

**ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA EM
FUNDAÇÕES DE CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS**

Moisés Maciel Vitoreti

Porto Alegre
Janeiro 2003

MOISÉS MACIEL VITORETI

**ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA EM
FUNDAÇÕES DE CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia na modalidade Acadêmico

Porto Alegre

Janeiro 2003

MOISÉS MACIEL VITORETI

**ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA EM
FUNDAÇÕES DE CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 27 de janeiro de 2003

Prof. Américo Campos Filho
Dr. pela EPUSP
orientador

Prof. Nilo Cesar Consoli
PhD. pela Concordia University, Canadá
orientador

Prof. Francisco de P. S. L. Gastal
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Fernando Schnaid (UFRGS)
Ph.D. pela Oxford University, Inglaterra

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal (UFRGS)
Ph.D. pela North Carolina State University, Estados Unidos

Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Agradeço profundamente ao Prof. Américo Campos Filho, amigo e orientador, que sempre foi solícito e paciente, prestando importantíssima colaboração e assistência em todas as etapas deste trabalho.

Ao Prof. Nilo Cezar Consoli, orientador, sempre acessível e prestando ótima assistência.

Aos colegas de mestrado Agnagildo Conceição Machado, Tatiana Thomé de Oliveira, Alberto Mibielli Stein, Luiz Alberto Duarte Filho e Alexandre Luis Braun.

Em especial ao amigo Marcelo Augusto da Silva Machado, que teve uma importante colaboração na conclusão deste trabalho, auxiliando na parte de programação e criação da interface gráfica.

Aos funcionários do PPGEC – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS sempre prestativos.

A todos os professores do CPGEC, especialmente aos Professores Acir Mércio Loredou-Souza, Ronald José Ellwanger, Ruben Clecio Schwingell pelas cartas de recomendação e a Profa. Virgínia Maria Rosito d'Avila pela simpatia e compreensão.

Ao CNPq pela bolsa-auxílio que me proporcionou a realização deste projeto e a Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a qual possibilitou a realização de meus objetivos.

Aos meus pais Thomé Vitoreti e Noeli Maciel Vitoreti, irmãos Rodolfo Maciel Vitoreti e Emanuele Maciel Vitoreti pelo apoio em todas as horas. Finalmente obrigado a minha namorada Daniela e minha filha Camille que está para nascer.

Não há caminho demasiadamente longo para quem anda
devagar, sem pressa, e não há recompensas
demasiadamente afastadas para quem a elas se prepara
com paciência.

La Bruyère

RESUMO

VITORETI, M.M. Análise da Interação Solo-Estrutura em Fundações de Concreto Armado pelo Método dos Elementos Finitos. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

A análise da interação solo-estrutura em fundações é um importante campo de pesquisa que ainda tem um grande progresso a ser feito. No presente trabalho foi desenvolvido um programa computacional para a análise da interação solo-estrutura de fundações de concreto armado. Este tema abrange duas áreas da engenharia civil: estruturas e geotecnia. O método dos elementos finitos foi usado no trabalho na seqüência para resolver o problema considerando estado plano de deformação e comportamento elastoplástico dos materiais estudados (solo, concreto e aço). A linguagem de programação MATLAB foi usada em toda esta pesquisa como alternativa ao FORTRAN. O MATLAB foi escolhido uma vez que é uma linguagem de programação que permite facilmente construir uma interface de pré e pós-processamento amigável. Os passos para a solução completa do problema foram os seguintes: Primeiramente um programa foi desenvolvido considerando o comportamento elastoplástico com critérios de plastificação e ruptura específicos para o concreto e solo. Soluções analíticas fechadas foram usadas para checar a precisão do programa. O segundo passo foi a introdução do reforço de aço no concreto por meio de um modelo para armaduras. Logo após, um modelo de fissuras para o concreto tracionado foi introduzido no programa. Na seqüência o programa de pré e pós-processamento foi desenvolvido para gerar a malha de elementos finitos (pré-processamento), distribuição tensões e deformações, mapa de fissuras, etc (pós-processamento). Finalmente, os parâmetros constitutivos do solo, concreto e aço foram calibrados e várias situações reais de interação do solo-concreto de fundações de concreto armado foram simuladas. Nesta dissertação são encontrados resultados para as pressões de contato sapata-solo. Diferentes diagramas de tensões de interface foram obtidos em função da rigidez relativa do elemento estrutural de concreto armado-solo. Na análise numérica, a rigidez relativa desempenhou uma relevante função no comportamento mecânico do elemento estrutural de concreto armado (sapata) e da base de assentamento (solo), uma vez que, a ruptura em ambos os casos esteve diretamente relacionada a esta grandeza. São encontrados, em função da rigidez relativa, resultados indicativos dos modos de falha da fundação, como a excessiva plastificação do solo em fundações com rigidez relativa alta, e a plastificação de armaduras, esmagamento do concreto, formação de fissuras, bielas e confinamento do concreto para fundações de rigidez relativa baixa. Na análise numérica, obteve-se resultados importantes com relação ao projeto de fundações. Estes resultados foram confrontados com as normas, destacando-se as discordâncias com relação às recomendações da norma brasileira “Projeto e Execução de Fundações” NBR-6122 (1996) para os diagramas de tensões de interface sapata-solo usados no dimensionamento de fundações de concreto armado.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos; estado plano de deformações; fundações; concreto armado; solo.

ABSTRACT

VITORETI, M.M. Numerical Analysis of Soil-Structure Interaction of Reinforced Concrete Strip Footings using the Finite Element Method. 2003. M.Sc. Dissertation – Graduate Course in Civil Engineering, UFRGS, Porto Alegre

The analysis of soil-structure interaction of reinforced concrete strip footings is an important research field that still has a lot of progress to be done. At the present work, a computational program for the analysis of soil-structure interaction of reinforced concrete strip footings was developed. Soil-structure interaction covers two areas in civil engineering: structures and geotechnics. The finite element method was used in the present work in order to solve the problem, considering a plane strain state and the elastic-plastic behavior of the studied materials (soil and concrete). A computational language named MATLAB was used throughout this research as an alternative to FORTRAN. MATLAB was the chosen language once it is a programming language that allows building a friendly pre and post-processing interface. The steps for the solution of the complete problem were as follows: First of all a program was built considering elastic-plastic behavior with specific yield and failure surfaces to the concrete and soil. Closed analytical results were used to check the accuracy of the program. A second step was to introduce the steel reinforcement in the concrete through the consideration of a constitutive model for the steel. After that, a cracking model for concrete under tensile stresses was implemented in the program. Pre and post-processing programming was then developed in order to generate the finite element mesh (pre-processing), stress and strain distribution, cracking mapping, etc (post-processing). Finally, constitutive parameters for the soil, concrete and steel were calibrated and a number of real situations of soil-structure interaction of reinforced concrete strip footings were simulated. Results are also found in this dissertation for de strip footing-soil contact pressures. Different diagrams of interface stresses were obtained according to particular relative stiffness of reinforced concrete structural element and the soil. At the numerical analysis, the relative stiffness played a relevant function in the mechanical behavior of reinforced concrete structural element (strip footing) and the base (soil), once failure of both was basically related to such value. Indicative failure modes of foundation, such as soil failure, occurred in foundations of high relative stiffness. On the other side, steel yielding, squeezing and cracking formation of concrete occurred for foundations of lower relative stiffness. At the numerical analysis, important results were obtained relative to the design of foundations. These results were confronted with the Brazilian standards, emphasizing disagreements regarding recommendations of the Brazilian standard NBR-6122 (1996) “Foundations Design and Execution” for strip footing-soil interface stress diagrams used in design of reinforced concrete foundations.

Keywords: Finite element method; plane strain state; strip footings; reinforced concrete; soil.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	p.1
1.1 GENERALIDADES.....	p.1
1.1 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	p.3
2 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS	p.4
2.1 ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS	p.4
2.2 EXPRESSÕES DE TRABALHOS VIRTUAIS PARA AS APLICAÇÕES MECÂNICAS EM SÓLIDOS	p.6
2.2.1 Princípio dos Trabalhos Virtuais	p.6
2.2.2 Estado Plano de Deformações	p.6
2.3 REPRESENTAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS	p.9
2.3.1 Equações Governantes	p.9
2.3.2 Matriz de Rigidez e Vetor Consistente de Carga	p.14
2.4 ELEMENTOS FINITOS PARA APLICAÇÕES ELASTOPLÁSTICAS NO CONCRETO, SOLO E ROCHA.....	p.15
3 ELEMENTOS FINITOS PARA ARMADURA PASSIVA	p.18
3.1 MODELO INCORPORADO	p.18
3.2 FORMULAÇÃO GEOMÉTRICA	p.19
3.3 TRECHOS DE ARMADURA QUE FICAM NO INTERIOR DE UM ELEMENTO DE CONCRETO	p.23
3.4 FUNÇÕES DE FORMA PARA ELEMENTOS FINITOS DE ARMADURA	p.27
3.5 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA A ARMADURA	p.28

4 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA O CONCRETO, SOLO E AÇO E MODELOS DE COMPORTAMENTO MECÂNICO DOS MATERIAIS.....	p.31
4.1 INTRODUÇÃO À TEORIA DA PLASTICIDADE	p.31
4.2 A SUPERFÍCIE DE PLASTIFICAÇÃO	p.32
4.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS ELASTOPLÁSTICAS	p.33
4.3.1 Determinação da matriz constitutiva elastoplástica	p.33
4.3.2 Determinação do Vetor de fluxo “a” e do vetor plástico “d _p ”.....	p.36
4.4 MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA CONCRETO COMPRIMIDO E SOLO	p.38
4.4.1 Critérios de Plastificação.....	p.38
4.4.1.1 Critério de Plastificação para o Solo/Rocha	p.40
4.4.1.2 Critério de Plastificação para o Concreto Comprimido.....	p.41
4.4.2 Critério de Ruptura para o Concreto.....	p.42
4.4.3 Endurecimento do Concreto	p.47
4.5 MODELO DE FISSURAS PARA O CONCRETO TRACIONADO ...	p.49
4.5.1 Introdução	p.49
4.5.2 Critério de Fissuração	p.51
4.5.3 Critério para escolha da curva de amolecimento	p.52
4.5.4 Colaboração do Concreto entre Fissuras	p.56
4.5.5 Rigidez Transversal do Concreto Fissurado	p.59
4.6 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO	p.60
5 ESTRUTURA DO PROGRAMA ELASTOPLÁSTICO	p.62
5.1 INTRODUÇÃO	p.62
5.2 ESTRUTURA DO PROGRAMA	p.63
5.2.1 Função ENTRADA	p.64
5.2.2 Função ARIG0.....	p.64

5.2.3 Função LOADPS.....	p.64
5.2.4 Função STIFFP	p.66
5.2.4.1 Função ARIG	p.67
5.2.4.2 Função MODPS	p.67
5.2.4.3 Função SFR2	p.67
5.2.4.4 Função JACOB2	p.67
5.2.4.5 Função BMATPS	p.67
5.2.4.6 Função INVAR	p.68
5.2.4.7 Função YIELDF	p.68
5.2.4.8 Função FLOWPL	p.68
5.2.5 Função RESIDU	p.68
5.2.6 Função CONVER	p.69
5.2.7 Função OUTPUT	p.69
5.3 ENTRADA DE DADOS	p.70
5.4 INTERFACE GRÁFICA	p.70
5.4.1 Malha de elementos finitos de concreto solo e armadura	p.70
5.4.1.1 Caixa de checagem “Numeração dos Nós”	p.71
5.4.1.2 Caixa de checagem “Posição dos Nós”	p.71
5.4.1.3 Caixa de checagem “Numeração dos Elementos Finitos”	p.72
5.4.1.4 Caixa de checagem “Elementos de Concreto”	p.72
5.4.1.5 Caixa de checagem “Elementos de Solo”	p.72
5.4.1.6 Caixa de checagem “Armadura”	p.72
5.4.2 Malha de elementos finitos deformada	p.72
5.4.2.1 Caixa de checagem “Indeformada”	p.73
5.4.2.2 Caixa de checagem “Deformada”	p.73
5.4.2.3 Caixa de checagem “Restrições Nodais”	p.74
5.4.2.4 Botão “Deformada do Incremento”	p.74
5.4.2.5 Caixa de edição “Fator de Majoração”	p.74
5.4.3 Distribuição de tensões no concreto	p.74
5.4.3.1 Botão “Distribuição de Tensões em X”	p.75
5.4.3.2 Botão “Distribuição de Tensões em Y”	p.75
5.4.3.3 Botão “Distribuição de Tensões em XY”	p.76
5.4.3.4 Botão “Distribuição de Tensões em Z”	p.76
5.4.3.5 Caixa de edição “Incremento”	p.76
5.4.4 Distribuição de tensões no solo	p.76
5.4.5 Distribuição de tensões na armadura	p.77
5.4.6 Malha de elementos finitos com pontos fissurados/esmagados	p.78
5.4.6.1 Caixa de checagem “Fissuras / Ponto Esmagado”	p.78
5.4.6.2 Caixa de checagem “Numeração dos Elementos Finitos”	p.79
5.4.6.3 Caixa de edição “Incremento”	p.79
5.4.7 Malha de elementos finitos de solo com pontos plastificados.....	p.79

5.4.7.1 Caixa de checagem “Pontos de Gauss Plastificados”.....	p.80
5.4.7.2 Caixa de edição “Incremento”	p.80
6 VALIDAÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL.....	p.81
6.1 GENERALIDADES.....	p.81
6.2 DEFINIÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS.....	p.81
6.3 COMPROVAÇÃO DOS RESULTADOS DO PROGRAMA.....	p.83
6.3.1 Tensões σ_y	p.84
6.3.2 Tensões σ_x	p.86
6.3.3 Tensões σ_z	p.88
6.3.4 Tensões τ_{xy}	p.89
7 COMPARAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS ENCONTRADOS NA BIBLIOGRAFIA PARA DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NA INTERFACE SOLO- CONCRETO.....	p.90
7.1 INTRODUÇÃO.....	p.90
7.2 ESCOLHA E JUSTIFICATIVA DOS EXEMPLOS A SEREM SIMULADOS.....	p.91
7.3 A INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ RELATIVA FUNDAÇÃO/SOLO NA DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES DE INTERFACE.....	p.93
7.3.1 Tensões na interface fundação-solo para sapatas muito flexíveis.....	p.94
7.3.2 Tensões na interface fundação-solo para sapatas e solo com rigidezes semelhantes.....	p.95
7.3.3 Tensões na interface fundação-solo para sapatas muito rígidas.....	p.99
8 ANÁLISE NUMÉRICA DE FUNDAÇÕES DE CONCRETO ARMADO.....	p.101
8.1 INTRODUÇÃO.....	p.101
8.2 RESULTADOS OBTIDOS PARA FUNDAÇÃO APOIADA SOBRE SOLO DE BAIXA RIGIDEZ.....	p.103

8.2.1 Distribuição de tensões normais no concreto.....	p.104
8.2.2 Distribuição de tensões normais verticais no solo.....	p.105
8.2.3 Distribuição de tensões na armadura.....	p.106
8.2.4 Evolução da fissuração/esmagamento nos elementos de concreto.....	p.107
8.2.5 Evolução dos pontos plastificados na malha de elementos finitos de solo.....	p.108
8.2.6 Diagramas de tensões na interface fundação-solo.....	p.110
8.2.7 Conclusões do exemplo n°1.....	p.110
8.3 RESULTADOS OBTIDOS PARA FUNDAÇÃO APOIADA SOBRE SOLO DE RIGIDEZ INTERMEDIÁRIA.....	p.111
8.3.1 Distribuição de tensões normais no concreto.....	p.112
8.3.2 Distribuição de tensões normais verticais no solo.....	p.114
8.3.3 Distribuição de tensões na armadura.....	p.116
8.3.4 Evolução da fissuração nos elementos de concreto.....	p.117
8.3.5 Mapeamento dos pontos plastificados na massa de solo.....	p.118
8.3.6 Diagramas de tensões na interface fundação-solo.....	p.120
8.3.7 Conclusões do exemplo n°2.....	p.121
8.4 RESULTADOS OBTIDOS PARA FUNDAÇÃO APOIADA SOBRE SOLO DE RIGIDEZ SUPERIOR SEM ARMADURAS DE ANCORAGEM.....	p.121
8.4.1 Distribuição de tensões normais no concreto.....	p.122
8.4.2 Distribuição de tensões normais verticais no solo.....	p.124
8.4.3 Distribuição de tensões na armadura.....	p.125
8.4.4 Evolução da fissuração nos elementos de concreto.....	p.126
8.4.5 Mapeamento dos pontos plastificados na massa de solo.....	p.127
8.4.6 Diagramas de tensões na interface fundação-solo.....	p.128
8.4.7 Conclusões do exemplo n°3 – parede estrutural sobre a sapata sem ancoragem.....	p.128
8.5 RESULTADOS OBTIDOS PARA FUNDAÇÃO APOIADA SOBRE SOLO DE RIGIDEZ SUPERIOR COM AS ARMADURAS DE ANCORAGEM.....	p.130
8.5.1 Distribuição de tensões normais no concreto.....	p.130

8.5.2 Distribuição de tensões normais verticais no solo.....	p.132
8.5.3 Distribuição de tensões na armadura.....	p.133
8.5.4 Evolução da fissuração nos elementos de concreto.....	p.135
8.5.5 Mapeamento dos pontos plastificados na massa de solo.....	p.136
8.5.6 Diagramas de tensões na interface fundação-solo.....	p.137
8.5.7 Conclusões do exemplo n°4 – parede estrutural sobre a sapata com ancoragem.....	p.137
9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS.....	p.139
9.1 CONCLUSÕES	p.139
9.2 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS.....	p.140
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	p.141
ANEXO A.....	p.144

LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1: Elementos finitos utilizados	p.4
Figura 2-2: Problemas de deformações no plano	p.7
Figura 3-1: Barra de armadura no interior do elemento de concreto	p.20
Figura 3-2: Coordenadas ao longo do eixo da armadura	p.21
Figura 3.3: Definição da barra de aço	p.25
Figura 3.4: Segmento de armadura dentro do elemento de concreto	p.26
Figura 4.1: Diagrama elastoplástico do solo com encruamento positivo e negativo	p.31
Figura 4.2: Diagrama carga-deslocamento	p.32
Figura 4.3: Modelo matemático para representação do encruamento isotrópico	p.33
Figura 4.4: Superfícies de carregamento e de ruptura	p.42
Figura 4.5: Meridianos da superfície de ruptura	p.46
Figura 4.6: Seções transversais da superfície de ruptura	p.46
Figura 4.7: Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido ...	p.48
Figura 4.8: Modelos para representar as fissuras	p.50
Figura 4.9: Ilustração do comprimento característico em um volume de controle prismático	p.53
Figura 4.10: Curva tensão-deformação para o concreto tracionado	p.54
Figura 4.11: Diagrama tensão-deformação para o aço de dureza natural .	p.60
Figura 4.12: Diagrama tensão-deformação para o aço encruado a frio	p.61
Figura 5.1: Estrutura do programa principal	p.63
Figura 5.2: Especificação do eixo de gravidade	p.64
Figura 5.3: Cargas normal e tangencial distribuídas na Borba de um elemento	p.65
Figura 5.4: Estrutura da função STIFFP	p.66
Figura 5.5: Fluxograma da função RESIDU	p.69
Figura 5.6: Malha de elementos finitos de concreto solo e armadura	p.71

Figura 5.7: Malha de elementos finitos deformada	p.73
Figura 5.8: Distribuição de tensões no concreto	p.75
Figura 5.9: Distribuição de tensões no solo	p.77
Figura 5.10: Distribuição de tensões axiais na armadura	p.77
Figura 5.11: Malha de elementos finitos com pontos fissurados/esmagados.....	p.78
Figura 5.12: Malha de elementos finitos com pontos plastificados.....	p.79
Figura 6.1: Malha de elementos finitos refinada.....	p.82
Figura 6.2: Carregamento em uma faixa infinita.....	p.83
Figura 6.3: Distribuição de tensões σ_y no solo.....	p.85
Figura 6.4: Isotensões	p.85
Figura 6.5: Comparação analítico-numérica de tensões verticais σ_y abaixo do centro da carga distribuída	p.86
Figura 6.6: Tensões horizontais σ_x na malha.....	p.87
Figura 6.7: Comparação analítico-numérica de tensões horizontais σ_x abaixo do centro da carga distribuída.....	p.87
Figura 6.8: Tensões horizontais σ_z na malha.....	p.88
Figura 6.9: Comparação analítico-numérica de tensões horizontais σ_z abaixo do centro da carga distribuída.....	p.88
Figura 6.10: Tensões τ_{xy} na malha.....	p.89
Figura 6.11: Comparação analítico-numérica de tensões τ_{xy} abaixo do centro da carga distribuída.....	p.89
Figura 7.1: Diagrama de tensões para sapatas apoiadas sobre rocha.....	p.91
Figura 7.2: Malha de elementos finitos.....	p.92
Figura 7.3: Geometria da fundação.....	p.93
Figura 7.4: Distribuição de tensões para uma sapata flexível.....	p.94
Figura 7.5: Distribuição de tensões para fundação e solo de rigidezes semelhantes.....	p.96
Figura 7.6: Sapatas com distribuição de tensões uniforme, bi- trapezoidal, bi-triangular.....	p.97
Figura 7.7 Distribuição de Boussinesq.....	p.99

Figura 7.8: Distribuição de tensões para fundações de alta rigidez.....	p.100
Figura 7.9: Distribuição de tensões para fundações de alta rigidez.....	p.100
Figura 8.1: Sapata corrida de concreto armado.....	p.103
Figura 8.2: Tensões horizontais normais no concreto.....	p.104
Figura 8.3: Tensões verticais normais no solo.....	p.105
Figura 8.4: Tensões normais uniaxiais na armadura.....	p.106
Figura 8.5: Pontos fissurados ou esmagados no concreto.....	p.107
Figura 8.6: Pontos de Gauss plastificados no solo.....	p.108
Figura 8.7: Tensões normais na interface fundação-solo.....	p.110
Figura 8.8: Tensões normais na interface fundação-solo.....	p.112
Figura 8.9: Tensões verticais normais no solo.....	p.114
Figura 8.10: Tensões normais uniaxiais na armadura.....	p.116
Figura 8.11: Pontos fissurados ou esmagados no concreto.....	p.117
Figura 8.12: Pontos de Gauss plastificados no solo.....	p.118
Figura 8.13: Tensões normais na interface fundação-solo.....	p.120
Figura 8.14: Tensões horizontais normais no concreto.....	p.122
Figura 8.15: Tensões verticais normais no solo.....	p.124
Figura 8.16: Tensões normais uniaxiais na armadura.....	p.125
Figura 8.17: Pontos fissurados ou esmagados no concreto.....	p.126
Figura 8.18: Pontos de Gauss plastificados no solo.....	p.127
Figura 8.19: Tensões normais na interface fundação-solo.....	p.128
Figura 8.20: Tensões horizontais normais no concreto.....	p.130
Figura 8.21: Tensões verticais normais no solo.....	p.132
Figura 8.22: Tensões normais uniaxiais na armadura.....	p.133
Figura 8.23: Pontos fissurados ou esmagados no concreto.....	p.135
Figura 8.24: Pontos de Gauss plastificados no solo.....	p.136
Figura 8.25: Tensões normais na interface fundação-solo.....	p.137

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Constantes que definem a superfície de plastificação	p.38
Tabela 8.1: Propriedades dos materiais.....	p.102

LISTA DE SÍMBOLOS

I - LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

A: área

C: área da seção transversal do concreto

A_s : área da seção transversal de armadura

B: matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de concreto

B_s : vetor que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de aço

D: matriz que relaciona tensões e deformações no regime elástico, matriz constitutiva

D_{ep} : matriz constitutiva corrigida (elastoplástica)

E: módulo de elasticidade longitudinal

E_C : módulo de elasticidade longitudinal do concreto

E_s : módulo de elasticidade longitudinal do aço

F: força; superfície de plastificação; função tensão efetiva

G: módulo de elasticidade transversal do concreto

G_C : módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado

H: função de forma para elementos de armadura

H' : taxa de endurecimento do concreto/solo

H'_s : taxa de endurecimento do aço

I_1 : 1°. invariante do tensor de tensão

I'_1 : 1°. invariante de tensor de deformações

J: matriz Jacobiana

J_2 : 2°. invariante do tensor desviador de tensão

J_3 : 3°. invariante do tensor desviador de tensão

J'_2 : 2°. Invariante do tensor desviador de deformação

K: matriz de rigidez do concreto-aço

K_C : matriz de rigidez do concreto

K_S : matriz de rigidez do aço

N : função de forma para o elemento de concreto

P : vetor de cargas de superfície e de volume; coordenadas dos nós da barra de aço

Q : função do potencial plástico

Q_s : forças nodais equivalentes da armadura

S : superfície de contorno

V : volume

II - LETRA ROMANAS MINÚSCULAS

a : vetor de fluxo plástico

c : parâmetro

f : superfície de ruptura

f_{cm} : resistência média à compressão do concreto

f_{tm} : resistência média à tração do concreto

f_y : tensão de escoamento da armadura

k : número de iterações; parâmetro

k : parâmetro de endurecimento

m : número de nós da barra de armadura

n : número de nós do elemento de concreto

ng : número de pontos de integração de Gauss

u : campo de deslocamento

x : coordenada cartesiana

y : coordenada cartesiana

w : fator de peso

III – LETRA GREGAS MAIÚSCULAS

Δ : incremento

Σ : somatório

\prod : produtório

IV – LETRA GREGAS MINÚSCULAS

α : coeficiente; ângulo; ângulo de desvio

β : coeficiente; ângulo

γ : distorção

δ : variação

ε : deformação específica total

ε_e : deformação elástica

ε_p : deformação plástica do concreto

ε_{sp} : deformação plástica do aço

η : coordenada normalizada

θ : ângulo de similaridade

λ : parâmetro

ν : coeficiente de Poisson

ξ : coordenada normalizada

σ : tensão normal no concreto

σ_{ef} : tensão efetiva no concreto

σ_y : tensão de plastificação inicial uniaxial

σ_s : tensão normal na armadura

τ : tensão tangencial no concreto

ϕ : diâmetro da barra da armadura

ψ : forças residuais

V – SÍMBOLOS

[]: matriz

[]^T: matriz transposta

[]⁻¹: matriz inversa

{ } : vetor coluna

< >: vetor linha

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

Um trabalho de pesquisa, que tenha por finalidade estudar o comportamento mecânico de fundações de concreto armado, tem que considerar a interação solo-estrutura. A modelagem da interação solo-estrutura exige o relacionamento de duas áreas da engenharia civil: geotecnia, para a modelagem do comportamento do solo, e estruturas, para o estabelecimento de um modelo para o concreto armado. A modelagem conjunta destes materiais é fundamental para a obtenção de uma análise representativa do real comportamento da fundação.

Referências bibliográficas, entre elas Calavera (1991) e Velloso e Lopes (1997), citam o isolamento entre estas duas áreas da engenharia como uma das possíveis causas da existência de muitas incertezas e tão poucos resultados conclusivos com respeito à interação solo-estrutura. São escassas as publicações que tratam desta interação e, normalmente, estes resultados não se apresentam com a profundidade devida para elaboração de modelos definitivos de dimensionamento de fundações.

Os elementos que compõem a superestrutura, tais como vigas, lajes, pilares e paredes estruturais, são projetados considerando que a superestrutura está vinculada a nós indeslocáveis. Estes nós indeslocáveis são as fundações, que constituem a infraestrutura. As fundações, além de apresentarem deformações reais, não satisfazendo a hipótese de nós indeslocáveis, não podem ser analisadas como elementos isolados, e sim como um conjunto elemento estrutural de fundação-solo. Assim, para se entender o comportamento mecânico de fundações de concreto armado, é fundamental realizar um estudo da *interação solo-estrutura*.

Talvez a principal dificuldade no projeto de fundações esteja no distanciamento entre engenheiros geotécnicos e estruturais. Não é possível, por exemplo, fazer qualquer previsão de valores confiáveis de deslocamentos, tensões e esforços, considerando as fundações assentadas em meios infinitamente rígidos, pois o solo, é um material altamente heterogêneo em suas propriedades, que modificam totalmente a distribuição de tensões na fundação. Segundo Velloso e Lopes (1997): "... na engenharia de fundações ou, de forma mais ampla, na

geotecnia, o profissional vai lidar com um material natural sobre o qual pouco se pode atuar, isto é, tem que aceitá-lo tal com ele se apresenta, com suas propriedades e comportamento específicos”.

O trabalho, aqui apresentado, tem por objetivo realizar a simulação do funcionamento de fundações de concreto armado pelo método dos elementos finitos, considerando a interação solo-estrutura. O trabalho limita-se a analisar fundações superficiais contínuas, submetidas a estado plano de deformações, devido à boa aproximação em relação ao real estado de tensões e deformações neste tipo de estrutura.

O método dos elementos finitos é apropriado para equacionar o problema e transformá-lo em um código computacional com capacidade de simular o comportamento estrutural destes elementos.

O concreto será representado por elementos finitos bidimensionais, como um material elastoplástico, com endurecimento isotrópico. O modelo adotado leva em conta a diferença entre o comportamento do concreto, submetido à compressão e tração, com base nas recomendações do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). Para a fissuração do concreto tracionado, utiliza-se um modelo de fissuras distribuídas.

O solo será representado também por elementos finitos bidimensionais, com um modelo elastoplástico, com endurecimento isotrópico. O modelo poderá representar o comportamento de diferentes tipos de solos: desde argilosos moles ou arenosos fofos até rochas rígidas.

As armaduras serão representadas através de um modelo incorporado, por elementos unidimensionais, com relação tensão-deformação uniaxial elastoplástica.

Embora existam limitações, quanto às situações que serão estudadas, este trabalho pretende contribuir para a compreensão do funcionamento conjunto do solo e da estrutura. Serão estudadas as distribuições das tensões e das deformações na interface entre a fundação de concreto armado e o solo. Serão analisadas as variações de tensões e deformações, alterando-se as dimensões da fundação e as propriedades dos materiais, confrontando as previsões, assim obtidas, com resultados analíticos e recomendações de normas.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho foi dividido em nove capítulos, onde são apresentados a teoria, utilizada na implementação computacional, e exemplos de utilização do programa.

O **capítulo 2** apresenta o modelo de elementos finitos, empregado para o concreto e o solo, submetidos a estado plano de deformações.

No **capítulo 3**, encontra-se a formulação de elementos finitos para consideração da armadura.

O **capítulo 4** apresenta os modelos constitutivos para os materiais: solo, concreto e aço.

A estrutura do código computacional desenvolvido e a interface gráfica, para uma melhor visualização dos resultados, encontram-se apresentados no **capítulo 5**.

O **capítulo 6** é responsável pela validação do código computacional desenvolvido, e testa o funcionamento do mesmo para situações de estado plano de deformações.

O **capítulo 7** apresenta uma série de resultados na interface fundação-solo e os compara com resultados teóricos.

Finalmente, no **capítulo 8** é realizada a análise não-linear de quatro exemplos de fundações apoiadas em solos com diferentes propriedades.

O **capítulo 9** apresenta conclusões e recomendações para a continuidade desta pesquisa.

2 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

2.1 ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

O programa computacional, desenvolvido neste trabalho, é baseado em Owen e Hinton (1980). Este programa foi implementado utilizando a linguagem de programação MATLAB. A formulação de elementos finitos bidimensionais isoparamétricos ajusta-se perfeitamente ao caso que se deseja estudar, fundações superficiais de concreto armado submetidas à estado plano de deformações.

Foram implementados três elementos finitos diferentes, baseados na formulação isoparamétrica, e aplicáveis a situações bidimensionais. Posteriormente, nas análises, foi utilizado unicamente o elemento quadrilátero de 8 nós. Os elementos incluídos são ilustrados na figura 2.1 e são:

- Elemento quadrilátero de quatro nós, com variação linear de deslocamentos;
- Elemento quadrilátero de oito nós da família Serendipity, com variação quadrática dos deslocamentos;
- Elemento quadrilátero de nove nós da família de Lagrange, com variação quadrática dos deslocamentos.

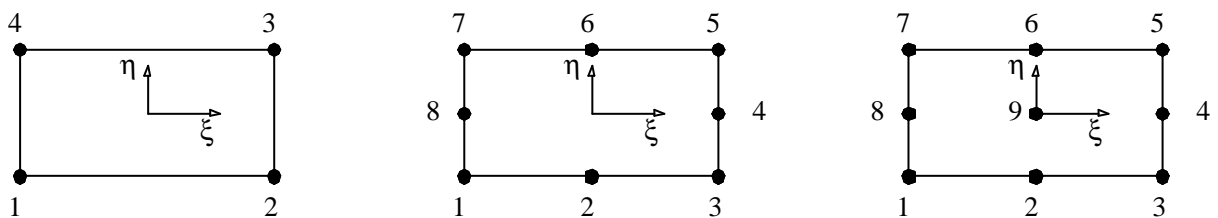


Figura 2.1: Elementos finitos utilizados

Elemento de 4 nós

Elemento de 8 nós

Elemento de 9 nós

Os três elementos finitos têm suas funções de forma, em termos das coordenadas normalizadas (ξ, η) , expressas por:

- Elemento quadrilátero de quatro nós:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i), \quad i=1,2,3,4 \quad (2.1)$$

Onde (ξ_i, η_i) são as coordenadas naturais dos nós.

b) Elemento quadrilátero de oito nós da família Serendipity:

- nós dos cantos:

$$N_i(e) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1), \quad i=1,3,5,7 \quad (2.2)$$

- nós intermediários:

$$N_i(e) = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2), \quad i=2,4,6,8 \quad (2.3)$$

c) Elemento quadrilátero de nove nós da família de Lagrange:

- nós dos cantos:

$$N_i(e) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1), \quad i=1,3,5,7 \quad (2.4)$$

- nós intermediários:

$$N_i(e) = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2), \quad i=2,4,6,8 \quad (2.5)$$

- nó central:

$$N_i(e) = (1 + \xi^2)(1 + \eta^2), \quad i=9 \quad (2.6)$$

2.2 EXPRESSÕES DE TRABALHOS VIRTUAIS PARA AS APLICAÇÕES MECÂNICAS EM SÓLIDOS

2.2.1 Princípio dos Trabalhos Virtuais

As descrições, que se seguem, a respeito dos elementos finitos, que serão aplicados à mecânica dos sólidos bidimensionais, têm somente alcance elástico para pequenas deformações. Na seção 2.4 será adicionado ao regime elástico a não-linearidade física.

Se um corpo é submetido a um conjunto de forças de volume \mathbf{b} então pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} [\delta \boldsymbol{\varepsilon}]^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot d\Omega - \int_{\Omega} [\delta \mathbf{u}]^T \cdot \mathbf{b} \cdot d\Omega - \int_{\Gamma_t} [\delta \mathbf{u}]^T \cdot \mathbf{t} \cdot d\Gamma = 0 \quad (2.7)$$

Onde \mathbf{s} é o vetor de tensões, \mathbf{t} é o vetor de forças no contorno, \mathbf{b} são as forças de volume, \mathbf{du} é vetor de deslocamentos virtuais, \mathbf{de} é o vetor associado às deformações virtuais, \mathbf{W} é o domínio de interesse, \mathbf{Gt} é a parte do contorno no qual as forças de contato são prescritas e \mathbf{Gu} é a parte do contorno na qual os deslocamentos são prescritos.

2.2.2 Estado Plano de Deformações

Para problemas de deformações planas, a dimensão de espessura normal a um certo plano (diga-se plano xy) é grande comparada com as dimensões típicas no plano xy e o corpo é sujeito somente a cargas no plano xy . Nestes problemas, pode-se admitir que os deslocamentos na direção z são negligenciáveis e que os deslocamentos \mathbf{u} e \mathbf{v} , no plano, são independentes de z . A figura 2.2 ilustra alguns problemas típicos de deformações planas.

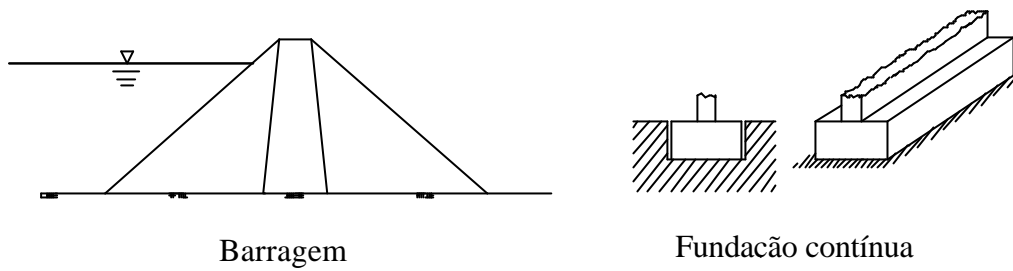


Figura 2.2: Problemas de deformações no plano

Os deslocamentos, em forma vetorial, são expressos por

$$\mathbf{u} = [u, v]^T \quad (2.8)$$

No qual \mathbf{u} e \mathbf{v} são deslocamentos no plano nas direções x e y , respectivamente.

As componentes de deformações podem ser expressas como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T \quad (2.9)$$

onde \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{g}_{xy} são as deformações normais nas direções x e y , respectivamente e \mathbf{g}_{xy} é a deformação (distorção) transversal. Em caso de deformações planas, \mathbf{e}_z é considerada nula. Para pequenos deslocamentos, as deformações normais são dadas por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.11)$$

e as deformações transversais (distorções) são dadas por

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.12)$$

Os deslocamentos virtuais e as deformações virtuais associadas respectivamente são dados por

$$\delta \mathbf{u} = [\delta u, \delta v]^T \quad (2.13)$$

e

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial x}, \frac{\partial(\delta v)}{\partial y}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \right]^T \quad (2.14)$$

A relação tensão-deformação pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.15)$$

onde as tensões $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ são a tensão normal na direção x , a tensão normal na direção y e a tensão tangencial no plano xy , respectivamente.

Para materiais elásticos lineares, submetidos a deformações planas, a relação tensão-deformação ou matriz constitutiva \mathbf{D} é dada por

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

na qual E e ν são o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson, respectivamente. As tensões normais no plano xy são diferentes de zero e podem ser avaliadas por

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.17)$$

As forças de corpo \mathbf{b} por unidade de volume são escritas vetorialmente como

$$\mathbf{b} = [b_x, b_y]^T \quad (2.18)$$

no qual b_x e b_y são as forças de corpo por unidade de volume nas direções x e y , respectivamente. As forças de contato no contorno \mathbf{t} podem ser expressas por

$$\mathbf{t} = [t_x, t_y]^T \quad (2.19)$$

no qual t_x e t_y são as forças de contato no contorno por unidade de comprimento. Considerando que uma fatia unitária do problema está sendo analisada, um elemento de volume $d\Omega$ é dado por

$$d\Omega = 1 \cdot dx \cdot dy \quad (2.20)$$

2.3 REPRESENTAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

2.3.1 Equações Governantes

Na representação por elementos finitos, os deslocamentos, as deformações e suas variações correspondentes podem ser expressos pelas relações

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i \quad \delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \cdot \delta \mathbf{d}_i \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \cdot \delta \mathbf{d}_i \quad (2.22)$$

onde, para o nó i , \mathbf{d}_i é o vetor de deslocamentos nodais, $\delta \mathbf{d}_i$ é o vetor de deslocamentos nodais virtuais, $\mathbf{N}_i = \mathbf{I} \cdot \mathbf{N}_i$ é a matriz de funções de forma globais e \mathbf{B}_i é a matriz de deformações-deslocamentos global. O numero total dos nós na malha toda é n .

Se as expressões (2.21) e (2.22) são substituídos na equação de trabalho virtual (2.1) então se obtém

$$\sum_{i=1}^n [\delta \mathbf{d}_i]^T \left\{ \int_{\Omega} [\mathbf{B}_i]^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{t} d\Gamma \right\} = 0 \quad (2.23)$$

então se tem para cada nó i uma equação de forma

$$\int_{\Omega} [\mathbf{B}_i]^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (2.24)$$

Usando-se a representação por elementos finitos isoparamétricos, pode-se avaliar as contribuições de (2.24) separadamente para cada elemento.

Os deslocamentos podem ser expressos, na forma usual, por

$$\mathbf{u}^{(e)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i^{(e)} \mathbf{d}_i^{(e)} \quad (2.25)$$

onde, para um nó local “i” do elemento “e”, $N_i^{(e)}$ é a matriz das funções de interpolação e o vetor de deslocamento nodais é $d_i^{(e)}$. Existem r nós locais em cada elemento e .

Matricialmente, usa-se a seguinte representação para as coordenadas x e y dentro do elemento

$$\begin{bmatrix} x^{(e)} \\ y^{(e)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{(e)} \\ y_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

no qual $N_i^{(e)}$ são as mesmas funções de interpolação usadas na representações de deslocamentos. A **Matriz Jacobiana** é avaliada como

$$\mathbf{J}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} x_i^{(e)} & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} y_i^{(e)} \\ \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} x_i^{(e)} & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} y_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

A inversa de $\mathbf{J}^{(e)}$ é avaliada usando a expressão

$$\left(\mathbf{J}^{(e)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

as relações deformações-deslocamentos, em cada elemento finito, são expressadas por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i^{(e)} d_i^{(e)} \quad (2.29)$$

O elemento de volume infinitesimal, a matriz de relações deformação-deslocamento, o vetor de deslocamentos nodais de um elemento, para problemas de estado plano de deformações podem ser avaliados, respectivamente, por

$$d\Omega^{(e)} = 1.\det J^{(e)} d\xi d\eta \quad (2.30)$$

$$B_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)} & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$d_i^{(e)} = \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

O programa, baseado no original de Owen e Hinton (1980), apresenta as rotinas completas para problemas de tensões planas e sólidos axissimétricos, mas a formulação para estes casos não é apresentada aqui, pois não são objetos de estudo neste trabalho.

As derivadas das funções de interpolação, usadas na matriz deformações-deslocamentos para estado plano de deformações podem ser obtidas usando a regra de derivação em cadeia por:

$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (2.33)$$

no qual os termos $\partial \xi / \partial x$, $\partial \eta / \partial x$, $\partial \eta / \partial y$ e $\partial \xi / \partial y$ podem ser obtidos avaliando a inversa da matriz Jacobiana dada em (2.27).

Deste que se tenha uma relação linear tensão-deformação tem-se

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{B}_j^{(e)} \mathbf{d}_j^{(e)} \right) \quad (2.34)$$

A contribuição do elemento e no primeiro, segundo e terceiro termos da expressão de trabalhos virtuais em (2.24) é dado, respectivamente, por

$$\sum_{j=1}^r \mathbf{K}_j^{(e)} \mathbf{d}_j^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{B}_j^{(e)}]^T \mathbf{D}^{(e)} \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{B}_j^{(e)} \mathbf{d}_j^{(e)} \right) d\Omega \quad (2.35)$$

onde $\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$ é a sub-matriz do elemento da matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(e)}$.

$$f_{\text{Bi}}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{N}_j^{(e)}]^T \mathbf{b}^{(e)} d\Omega \quad (2.36)$$

$$f_{\text{Ti}}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{N}_j^{(e)}]^T \mathbf{t}^{(e)} d\Gamma \quad (2.37)$$

onde $\Gamma_t^{(e)}$ é a parte de Γ_t na qual coincide com o contorno do elemento e .

2.3.2 Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas Nodais

A integração é agora efetuada no sistema de coordenadas naturais. Portanto a submatriz da matriz de rigidez $K^{(e)}$, vinculando os nós i e j , tem a forma

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_i^{(e)}]^T D^{(e)} B_j^{(e)} h^{(e)} \det J^{(e)} d\xi d\eta \quad (2.38)$$

Os elementos de $K_{ij}^{(e)}$ são avaliados numericamente. Integrando a submatriz de rigidez em (2.38) obtém-se

$$T_{ij}^{(e)} = [B_i^{(e)}]^T D^{(e)} B_j^{(e)} h^{(e)} \det J^{(e)} \quad (2.39)$$

onde a espessura do elemento h é unitária. Segue a submatriz de rigidez como

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} T_{ij}^{(e)} d\xi d\eta \quad (2.40)$$

A integração numérica para um elemento quadrilátero, com $n \times n$ pontos, resulta

$$K_{ij}^{(e)} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n T_{ij}(\xi_p, \eta_q) W_p W_q \quad (2.41)$$

onde W_p e W_q são fatores de peso e (ξ_p, η_q) uma posição de ponto de integração. As forças nodais equivalentes no nó i , causadas por forças de corpo, são

$$f_{Bi}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_i^{(e)}]^T b^{(e)} h^{(e)} \det J^{(e)} d\xi d\eta \quad (2.42)$$

As componentes de $f_{Bi}^{(e)}$ são avaliadas numericamente. Integrando-se (2.42), obtém-se

$$\mathbf{g}_i^{(e)} = [\mathbf{N}_i^{(e)}]^T \mathbf{b}^{(e)} \mathbf{h}^{(e)} \det \mathbf{J}^{(e)} \quad (2.43)$$

então

$$f_{Bi}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{g}_i^{(e)} d\xi d\eta \quad (2.44)$$

A integração numérica para um quadrilátero com $n \times n$ pontos conduz para o vetor de cargas nodais equivalentes

$$f_{Bi}^{(e)} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \mathbf{g}(\xi_p, \eta_q)_i^{(e)} W_p W_q \quad (2.45)$$

onde W_p e W_q são os fatores de peso e $(\bar{\xi}_p, \bar{\eta}_q)$ é uma posição.

A implementação computacional de elementos isoparamétricos, integrados numericamente, é descrita em detalhes por Owen e Hinton (1977). Este capítulo resumiu os principais passos envolvidos e as equações necessárias para a determinação da matriz de rigidez do elemento finito e vetores de cargas nodais equivalentes.

2.4 ELEMENTOS FINITOS PARA APLICAÇÕES ELASTOPLÁSTICAS NO CONCRETO, SOLO E ROCHA

Considerando um sólido de um material como concreto, solo ou rocha, onde \mathbf{s} são as tensões, \mathbf{b} são as cargas distribuídas por unidade de volume e \mathbf{f} são as forças externas aplicadas, formando um campo de esforços em equilíbrio. O sólido apresenta deslocamentos virtuais $\bar{\mathbf{a}}\mathbf{d}^*$, que resultam em deformações compatíveis $\bar{\mathbf{a}}\mathbf{e}^*$ e deslocamentos internos $\bar{\mathbf{a}}\mathbf{u}^*$. O princípio dos trabalhos virtuais requer que

$$\int_{\Omega} (\delta \varepsilon^{*T} \sigma - \delta u^{*T} b) d\Omega - \delta d^{*T} f = 0 \quad (2.46)$$

Então o procedimento de elementos finitos leva a seguintes expressões para os deslocamentos e deformações dentro de um elemento

$$\delta u^* = N \delta d^*$$

$$\delta \varepsilon^* = B \delta d^* \quad (2.47)$$

onde \mathbf{N} e \mathbf{B} são respectivamente a matriz das funções de forma e a matriz de deformações elásticas. Substituindo (2.47) em (2.46)

$$\int_{\Omega} \delta d^{*T} (B^T \sigma - N^T b) d\Omega - \delta d^{*T} f = 0 \quad (2.48)$$

onde o volume de integração sobre o sólido é a soma das contribuições individuais de cada elemento. Desde que esta expressão seja válida para qualquer deslocamento virtual $\delta \mathbf{d}^*$ tem-se

$$\int_{\Omega} B^T \sigma d\Omega - f - \int_{\Omega} N^T b d\Omega = 0 \quad (2.49)$$

Para a solução de problemas não lineares a expressão acima, geralmente, não será satisfeita em um estágio inicial qualquer do processamento numérico, e

$$\psi = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \left(\mathbf{f} + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega \right) \neq 0 \quad (2.50)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor de forças residuais. Para situações elastoplásticas a rigidez do material é continuamente modificada, e em cada instante a relação incremental tensão/deformação é dada por $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Para se avaliar a matriz de rigidez incremental \mathbf{K}_T em qualquer estágio, a forma incremental do vetor de forças residuais deve ser empregada. Portanto, dentro de um incremento de carga, tem-se

$$\Delta\psi = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \Delta\boldsymbol{\sigma} d\Omega - \left(\Delta\mathbf{f} + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \Delta\mathbf{b} d\Omega \right) \quad (2.51)$$

substituindo $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}$ em (2.51) o vetor de cargas residuais resulta em

$$\Delta\psi = \mathbf{K}_T \mathbf{d} - \left(\Delta\mathbf{f} + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \Delta\mathbf{b} d\Omega \right) \quad (2.52)$$

onde a matriz de rigidez elastoplástica para concreto, solo ou rocha, é dada por

$$\mathbf{K}_T = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.53)$$

3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

Em aplicações do método dos elementos finitos na análise de estruturas de concreto armado, os modelos que podem ser empregados para inclusão da armadura são: o modelo distribuído, o modelo discreto e o modelo incorporado.

