold Flat Rolling, *Engineering. Application of Artificial Intelligence*, V.21, pp 43-52, 2008.

GÜRDAL. Z.; HAFTKA, R.T.; HAJELA, P., Design and Optimization of Laminated Composite Materials, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1999.

HAFTKA, R.T.; GÜRDAL, Z. Elements of Structural Optimization, 3<sup>rd</sup> Ed., Kluwer Ac. Publishers , New York, NY, 1992.

HAI-ALI, R.; KIM, H-K., Nonlinear Constitutive Models for FRP Composites Using Artificial Neural Networks. *Mechanics of Materials*, V.39, pp 1035-1042, 2007.

HAIJELA, P.; BERKE, L., Neural Network Based Decomposition in Optimal Structural Synthesis. *Computing Systems in Engineering*. V.2, N°5/6, pp 473-481, 1991.

HAIJELA, P.; BERKE, L., Neural Network in Structural Analysis and Design: An Overview. *Computing Systems in Engineering*. V.3, N°1/4, pp 525-538, 1992.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S., Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 2000.

HAYKIN, S., Neural Networks: A Comprehensive Foundation, NY: Macmillan, 1994.

HILL, R., The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, London, 1950.

HOFFMAN, O., The Brittle Strength of Orthotropic Materials, *J. Composite Mater.*, 1,296,1967.

HOLLAND, J.H. Adaptation in Natural and Artificial Systems, University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1975.

HOPFIELD, J. J., Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities, *In: Proceedings of the National Academic Science, USA*, V.79, pp 2554 – 2558, 1982.

---

JENKINS, W.M., A Neural Network for Structural Re-Analysis. **Computer and Structures**, V.72, pp 687-698, 1999.

JONES, R.M., Mechanics of Composite Materials, 2nd Ed., Taylor & Francis, Philadelphia, PA, 1998.

KAM, T.Y.; CHANG, E.S., Reliability Formulation for Composite Laminates Subjected to First-Ply Failure. **Composite Structures**, V.38, pp 447-452, 1997.

KAW, A.K., Mechanics of Composite Materials, 2<sup>nd</sup> Ed., Taylor & Francis, Philadelphia, PA, 2006.

KLEIBER, M.; HIEN, T.D., The Stochastic Finite Element Method. Basic Perturbation Technique and Computer Implementation, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1992.

KOGISO, N.; SHAO, S.; MUROTSU, Y., Reliability-Based Optimum Design of a Symmetric Laminated Plate Subject to Buckling. **Structural Optimization**, V. 14, pp 184 – 192, 1997.

KOGISO, N.; SHAO, S.; MUROTSU, Y., Effect of Correlation on Reliability-Based Design of Composite Plate for Buckling. **AIAA Journal**, V. 36, N° 9, pp 1713 – 1706, 1998.

KOHONEN, T., Self-Organization and Associated Memory, Springer Verlag, 1984.

KUSCHEL, N.; RACKWITZ R., Two Basic Problems in Reliability-Based Structural Optimization. **Math Methods Oper. Res**, V.46, pp 309-333, 1997.

LEE, J.O.; YANG, Y.S.; RUY, W.S., A Comparative Study on Reliability-Index and Target-Performance-Based Probabilistic Structural Design Optimization, **Computers and Structures**, V. 80, pp 257 – 269, 2002.

LIAO; REDDY, An Incremental Total Lagrangean Formulation for General Anisotropic Shell-Type Structures. Research Report (1987)

LIN, S.C., Reliability Predictions of Laminated Composite Plates with Random System Parameters. **Probabilistic Engineering Mechanics**, V.15, pp 327-338, 2000a.

---

LIN, S.C., Buckling Failure Analysis of Random Composite Laminates Subjected to Random Loads. **International Journal of Solids and Structures**, V.37, pp 7563-7576, 2000b.

LOU, K.N.; PEREZ, R.A., A novel Application of Artificial Neural Networks to Structural Analysis. **Artificial Intelligence in Engineering**, V.9, pp 211 – 219, 1995.

MAEKAWA, Z.; FJUII, T., Probabilistic Design on Strength of Fiber Reinforced Composite Laminates. **Progress in Science and Engineering of Composites, Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Composite Materials (Japan Society for Composite Materials)**, pp 537 – 544, Tokyo, 1982.

