UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Janice Valgoi Spinelli

ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS A PARTIR DE PROBLEMAS, SEGUINDO UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Porto Alegre
2018/01

Janice Valgoi Spinelli

ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS A PARTIR DE PROBLEMAS, SEGUINDO UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Barbara Seelig Pogorelski.

Porto Alegre

2018/01

Janice Valgoi Spinelli

ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS A PARTIR DE PROBLEMAS, SEGUINDO UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Examinado em: 05 de julho de 2018.

Banca examinadora

Profª. Drª. Bárbara Seelig Pogorelsky - Orientadora
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

Profª. Drª. Carolina Noele Renz - Examinadora
DECESA - UFCSPA

Profª. Drª. Thaísa Raupp Tamusiunas - Examinadora
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

Aprovado em: 05 de Julho de 2018.

Quem ensina, aprende ensinando.
E quem aprende, ensina aprendendo.
Paulo Freire

Nada é melhor do que a sensação da missão cumprida.
Autor desconhecido

O ser não é mais que o vir a ser.
Heráclito de Éfeso

RESUMO

Esta monografia apresenta uma proposta de ensino de funções exponenciais ao Ensino Médio a partir de problemas dados. Na minha prática, deduzimos funções exponenciais a partir de problemas pela construção de uma tabela, seguindo uma sequência didática direcionada. Também construímos gráficos e resolvemos perguntas relacionadas a problemas em que o aluno poderia usar dados da tabela recém construída, e posteriormente verificar a resposta por equações exponenciais resolvidas a partir da função exponencial recém deduzida.

Palavras-chave: Problemas, Funções Exponenciais, Gráficos, Sequência Didática.

ABSTRACT

This monograph presents a high school teaching proposal on exponential functions using given problems. In my practice, we deduced exponential functions from problems by constructing a table, following a directed didactic sequence. Also, we built graphics and we solved questions related to problems in which students could use data from the newly built table, and confirm the answer by solving exponential equations from the deducted exponential function.

Keywords: Problems, Exponential Functions, Graphics, Didactic Sequence.

SUMÁRIO

1 Introdução

O ensino e a aprendizagem de funções podem não ser tarefas fáceis. Ensinar funções mais complexas do que a linear e a quadrática, então, é impensável para muitos. Neste trabalho, decidi desafiar todos esses fatos, e ensinei funções exponenciais para alunos do primeiro ano do Ensino Médio. E eles aprenderam!

A ideia do trabalho começou em Estágio em Educação Matemática, disciplina curricular do meu curso de graduação de Licenciatura em Matemática, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, cuja prática tive a honra de realizar numa escola tradicional de Porto Alegre. Fundada há mais de 100 anos pela Escola de Engenharia da UFRGS, a Escola Técnica Estadual Parobé tem um especial reconhecimento da comunidade escolar.

Antes das observações e da prática, tive conversas com a professora titular sobre os conteúdos trabalhados recentemente com as turmas que eu estava por assumir, e, a partir disso e pela análise dos Conteúdos Programáticos previstos para o decorrer daquele ano, combinamos os conteúdos a serem lecionados por mim. Como o conteúdo de funções quadráticas tinha recém sido finalizado com as turmas, programamos que eu começaria fazendo uma revisão de funções (em geral) e de funções quadráticas, e lecionaria logaritmos.

A proposta de trabalho não foi bem aceita pelo professor da disciplina universitária. Dado o impasse, ele me fez a seguinte proposta: ensinar funções exponenciais a partir de problemas, focando na dedução da função exponencial correspondente. Naquele momento, mesmo sem saber como se deduzia a função exponencial, muito menos como eu poderia ensinar isso a alunos de nível escolar, decidi aceitar a proposta. O cunho desafiador me é instigante - por essa razão, decidi cursar a faculdade de Matemática!

Como aluna do curso de graduação de Matemática, naturalmente, eu já havia deduzido funções a partir de problemas, apenas não estava decidida como fazê-lo com funções exponenciais naquele momento. Seguindo a sugestão do professor de Estágio, pesquisei em livros didáticos.

Não encontrei diretamente o que procurava, mas notei alguns mecanismos: quando uma dada grandeza dobra a uma frequência determinada, a base (de algum expoente) é 2; quando diminui pela metade, é 1\2. Na solitude da biblioteca, pensei: “Se eu quiser lecionar isso, primeiro devo descobrir como resolvê-lo para mim mesma. E se eu o resolvesse ao meu modo, como o faria?”. Encontrava-me tão absorta em minhas divagações, que sequer me ocorreu buscar outros tipos de fontes de pesquisa. Resgatando memórias de momentos de aulas universitárias em que professores nos ensinavam a resolver problemas, especialmente o Professor Eduardo Brietzke, lembrei-me o quão usual era a construção de tabelas com dados do problema; a fim de, a partir do reconhecimento de padrões, chegar a uma função.

Fazendo isso, quase chegara à função exponencial, faltava apenas definir o expoente contendo a incógnita; ao que, também fazendo comparações de problemas com seu respectivo gabarito em alguns livros didáticos, notei que a variável deveria sempre ser dividida pelo período de tempo a cada qual se observava uma mudança de alguma grandeza no problema analisado.

Agora, deparava-me com outra questão: como ensinar isso aos “meus” alunos de 1º ano do Ensino Médio? Ora, eu ter algum conhecimento não significa necessariamente eu saber ensiná-lo - ou saber como promover oportunidades de aprendizagem desse conhecimento. Seguindo sugestões de livros didáticos e do professor da disciplina de Estágio, decidi lecionar a partir de discussões sobre problemas, para que os alunos visualizassem a situação representada pelo problema e seu comportamento ao decorrer do tempo, a partir de uma tabela relacionando marcas de tempo e a quantidade da substância indicada no problema.

Não havia pensado ainda em criar um modelo “passo a passo”, mas percebi a necessidade de resolver mais problemas no quadro com contribuições dos discentes. No momento de eles resolverem problemas, considerei mais efetivo, por algumas aulas, construir a tabela completa no quadro com contribuições deles antes de deixá-los trabalhar por algum tempo, com a minha assistência; haja vista a dificuldade apresentada pela maioria para construir a tabela. Mesmo assim, a reação dos alunos me fez sentir a necessidade de lecionar um programa passo a passo; tanto quanto à construção da tabela, quanto à dedução da função exponencial. E isso nos leva a uma questão norteadora:

O ensino de uma programação passo a passo contribuiu para o aprendizado da dedução de funções exponenciais a partir de problemas? E para o aprendizado de funções exponenciais, em geral? Essa programação passo a passo pode ser uma alternativa ao ensino desse conteúdo?

Após algumas aulas, chegou o momento de deixá-los resolver todo o problema sozinhos. Comecei colocando a tabela de tempo x quantidade no quadro, e apenas o primeiro dado de cada coluna no quadro. Até que, mais ao fim da prática, eu apenas mencionava oralmente a construção da tabela. Observei um comportamento interessante da maioria dos alunos: a cada vez que conseguiam construir a tabela, compartilhavam sua comemoração com os colegas e a professora. Compreensível, pois uma boa quantidade de alunos colocava que a dedução da função a partir da tabela construída lhes era fácil; difícil era a construção da tabela que a precedia.

Houve um sábado em que tivemos uma aula especial: alunos levaram bulas de remédio e trabalharam em grupos para formular um problema a partir das mesmas, a fim de resolvê-lo. Não posso dizer se foi mais por questão de ter sido trabalho em grupos, ou de ter havido um atendimento mais personalizado (por ter comparecido um número reduzido de alunos); mas o rendimento foi notável, tanto para as minhas impressões quanto para as impressões dos alunos que compareceram. Inclusive, vários me agradeceram naquele dia, e comentaram com outros colegas na aula seguinte o quanto eles aprenderam e progrediram fazendo aquele trabalho. Quem não fez o trabalho, demonstrou não ter tido o mesmo rendimento nas aulas seguintes.

No próximo capítulo, você encontrará a fundamentação teórica da prática realizada. Skovsmose sugere ambientes de aprendizagem com diferentes níveis de dificuldade, subdivididos basicamente em *exercícios* (em que todos os dados necessários para a resolução dos problemas são dados aos alunos) e *investigação* (em que os alunos devem buscar os dados por si mesmos). Barbosa sugere o trabalho com problemas por modelagem, também sugere tipos de trabalho como *exercícios* ou *investigação*. Vergnaud afirma que a aprendizagem ocorre permeando a resolução de problemas; a qual ocorre por *campos conceituais*, que são subconjuntos a se interseccionar: problemas, situações, conceitos, estruturas, conteúdos e operações de pensamento. Duval apresenta a sua *teoria das representações semióticas*, colocando a importância de fazer uso de diferentes símbolos em cada momento de ensino, a fim de alcançar efetividade no aprendizado.

Nos capítulos seguintes, você encontrará o planejamento das aulas, o relatório e uma análise das mesmas. Desafios foram encontrados durante a jornada, mas não foram fatores impeditivos, pelo contrário: foram instigações para buscar novas soluções.

2 Fundamentação Teórica

Durante a disciplina introdutória ao Trabalho de Conclusão de Curso, chamada de Pesquisa em Educação Matemática, no meu curso de graduação de Licenciatura em Matemática, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, fora feita uma atividade de levantamento de referenciais, na modalidade de monografia (trabalhos de conclusão de curso, teses de pós graduação), com a principal finalidade de nos servir de modelo a futuros trabalhos, principalmente ao nosso próprio trabalho de conclusão de curso.

Dentre vários escritos, cinco atraíram o meu interesse, dos quais escolhi dois para compor a fundamentação teórica para a presente monografia: um trabalho de conclusão de curso de Walter Mendes Haselein, em que o mesmo lecionou e analisou aulas de funções exponenciais a uma turma de Ensino Médio a partir de problemas dados; e uma tese de mestrado de Rodrigo Sychocki da Silva, que além de funções exponenciais, também lecionou funções logarítmicas a partir de problemas dados a turmas de Ensino Médio.

