

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIESCALA APLICADA A PROBLEMAS
DINÂMICOS

por

João Baptista Dias Moreira

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Agosto de 2018

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIESCALA APLICADA A PROBLEMAS
DINÂMICOS

por

João Baptista Dias Moreira

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Aprovada por:

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes, PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Otávio Augusto Alves da Silveira, CORE/UFSC

Prof. Dr. William Martins Vicente, FEAGRI/UNICAMP

Prof. Dr. Eduardo André Perondi

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 29 de Agosto de 2018

AGRADECIMENTOS

À família, pelo apoio, carinho e dedicação que sempre demonstraram.

Aos amigos e colegas que sempre me incentivaram.

Ao orientador Prof. Walter Jesus Paucar Casas, pela disponibilidade e assistência prestada ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao PROMEC e à UFRGS pela qualidade do ensino oferecido.

RESUMO

Em áreas que demandam componentes de alto desempenho como a indústria automotiva, aeronáutica e aeroespacial, a otimização do desempenho dinâmico de estruturas é buscada através de diferentes abordagens, como o projeto de materiais específicos à aplicação, ou otimização estrutural topológica. Em particular, o método de otimização estrutural evolucionária bidirecional BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) tem sido utilizado no projeto simultâneo de estruturas hierárquicas, o que significa que o domínio estrutural consiste não somente na estrutura como também na topologia microestrutural dos materiais empregados. O objetivo desse trabalho consiste em aplicar a metodologia BESO na resolução de problemas multiescala bidimensionais visando à maximização da frequência fundamental de estruturas, assim como a minimização de sua resposta quando sujeitas a excitações forçadas numa determinada faixa de frequências. O método da homogeneização é introduzido e aplicado na integração entre as diferentes escalas do problema. Em especial, o modelo de interpolação material é generalizado para o uso de dois materiais no caso de otimização da resposta no domínio da frequência. A metodologia BESO foi aplicada a casos de otimização tomando como domínio estrutural somente a macroescala (projeto estrutural), somente a microescala (projeto material), assim como ambas as escalas concomitantemente (projeto multiescala). Para os casos estudados, a redistribuição de material na macroescala levou a resultados melhores em relação à otimização que modifica a microestrutura. Para a maximização da frequência fundamental, a otimização multiescala obteve os melhores resultados, já para a minimização da resposta em frequência, a otimização somente na macroescala se mostrou mais eficiente.

Palavras-chave: Otimização Topológica; Domínio da Frequência; Homogeneização.

ABSTRACT

In areas which demand high performance components, such as automotive, aeronautics and aerospace, the design of application dependent materials and structural topology optimization are two approaches used in order to optimize structures' dynamic behaviour. In particular, the Bi-directional Evolutionary Structural Optimization (BESO) method has been applied to the simultaneous project of hierarchical structures, meaning that the project's domain consists not only on the structure on the macroscale, but also on the representative volume element (RVE) associated with the microstructure of the employed materials. The objective of this work is to apply the BESO method in order to solve multiscale bidimensional problems, more specifically, topology optimization problems for fundamental frequency maximization and minimization of the response in the frequency domain under harmonic excitation. The homogenization method is introduced and used to integrate the macro and microscales considered. Furthermore, the material interpolation model is generalized for two material domains in the response minimization problem. The BESO method was applied to optimization problems where the structural domain was either the macrostructure (structural project), microstructure (material project), or both scales simultaneously (multiscale project). In general, material distribution at the macroscale lead to better results in comparison to optimization at the microscale. For fundamental frequency maximization, the multiscale approach obtained better results, while for minimization of the frequency response the results were optimal when the structural domain was restricted to the macrostructure.