O modelo distribuído considera o aço distribuído uniformemente no elemento finito de concreto. Este modelo é mais adequado para situações em que a armadura está densamente distribuída na peça, como no caso de placas e cascas.

O modelo discreto representa a armadura por elementos unidimensionais de treliça. Estes elementos integram-se à malha de elementos finitos utilizada na representação do concreto. Este modelo tem a desvantagem da malha de elementos finitos do concreto limitar a disposição das barras de armadura.

No modelo incorporado, a geometria das barras de armadura é consistente com a geometria do elemento de concreto. Isto resulta em um único campo de deslocamentos no domínio do elemento, sendo a armadura considerada uma linha de material mais rígido no interior do elemento de concreto. Desta forma, podem ser consideradas várias barras de armadura no interior de um mesmo elemento de concreto. Admite-se que exista aderência perfeita entre o aço e o concreto. Neste trabalho, o modelo utilizado foi o modelo incorporado, adotando-se como referência a implementação computacional efetuada por Prates Junior (1992).

3.1 MODELO INCORPORADO

No modelo incorporado, admite-se que a armadura resiste apenas a esforços axiais e que os deslocamentos em qualquer ponto de uma barra de armadura são os mesmos do elemento de concreto correspondente. Deste modo, a barra de armadura pode ser

arbitrariamente colocada dentro do elemento de concreto, sem a necessidade de introduzir incógnitas adicionais ao problema.

Os deslocamentos ao longo da barra de armadura são determinados a partir dos deslocamentos nodais do elemento de concreto. Assim a matriz de rigidez da armadura tem a mesma dimensão de matriz de rigidez do elemento de concreto e a matriz de rigidez total é a soma das duas. A expressão final da matriz de rigidez do elemento é

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_C] + \sum_{i=1}^{nb} [\mathbf{K}_S]_i \quad (3.1)$$

onde nb é o número de segmentos de barra de armadura no interior do elemento de concreto, \mathbf{K}_C e \mathbf{K}_S são respectivamente as matrizes de rigidez do concreto e o dos segmentos de armadura. A matriz de rigidez da cada barra de armadura é dada por

$$[\mathbf{K}_S] = A_s E_s \int_s \mathbf{B}_s^T \mathbf{B}_s dS \quad (3.2)$$

onde,

A_s é a área da seção transversal da barra de armadura;

E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;

\mathbf{B}_s é o vetor das relações deformações–deslocamentos para a armadura;

3.2 FORMULAÇÃO GEOMÉTRICA

Nesta seção, é apresentada uma formulação para incorporação das barras de armadura ao elemento bidimensional de concreto. As barras são descritas em coordenadas globais cartesianas, independentemente da malha de elementos finitos. Durante a integração da expressão de trabalho virtual, é necessário transformar as coordenadas da armadura para coordenadas naturais.

O elemento de concreto, mostrado na figura 3.1, é descrito usando coordenadas globais (x,y) . As coordenadas naturais do elemento são (ξ,η) . Seguindo o procedimento usual para o mapeamento isoparamétrico, as coordenadas globais de qualquer ponto, em um elemento, são expressas em termos das funções de interpolação N , como

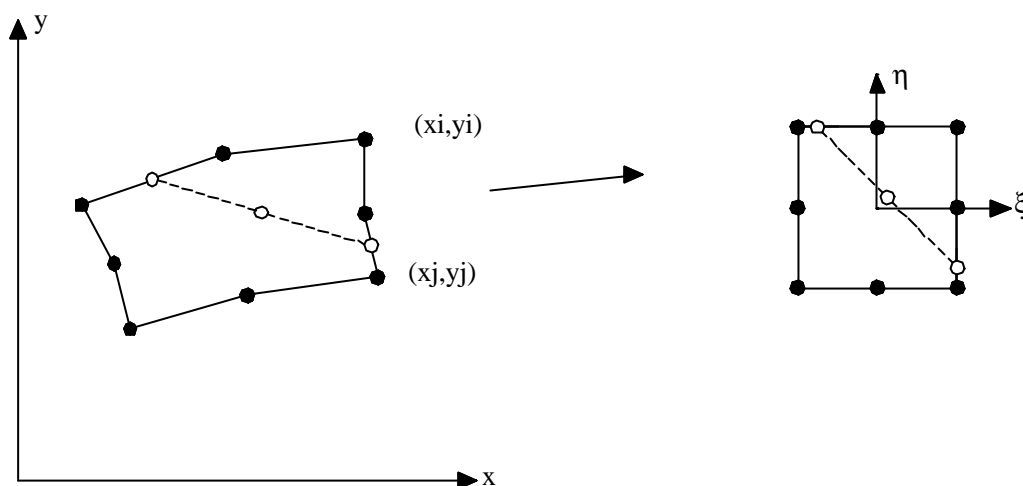


Figura 3.1: Barra de armadura no interior do elemento de concreto

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i y_i \quad (3.3)$$

As correspondentes diferenciais são

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Uma importante vantagem desta formulação é que a localização e geometria da barra de armadura podem ser estabelecidas independentemente da malha global. Uma vez criada a

malha de elementos de concreto, cada barra armadura deve ser especificada por dois pontos nodais. Para garantir uma continuidade interelementar adequada, é necessário acrescentar nós nos elementos de barra. As coordenadas dos nós na barra de aço, entre os nós de definição da mesma, são obtidos por interpolação. Desta forma, nós adicionais são colocados dentro do elemento de concreto. Tomando $\{x_j\}$ e $\{y_j\}$ como os vetores que contêm as coordenadas globais de todos os nós da barra, associados com um único elemento, as coordenadas de qualquer outro ponto na barra são dadas por

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} H_j & 0 \\ 0 & H_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

As funções de interpolação unidimensionais $H(\div)$ são expressas em termos de uma coordenada normalizada independente \div .

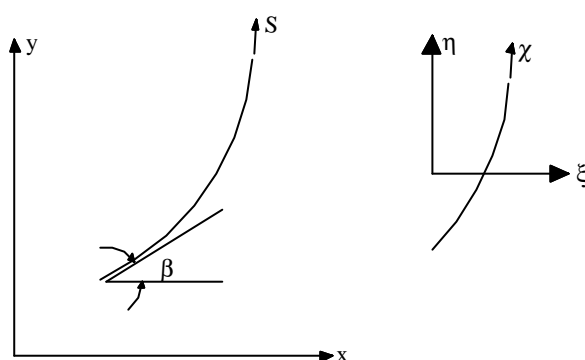


Figura 3.2: Coordenadas ao longo do eixo da armadura

Para determinar a rigidez associada com a armadura, é necessário fazer integrações ao longo da mesma. Para isto, precisa-se de um elemento diferencial de comprimento dS , ao longo da armadura, que pode ser obtido de (3.6). Conforme a figura 3.2, a orientação da tangente à barra é dada pelo ângulo β , onde

$$\cos \beta = \frac{dx}{dS} = \frac{dx d\chi}{d\chi dS}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{dy}{dS} = \frac{dy d\chi}{d\chi dS} \quad (3.6)$$

sendo $\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta = 1$, então

$$\frac{dS}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\chi}\right)^2} \quad (3.7)$$

substituindo em (3.5)

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx}{d\chi} \\ \frac{dy}{d\chi} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} \frac{dH_j}{d\chi} & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\chi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

logo

$$\cos \beta = \frac{\frac{dx}{d\chi}}{\frac{dS}{d\chi}}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{\frac{dy}{d\chi}}{\frac{dS}{d\chi}} \quad (3.9)$$

Desta forma, os cossenos diretores da reta tangente, em qualquer ponto ao longo da armadura, assim como o fator $dS/d\chi$, podem ser facilmente calculados usando as equações acima.

Um elemento diferencial de volume dV_s da barra de aço, pode ser expresso por

$$dV_s = A_s dS \quad (3.10)$$

Usando o fator descrito em (3.7), as integrais envolvendo elementos de volume ao longo da armadura podem ser escritas em termos da coordenada natural χ como

$$\int_{V_s} C dV_s = \int_{\chi} C A_s \frac{dS}{d\chi} d\chi \quad (3.11)$$

na qual C é uma função de posição ao longo da barra.

3.3 TRECHOS DE ARMADURA QUE FICAM NO INTERIOR DE UM ELEMENTO DE CONCRETO

Na entrada de dados, as barras de aço são posicionadas por suas coordenadas globais (x,y) . Para obtenção da matriz de rigidez total (concreto+aço) de um determinado elemento, necessita-se saber quais barras interceptam este elemento, conferindo-lhe uma rigidez adicional.

O programa computacional calcula automaticamente os segmentos destas barras que ficam no interior do elemento de concreto. Uma vez determinados estes trechos, é realizado o cálculo da matriz de rigidez da armadura.

Como primeira etapa, deve-se realizar a transformação de coordenadas globais $P_j(x,y)$, dos pontos de definição da geometria da barra, para coordenadas naturais $P_j(\xi,\eta)$ dos mesmos. A relação entre estas coordenadas para elementos isoparamétricos é dada por

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} N_j(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_j(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

onde (x,y) são as coordenadas globais de um ponto qualquer, (x_i,y_i) são as coordenadas globais dos nós do elemento de concreto e $N_i(\xi, \eta)$ suas funções de forma.

Uma forma explícita para a relação inversa de (3.12) é de difícil obtenção. Elwi e Hradey (1989) sugerem o algoritmo de Newton- Rapson para sua determinação numérica. Deste modo, a obtenção de (ξ_p, η_p) está baseada no fato de que estas coordenadas são as raízes do seguinte sistema de equações não lineares

$$\{f(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

usando o método de solução de Newton-Rapson, tem-se, após $k+1$ iterações,

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}^{k+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^k + \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{k+1} \quad (3.14)$$

Onde

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = [J^k]^{-1} \left(\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_p - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i^k & 0 \\ 0 & N_i^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \right) \quad (3.15)$$

com $[J] = [J(\xi, \eta)]$ sendo a matriz Jacobiana e $N_i = N_i(\xi, \eta)$, as funções de forma do elemento de concreto na iteração k .

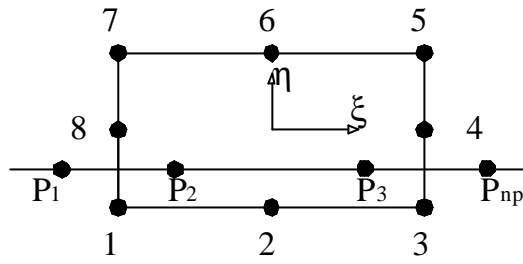


Figura 3.3: Definição da barra de aço

Determinando as coordenadas naturais (ξ_p, η_p) , dos pontos de definição da geometria da barra, parte-se para uma a etapa de definição dos segmentos de barra, que pertencem aos elementos bidimensionais de concreto que os envolvem. As barras serão representadas por segmentos retos, pois segmentos curvos não são necessários para os exemplos que serão abordados neste trabalho.

Segundo Zienkiewicz (1989), têm-se que

$$\xi = \sum_{i=1}^{np} f_i(\eta) \xi_i$$

$$\eta = \sum_{i=1}^{np} g_i(\xi) \eta_i \quad (3.16)$$

Onde para os np pontos da barra de aço, calculam-se as funções

$$g_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)}$$

$$f_i(\eta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\eta - \eta_j)}{(\eta_i - \eta_j)} \quad (3.17)$$

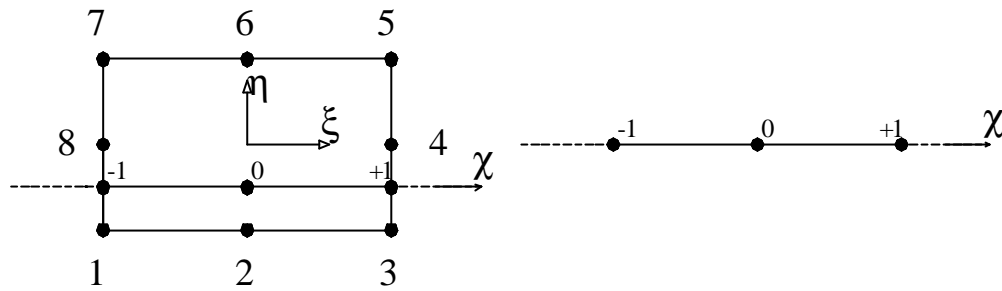


Figura 3.4: Segmento de armadura dentro do elemento de concreto

Para este trabalho, devido a não existência de armaduras ativas ou de protensão, serão utilizados segmentos de armadura de três nós. Estes segmentos são adequados para representar armaduras retilíneas e apresentam funções de interpolação quadráticas, isto é, da mesma ordem que as funções de interpolação dos elementos bidimensionais. A figura 3.4 mostra um segmento de armadura com três nós.

Para verificar se ocorre a interseção de uma determinada barra de armadura com um elemento de concreto, fixa-se a coordenada $\xi = \pm 1$ do elemento de concreto e calcula-se a coordenada η da interseção lado do concreto-curva da barra. Caso $-1 \leq \eta \leq 1$, ter-se-á que a barra intercepta este lado do elemento. De maneira análoga, fixa-se $\eta = \pm 1$ e verifica-se $-1 \leq \xi \leq 1$.

Sobre o eixo da coordenada normalizada χ , determina-se o segmento de armadura com um nó intermediário conforme a figura 3.4.

3.4 FUNÇÕES DE FORMA PARA ELEMENTOS FINITOS DE ARMADURA

As funções de interpolação para o elemento de armadura são polinômios de Lagrange, conforme proposto por Zienkiewicz (1989) e são geradas pela expressão

$$H_k^m(\chi) = \frac{(\chi - \chi_i) \dots (\chi - \chi_{k-1})(\chi - \chi_{k+1}) \dots (\chi - \chi_m)}{(\chi_k - \chi_i) \dots (\chi_k - \chi_{k-1})(\chi_k - \chi_{k+1}) \dots (\chi_k - \chi_m)} \quad (3.18)$$

A expressão (3.18) tem o valor unitário para $\chi = \chi_k$. Desta forma, para elemento de três nós:

$$H_1(\chi) = \frac{\chi^2 - \chi}{2}$$

$$H_2(\chi) = 1 - \chi^2$$

$$H_3(\chi) = \frac{\chi^2 + \chi}{2} \quad (3.19)$$

3.5 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA A ARMADURA

O campo de deformações, dentro de um elemento de armadura, pode ser definido de diversas maneiras. Segundo Zienkiewicz e Philips (1974), a deformação ao longo da armadura é igual à deformação normal, no elemento de concreto, na direção tangente a barra. Sendo assim, considerando aderência perfeita entre o concreto e o aço, a expressão para deformação, na forma incremental, conforme proposto por Elwi e Hrudey (1989), fica

$$\Delta \varepsilon_s = \Delta \varepsilon_x \cos^2 \beta + \Delta \varepsilon_y \sin^2 \beta + \Delta \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta \quad (3.20)$$

Os incrementos de deformações $\Delta \varepsilon_x$, $\Delta \varepsilon_y$, $\Delta \gamma_{xy}$ são obtidos diretamente do campo de incremento de deslocamentos do elemento de concreto. Da equação (3.20) segue que a deformação incremental na armadura pode ser expressa como

$$\Delta \varepsilon_s = B_s \{\Delta u\} \quad (3.21)$$

onde Δu é o vetor de deslocamentos nodais do elemento de concreto e

$$\{B_s\} = \begin{Bmatrix} \cos^2 \beta \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} + \cos \beta \sin \beta \left\{ \frac{dN}{dy} \right\} \\ \cos^2 \beta \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} + \cos \beta \sin \beta \left\{ \frac{dN}{dy} \right\} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

é o vetor das relações deformações–deslocamentos para a armadura, determinado por Elwi e Hruday (1989). As derivadas das funções de forma em relação as coordenadas x e y são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{dx} \\ \frac{dN_i}{dy} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{d\xi} \\ \frac{dN_i}{d\eta} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, determina-se que a variação do incremento de trabalho interno para a armadura é dada por

$$\delta\Delta W = \int_{V_S} (\sigma_S + \Delta\sigma_S) \delta\Delta\varepsilon_S dV_S \quad (3.24)$$

na qual σ_S é a tensão normal na armadura e V_S o seu volume.

A forma incremental da relação constitutiva para a armadura pode ser escrita como

$$\Delta\sigma_S = E_S \Delta\varepsilon_S \quad (3.25)$$

onde E_S é o módulo de elasticidade longitudinal do aço. Assim,

$$\delta\Delta W = \int_S (\delta\Delta\varepsilon_S E_S \Delta\varepsilon_S A_S) dS + \int_S (\delta\Delta\varepsilon_S \sigma_S A_S) dS \quad (3.26)$$

ou

$$\delta\Delta W = \langle \delta\Delta u \rangle ([K_S] \{ \Delta u \} + \{ Q_S \}) \quad (3.27)$$

onde

$$[Q_S] = \int_{\chi} B_S^T \sigma_S \frac{dS}{d\chi} A_S d\chi \quad (3.28)$$

$[Q_S]$ é o vetor de forças nodais equivalentes e

$$[K_S] = \int_{\chi} B_S^T E_S B_S \frac{dS}{d\chi} A_S d\chi \quad (3.29)$$

A expressão para o cálculo da matriz de rigidez da armadura fica

$$[K_S] = \sum_{i=1}^{ng} B_{S_i}^T E_S B_{S_i} \frac{dS}{d\chi} A_S w_i \quad (3.30)$$

onde w_i é o fator de peso e ng o número de pontos de integração da barra.

4 AS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA O CONCRETO, O SOLO E O AÇO

4.1 INTRODUÇÃO À TEORIA DA PLASTICIDADE

Neste capítulo será abordada a análise elastoplástica para problemas de estado plano de deformações, aplicável a fundações contínuas de concreto armado. Somente as expressões essenciais serão apresentadas no texto. Nas referências citadas nesta dissertação pode ser encontrado um tratamento teórico mais profundo.

Como a análise envolve diferentes materiais, com distintas propriedades, diferentes modelos serão empregados.

Um solo, quando estudado por elementos finitos, pode ser representado por modelos simples, como o elástico linear, até modelos mais elaborados como o elastoplástico com endurecimento e o viscoelástico. Neste trabalho, adotou-se um modelo elastoplástico com endurecimento e obteve-se uma boa resposta para cargas de curta duração. A figura 4.1 mostra diagramas tensão-deformação uniaxiais típicos para o solo.

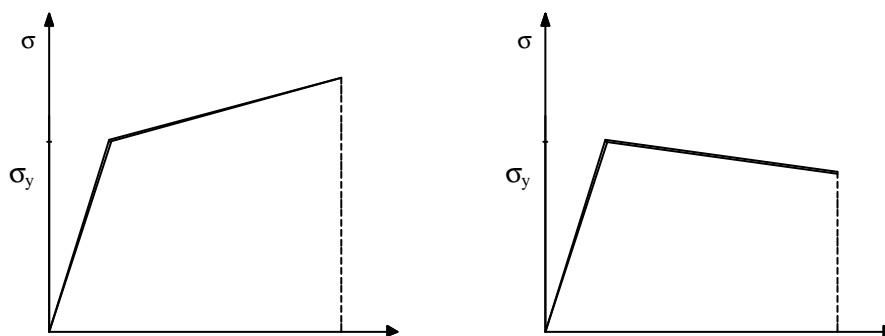


Figura 4.1: Diagrama elastoplástico para solo com endurecimento positivo e negativo

Para plastificação do solo será utilizado o critério de Drucker-Prager. Este critério, conforme Owen e Hinton (1980), apresenta a melhor aproximação para este material.

As peças de concreto armado apresentam uma resposta altamente não-linear, com três regimes podendo ser claramente identificados: o elástico, a etapa de formação de fissuras e o plástico. O gráfico da figura 4.2 ilustra esta situação.

A superfície de plastificação adotada para o concreto comprimido foi a de Von Mises. O modelo de fissuração será discutido na seção 4.5. O critério de ruptura de Ottosen (1977) é empregado para o concreto.

Convém mencionar que alguns outros critérios, que estão implementados no código computacional, como os critérios de Tresca e Mohr-Coulomb não terão as expressões e formulações apresentadas. Estes desenvolvimentos podem ser encontrados nas referências Owen e Hinton (1980) e Hinton (1988).

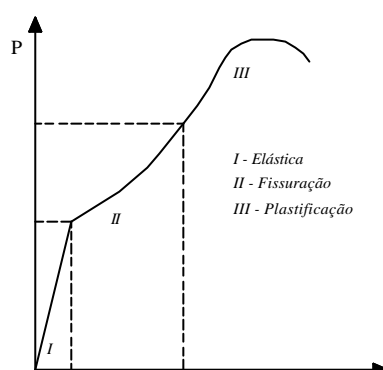


Figura 4.2: Diagrama carga-deslocamento

4.2 A SUPERFÍCIE DE PLASTIFICAÇÃO

Após a plastificação inicial, o valor da tensão de plastificação torna-se dependente do grau de deformação plástica. Este fenômeno é denominado endurecimento e a superfície de plastificação será modificada em cada estágio de deformação plástica. No modelo isotrópico, a superfície de plastificação subsequente é uma expansão uniforme da superfície original, sem translação, como mostrado na figura 4.3.

Paras alguns materiais como solos, a superfície de plastificação pode diminuir (amolecimento). Neste caso, a tensão de plastificação decresce com acréscimos de

deformação plástica. Portanto, para um modelo isotrópico, a superfície inicial de plastificação contrai-se progressivamente sem translação. O modelo isotrópico contempla ambos os casos de crescimento e contração da superfície de plastificação e engloba, como um caso particular, o modelo perfeitamente plástico.

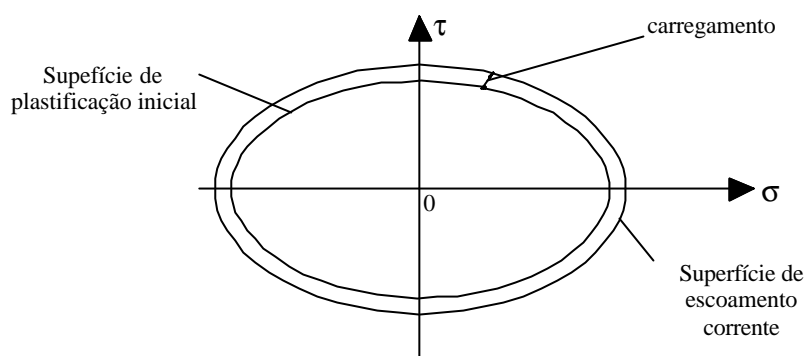


Figura 4.3: Modelo matemático para representação de endurecimento isotrópico

4.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS ELASTOPLÁSTICAS

4.3.1 Determinação da matriz constitutiva elastoplástica

A determinação de uma relação explícita entre tensões e deformações, que possa ser avaliada numericamente, é apresentada nesta seção de modo sucinto. As expressões teóricas serão agora convertidas para forma matricial.

A função de escoamento pode ser escrita como

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = k(\kappa) \quad (4.1)$$

onde \boldsymbol{s} é o vetor de tensões e \boldsymbol{k} é o parâmetro de endurecimento, que governa a expansão da superfície de plastificação. A equação, que governa esta superfície, é

$$F(\sigma, \kappa) = f(\sigma) - K(\kappa) = 0 \quad (4.2)$$

por diferenciação tem-se

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (4.3)$$

ou

$$\mathbf{a}^T d\sigma - A d\lambda = 0 \quad (4.4)$$

onde para o caso tridimensional

$$\mathbf{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right] \quad (4.5)$$

e

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa \quad (4.6)$$

o vetor \mathbf{a} é o vetor de fluxo. A expressão de deformações incremental é escrita por

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{D}]^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (4.7)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva elástica. Multiplicando os membros da equação acima por $d_D^T = \mathbf{a}^T \mathbf{D}$ e eliminando $\mathbf{a}^T d\boldsymbol{\sigma}$ obtém-se o multiplicador plástico $d\boldsymbol{\lambda}$

$$d\lambda = \frac{1}{[A + a^T D a]} a^T d_D d\varepsilon \quad (4.8)$$

Ou substituindo (4.8) em (4.7) obtém-se

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad (4.9)$$

com

$$D_{ep} = D - \frac{d_D d_D^T}{A + d_D^T a}, \quad d_D = D a \quad (4.10)$$

D_{ep} é a matriz constitutiva elastoplástica e D é a matriz constitutiva elástica já apresentada em (2.16). Agora é necessário determinar de forma numérica o vetor de fluxo plástico \mathbf{a} , o vetor plástico \mathbf{d}_D e o parâmetro escalar A . O equacionamento numérico dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{d}_D é apresentado na próxima seção (4.3.2). Pode-se mostrar que o termo escalar A , pertencente à matriz constitutiva elastoplástica, é obtido da inclinação local da curva uniaxial de tensão-deformação plástica e pode ser determinado experimentalmente.

$$A = H' \quad (4.11)$$

As equações envolvidas na determinação do parâmetro A estão descritas no anexo A.

4.3.2 Determinação do vetor de fluxo “a” e do vetor plástico “d_D”

Nesta seção serão apresentadas as equações matriciais para obtenção dos vetores **a** e **d_D**, que constituem a parcela de degradação da matriz constitutiva elástica, quando o estado de tensões atinge a superfície de plastificação. Em função destes vetores chega-se a matriz elastoplástica. As equações abaixo são válidas para estado plano de deformações.

Eliminando as componentes de tensão apropriadas, o vetor de fluxo **a** pode ser obtido para estado plano de deformações por

$$\mathbf{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right] \quad (4.12)$$

Numericamente, o vetor **a** pode ser obtido por

$$\mathbf{a} = C_1 \mathbf{a}_1 + C_2 \mathbf{a}_2 + C_3 \mathbf{a}_3 \quad (4.13)$$

$$\mathbf{a}_1^T = \{1, 1, 0, 1\}$$

$$\mathbf{a}_2^T = \frac{1}{2(J_2)^{1/2}} \{ \sigma_x, \sigma_y, 2\tau_{yz}, \sigma_z \}$$

$$\mathbf{a}_3^T = \left\{ \left(\sigma_y \sigma_z + \frac{J_2}{3} \right), \left(\sigma_x \sigma_z + \frac{J_2}{3} \right), -2(\sigma_z \tau_{xy}), \left(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \right\} \quad (4.14)$$

sendo função dos invariantes do tensor de tensões desviadoras J_2 e J_3 a serem definidos na seção 4.4.

Para a completa prescrição da matriz elastoplástica \mathbf{D}_{ep} dada em (4.10) é requerido \mathbf{d}_D . Empregando a matriz elástica \mathbf{D} de (2.16) em (4.10) resulta em, para estado plano de deformações

$$\mathbf{d}_D = \mathbf{D} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{d}_D = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + M_1 \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + M_1 \\ G a_3 \\ \frac{E}{1+\nu} a_4 + M_1 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

onde

$$M_1 = \frac{E\nu(a_1 + a_2 + a_4)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.16)$$

\mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 e \mathbf{a}_4 são as componentes do vetor \mathbf{a} . O módulo de elasticidade transversal pode ser calculado pela expressão

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.17)$$

As constantes C_1 , C_2 e C_3 , pertencentes ao vetor de fluxo plástico \mathbf{a} , necessárias para a definição da superfície de plastificação, estão explicitadas no quadro 4.1 para os critérios de Von Mises e Drucker-Prager, em uma forma apropriada para análise numérica.

Tabela 4.1: Constantes que definem a superfície de plastificação

Critério de Plastificação	C_1	C_2	C_3
Von Mises	0	$\sqrt{3}$	0
Drucker-Prager	α	1,0	0

A constante α é função do ângulo de atrito interno do solo ϕ e pode ser obtido conforme Chen (1988) por

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3} (3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (4.18)$$

4.4 MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA CONCRETO COMPRIMIDO E SOLO

4.4.1 Critérios de Plastificação

Os critérios de plastificação determinam o nível de tensões no qual as deformações plásticas iniciam. Qualquer critério de plastificação deve ser independente da orientação do sistema de coordenadas, podendo ser expresso como uma função dos invariantes de tensão. Genericamente os três invariantes do tensor desviador de tensão são

$$J_1 = \sigma'_{ii}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ji}$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} \quad (4.19)$$

Onde σ'_{ij} as tensões são as tensões desviadoras. Nas equações acima é empregada a notação de Einstein onde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ são os três componentes dos eixos cartesianos. Para estado plano de deformações existem apenas quatro componentes de tensão desviadoras $\mathbf{s}'_x, \mathbf{s}'_y, \mathbf{t}'_{xy}$ e \mathbf{s}'_z e os invariantes de tensão \mathbf{J}_2 e \mathbf{J}_3 tornam-se

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 \right) + \tau_{xy}'^2$$

$$J_3 = \sigma_z' \left(\sigma_z'^2 - J_2 \right) \quad (4.20)$$

As tensões desviadoras são calculadas por

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} I_1 \quad (4.21)$$

Dependentes do 1º invariante do tensor de tensões

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (4.22)$$

e δ_{ij} é o delta de Kronecker definido

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (4.23)$$

4.4.1.1 Critério de Plastificação para o Solo/Rocha

O critério escolhido para controlar a superfície de escoamento de solos e rochas é o critério de Drucker-Prager. Para utilizá-lo numericamente é conveniente reescrever as funções de escoamento em termos de invariantes de tensão que possam ser facilmente calculados. As expressões, que seguem, têm como fonte Chen (1988).

Conforme o critério de Drucker-Prager para que ocorra a plastificação do solo é necessário ser satisfeita a seguinte expressão

$$\alpha I_1 + (J_2')^{1/2} = k \quad (4.24)$$

onde α é obtido por

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3} (3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (4.25)$$

e k

$$k = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (4.26)$$

k é um parâmetro que corresponde ao estado de tensões a ser atingido para iniciar a plastificação, ϕ é o ângulo de atrito interno e c a coesão.

4.4.1.2 Critério de Plastificação para o Concreto Comprimido

Para a plastificação do concreto comprimido, adotou-se, neste trabalho, o critério de Von Mises. Este critério é um caso particular do critério de Ottosen, que será utilizado como critério de ruptura para o concreto.

Pelo critério de Von Mises a plastificação ocorre quando o segundo invariante J_2 alcança um valor crítico

$$(J_2)^{1/2} = k(\kappa) \quad (4.27)$$

no qual k é um parâmetro do material a ser determinado. Explicitamente, o segundo invariante de tensão pode ser escrito como

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 \right) + \tau_{xy}'^2 \quad (4.28)$$

O critério de plastificação pode ser escrito como

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3} (J_2)^{1/2} = \sqrt{3} k \quad (4.29)$$

onde substituindo (4.28) em (4.29) obtém-se

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \left(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 \right) + \tau_{xy}'^2 \right)^{1/2} \quad (4.30)$$

e $\bar{\sigma}$ é a tensão efetiva ou tensão equivalente. Quando $\bar{\sigma}$ atingir a tensão de plastificação σ_y , o estado de tensão encontra-se sobre a superfície de plastificação.

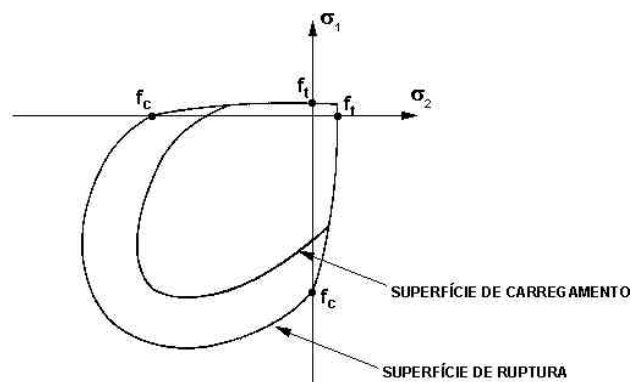


Figura 4.4: Superfícies de carregamento e de ruptura

4.4.2 Critério de Ruptura para o Concreto

O Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) propõe o critério de Ottosen para identificar a ruptura do concreto.

Admitindo que o concreto não fissurado é um material com comportamento isotrópico, sua superfície de ruptura pode ser expressa por

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (4.31)$$

onde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ são as tensões principais (tensões de tração positivas). Em vez de expressar a superfície de ruptura f em função das tensões principais, é conveniente usar o primeiro invariante do tensor de tensor I_1 , o segundo invariante do tensor desviador de tensões J_2 e o ângulo de similaridade θ . Desta forma, (4.31) fica

$$f(I_1, J_2, \theta) = 0 \quad (4.32)$$

Ottosen (1977), propôs o seguinte critério de ruptura para o concreto, que mais tarde foi adotado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993)

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (4.33)$$

onde f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto e

$$\lambda = c_1 \cos \left[\frac{1}{3} \arccos(-c_2 \operatorname{sen} 3\theta) \right], \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta \leq 0$$

$$\lambda = c_1 \cos \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(-c_2 \operatorname{sen} 3\theta) \right], \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta > 0 \quad (4.34)$$

com

$$\operatorname{sen} 3\theta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \quad (4.35)$$

e os invariantes de tensão em função das tensões principais

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

$$J_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} \quad (4.36)$$

Os quatro parâmetros do modelo podem ser determinados, conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), a partir da resistência média à compressão uniaxial do concreto f_{cm} e da resistência média à tração uniaxial do concreto f_{tm} , dada por

$$f_{tm} = \alpha_{fct,m} \left(\frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3}, \text{ em MPa} \quad (4.37)$$

$$f_{ck} = f_{cm} - 8, \text{ em MPa} \quad (4.38)$$

Com $0,95 \leq \alpha_{fct,m} \leq 1,85$.

Segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), a resistência à tração do concreto é mais variável que a sua resistência à compressão e pode ser reduzida substancialmente por efeitos ambientais. Desta forma, o valor médio proposto é por demais cauteloso e, para comparações com valores experimentais, preferiu-se adotar $\alpha_{fct,m} = 1,85$ de Prates Jr. (1992). Além disto, a diferença de 8 MPa entre f_{cm} e f_{ck} , proposta pelo CEB, é exagerada para concretos de baixa resistência. Achou-se mais conveniente adotar para este valor uma fração de f_{cm} (20%). Sendo assim a resistência média à tração adotada no modelo foi

$$f_{tm} = 1,85 (0,8 f_{cm})^{2/3} \quad (4.39)$$

O módulo de elasticidade longitudinal inicial, aos 28 dias, em MPa, e o coeficiente de Poisson (ν) são calculados, respectivamente, por

$$E_C = \alpha_\beta \alpha_E \cdot \left[\frac{f_{cm}}{f_{cmo}} \right]^{1/3} \quad \alpha_E = 2,15 \cdot 10^4 \text{MPa} \quad f_{cmo} = 10 \text{MPa} \quad (4.40)$$

$$\nu = 0,2 \quad (4.41)$$

onde α_β é um fator que leva em conta a influência do tipo de agregado no módulo de elasticidade do concreto. Foi adotado $\alpha_\beta = 1,2$, que corresponde aos agregados basálticos.

Os parâmetros \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 do critério de Ottosen podem ser calculados, conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), por

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1,4}}$$

$$\beta = \frac{1}{3,7k^{1,1}}$$

$$c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}}$$

$$c_2 = 1 - 6,8(k - 0,07)^2$$

onde

$$k = \frac{f_{tm}}{f_{cm}} \quad (4.42)$$

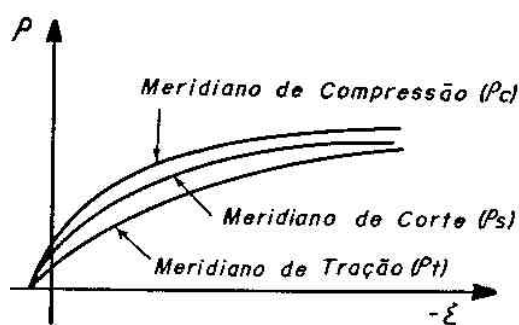


Figura 4.5: Meridianos da superfície de ruptura

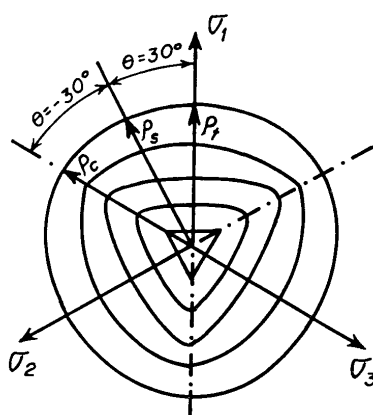


Figura 4.6: Seções transversais da superfície de ruptura

A forma geral de superfície de ruptura, no espaço tridimensional de tensões, pode ser visualizada por suas seções em planos desviadores e meridianos, conforme visto nas figuras 4.5 e 4.6. Os planos desviadores são planos perpendiculares ao eixo hidrostático ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) e os meridianos são planos que contêm este eixo ($\theta = \text{constante}$). Para um material isotrópico, a superfície de ruptura apresenta tríplice simetria e torna-se necessário estudar apenas um setor

com $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$. Como o concreto tem menor resistência à tração do que à compressão, a seção transversal da superfície de ruptura não pode ter a origem **O** como centro de simetria.

Desta forma, entre as características da superfície de ruptura do concreto pode-se destacar:

- é dependente dos três invariantes de tensão;
- a superfície de ruptura é suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- os meridianos são parabólicos e abrem no sentido do eixo hidrostático negativo;
- o traço do plano desviador muda de uma forma triangular para circular com o aumento da pressão hidrostática.

O critério de ruptura de Ottosen, adotado neste trabalho, apresenta todas estas características e tem por casos particulares o critério de Drucker- Prager ($\alpha = c_2 = 0$) e o de Von Mises ($\beta = c_2$).

4.4.3 Endurecimento do Concreto

Para o concreto, ajustou-se à curva tensão-deformação, proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), uma relação bilinear, conforme mostra a figura 4.7. Nesta curva, a tensão de plastificação do concreto comprimido é igual a metade da tensão de ruptura do concreto. Extrapolando os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial e operando a equação que define o endurecimento pode-se determinar o parâmetro de endurecimento como função $H' = f(\sigma_y, E, f_{cm})$.

A deformação ϵ_y em se inicia a plastificação pode ser obtida

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad (4.43)$$

Pode-se calcular o módulo E_T por

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{f_c - \sigma_y}{2,2\%_{oo} - \varepsilon_y} \quad (4.44)$$

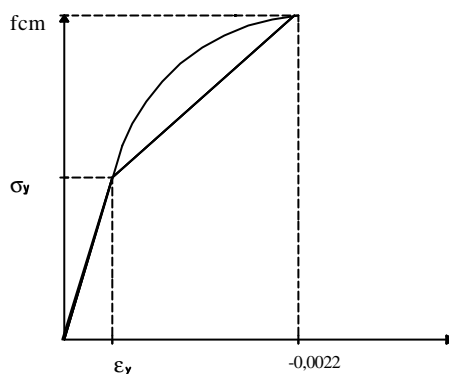


Figura 4.7: Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido

Por definição o parâmetro H' é

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad (4.45)$$

Substituindo-se (4.43) e (4.44) em (4.45) pode-se chegar em

$$H' = \frac{\frac{f_{cm} - \sigma_y}{2,2\%_{oo} - \frac{\sigma_y}{E}}}{\frac{f_{cm} - \sigma_y}{2,2\%_{oo} - \frac{\sigma_y}{E}} - \frac{\sigma_y}{E}} \quad (4.46)$$

Para o caso particular, onde $H' = f(\sigma_y = 0,5f_{cm}, E, f_{cm})$, tem-se

$$H' = \frac{\frac{0,5f_{cm}}{2,2\text{‰} - \frac{0,5f_{cm}}{E}}}{\frac{0,5f_{cm}}{1 - \frac{2,2\text{‰} - \frac{0,5f_{cm}}{E}}}} \quad (4.47)$$

Preferiu-se adotar a regra de endurecimento exposta acima e não a curva proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), para unificar os procedimentos computacionais (endurecimento) para o concreto e para o solo.

4.5 MODELO DE FISSURAS PARA O CONCRETO TRACIONADO

4.5.1 Introdução

O concreto simples é um material que possui como característica a baixa resistência à tração comparada com sua resistência à compressão. Deste fato, resulta o aparecimento de fissuras para tensões muito baixas, induzindo um acentuado comportamento não-linear da estrutura.

Os modelos para o concreto fissurado geralmente consideram uma perda da capacidade de carga do concreto causada pela fissura.

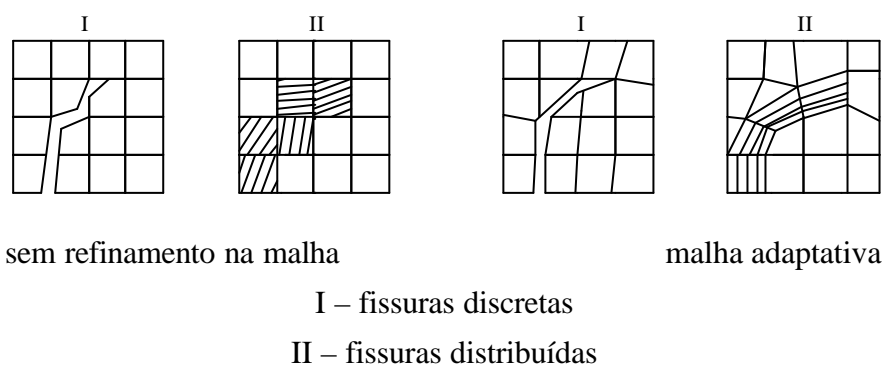
No contexto dos elementos finitos, basicamente duas aproximações têm sido usadas para representar este fenômeno: o modelo de fissuras discretas e o modelo de fissuras distribuídas. O modelo de fissuras discretas representa as fissuras individuais como descontinuidades reais na malha de elementos finitos. Neste estudo, as fissuras foram modeladas por separação dos pontos nodais, inicialmente ocupando a mesma posição no espaço. Uma restrição a este modelo é que as fissuras devem formar-se ao longo do contorno dos elementos. Desta forma, a resposta é fortemente dependente da malha. Além disso, após a formação da fissura a topologia da malha varia, exigindo procedimentos de atualização da

mesma que consomem muito tempo computacional. Recentemente, tem sido usado refinamento da malha, através de métodos auto-adaptativos, de forma que novos elementos de fronteira são inseridos ao longo da propagação das fissuras. Estes desenvolvimentos reduzem a dependência da malha, mas tornam a análise muito cara, por isso, este modelo é apropriado apenas para problemas envolvendo poucas fissuras dominantes.

O modelo de fissuras distribuídas não leva em conta a descontinuidade da malha, o concreto fissurado permanece contínuo e as propriedades dos materiais são modificadas para considerar o dano devido a fissuração. O concreto é inicialmente isotrópico, mas a fissura induz-lhe anisotropia. Depois de fissurado, admite-se que o concreto torna-se ortotrópico, com os eixos materiais principais orientados no sentido das direções de fissuração. As propriedades materiais variam dependendo do estado de deformação e de tensão. O módulo de elasticidade longitudinal é reduzido na direção perpendicular ao plano da fissura e o efeito de Poisson é desprezado. O módulo de elasticidade transversal, paralelo ao plano da fissura, também é reduzido. O método de fissuras distribuídas (smeared crack) é computacionalmente atrativo, uma vez que a topologia da malha não muda ao longo da análise, e só a relação tensão-deformação deve ser atualizada quando ocorre a fissuração.

A figura 4.8 mostra os dois modelos descritos para representar as fissuras numa direção não conhecida “a priori”.

Um modelo de fissuras distribuídas foi adotado neste trabalho, seguindo o modelo empregado por Prates Junior (1992). Para estabelecer tal modelo, são necessários os seguintes itens: um critério de fissuração; uma regra para consideração da colaboração do concreto entre fissuras (tension stiffening); e um modelo para transferência de tensões tangenciais (shear transfer).



sem refinamento na malha

malha adaptativa

I – fissuras discretas

II – fissuras distribuídas

Figura 4.8: Modelos para representar as fissuras

4.5.2 Critério de Fissuração

Admite-se que a resposta do concreto sob tensões de tração é elástica linear até que a superfície de ruptura seja atingida, e seu comportamento é calculado pela relação $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$.

A avaliação da fissuração do concreto, no programa desenvolvido neste trabalho, é feita através do estado de tensões nos pontos de integração de Gauss dos elementos de concreto.

Verifica-se, desta forma, se o estado de tensão, correspondente a cada ponto de integração, alcançou a superfície de ruptura de Ottosen, descrita na seção 4.4.2.

A tensão principal σ_1 de tração é determinada através dos invariantes de tensões I_1 , J_2 e θ .

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{I_1}{3} \quad (4.48)$$

Para distinguir se o ponto que atingiu a superfície de ruptura, rompeu por fissuração ou por esmagamento do concreto, adotou-se o critério proposto pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). Segundo este critério, o ponto de Gauss terá fissurado caso, ao atingir a superfície de ruptura, tem-se

$$\sigma_1 \geq \frac{f_{tm}}{2} \quad (4.49)$$

Por outro lado, o ponto de Gauss terá esmagado se

$$\sigma_1 < \frac{f_{tm}}{2} \quad (4.50)$$

Caso o ponto de integração tenha fissurado, admite-se que uma fissura tenha se formado um plano normal ao da tensão σ_1 . Portanto o comportamento do concreto não é mais isotrópico e sim ortotrópico, e os eixos materiais locais coincidem com as direções principais.

Para carregamentos posteriores, uma fissura secundária pode ocorrer no ponto de integração que estava previamente fissurado em uma direção. Utiliza-se o chamado procedimento da fissura fixa, onde se mantém a direção da primeira fissura fixa e determina-se a tensão de tração na direção paralela a fissura existente. Se esta tensão exceder a resistência do concreto à tração, este ponto de integração será considerado fissurado nas duas direções e todas as componentes de tensão serão zeradas.

4.5.3 Critério para escolha da curva de amolecimento

Os primeiros estudos, feitos em análise numérica de concreto estrutural, admitiam o concreto como sendo um material elástico-frágil, sob tração. Quando uma fissura ocorria, a tensão normal à fissura era zerada. Este procedimento trazia dificuldades para a convergência dos resultados.

Posteriormente, observou-se que, devido as forças de aderência, o concreto entre as fissuras suporta um certo nível de tensão de tração. O concreto adere às barras de armadura e contribui ativamente para a rigidez total da estrutura. Este efeito é conhecido como enrijecimento à tração (“tension stiffening”). Pode ser incorporado ao modelo numérico, de duas maneiras:

- a) Admitindo-se que a perda da resistência à tração do concreto ocorre gradualmente após a fissuração. Isto é equivalente a se considerar o concreto linear com amolecimento (“strain-softening”) em tração.
- b) Modificando-se a curva tensão-deformação do aço.

A modificação da relação tensão-deformação do concreto tracionado proposta por Hinton (1988) foi adotada. Hinton (1988) propôs uma função exponencial para o ramo descendente da curva tensão-deformação conforme a figura 4.9.