Haselein (2013) lecionou a uma turma de 1º ano do Ensino Médio o conteúdo de funções exponenciais a partir de modelos matemáticos, que são problemas de modelagem. Ele se baseou principalmente na divisão das aulas em seis ambientes, com três diferentes tratamentos à matemática, de Skovsmose (2000); todos de proposição de problemas. Além disso, utilizou-se dos três tipos de abordagem para modelagem em sala de aula de Barbosa (2001).

Skovsmose (2000) propôs o ensino e aprendizagem em três *ambientes de aprendizagem*: *matemática pura*, *semi-realidade* e *realidade*; cada um subdividido em dois, resultando um total de seis ambientes de aprendizagem, para contemplar dois tipos de trabalho: de *exercício* e de *investigação*. Veja na tabela abaixo:

	Exercícios	Cenários para Investigação
Referência à matemática pura	1	2
Referência à semi-realidade	3	4
Referência à realidade	5	6

Fonte: Skovsmose (2000, p.8) apud Haselein (2013, p.13)

No *primeiro ambiente de aprendizagem* e no trabalho de *exercício*, a referência é à *matemática pura*, e se pode sintetizar em resoluções de equações algébricas. No *segundo ambiente*, são atividades com números e figuras envolvendo investigação sem contextualização, como a manipulação de peças do Tangram. No *terceiro ambiente*, a referência é à *semi-realidade*, em que há uma contextualização, mas com dados não reais, como a criação de um problema sobre a aplicação de um valor no banco. No *quarto ambiente*, a referência também é à *semi-realidade* e a contextualização também se dá por dados não necessariamente verídicos, mas há o fator da investigação, visto que o problema trazido pelo professor não traz todos os dados suficientes para a sua resolução. Um exemplo é um jogo com dados em que se deve calcular probabilidades para ser um bom jogador. No *quinto ambiente*, a referência é à *realidade concreta*, em que a contextualização se dá por dados reais que podem ser tirados de jornais e revistas, sem a necessidade de investigação por parte do aluno, por serem problemas prontos. No *sexto ambiente*, a referência também é à *realidade*, mas os próprios alunos devem buscar os dados do problema, por isso é de cunho investigativo. Um exemplo é informar-se de taxas bancárias para um problema sobre aplicação de um valor num banco.

Barbosa (2001) propõe o ensino também a partir de problemas, por abordagens de modelagem para sala de aula, desta forma:

> Na primeira, o professor apresenta o problema, fornecendo todas as condições necessárias para que o aluno o resolva. A investigação se limita à resolução do problema. Na segunda, o professor sugere um tema, e supervisiona os estudantes no levantamento de dados necessários para a sua resolução. Nessa etapa, há uma participação maior dos alunos. Na terceira, os próprios alunos formulam a questão, e buscam coletar os dados necessários para simplificar e resolver o problema. Eles participam de todas as etapas da modelagem.

Note as semelhanças entre as propostas de Skovsmose e de Barbosa. São três tipos de modelagem, cada qual com seu nível de dificuldade e caráter investigativo, além de diferente interação professor-aluno e aluno-aluno.

A prática do autor se deu propondo problemas dos mais variados tipos (dentre os colocados acima) envolvendo aplicações bancárias. Inclusive, utilizou-se da abordagem histórica dos juros compostos, pela qual o número de Euler foi descoberto justamente pelo cálculo dos mesmos. Em aulas seguintes, esse número continuou a ser usado.

Na minha prática, não houve exercício sem o contexto de problemas propostos; então, não trabalhei no primeiro ambiente de aprendizagem de Skovsmose. As atividades transitaram entre o segundo e o terceiro ambientes de aprendizagem, pois alguns problemas continham dados inventados; outros, dados verídicos. Foram todos com caráter de *exercícios*, pois o aluno não teve que buscar dados para a realização do problema -- exceto pelo trabalho com uma bula de remédio, em que os alunos deveriam encontrar nas mesmas os dados necessários na mesma para a realização do problema de meia-vida relacionado.

Sychocki (2012) realizou e analisou uma prática sobre o ensino de funções, funções logarítmicas e funções exponenciais ao nível de escola básica, utilizando-se filosófica e metodologicamente principalmente dos *campos conceituais* de Vergnaud (1982, 1990, 1994, 1996, 1998) e da *teoria das representações semióticas* de Duval (1993, 1996, 2003, 2009). Os dois teóricos tratam de resolução de problemas em sala de aula.

Vergnaud (1996) acredita que a aquisição do conhecimento se dá por (e permeia) o ato de resolver problemas. Inclusive, é através dessa resolução, que o aluno percebe o sentido dos conceitos. Os campos conceituais são como uma unidade de estudo formada por subconjuntos que têm intersecções e se comunicam entre si, são eles: problemas, situações, conceitos, estruturas, conteúdos e operações de pensamento. Além disso, ele define o conceito em três aspectos: *referente*, que são as situações retratadas pelo problema; *significado*, que é produzido por invariantes operatórios; *significante*, que é constituído por representações simbólicas a fim de representar o *significado.*

Vergnaud (1996) aposta em o professor não propor uma solução aos alunos, mas deixá-los criar estratégias de resolução, sob sua orientação. Tentei aplicar essa técnica inicialmente nas práticas escritas nesta monografia. Como os alunos não conseguiram fazê-lo, tive de dar orientações mais diretas, inclusive sugerindo uma resolução passo a passo. Não há dúvidas de que o conhecimento adquirido através da resolução de problemas por estratégias criadas por si mesmo pode ser múltiplas vezes mais valoroso e efetivo do que aquele adquirido seguindo instruções dadas por outrem. Porém, não se pode afirmar que não há aprendizagem quando não é o próprio aluno que cria as estratégias de resolução utilizadas. Inclusive, o professor deve atentar à necessidade frequente de ensinar estratégias de resolução a serem utilizadas por seu aluno; o que não exclui a possibilidade de eles poderem criar e utilizar outras além do que fora visto em aula. Não se pode desconsiderar o aprendizado ocorrido quando o aluno segue orientações e estratégias de seu professor, nem o que ocorre a partir disso.

Por outro lado, Duval trata da área da psicologia cognitiva. Semiótica é a ciência dos signos, dos símbolos. Por essa razão, diz-se que é a ciência de toda e qualquer linguagem; seja em números, letras, gráficos, figuras, sons, etc. “A Matemática é uma ciência que pressupõe uma atividade cognitiva diferente de outras áreas do conhecimento.” Durval (1996) apud Sychocki (2012). É necessária a mobilização de sistemas cognitivos específicos para cada uma das atividades no processo de aprendizagem de Matemática, inclusive porque requerem regras de codificação próprias! Por isso, especialmente em se tratando de ensino-aprendizagem de Matemática, é de grande importância o uso de mais de um tipo de signo para representar um mesmo significado; tanto de parte do professor quanto de parte do aluno, para a assimilação da mensagem/do(s) conceito(s) de maneira efetiva.

Além disso, para uma maior flexibilidade e qualidade da aprendizagem do(s) conceito(s), é interessante ser capaz de mudar de signo (e de conceituação do mesmo) sempre que necessário e/ou se queira, de modo a estender a compreensão do conteúdo. Esses signos podem ser a linguagem natural, algébrica, cartesiana, imagens, tabelas. As estratégias para resolução de problemas constituem a *semiósis*; o tratamento da informação e apropriação dos conceitos matemáticos, *noésis*. Outra questão colocada pelo autor é a importância de saber diferenciar o *significante* de seu *significado*, objeto de representações suas.

Nas aulas da minha prática, foram combinadas as seguintes linguagens a cada problema resolvido: linguagem natural, por tabelas, algébrica e cartesiana. Também estabelecemos relações entre essas linguagens, inclusive de dependência. Por exemplo, a linguagem cartesiana dependeu da qual se dá por tabelas, que apenas foram possíveis a partir de problemas dados em linguagem natural; a função exponencial, em linguagem algébrica, apenas foi possível a partir da construção de uma tabela.

3 Planejamento das Atividades

Nesta seção, será discorrido o planejamento das aulas realizadas numa escola pública de Porto Alegre, a Escola Técnica Estadual Parobé, durante uma disciplina obrigatória do curso de Graduação de Matemática com habilitação em Licenciatura, de Estágio em Educação Matemática III, direcionada ao Ensino Médio, mais precisamente ao 1º ano, realizada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

A temática das aulas será de *equações* e *funções exponenciais*, em que os alunos deverão identificar uma função exponencial, deduzir uma função exponencial a partir de problemas dados, construir gráficos, resolver problemas relacionados e resolver equações exponenciais. Os conteúdos matemáticos envolvidos serão função exponencial, equação exponencial e construção de gráficos.

Iniciarei a primeira aula anunciando à turma que lecionarei as próximas aulas, pelas próximas 6 semanas, o que corresponderá a um mês e meio. Como *funções* fora previamente trabalhado com as turmas em questão, inclusive *função de segundo grau*, conteúdo recém visto, será feita uma revisão basicamente em forma de *brainstorm* (será esperada uma "tempestade de ideias", em que alunos devem verbalizar várias concepções que lhes vierem à mente, conforme o que for pedido a cada momento). Primeiramente, escreverei no quadro:

$Frases\ com\ a\ palavra\ \underline{função}$:

E convidarei os alunos a citar exemplos. Serão esperadas frases como: *João vive em função de Maria; A função do professor é ensinar*. Conforme as frases forem ditas, colocá-las-ei no quadro, e será discutido o significado que a palavra *função* estabelece em cada frase. Em seguida, colocarei no quadro:

$O\ que\ é\ função\ ?$

Lerei a pergunta em voz alta, e discutiremos as respostas. Esperarei respostas do tipo: *é uma relação de dependência entre pessoas\entre pessoas e objetos, é o papel\o trabalho\o ofício\a incumbência de algo ou alguém*.