Keywords: Topology optimization; Frequency domain; Homogenization.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Otimização estrutural.....	1
1.1.1	Otimização Topológica.....	4
1.2	Análise multiescala.....	5
1.3	Motivação	8
1.4	Objetivos.....	9
1.5	Organização do trabalho	10
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	11
2.1	Otimização topológica de estruturas contínuas com microestrutura	11
2.2	Método de variável contínua SIMP, método evolucionário BESO.....	12
2.3	Abordagens multiescala.....	15
3	HOMOGENEIZAÇÃO	17
3.1	Introdução de multiescala no problema de elasticidade linear	17
3.2	Obtenção do problema de homogeneização	21
3.3	Formulação em termos do método de elementos finitos	26
4	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA MULTIESCALA	31
4.1	Definição do problema considerado	31
4.2	Interpolação material	33
4.3	Formulação do problema de otimização topológica.....	37
4.3.1	Formulação do problema de maximização da frequência fundamental	37
4.3.2	Formulação do problema de minimização da resposta no domínio da frequência...	39
4.4	Análise da sensibilidade	40
4.4.1	Sensibilidade para o problema de maximização da frequência fundamental	40
4.4.1.1	Sensibilidade para o problema de maximização da frequência fundamental na macroescala	41
4.4.1.2	Sensibilidade para o problema de maximização da frequência fundamental na microescala	42
4.4.2	Sensibilidade para o problema de minimização da resposta em frequência.....	46

4.4.2.1	Sensibilidade para o problema de minimização da resposta em frequência para a macroescala	47
4.4.2.2	Sensibilidade para o problema de minimização da resposta em frequência para a microescala	48
4.5	Filtragem das sensibilidades	49
4.6	Atualização das variáveis de projeto	52
4.7	Sumário do algoritmo BESO aplicado a problemas multiescala.....	54
5	RESULTADOS	56
5.1	Otimização para maximização da frequência fundamental	56
5.1.1	Projeto estrutural aplicado à maximização da frequência fundamental	56
5.1.1.1	Validação do esquema de interpolação.	57
5.1.2	Projeto material aplicado à maximização da frequência fundamental	58
5.1.2.1	Validação do processo de homogeneização	60
5.1.2.2	Estudo da influência da taxa de evolução ER.....	62
5.1.2.3	Avaliação da influência das condições de contorno para projeto de materiais	64
5.1.2.4	Materiais com microestrutura anisotrópica	66
5.1.2.5	Viga biengastada com microestrutura	68
5.1.3	Projeto multiescala aplicado à maximização da frequência fundamental	69
5.1.3.1	Comparação dos esquemas de otimização na escala microestrutural, macroestrutural e multiescala	70
5.1.3.2	Otimização simultânea multiescala para duas microestruturas	73
5.1.3.3	Influência das condições de contorno para otimização simultânea multiescala.....	74
5.2	Otimização para minimização da resposta no domínio da frequência	76
5.2.1	Projeto estrutural aplicado à minimização da resposta no domínio da frequência...77	
5.2.1.1	Validação do esquema de otimização macroestrutural.....	77
5.2.1.2	Otimização de uma viga bimatéria.....	80
5.2.2	Projeto material aplicado à minimização da resposta no domínio da frequência.....	82
5.2.2.1	Dependência da convergência da microestrutura com relação à topologia inicial...82	
5.2.2.2	Influência da topologia inicial no projeto material de microestrutura compósita ...84	
5.2.3	Projeto multiescala aplicado à minimização da resposta no domínio da frequência88	
5.2.3.1	Viga L.....	88
5.2.3.2	Influência da distribuição de material nas escalas macro e micro.....	91

6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	95
6.1	Conclusões.....	95
6.2	Sugestões	97

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Problema de otimização paramétrica: (a) Treliça engastada sob carga pontual na extremidade; (b) Estrutura com dimensões das seções transversais otimizadas.3	3
Figura 1.2	Problema de otimização de forma: (a) Treliça engastada sob carga pontual na extremidade; (b) Estrutura com altura da seção transversal da viga otimizada. .3	3
Figura 1.3	Problema de otimização topológica para minimização da rigidez: (a) Viga engastada sob carga axial; (b) Viga otimizada com restrição de 40% do volume original.4	4
Figura 1.4	Estrutura hierárquica na torre Eiffel. As pernas das torres são formadas a partir de intrincada rede de treliças [Loyrette, 1985].6	6
Figura 1.5	Microestruturas possíveis: (a) Espaços ocupados por material e vazios; (b) Combinação de dois materiais sem vazios.7	7
Figura 1.6	Microestrutura de material elástico com coeficiente de Poisson de -0.9 [Sigmund, 2000a].8	8
Figura 2.1	(a) Malha de elementos finitos onde é atribuída uma altura a cada elemento; 11	11
Figura 2.2	Padrão do tipo tabuleiro de xadrez nas áreas destacadas..... 13	13
Figura 3.1	Problema geral da elasticidade. 17	17
Figura 3.2	Região ocupada por dois materiais..... 19	19
Figura 3.3	Domínio em \mathbb{R}^2 subdividido em células idênticas..... 19	19
Figura 3.4	Diferentes tamanhos característicos ϵ : (a) $\epsilon=1$; (a) $\epsilon=0.5$; (a) $\epsilon=0.25$; 20	20
Figura 4.1	Estrutura cujo material possui microestrutura associada.....32	32
Figura 4.2	Esquema multiescala mostrando os domínios já discretizados. 33	33
Figura 4.3	Escala presentes e índices associados a cada material.34	34
Figura 4.4	Padrão tabuleiro de xadrez, com elementos ligados somente por um vértice. .49	49
Figura 4.5	Raio de filtragem definindo quais sensibilidades elementares são consideradas no processo de suavização.50	50
Figura 4.6	Otimização: (a) Com estabilização; (b) Sem estabilização. 51	51
Figura 4.7	Fluxograma para o procedimento BESO multiescala.....55	55
Figura 5.1	Projeto estrutural de viga biapoada, mostrando domínio viável e topologia otimizada.....57	57
Figura 5.2	Esquema das condições de contorno e dos materiais utilizados. Unidades não especificadas assumidas no SI.57	57