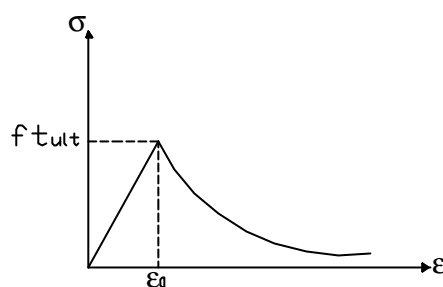


Figura 4.9: Curva tensão-deformação para o concreto tracionado

Admitindo-se que a tensão, através da fissura, é uma função da abertura da fissura, w , a energia de fratura é definida por:

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma(w) dw \quad (4.51)$$

onde G_f representa a energia necessária para separar as duas superfícies da fissura. Conforme o Código Modelo CEB-FIP (1993):

$$G_f = 3 \times 10^{-4} (f_{cm})^{0,7}, [f_{cm}] \text{ em kN/cm}^2 \quad (4.52)$$

O modelo de fissuras distribuídas não considera fissuras individuais, então a largura da fissura, w , deve ser distribuída numa deformação de fissura equivalente, e_c , relacionada por um comprimento característico, l_c . Segundo Hinton (1988), esta relação é feita, considerando-se um volume de controle, V , contendo a fissura com uma área, S , Fig. 4.10. Supõe-se que, uma vez que a fissura esteja aberta, todas as tensões inelásticas façam parte da fissura e o resto do volume continua elástico.

A taxa de energia dissipada na fissura é:

$$\dot{\pi} = \int_S \sigma \dot{w} dS \quad (4.53)$$

Pela hipótese de que o volume de controle fica submetido ao mesmo estado de tensão que a fissura, mas afetado pela deformação equivalente, ϵ_c , a taxa de energia dissipada do volume é:

$$\dot{\pi} = \int_V \sigma \dot{\epsilon}_c dV \quad (4.54)$$

Se a tensão, a deformação e a abertura da fissura forem tomadas como constantes, dentro do volume considerado, então, equacionando-se a taxa de energia de dissipação da fissura com a mesma taxa no volume de controle, obtém-se a relação entre a abertura e a deformação fictícia da fissura:

$$w = (V/S)\epsilon_c = l_c \epsilon_c \quad (4.55)$$

Esta relação define o comprimento característico, como a razão entre o volume de controle e a superfície da fissura.

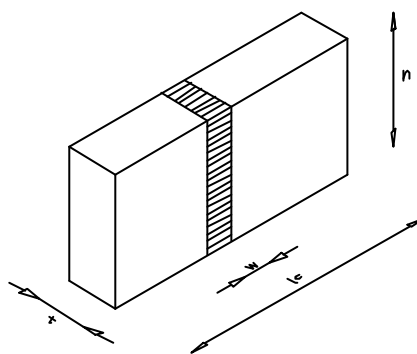


Figura 4.10: Ilustração do comprimento característico em um volume de controle prismático

A curva exponencial, representada pela Fig. 4.9 é calculada por:

$$\sigma = E \epsilon_0 (\exp(-(\epsilon - \epsilon_0) / \alpha)) \quad (4.56)$$

onde:

- E é o módulo de elasticidade longitudinal;

- ε_0 é a deformação de fissuração;
- α é o parâmetro de amolecimento;
- ε é a deformação de tração nominal da zona fissurada.

O parâmetro de amolecimento, α , é determinado pela avaliação da integral (4.53) e pela introdução da relação da abertura da fissura, w , e a deformação fictícia da fissura. Isto leva à:

$$\alpha = \left(G_f - \frac{1}{2} E \varepsilon_0 l_c \right) / E \varepsilon_0 l_c > 0 \quad (4.57)$$

No contexto do método dos elementos finitos, o volume de controle para o monitoramento da fissura é o volume associado a um ponto de integração, no interior de um elemento, representado por dV .

Neste trabalho, o comprimento característico para cada ponto de integração é dado por:

$$l_c = (dV)^{1/3} \quad (4.58)$$

Assim como a tensão normal ao plano da fissura, a tensão paralela ao plano da fissura também sofre uma redução. Duas situações possíveis podem acontecer. Na primeira, a deformação, na direção da fissura, é um encurtamento. Neste caso, admite-se que a tensão correspondente siga o diagrama correspondente a um ensaio uniaxial à compressão, segundo a curva apresentada pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). Por outro lado, se a deformação, na direção analisada, for um alongamento, adota-se uma relação tensão-deformação linear. O limite superior desta relação é a resistência à tração do concreto. Se este limite for atingido, o concreto é suposto fissurado nas duas direções e as tensões, no ponto, passam a serem nulas.

4.5.4 Colaboração do Concreto entre Fissuras

O comportamento carga-deslocamento do concreto estrutural é fortemente influenciado pela interação entre seus dois componentes: o concreto e o aço. A aderência entre esses materiais é que torna possível a transmissão de esforços atuantes.

O efeito de aderência evidencia-se a partir da fissuração do concreto. Quando este fato ocorre, há uma ruptura local do material e suas tensões de tração normais à fissura, que eram transmitidas pelo concreto, passam a ser transmitidas pela armadura. Esta transferência de tensões do concreto para o aço é feita pelos mecanismos de aderência.

A qualidade da aderência é decisiva para a distribuição e para a abertura de fissuras. Ela depende das características das barras da armadura (conformação superficial e diâmetro), da resistência do concreto, da história de carga (especialmente se ocorreram cargas cíclicas) e das tensões normais à superfície da barra.

A incorporação da aderência nos cálculos através do método dos elementos finitos, depende da forma de conectar os elementos de aço aos elementos de concreto. Existem duas maneiras para se modelar esta ligação. Na primeira, usam-se elementos especiais de aderência. Nestes, as propriedades da aderência são modelados por suas relações tensões-deslizamentos. Na Segunda maneira, os elementos de aço e concreto são ligados diretamente. Neste caso, admite-se completa compatibilidade de deformações entre aço e concreto, e modifica-se a lei do material (concreto ou aço), para considerarem-se mecanismos de interação.

A escolha da forma de modelar a aderência depende do problema específico a ser analisado. O uso de elementos especiais de aderência requer grande esforço computacional. Portanto, seu emprego só se justifica nos casos em que as tensões de aderência são de particular interesse, como no estudo de zonas de ancoragem.

Neste trabalho, admitiu-se aderência perfeita entre o concreto e o aço, modelou-se indiretamente este efeito, pela introdução de um ramo descendente suave na relação tensão-deformação do concreto tracionado (tension stiffening).

Para obtenção da tensão no concreto fissurado, deve-se determinar as direções principais de deformações, uma vez que a fórmula (4.56) aplica-se no sistema local dos eixos materiais. Determinam-se as deformações principais através de

$$\varepsilon_1 = \frac{2\sqrt{J_2'}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \left(\theta' + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{I_1'}{3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2\sqrt{J_2'}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \theta' + \frac{I_1'}{3}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{2\sqrt{J_2'}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \left(\theta' + \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{I_1'}{3} \quad (4.59)$$

onde

$$I_1' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\begin{aligned} J_2' &= \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] \\ &= \frac{1}{6} [(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2] + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 \end{aligned}$$

$$J_3' = (\varepsilon_1 - \varepsilon_m)(\varepsilon_2 - \varepsilon_m)(\varepsilon_3 - \varepsilon_m)$$

$$\varepsilon_m = \frac{I_1'}{3}$$

$$\theta' = \frac{1}{3} \arcsin \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3'}{J_2'^{3/2}} \right) \quad (4.60)$$

Calcula-se, então, a direção da máxima deformação principal de tração, que forma um ângulo α com o eixo \mathbf{x} .

Após, determinam-se as componentes locais de tensões através da matriz de rotação local

$$\mathbf{R}^L = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & (\sin 2\alpha)/2 \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -(\sin 2\alpha)/2 \\ -\sin 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

obtendo as componentes locais de tensão pré-multiplicando (5.61) pelo vetor de tensões globais

$$\{\sigma^L\} = \{\mathbf{R}^L\} \{\sigma^G\} \quad (4.62)$$

onde $\{\sigma^G\}$ são as componentes globais de tensões.

No sistema local, aplica-se a equação (4.56), para calcular as tensões normais. A componente tangencial local é $\tau_{xy}^L = G_c \gamma_{xy}^L$, onde G_c é o módulo de elasticidade transversal reduzido a ser definido na seção 4.5.5. Com as tensões do ponto fissurado ajustadas, retomam-se as componentes de tensões no sistema global, onde a matriz de rotação global é

$$\mathbf{R}^G = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ (\sin 2\alpha)/2 & -(\sin 2\alpha)/2 & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

voltando as tensões globais

$$\{\sigma^G\} = \{\mathbf{R}^G\} \{\sigma^L\} \quad (4.64)$$

4.5.5 Rigidez Transversal do Concreto Fissurado

Resultados experimentais indicam que uma quantidade considerável de tensão tangencial pode ser transferida através das superfícies da fissura. Em concreto simples, o principal mecanismo de transferência de esforços transversais é o engrenamento dos agregados e as principais variáveis envolvidas são o tamanho do agregado e a sua granulometria. Em concreto estrutural, o efeito de pino das barras de armadura que atravessam a fissura desempenha um importante papel, sendo as principais variáveis a taxa de armadura, o tamanho da barra e o ângulo entre o aço e a fissura. Ambos mecanismos são controlados pela abertura das fissuras, sendo a capacidade de transferência de corte reduzida com o aumento da abertura da fissura.

A inclusão direta destes mecanismos num modelo de fissuras distribuídas é complexa. Uma aproximação simplificada para considerar esta situação é adotar um valor apropriado para o módulo de elasticidade transversal do concreto G_C , para o ponto de integração, fissurado em uma direção.

Os mecanismos acima mencionados não podem ser incluídos diretamente no modelo de fissuras distribuídas. Nos modelos de fissura fixa, tais mecanismos podem ser aproximados, conforme sugere Cervenka (1985), reduzindo-se o valor do módulo de elasticidade transversal do concreto, G , através de um fator β , que varia entre 0 e 1. Desta forma, o novo valor para o módulo de elasticidade transversal, G_C , é dado por:

$$G_c = \beta G \quad (4.65)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado.

Em diversas análises, um valor constante foi atribuído a β , mas o mais realista seria relacioná-lo com a deformação normal ao plano da fissura, ϵ_t . Cervenka (1985) apresentou a seguinte fórmula para β , também utilizada por Hinton (1988), e que foi adotada neste trabalho:

$$\beta = 1 - (\epsilon_t / 0,005)^{k_1} \quad (4.66)$$

sendo k_1 um parâmetro igual a 0,075.

4.6 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO

As barras de aço resistem apenas a esforços axiais. Desta forma, um modelo uniaxial é suficiente para este material. Os aços para armadura passiva são de dois tipos: aços com dureza natural ou aços de classe A e aços encruados a frio ou classe B. Para o aço então se utiliza gráfico bilinear. Para o aço de dureza natural, que possui comportamento elastoplástico perfeito, adotou-se um diagrama bilinear da NBR-6118 (1980), conforme a figura 4.11.

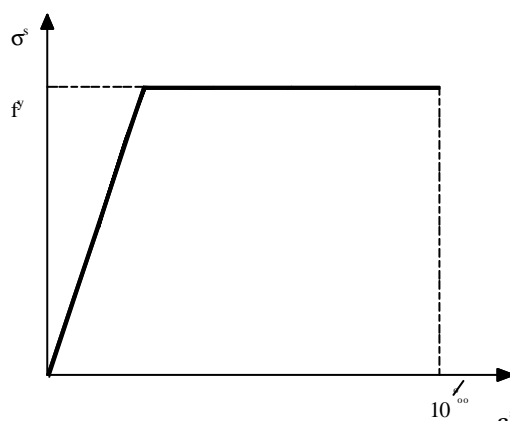


Figura 4.11: Diagrama tensão-deformação para o aço de dureza natural

O comportamento do aço é separado em dois regimes bem definidos: regime elástico linear até atingir a tensão de escoamento f_{yd} e um regime plástico com tensão $\sigma_s = f_y$ e endurecimento nulo ($H'_s = 0$).

Para o aço encruado a frio ou de classe B, considera-se um comportamento elastoplástico com endurecimento. Por simplificação, adotou-se um diagrama tensão-deformação com endurecimento linear, conforme a figura 4.12. Ao atingir o limite de escoamento, as deformações no aço têm um endurecimento definido por

$$H'_s = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon_p} = \frac{\Delta\sigma_s}{\Delta\varepsilon_p} = \frac{0,15f_y}{\left(10\% - \frac{0,85f_y}{E_s}\right) - \frac{0,15f_y}{E_s}}$$

$$H'_s = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon_p} = \frac{\Delta\sigma_s}{\Delta\varepsilon_p} = \frac{0,15f_y}{\left(10\% - \frac{0,85f_y}{E_s}\right) - \frac{0,15f_y}{E_s}}$$

$$H'_s = \frac{0,15f_y}{10\% - \frac{f_y}{E_s}} \quad (4.67)$$

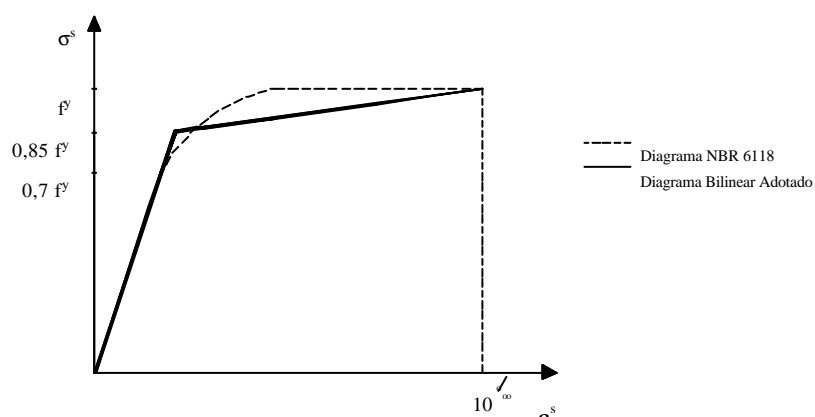


Figura 4.12: Diagrama tensão-deformação para o aço encruado a frio

5 ESTRUTURA DO PROGRAMA ELASTOPLÁSTICO

5.1 INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos se constitui na ferramenta mais adequada para solucionar problemas complexos de engenharia, que não possuam solução analítica. Para a implementação computacional deste método é necessária a utilização de uma linguagem que possua grande capacidade de processamento numérico, aliada a ferramentas que facilitem a geração de gráficos, para tornar a interface entre usuário e computador mais amigável.

Neste trabalho, o sistema computacional foi desenvolvido utilizando a linguagem MATLAB. O MATLAB (**Matriz Laboratory**), que teve sua primeira versão em 1984 é um programa de computação numérica e científica de alto nível. Este programa utiliza um ambiente integrado de modelagem de sistemas e algoritmos, ideal para implementação de projetos complexos. Por esta razão vem sendo adotado como ferramenta de desenvolvimento de programas computacionais em muitos centros de pesquisa. Acima de 500.000 cientistas, engenheiros, professores e estudantes no mundo todo, têm usado o MATLAB como instrumento básico de trabalho nas mais variadas atividades.

O MATLAB é o núcleo de um ambiente de computação numérica, baseado em matrizes, que integra funções de tratamento numérico de alta performance e sofisticados recursos de geração de gráficos para visualização de dados.

O desenvolvimento de algoritmos na linguagem de programação do MATLAB é, em muitas aplicações, tão eficiente quanto qualquer outra linguagem de programação tradicional, como **C/C++**, **Visual Basic** ou **Fortran**.

5.2 ESTRUTURA DO PROGRAMA

O programa, desenvolvido para análise de estruturas de concreto armado submetidas a estado plano de deformações, recebeu o nome de **Elastplast**. O programa principal chama uma série de subrotinas, chamadas de funções pelo MATLAB, que são responsáveis por executar as mais diversas operações. Estas funções, por sua vez, chamam outras funções. Algumas funções e suas respectivas operações serão resumidamente descritas nesta seção. A figura 5.1 apresenta as principais funções que compõem o programa.

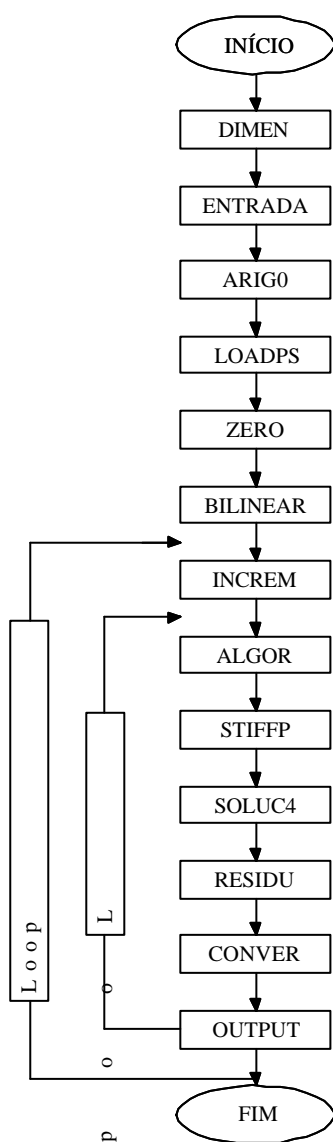


Figura 5.1: Estrutura do programa desenvolvido

5.2.1 Função ENTRADA

Esta função lê os dados relativos à estrutura tal como coordenadas, conectividades, carregamento e propriedades dos materiais.

5.2.2 Função ARIG0

Calcula as coordenadas naturais dos nós da armadura.

5.2.3 Função LOADPS

Esta função determina os valores das forças nodais. Os três tipos de cargas considerados são: cargas nodais, carregamento gravitacional e carregamento distribuído nas bordas.

Para problemas de deformações planas a direção em que a força gravitacional atua não coincide necessariamente com os eixos coordenados. No entanto a direção em que a gravidade atua deve ser definida, conforme a figura 5.2, por um ângulo θ que a força gravitacional forma com o eixo positivo dos y .

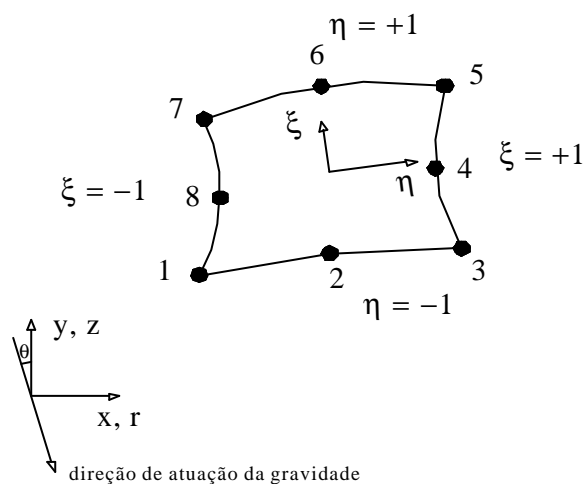


Figura 5.2: Especificação do eixo de gravidade

A intensidade do carregamento é definida pela aceleração da gravidade g . As forças nodais para o nó i de um elemento são então dadas por

$$\begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{bmatrix} = \int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} \cdot \rho \cdot g \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} d\Omega \quad (5.1)$$

onde ρ é massa específica do material.

Integrando numericamente, a expressão acima se torna

$$\begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{bmatrix}^{(e)} = \sum_{n=1}^{n_{\text{gaus}}} \sum_{m=1}^{n_{\text{gaus}}} \rho \cdot g \cdot t \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} \cdot N_i(\xi_n, \eta_m) \cdot W_n W_m \det J \quad (5.2)$$

Qualquer elemento pode apresentar, ainda, um carregamento distribuído por unidade de comprimento na direção normal e tangencial, como mostrado na figura 5.3. Estas forças distribuídas podem variar independentemente ao longo de cada borda. Para os elementos finitos, considerados neste trabalho, pode-se ajustar um carregamento quadrático. A variação é definida pelos valores normais e tangenciais prescritos para três nós da borda onde as cargas são aplicadas. As forças nodais para um nó i podem ser calculadas por

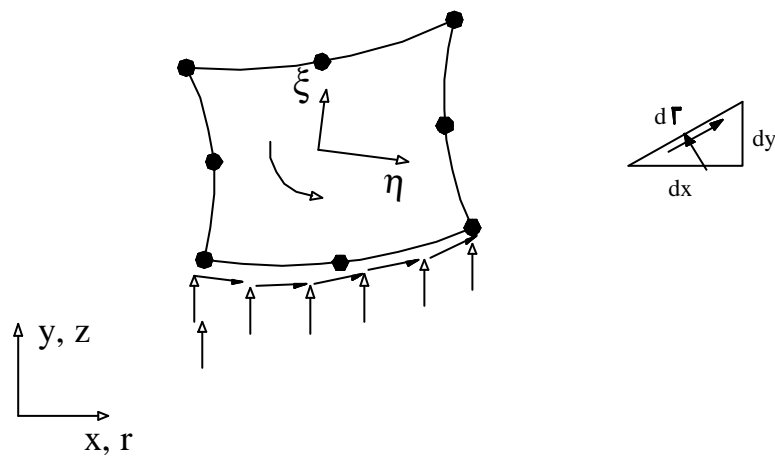


Figura 5.3: Cargas normal e tangencial distribuídas na borda de um elemento

$$P_{xi}^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} N_i^{(e)} \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi$$

$$P_{yi}^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} N_i^{(e)} \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (5.3)$$

onde p_n e p_t são as cargas distribuídas normais e tangenciais, respectivamente. A integração é tomada ao longo da borda do elemento $\Gamma^{(e)}$, como mostrado na figura 5.3.

5.2.4 Função STIFFP

Esta função avalia a matriz de rigidez do concreto e do solo. Superpõe a matriz de rigidez da armadura à matriz de rigidez do concreto. Dentro desta função há uma função chamada ARIG responsável pelo cálculo da matriz de rigidez da armadura. A figura 5.4 mostra a estrutura da função STIFFP.

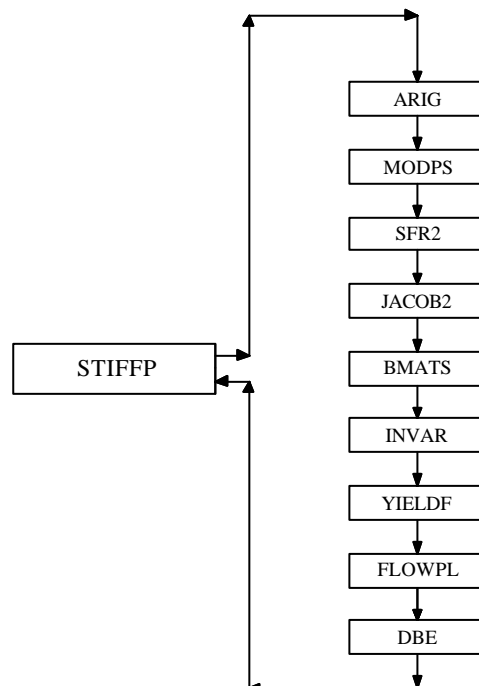


Figura 5.4: Estrutura da função STIFFP

5.2.4.1 Função ARIG

Esta função avalia a matriz de rigidez dos segmentos de armadura.

5.2.4.2 Função MODPS

Esta função avalia a matriz de elasticidade D .

5.2.4.3 Função SFR2

Esta função avalia as funções de forma e suas derivadas relativas às coordenadas normalizadas.

5.2.4.4 Função JACOB2

Esta função calcula, para as coordenadas normalizadas ξ_p, η_p dos pontos de Gauss, as seguintes quantidades:

- Coordenadas cartesianas dos pontos de Gauss
- Matriz Jacobiana
- Determinante da Matriz Jacobiana
- A inversa da Matriz Jacobiana
- Derivadas Cartesianas das funções de forma.

5.2.4.5 Função BMATPS

Esta função avalia a matriz B de relações deformações-deslocamentos.

5.2.4.6 Função INVAR

Esta função aplica os critérios de plastificação e ruptura aos elementos finitos de concreto e solo.

5.2.4.7 Função YIELDF

Esta função determina o vetor de fluxo \mathbf{a} definido na teoria elastoplástica.

5.2.4.8 Função FLOWPL

Esta função avalia o vetor plástico \mathbf{d}_p para estado plano de deformações. Também está implementada para situações de tensões no plano e sólidos axissimétricos.

5.2.5 Função RESIDU

Avalia as forças nodais equilibradas correspondentes aos campos de tensões. A figura 5.5 mostra o fluxograma associado a esta função. Avalia tensões uniaxiais elastoplásticas nos segmentos de armadura. Avalia tensões elastoplásticas nos pontos de Gauss dos elementos de solo. Avalia tensões elastoplásticas, fissuração e esmagamento nos pontos de Gauss dos elementos de concreto.

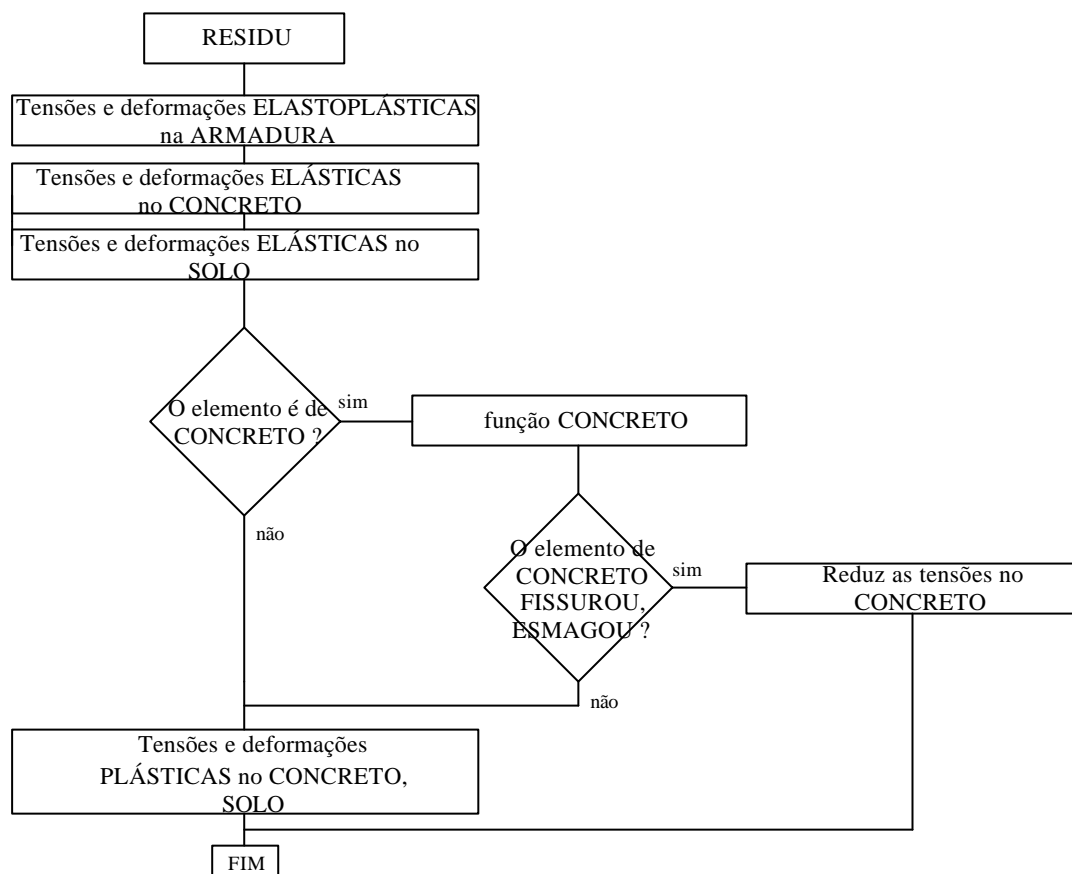


Figura 5.5: Fluxograma da função RESIDU

5.2.6 Função CONVER

Esta função verifica o critério de convergência.

5.2.7 Função OUTPUT

Imprime em arquivo de texto as reações vinculares, tensões, deformações e deslocamentos.

5.3 ENTRADA DE DADOS

A entrada de dados do programa **elastplast** é via arquivo de texto. Este arquivo pode ser editado em editor de texto tipo Word, Wordpad ou no próprio editor do MATLAB. O programa tem uma função específica para fazer a leitura de todos os dados do arquivo de entrada e transformá-los em variáveis numéricas, texto (string), vetores e matrizes.

5.4 INTERFACE GRÁFICA

O MATLAB possui uma ferramenta para facilitar a construção da interface gráfica, fundamental para apreciação dos resultados do programa **elastplast**. O GUIDE é a ferramenta que utiliza uma interface gráfica, o GUI (Graphical User Interface), para criar a interface gráfica do programa.

Para o programa **elastplast** foram criadas seis telas iterativas de resultados. Na seção que segue serão apresentadas estas telas para um exemplo ilustrativo e suas funções serão brevemente explicadas.

5.4.1 Malha de elementos finitos de concreto, solo e armadura

A figura 5.6 exibe a tela com a malha de elementos finitos de concreto, solo e armadura.

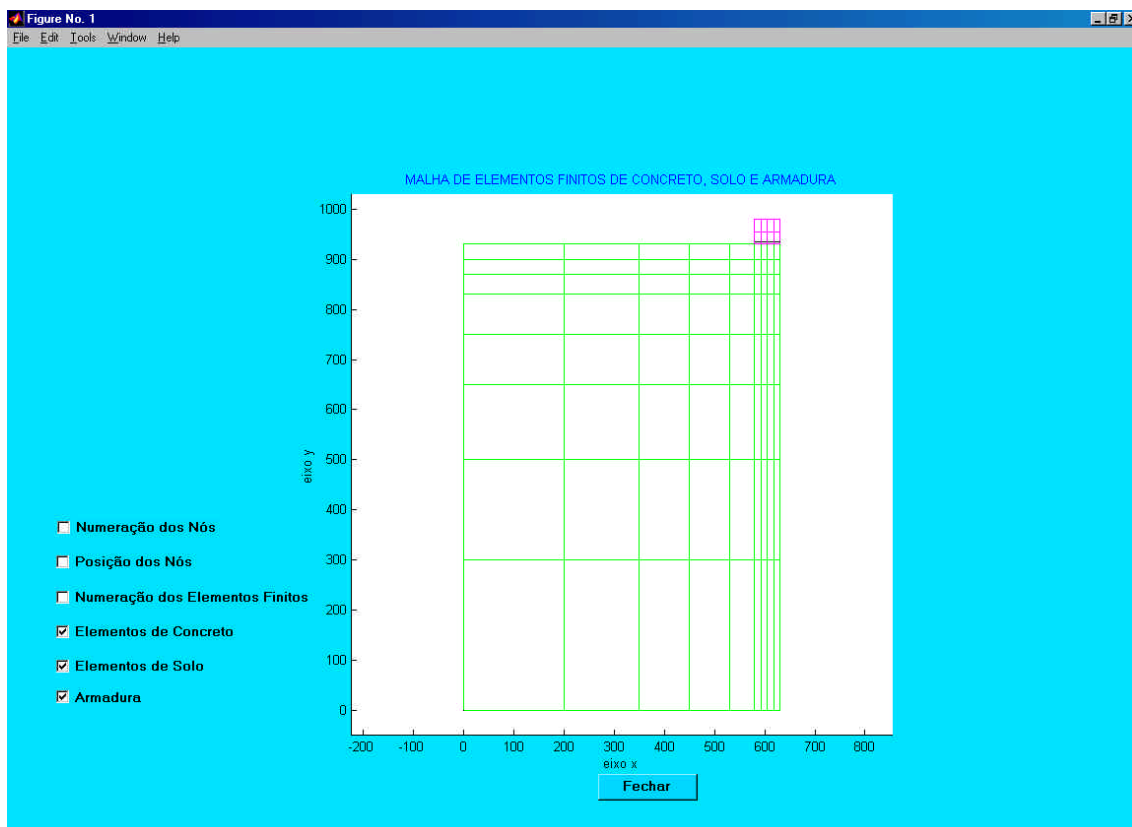


Figura 5.6: Malha de elementos finitos de concreto, solo e armadura

Existem seis caixas de checagem no canto esquerdo na parte inferior da tela.

5.4.1.1 Caixa de checagem “Numeração dos Nós”

É uma caixa do tipo ligar/desligar, que exibe ou não a numeração de todos os nós da malha.

5.4.1.2 Caixa de checagem “Posição dos Nós”

Esta caixa exibe as posições dos nós dos elementos finitos bidimensionais.

5.4.1.3 Caixa de checagem “Numeração dos Elementos Finitos”

Esta caixa mostra a numeração de todos elementos bidimensionais que compõem a malha.

5.4.1.4 Caixa de checagem “Elementos de Concreto”

Exibe a malha de elementos finitos de concreto na cor magenta.

5.4.1.5 Caixa de checagem “Elementos de Solo”

Exibe a malha de elementos finitos de solo na cor verde.

5.4.1.6 Caixa de checagem “Armadura”

Exibe as barras de armadura na cor preta.

5.4.2 Malha de elementos finitos deformada

Esta tela apresenta a estrutura na configuração deformada para os diferentes incrementos de carga. A figura 5.7 apresenta esta tela. No lado esquerdo da tela existem cinco botões. Os três primeiros botões, observados de cima para baixo, são caixas de checagem. O quarto é uma caixa de seleção também chamada de ‘pop up menu’. Esta caixa de seleção apresenta uma lista de incrementos na qual apenas um incremento pode ser selecionado de cada vez. O quinto e último é do tipo caixa de edição, é um botão iterativo em que o usuário entra com um valor e uma resposta é retornada na tela, neste caso o usuário digita o fator de majoração desejado e a deformada é apresentada com um tamanho correspondente.

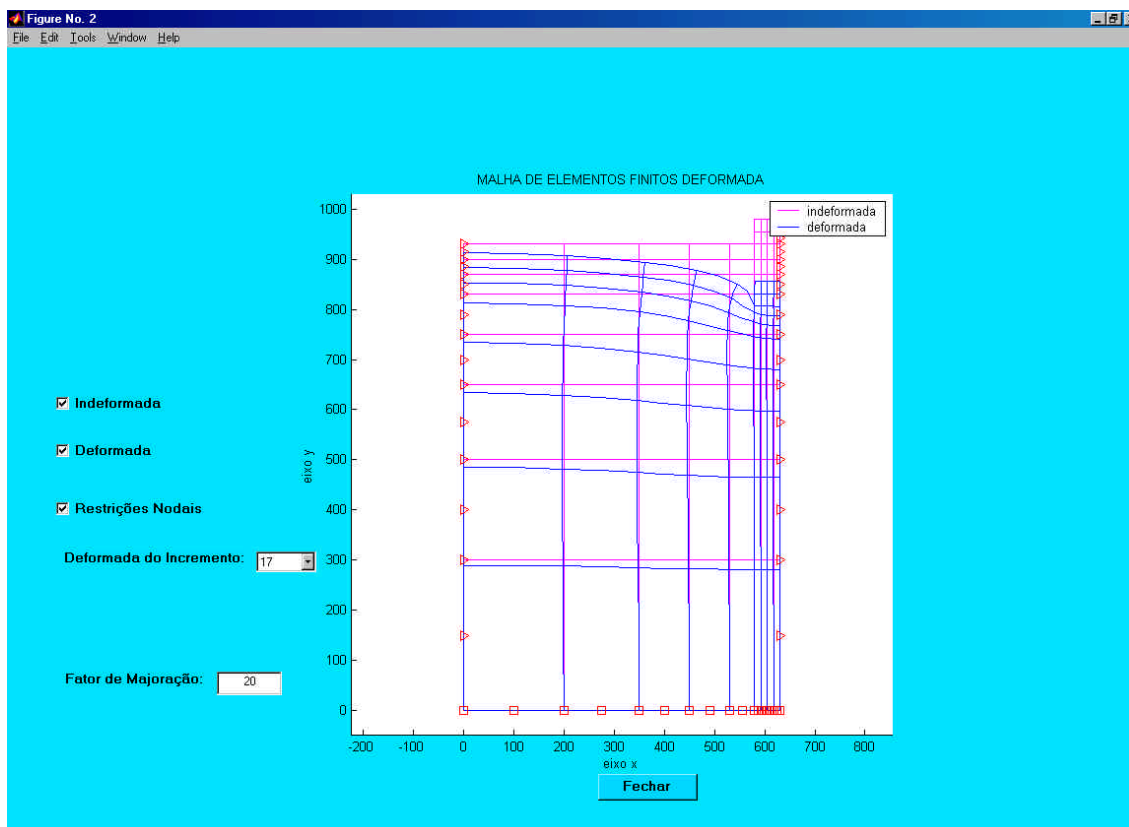


Figura 5.7: Malha de elementos finitos deformada

5.4.2.1 Caixa de checagem “Indeformada”

Exibe ou não a malha indeformada. Deve-se observar que, nesta tela, não há distinção de cor entre os elementos de concreto e de solo. A malha indeformada é na cor magenta.

5.4.2.2 Caixa de checagem “Deformada”

Esta caixa exibe a malha deformada de acordo com o incremento de carga corrente e o fator de carga especificado. A cor para a malha deformada é azul.

5.4.2.3 Caixa de checagem “Restrições Nodais”

Esta caixa mostra as restrições nodais nos nós. Se a restrição for uma pequena caixa vermelha, significa que aquele nó tem o movimento restringido nas duas direções. Caso a restrição seja um pequeno triângulo vermelho, indica que o deslocamento está restringido na direção perpendicular a base do triângulo.

5.4.2.4 Botão “Deformada do Incremento”

Exibe uma lista com todos os incrementos de carga. Ao escolher um incremento qualquer das possíveis opções, será atualizada a deformada correspondente a este incremento.

5.4.2.5 Caixa de edição “Fator de Majoração”

O usuário escolhe um valor para o fator de majoração das deformações e a tela amplia os deslocamentos para que eles se tornem visíveis para o usuário, normalmente as deformações são muito pequenas e necessitam ser majoradas para facilitar sua compreensão.

5.4.3 Distribuição de tensões no concreto

Esta é uma das principais telas, e apresenta a distribuição de tensões sobre os elementos de concreto. Ao lado do gráfico de tensões é exibida uma barra de cores para que possam ser retirados do gráfico os valores numéricos de tensões.

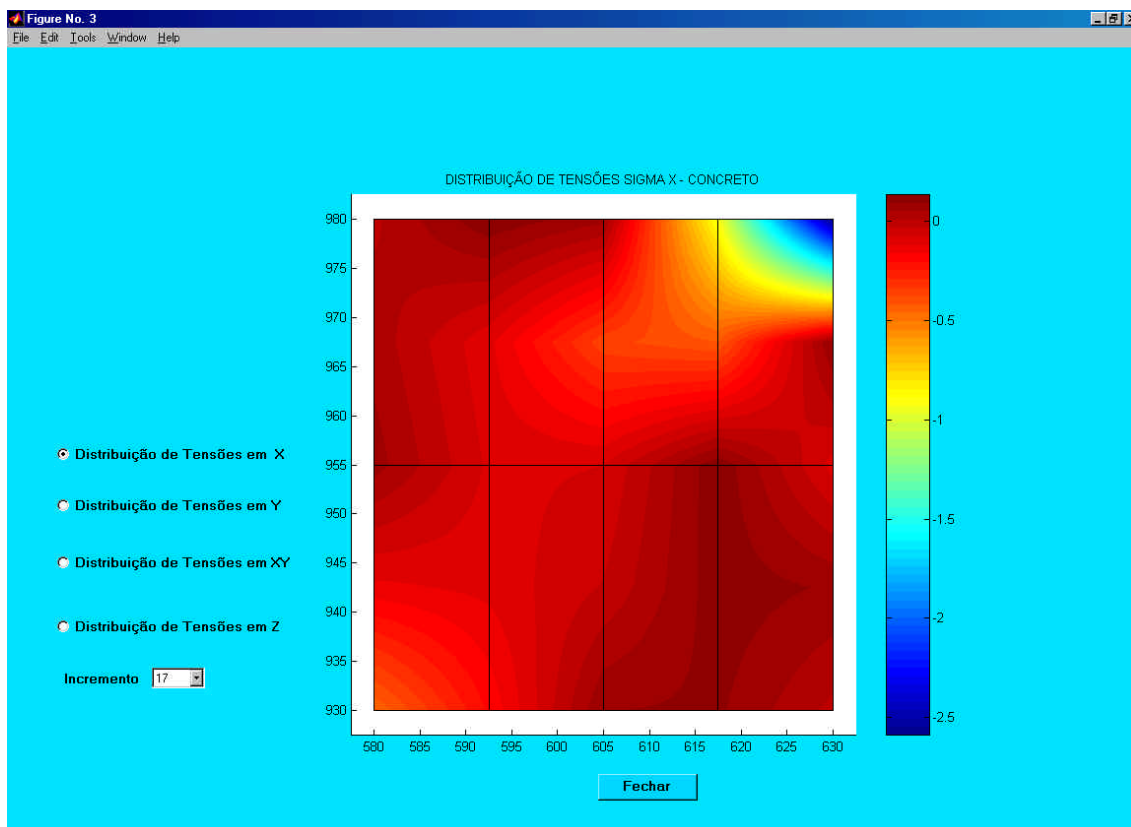


Figura 5.8: Distribuição de tensões no concreto

À esquerda do gráfico existem cinco caixas de opções. Os quatro primeiras são do tipo ‘radio button’, no qual apenas um pode ser selecionado de cada vez sendo a correspondente distribuição de tensões desenhada na tela. O quinta caixa é do tipo ‘menu pop up’. Segue a descrição simplificada das funções de cada caixa.

5.4.3.1 Botão “Distribuição de Tensões em X”

Quando selecionado este botão, o programa apresenta as tensões normais no concreto na direção x .

5.4.3.2 Botão “Distribuição de Tensões em Y”

Quando selecionado este botão, o programa apresenta as tensões normais no concreto na direção y .

5.4.3.3 Botão “Distribuição de Tensões em XY”

Este botão apresenta as tensões tangenciais, que ocorrem concreto no plano **xy**.

5.4.3.4 Botão “Distribuição de Tensões em Z”

Quando selecionado este botão, o programa apresenta as tensões normais no concreto na direção **z**.

5.4.3.5 Caixa de Edição “Incremento”

Exibe uma lista de incrementos. As tensões que serão graficadas se referem ao incremento especificado na lista.

5.4.4 Distribuição de tensões no solo

Esta é uma das principais telas, e apresenta a distribuição de tensões sobre os elementos de solo. Ao lado do gráfico de tensões é exibida uma barra de cores para que possam ser retirados do gráfico os valores numéricos de tensões. Os botões programados para esta tela são idênticos ao da tela “Distribuição de Tensões no Concreto”.

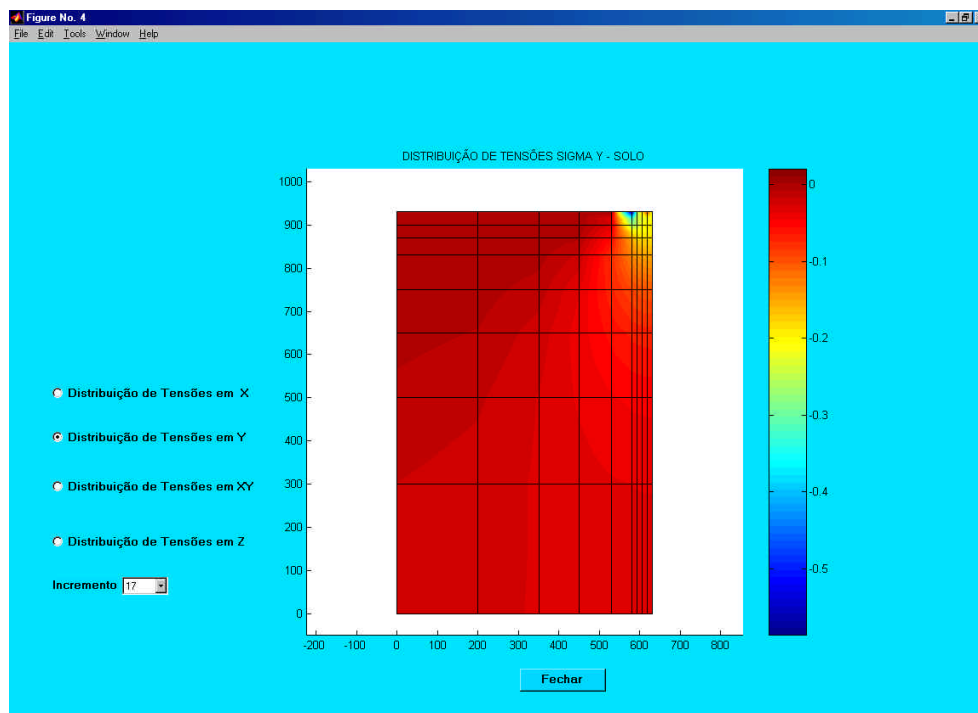


Figura 5.9: Distribuição de tensões no solo

5.4.5 Distribuição de tensões na armadura

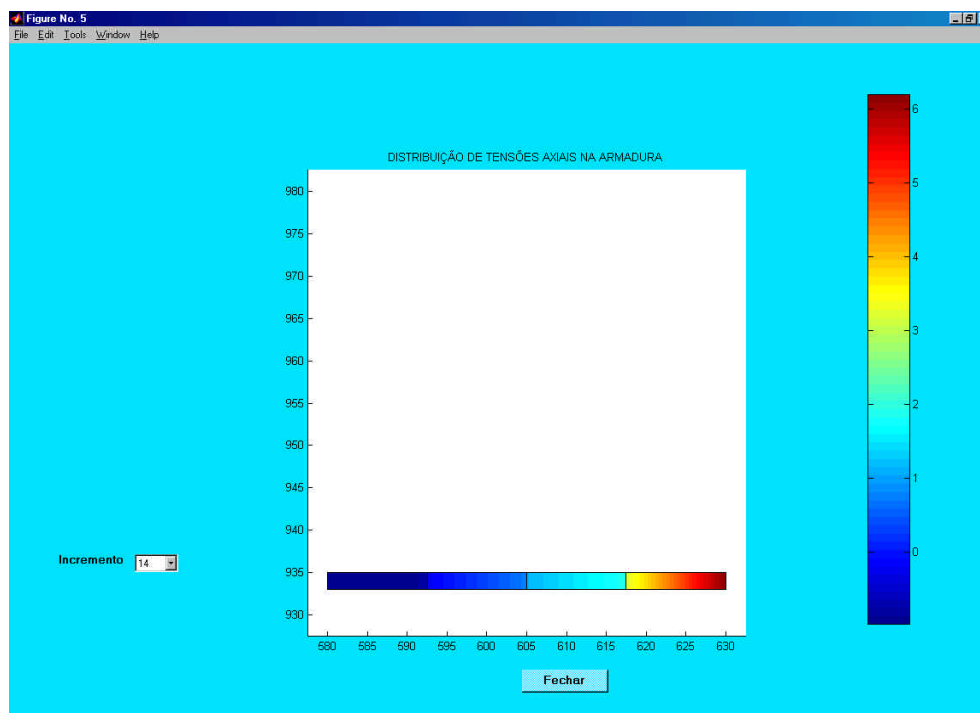


Figura 5.10: Distribuição de tensões axiais na armadura

Esta tela é responsável por desenhar as tensões axiais na armadura. Os valores numéricos de tensão na armadura podem ser obtidos no mapa de cores ao lado do gráfico de tensões. Esta tela apresenta apenas uma caixa de edição na qual o usuário escolhe em qual incremento de carga quer visualizar as tensões axiais na armadura.

5.4.6 Malha de elementos finitos com pontos fissurados/esmagados

Esta tela desenha a malha de concreto e o estado corrente dos pontos de Gauss.