Dando prosseguimento, perguntarei: E *na Matemática, para que serve uma função?*, ao que espero respostas do tipo: *descobrir valores*, d*escobrir valores a partir de certos valores dados*, *transformar valores dados em outros, estabelecer uma relação de dependência entre valores dados e valores obtidos*… Ao lembrar que os valores imputados e obtidos por uma função geram um gráfico (e que o próprio gráfico é também uma função), esperarei respostas como: *descobrir como funciona (ou o comportamento de) algo\alguém\um acontecimento.*

Retomando a discussão anterior, frase por frase, passaremos para significados especificamente no contexto matemático; em que espero ouvir respostas como: *é uma relação de dependência entre duas grandezas*, *é uma fórmula que transforma valores dados em outros*, *é uma relação de valores dados com valores resultantes*, e assim por diante.

Em seguida, proporei aos alunos analisarmos o tamanho esperado de um feto conforme avança o tempo de gestação. Colocarei no quadro duas colunas: uma para o tempo de gestação (em meses), e outra para o tamanho do feto. Ao colocar cada valor indicador do tempo, provocarei a turma a sugerir um tamanho específico de feto.

Dando prosseguimento, traçarei o gráfico no quadro. Primeiramente, vamos definir ao que corresponderá cada eixo coordenado. Ressaltararei oralmente (apontando ao eixo coordenado correspondente) que ao eixo horizontal, atribuímos valores que apenas perpassam, como o tempo -- é o domínio; o eixo vertical é o que dá os valores que nos interessam, queremos, buscamos… os valores da função -- é a imagem. A partir daí, definiremos o eixo horizontal como o eixo do passar dos meses; e o eixo vertical, como o do tamanho do feto. Será feito o esboço do gráfico no quadro.

Logo após, colocarei uma tabela no quadro com valores oficiais, e traçarei o correspondente gráfico. Faremos comparações entre as duas tabelas e gráficos.

A segunda aula será usada para construir gráficos a partir de tabelas de modo análogo ao que fora feito na aula anterior relacionando o tamanho do feto com o tempo de gestação correspondente. A atividade não será apenas para o aprendizado da construção de gráficos, como também para a percepção de que o mesmo mostra o comportamento de algo/alguém. A proposta é trabalhar sobre situações levantadas pelos alunos, tais como: receita de uma empresa com o passar do tempo, a produção de uma fábrica conforme o número de funcionários, a produção de pães conforme a quantidade dos ingredientes necessários, etc.

A terceira aula será de dois períodos para cada turma. Esse tempo será usado para trabalhar com problemas selecionados dos quais buscaremos a função exponencial geradora e, a partir da tabela feita, construiremos o gráfico relacionado. Mas, ao início da aula, darei um aviso, colocando no quadro e anunciando que os alunos deverão trazer uma bula de remédio no dia indicado para poderem realizar um trabalho em aula, e o remédio poderá ser um que eles ou algum familiar\amigo esteja utilizando. Logo após, colocarei no quadro:

$\underline{Função\ Exponencial}$

$Durante\ 10\ meses, a\ altura\ de\ certa\ planta\ dobra\ a\ cada\ mês.\ Sabendo\ que\ a\ altura\ da\ planta, no\ início\ deste\ período,$ é $de\ 1cm;\ calcule\ a\ altura\ ao\ final\ do\ 4º\ mês.$

Lerei o problema em voz alta para a turma, colocarei os dados-chave no quadro, e efetuarei o que é pedido incitando contribuições orais dos alunos através de perguntas norteadoras durante a explicação. Irei sugerir colocar os dados numa tabela, com uma coluna para o tempo e outra para a altura, para podermos visualizar melhor os dados e as mudanças a cada mês que passa.

Perguntarei aos alunos se os números obtidos os remetem a potências de alguma base específica (são potências de 2). Tendo os valores para t e para y, poderemos construir o gráfico relacionado.

Então, prolongarei as extremidades do gráfico para a função $y = 2^t$ sem restrições para o domínio, para valores de t muito grandes e muito pequenos no quadro. Prosseguindo, trabalharemos com um problema muito semelhante, com diferença apenas no sinal do expoente. Questionarei à turma: *E se uma planta estiver murchando, o que vai acontecer*?, e colocarei o problema no quadro:

$Durante\ 10\ meses, uma\ certa\ planta\ murcha, de\ modo\ que\ a\ altura\ diminui\ pela\ metade\ a\ cada\ mês.\ Sabendo\ que\ sua\ altura, ao\ início\ deste\ período,$ é $de\ 1cm;\ calcule - a\ ao\ final\ do\ 4º\ mês.$

Lerei o problema em voz alta aos alunos, e indagarei: *No problema que vimos antes, a planta está crescendo, e o expoente é positivo. Agora, temos uma planta que está murchando, então o expoente será? Negativo.* E acrescentarei oralmente, mostrando no quadro: *Quando o expoente é negativo, inverte-se a base. Então,* *colocando ‘2’ como base, com o sinal negativo, temos ‘½’, e é exatamente o que queremos, pois a planta, agora, está diminuindo pela metade a cada mês.* Ao perceber concordância de boa parte dos alunos, colocarei a função exponencial relacionada no quadro:

$$y = 2^{-t}$$

Em planejamentos futuros, não iniciarei o conteúdo de funções exponenciais com expoente negativo por essa analogia, pois não propicia o encadeamento de raciocínios dos alunos apropriadamente, não contribuindo didaticamente. Isso não significa que essa analogia não deva ser feita em momento algum. A última aula do ensino de problemas desse tipo é um momento propício, inclusive podendo funcionar como um bom fechamento do conteúdo.

Construirei a tabela relacionada, no quadro, com a participação dos alunos, de modo análogo ao feito no problema anterior. Em seguida, construirei o gráfico no quadro com os valores relacionados imediatamente ao lado do gráfico do problema anterior, para facilitar a visualização de que o gráfico recém traçado é um reflexo horizontal do gráfico anterior. E colocarei no quadro o passo-a-passo da resolução de problemas desse tipo:

<u>*Siga o passo a passo para a dedução de funções exponenciais desse tipo*</u>

1) *Traçar uma tabela com 2 colunas: uma para a marcação do tempo, e outra para a quantidade da substância ou ser vivo correspondente;*

2) *Na coluna do tempo, colocar as marcas de* t_0 *a* t_{10}. *O tempo é nulo em* t_0, *pois não passara tempo algum ainda. Nas marcas seguintes, o tempo deve ser contado a cada período significativo no problema;*

3) *Passo da coluna da quantidade. Em* t_0, *marca* − *se a quantidade inicial da substância ou ser vivo correspondente, pois ainda não passara tempo algum. Por isso, o expoente zero para a base deduzida. A cada marca de tempo, como se mul* − *tiplica a base por ela mesma, soma* − *se uma unidade ao expoente dessa base;*

4) *Na coluna da quantidade, qual algarismo tem a função de coeficiente (de uma certa base)? O mesmo permanece inalterado com o transcorrer do tempo, ou*

$varia$? $Permanece\ inalterado. Por\ isso, transcreva - o\ tal\ qual;$

5) $Ainda\ na\ coluna\ da\ quantidade, qual\ algarismo\ tem\ função\ de\ base\ (de\ um\ certo\ expoente)$? Essa base permanece inalterada com o passar das marcas de tempo, $ou\ varia$? $Permanece\ inalterada. Por\ isso, transcreva - a;$

6) $O\ expoente\ permanece\ inalterado\ conforme\ avançam\ as\ marcas\ de\ tempo, ou\ varia$? $Varia,\ você\ precisará\ usar\ uma\ incógnita.\ Divida\ a\ mesma\ pelo\ pe-ríodo\ de\ tempo\ significativo\ no\ problema. A\ função\ será\ deste\ modo:$

$$coeficiente.(base)^{\frac{x}{marca\ de\ tempo}}$$

Anunciarei que será passado um problema no quadro para ser resolvido em aula:

$A\ divisão\ celular\ denominada$ "mitose" $consiste\ em\ uma\ célula\ duplicar\ seu\ conteúdo, e\ então\ subdividir - se\ em\ duas, chamadas\ células\ filhas\ . Cada\ célula\ filha\ , por\ sua\ vez\ , repete\ esse\ processo\ ; totalizando\ , após\ a\ 2ª\ divisão, 4\ células\ filhas.$

$a)\ Determine\ o\ nº\ total\ de\ células\ filhas\ obtidas\ a\ partir\ de\ uma\ célula\ após\ 3, 4\ e\ 7\ divisões;$

$b)\ Escreva\ uma\ função\ que\ associe\ a\ quantidade\ total\ de\ células\ filhas\ y, obtidas\ a\ partir\ de\ uma\ única\ célula, após\ uma\ quantidade\ x\ de\ divisões;$

$c)\ Construa\ o\ gráfico.$

A resolução algébrica desse problema é a mesma (ou semelhante) do primeiro problema colocado nesta aula sobre o crescimento de uma planta. Será interessante observar se os discentes notarão isso.

A quarta aula se iniciará com a correção do último problema dado na aula anterior, com participações orais dos alunos. Será uma correção breve, já que é a mesma (ou semelhante) do primeiro problema dado na aula anterior. Logo após, passarei outro problema no quadro a ser resolvido pelos alunos ainda em aula:

$A\ quantidade\ de\ nicotina\ presente\ no\ corpo\ de\ um\ fumante\ se\ reduz\ pela\ metade\ a\ cada\ 2\ horas. Quando\ os\ neurônios\ sentem\ falta\ dessa\ substân -$

cia, provocam agitação, nervosismo e falta de concentração; o que leva a pessoa a fumar novamente. A cada cigarro consumido, o organismo absorve aproxi – madamente 1mg de nicotina. Considerando o consumo de um cigarro, responda:

a) Qual é a quantidade de nicotina presente no organismo após 2 horas? 4 horas? 6 horas?

b) Qual função representa a quantidade y de nicotina (em mg) presente no organismo de uma pessoa t horas após o consumo?

c) Construa o gráfico correspondente.