Figura 5.3	Frequência fundamental e estrutura otimizada composta por dois materiais: (a) Neste trabalho; (b) Zuo et al., 2013.....	58
Figura 5.4	Histórico da função objetivo e fração volumétrica.....	59
Figura 5.5	Otimização topológica para projeto de materiais. Estrutura composta por: (a) Material isotrópico cheio; (b) Material com microestrutura otimizada.....	59
Figura 5.6	Microestruturas obtidas para o caso da viga biengastada: (a) Nesse trabalho; (b) Zuo et al., 2013.....	60
Figura 5.7	Histórico da frequência fundamental e da fração volumétrica.....	61
Figura 5.8	Condições de contorno e materiais utilizados. Valor da frequência fundamental indicado por ω_0	62
Figura 5.9	Microestruturas obtidas para ER^{MI} variando de de (a) 1% a (j) 10%.....	63
Figura 5.10	Histórico da função objetivo para diferentes taxas de evolução ER^{MI}	63
Figura 5.11	Viga em balanço com massa concentrada no centro da extremidade livre. Valor da frequência fundamental indicado por ω_0	64
Figura 5.12	Frequência fundamental, microestrutura e matriz constitutiva obtidas para a viga em balanço com massa concentrada no meio da extremidade livre.	65
Figura 5.13	Evolução dos valores da função objetivo e da fração volumétrica ao longo da otimização.....	65
Figura 5.14	Viga em L com massa concentrada na extremidade livre.	66
Figura 5.15	Microestrutura e matriz constitutiva e frequência fundamental obtidas para a viga em L.	67
Figura 5.16	Histórico da frequência fundamental e da fração volumétrica.....	67
Figura 5.17	Frequência fundamental, microestrutura e matriz constitutiva obtidas para a viga biengastada.....	68
Figura 5.18	Histórico da frequência fundamental e da fração volumétrica para a viga biengastada.....	69
Figura 5.19	Otimização topológica multiescala simultânea: Estrutura composta por materiais com microestruturas associadas.	70
Figura 5.20	Topologias macro e micro, matrizes constitutivas e frequência fundamental obtida.....	71
Figura 5.21	Função objetivo (em azul) e fração volumétrica (em laranja) para os três casos considerados.....	72