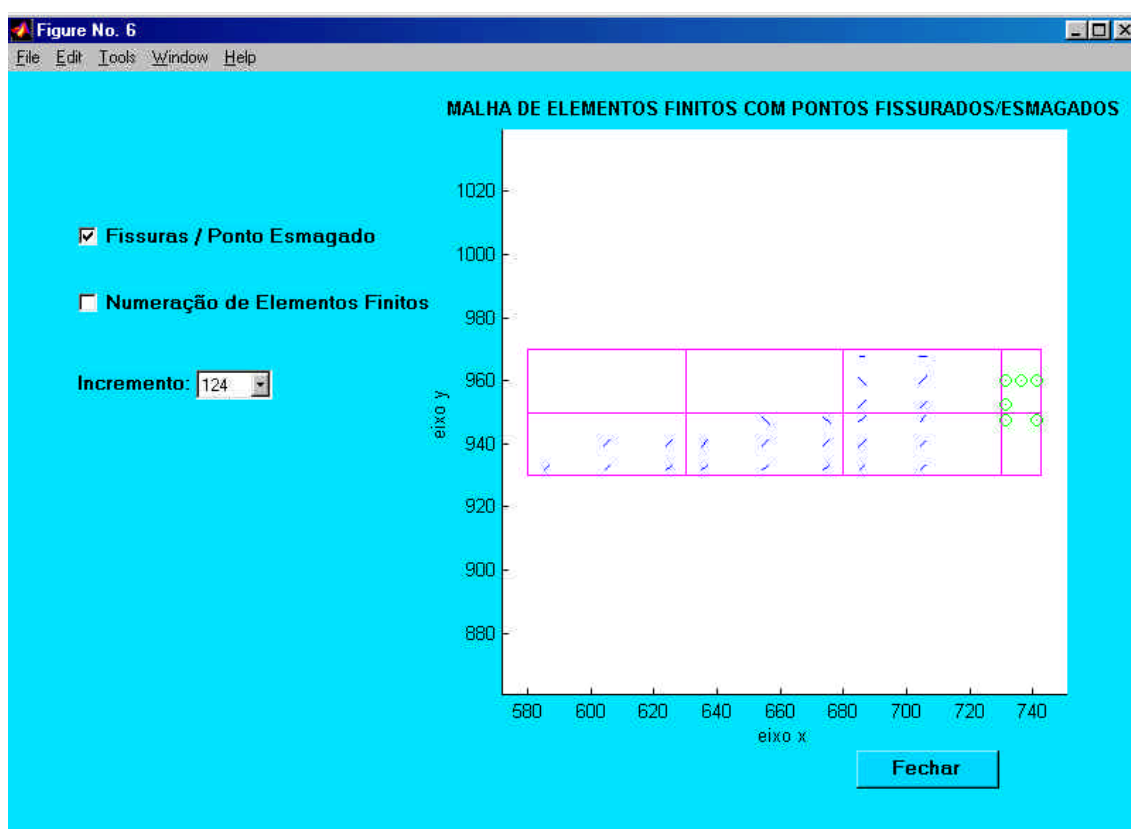


Figura 5.11: Malha de elementos finitos com pontos fissurados/esmagados

5.4.6.1 Caixa de checagem “Fissuras/Ponto Esmagado”

Quando selecionada, desenha as fissuras ou pontos esmagados do incremento corrente. Se o ponto de Gauss estiver íntegro, o ponto de integração não será representado, caso ocorra a fissuração do ponto ele será representado por uma linha azul na direção da fissuração e se ocorrer o esmagamento o ponto será representado por um círculo verde.

5.4.6.2 Caixa de checagem “Numeração dos Elementos Finitos”

Quando selecionado mostra a numeração de elementos finitos na malha de concreto.

5.4.6.3 Caixa de Edição “Incremento”

Exibe uma lista com todos os incrementos de carga. Ao escolher um incremento qualquer das possíveis opções, será atualizado o estado dos pontos de Gauss (íntegro, fissurado ou esmagado) correspondente a este incremento.

5.4.7 Malha de elementos finitos de solo com pontos plastificados

Esta é a última tela gerada e desenha a malha de solo, marcando os pontos de Gauss plastificados.

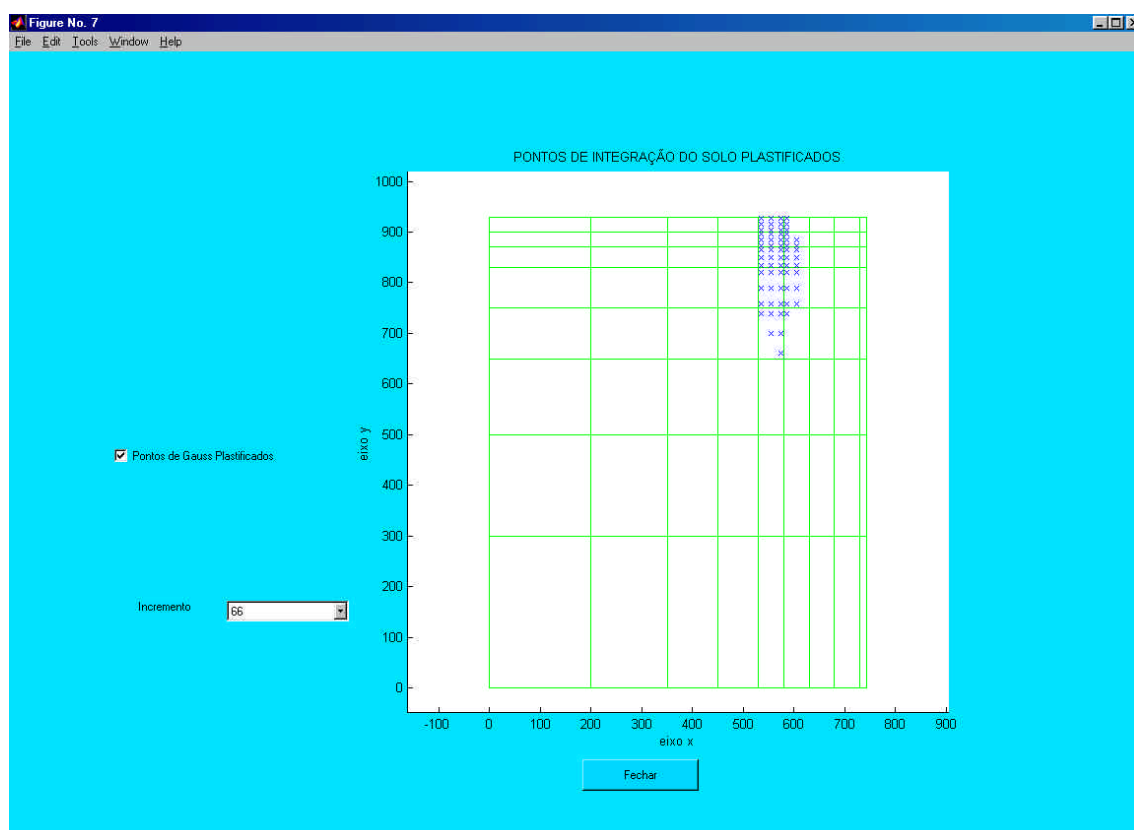


Figura 5.12: Malha de elementos finitos com pontos plastificados

5.4.7.1 Caixa de checagem “Pontos de Gauss Plastificados”

Quando selecionada desenha os pontos plastificados do incremento corrente. Se o ponto de Gauss estiver inteiro, o ponto não será marcado.

5.4.7.2 Caixa de Edição “Incremento”

Exibe uma lista com todos os incrementos de carga. Ao escolher um incremento qualquer da lista, a representação será atualizada para o incremento escolhido.

6 VALIDAÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

6.1 GENERALIDADES

O programa computacional desenvolvido teve por finalidade simular elementos estruturais submetidos a estado plano de deformações (E.P.D). Para tal, buscou-se representar por modelos o comportamento real de fundações superficiais de concreto armado, apoiadas sobre solos de diferentes rigidezes. Embora os materiais possam ser analisados, considerando o comportamento elastoplástico, é importante realizar análises lineares para evidenciar a viabilidade do estudo. São raros os exemplos experimentais de fundações superficiais com resultados de distribuição de tensões nos materiais constituintes, tensões na interface da fundação-solo e distribuição de deformações, que possam ser tomados como referência para uma verificação do programa computacional.

Neste capítulo, verificam-se resultados numéricos para situações de estado plano de deformações, considerando-se os materiais com comportamento elástico linear. Nos capítulos seguintes, o programa **Elastplast**, será utilizado para simular situações mais complexas, levando em consideração a formação de fissuras no concreto, a plastificação do solo e o escoamento das armaduras.

6.2 DEFINIÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

Com o intuito de definir o nível de discretização a ser adotado neste trabalho, realizou-se um estudo comparativo entre malhas de setenta e dois e cento e trinta elementos (figura 6.1). Nas duas discretizações foram utilizados elementos finitos quadráticos de oito nós. O carregamento distribuído vertical foi aplicado nas bordas dos dois elementos finitos do canto superior direito da malha, com aproveitamento da simetria.

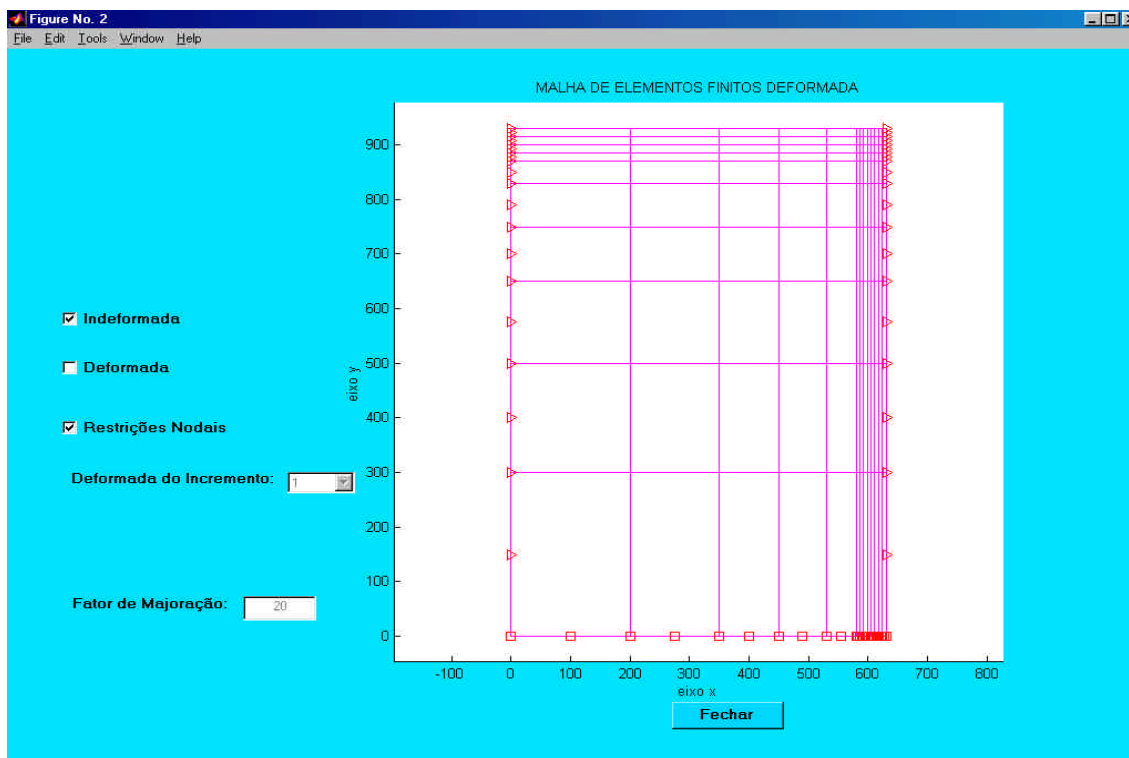


Figura 6.1: Malha de elementos finitos refinada

Após uma série de análises elásticas, observou-se que a malha de centro e trinta elementos de solo não ofereceu vantagens significativas com relação a uma malha menos refinada de setenta e dois elementos.

Por esta razão, nos capítulos 7 e 8, utilizou-se uma malha de oitenta elementos finitos, sendo setenta e dois elementos de solo e oito elementos finitos de concreto. Principalmente nas análises numéricas não-lineares, apresentadas no capítulo 8, a malha menos refinada, traz ganhos significativos em relação ao tempo de processamento. O tempo gasto nas análises foi entre duas e quatro vezes inferior sem perdas importantes de precisão de resultados.

Procurou-se sempre concentrar um maior número de elementos finitos próximo à região de aplicação do carregamento, região onde as tensões são importantes, com o afastamento pode-se usar sem perdas de precisão significativas, elementos finitos maiores.

Outro aspecto importante na escolha da malha de elementos finitos é o tamanho da região de solo modelada. No contorno desta região, são introduzidas restrições nodais, conforme mostrado na figura 6.1 (quadrados e triângulos em vermelho). Embora não existam critérios gerais, que digam a que profundidade e afastamento os deslocamentos no solo devam

ser restringidos, deve-se ter distância suficiente para que as tensões no contorno da região discretizada sejam aproximadamente nulas.

Zienkiewicz (1989) sugere que se tenha uma malha com profundidade cinco vezes a maior dimensão em planta da sapata e distância horizontal de dez vezes a maior dimensão em planta da sapata. Em todos os exemplos analisados, escolheu-se a malha procurando atender este critério.

6.3 COMPROVAÇÃO DOS RESULTADOS DO PROGRAMA

Nesta seção será apresentada uma comparação de resultados numéricos, obtidos pelo programa computacional, frente soluções elásticas lineares, para solos submetidos a estado plano de deformações, encontradas em Poulos e Davis (1974).

Poulos e Davis (1974) propõem soluções analíticas para a distribuição de tensões correspondente a carregamentos uniformemente distribuídos sobre solos. Nestas soluções, considera-se que este carregamento atua em uma faixa infinita, conforme a hipótese clássica de estado plano de deformações, conforme a figura 6.2.

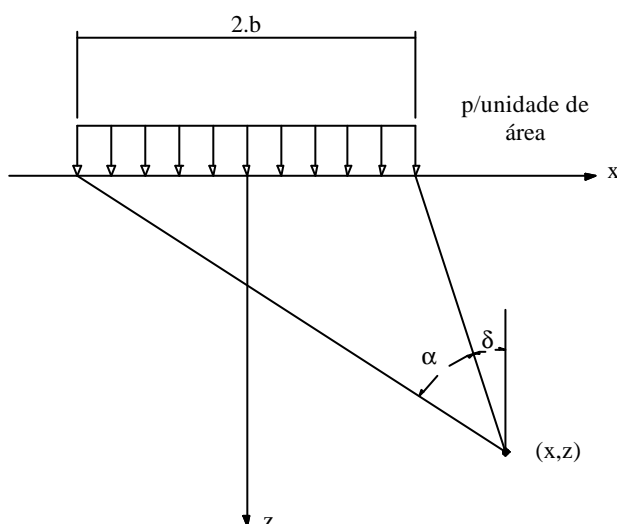


Figura 6.2: Carregamento em uma faixa infinita

As tensões verticais \mathbf{s}_y , as tensões horizontais \mathbf{s}_x , as tensões cisalhantes \mathbf{t}_{xy} e as tensões perpendiculares ao plano analisado \mathbf{s}_z podem ser expressas analiticamente como

$$\sigma_x = \frac{p}{\pi} [\alpha - \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha + 2\delta)] \quad (6.1)$$

$$\sigma_y = \frac{p}{\pi} [\alpha + \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha + 2\delta)] \quad (6.2)$$

$$\tau_{xz} = \frac{p}{\pi} \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\alpha + 2\delta) \quad (6.3)$$

$$\sigma_z = \frac{2p}{\pi} \nu \alpha \quad (6.4)$$

onde p é o carregamento uniforme aplicado ao solo por unidade de área, ν é o coeficiente de Poisson do solo, α e δ são os ângulos indicados na figura 6.2.

6.3.1 Tensões σ_y

Nesta seção, apresenta-se a distribuição de tensões verticais \mathbf{S}_y na figura 6.3, com as curvas de isotensão formando bulbos de pressão. As tensões, próximas aos nós vinculados, são aproximadamente nulas. Estas curvas de isotensão são comumente encontradas na bibliografia e são mostradas na figura 6.4(b), comparando-se com a distribuição de tensões \mathbf{S}_y , obtida numericamente. Na figura 6.5, apresenta-se um gráfico da profundidade y pelas tensões \mathbf{S}_y elásticas no solo, determinadas pelo programa computacional **Elastplast** e pela solução analítica da equação 6.2. As tensões estão normalizadas com respeito a tensão média aplicada. As tensões são de compressão embora apareçam em módulo no solo. Os resultados, como se pode observar, são muito próximos.

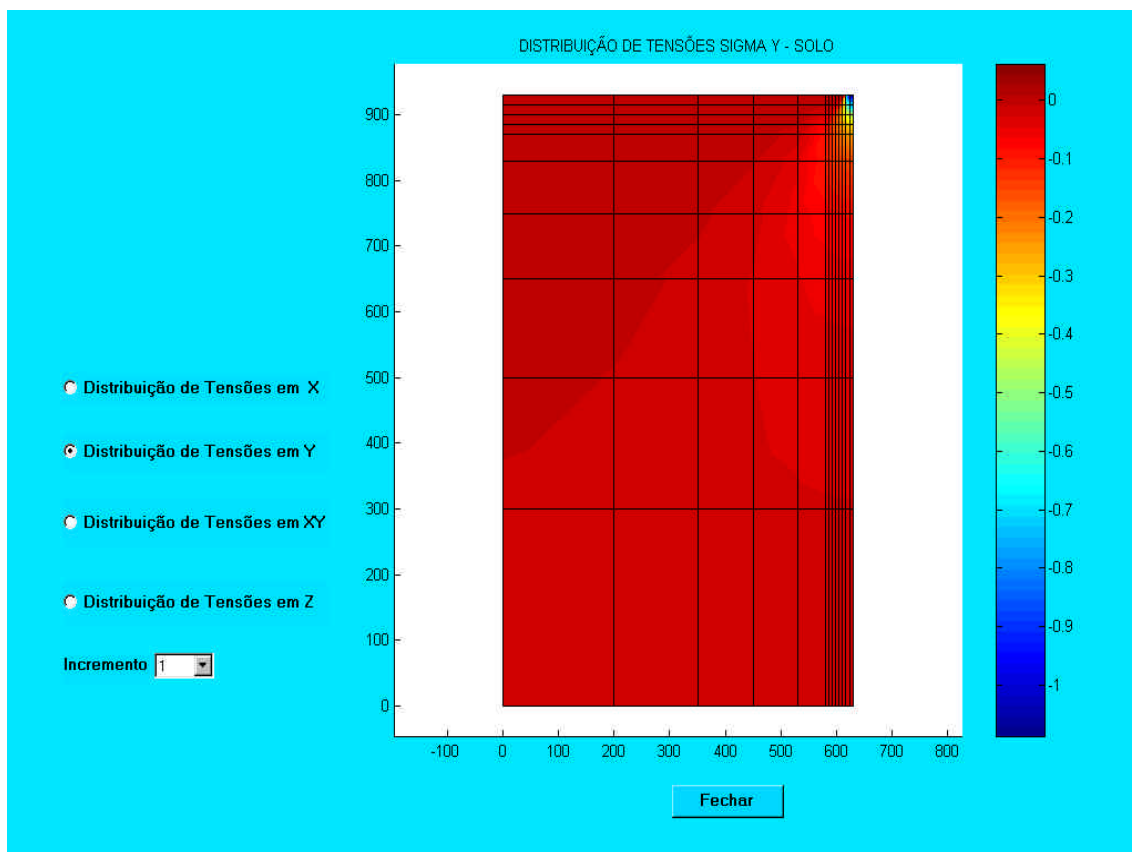


Figura 6.3: Distribuição de tensões σ_y no solo

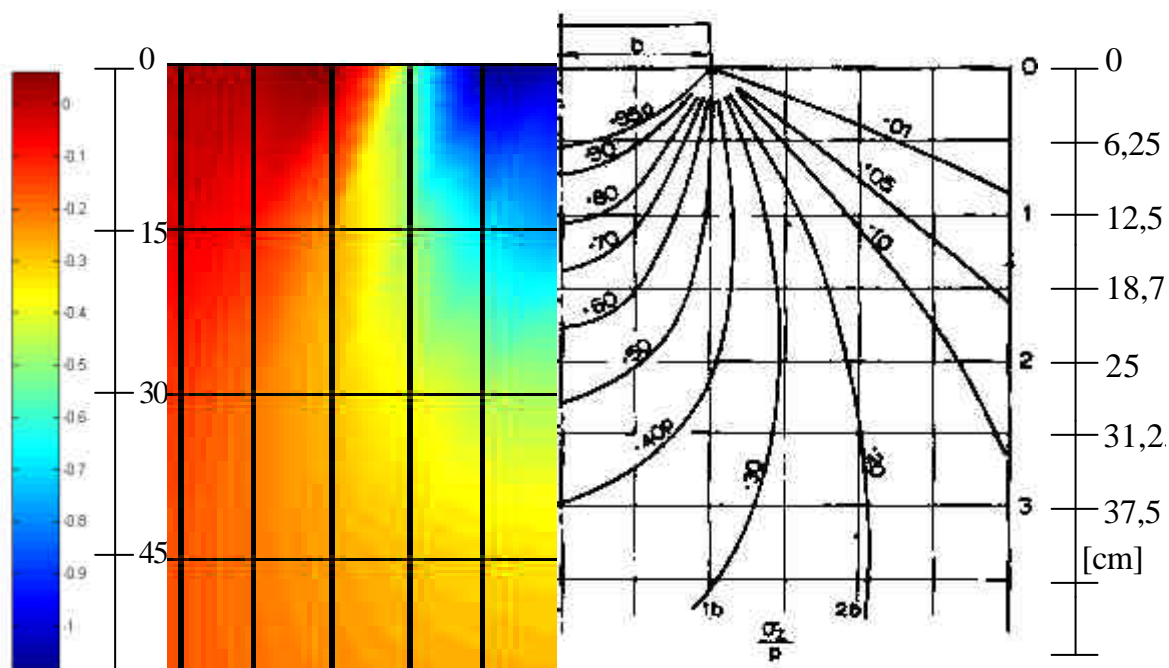


Figura 6.4(a): Isotensões obtidas numericamente

Figura 6.4(b): Isotensões teóricas

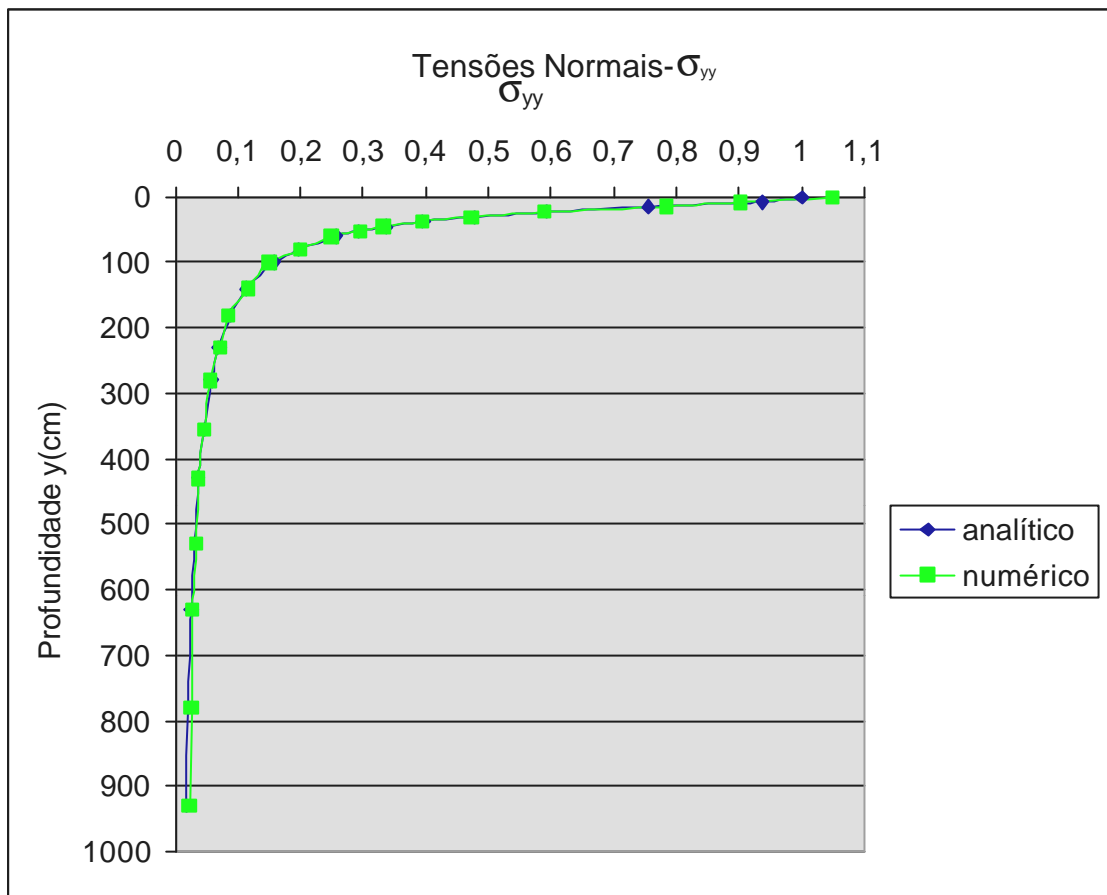


Figura 6.5: Comparação analítico-numérica de tensões verticais σ_y abaixo do centro da carga distribuída

6.3.2 Tensões σ_x

Nesta seção, são analisadas as tensões normais horizontais σ_x . A figura 6.6 apresenta a distribuição de tensões no solo determinadas pelo programa computacional. Na figura 6.7, apresenta-se o gráfico comparativo da profundidade y versus as tensões σ_x elásticas no solo. As tensões estão normalizadas com respeito a tensão média aplicada.

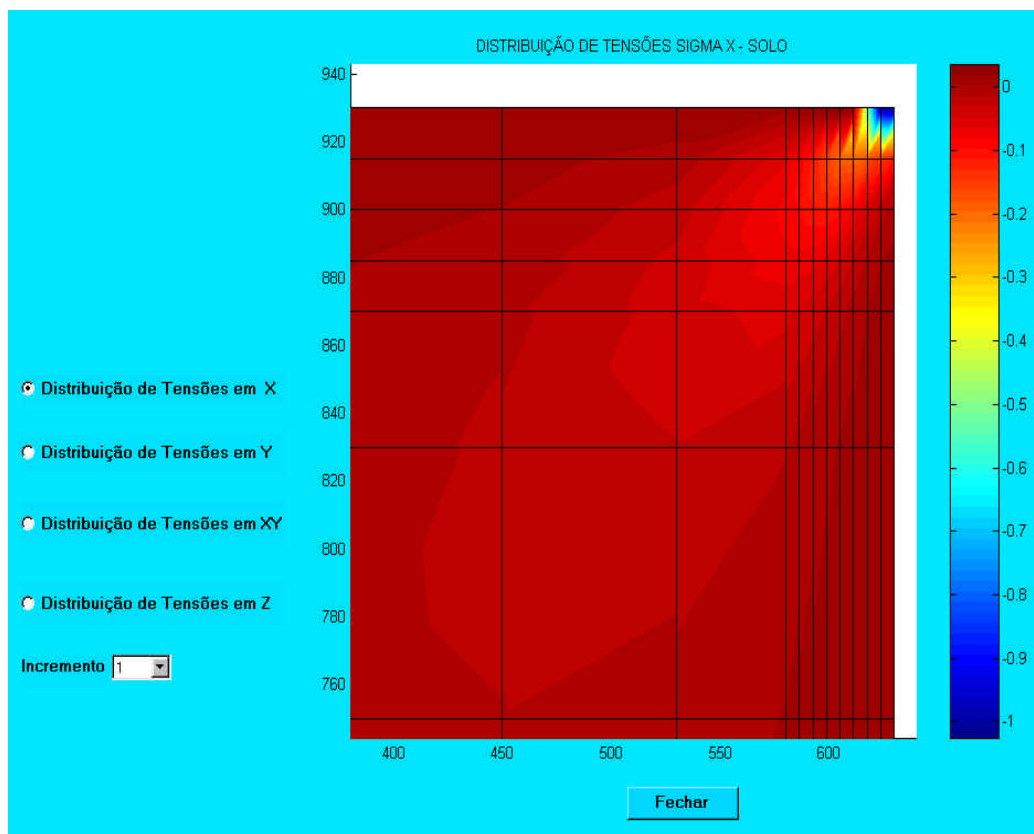


Figura 6.6: Tensões horizontais σ_x na malha

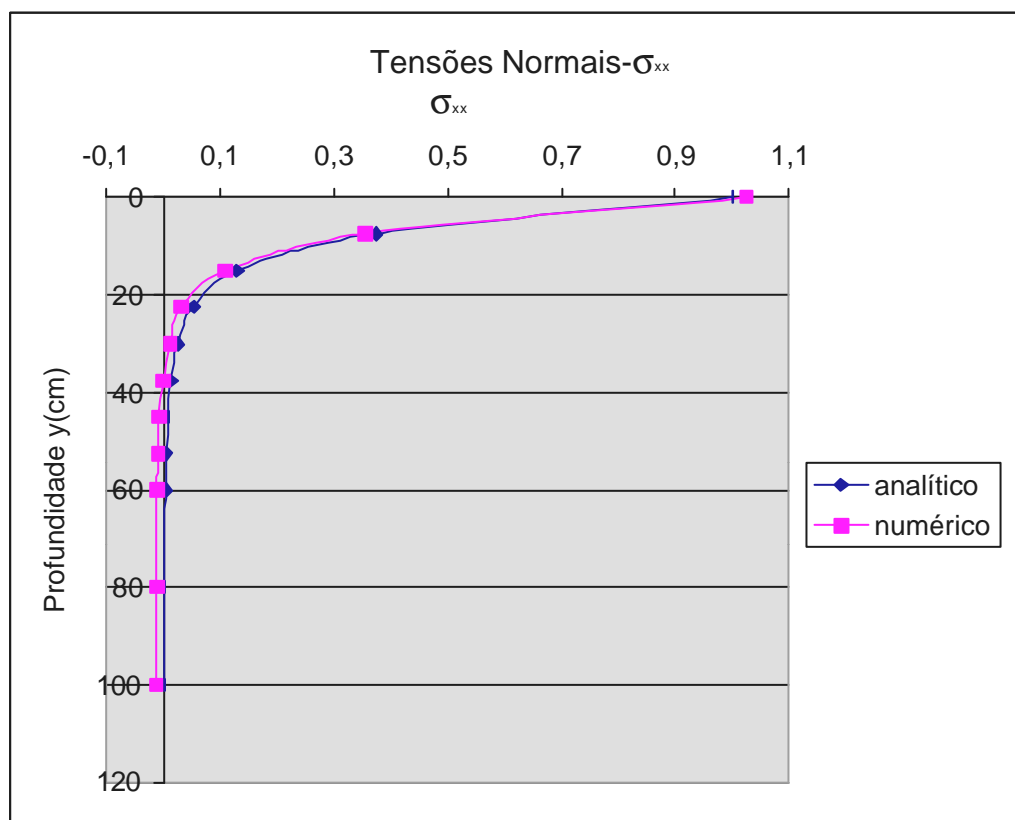


Figura 6.7: Comparação analítico-numérica de tensões horizontais σ_x abaixo do centro da carga distribuída

6.3.3 Tensões σ_z

A distribuição de tensões \mathbf{s}_z , obtidas pelo programa computacional, é apresentada no gráfico da figura 6.8. As tensões \mathbf{s}_z estão adimensionalizadas e apresentadas em módulo, mas são de compressão. A comparação entre tensões \mathbf{s}_z obtidas numericamente e analiticamente é feita na figura 6.9. As curvas apresentam as tensões, em diferentes profundidades, sempre abaixo do centro da carga distribuída. As curvas são praticamente coincidentes.

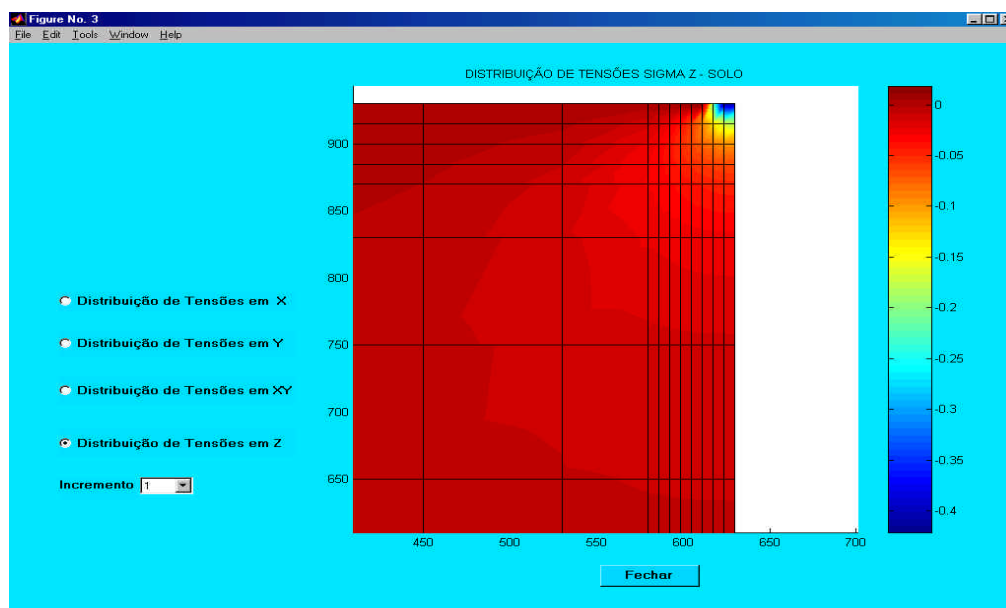


Figura 6.8: Tensões horizontais \mathbf{s}_z na malha

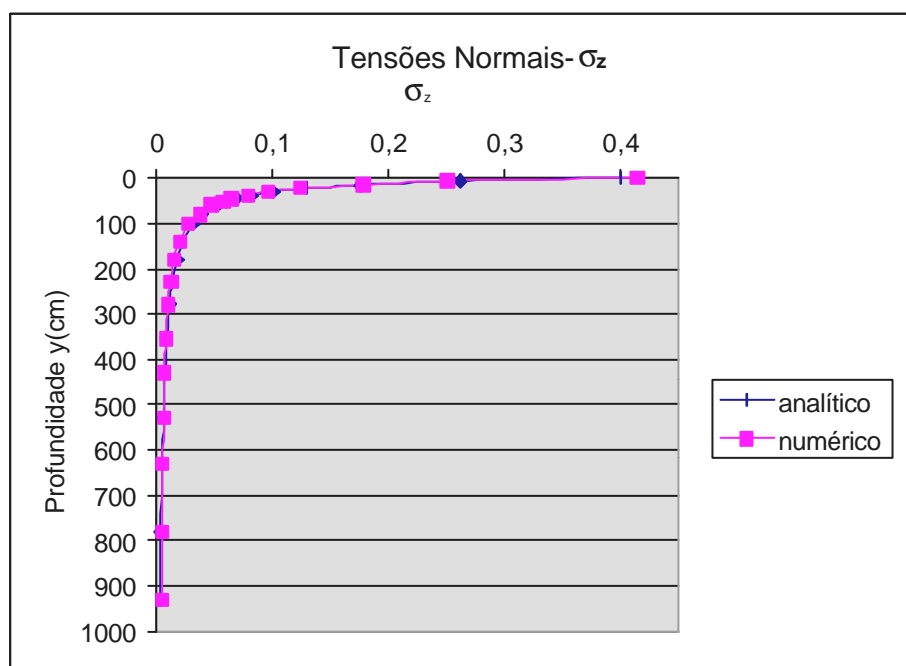


Figura 6.9: Comparação analítico-numérica de tensões horizontais σ_z abaixo do centro da carga distribuída

6.3.4 Tensões τ_{xy}

A distribuição de tensões tangenciais τ_{xy} é apresentada no gráfico da figura 6.10. A comparação entre as tensões τ_{xy} , obtidas computacional e analiticamente, é feita na figura 6.11. São curvas de tensões, em diferentes profundidades, sempre abaixo do centro da carga distribuída. Para estas posições, as tensões tangenciais são nulas em todos os pontos segundo Poulos e Davis (1974), o que foi confirmado pelo programa computacional (figura 6.11).

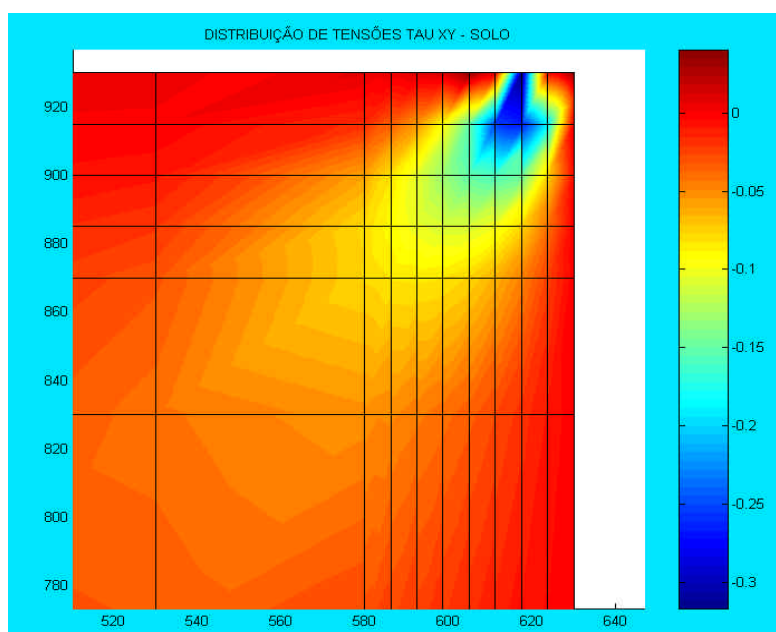


Figura 6.10: Tensões τ_{xy} na malha

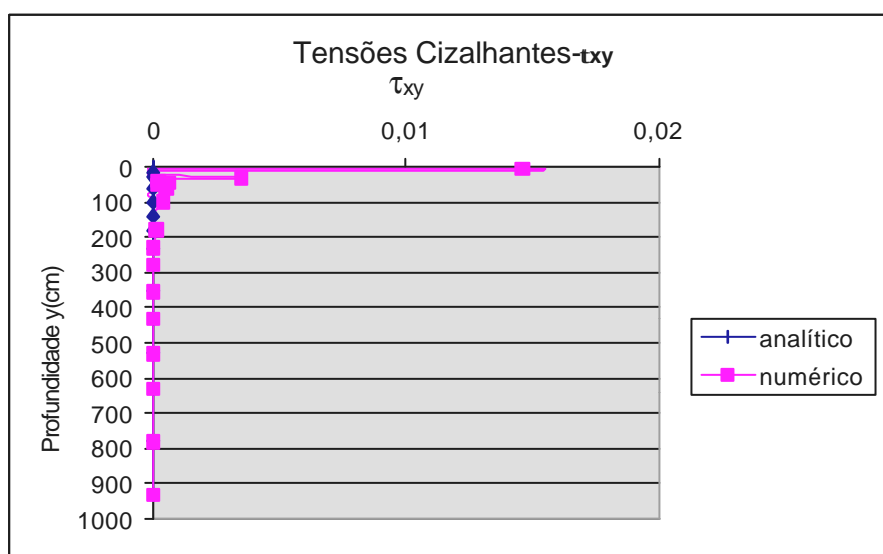


Figura 6.11: Comparação analítico-numérica de tensões τ_{xy} abaixo do centro da carga distribuída

7 COMPARAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS ENCONTRADOS NA BIBLIOGRAFIA PARA A DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NA INTERFACE SOLO-CONCRETO

7.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo é dedicado a comparação numérico-analítica da distribuição de tensões na interface solo-estrutura de fundações corridas de concreto em regime elástico. Para a realização deste estudo foram simuladas no programa computacional trinta diferentes situações de fundações corridas, conforme será descrito detalhadamente na próxima seção. É apresentado um estudo paramétrico, no qual variaram-se diversos parâmetros referentes às propriedades mecânicas e geométricas dos materiais solo e concreto. Para uma generalização dos resultados obtidos, optou-se por apresentar tensões adimensionais, referenciadas sempre a tensão média aplicada.

Soluções em termos de distribuição de tensões na interface entre a fundação de concreto e o solo são difíceis de serem encontrados na bibliografia disponível. Esta dificuldade é decorrente do afastamento entre engenheiros estruturais e geotécnicos, que estudam, na grande maioria dos casos, o comportamento mecânico dos materiais concreto estrutural e solo isoladamente, sem a necessária preocupação com a interação entre os dois materiais.

A maior parte dos resultados teóricos obtidos, que serão considerados neste trabalho são extraídos de Mañá (1975), Velloso e Lopes (1997) e da norma brasileira “Projeto e Execução de Fundações” NBR-6122 (1996).

É importante salientar que a NBR-6122 é muito sucinta em suas referências quanto à consideração das tensões na interface de fundações superficiais. É válido citar os dois itens da NBR-6122, que fazem algum tipo de menção à distribuição de tensões na interface fundação-solo para sapatas. Resumidamente, no item 6.3.2.1-b, é afirmado que as pressões na interface sempre podem ser consideradas uniformemente distribuídas, exceto no caso de fundações

apoiadas sobre rocha. O item 6.3.2.1-c propõe que o elemento estrutural apoiado sobre rocha deva ser calculado como peça rígida, adotando-se o diagrama bi-triangular de tensões da figura 7.1.

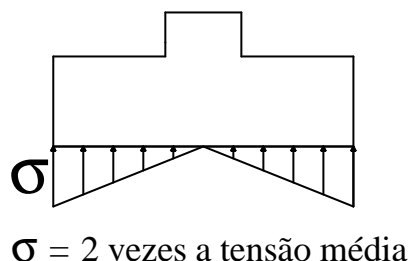


Figura 7.1: Diagrama de tensões para sapatas apoiadas sobre rocha

7.2 ESCOLHA E JUTIFICATIVA DOS EXEMPLOS A SEREM SIMULADOS

Para uma apreciação adequada da distribuição das tensões de interface foram simuladas numericamente trinta situações. Os parâmetros que foram variados foram: a altura da sapata corrida de concreto simples e o módulo de elasticidade longitudinal do solo. Estes parâmetros influenciam diretamente na rigidez relativa fundação-solo.

As fundações foram consideradas com diferentes alturas, com o objetivo de avaliar desde sapatas extremamente flexíveis, até sapatas muito rígidas. As alturas h escolhidas foram: 5, 20, 40,60, 80 e 100 cm. Para cada altura de sapata, os módulos de elasticidade longitudinal do solo foram tomados como 1, 10, 100, 3000 kN/cm² e infinito. Para o concreto foi atribuído um módulo de elasticidade longitudinal de 3.000 kN/cm², que é aproximadamente o valor obtido para os concretos correntemente utilizados na construção civil.

A figura 7.2 apresenta a malha de elementos finitos utilizada na resolução de todos exemplos numéricos. A malha tem 80 elementos finitos (elemento finito de 8 nós), respeitando a os tópicos de discretização e vinculação observados na seção 6.2 do capítulo anterior. Optou-se por uma malha 72 elementos de solo e 8 elementos de concreto. Devido à simetria do problema, a malha pôde ser otimizada, analisando-se apenas a metade da fundação.

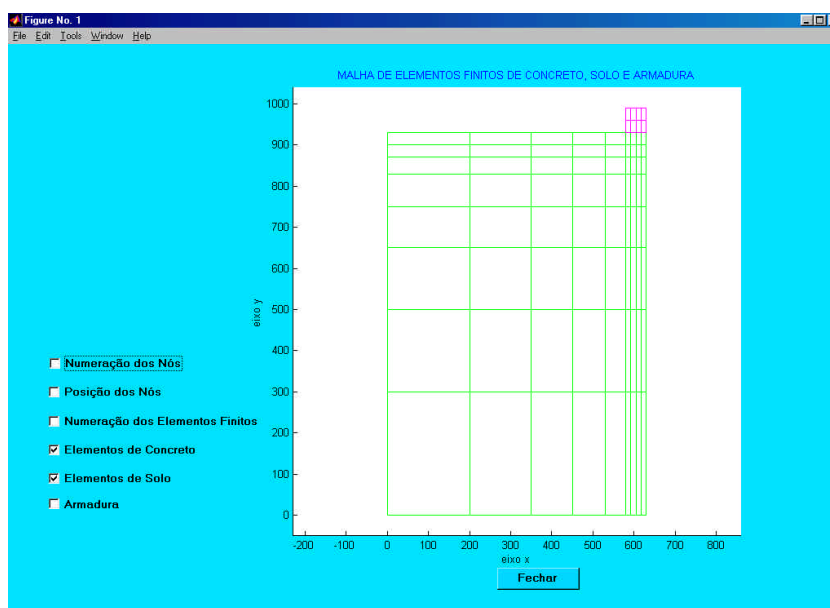


Figura 7.2: Malha de elementos finitos

Segundo Velloso e Lopes (1997) e Mañá (1975), os fatores que mais influenciam a distribuição de tensões na interface são, respectivamente, a característica das cargas aplicadas, a rigidez relativa fundação-solo, as propriedades do solo e a intensidade das cargas. Escolheu-se uma carga uniformemente distribuída, aplicada em um único elemento finito, simulando uma parede descarregando sobre o bloco de fundação, sem excentricidade.

Não existe uma expressão matemática, amplamente aceita, para quantificar a rigidez relativa sapata corrida-solo. De modo geral, existem algumas propostas, que têm maior ou menor aceitação. Meyerhof (1953) apresentou uma proposta para esta grandeza, que será empregada neste trabalho. Existem outras propostas para esta rigidez relativa, entre as quais pode-se citar Schultze (1966) e Pandfield e Sharrock (1983), que propuseram uma expressão de caráter geral para a estimativa da rigidez relativa.

$$R_r = \frac{E_c I}{E_s B^3} \quad (7.1)$$

Na expressão acima proposta por Meyerhof (1953) E_c é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto, I é o momento de inércia da seção transversal da sapata por unidade de largura, E_s é o módulo de elasticidade do solo e B é a dimensão da sapata.

Nas seções, que seguem, serão apresentados valores médios para a distribuição de tensões na interface, comparando-se com os resultados encontrados por Mañá (1975) e Velloso e Lopes (1997).

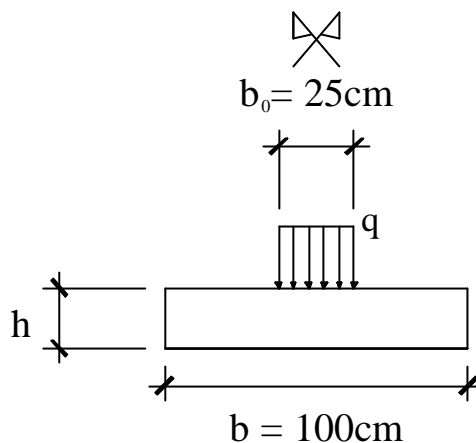


Figura 7.3: Geometria da fundação

7.3 A INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ RELATIVA FUNDAÇÃO/SOLO NA DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES DE INTERFACE

Uma vez que a natureza das cargas aplicadas às sapatas corridas por paredes portantes é praticamente imutável, a rigidez relativa fundação-solo se torna o mais importante fator para a distribuição de tensões na interface. Velloso e Lopes (1997) apresentam tentativas de alguns autores de expressar esta grandeza. É importante ressaltar, que em todas estas propostas, a rigidez relativa é equacionada como sendo a razão entre a inércia à flexão da fundação e propriedades elásticas do solo. Calavera (1991) propôs que uma fundação é considerada rígida se atender a seguinte condição:

$$h \geq \frac{b - b_0}{4} \quad (7.2)$$

Se a altura da fundação não atender a inequação acima, tem-se, então, uma sapata flexível. Com a simulação de sapatas de diversas alturas procurou-se cobrir as situações

correspondentes a sapatas flexíveis e sapatas rígidas. A seção, que segue, apresenta os diagramas de tensão na interface fundação-solo, ambos elásticos, e uma comparação qualitativa direta com os diagramas propostos por Mañá (1975).