Ao notar que boa parte dos alunos copiou o problema, lerei-o em voz alta, colocando alguma dramaticidade na voz, para instigar uma discussão sobre o vício da nicotina. Espero ouvir histórias reais deles próprios e\ou de familiares, amigos, conhecidos. Logo após, dispensarei tempo para eles resolverem o problema. Ao notar o que boa parte deles perceberam que a resolução é a mesma (ou semelhante) ao problema da planta murchando, trabalhado na aula anterior; convocarei um voluntário para resolvê-lo no quadro, podendo contar com a ajuda dos colegas e minha.

Iniciarei a quinta aula avisando que o trabalho com bulas de remédio será feito na aula seguinte. Perguntarei aos alunos se resolveram o problema dado na aula anterior. Caso não o tiverem resolvido, lerei-o em voz alta e colocarei os dados principais no quadro. Em seguida, será realizada a correção do problema no quadro com a ajuda de participações orais dos alunos.

Os dois períodos da sexta aula serão destinados ao trabalho com bulas de remédio: em grupos de até 4 alunos, deverão escrever uma tabela com 10 linhas relacionando dados da meia-vida do remédio de uma (ou mais) bula(s), escrever a função exponencial e traçar o gráfico correspondentes. Os integrantes do grupo podem entregar em apenas uma folha, mas todos devem contribuir.

Na sétima aula, uma folha com problemas envolvendo função exponencial será entregue para cada aluno a ser trabalhada em grupos de até 4 alunos durante estes dois períodos em cada turma para exercício e fixação de resoluções deste tipo. Os alunos devem trazer essa folha nas próximas aulas de matemática. A folha segue abaixo:

Problemas

1) A meia-vida do antibiótico Clavulin é de 1,3 horas. Considerando uma dose de 500mg:

a) Quanto ainda restará dos princípios ativos do remédio no organismo após 1,3 hora? 2,6 horas? 4,2 horas?

b) Construa uma tabela com 10 linhas relacionando o tempo transcorrido e a quantidade do remédio, e encontre a função exponencial relacionada. Construa o gráfico com os dados encontrados.

2) O número de bactérias em um meio triplica a cada hora.

a) Se, inicialmente, existe 1 bactéria no meio, haverá quantas bactérias em 2 horas? 5 horas? 7 horas?

b) Faça uma tabela com 10 linhas relacionando o tempo em horas e a quantidade de bactérias.

Responda: qual é a função exponencial que gera a quantidade de bactérias em qualquer hora? Construa o gráfico relacionado.

3) Considerando uma amostra com 3g de iodo131 cuja meia-vida é de 8 dias.

a) Quantos gramas de iodo131 ainda haveria nessa amostra após 8 dias? 16 dias? 24 dias? 32 dias?

b) Faça uma tabela com 10 linhas relacionando o tempo em dias e a quantidade de iodo131.

c) Qual função exponencial determina a quantidade de iodo131 na amostra após x dias? Esboce o gráfico da função.

4) A quantia de R$1.000,00 foi aplicada na poupança com uma taxa de rendimento de 1% ao mês, no sistema de juros compostos.

a) Qual será o saldo ao final de 3 meses? 5 meses? 8 meses?

b) Faça uma tabela com 10 linhas relacionando o tempo em meses e o saldo em cada mês.

Responda: qual é a função exponencial que gera o rendimento em qualquer mês? Construa o gráfico relacionado.

5) Florentina fez um empréstimo no banco de R$5.000,00. Sabendo que ela fez um acordo de pagar o valor em 5 anos, a uma taxa de juros compostos de 10% ao mês, responda:

a) De quanto será a parcela a ser paga no 1º mês? 3º mês? 5º mês?

b) Faça uma tabela com 10 linhas relacionando o tempo em meses e o saldo em cada mês.

Responda: qual é a função exponencial que gera o valor a ser pago em qualquer mês? Construa o gráfico relacionado.

6) A cada ano que passa, o valor de um carro diminui 20% em relação ao ano anterior. Se V for o valor do carro no ato da compra:

a) Qual será o valor do carro em 1 ano? 3 anos? 5 anos?

b) Faça uma tabela com 10 linhas relacionando o tempo em anos e o valor do carro a cada ano.

Responda: qual é a função exponencial que gera o valor do carro em qualquer ano? Construa o gráfico relacionado.

A oitava aula será para corrigir os problemas dados na aula anterior, além de sanar dúvidas e/ou curiosidades relacionadas.

A nona aula será de 2 períodos no laboratório de informática com o uso do software educacional *Geogebra*. Os problemas de crescimento e decaimento exponencial da folha entregue na aula anterior serão revisados no quadro e com auxílio do *software* para a visualização dos gráficos correspondentes. Além disso, no segundo período, a partir da reprodução de todos os gráficos de funções exponenciais vistos até então, serão feitas comparações entre os mesmos, inclusive para notar quais restrições de valores devem ser observadas em funções exponenciais. Deixarei todos expostos por uma projeção. Os aspectos a serem notados por comparação são:

- Quando consideramos funções da forma $y = a^x$, sempre há o ponto (0,1) (reforçarei aos alunos que qualquer número elevado ao expoente 0 vale 1, e colocarei alguns exemplos algébricos no quadro para facilitar a visualização). Neste planejamento, acabei não colocando o caso em que há um coeficiente multiplicando esse tipo de função, transformando a função do tipo $y = a^x$ para o tipo $y = ca^x$. Nesse caso, o ponto (0,1) é multiplicado pelo coeficiente c, resultando em (0, c). Em planejamentos futuros, considerarei esse caso;
- O gráfico não toca o eixo x, e apenas existe na parte positiva do eixo y;
- Se a base da função for maior do que 1, o gráfico e a função são crescentes;
- Se a base da função for entre 0 e 1, o gráfico e a função são decrescentes;

- Se a base for 0 ou 1, não é considerada função exponencial por se tratar de uma função constante (mostrarei as respectivas funções no Geogebra). Pode-se chamá-la de função exponencial degenerada;
- Não foi encontrada base negativa (mostrarei que se considerarmos a base negativa, os resultados oscilam entre valores positivos e negativos; não produzindo um gráfico contínuo).

Como fechamento da aula, colocarei no quadro e explanarei uma definição de função exponencial:

$$Definição\ de\ função\ exponencial:$$

$Uma\ função\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*, definida\ por\ f(x) = a^x, y = a^x, com\ a > 0\ e\ a \neq 1,$ é $denominada\ função\ exponencial.$

4 Relatório da Prática

Neste capítulo, serão relatadas as aulas praticadas. Algumas mudanças foram necessárias no decorrer das aulas, e eu não considero isso frustrante. Pelo contrário, considero-as como parte da prática pedagógica, principalmente porque a prioridade deve ser a qualidade do ensino e da aprendizagem, não a quantidade. Os alunos foram ensinados a identificar e construir uma função exponencial, construir gráficos, resolver problemas relacionados, analisar os problemas resolvidos e os gráficos relacionados.

Na primeira aula, antes de adentrar o conteúdo de funções exponenciais, o principal objetivo do trabalho, utilizamos o tempo exclusivamente para revisar funções, pois o conceito e aplicação de funções serão utilizados nas aulas de funções exponenciais. Logo, foi importante que os alunos se situassem no conteúdo. Eles se sentiram um tanto deslocados quanto ao trabalho da definição da palavra “função”, olhavam com estranheza; aparentemente por não estarem acostumados com esse tipo de discussão em aula.

Todavia, ao ser aplicado a um problema real (no caso, a relação entre o transcorrer do tempo e o tamanho de um feto), admiraram-se, mostrando o contentamento de quem (finalmente) compreendera a definição e a aplicação de um conteúdo, especialmente quanto à possibilidade de os dados relacionados em uma tabela gerarem um gráfico que mostra o comportamento do crescimento do feto, no caso. Em ambas as turmas, alunos me agradeceram entusiasmados por explicar de tal forma a lhes dar a entender como funcionam as funções, que por muito tempo estudaram, mas sem ter compreendido o significado das mesmas até então. Também em cada turma, um aluno perguntou se o gráfico é o mesmo que o da função de 2º grau, ao que eu respondi negativamente, mas mostrando no quadro que, realmente, essas funções possuem semelhanças; com a diferença de que a função de 2º grau varia na base; a exponencial, no expoente:

$Funções\ de\ 2º\ grau: y = x^2; y = x^2 + x; y = x^2 + 3x + 7; etc$ ...

$Funções\ exponenciais: y = 2^x; y = 3^x; y = 20{,}5^x; y = 50{,}7^{\frac{x}{2}}; etc$ ...

Ao iniciar o problema proposto oralmente quanto ao tamanho do feto, propus uma pequena discussão relativa ao tema aborto, visto que também é incumbência da escola (e, portanto, do professor) a formação do cidadão, a conscientização. Ambas as turmas expressaram que muito fora trabalhado esse assunto na escola, principalmente no tocante ao uso de métodos anticoncepcionais; o que me deixou bastante satisfeita quanto ao trabalho da escola, haja vista às DSTs (Doenças Sexualmente Transmissíveis) e gravidez precoce (além da sensibilidade quanto ao tema aborto e o conhecimento da lei brasileira relacionada, evidentemente).

A segunda aula se deu num sábado. Como já era esperado que poucos alunos comparecessem, não intentei trabalhar conteúdo novo algum. Foi pedido para alunos verbalizarem problemas a fim de relacionar dados correspondentes em uma tabela para traçar o gráfico relacionado.

Como os alunos das turmas ainda se mostravam tímidos para participar, eu mesma sugeri dois problemas: a receita de uma empresa com o passar do tempo e a produção de pães conforme a quantidade dos ingredientes necessários. Novamente, os alunos se maravilharam com a possibilidade de detectar e visualizar o comportamento de uma situação através de um gráfico, e por o mesmo provir de uma tabela relacionando dados do problema. Ao fim da aula, alguns alunos agradeceram pela aula, nas duas turmas.