Figura 5.22	Topologias macro e micro, matrizes constitutivas e frequência fundamental obtida.....	73
Figura 5.23	Histórico da frequência fundamental e da fração volumétrica ao longo do processo de otimização.	74
Figura 5.24	Topologias macro e microescalares, matrizes constitutivas e frequência fundamental obtida.....	75
Figura 5.25	Função objetivo e fração volumétrica em função da iteração.	76
Figura 5.26	Viga em balanço com força pontual no centro da extremidade livre.	77
Figura 5.27	Resultados obtidos: Por (a) Vicente et al., 2015; (b) Este trabalho.....	78
Figura 5.28	Função objetivo e fração volumétrica em função da iteração.	79
Figura 5.29	Funções de resposta em frequência original e após a otimização.	79
Figura 5.30	Viga biengastada com força parabólica distribuída.....	80
Figura 5.31	Topologia e função objetivo otimizadas. O material rígido é representado em preto, enquanto o material flexível aparece em verde.	81
Figura 5.32	Resposta em frequência para a estrutura original e otimizada.	81
Figura 5.33	Histórico da resposta em frequência e da fração volumétrica ao longo do processo de otimização.	82
Figura 5.34	Resultados obtidos por: (a) Vicente et al., 2015; (b) Nesse trabalho.	83
Figura 5.35	Resposta em frequência e fração volumétrica em função da iteração.	84
Figura 5.36	Otimização da microestrutura: (a) Topologia inicial; (b) Resultado final.....	85
Figura 5.37	Microestruturas obtidas para topologia inicial com frações volumétricas de: (a) 40%; (b) 50%. Ambas as figuras contém 9x9 EVRs.....	86
Figura 5.38	Evolução das funções objetivo ao longo do processo iterativo.	87
Figura 5.39	FRFs para o caso (b) de otimização a volume constante.....	87
Figura 5.40	Viga engastada em L.	88
Figura 5.41	Estruturas, microestruturas e matrizes homogêneas obtidas para o caso da viga em L obtidas por: (a) Vicente et al., 2015; (b) Esse trabalho;	89
Figura 5.42	Resposta em frequência para a estrutura inicial e otimizada.....	90
Figura 5.43	Evolução da função objetivo e frações volumétricas nas diferentes escalas.	91
Figura 5.44	Viga biapoiada com carga distribuída de 1 kN/m de intensidade.	92
Figura 5.45	Resultados da otimização para a estrutura(macro) e para a microestrutura.	93
Figura 5.46	Resposta em frequência para alguns casos selecionados.....	94

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Propriedades dos materiais base utilizados.....	60
Tabela 5.2	Propriedades dos materiais utilizados.....	70
Tabela 5.3	Materiais utilizados para otimização da resposta em frequência.....	77

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ESO	<i>Evolutionary Structural Optimization</i>
BESO	<i>Bi directional Evolutionary Structural Optimization</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
EVR	Elemento de volume representativo

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

A_0	Operador diferencial
A_1	Operador diferencial
A_2	Operador diferencial
AR	Taxa de adição
AR_{\max}	Taxa de adição máxima
AR_{\max}^{MA}	Taxa de adição máxima macroestrutural
$AR_{\max}^{MI,1}$	Taxa de adição máxima microestrutural em Y_1
$AR_{\max}^{MI,2}$	Taxa de adição máxima microestrutural em Y_2
\mathbf{b}	matriz das deformações na microescala
\mathbf{B}	matriz das deformações na macroescala
\mathbf{D}	Tensor constitutivo
\mathbf{D}_1	Tensor constitutivo do material isotrópico 1
\mathbf{D}_2	Tensor constitutivo do material isotrópico 2
\mathbf{D}_3	Tensor constitutivo do material isotrópico 3
\mathbf{D}_4	Tensor constitutivo do material isotrópico 4
\mathbf{D}^{MA}	Tensor constitutivo na macroescala
\mathbf{D}_1^{MI}	Tensor constitutivo no domínio microescalar Y_1
\mathbf{D}_2^{MI}	Tensor constitutivo no domínio microescalar Y_2
\mathbf{D}^H	Tensor constitutivo homogeneizado
\mathbf{D}_1^H	Tensor constitutivo do material 1 homogeneizado
\mathbf{D}_2^H	Tensor constitutivo do material 2 homogeneizado
\mathbf{d}_1	Primeira coluna do tensor constitutivo
\mathbf{d}_2	Segunda coluna do tensor constitutivo
\mathbf{d}_3	Terceira coluna do tensor constitutivo
D_{ijkl}	componentes do tensor constitutivo
D_{ij}^H	Tensor constitutivo homogeneizado
D_{ijkl}^ϵ	Tensor constitutivo dependente do tamanho característico da microescala
D_{ijkl}^H	Tensor constitutivo homogeneizado
e_{ij}	Tensor deformação
E_1	Coefficiente de Poisson do material base 1
E_2	Coefficiente de Poisson do material base 2
E_3	Coefficiente de Poisson do material base 3
E_4	Coefficiente de Poisson do material base 4
ER	Taxa de evolução