MAHADEVAN, S.; LIU X., Probabilistic Optimum Design of Composite Laminates. **Journal of Composite Materials**, V.32, pp 69 – 82, 1998.

MARQUES, D.C.S.C., Análise Não-Linear Estática e Dinâmica de Cascas Laminadas Anisotrópicas, **Tese de Doutorado**, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre 1994.

MARQUES, S.P.C., Um Modelo Numérico para a Análise de Materiais Compósitos Considerando Efeitos Viscoelásticos e Falhas Progressivas, **Tese de Doutorado**, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre 1994.

MCCULLOCH, W. S.; PITTS, W., A Logical Calculus of The Ideias Immanent in Nervous Activity, **Bulletin of Mathematical Biophysics**, V.5, pp 115-133, 1943.

MELCHERS, R.E., Structural Reliability Analysis and Prediction, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1990.

MIDDLETON, D.H., Composite Materials in Aircraft Structures, Longman Scientific & Technical and J. Wiley & Sons, Inc, New York, NY, 1990.

MIKI, M.; MUROTSU, Y.; TANAKA, T.; SHAO, S., Reliability of Unidirectional Fibrous Composites. **AIAA Journal**, V.28, N<sup>o</sup> 11, pp 1980-1986, 1990.

MIKI, M.; MUROTSU, Y.; TANAKA, T.; SHAO, S., Reliability-Based Optimization of Fibrous Laminated Composites. **Reliability Engineering and System Safety**, V.56, pp 285-290, 1997.

---

MINSKY, M.; PAPERT, S., *Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry*, MIT Press, USA, 1969.

MUKHEIJEE, A.; DESHPANDE, J.M., Modeling Initial Design Process Using Artificial Neural Networks. **Journal of Computing in Civil Engineering**, V.9, N° 3, pp 194 – 200, 1995a.

MUKHEIJEE, A.; DESHPANDE, J.M., Application of Artificial Neural Network in Structural Design Expert Systems. **Computers and Structures**, V.54, N° 3, pp 367 – 375, 1995b.

MUÑOZ – ROJAS, P.A., *Análise de Sensibilidade e Otimização de Forma em Problemas de Forjamento e Estampagem Bidimensionais*, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre 2003.

MUROTSU, Y.; MIKI, M.; SHAO, S., Reliability Design of Fiber Reinforced Composites. **Structural Safety**, V.15, pp 35-49, 1994.

NAGENDRA, S.; HAFTKA, R.T.; GÜRDAL, Z., Design of a Blade Stiffened Composite Panel by Genetic Algorithm. **Proceedings of the 34<sup>th</sup> AIAA/ ASME/ ASCE/ AHS/ ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference**, pp 2418-2436, 1993.

NIGRIN, A., *Neural Networks for Pattern Recognition*, Cambridge, MA: The MIT Press, p.11, 1993.

OLIVEIRA, B.F., *Um Modelo Analítico e Computacional para Consideração de Efeitos de Envelhecimento em Estruturas de Material Compósito*, Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre 2001.

OÑATE, E., *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos – Análise estático linear*, CIMNE, Barcelona, 2<sup>a</sup> Ed., 1995.

ONKAR, A.K.; UPADHYAY, C.S.; YADAV, D., Probabilistic Failure of Laminated Composite Plates Using the Stochastic Finite Element Method. **Composite Structures**, V.77, pp 79-91, 2007.

---

PAPADRAKAKIS, M.; LAGAROS, N.D., Learning Improvement of Neural Networks used in Structural Optimization. **Advances in Engineering Software**, V.35, pp 9-25,2004.

PARK, W. J., An Optimum design of simple symmetric laminates under the first ply failure criterion. **Journal of Composite Materials**, V.16, pp 341-355, 1982.

PETERSON, C.; SODERBERG, B., A new Method for Mapping Optimization Problems onto Neural Networks. **International Journal of Neural Systems**, V.1, pp 3-22, 1989.

RACKWITZ, R.; FIESSLER, B., Structural Reliability Under Combined Random Sequences, **Computers and Structures**, V.9, pp 489-494, 1978.

REDDY, M.V.; GRANDHI, R.V.; HOPKINS D.A., Reliability Based Structural Optimization a Simplified Safety Index Approach. **Composite Structures**, V.53, pp 1407-1418, 1994.