Na terceira aula, iniciei o conteúdo de funções exponenciais a partir do trabalho de um problema. O livro didático que eu consultei para o planejamento da aula sugeriu a introdução do conteúdo desta maneira, e pareceu bastante didático. Coloquei no quadro o título do conteúdo a ser trabalhado, e o primeiro problema da aula:

$\underline{Função\ Exponencial}$

$Durante\ 10\ meses, a\ altura\ de\ certa\ planta\ dobra\ a\ cada\ mês.\ Sabendo\ que\ a\ altura\ da\ planta, no\ início\ deste\ período, é\ de\ 1cm;\ calcule\ a\ altura\ ao\ final\ do\ 4º\ mês.$

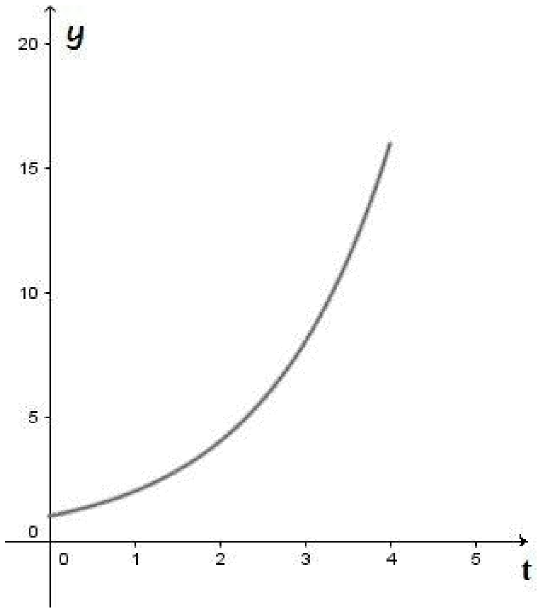
Após leitura do problema em voz alta e colocação dos dados principais no quadro, sugeri construir uma tabela relacionando o transcorrer do tempo com a altura da planta para podermos visualizar melhor as mudanças a cada mês. Construí a tabela abaixo no quadro, com contribuições orais dos alunos:

$tempo(meses)$	$tamanho$
$t = 0$	1
$t = 1$	$2.1 = 2$
$t = 2$	$2.2 = 4$
$t = 3$	$2.4 = 8$
$t = 4$	$2.8 = 16$

Ao perguntar se esses números (*1, 2, 4, 8, 16*) os remetiam a potências de alguma base específica, três alunos em cada turma confirmaram, respondendo *potências de 2.* Acrescentei essa informação à tabela no quadro:

$tempo(meses)$	$tamanho$
$t = 0$	$1 = 2^0 = y$
$t = 1$	$2.1 = 2 = 2^1 = y$
$t = 2$	$2.2 = 4 = 2^2 = y$
$t = 3$	$2.4 = 8 = 2^3 = y$
$t = 4$	$2.8 = 16 = 2^4 = y$

Mesmo a maioria tendo compreendido o porquê de haver potências de 2 pela tabela, todos demonstraram muita insegurança quanto a identificar potências desse tipo em resoluções futuras de problemas, ao que respondi que eles poderiam se tranquilizar quanto a isso, pois ainda iríamos trabalhar vários problemas desse tipo. E assim o fizeram. A partir da tabela acima, foi construído o gráfico correspondente no quadro, com participações orais dos alunos:



Todos os alunos, de ambas as turmas, pareceram ter compreendido com facilidade o porquê de o eixo coordenado horizontal ser relacionado ao tempo transcorrido; e o vertical, ao tamanho da planta. Retornamos à tabela, e a completamos até $t = 10$ para facilitar a visualização do comportamento (e padrões) dos dados, para a dedução da função exponencial relacionada:

$tempo(meses)$	$tamanho$
$t = 0$	$1 = 2^0 = y$
$t = 1$	$2.1 = 2 = 2^1 = y$
$t = 2$	$2.2 = 4 = 2^2 = y$
$t = 3$	$2.4 = 8 = 2^3 = y$
$t = 4$	$2.8 = 16 = 2^4 = y$
$t = 5$	$2.16 = 32 = 2^5 = y$
$t = 6$	$2.32 = 64 = 2^6 = y$
$t = 7$	$2.64 = 128 = 2^7 = y$
$t = 8$	$2.128 = 256 = 2^8 = y$
$t = 9$	$2.256 = 512 = 2^9 = y$
$t = 10$	$2.512 = 1024 = 2^{10} = y$

. . .	
$t = t$	$y = 2^t$

Antes de ter-nos direcionado para a construção da função exponencial, retomei oralmente que a *variável* é colocada quando há algum valor que *varia*; e quando o valor não varia com o transcorrer do tempo, é escrito tal qual. A estranheza maior de ambas as turmas ocorreu neste momento, da dedução da função exponencial relacionada. Poucos conseguiram entender a lógica utilizada, e a maioria permaneceu inconformada e preocupada quanto à impressão de falta de capacidade para fazer isso em problemas futuros. Respondi novamente que eles poderiam se tranquilizar quanto a isso, pois ainda iríamos trabalhar vários problemas desse tipo. Desta vez, eles não o fizeram. Tomei isso como um desafio a ser vencido nas aulas seguintes.

Logo após, reescrevi a tabela no quadro apenas com potências de 2, para melhor compreensão dos discentes quanto aos cálculos feitos:

$tempo(meses)$	$tamanho$
$t = 0$	$1 = 2^0 = y$
$t = 1$	$2.2^0 = 2^1 = y$
$t = 2$	$2.2^1 = 2^2 = y$
$t = 3$	$2.2^2 = 2^3 = y$
$t = 4$	$2.2^3 = 2^4 = y$
$t = 5$	$2.2^4 = 2^5 = y$
$t = 6$	$2.2^5 = 2^6 = y$
$t = 7$	$2.2^6 = 2^7 = y$
$t = 8$	$2.2^7 = 2^8 = y$
$t = 9$	$2.2^8 = 2^9 = y$
$t = 10$	$2.2^9 = 2^{10} = y$
.	

. .	
$t = t$	$y = 2^t$

Enfatizei à turma que se pode escolher um formato de tabela ou outro; não é necessário construir as duas. Prolonguei as extremidades do gráfico para a função $y = 2^t$ sem restrições para o domínio, para valores de t muito grandes e muito pequenos no quadro.

Para esta aula de dois períodos, eu havia planejado o trabalho com dois problemas. Porém, devido às discussões motivadas a cada passo de resolução do problema proposto, pudemos apenas trabalhar o primeiro deles. Mesmo tendo preferido ter trabalhado os dois, não me decepcionei; optando pela qualidade (ao invés da quantidade). Além do que, as discussões pareceram bastante frutíferas, apesar do estranhamento da maioria dos alunos; aparentemente por não estarem habituados a esse molde de aula.

Iniciei a quarta aula por um problema extremamente semelhante ao trabalhado na aula anterior, tanto que a função exponencial relacionada é perfeitamente igual. O problema foi o que eu havia planejado como exercício para a aula anterior, sobre a mitose celular. Coloquei-o no quadro:

A divisão celular denominada "mitose" *consiste em uma célula duplicar seu conteúdo, e então subdividir − se em duas, chamadas células filhas . Cada célula filha , por sua vez , repete esse processo ; totalizando , após a* 2ª *divisão,* 4 *células filhas.*

a) Determine o nº total de células filhas obtidas a partir de uma célula após 3, 4 *e* 7 *divisões;*

b) Escreva uma função que associe a quantidade total de células filhas y*, ob − tidas a partir de uma única célula, após uma quantidade* x *de divisões;*

c) Construa o gráfico.

Logo após, trabalhamos o problema de maneira análoga à aula anterior: fizemos o tratamento da informação, construção da tabela relacionando o transcorrer do tempo com o número de células, dedução da função exponencial, gráfico relacionado. Os alunos em geral, porém, não encontraram “tantas” semelhanças entre esses problemas, por questão de os assuntos serem diferentes: o da aula anterior foi sobre o crescimento de uma planta; o desta aula, aumento de uma população de células – assim alguns disseram.

Ainda houve reação de estranheza de muitos alunos das duas turmas, mas menos do que na aula anterior. Percebi uma pequena mas significativa evolução na compreensão dos alunos quanto à resolução do problema. A função exponencial e o gráfico lhes parecem mais familiares, a construção da tabela ainda é dificultosa para a maioria dos discentes.

Esta foi a quinta aula. Na aula seguinte, será o trabalho com bulas de remédio, em que se trabalhará a partir da meia-vida dos remédios. Então, usei o período desta aula para trabalhar um problema semelhante, sobre a meia-vida da nicotina; o qual havia sido programado para a aula anterior, mas não fora trabalhado por falta de tempo. Coloquei-o no quadro:

A quantidade de nicotina presente no corpo de um fumante se reduz pela metade a cada 2 horas. Quando os neurônios sentem falta dessa substân-cia, provocam agitação, nervosismo e falta de concentração; o que leva a pessoa a fumar novamente. A cada cigarro consumido, o organismo absorve aproxi-madamente 1mg de nicotina. Considerando o consumo de um cigarro, responda:

a) Qual é a quantidade de nicotina presente no organismo após 2 horas? 4 horas? 6 horas?

b) Qual função representa a quantidade y de nicotina (em mg) presente no organismo de uma pessoa t horas após o consumo?

c) Construa o gráfico correspondente.

Li o problema em voz alta, e fizemos o tratamento da informação. Antes da resolução, a qual se deu analogamente a dos problemas anteriores, enfatizei às turmas semelhanças entre esse problema e o da meia-vida de um remédio (especialmente o fato de a substância diminuir pela metade a cada marcação de tempo), ao que muitos transmitiram, pela expressão facial, satisfação em ter conseguido compreender. Além disso, também antes de sua resolução, esse problema chamou a atenção das turmas inteiras pelo assunto, visto que todos pareciam conhecer fumantes problemáticos. Alguns alunos inclusive contaram casos preocupantes, em que mulheres permaneciam fumando durante a gestação, doenças sérias provocadas pelo ato. Fizemos uma pequena discussão sobre a gravidade dessas situações, e a importância de evitar o cigarro.