ER^{MA}	Taxa de evolução macroestrutural
$ER^{MI,1}$	Taxa de evolução microestrutural em Y_1
$ER^{MI,2}$	Taxa de evolução microestrutural em Y_2
f	Função objetivo
\mathbf{f}	Campo de forças de volume
f_i	Componentes do campo de forças de volume
f_i^H	Componentes do campo de forças de volume homogeneizado
f_i^ϵ	Componentes do campo de forças de volume
$f_i^{(0)}$	Componentes do campo de forças de volume
$f_i^{(1)}$	Componentes do campo de forças de volume
$f_i^{(2)}$	Componentes do campo de forças de volume
\mathbf{F}	Vetor de forças
F_i	Função vetorial arbitrária
\mathbf{G}	Operador diferencial
g_i	Função arbitrária
\mathbf{H}	Matriz de rigidez
H_0^1	Espaço de Sobolev definido em domínio com suporte compacto
h_j	Função arbitrária
\mathbf{I}	Matriz identidade
\mathbf{k}	matriz de rigidez global na microestrutura
\mathbf{K}	matriz de rigidez global na macroestrutura
\mathbf{K}_e	matriz de rigidez elementar na macroestrutura
\mathbf{K}_1^e	matriz de rigidez elementar do material 1 na macroestrutura
\mathbf{K}_2^e	matriz de rigidez elementar do material 2 na macroestrutura
\mathbf{L}	Vetor de localização do grau de liberdade k
\mathbf{M}	matriz de rigidez global na macroestrutura
\mathbf{M}_e	matriz de rigidez elementar na macroestrutura
\mathbf{M}_1^e	matriz de rigidez elementar do material 1 na macroestrutura
\mathbf{M}_2^e	matriz de rigidez elementar do material 2 na macroestrutura
n	Número de elementos finitos em uma malha qualquer
\mathbf{n}	Vetor unitário na direção normal
n_i	Componentes do vetor unitário na direção normal
\mathbf{N}^g	Matriz global das funções de forma
N'	Número de elementos associados a um único material na malha macroestrutural
$N^{MI,1}$	Número de elementos na malha microestrutural Y_1
$N^{MI,2}$	Número de elementos na malha microestrutural Y_2
N^{MA}	Número de elementos na malha macroestrutural
$N_{1,i}$	Função de forma associada ao no i na direção horizontal
$N_{2,i}$	Função de forma associada ao no i na direção vertical
p	Expoente de penalização

P	Vetor de forças com variação harmônica no tempo
\wp	Espaço das variações admissíveis
\wp^h	Aproximação de dimensão finita do espaço das variações admissíveis
q	Vetor deslocamento
R	Resíduo da equação de equilíbrio estático na microestrutura
\mathbb{R}^2	Espaço vetorial
\mathbb{R}^3	Espaço vetorial
r_{ij}	Distância entre os elementos i e j .
r_{\min}	Raio de filtragem
r_{\min}^{MA}	Raio de filtragem macroestrutural
$r_{\min}^{MI,1}$	Raio de filtragem microestrutural em Y_1
$r_{\min}^{MI,2}$	Raio de filtragem microestrutural em Y_2
t	Campo de forças de superfície
t_i	Componentes do campo de forças de superfície
t_i^H	Componentes do campo de forças de superfície homogeneizado
\mathbf{U}_0	Modo de vibração fundamental
U^k	Grau de liberdade k do vetor amplitude de \mathbf{U}
U	Vetor de deslocamentos
\mathbf{U}_L	Vetor de deslocamentos do problema associado
u	Vetor deslocamento
u_i	Componentes do vetor deslocamento
u_i^ϵ	Componentes do vetor deslocamento dependente da microescala
$u_i^{(0)}$	Componentes do primeiro termo da expansão em ϵ do vetor deslocamento
$u_i^{(1)}$	Componentes do segundo termo da expansão em ϵ do vetor deslocamento
$u_i^{(2)}$	Componentes do terceiro termo da expansão em ϵ do vetor deslocamento
V_k	Fração volumétrica durante a k -ésima iteração
V_f	Restrição volumétrica
V_f^{MA}	Fração volumétrica para a macroescala
$V_f^{MI,1}$	Fração volumétrica para a microescala Y_1
$V_f^{MI,2}$	Fração volumétrica para a microescala Y_2
V_f^{MA}	Restrição volumétrica na macroestrutura
$V_f^{MI,1}$	Restrição volumétrica na microestrutura Y_1
$V_f^{MI,2}$	Restrição volumétrica na microestrutura Y_2
V	Vetor de deslocamentos harmônico
$\ddot{\mathbf{V}}$	Vetor de acelerações harmônico
v	Variação admissível
v_i	Componentes de uma variação admissível
\mathbf{v}_h	Aproximação em dimensão finita de uma variação admissível
v	Vetor dos deslocamentos virtuais em termos dos valores nodais