REDDY, J.N.; Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. CRC PRESS, 1988.

REICH, Y.; BARAI, S.V., A Methodology for Building Neural Networks Models from Empirical Engineering Data. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, V. 13, pp 685 – 694, 2000.

RICHARD, F.; PERREUX, D., A Reliability Method for Optimization of  $[+\rho, -\rho]_n$  Fiber Reinforced Composite Pipes. **Reliability Engineering & System Safety**, V.68, pp 53 – 59.

SCHWARTZ, M.M, Composite Materials Handbook. McGraw-Hill, New York, NY,1984.

SHIEH, R., Massively Parallel Structural Design Using Stochastic Optimization and Mixed Neural Net/Finite Element Analysis Methods. **Computing Systems in Engineering**, V.5, N° 4-6, pp 455-467, 1994a.

---

SHIEH, R., Neural Network Assisted Large-Scale Structural Analysis/Reanalysis in a Massively Parallel Environment. **In: Proceedings of the 35<sup>th</sup> AIAA / ASME / ASCE/AHS/ASC SDM Conference**, pp 1533-1545, Hilton Head, SC, USA, 1994b.

STOCKI, R.; KOLANCK, K.; JENDO, S.; KLEIBER, M., Study on Discrete Optimization Techniques in Reliability-Based Optimization of Truss Structures. **Computers and Structures**, V.79, pp 2235 – 2247, 2001.

SUNDARARAJAN, C., Probabilistic Structural Mechanics Handbook, Chapman & Hall Ltda., New York, NY, 1995.

THANEDAR, P.B.; KODIYALAM S., Structural Optimization Using Probabilistic Constraints, **Structural Optimization**, V.4, pp 236-240, 1992.

THOFT-CHRISTENSEN, P.; MUROTSU, Y., Applications of Structural Systems Reliability Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

TODOROKI, A.; SASAI, M., Improvement of Design Reliability for Buckling Load Maximization of Composite Cylinder Using Genetic Algorithm with Recessive-Gene-Like Repair, **JSME International Journal**, V. 42, N<sup>o</sup> 4, 1999.

TODOROKI, A.; HAFTKA, R.T., Stacking Sequence Optimization by a Genetic Algorithm with a new Recessive Gene Like Repair Strategy. **Composite Part B**, **29B**, pp 277-285, 1198.

TSAI, S.W., Strength Theories of Filamentary Structures in Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic Composites, Schwartz, R.T and Schwartz, H.S., Eds., Wiley Interscience, New York, 3, 1968.

TSAI, S.W.; WU, E.M., A General Theory of Strength for Anisotropic Materials, *J. Composite Mater.*, 5,58, 1971.

TSAI, S.W.; HAHN, H.T., Introduction to Composite Materials, Economic Publishing Co., Inc. Lancaster, PA, 1980.

TSAI, S.W., Composite Design (3rd ed), Think Composites, Dayton, Ohio, 1987.

---

VANDERPLAATS, G.N., Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications, McGraw-Hill, New York, NY, 1984.

VANLUCHENE, R.D.; SUN, R., Neural Networks in Structural engineering. **Microcomputers in Civil Engineering**, V.5, pp 207-215, 1990.

VINSON, J.R.; SIERAKOWSKI, R.L., The behavior of Structures Composed of Composite Materials, Martinus Mijhoff Publishers, Boston, MA, 1987.

WANG, L.; GRANGHI, R.V., Structural Reliability Optimization Using an Efficient Safety Index Calculation Procedure, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, V.38, pp 1721-1738, 1995.

WETHERHOLD, R.C., Reliability Calculations for Strength of a Fibrous Composite Under Multiaxial Loading, **Journal of Composite Materials**, V.15, pp 240 – 248, 1981.

YANG, Y. B. AND SHIEH, M. S., Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. **AIAA Journal**, vol. 28, pp 2110-2116, 1990.

YEOM, C.H.; LEE, S. W., An Assumed Strain Finite Element Model for Large Deflection Composite Shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, V.28, pp 1749-1768, 1989.

YUSHANOV, S.P.; BOGDANOVICH, A.E., Analytical Probabilistic Modeling of Initial Failure and Reliability of Laminated Composite Structures. **Int. J. Solid Structures**, V.35, pp 665-685, 1998.