Da mesma forma que nas aulas anteriores de resolução de problemas, muitos ainda consideravam correto colocar a quantidade inicial da substância correspondentemente à marca de tempo t_1. Após explicações de modo a fazê-los visualizar a situação (no caso, o tempo apenas começa a ser contado após a primeira tragada de cigarro), boa parte dos alunos pareceu ter entendido e aceitado que a concentração inicial de nicotina deve estar relacionada à marca de tempo t_0.

Nesta aula, a partir das expressões faciais e participações orais dos alunos, pareceu-me que, “finalmente”, houve um entendimento geral, das duas turmas, quanto à resolução de problemas desse tipo, de todos os passos. Isso provocou um ambiente de leveza, contentamento geral, motivação. Ao fim da aula, passei no quadro o passo a passo da resolução de problemas desse tipo:

Siga o passo a passo para a dedução de funções exponenciais desse tipo

1) *Traçar uma tabela com* 2 *colunas: uma para a marcação do tempo, e outra para a quantidade da substância ou ser vivo correspondente;*

2) *Na coluna do tempo, colocar as marcas de* t_0 *a* t_{10}*. O tempo é nulo em* t_0*, pois não passara tempo algum ainda. Nas marcas seguintes, o tempo deve ser contado a cada período significativo no problema;*

3) *Passo da coluna da quantidade. Em* t_0*, marca − se a quantidade inicial da substância ou ser vivo correspondente, pois ainda não passara tempo algum. Por isso, o expoente zero para a base deduzida. A cada marca de tempo, como se mul − tiplica a base por ela mesma, soma − se uma unidade ao expoente dessa base;*

4) *Na coluna da quantidade, qual algarismo tem a função de coeficiente (de uma certa base)? O mesmo permanece inalterado com o transcorrer do tempo, ou varia? Permanece inalterado. Por isso, transcreva − o tal qual;*

5) *Ainda na coluna da quantidade, qual algarismo tem função de base (de um certo expoente)* ? Essa base permanece inalterada com o passar das marcas de tempo, *ou varia? Permanece inalterada. Por isso, transcreva − a;*

6) *O expoente permanece inalterado conforme avançam as marcas de tempo,*

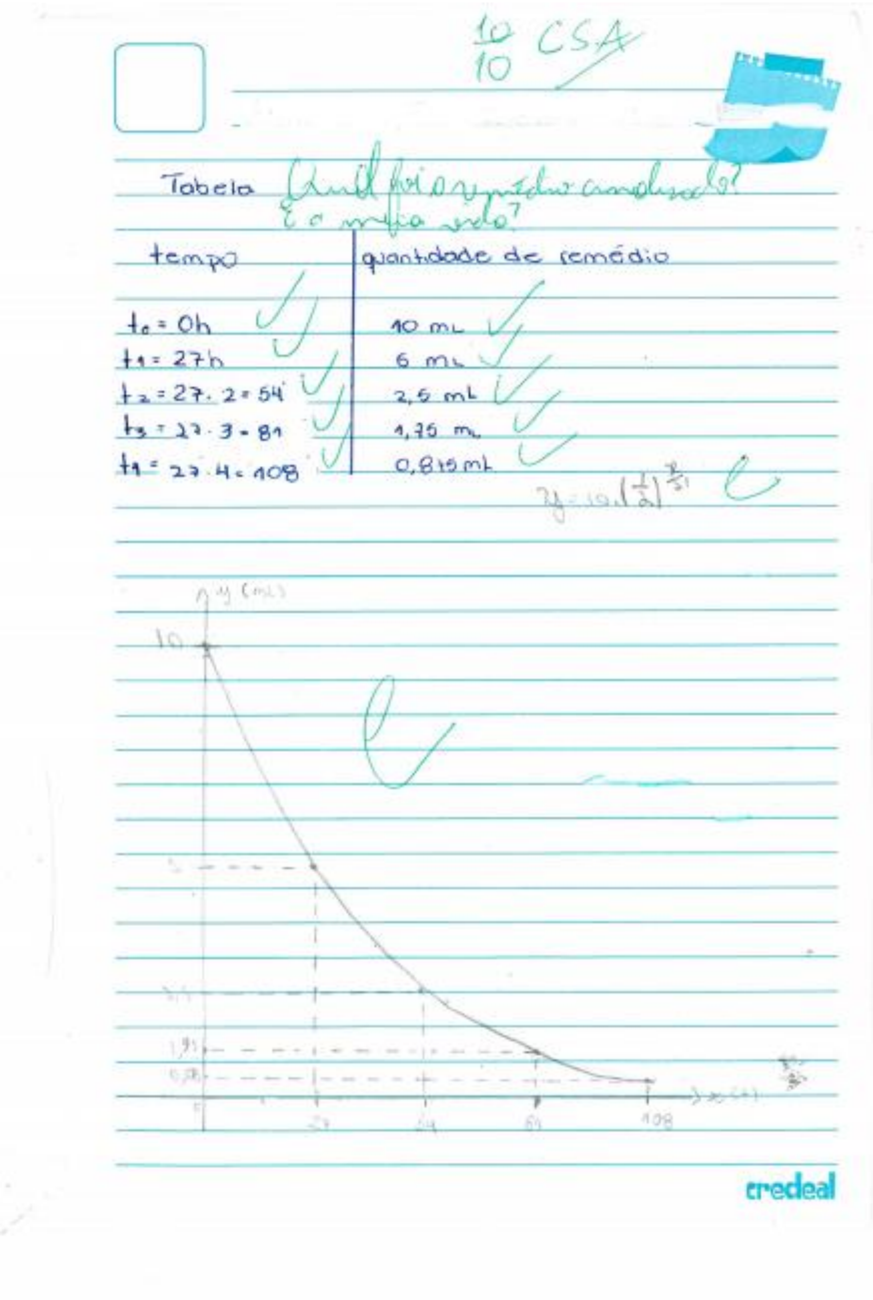
$ou\ varia$? $Varia,\ você\ \ precisará\ \ usar\ uma\ incógnita.\ \ Divida\ a\ mesma\ pelo\ pe-$ $ríodo\ de\ tempo\ significativo\ no\ problema. A\ função\ será\ deste\ modo$:

$$coeficiente.(base)^{\frac{x}{marca\ de\ tempo}}$$

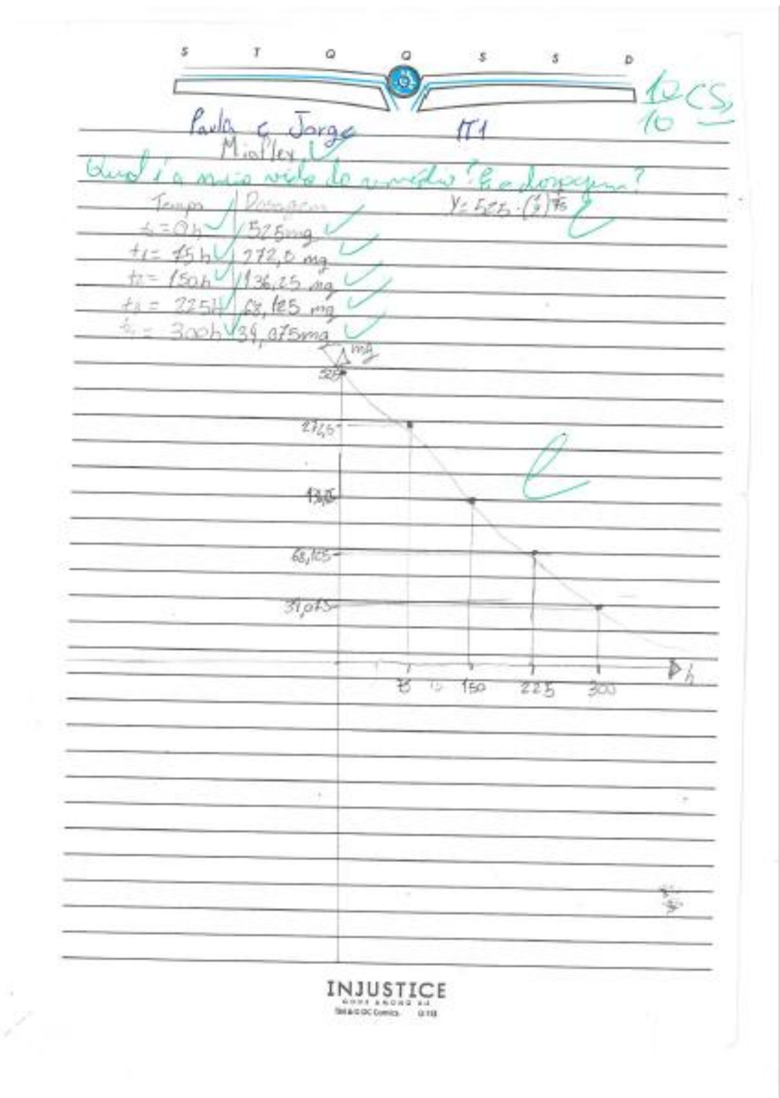
Certifiquei-me de que todos copiaram os passos passados no quadro. Expliquei cada tópico, os alunos pareceram ter compreendido todos os mesmos.

Na sexta aula, foi realizado o trabalho com bulas de remédio a partir da meia-vida do mesmo. Facilmente, os alunos se organizaram em grupos de 2, 3 e 4 pessoas para realizá-lo. Orientei as turmas de que a resolução seria análoga a dos problemas anteriores, especialmente ao problema da nicotina pelo fumo do cigarro, trabalhado na aula imediatamente precedente, pelo fato de a concentração da substância cair pela metade a cada marca de tempo. Conforme o esperado, poucos levaram bula; mas como eu fui precavida, levei algumas bulas. E todos os grupos puderam realizar o trabalho. Mesmo havendo alguns alunos sonolentos em todos os grupos; houve alunos ávidos pelo conhecimento e motivados a aprender a resolver o problema também em todos os grupos. Solícita e detalhadamente, prestei assessoramento aos grupos. De modo surpreendente, os grupos que terminaram em menos tempo dispuseram-se a ajudar os outros grupos por ideia e vontade próprias. Isso ajudou a alavancar a compreensão e a realização da atividade dos grupos, em geral.