$v_{1,i}$	Deslocamento virtual nodal na direção horizontal
$v_{2,i}$	Deslocamento virtual nodal na direção vertical
\mathbf{w}	Função arbitrária dependente de um único vetor
w_i	Componentes de função arbitrária dependente de um único vetor
W_{ij}	Peso utilizado no processo de filtragem
\mathbf{x}	Vetor posição
x	Variável de projeto
x_i	Coordenadas cartesianas
\mathbf{X}	Vetor variável de projeto arbitrário
\mathbf{X}^{MA}	Vetor das variáveis de projeto na macroescala
$\mathbf{X}^{MI,1}$	Vetor das variáveis de projeto na microescala Y_1
$\mathbf{X}^{MI,2}$	Vetor das variáveis de projeto na microescala Y_2
X_i^{MA}	Variável de projeto da macroescala associada ao elemento i
$X_i^{MI,1}$	Variável de projeto da microescala Y_1 associada ao elemento i
$X_i^{MI,2}$	Variável de projeto da microescala Y_2 associada ao elemento i
\mathbf{y}	Vetor posição
y	Variável de estado
y_i	Sistema local de coordenadas
\mathbf{y}_1	Vetor posição
\mathbf{y}_2	Vetor posição
Y	Domínio da célula unitária
$ Y $	Volume do domínio da célula unitária
Y_1	Domínio da célula unitária do material 1 da macroescala
Y_2	Domínio da célula unitária do material 2 da macroescala

Símbolos Gregos

α_{add}^{th}	Sensibilidade de corte de adição
α_{del}^{th}	Sensibilidade de corte de remoção
α^{th}	Sensibilidade de corte
α_j	Sensibilidade do j -ésimo elemento
α_j	Sensibilidade filtrada
α_j	Sensibilidade estabilizada
Γ_d	Superfície onde os deslocamentos são prescritos
Γ_t	Superfície onde as forças superficiais são prescritas
ϵ	Tamanho característico
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor deformação
$\boldsymbol{\varepsilon}_i$	Deformações em notação de engenharia
λ	Matriz multiplicador de Lagrange
ν_1	Coefficiente de Poisson do material base 1
ν_2	Coefficiente de Poisson do material base 2

ν_3	Coeficiente de Poisson do material base 3
ν_4	Coeficiente de Poisson do material base 4
ρ_1^H	Densidade do material 1 da macroescala
ρ_2^H	Densidade do material 2 da macroescala
ρ^{MA}	Densidade na macroescala
ρ_1^{MI}	Densidade do material 1 no domínio microescalar Y_1
ρ_2^{MI}	Densidade do material 2 no domínio microescalar Y_2
ρ_1	Densidade do material base 1
ρ_2	Densidade do material base 2
ρ_3	Densidade do material base 3
ρ_4	Densidade do material base 4
σ	Tensões tensão
σ_i	Tensões em notação de engenharia
σ_{ij}	Tensor tensão
σ_{\max}	Tensão máxima
τ	tolerância
Φ	Função vetorial Y-periódica
Φ_i	Componentes da função vetorial Y-periódica
χ	Vetor de deslocamentos na microestrutura
χ^{rs}	Função vetorial Y-periódica
χ_k^{rs}	Componentes da função vetorial Y-periódica
χ_h^k	Aproximação dos deslocamentos na microestrutura
χ^k	Vetor dos deslocamentos nodais na microestrutura
ω	Frequência, rad/s
ω_0	Frequência fundamental, rad/s
Ω	Domínio estrutural
Ω_1	Domínio estrutural associado ao material 1 da macroescala
Ω_2	Domínio estrutural associado ao material 2 da macroescala
$\partial\Omega$	Contorno do domínio estrutural

Símbolos Hebraicos

\aleph	Espaço dos campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis
\aleph^h	Aproximação de dimensão finita de \aleph

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados brevemente os temas pertinentes à dissertação e sua relação com o trabalho desenvolvido. Em seguida é dada a motivação para o trabalho, assim como seus objetivos. Finalmente é explicada a organização do trabalho através da descrição do conteúdo de cada capítulo.