7.3.1 Tensões na interface fundação-solo para sapatas muito flexíveis

As sapatas de concreto têm sua rigidez determinada principalmente pela altura **h**. Para concretos correntes, utilizados em obras, pode-se dizer o módulo de elasticidade é em torno de 3.000 kN/cm². Este foi o valor adotado nos exemplos analisados neste capítulo.

Segundo os diagramas propostos por Mañá (1975), quanto mais flexível é a fundação, a reação em termos distribuição de tensões mais se concentra abaixo do carregamento. Nas extremidades as tensões se tornam nulas devido à perda de contato entre a sapata de concreto e o solo. A rigidez relativa fundação-solo tende à zero.

A figura 7.4(a) e 7.4(b) apresentam, respectivamente, a distribuição de tensões de interface, obtidas numericamente, para uma fundação flexível de $h=5\text{cm}$, e os resultados propostos por Mañá (1975). As distribuições se assemelham muito, com as tensões se concentrando no centro da fundação. Devido à limitação do programa computacional, em não simular o deslizamento relativo entre os elementos de concreto e solo, surgem pequenas tensões de tração junto aos bordos da fundação.

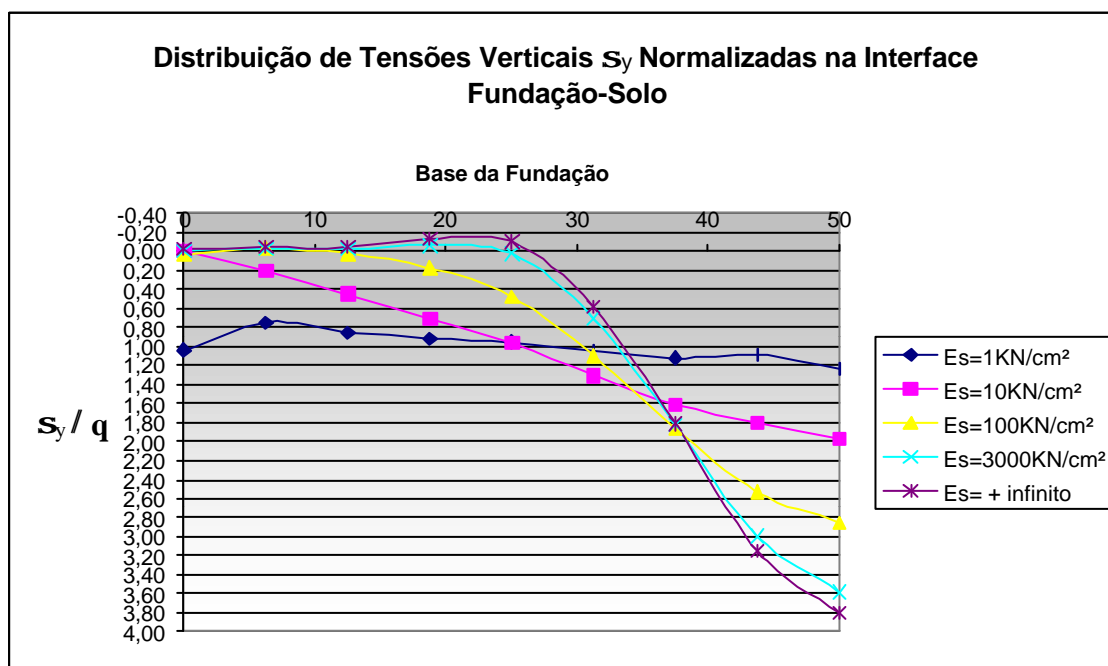


Figura 7.4(a): Distribuição de tensões para uma sapata flexível ($h=5\text{cm}$) e variação do módulo de elasticidade do solo $E_s = 1, 10, 100, 3000 \text{ KN/cm}^2$ e $E_s = + \infty$

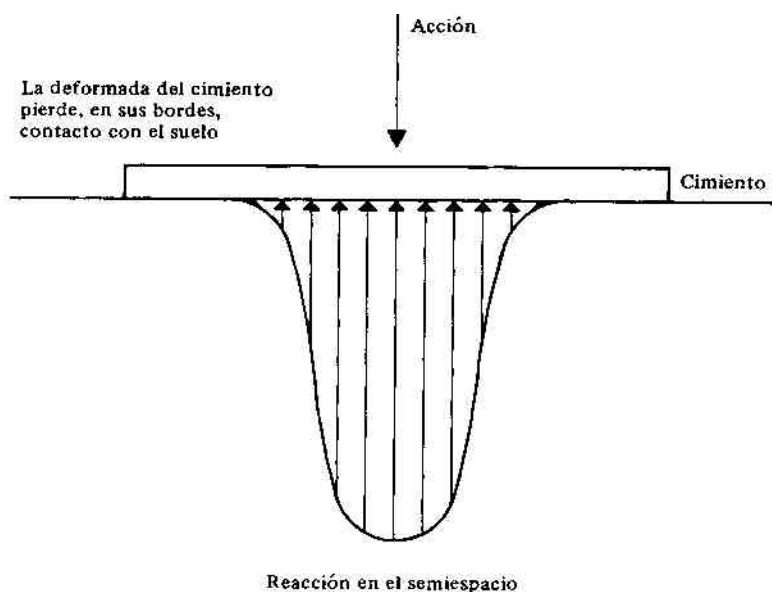


Figura 7.4(b): Distribuição de tensões teórica para uma sapata flexível extraída de Mañá (1975)

Na medida em que o módulo de elasticidade do solo aumenta, a rigidez relativa fundação-solo diminui, ou seja, a fundação mais se enquadra na hipótese de sapatas flexíveis e a distribuição de tensões se aproxima da figura 7.4(b).

7.3.2 Tensões na interface fundação-solo para sapatas e solo com rigidezes semelhantes

Sapatas cuja rigidez do concreto e do solo são da mesma ordem de grandeza, com rigidez relativa Rr intermediária, apresentam distribuição de tensões uniforme segundo Mañá (1975). Para a verificação deste comportamento uniforme de tensões foi necessária a graficação de tensões de interface para diferentes alturas de fundação 5, 20, 40, 60, 80 e 100 cm. Considerou-se que o concreto e solo apresentassem o mesmo módulo de elasticidade longitudinal (E_C e E_S), igual a 3.000 kN/cm². Este valor corresponde a solos muito rígidos, propriedades características de rocha.

Comparando a distribuição uniforme de tensões, admitida na figura 7.5(a), com os resultados numéricos da figura 7.5(b) para fundação e solo com rigidezes semelhantes, é confirmada a distribuição de tensões uniforme.

Apenas em duas simulações, a distribuição de tensões não apresentou uma tendência uniforme. Nos exemplos onde a altura das sapatas eram reduzidas, 5 e 20cm, obtiveram-se valores abaixo ou muito próximos do limite de rigidez para sapatas flexíveis (equação 7.2). Em consequência, sua inércia à flexão tornou-se reduzida, conferindo uma rigidez relativa fundação-solo baixa.

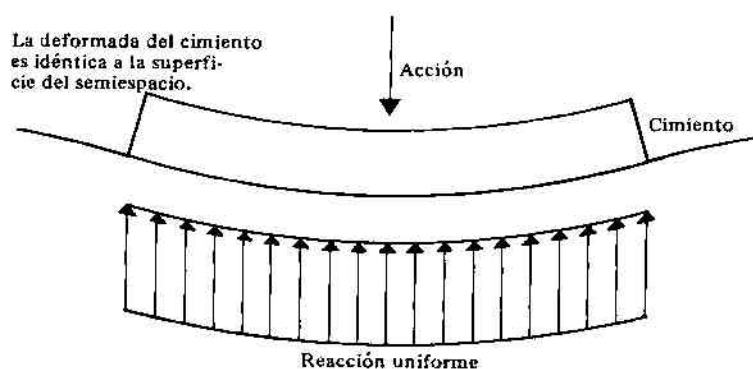


Figura 7.5(a): Distribuição teórica de tensões extraída de Mañá (1975)

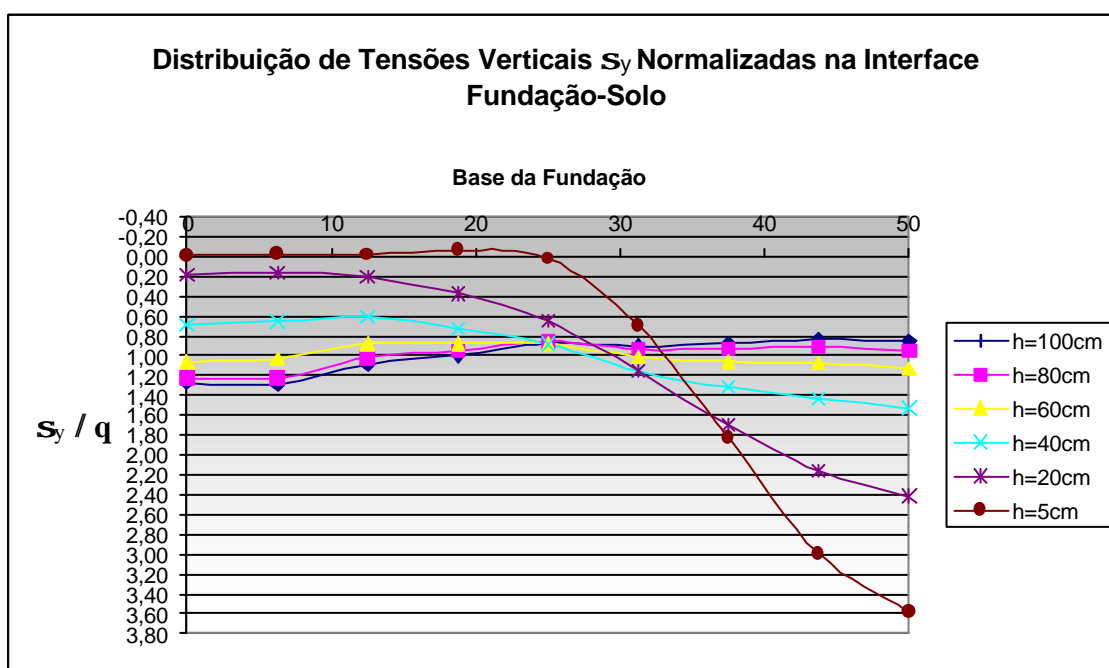


Figura 7.5(b): Distribuição de tensões para fundação e solo de rigidezes semelhantes

Mañá (1975) apresenta um exemplo ideal para confirmar estas possíveis distribuições de tensão na interface. Em função de uma propriedade do solo chamada de coeficiente de “balasto” (ou coeficiente de recalque ou reação do solo), que para solos de grande rigidez (rochas) é da ordem de 5000kN/m^3 , e de uma dimensão característica tomada como a metade da base da fundação, neste caso 50cm , é possível avaliar os limites das alturas h da sapata às quais cabem as três possíveis distribuições (uniforme, bi-trapezoidal e bi-triangular) de tensões elásticas na interface.

Em função destes parâmetros, foi possível avaliar as alturas h limites entre as possíveis distribuições de tensões. Para que as tensões de interface sejam consideradas uniformemente distribuídas, a altura mínima de sapata tem de ser maior de 44cm ; para a distribuição ser bi-triangular, a altura tem de ser igual ou inferior a 21cm ; e entre 21 e 44cm a distribuição é bi-trapezoidal. A figura 7.6 mostra as possíveis distribuições de tensão obtidas numericamente e as distribuições teóricas para serem comparadas. Para alturas grandes de fundação ($100, 80, 60\text{cm}$), devido à rigidez relativa ser alta, a distribuição de tensões é admitida uniforme. Para sapatas muito flexíveis de pequena altura ($5, 20\text{cm}$), com rigidez relativa baixa, tendendo a zero, a distribuição de tensões de interface pode ser aproximada por uma distribuição bi-triangular, com a tensão máxima no centro. Para sapatas cuja rigidez relativa é intermediária (40cm) pode ser admitida uma distribuição bi-trapezoidal com a tensão máxima no centro da fundação. É relevante mencionar que estas distribuições de tensões na interface fundação-solo, obtidas numericamente e analiticamente, são muito diferentes com relação à distribuição bi-triangular para fundações sobre rocha proposta pela NBR-6122 (1996), conforme a figura 7.1.

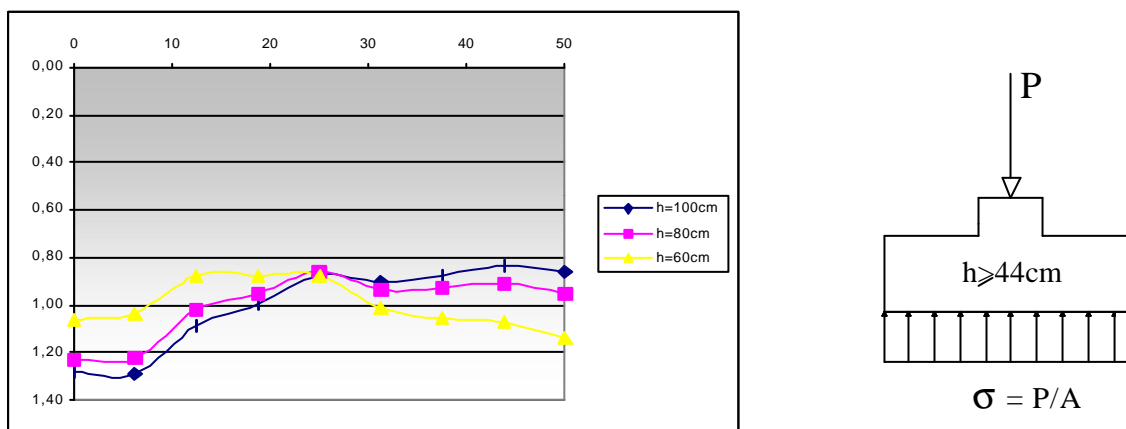


Figura 7.6(a): Sapatas com distribuição de tensões uniforme

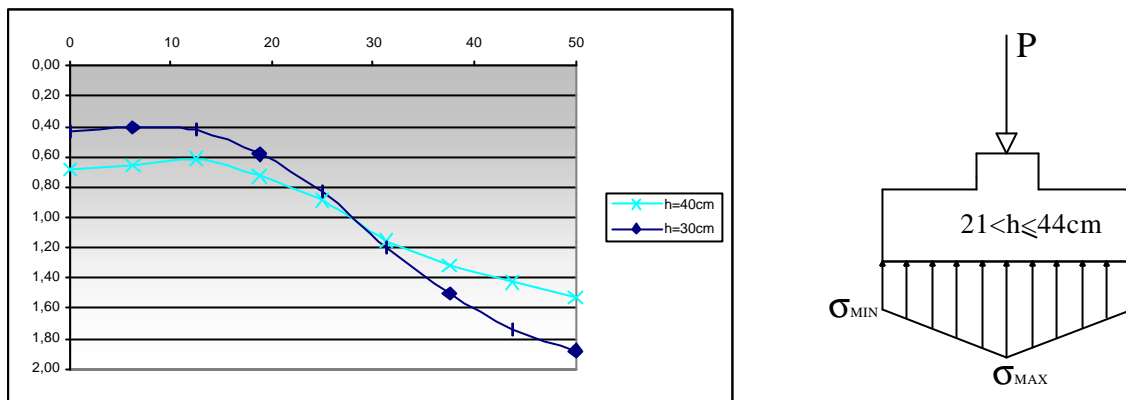


Figura 7.6(b): Sapatas com distribuição de tensões bi-trapezoidal

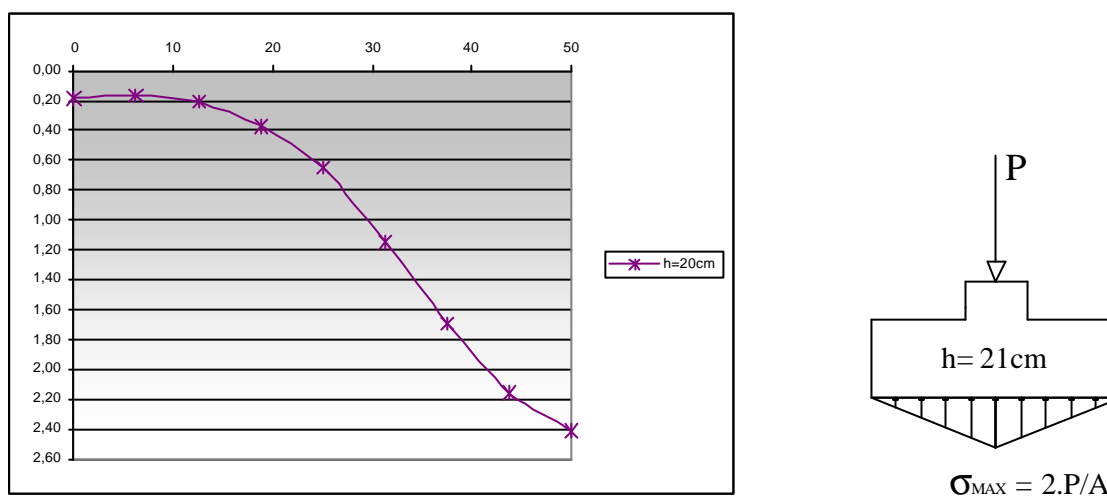


Figura 7.6(c): Sapatas com distribuição de tensões bi-triangular

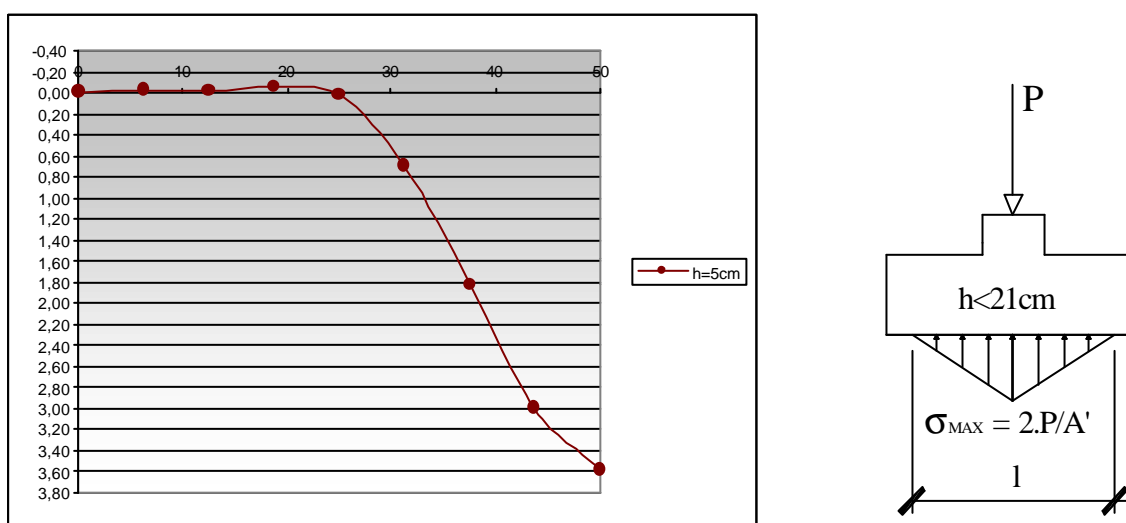


Figura 7.6(d): Sapatas com distribuição de tensões bi-triangular em uma largura útil l

Em 7.6(d) P é o carregamento aplicado, A' é a área efetiva da fundação e l é a largura efetiva da mesma.

7.3.3 Tensões na interface fundação-solo para sapatas muito rígidas

Os fatores que interferem na rigidez de uma sapata de concreto são fundamentalmente a sua inércia à flexão, que pode ser aumentada dimensionando sapatas com alturas relativamente maiores, e a rigidez do solo ou rocha na qual esta fundação se apóia. A rigidez mecânica da sapata é conferida pelo módulo de elasticidade longitudinal do concreto, que, conforme já comentado, foi considerado com um valor 3.000 kN/cm^2 .

Para a simulação de sapatas com rigidezes relativas R_r altas, foram consideradas sapatas com altura bem considerável $h = 100 \text{ cm}$. Estas sapatas são consideradas rígidas pelo critério exposto na expressão 7.2. Foram avaliados solos em uma larga faixa, desde solos de baixa rigidez, com módulos de elasticidade de 1 kN/cm^2 , até rigidezes altas de 3.000 kN/cm^2 .

Pela teoria da elasticidade, conforme Boussinesq encontrado em Mañá (1975), a distribuição de tensões na interface fundação-solo, no caso de fundações de grande rigidez, se apresenta conforme a figura 7.7(a), com as tensões nos bordos sendo teoricamente infinitas. Este critério proposto por Boussinesq sofre uma importante modificação quando se trata de materiais reais, pois as tensões nos cantos são limitadas pela plastificação do material conforme a figura 7.7(b).

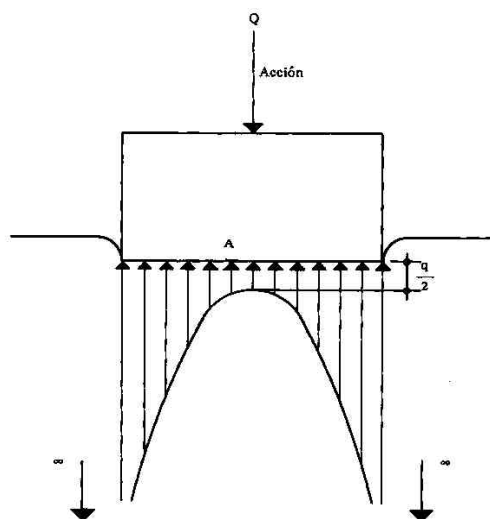
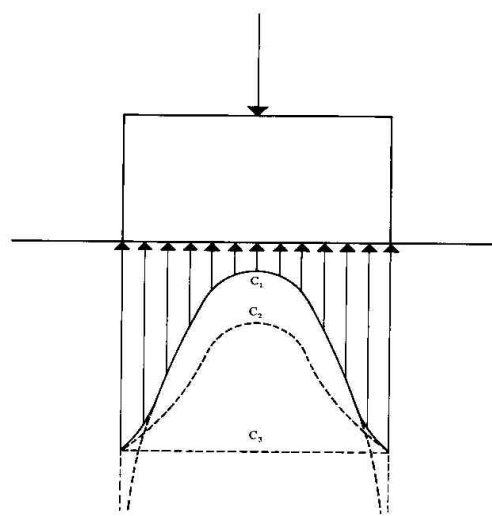


Figura 7.7(a): Distribuição idealizada de Boussinesq extraídos de Mañá (1975)



7.7(b): Distribuição de Boussinesq para materiais reais extraídos de Mañá (1975)

A figura 7.8 apresenta as distribuições de tensões na interface para sapatas de grande rigidez ($h=100$ cm). Observa-se que para solos de baixa rigidez, isto é, rigidez relativa Rr alta devido a inércia à flexão da sapata de concreto, o comportamento elástico em termos de distribuição de tensões é muito semelhante à proposta de Boussinesq. Isto fica evidenciado comparando-se as distribuições de tensões numéricas das figuras 7.8 e 7.9 e os resultados de Boussinesq, na figura 7.7.

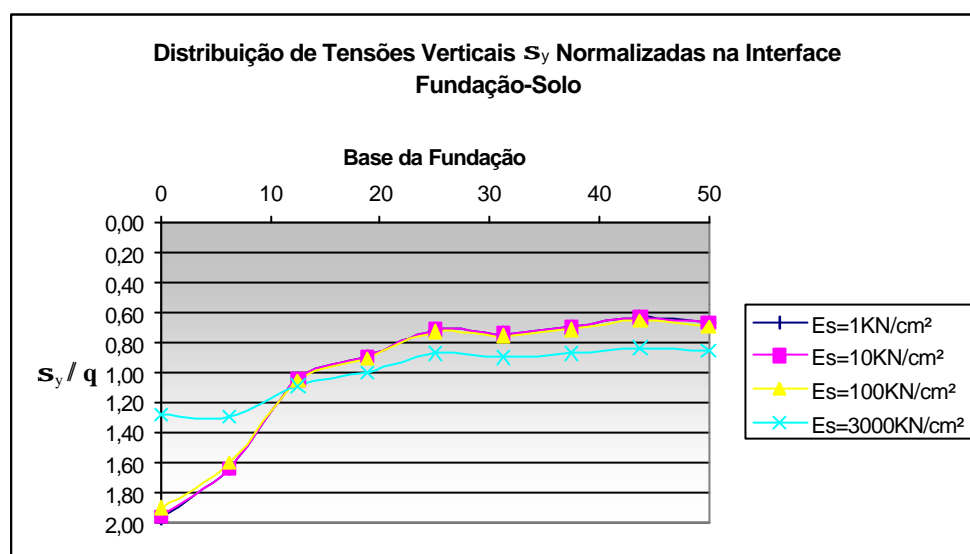


Figura 7.8: Distribuição de tensões para fundações de alta rigidez

Na segunda simulação, a rigidez relativa fundação-solo é incrementada pela variação da altura das sapatas. Neste caso, o módulo de elasticidade do solo é fixado em $E_s = 1\text{ kN/cm}^2$, solo de baixa rigidez. Observa-se na figura 7.9 que ao se incrementar a rigidez da sapata, devido ao aumento das alturas (h) da mesma, mais a distribuição de tensões se aproxima da proposta teórica elástica de Boussinesq, com a tensão máxima se verificando nos bordos.

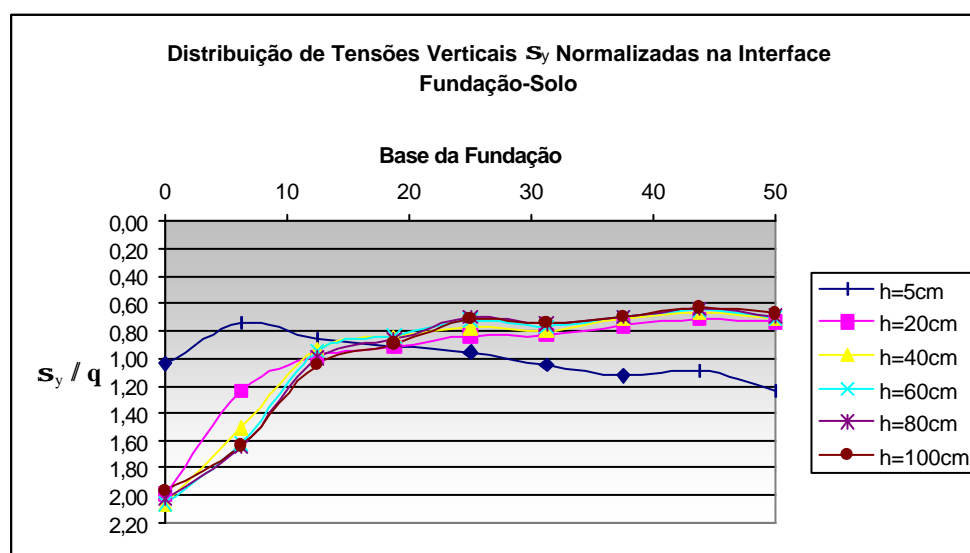


Figura 7.9: Distribuição de tensões para fundações de alta rigidez

8 ANÁLISE NUMÉRICA DE FUNDAÇÕES DE CONCRETO ARMADO

8.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão discutidos resultados numéricos referentes ao desempenho mecânico de fundações superficiais de concreto armado. Para tal, o estudo não se restringirá ao regime elástico de comportamento dos materiais, conforme os capítulos 6 e 7, será realizada a análise não-linear do conjunto concreto armado-solo que compõe a fundação. Serão utilizados os modelos constitutivos implementados no programa computacional. Assim, para o concreto será considerado um modelo elastoplástico multiaxial, com ruptura à compressão (esmagamento) e tração (fissuração), para o aço um modelo elastoplástico com endurecimento e para o solo um modelo elastoplástico multiaxial com endurecimento isotrópico e com critério de plastificação de Drucker-Prager.

Quatro exemplos serão analisados. As propriedades mecânicas do concreto, como seu módulo de elasticidade longitudinal (E), resistência média à compressão (f_{cm}), coeficiente de Poisson (ν), etc serão mantidas constantes. O mesmo será feito com relação às propriedades do aço. Já para o solo, as propriedades serão alteradas com o intuito de observar a variabilidade da resposta da estrutura. Os exemplos serão referenciados por **exemplo n°1**, **exemplo n°2**, **exemplo n°3** e **exemplo n°4**. É importante destacar que as características dos três tipos diferentes de solos foram extraídos de resultados reais de estudos de campo.

No exemplo n°1, a fundação de concreto armado está assente sobre um solo de baixíssima rigidez, com módulo de elasticidade igual a 1 kN/cm², coesão de 0,002 kN/cm², e ângulo de atrito interno de 25°. Solos com estas características são encontrados em Consoli, Schnaid e Milititsky (1998).

No exemplo n°2 foram extraídos resultados de solos com rigidez intermediária igual a 55 kN/cm², coesão 0,009 kN/cm² e ângulo de atrito interno 47°. Em engenharia geotécnica um material com estas características é classificado como rocha branda. Estes resultados são encontrados em Tessari (1998).

As propriedades do solo do exemplo n°3 representam um material com rigidez superior a do concreto. Estes resultados foram extraídos de Schnaid e Consoli (1995). Este tipo de solo é classificado como uma rocha ígnea (basalto) de alta rigidez, com módulo de elasticidade igual a 6.100 kN/cm², com coesão 0,6 kN/cm² e ângulo de atrito interno igual a 60°. O exemplo n°4 os materiais são os mesmos do exemplo n°3 com uma única modificação, a inclusão de barras de armadura verticais para ancoragem do elemento estrutural que se assenta na fundação. A figura 8.1(b) mostra a fundação do exemplo n°4.

As propriedades dos materiais, utilizados nos exemplos, estão resumidas na tabela 8.1.

Tabela 8.1(a): Principais propriedades do concreto

Material	E(kN/cm ²)	f _{cm} (kN/cm ²)	n
Concreto	3250 *	2	0,2

Tabela 8.1(b): Principais propriedades do aço

Material	E(kN/cm ²)	f _{ym} (kN/cm ²)
Aço	21000	40

Tabela 8.1(c): Propriedades do solo

Material	E(kN/cm ²)	c(kN/cm ²)	f	S _{yk} (kN/cm ²)	n
exemplo 1 (lama)	1	0,002	25	0,0063	0,2
exemplo 2 (rocha branda)	55	0,009	47	0,046	0,2
exemplo 3 e 4 (rocha ígnea)	6100	0,6	60	4,48	0,2

* módulo de elasticidade longitudinal calculado segundo o Código Modelo CEB-FIP (1993)

A geometria e dimensionamento da fundação foram feitos, conforme Calavera (1991). A figura 8.1(a) apresenta a fundação corrida de concreto armado analisada nos três primeiros exemplos.

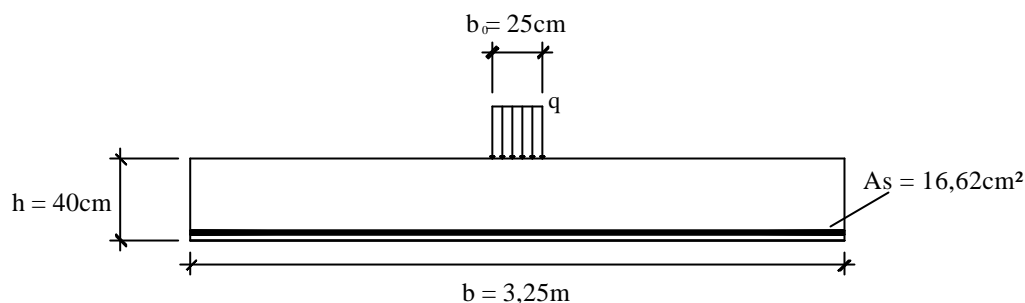


Figura 8.1(a): Sapata corrida de concreto armado

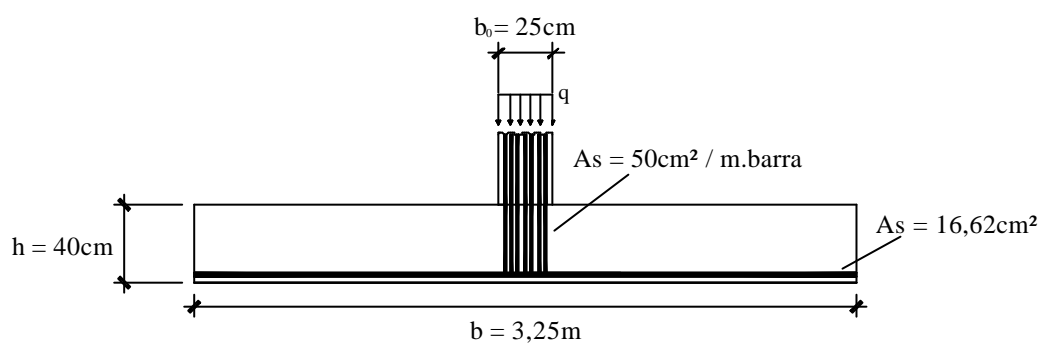


Figura 8.1(b): Sapata com armadura de ancoragem

8.2 RESULTADOS OBTIDOS PARA FUNDAÇÃO APOIADA SOBRE SOLO DE BAIXA RIGIDEZ

No **exemplo n°1**, simulou-se a fundação corrida, assente em um solo de baixíssima rigidez, e observou-se a evolução das tensões e deformações nos materiais. Para o solo, os parâmetros utilizados são os que caracterizam uma lama de baixíssima rigidez, conforme a tabela 8.1(c).

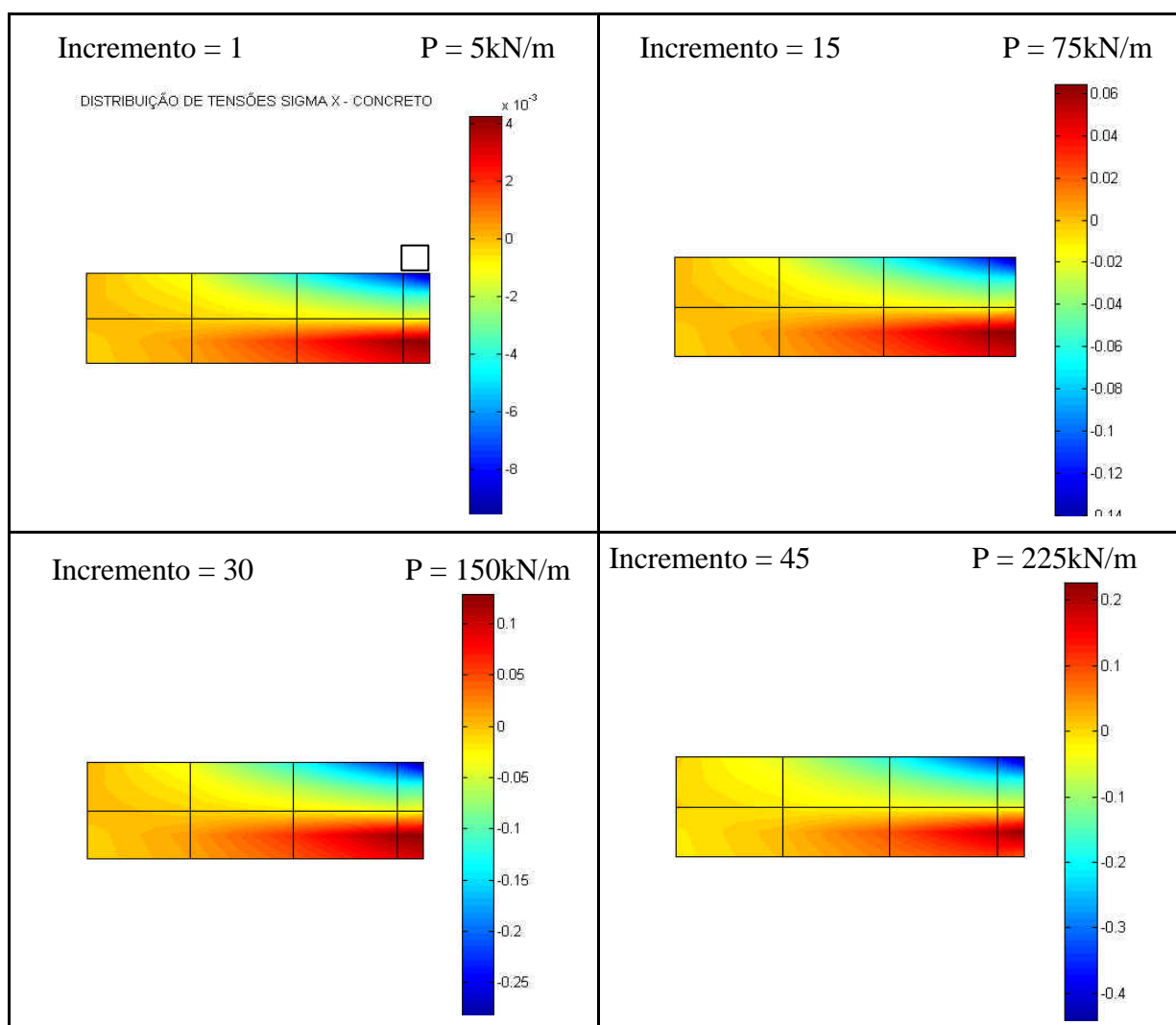
Os gráficos, que seguem, resumem o comportamento da estrutura em diversas etapas de incrementos de carga. São apresentados os gráficos em determinados incrementos

específicos, que foram julgados relevantes, por apresentarem alguma mudança ou algo determinante no comportamento da fundação. Para o **exemplo n°1**, cada incremento de carga representa o acréscimo de 5kN/m (carregamento por metro linear ao longo da fundação) ao carregamento da etapa anterior.

Os gráficos foram dispostos em seis seções: distribuição de tensões horizontais normais no concreto, tensões verticais normais no solo, distribuição de tensões normais na armadura, fissuração nos elementos de concreto, mapeamento dos pontos de integração plastificados e o diagrama de tensões normais na interface fundação-solo.

8.2.1 Distribuição de tensões normais no concreto

Nesta seção são apresentados sequencialmente os gráficos de tensão em kN/cm² no concreto para alguns incrementos específicos. Ao lado de cada figura aparecem barras coloridas (mapas de cores) com faixas de valores das tensões normais.



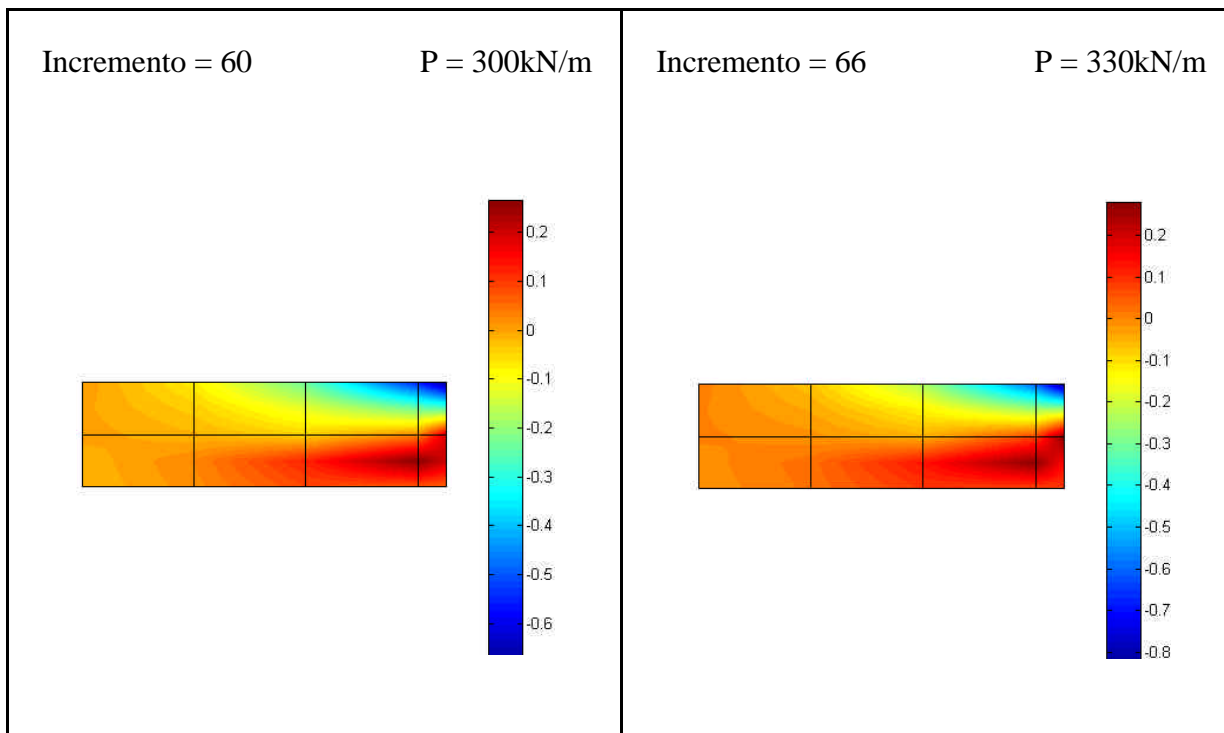
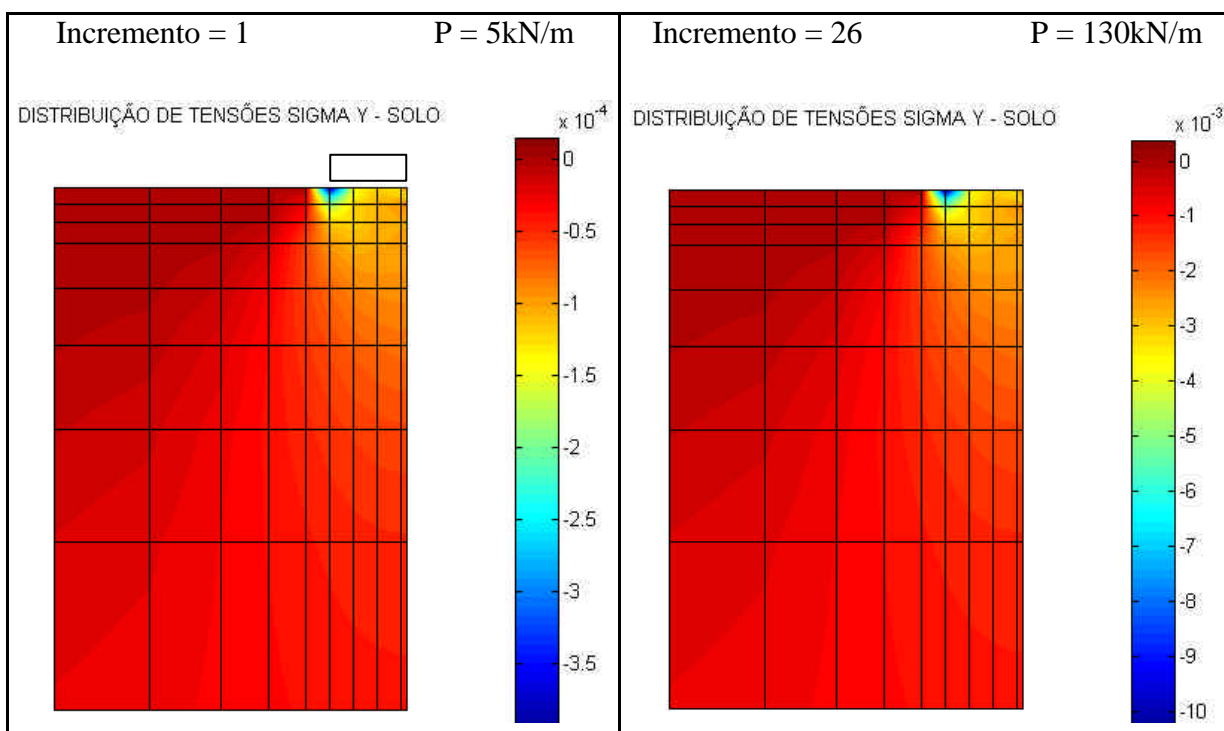


Figura 8.2: Tensões horizontais normais no concreto

8.2.2 Distribuição de tensões normais verticais no solo

Seguindo a mesma lógica da seção anterior, é apresentada a distribuição de tensões em kN/cm² no solo em incrementos de carga importantes.



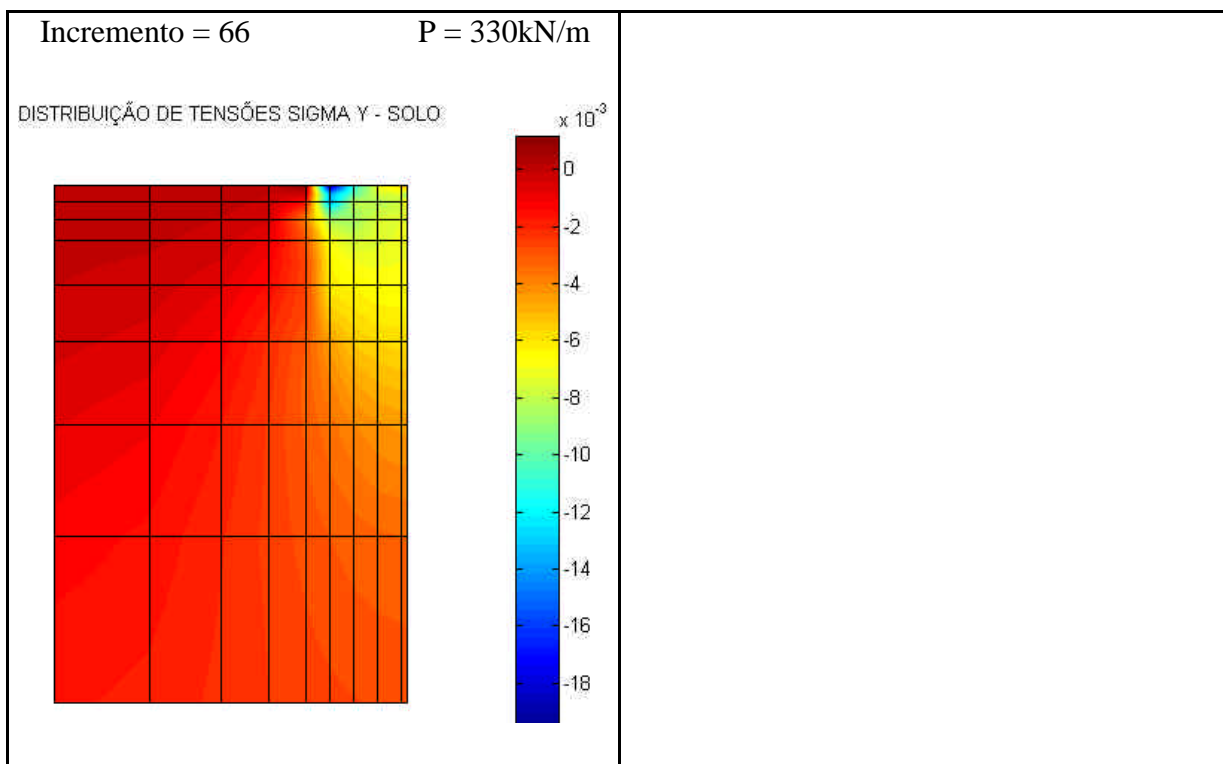


Figura 8.3: Tensões verticais normais no solo

8.2.3 Distribuição de tensões na armadura

Nesta seção, são apresentadas as tensões nas barras de armadura para diversos incrementos da carga, com valores em kN/cm^2 .