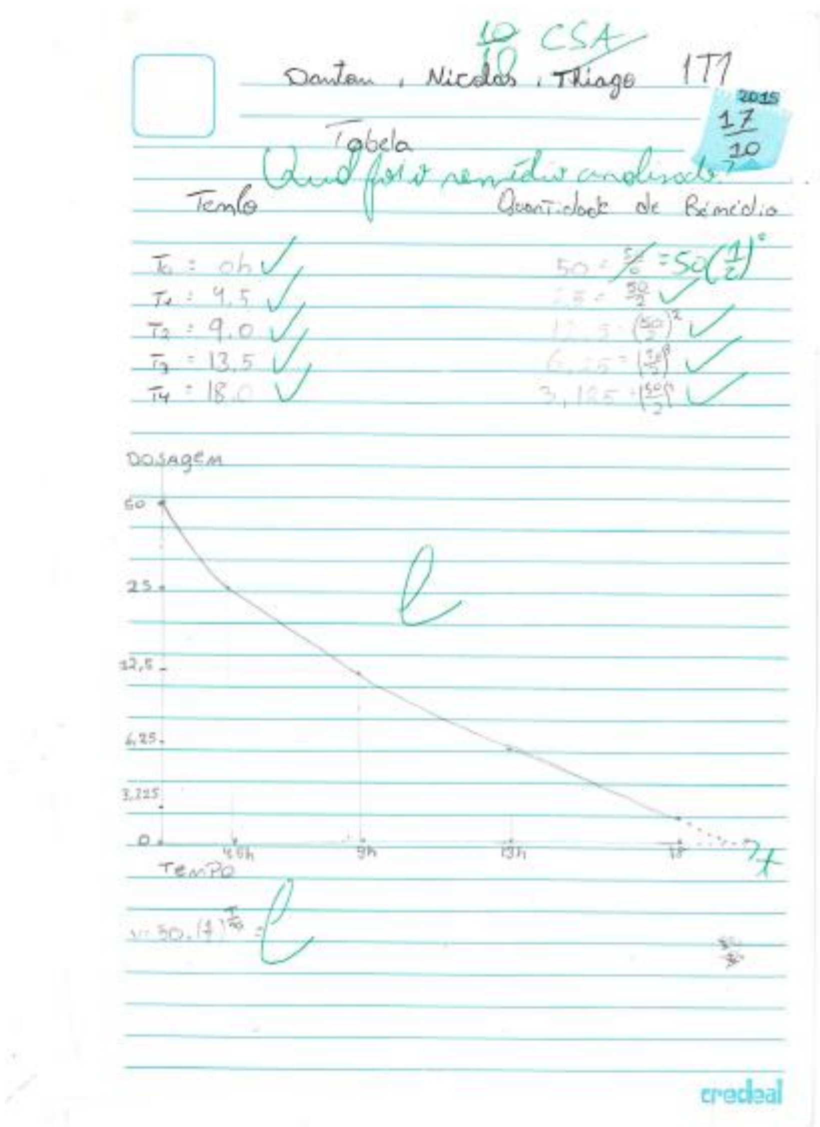
Abaixo, você encontra trabalhos feitos por três grupos. Note que há algumas falhas, mas não me pareceram dignas de desconto de pontos num trabalho inicial realizado. Nenhum grupo destacou o tempo de meia-vida nem a dosagem a ser administrada inicialmente, a maioria não designou o nome do remédio usado. Num primeiro momento, isso me causou estranheza. Algumas reflexões depois, lembrei-me de que eu não pedi pontualmente para discriminarem esses dados. Isso me foi indicativo de que, muitas vezes, os alunos não fazem além do que fora indicado pelo professor. No ato da entrega do trabalho em mãos, comentei com os alunos de cada grupo sobre os erros a serem corrigidos.



No primeiro trabalho, os alunos construíram satisfatoriamente a tabela; designando, inclusive, as operações feitas na coluna do tempo. Esboçaram o gráfico correspondente aos dados da tabela e à função exponencial deduzida. Note, porém, que o traçado do gráfico está duplo em alguns trechos do mesmo. Parece ainda faltar a noção de que um gráfico duplo representa funções diferentes de um gráfico de traçado único - ou é apenas preguiça de corrigir os erros antes de entregar o trabalho para a professora. Essa “preguiça” pode ser não apenas falta de preocupação com a busca da compreensão do conteúdo ou com a nota, como também falta de respeito à hierarquia da sala de aula: questões como essas devem ser trabalhadas em sala de aula.



O segundo grupo confeccionou a tabela e deduziu a função exponencial satisfatoriamente. Embora o traçado do gráfico também não esteja satisfatório, pois além de não apresentar nitidamente a curvatura para cima característica de gráficos de funções exponenciais decrescentes, ainda apresenta pequenas curvas a mais em várias partes do traçado; tem-se a impressão de que não se intencionou construir uma reta, mas a curva correta.



O terceiro grupo preencheu corretamente os dados da coluna do tempo e acertou na dedução da função exponencial. Todavia, errou no primeiro termo da coluna da quantidade de remédio: ao invés de apenas 50 como dose inicial do remédio, colocou $\frac{50}{0}$ (operação que não existe!). Porém, pela sucessão dos dados seguintes, parece que o grupo trabalhou considerando o primeiro valor como 50. Além disso, sabemos que o zero do denominador deveria estar no expoente da base $\frac{1}{2}$, multiplicada pelo próprio 50; o que, de alguma maneira, esses alunos pareciam saber, apenas não conseguiram exprimi-lo. Ainda na coluna da quantidade do remédio, outro erro encontrado foi não ter deixado 50 como coeficiente de $\frac{1}{2}$, mas tê-lo colocado como numerador da base com expoente variável (talvez por terem usado indevidamente a comutatividade do produto). Todavia, a função exponencial fora escrita corretamente, com 50 no seu lugar (e funcionalidade) correto(s), e preservada a base de $\frac{1}{2}$: por essa razão, não descontei pontos, pois parece mais uma dificuldade de exprimir ideias do que de compreensão do conteúdo. Mesmo tendo feito um esboço aceitável do gráfico em relação à forma, esse grupo deixou o traço duplicado em um trecho do mesmo.

Em todos os grupos, houve alunos translucidamente felizes por não apenas compreenderem o conteúdo satisfatoriamente, mas principalmente por serem capazes de resolvê-lo. Esta foi uma das aulas mais produtivas que já lecionei, foi um trabalho muito satisfatório tanto a mim quanto aos alunos envolvidos!

Na sétima aula, uma folha com problemas envolvendo função exponencial foi entregue para cada aluno para ser trabalhada em grupos de 3 ou 4 alunos durante estes dois períodos em cada turma para exercício e fixação de resoluções deste tipo. Os alunos devem trazer essa folha nas próximas aulas de matemática. A folha segue abaixo:

Problemas

1) A meia-vida do antibiótico Clavulin é de 1,3 horas. Considerando uma dose de 500mg:

a) Quanto ainda restará dos princípios ativos do remédio no organismo após 1,3 hora? 2,6 horas? 4,2 horas?

b) Construa uma tabela com 10 linhas relacionando o tempo transcorrido e a quantidade do remédio, e encontre a função exponencial relacionada. Construa o gráfico com os dados encontrados.

2) O número de bactérias em um meio triplica a cada hora.

a) Se, inicialmente, existe 1 bactéria no meio, haverá quantas bactérias em 2 horas? 5 horas? 7 horas?

b) Faça uma tabela com 10 linhas relacionando o tempo em horas e a quantidade de bactérias.

Responda: qual é a função exponencial que gera a quantidade de bactérias em qualquer hora? Construa o gráfico relacionado.

3) Considerando uma amostra com 3g de iodo131 cuja meia-vida é de 8 dias.

a) Quantos gramas de iodo131 ainda haveria nessa amostra após 8 dias? 16 dias? 24 dias? 32 dias?

b) Faça uma tabela com 10 linhas relacionando o tempo em dias e a quantidade de iodo131.

c) Qual função exponencial determina a quantidade de iodo131 na amostra após x dias? Esboce o gráfico da função.

4) A quantia de R$1.000,00 foi aplicada na poupança com uma taxa de rendimento de 1% ao mês, no sistema de juros compostos.

a) Qual será o saldo ao final de 3 meses? 5 meses? 8 meses?

b) Faça uma tabela com 10 linhas relacionando o tempo em meses e o saldo em cada mês.

Responda: qual é a função exponencial que gera o rendimento em qualquer mês? Construa o gráfico relacionado.

5) Florentina fez um empréstimo no banco de R$5.000,00. Sabendo que ela fez um acordo de pagar o valor em 5 anos, a uma taxa de juros compostos de 10% ao mês, responda:

a) De quanto será a parcela a ser paga no 1° mês? 3° mês? 5° mês?

b) Faça uma tabela com 10 linhas relacionando o tempo em meses e o saldo em cada mês.

Responda: qual é a função exponencial que gera o valor a ser pago em qualquer mês? Construa o gráfico relacionado.

6) A cada ano que passa, o valor de um carro diminui 20% em relação ao ano anterior. Se V for o valor do carro no ato da compra:

a) Qual será o valor do carro em 1 ano? 3 anos? 5 anos?

b) Faça uma tabela com 10 linhas relacionando o tempo em anos e o valor do carro a cada ano.

Responda: qual é a função exponencial que gera o valor do carro em qualquer ano? Construa o gráfico relacionado.

A lista fora meticulosamente planejada, de modo que o 1º e o 3º problemas são exatamente do mesmo tipo e assunto do trabalho realizado na aula anterior (meia-vida de um remédio); o 2º, extremamente semelhante ao problema de mitose celular trabalhado poucas aulas antes. Os outros três problemas se tratam de problemas financeiros, mas são análogos aos anteriores pelo acréscimo ou diminuição multiplicativas a cada marcação de tempo (e por gerar função exponencial).

De início, houve resistência dos alunos na resolução dos três últimos problemas, por se tratarem de assuntos diferentes dos vistos até então, de situações financeiras. Então, pedi a atenção de todos, e reforcei que esses problemas são semelhantes aos anteriores por haver sempre acréscimo ou diminuição multiplicativas a cada marcação de tempo. E resolvi no quadro o problema de nº4, sobre aplicação de um valor no banco, com participações orais dos alunos. Os alunos pareceram ter conseguido acompanhar e compreender cada passo.

Os discentes estavam bastante motivados para resolver os problemas, e acreditar na própria capacidade de fazer o que é proposto parece ter tido um papel preponderante nisso. A aula foi de intenso trabalho, prestei assessoramento aos grupos do início ao fim da aula. Os problemas não resolvidos em aula ficaram de tema de casa para a aula seguinte.

A oitava aula foi usada para a correção dos problemas restantes, que são todos, com exceção do de nº4, de aplicação de um valor no banco. Executei todos os passos de cada problema no quadro, explicando cada um. Os alunos estavam bastante participativos e orgulhosos de terem conseguido resolver boa parte dos problemas.

A nona aula aconteceu no laboratório de informática. Primeiramente, foram revisados todos os problemas da folha entregue anteriormente. Desta vez, os gráficos foram produzidos no computador pelo *software Geogebra*. Houve uma dúvida muito básica levantada pelas duas turmas que me preocupou, visto que já havia sido trabalhada algumas vezes anteriormente: quando eu disse que multiplicar por $\frac{1}{2}$ é o mesmo que dividir por 2 (ressaltando a importância de utilizar fatores de $\frac{1}{2}$, ao invés de apenas dividir por 2, para poder deduzir a função exponencial). Para facilitar a visualização da situação, utilizei-me de exemplos com frações, no quadro, para explicar. Isso parece ter dissolvido a dúvida desses alunos:

$$5.\frac{1}{2} = \frac{5}{1}.\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$3.\frac{1}{2} = \frac{3}{1}.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Dando prosseguimento, coloquei todos os gráficos dos problemas dispostos na mesma tela, para visualizar melhor o comportamento dos mesmos, fazer comparações entre os mesmos; e, a partir daí, deduzir as restrições existentes nas funções exponenciais. As seguintes propriedades foram notadas:

- Quando consideramos funções da forma $y = a^x$, sempre há o ponto (0,1) (reforcei aos alunos que qualquer número elevado ao expoente 0 vale 1, e coloquei alguns exemplos algébricos no quadro para facilitar a visualização). Nessas aulas, acabei não colocando o caso em que há um coeficiente multiplicando esse tipo de função, transformando a função do tipo $y = a^x$ para o tipo $y = ca^x$. Nesse caso, o ponto (0,1) é multiplicado pelo coeficiente c, resultando em (0, c). Em planejamentos futuros, considerarei esse caso;
- O gráfico não toca o eixo x, e apenas existe na parte positiva do eixo y;
- Se a base da função for maior do que 1, o gráfico e a função são crescentes;
- Se a base da função for entre 0 e 1, o gráfico e a função são decrescentes;
- Se a base for 0 ou 1, não é considerada função exponencial por se tratar de uma função constante (mostrei as respectivas funções no Geogebra). Pode-se chamá-la de função exponencial degenerada;
- Não foi encontrada base negativa (mostrei que se considerarmos a base negativa, os resultados oscilam entre valores positivos e negativos; não produzindo um gráfico contínuo).

Cada uma das propriedades acima fora colocada no quadro, e a cada propriedade explanada, eram olhados todos os gráficos, para constatar de quais se tratavam. Averiguado isso, tomamos apenas os gráficos correspondentes, e fizemos análise das semelhanças e diferenças entre os mesmos. Como fechamento da aula, coloquei no quadro e explanei uma definição de função exponencial:

$$Definição\ de\ função\ exponencial:$$

$Uma\ função\ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*, definida\ por\ f(x) = \ a^x, y = a^x, com\ a > 0\ e\ a \neq 1, é$ $denominada\ função\ exponencial.$

As turmas se mostraram bastante satisfeitas por terem conseguido visualizar melhor o comportamento dos fenômenos observados; e por terem notado que a feitura de gráficos pelo software é consideravelmente mais rápida do que à mão, possibilitando fazer vários gráficos na mesma aula e, com isso, facilitando a constatação de semelhanças e diferenças entre os mesmos, para chegar à verificação de propriedades das funções exponenciais.

Ao fim da prática, a surpresa foi generalizada! Todos os alunos estavam conseguindo resolver os problemas satisfatoriamente, inclusive construindo os gráficos (em que muitos apresentaram dificuldades ao longo da prática), e tiraram boas notas. Especialmente os que se colocavam rótulos negativos ao início, como “burro” - esses vieram a minha mesa me agradecer, emocionados. Exceção apenas de um aluno de cada turma, que se negava constantemente a realizar as atividades.

5 Considerações finais

Seguindo teorias de Skovsmose, Barbosa e Vergnaud; planejei inicialmente propor aos alunos problemas para resolverem sozinhos, apenas sugerindo a construção de uma tabela relacionando o tempo com a quantidade da substância/ser vivo para a melhor visualização dos dados. Mesmo assim, resolvemos todos juntos o primeiro problema, a resolução foi colocada no quadro, conforme era colocada oralmente. O problema se tratava do tamanho de uma planta que dobrava a cada mês. Intentei seguir apenas com leitura do problema, tratamento da informação e perguntas norteadoras. Sempre houve respostas corretas para as minhas perguntas. Poucos respondiam; mas os outros, mesmo com semblantes de surpresos, pareciam ter entendido e concordado. Quando eu propus problemas para os alunos resolverem sozinhos, eu estava segura de que eles o fariam, pois poderiam simplesmente seguir a realização do primeiro problema -- pensara eu. Ledo engano. As reações de susto, sensação de incapacidade, impotência dos alunos apenas cresciam; ao que concluí ser necessário resolver mais problemas com as turmas em aula, colocando a resolução no quadro. E assim foi feito, mas com pouca evolução no aprendizado.

Não podemos menosprezar a capacidade dos “nossos” alunos. Todos nós somos inteligentes, apenas temos tempos diferentes. Além disso, as perguntas norteadoras permaneciam sendo respondidas corretamente, e os outros alunos continuavam mostrando que concordavam e entendiam. Embora não tivesse desistido de lecionar o conteúdo, percebi a necessidade de fazer adaptações no ensino, e prover uma programação no modelo passo a passo pareceu vir ao encontro do que era preciso.

A questão norteadora da pesquisa segue abaixo, repousou sobre a programação recomendada:

O ensino de uma programação passo a passo contribuiu para o aprendizado da dedução de funções exponenciais a partir de problemas? E para o aprendizado de funções exponenciais, em geral? Essa programação passo a passo pode ser uma alternativa ao ensino desse conteúdo?

Quando o professor provê uma “receita de bolo” para a resolução de exercícios e/ou problemas, há o receio de que os discentes, ao aplicá-la, estejam apenas “seguindo o roteiro”, sem efetivamente compreender o que estão fazendo. Note que a programação oferecida não foi muito direta, pois foi permeada de questionamentos norteadores. Outrossim, mesmo com essa programação pronta, em algumas aulas, ainda houve dificuldade da maioria dos alunos em aplicá-la. Tanto que, quando finalmente conseguiram usá-la com habilidade, no calor da motivação (por terem, depois de um tempo considerável, alcançado uma conquista que, para muitos, parecia ter se tornado inclusive pessoal), contaram (explicando) para a professora e para colegas a maneira como o fizeram, e o que pensaram na execução de cada passo. Por essas razões, podemos responder afirmativamente à primeira pergunta da questão de pesquisa.

Analisando a programação dada, notamos que o direcionamento não é apenas para construir a função exponencial relacionada ao problema dado. A tabela relacionando o transcorrer do tempo com a quantidade da substância\ser vivo dispõe dados até quando se queira, podendo também ser usada para responder questões pontuais em que são pedidos dados do problema. Várias outras utilidades podem ser atribuídas, como: visualizar o comportamento da situação colocada no problema; trabalhar propriedades da multiplicação, divisão, potenciação; reconhecimento de padrões; etc. Portanto, realmente, podemos responder afirmativamente à segunda pergunta.

Conforme o que fora colocado acima, da mesma forma, concluímos que sim, essa programação passo a passo pode ser uma alternativa para o ensino de funções exponenciais, o que responde afirmativamente à terceira pergunta colocada. Não sugiro iniciar a resolução de problemas com essa programação ou outra semelhante. Sugiro primeiramente dar oportunidade aos alunos de, preferencialmente em grupos, conceberem estratégias de resolução de problemas dados; cabendo ao professor apenas o tratamento da informação, perguntas norteadoras e a sugestão de construção de tabela do tipo mencionado acima (essa última apenas se os alunos não tiverem essa ideia sozinhos depois de algum tempo). Por outro lado, se, com o passar das aulas, houver pouca ou nenhuma evolução no aprendizado, uma programação passo a passo como a colocada acima ou similar pode ser uma boa alternativa para impulsionar o ensino e a aprendizagem.

6 Bibliografia

BARBOSA, J.C. *Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para o Debate Teórico.* Reunião Anual da ANPED, 24. 2001. Caxambu, MG.

DUVAL, R. *Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: MACHADAO, S. DA (Org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros em Representação Semiótica.* Campinas: Papirus, 2003.

HASELEIN, Walter Mendes. *Explorando Modelos que Envolvem Funções Exponenciais no Ensino Médio*. Trabalho de conclusão de curso - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

SILVA, Rodrigo Sychocki da. *O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na escola básica*. Dissertação de mestrado profissional - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SKOVMOSE, O. *Cenários para Investigação*. Bolema, Rio Claro, SP, n.14, 2000.

SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo Olhar: Matemática.* 1.ed. São Paulo: FTD, 2010. Coleção Novo Olhar; v.1.

VERGNAUD, G. *A Teoria dos Campos Conceituais*. In: BRUM, J. (Org.). *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Horizontes Pedagógicos. 1996.