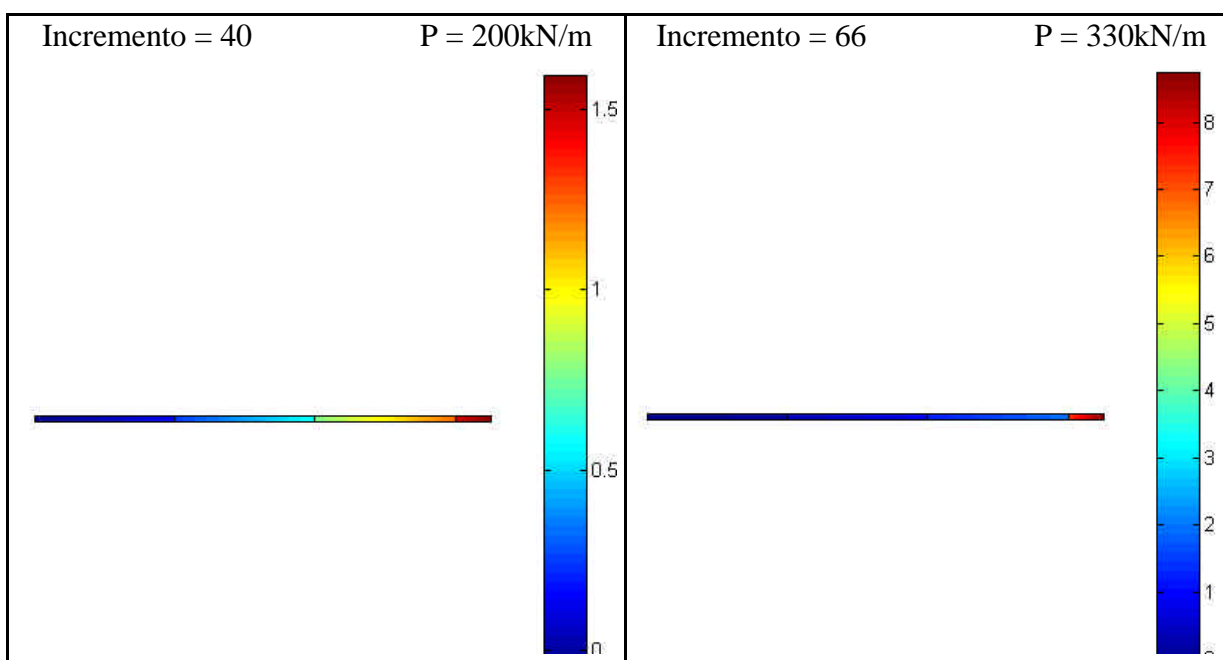


Figura 8.4: Tensões normais uniaxiais na armadura

8.2.4 Evolução da fissuração/esmagamento nos elementos de concreto

Na figura 8.5, são representados os pontos de integração dos elementos de concreto, que apresentaram fissuração em diversos incrementos de carga.

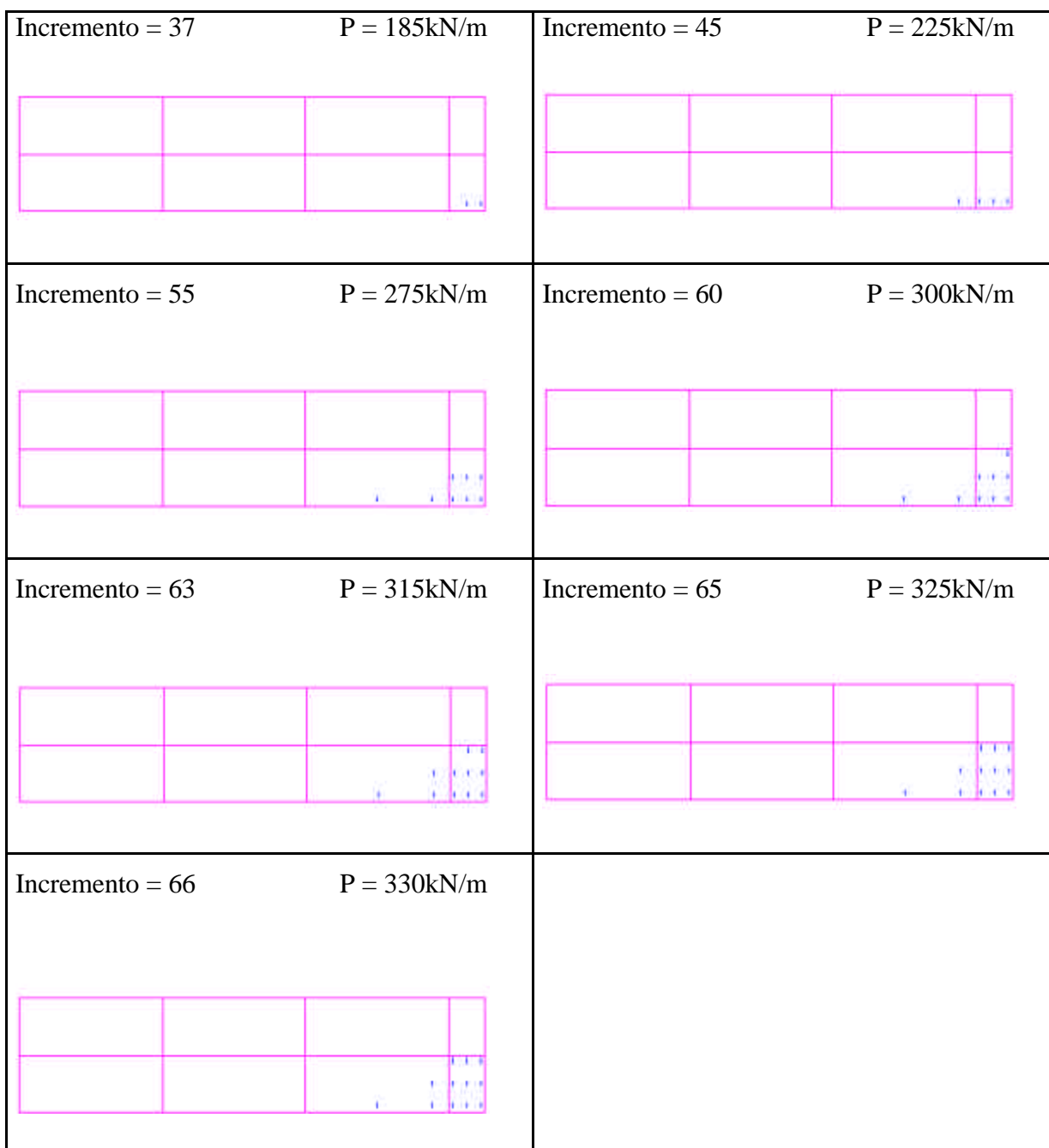
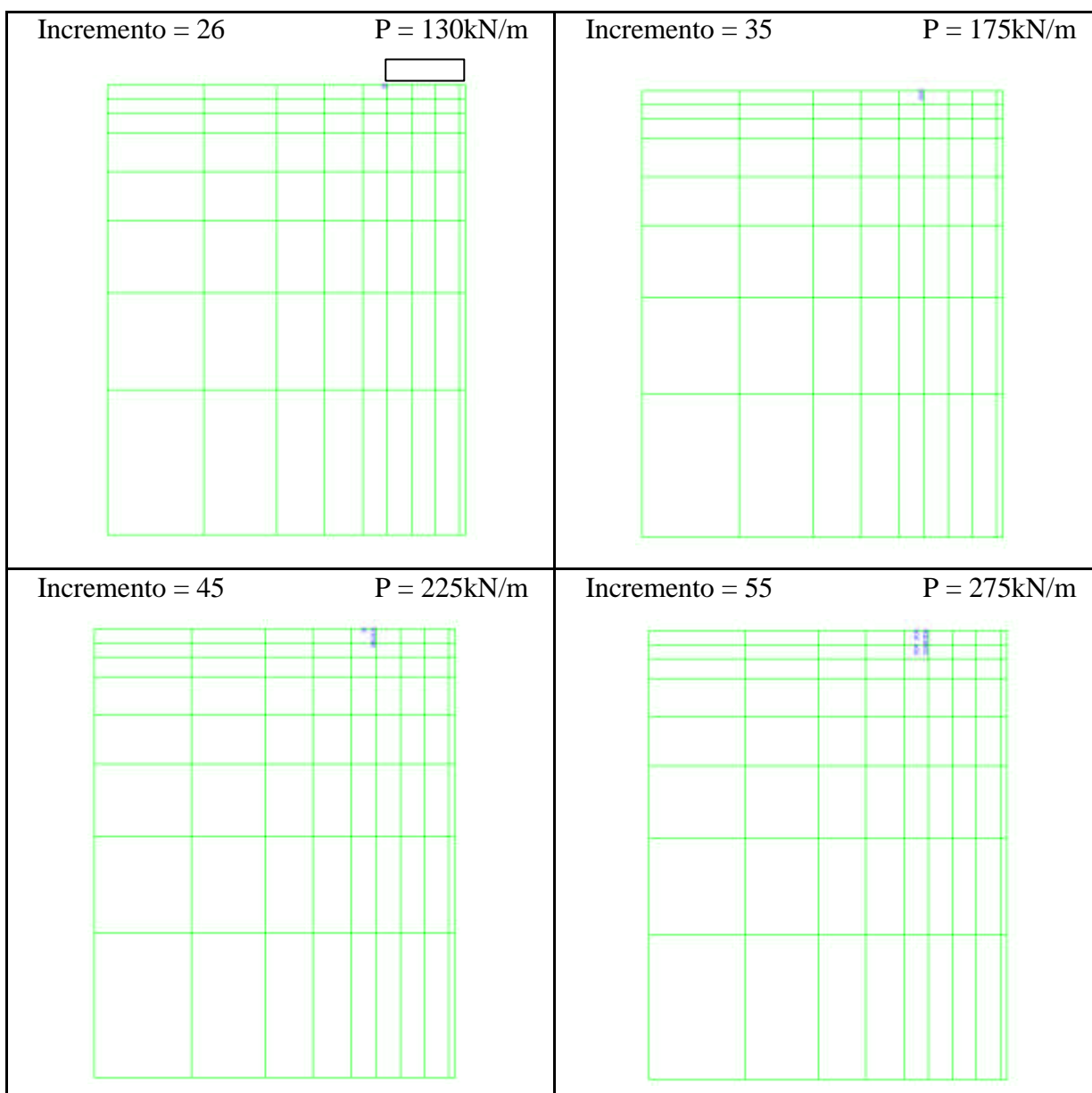


Figura 8.5: Pontos fissurados ou esmagados no concreto

8.2.5 Evolução dos pontos plastificados na malha de elementos finitos de solo

Nas figuras, que seguem, são mapeados os pontos de integração onde é iniciada a plastificação do solo. Este tipo de gráfico tem uma importante tarefa de indicar se a plastificação na massa de solo se inicia na mesma região na qual as tensões normais de interface fundação-solo são maiores e confirmar a distribuição de tensões, que é admitida no dimensionamento de uma fundação corrida de concreto armado.



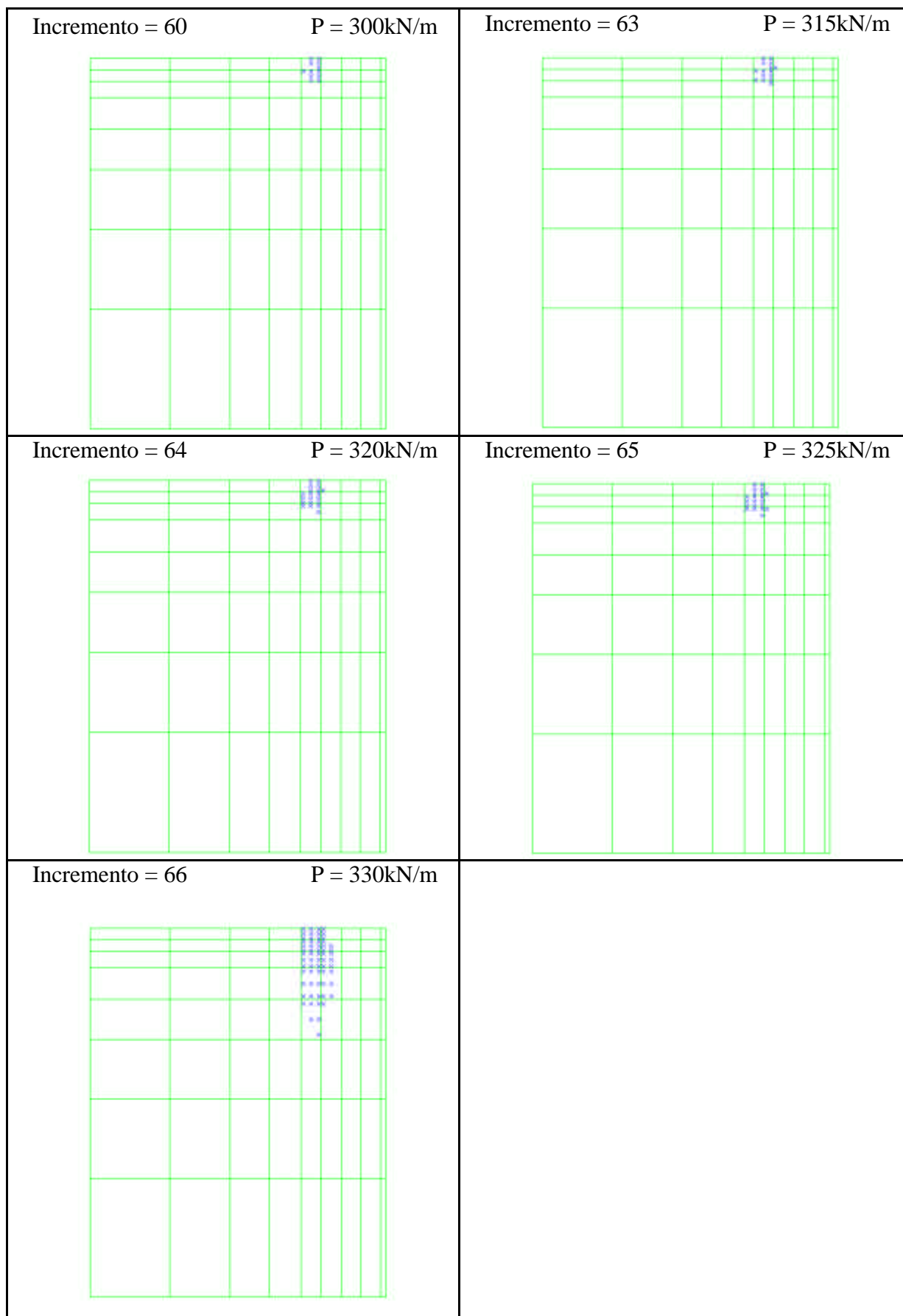


Figura 8.6: Pontos de Gauss plastificados no solo

8.2.6 Diagramas de tensões na interface fundação-solo

Na figura 8.7, é apresentada a distribuição de tensões na interface fundação-solo para diferentes incrementos aplicados. Devido à simetria, é apresentado o gráfico para apenas metade da fundação.

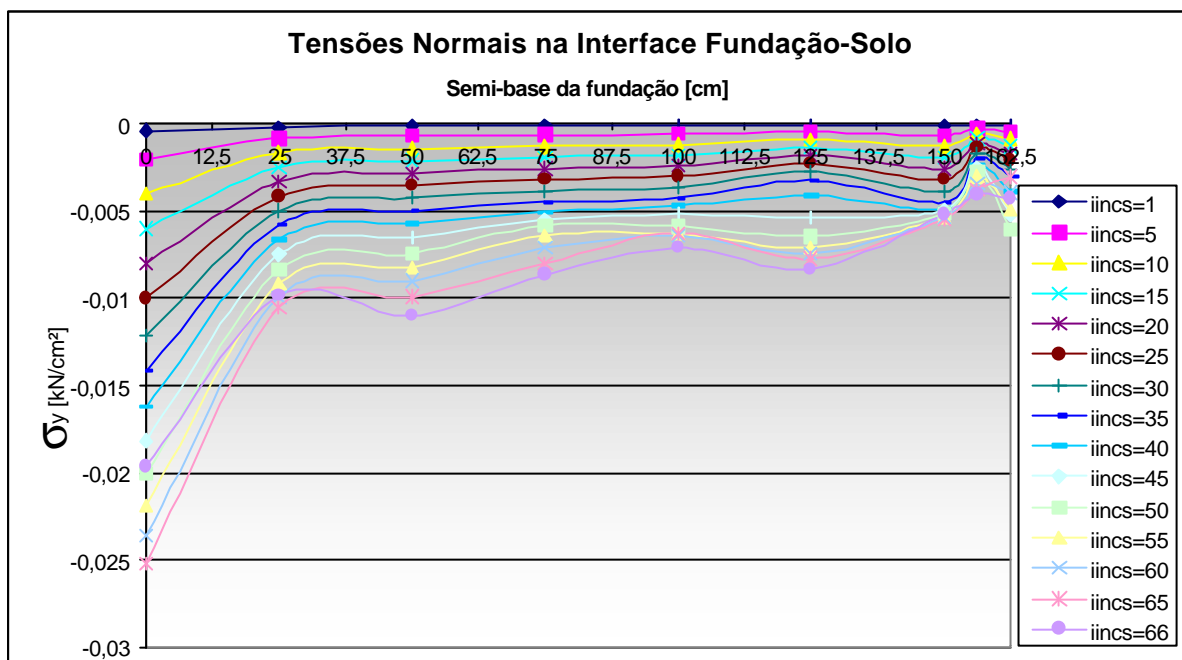


Figura 8.7: Tensões normais na interface fundação-solo

8.2.7 Conclusões do exemplo n°1

No exemplo n°1, cujos resultados foram apresentados anteriormente, a fundação de concreto armado apoiava-se sobre um solo com rigidez e tensão de plastificação baixas. Neste caso, a rigidez relativa fundação-solo é muito alta. A distribuição de tensões normais verticais está de acordo com a distribuição de Boussinesq, com o pico de tensões no canto da sapata e o mínimo de tensões no centro. A figura 8.7 apresenta as tensões de interface fundação-solo em diversos incrementos de carga e observa-se que a distribuição está em concordância com a teoria.

No incremento 26 (130 kN/m), deu-se início a plastificação do solo, enquanto a distribuição de tensões no concreto se mantinha linear (figura 8.2). Como os picos de tensões se concentravam nos cantos, a plastificação do solo iniciou-se nesta mesma região, como se pode observar na figura 8.6. O concreto se manteve íntegro, isto é, sem fissuras ou esmagamento de algum ponto de integração até o incremento 36 (180kN/m). No incremento 37 (135kN/m) iniciou-se a etapa de formação de fissuras no centro da sapata. O crescimento

das fissuras ocorreu na região central tracionada do concreto e evoluiu até o elemento finito adjacente.

As tensões no aço mantiveram-se baixas e elásticas (figura 8.4) até o esgotamento da capacidade resistente do solo.

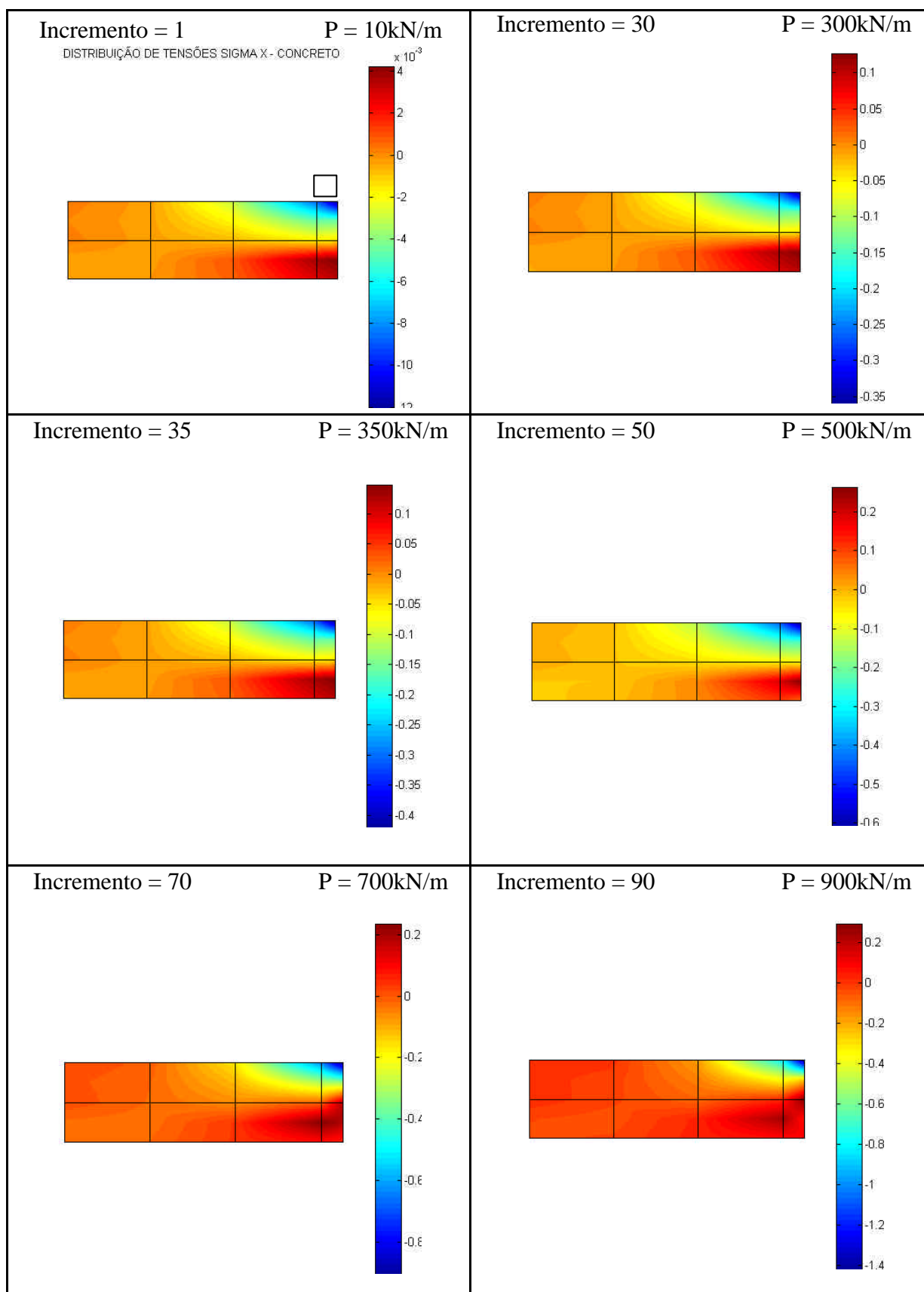
Para o solo foi utilizado um parâmetro de endurecimento, equivalente a 10% da rigidez no regime linear. Não foi possível simular o solo elastoplástico perfeito devido a problemas de convergência numérica do programa.

A falha da fundação se deu pelo esgotamento da capacidade resistente do solo (figura 8.6) no incremento 66 (330 kN/m) com uma grande região plastificada. É interessante observar a distribuição de tensões normais verticais no solo. São apresentadas três telas na figura 8.3. No incremento 1 (5 kN/m), o material está no regime elástico com tensões máximas nos cantos da fundação conforme a teoria para fundações com rigidez relativa alta. No incremento 26 (130 kN/m), inicia-se a plastificação do solo. O gráfico apresenta a mesma distribuição de tensões do regime elástico com isotensões em forma de “bulbos de pressão”. No último incremento, incremento 66 (330 kN/m) é possível observar a plastificação do solo.

8.3 RESULTADOS OBTIDOS PARA FUNDAÇÃO APOIADA SOBRE SOLO DE RIGIDEZ INTERMEDIÁRIA

No **exemplo n°2**, simulou-se um solo de rigidez média e observou-se como evoluíram as tensões e as deformações nos materiais. Os parâmetros caracterizam um solo de rigidez intermediária (rocha branda). Cada incremento de carga representa exatamente a adição de 10 kN/m à etapa anterior. As telas são dispostas em uma seqüência semelhante a da seção 8.2.

8.3.1 Distribuição de tensões normais no concreto



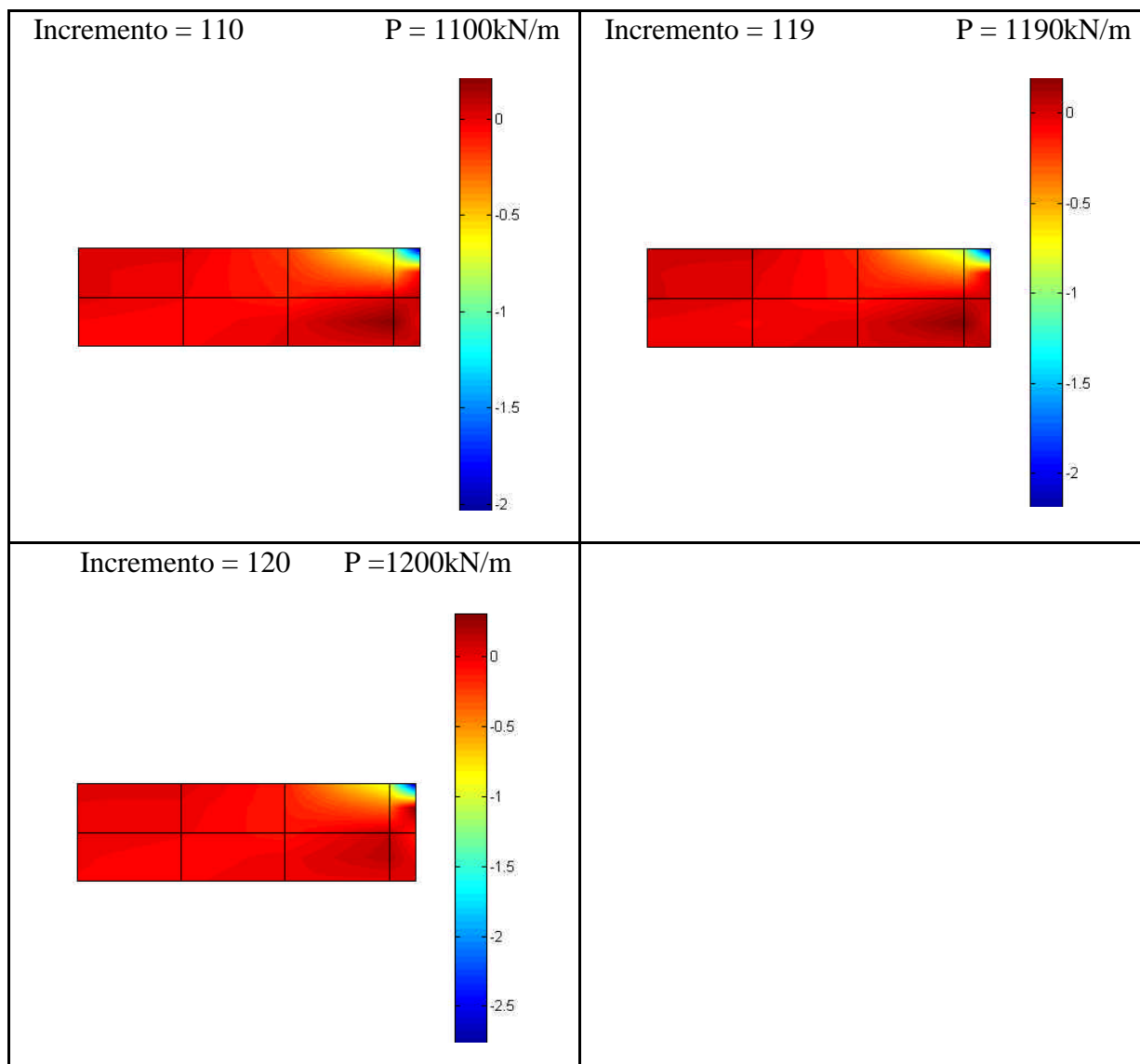
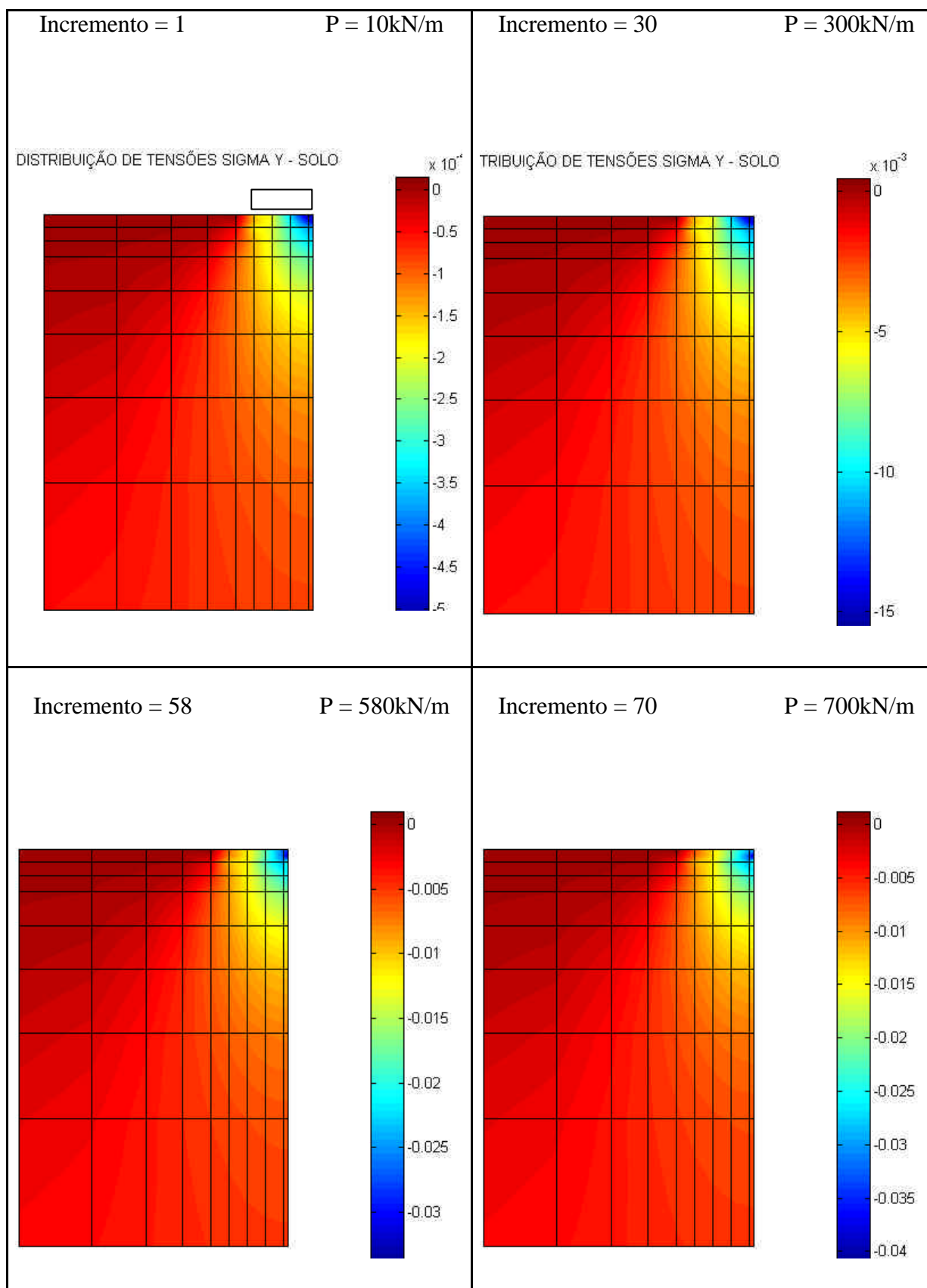


Figura 8.8: Tensões normais na interface fundação-solo

8.3.2 Distribuição de tensões normais verticais no solo



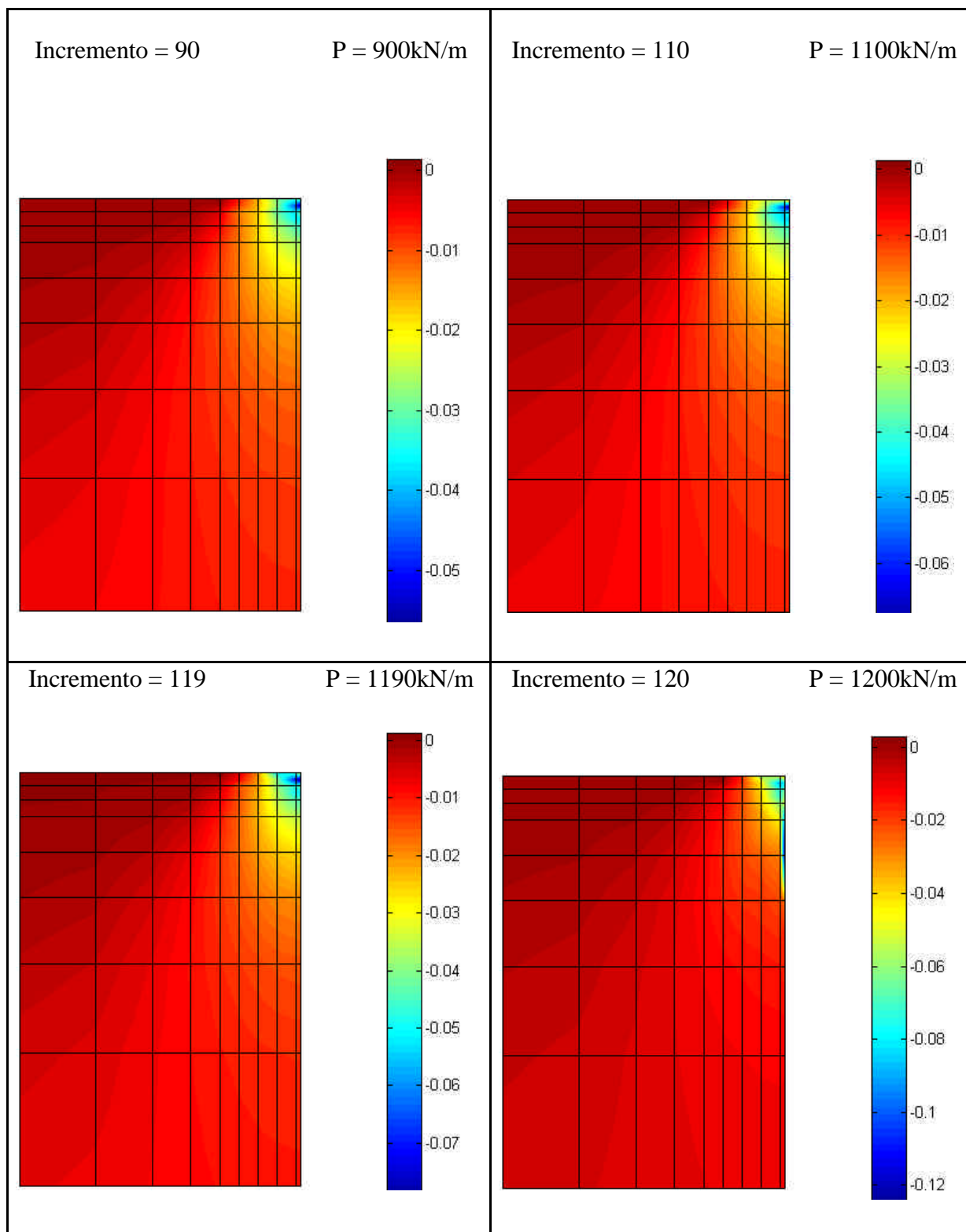
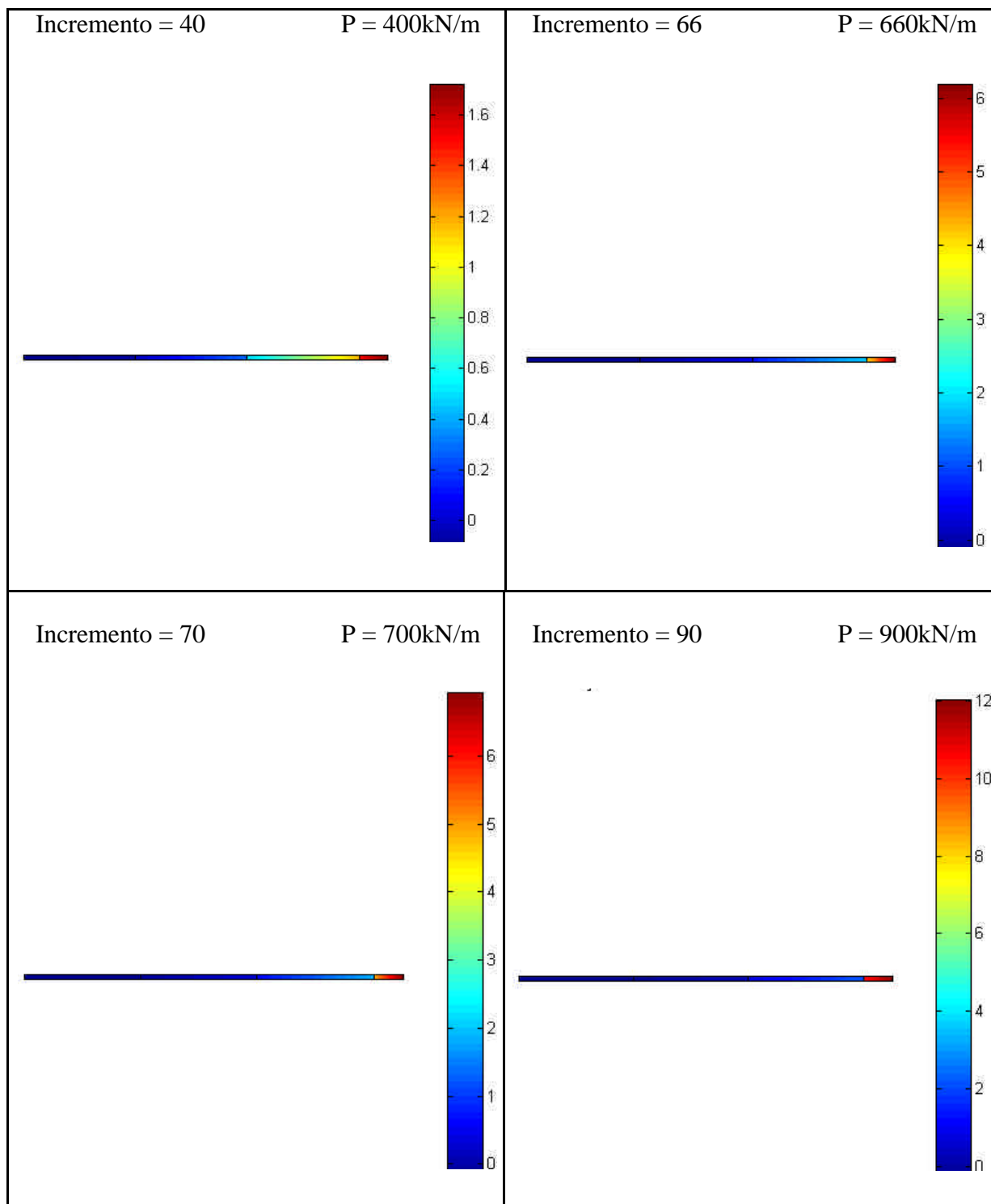


Figura 8.9: Tensões verticais normais no solo

8.3.3 Distribuição de tensões na armadura



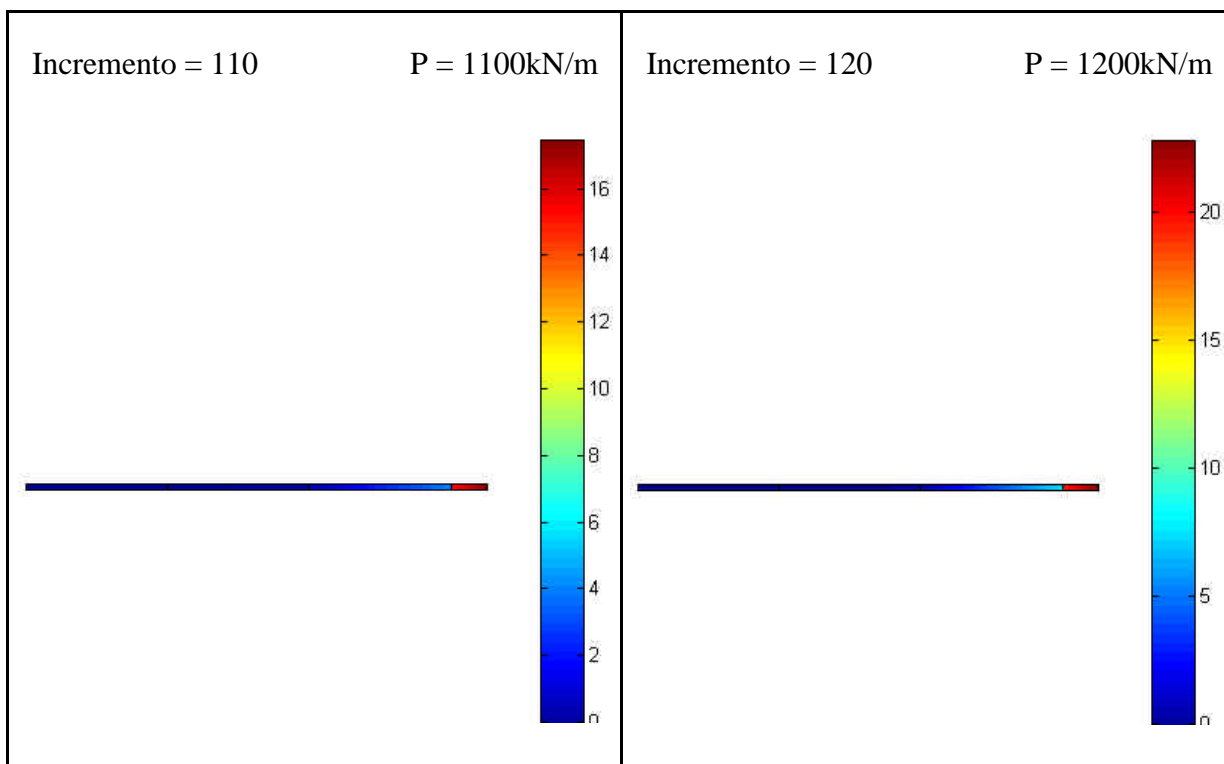
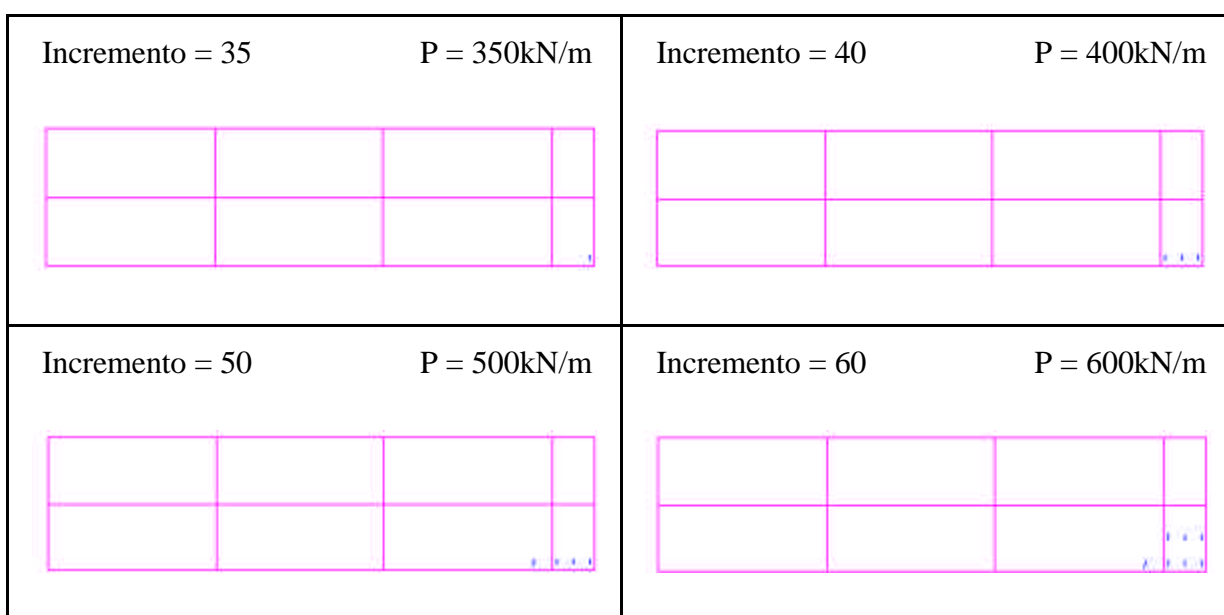


Figura 8.10: Tensões normais uniaxiais na armadura

8.3.4 Evolução da fissuração nos elementos de concreto



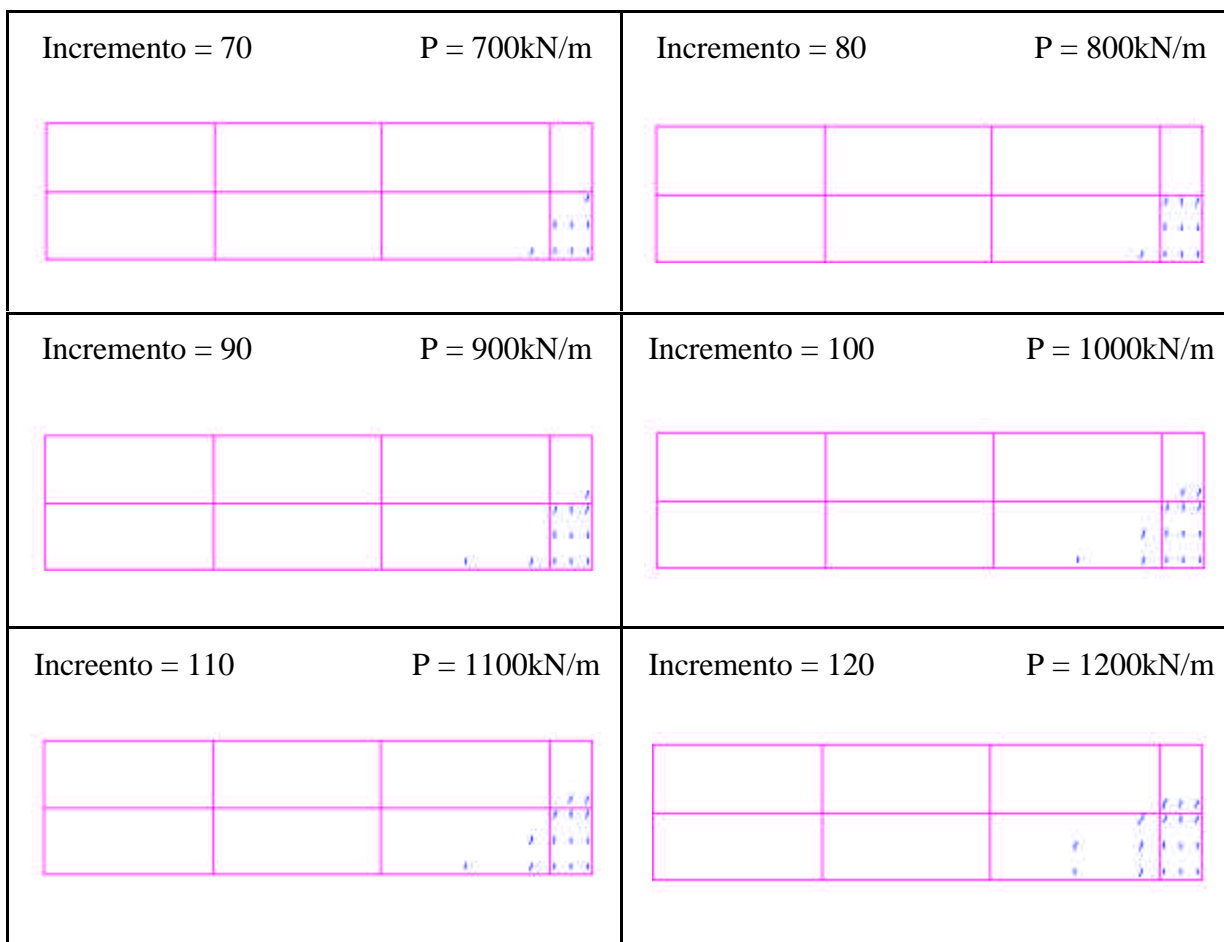
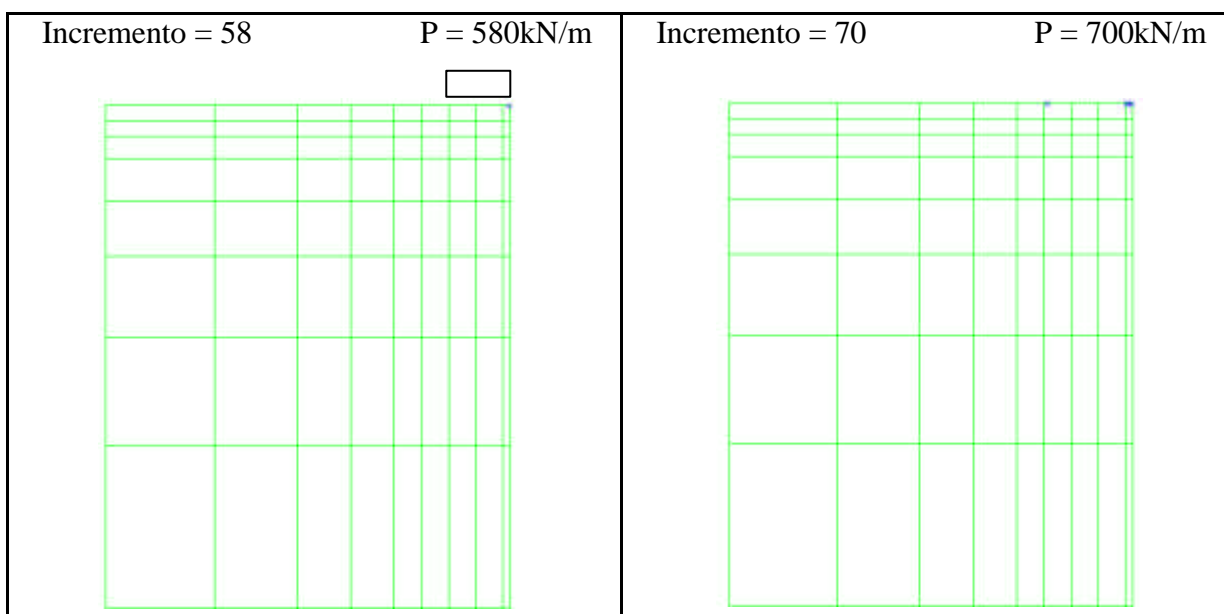
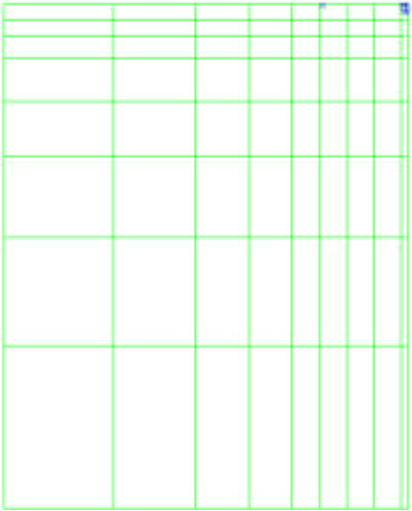
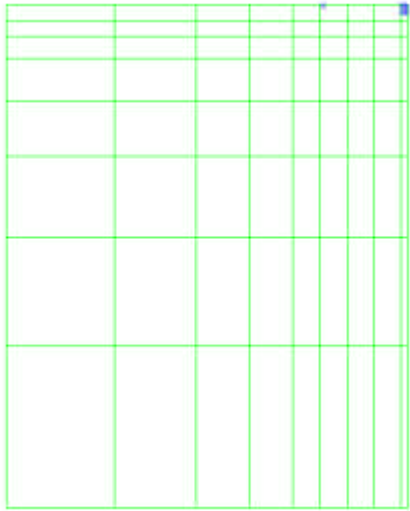
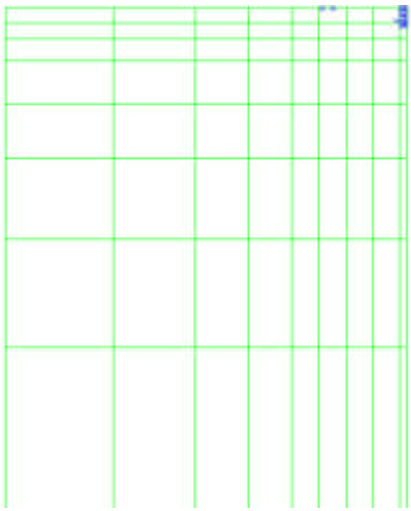
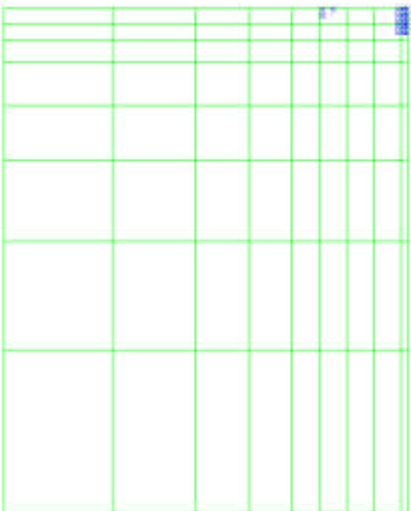
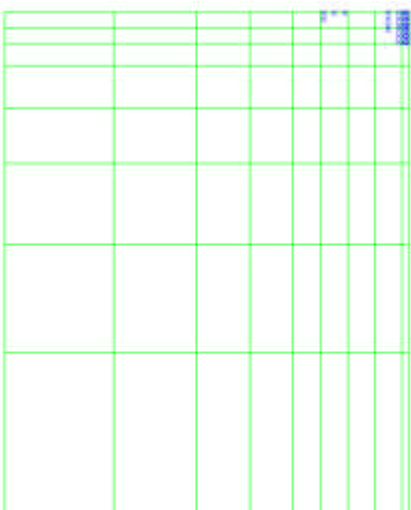
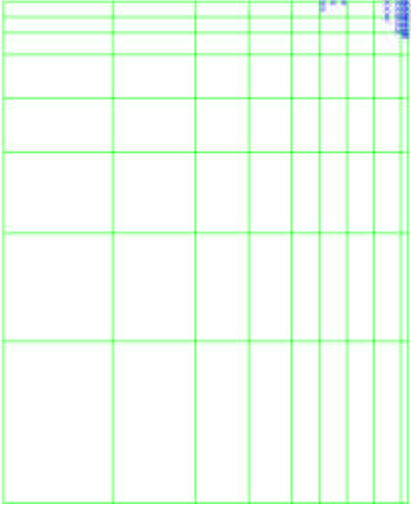


Figura 8.11: Pontos fissurados ou esmagados no concreto

8.3.5 Mapeamento dos pontos plastificados na massa de solo



<p>Incremento = 80 $P = 800\text{kN/m}$</p> 	<p>Incremento = 90 $P = 900\text{kN/m}$</p> 
<p>Incremento = 100 $P = 1000\text{kN/m}$</p> 	<p>Incremento = 110 $P = 1100\text{kN/m}$</p> 
<p>Incremento = 118 $P = 1180\text{kN/m}$</p> 	<p>Incremento = 119 $P = 1190\text{kN/m}$</p> 

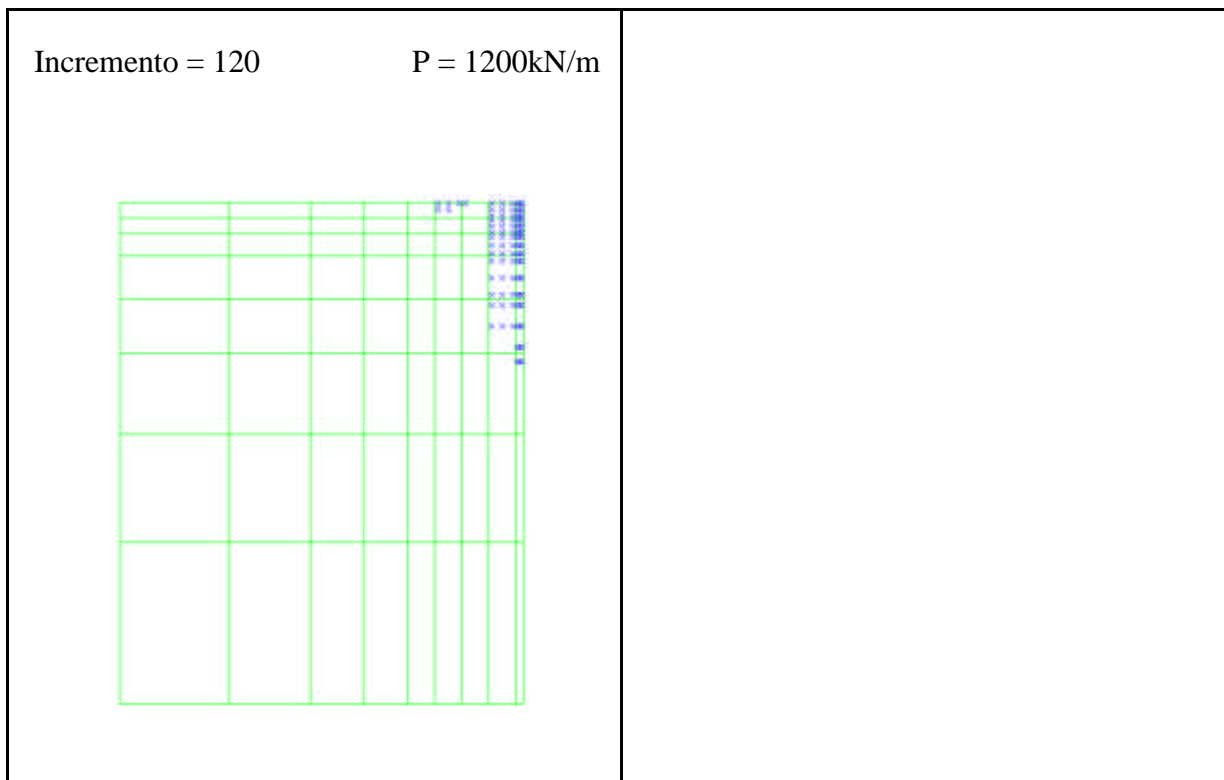


Figura 8.12: Pontos de Gauss plastificados no solo

8.3.6 Diagramas de tensões na interface fundação-solo

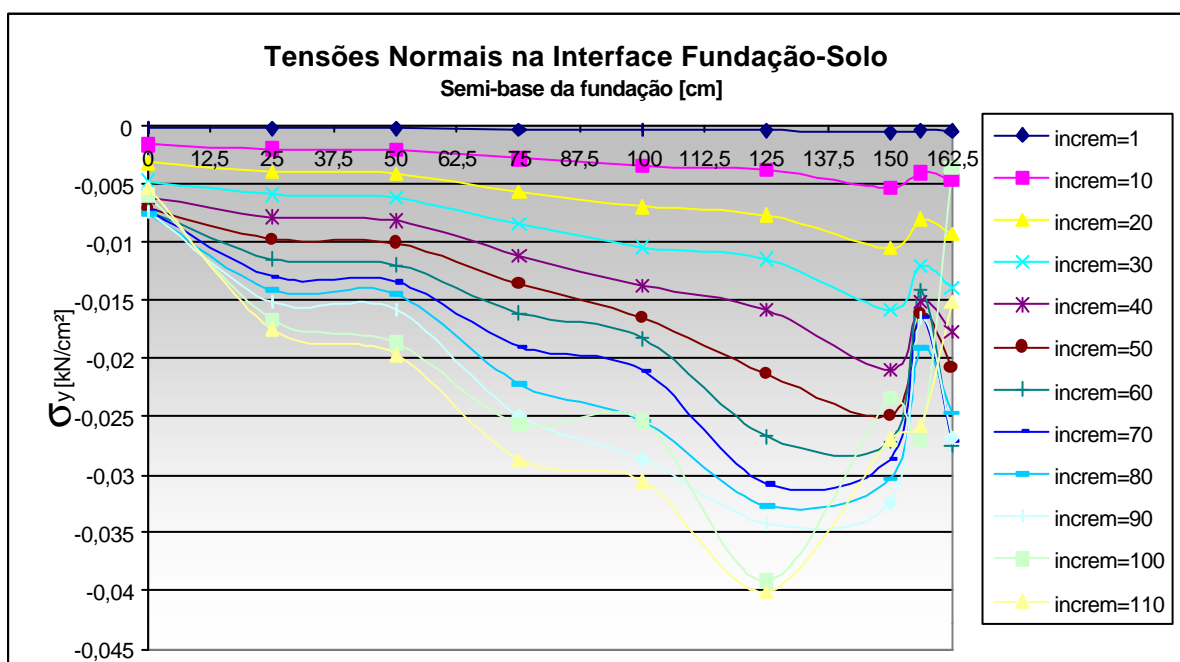


Figura 8.13: Tensões normais na interface fundação-solo

8.3.7 Conclusões do exemplo n°2

No exemplo n°2, como pode ser visto na figura 8.13, a distribuição de tensões na interface fundação-solo não é uniforme, existindo uma concentração de tensões no centro da sapata. A plastificação do solo inicia-se no incremento 58 (580 kN/m) no centro da sapata como pode ser visto na figura 8.12. No incremento 70 (700 kN/m), observa-se um aumento na região plastificada, no centro da sapata, e surgem alguns pontos plastificados no canto da sapata. O crescimento dos pontos de integração plastificados é mais acentuado logo abaixo do centro da sapata. Nos incrementos 1 (10 kN/m), 30 (300 kN/m) até o incremento 58 (580 kN/m), o solo se comporta elasticamente e a distribuição de tensões no canto da sapata não apresenta um pico de tensões.

A fissuração do concreto inicia-se no incremento 35 (350 kN/m), apresentando evolução muito semelhante a do exemplo n°1.

As tensões de tração, que solicitam a armadura, são baixas antes da formação de um número acentuado de fissuras no concreto. Com o concreto fissurado, o aço aumenta consideravelmente suas tensões de tração a cada incremento de carga. No último incremento, que corresponde ao incremento 120 (1200 kN/m), o concreto está com a maior região fissurada e a máxima tensão na armadura atinge aproximadamente 25 kN/cm². É interessante observar que as tensões que solicitam a armadura variam apenas na região onde o concreto está fissurado. Na região na qual o concreto está íntegro a armadura quase não é solicitada.

Comparativamente ao exemplo n°1, o concreto, a armadura e o solo atingem valores de tensão superiores devido a maior capacidade deste solo receber cargas.

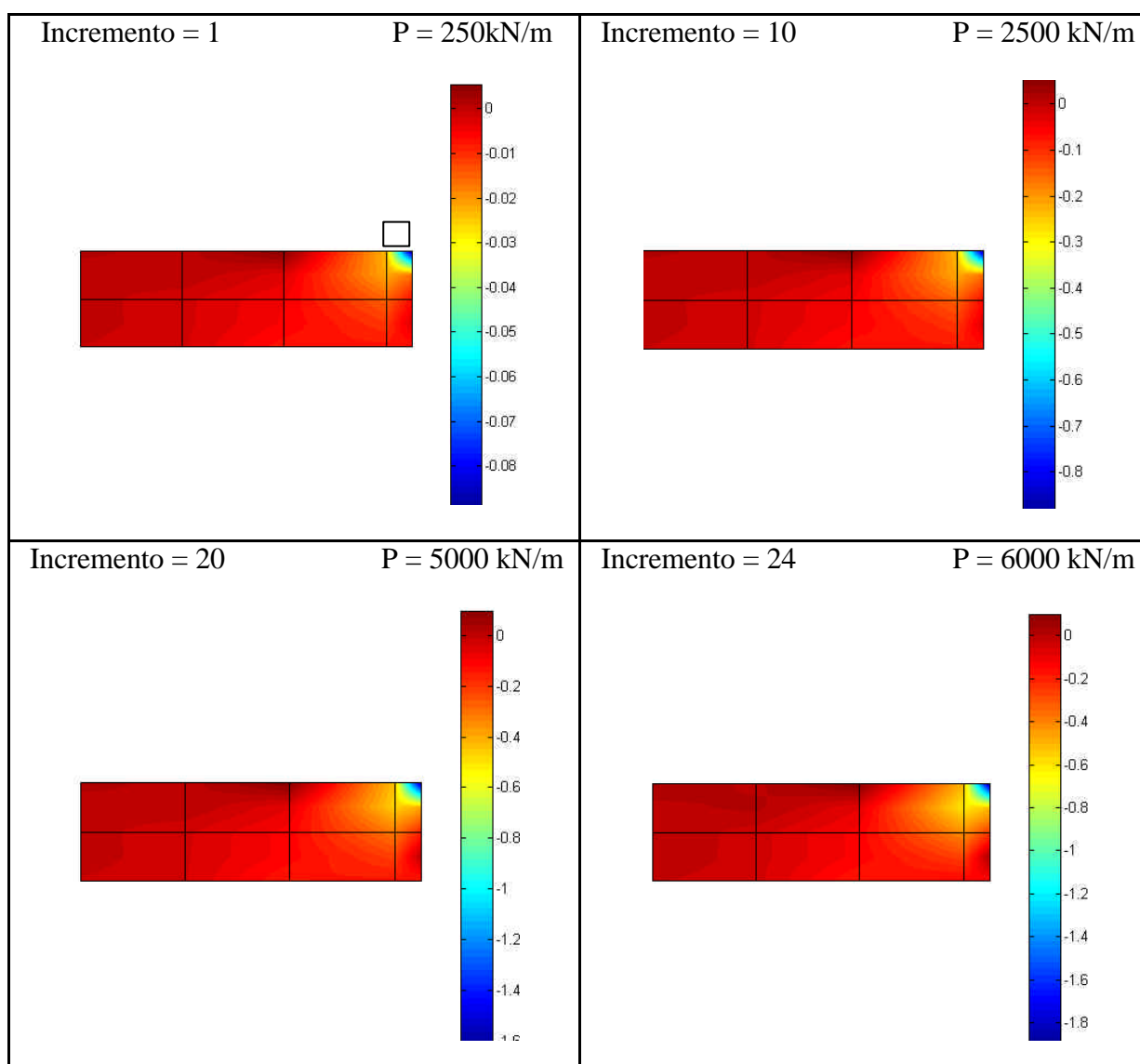
No incremento 120 (1200 kN/m), quando foi esgotada a capacidade resistente do solo, pode-se observar uma grande região de solo plastificada.

8.4 RESULTADOS OBTIDOS PARA FUNDAÇÃO APOIADA SOBRE SOLO DE RIGIDEZ SUPERIOR, SEM ARMADURAS DE ANCORAGEM

As características da rocha de alta rigidez, utilizada no **exemplo n°3**, podem ser obtidas na tabela 8.1c. Para a fundação de concreto armado com estas características e com

este tipo de solo de alta rigidez foram feitas duas simulações: a primeira com a fundação conforme a figura 8.1(a) e a 2ª simulação com as armaduras de ancoragem do elemento estrutural que se apoia na fundação, conforme a figura 8.1(b). Cada incremento de carga representa exatamente a adição de 250 kN/m a etapa anterior. As telas são dispostas em uma seqüência semelhante a da seção 8.2.

8.4.1 Distribuição de tensões normais no concreto



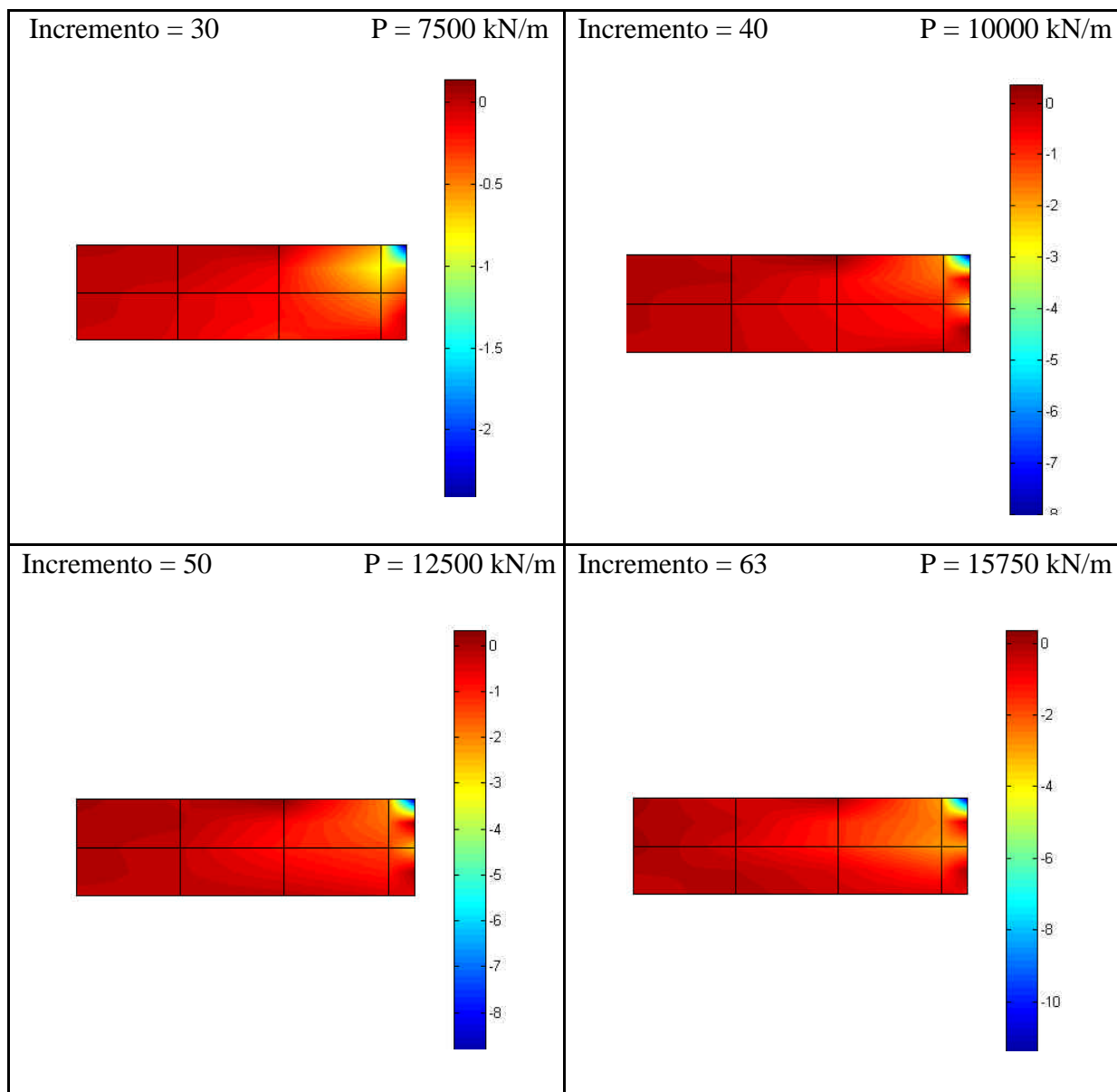


Figura 8.14: Tensões horizontais normais no concreto

8.4.2 Distribuição de tensões normais verticais no solo

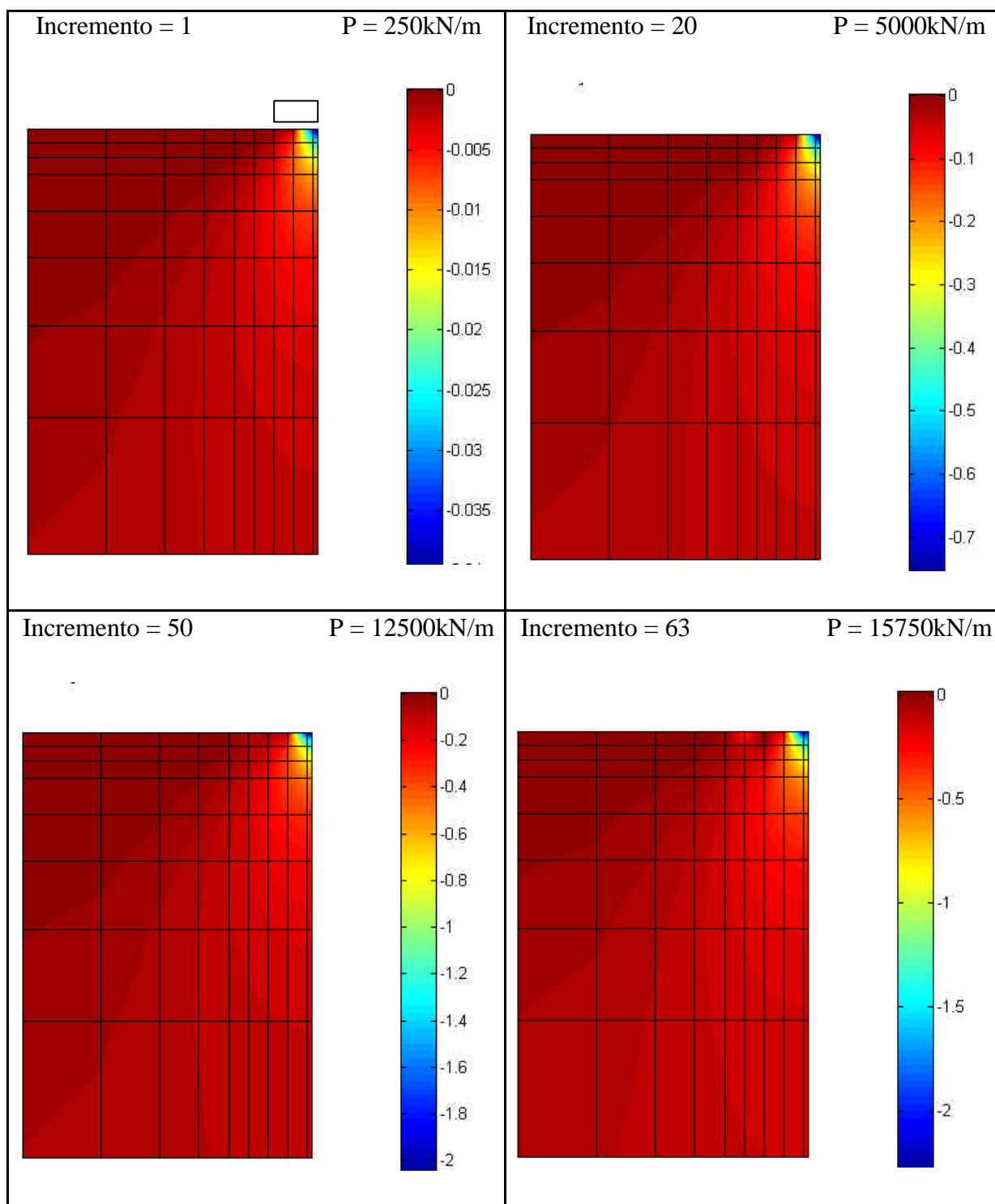
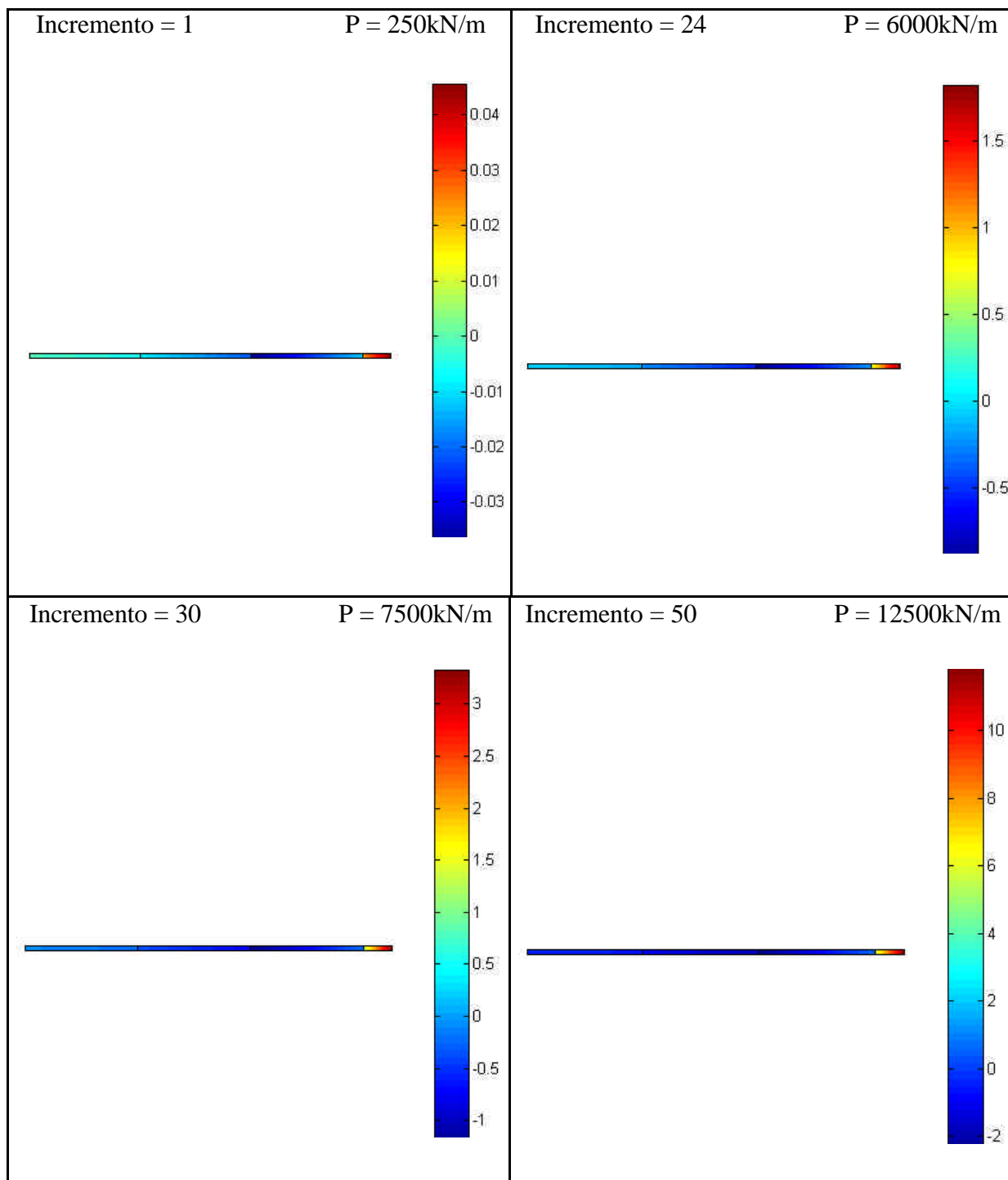


Figura 8.15: Tensões verticais normais no solo

8.4.3 Distribuição de tensões na armadura



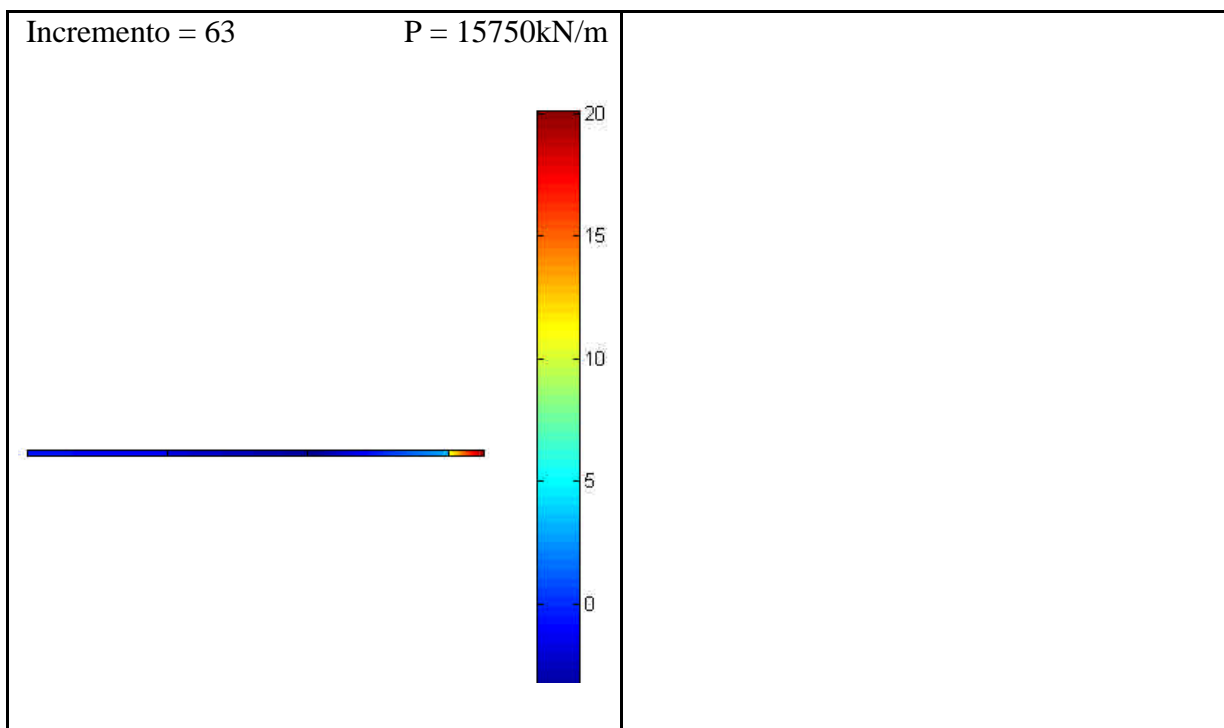
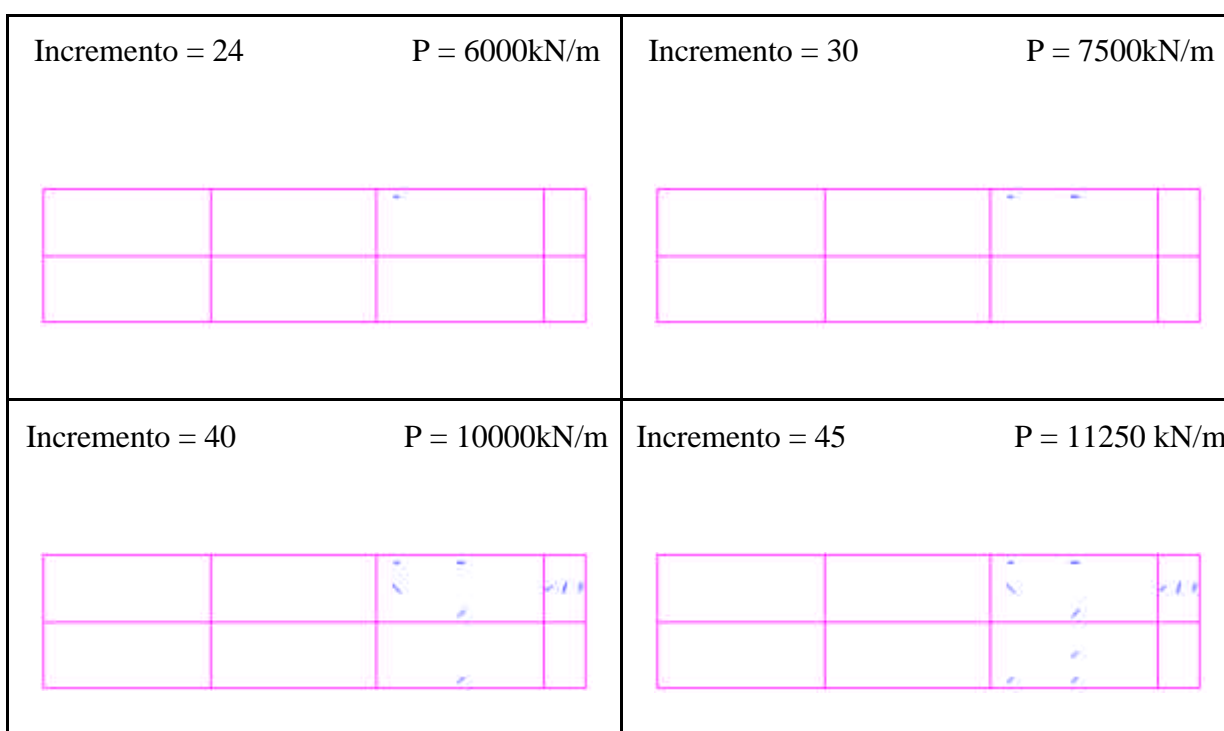


Figura 8.16: Tensões normais uniaxiais na armadura

8.4.4 Evolução da fissuração nos elementos de concreto



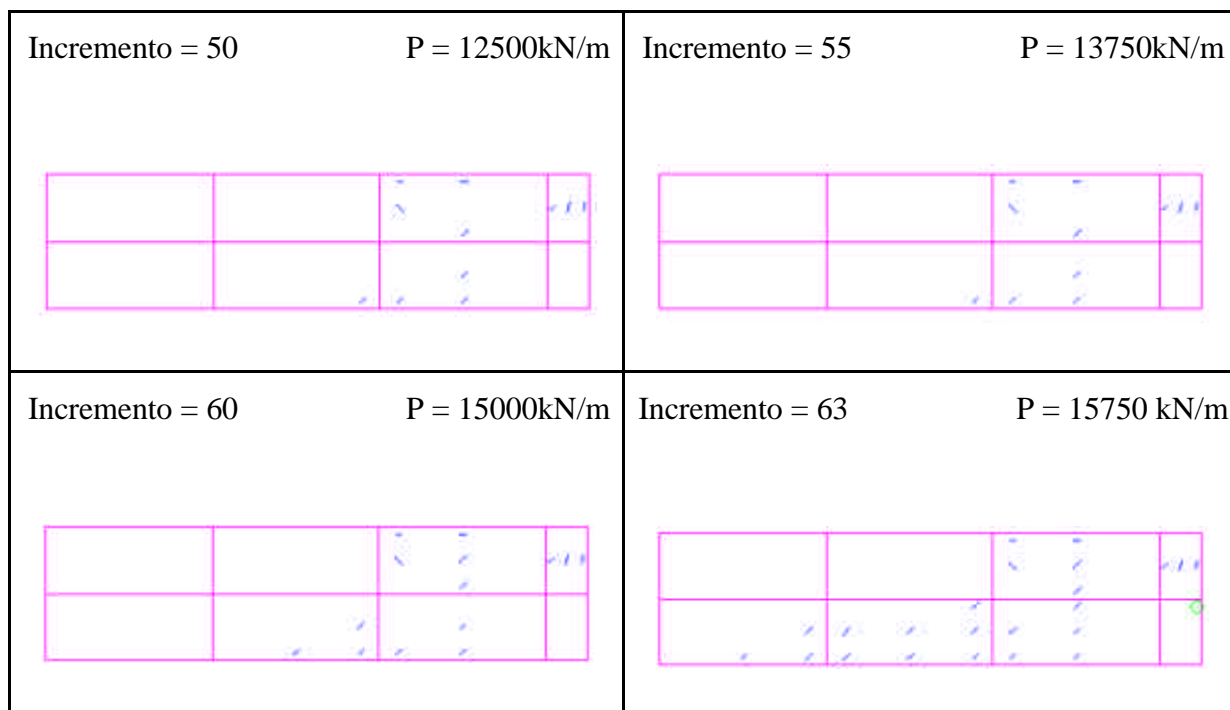


Figura 8.17: Pontos fissurados ou esmagados no concreto

8.4.5 Mapeamento dos pontos plastificados na massa de solo

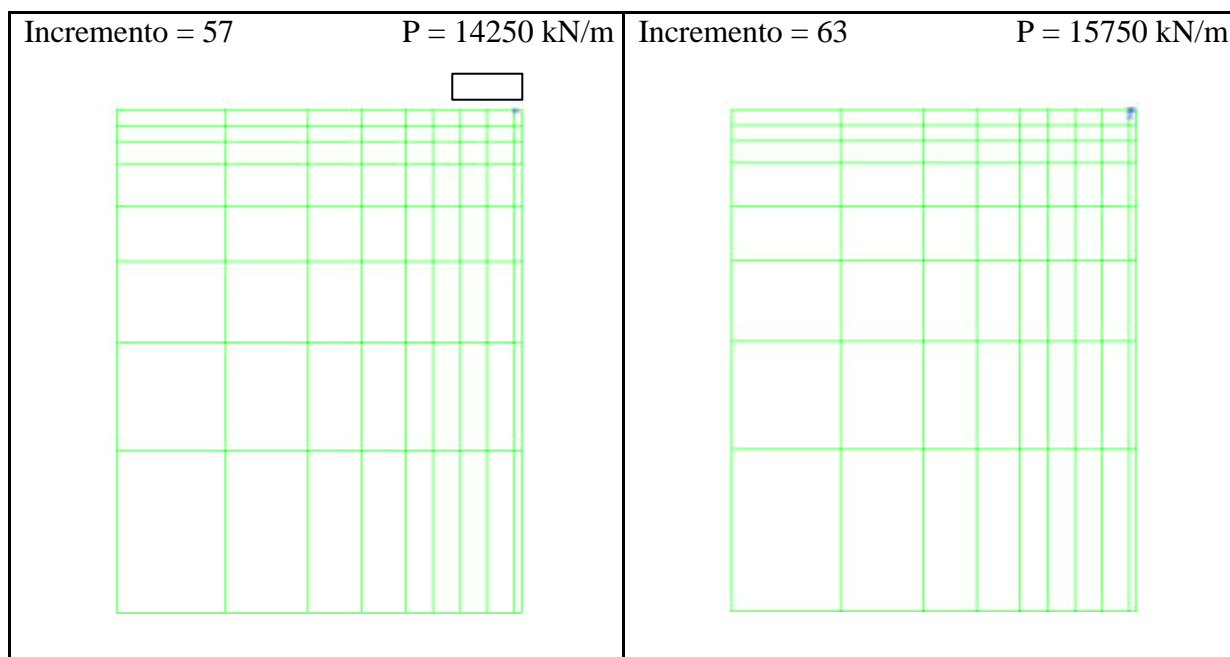


Figura 8.18: Pontos de Gauss plastificados no solo

8.4.6 Diagramas de tensões na interface fundação-solo

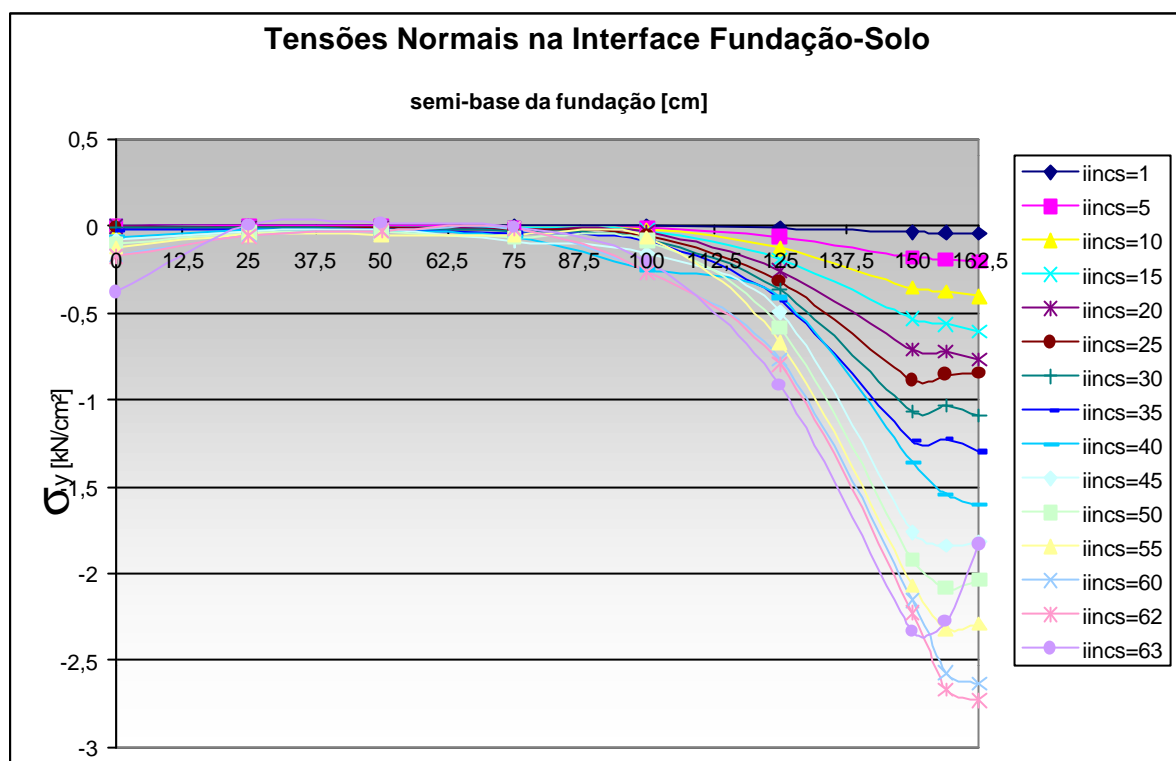


Figura 8.19: Tensões normais na interface fundação-solo

8.4.7 Conclusões do exemplo n°3 – parede estrutural sobre a sapata sem ancoragem

Uma fundação de concreto armado, apoiada em um solo de maior rigidez e resistência que o concreto, foi simulada no exemplo n°3.

No gráfico de tensões na base da fundação (figura 8.19), a reação do solo se concentra no centro da sapata e as tensões reduzem-se bruscamente quando se aproximam dos cantos (extremidade) da mesma. A distribuição de tensões está em concordância com a teoria, na qual quando se tem uma fundação sobre uma base de alta rigidez, isto é, baixa rigidez relativa entre a fundação e a base, o diagrama de tensões de interface é exatamente da forma mostrada na figura 8.19.

Nos gráficos de tensões normais horizontais (figura 8.14) no concreto é possível observar que a seção tem uma grande região comprimida com o máximo de tensões exatamente no local de aplicação da carga, e uma região tracionada com tensões bem

menores. Esta distribuição de tensões se justifica porque a fundação de concreto armado está apoiada sobre uma base de rigidez superior à própria sapata, isto é, a idéia de uma placa sobre base elástica cuja sollicitação principal é a flexão na sapata tende a ser afastada devido a alta rigidez da base (solo). A distribuição de tensões no concreto se mantém semelhante nos demais incrementos.

A região no concreto junto à posição de aplicação de carga fica submetida a um estado triaxial de tensões de compressão. As componentes de tensões verticais e horizontais de compressão geram tensões normais de compressão ao longo da fundação (direção z). Estas tensões na direção longitudinal da sapata são dependentes das duas componentes de tensão (x e y) e surgem devido a fundação estar submetida a estado plano de deformações. A região submetida ao estado triaxial de compressão gera um confinamento do concreto, que atinge tensões muito superiores à resistência à compressão uniaxial.

No solo, devido ao alto valor de tensões a ser atingido para que a plastificação do material inicie, surgem poucos pontos plastificados, que podem ser visualizados na figura 8.18. A plastificação de alguns pontos de integração no solo é atingida devido a ocorrência de tensões horizontais de tração no solo sob a fundação, que estão associadas as tensões de compressão verticais. Os pontos plastificados são localizados no centro da sapata onde o pico de tensões normais verticais de compressão ocorre como o mostrado na figura 8.19. As tensões normais verticais na figura 8.15 se distribuem em curvas de isotensões com as máximas tensões concentradas na região próxima a aplicação da carga.

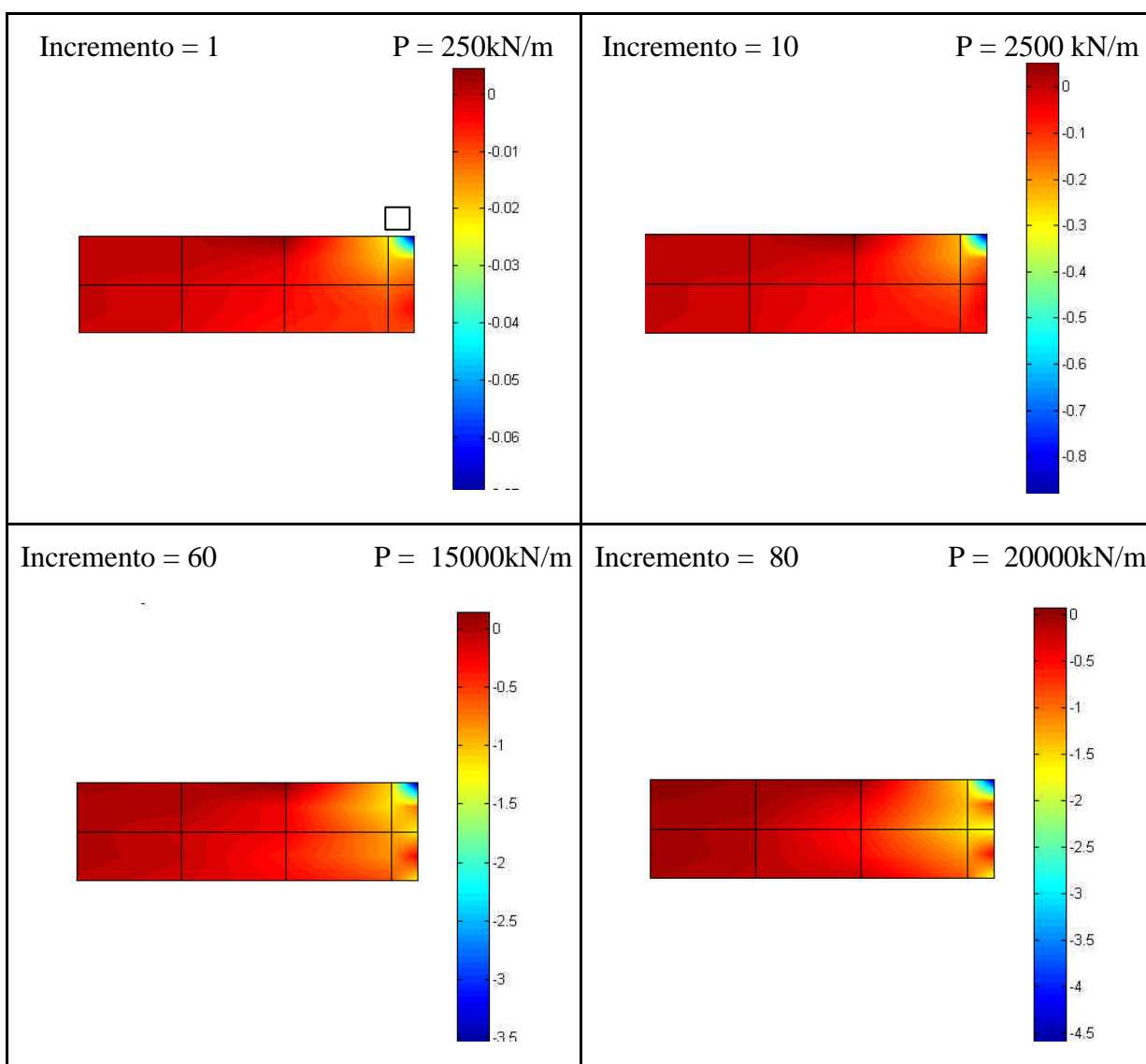
No incremento 24 (6.000 kN/m) é iniciada a fissuração do concreto. A fissuração evolui até atingir praticamente toda base da fundação no último incremento, 66 (15.750kN/m). Embora a fundação tenha sido pré-dimensionada para que não ocorresse problemas de esforço cortante, o excessivo número de fissuras associado ao esmagamento de um ponto do concreto no último incremento, causando no concreto perda de rigidez, e a não colocação de estribos faz com que a fundação não equilibre mais os esforços no último incremento. Faz-se necessário ressaltar que não é comum colocar estribos em sapatas corridas, isoladas, associadas ou de qualquer outro tipo.

As barras de aço, nos incrementos anteriores ao início da fissuração do concreto, apresentam uma variação de tensão ao longo de toda barra, com alguns pontos submetidos a pequenos valores de compressão, conforme o incremento 1 (250 kN/m) na figura 8.16. No

incremento 24 (6.000 kN/m) inicia a fissuração no concreto e as maiores tensões na armadura se concentram na região fissurada. As tensões na armadura atingem valores em torno 20kN/cm², no último incremento, incremento 66 (15.750 kN/m).

8.5 RESULTADOS OBTIDOS PARA FUNDAÇÃO APOIADA SOBRE SOLO DE RIGIDEZ SUPERIOR, COM AS ARMADURAS DE ANCORAGEM

8.5.1 Distribuição de tensões normais no concreto



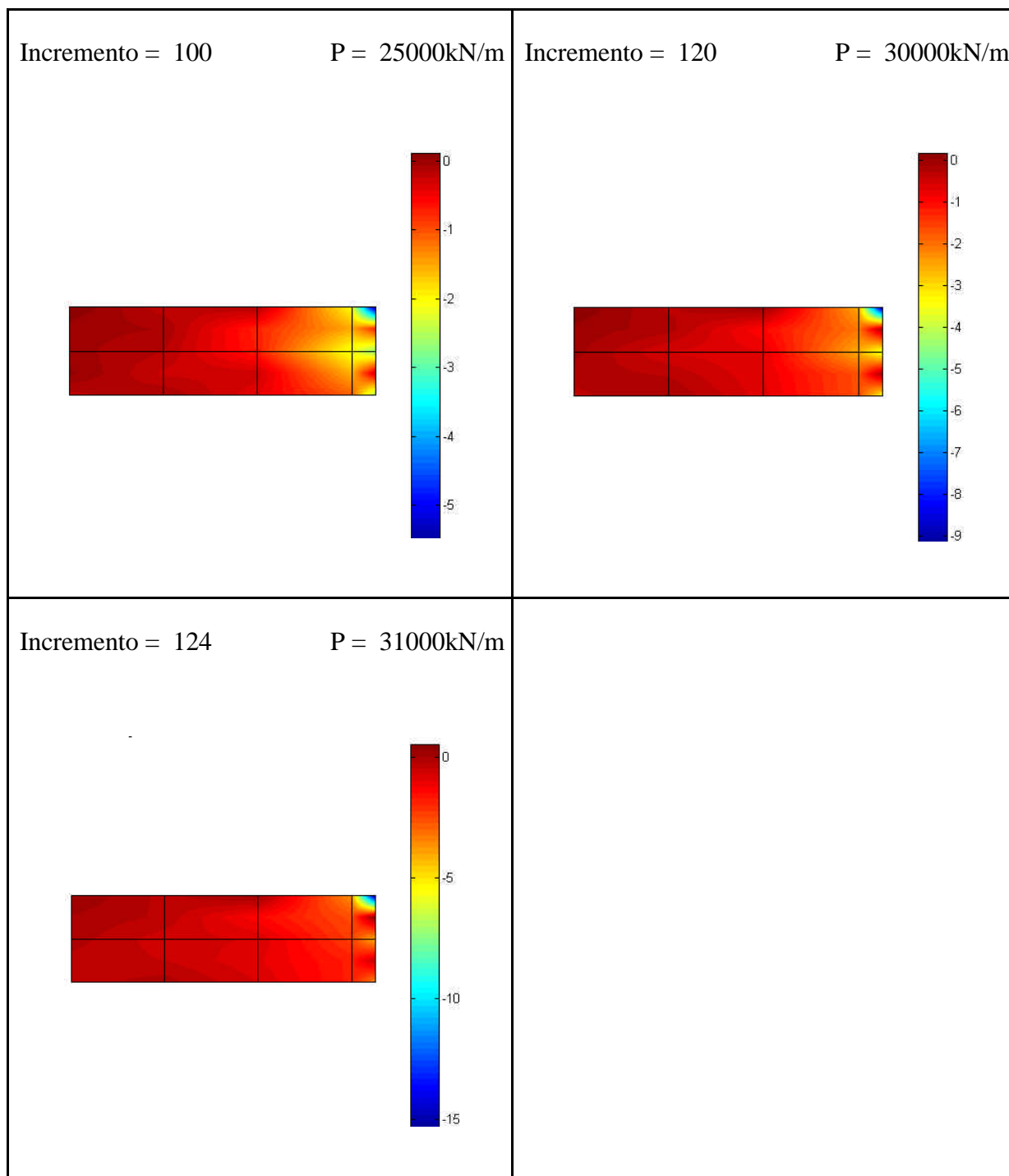


Figura 8.20: Tensões horizontais normais no concreto

8.5.2 Distribuição de tensões normais verticais no solo

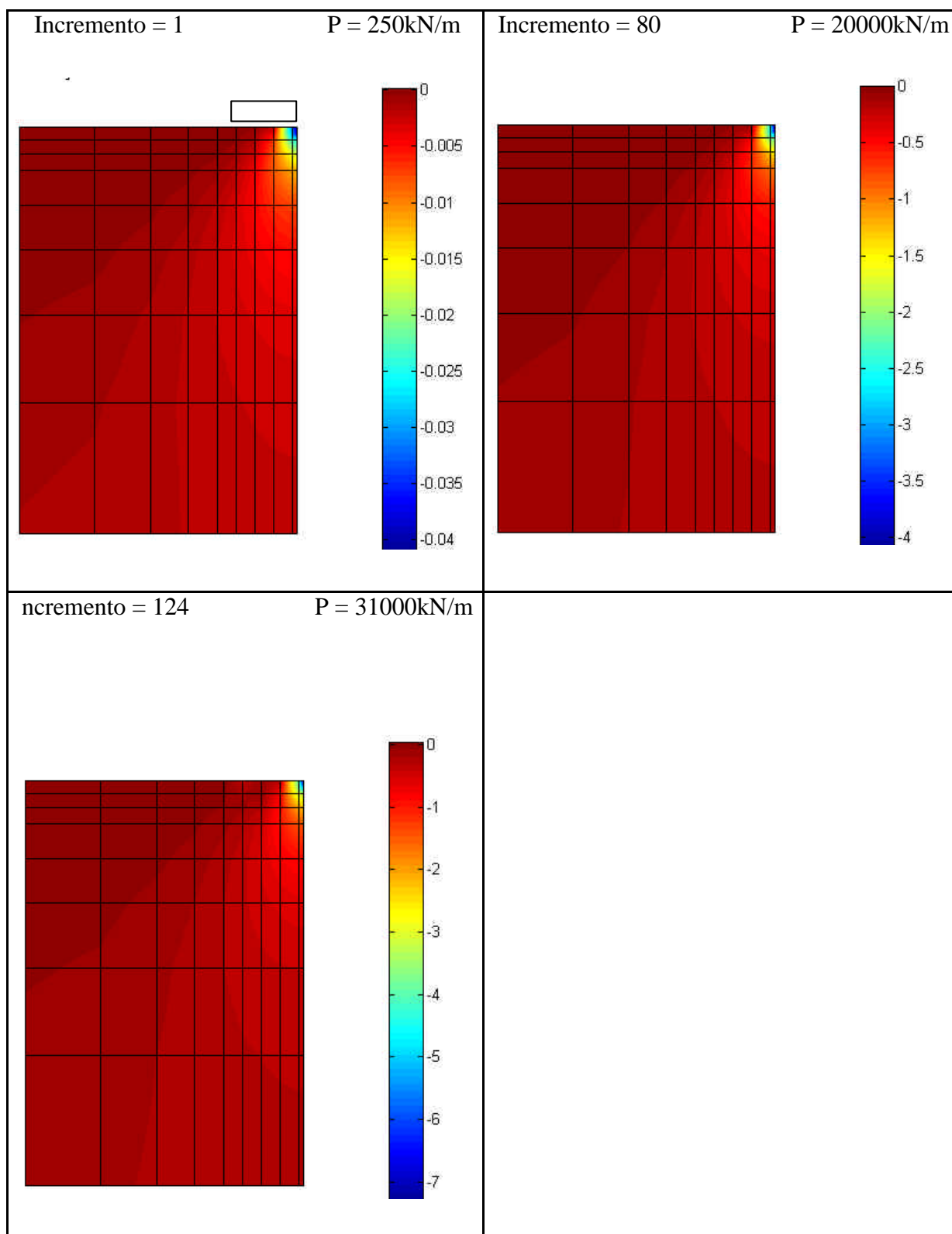
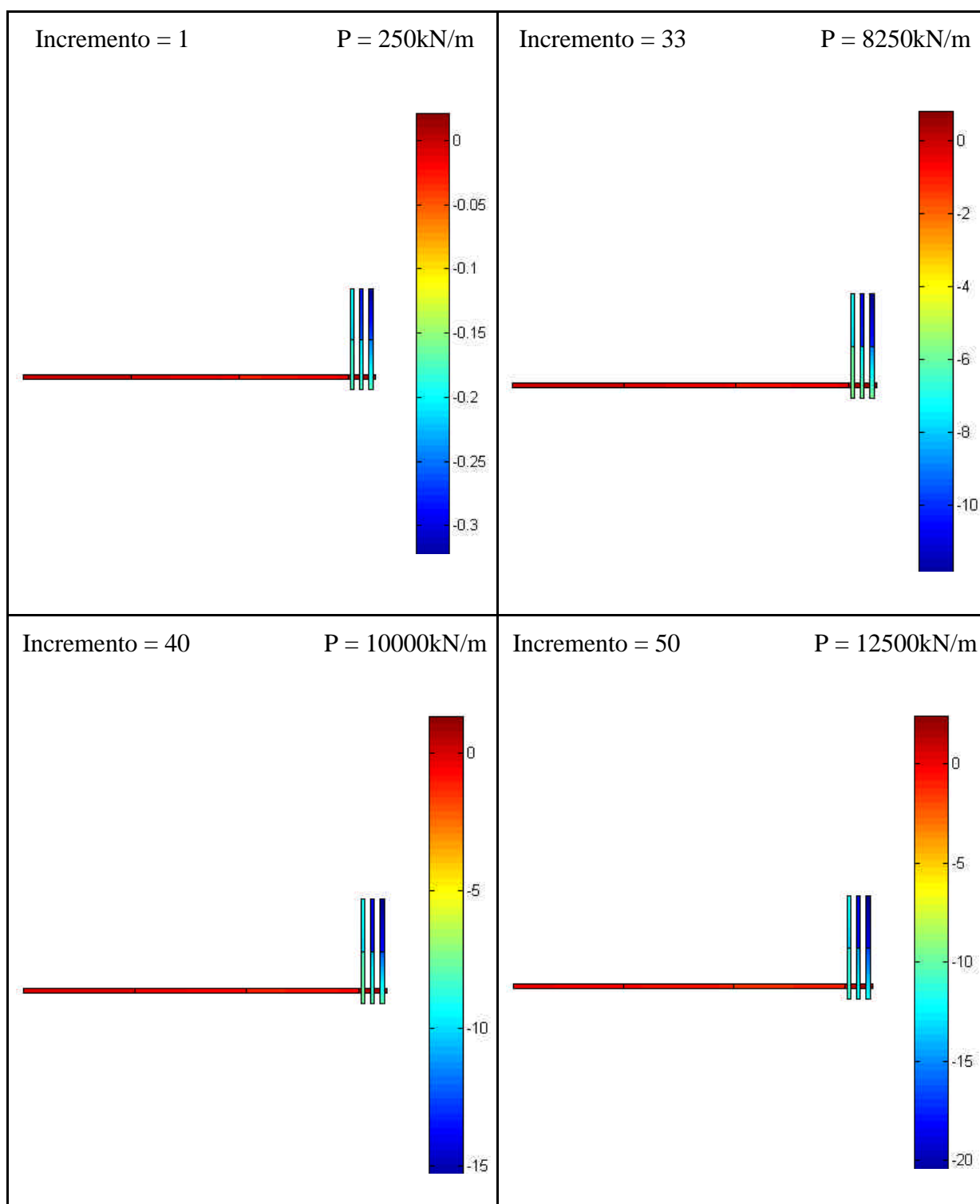
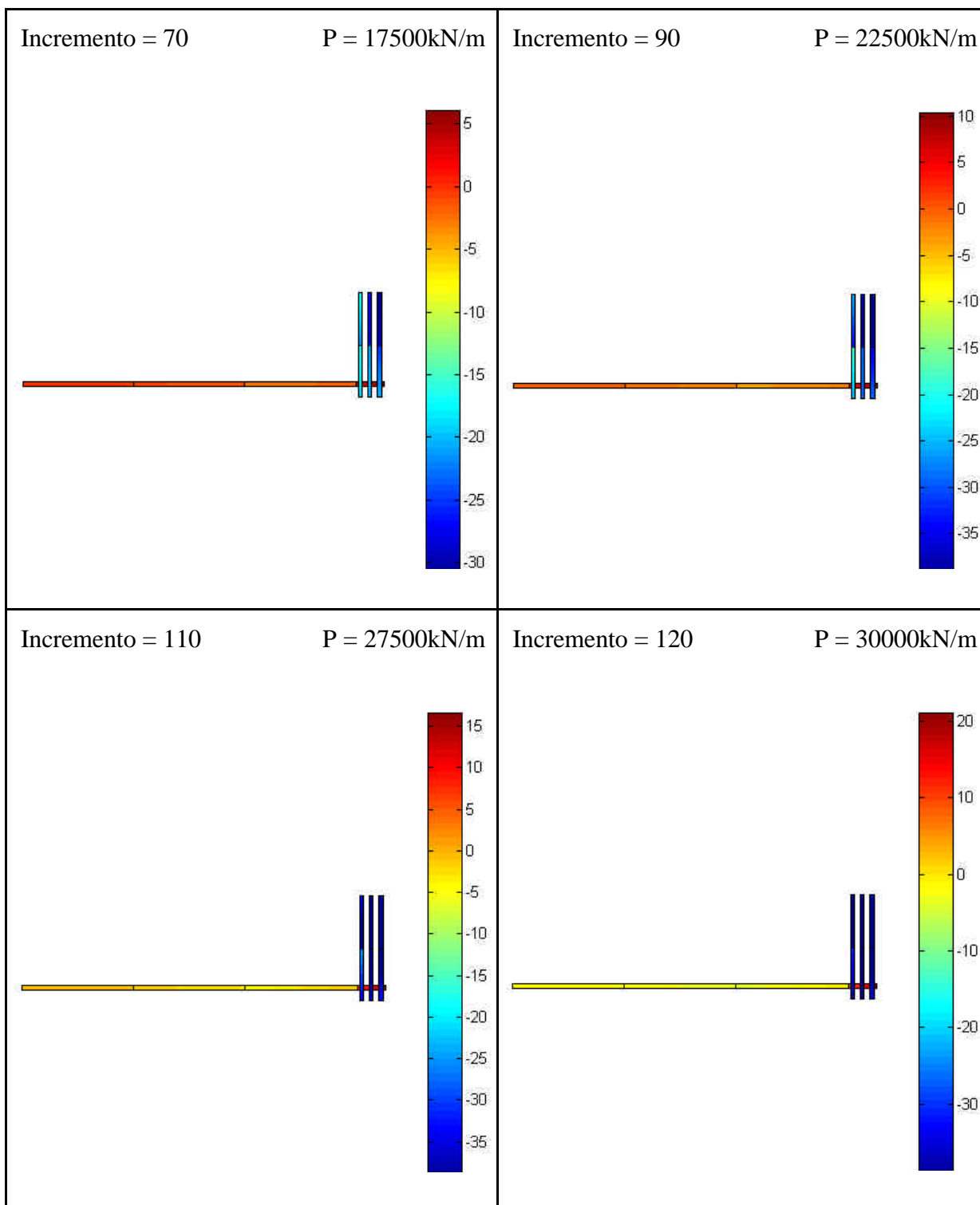


Figura 8.21: Tensões verticais normais no solo

8.5.3 Distribuição de tensões na armadura





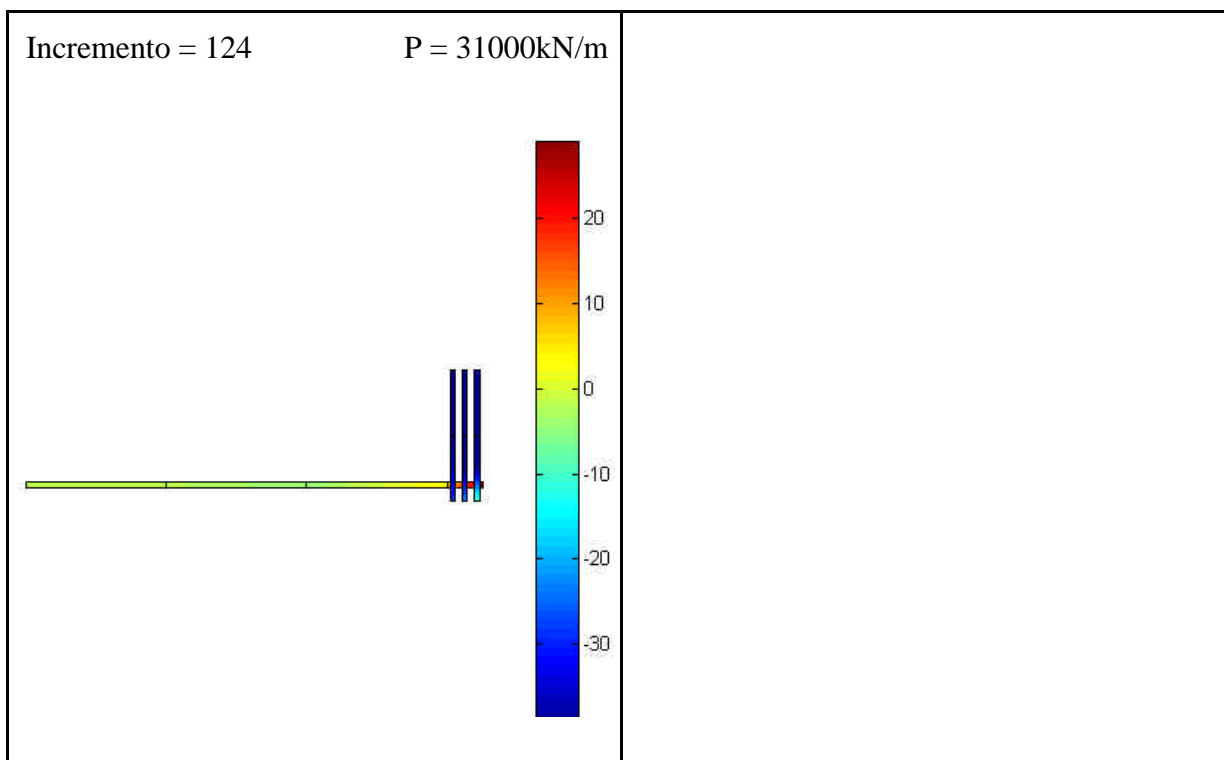
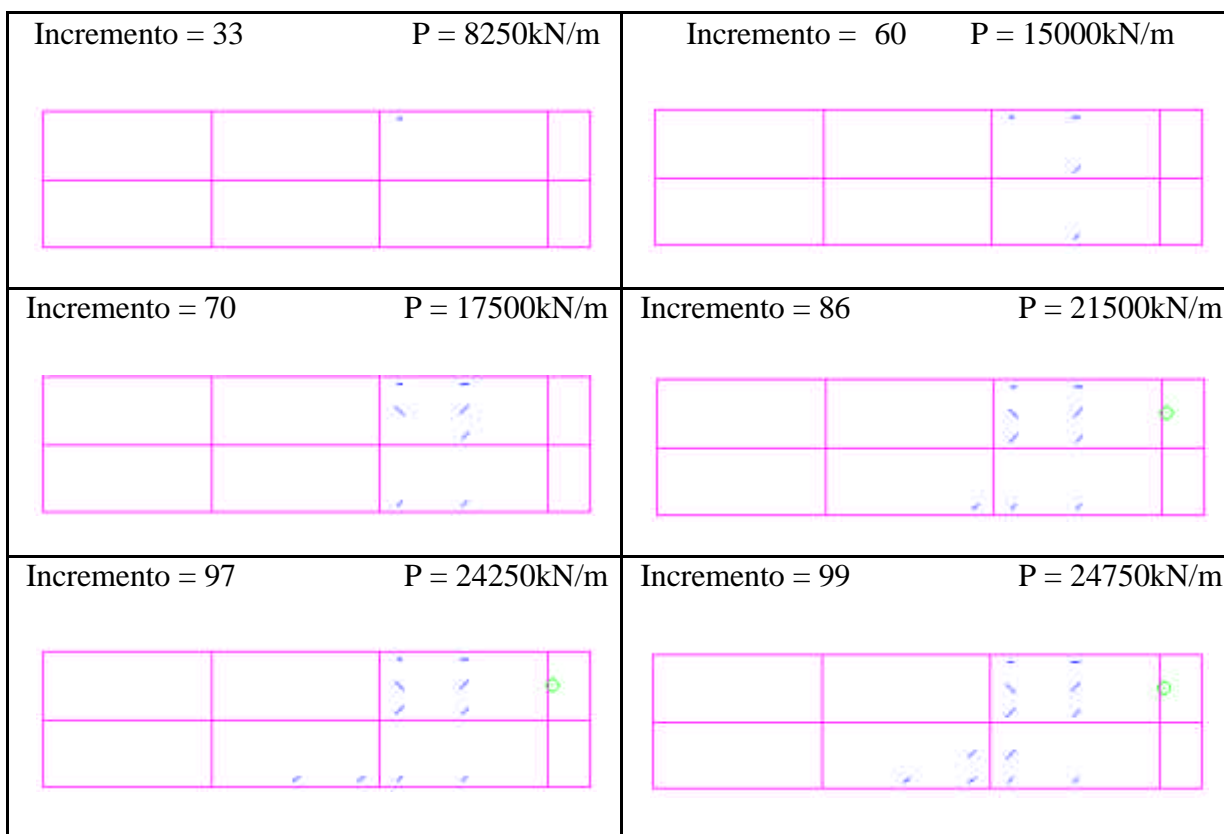


Figura 8.22: Tensões normais uniaxiais na armadura

8.5.4 Evolução da fissuração nos elementos de concreto



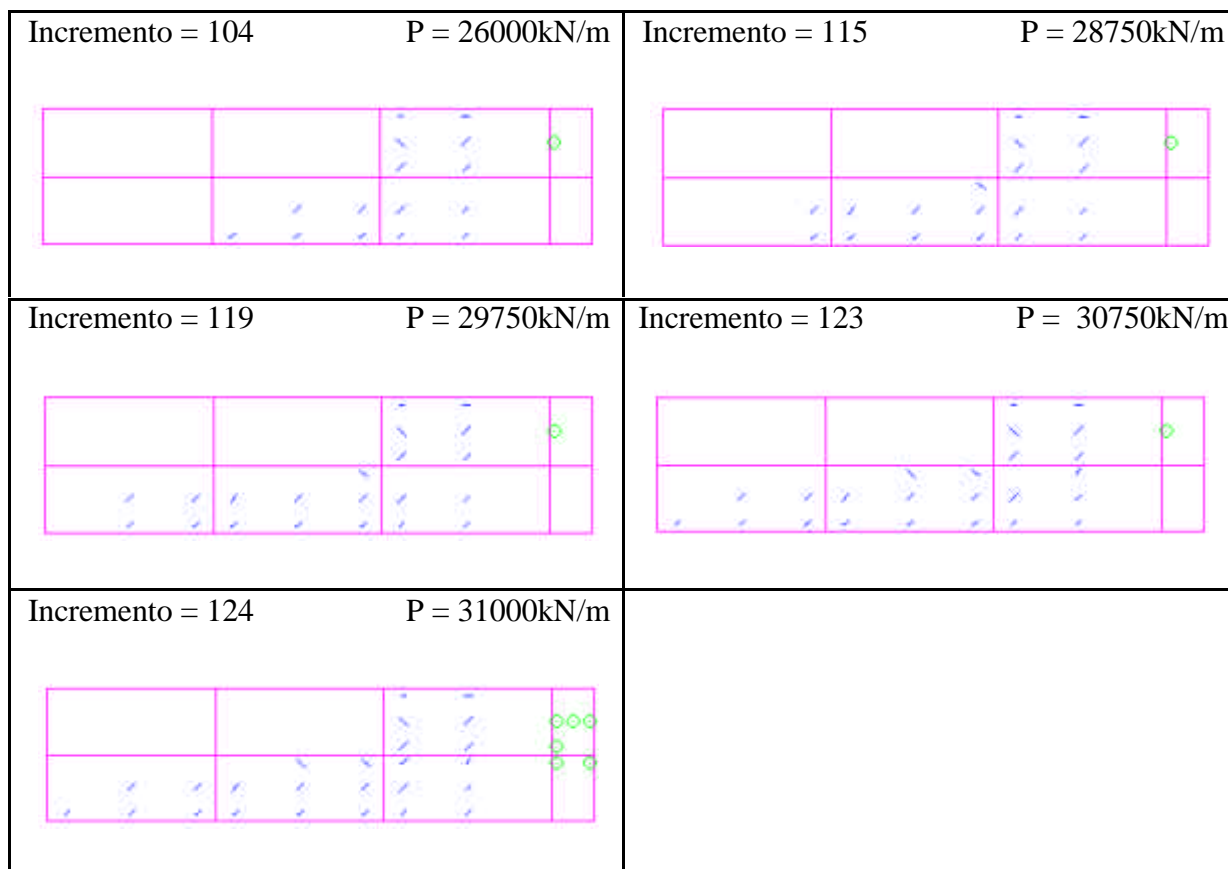


Figura 8.23: Pontos fissurados ou esmagados no concreto

8.5.5 Mapeamento dos pontos plastificados na massa de solo

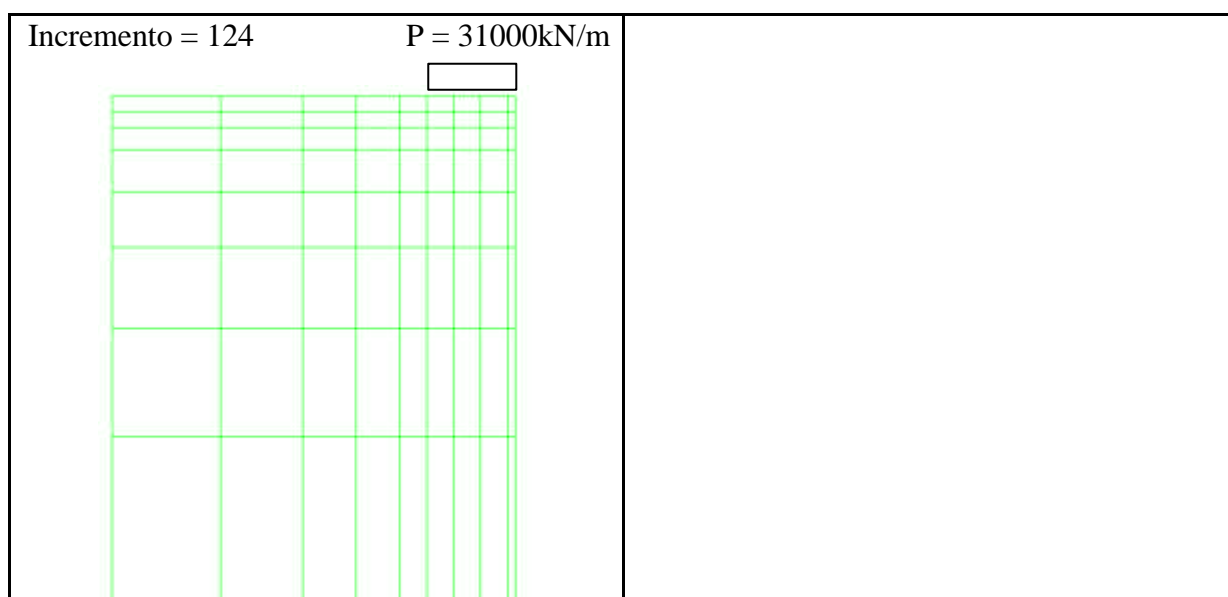


Figura 8.24: Pontos de Gauss plastificados no solo

8.5.6 Diagramas de tensões na interface fundação-solo

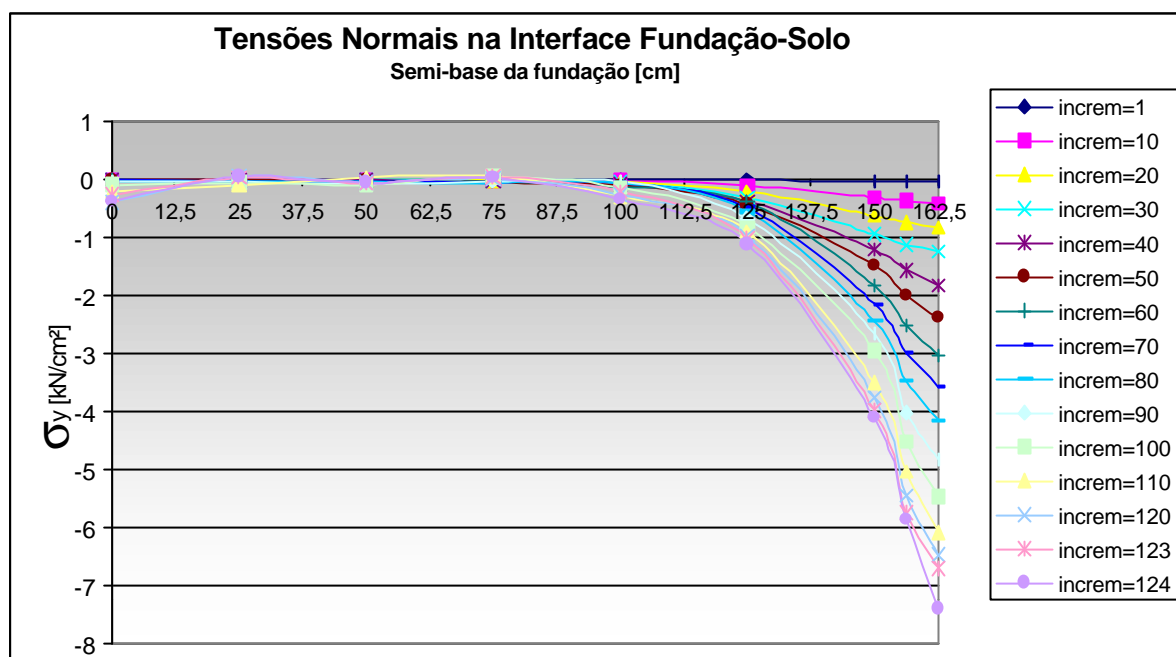


Figura 8.25: Tensões normais na interface fundação-solo

8.5.7 Conclusões do exemplo n°4 – parede estrutural sobre a sapata com ancoragem

A única modificação, na simulação numérica do exemplo n°4 em relação ao exemplo n°3, foi a introdução de armaduras de ligação entre a parede estrutural e a sapata de concreto armado. A figura 8.1(b) mostra a geometria da fundação de concreto armado do exemplo n°4. A inclusão das armaduras de ancoragem garante à estrutura a transferência de esforços, ocorre o esmagamento do concreto e capacidade de ser submetida a carregamentos maiores.

As tensões normais horizontais no concreto atingem altos valores pois nas outras duas direções as tensões são de compressão, gerando um estado triaxial de tensões de compressão (confinamento). A distribuição de tensões normais horizontais no concreto pode ser vista na figura 8.20, o pico de compressão ocorre na região de aplicação da carga.

A distribuição de tensões na interface concreto-solo (figura 8.25) é do tipo “sino”, com as tensões se concentrando principalmente no centro da sapata, praticamente, igual ao que foi obtido no exemplo nº3.

A fissuração no concreto inicia no incremento 33 (8.250 kN/m). Esta carga é superior à verificada no exemplo nº3, porém a fissuração evolui de maneira semelhante. Um padrão de fissuras inclinadas e algumas fissuras horizontais fornecem indícios de que o cisalhamento é o esforço determinante destas fissurações.

As armaduras de ancoragem introduzidas fazem com que a fundação alcance quase o dobro de incrementos de cargas que o exemplo sem ancoragem. As armaduras de ancoragem (figura 8.22) são solicitadas à compressão, as ancoragens e a armadura que seria de flexão é submetida à tração na região na qual se intercepta com as ancoragens. A falha da fundação de concreto armado se dá devido a plastificação das armaduras de ancoragem, esta plastificação se inicia no incremento 90 (22.500 kN/m), como pode ser visualizado na figura 8.22. Nos incrementos subsequentes, a plastificação evolui para todas as ancoragens. A armadura horizontal, que seria para flexão fica submetida a tensões da ordem de 30kN/cm². Ao mesmo tempo, observa-se o surgimento de pontos (circunferências de cor verde) na qual o concreto esmagou à compressão.

A malha de elementos finitos de solo não se plastificou, por ocorrer também ali um efeito de confinamento, com o solo submetido a um estado triaxial de compressão.

9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

9.1 CONCLUSÕES

A análise numérica de fundações de concreto armado considerando o funcionamento conjunto da peça estrutural de concreto armado (fundação) e a base de assentamento (solo) foi a principal tarefa abordada nesta dissertação. O interesse por esta pesquisa deveu-se a relevante função das fundações de concreto armado nas estruturas civis e os escassos estudos numéricos e experimentais publicados que tratem tal assunto com o mesmo enfoque dado por esta dissertação. Dissertações que tratam de modelos de elementos finitos para peças estruturais como vigas, pilares, lajes são conhecidas, assim como estudos para o solo. Portanto, existem consistentes resultados para o concreto armado e o solo como materiais estruturais que trabalham separadamente. Pretendeu-se com este trabalho ampliar a abrangência das situações estudadas.

Para o desenvolvimento de um modelo aplicável a fundações de concreto armado foram necessárias modificações nas relações constitutivas dos materiais, correspondentes a estado plano de deformações.

Inicialmente, para comprovação da adequação do modelo foram simuladas fundações apoiadas sobre solos de diferentes características, ambos em regime elástico e sujeitos a deformações planas. Os resultados obtidos coincidiram com as soluções encontradas na bibliografia.

Em uma etapa posterior, foram analisadas numericamente fundações, utilizando todos os recursos implementados no modelo. Dificuldades foram encontradas devido a não existência de resultados experimentais para confrontação com as simulações.

A distribuição de pressões de contato é fortemente influenciada pela rigidez relativa sapata-solo. A análise numérica permitiu avaliar as diferentes distribuições de tensões de interface possíveis para rigidezes relativas distintas.

A distribuição de tensões de interface para sapatas apoiadas sobre rochas, obtidas na análise numérica, se opuseram à distribuição de tensões proposta pela norma brasileira “Projeto e Execução de Fundações” NBR-6122 (1996), conforme comentado no capítulo 7.

A linguagem de programação utilizada, o MATLAB (Matrix Laboratory) se mostrou útil devido à facilidade de implementação do código e possuir ferramentas que possibilitam a geração de gráficos visualizadores de tensões nos materiais, deformações e etc. Porém, devido a grande massa de dados e ao tamanho do código, utilizando incontáveis funções o processamento se tornou demasiadamente demorado quando a malha era muito refinada.

Para finalizar é necessário comentar que os resultados expostos nesta dissertação atingiram os objetivos esperados e contribuíram para um melhor entendimento do desempenho mecânico de fundações de concreto armado.

9.2 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Para trabalhos futuros, sugere-se a implantação do modelo em linguagem de programação com processamento mais rápido que o MATLAB, como, por exemplo, o Fortran. Para o pré e pós-processamento o MATLAB se mostrou uma linguagem ideal para geração de telas necessárias à compreensão dos resultados.

A generalização tridimensional de elementos finitos e modelos dos materiais permitiria uma melhor aproximação de uma fundação real de concreto armado e do próprio solo podendo-se analisar fundações rasas e profundas.

A simulação da separação ou descolamento dos elementos de concreto e solo para situações de tração na base fundação-solo ampliará os casos que podem ser analisados pelo modelo. Quanto aos materiais, podem ser representados por modelos mais avançados, considerando efeitos dependentes do tempo.

E, no campo experimental, a instrumentação de fundações, assentes sobre bases de diferentes características mecânicas, seria de grande valia para a comparação com soluções numéricas de elementos finitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Informação e Documentação - Trabalhos Acadêmicos - Apresentação**: NBR-14724. Rio de Janeiro, Jul. 2001.
2. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Informação e Documentação - Referências - Elaboração**: NBR-6023. Rio de Janeiro, Ago. 2000.
3. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto e Execução de Fundações**: NBR-6122. Rio de Janeiro, 1996.
4. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado**: NBR-6118. Rio de Janeiro, 1980.
5. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Resumos**: NBR-6028. Rio de Janeiro, Maio 1990.
6. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Sumário**: NBR-6027. Rio de Janeiro, Ago. 1989.
7. BATHE, K.J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1982.
8. BAZANT, Z.P., OH, B. H. **Crack Band Theory for Fracture of Concrete**. *Matériaux et Contructions*, v.16, n.93, Mai-Juin. 1983.
9. CALAVERA, J. **Calculo de Estructuras de Cimentacion**. 3. ed., Torreangulo Arte Gráfico, España, 1991.
10. CEREDA, R. L. D., MALDONADO, J. C. **Introdução ao Fortran 77 para Microcomputadores**. McGraw-Hill, 1987.
11. CERVENKA, V. **Constitutive Model for Craked Reinforced Concrete**. *Journal of the American Concrete Institute*, v.82, n.6, 1985.
12. CHANDRAKANT, S. D. **Elementary Finite Element Method**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey
13. CHAVES, E. W. V. **Fortran-PowerStation Versão 4.0**. Universidade de São Paulo, 1997.
14. CHEN, A.C.T, CHEN, W.F. **Constitutive Relations for Concrete**. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*. v. 101, n.4, Feb. 1984.
15. CHEN, W.F, HAN, D.J. **Plasticity for Structural Engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988.
16. CHEN, W.F. **Plasticity in Reinforced Concrete**. New York: McGraw-Hill, 1982.

17. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP model code 1990**. Lausanne, 1993. (Bulletin d'Information, 203/205).
18. CONSOLI, N. C., SCHNAID, F., MILITITSKY, J. **Interpretation of Plate Load Tests on Residual Soil Site**. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, vol. 124, n.º. 9, Sep., 1998.
19. ELWI, A. E., HRUDEY, T.M. **Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement**. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, v.115, n.4, Apr. 1989.
20. HACHICH, W., FALCONI, F.F., SAES, J. L., FROTA, R.G.Q., CARVALHO, C. S., NYAMA, S., **Fundações: Teoria e Prática**. 2. ed. Editora Pini, São Paulo, 1998.
21. HANSELMAN, D., LITTLEFIELD, B. **Mastering Matlab 5. A Comprehensive Tutorial and Reference**. Prentice-Hall, New Jersey, 1998.
22. HINTON, E. **Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells**. Swansea: Pineridge Press, 1988.
23. HINTON, E., OWEN, D.R.J. **Finite Element Software for Plates and Shells**. Swansea: Pineridge Press, 1984.
24. MAÑÁ, F. **Cimentaciones Superficiales**. Editorial Blume, Barcelona, 1975.
25. MATSUMOTO, E. Y. **Matlab 6-Fundamentos de Programação**. Editora Érica, 2001.
26. MEYERHOF, G.G. **Some Recent Foundation Research and its Application to Design**. The Structural Engineer, vol. 31, 1953.
27. OTTOSEN, N.S. **A Failure Criterion for Concrete**. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.103, n.4, Aug. 1977.
28. OWEN, D.R.J., HINTON, E. **Finite Element in Plasticity: Theory and Practice**. Swansea: Pineridge Press, 1980.
29. OWEN, D.R.J., HINTON, E. **Finite Element Programming**. London: Academic Press, 1977.
30. PADFIELD, C.J. AND SHARROCK, .M.J. **Settlement of Structures on Clay Soils**. CIRIA Special Publication 27/PSA Civil Engineering Technical Guide 38, Department of the Environment, London, 1983.
31. POULOS, H.G., DAVIS, E.H. **Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics**. John Wiley, New York, 1974.
32. PRATES JUNIOR, N. P. **Um Modelo Elasto-Viscoplástico para Análise de Peças de Concreto Estrutural, Submetidas a Estados Planos de Tensão, Através do Método dos Elementos Finitos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Curso de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1992.

33. SCHNAID, F. AND CONSOLI, N.C.. **Prediction and testing of a bridge foundation embedded in Rock.** Hamburg, Germany, VIII International Congress on Rock Mechanics, 1995.
34. SCHULTZE, E. **Druckverteilung und Setzungen.** Grundbau – Taschenbuch, Band I, 2. Auflage, W. Ernst und Sohn, Berlin, 1966.
35. SOUZA, L.T. **Análise de Estruturas de Concreto Armado pelo Método dos Elementos Finitos com Geração Automática de Armadura.** Rio de Janeiro, PUC/RJ, 1981. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil).
36. TESSARI, M.A. **Ensaio de placa em camadas de cinza pesada de carvão tratadas com cimento.** Porto alegre, PPGEC/UFRGS, 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil).
37. VELLOSO, D.A., LOPES, F.R. **Fundações.** 2. ed., Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1997.
38. ZIENKIEWICZ, O.C. **The Finite Element Method.** London: McGraw-Hill, 1989.
39. ZIENKIEWICZ, O.C., PHILLIPS, D.V., OWEN, D. R. J. **Finite Element Analysis of some Concrete Non-Linearities: Theory and Examples.** Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses. Papers. Bergamo: IABSE, 1974.

Anexo A – Parâmetro escalar A

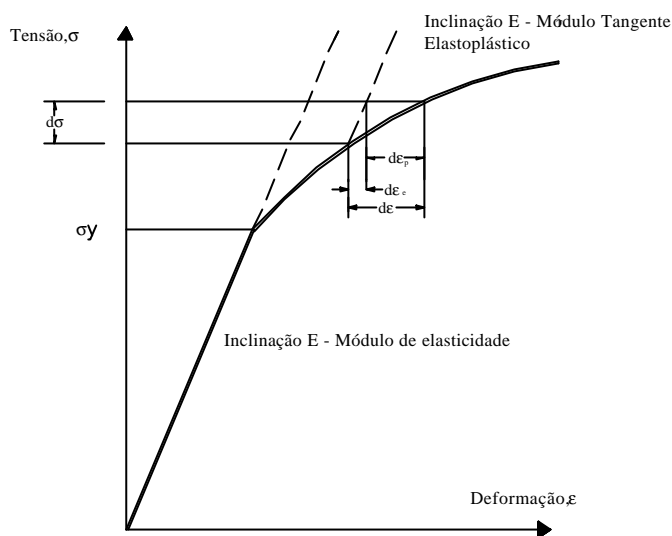


Figura A.1: curva tensão-deformação uniaxial

Observando a figura uniaxial pode-se relacionar no regime plástico

$$d\kappa = \sigma^T d\epsilon_p \quad (\text{A.1})$$

A equação 4.10 pode ser reescrita como

$$F(\sigma, \kappa) = f(\sigma) - \sigma_Y(\kappa) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Da equação 4.14 e diferenciando A.2 obtém-se

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = \frac{1}{d\lambda} \frac{d\sigma_Y}{d\kappa} d\kappa \quad (\text{A.3})$$

Empregando a condição de normalidade em A.1

$$d\kappa = \sigma^T d\epsilon_p = \sigma^T d\lambda a = d\lambda a^T \sigma \quad (\text{A.4})$$

Para o caso uniaxial $\sigma = \bar{\sigma} = \sigma_Y$ e $d\epsilon_p = d\bar{\epsilon}_p$ onde $\bar{\sigma}$ e $d\bar{\epsilon}_p$ são respectivamente a tensão e a deformação efetivas

$$d\kappa = \sigma_Y d\bar{\varepsilon}_p = d\lambda a^T \sigma \quad (\text{A.5})$$

Relacionando na figura A1

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} = \frac{d\sigma_Y}{d\bar{\varepsilon}_p} = H' \quad (\text{A.6})$$

Usando o teorema de Euler aplicável para todas as funções homogêneas de primeira ordem e de grau \mathbf{n} $(\partial F / \partial x)_x = n.F$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} \sigma = \sigma_Y \quad (\text{A.7})$$

Ou

$$a^T \sigma = \sigma_Y \quad (\text{A.8})$$

Substituindo A.6 e A.8 em A.5 e A.3

$$d\lambda = d\bar{\varepsilon}_p$$

$$A = H' \quad (\text{A.9})$$