1.1 Otimização estrutural

Otimizar significa, de forma geral, tornar algo tão bom quanto possível. Em mecânica, uma estrutura é entendida como qualquer união de materiais cujo objetivo é sustentar diferentes tipos de solicitações [Gordon, 1978]. Dessa forma, otimização estrutural se refere ao campo de estudo dedicado a encontrar a distribuição de material que melhor sustenta determinadas solicitações.

Um problema de otimização é expresso matematicamente a partir de certos elementos básicos [Christensen e Klarbing, 2008]:

- *Função objetivo* [f]: Função usada para ordenar diferentes projetos. Para cada projeto diferente possível, f retorna o quão “ótimo” ele é. Em otimização estrutural, f é tradicionalmente peso, deslocamento, tensão efetiva ou outro parâmetro mecânico.
- *Variável de projeto* [x]: Elemento que descreve o projeto, e que é mudado ao longo da otimização, representando, por exemplo, a geometria de uma peça em otimização estrutural, ou os parâmetros de funcionamento de uma planta química, num processo de otimização de custos.
- *Variável de estado* [y]: Para uma dada variável de projeto x , y representa a resposta do sistema sendo modelado. Para otimização estrutural, a resposta pode ser deslocamento, força, tensão, deformação ou outro parâmetro mecânico.

Dessa forma, um problema genérico de otimização pode ser representado de acordo com a Equação 1.1.

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x, y) \\ \text{sujeito a} & g_i(x, y) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x, y) = 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.1)$$

onde g_i, h_j são funções quaisquer. Restringindo a classe de problemas de otimização àqueles cujas variáveis de projeto, restrições e equações de estado dizem respeito à descrição de estruturas, os problemas tratados passam a ser de otimização estrutural. Por exemplo, tomando um problema de otimização estrutural cuja objetivo é minimizar a tensão máxima σ_{\max} em uma estrutura treliçada, a variável de estado é o vetor deslocamento \mathbf{q} e a variável de projeto é o vetor de posição dos graus de liberdade \mathbf{x} . Se $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ é a matriz de rigidez e \mathbf{F} o vetor de forças, o problema pode ser enunciado como:

$$\begin{cases} \text{minimize} & \sigma_{\max}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \\ \text{sujeito a} & \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{q} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.2)$$

Tradicionalmente, problemas de otimização estrutural são separados em três categorias:

- *Otimização paramétrica ou dimensional*: Quando a variável de projeto x é um tipo de parâmetro geométrico que se comporta como uma dimensão estrutural, por exemplo, a área da seção transversal de treliças, ou a espessura de uma placa. A forma dos elementos estruturais individuais não muda, entretanto. Um exemplo de problema de otimização paramétrica é mostrado na Figura 1.1.
- *Otimização de forma*: Aqui a variável de projeto x representa o contorno da estrutura, ou então uma parte da fronteira do domínio estrutural. Na teoria clássica dos meios contínuos, uma estrutura é representada como um sub-domínio em um meio contínuo onde certas equações diferenciais parciais são respeitadas. A otimização consiste então em achar qual o sub-domínio ótimo sem, entretanto, mudar sua conectividade. A Figura 1.2 mostra um problema de otimização de forma.
- *Otimização topológica*: Esse é o tipo mais abrangente de otimização estrutural. Em termos gerais, ainda pode ser dividida entre o caso discreto e contínuo. Para o caso discreto, digamos, uma estrutura treliçada, a variável de projeto x

representa as áreas de seção transversal individuais, e quando uma área de seção transversal atinge o valor 0 durante a otimização a barra é removida da estrutura. Como a conectividade entre as treliças pode mudar, também pode variar a topologia da estrutura. Para o caso contínuo, digamos, uma lâmina bi-dimensional, a variável de projeto x pode ser a profundidade da lâmina, tal que a topologia muda ao permitir que certos pontos da estrutura tenham profundidade 0. Idealmente, se o objetivo é estudar a topologia, e não atribuir uma profundidade variável a lâmina, é possível utilizar métodos que forcem a profundidade a assumir valores binários, um valor de referência e zero. A Figura 1.3 mostra um exemplo de otimização topológica.

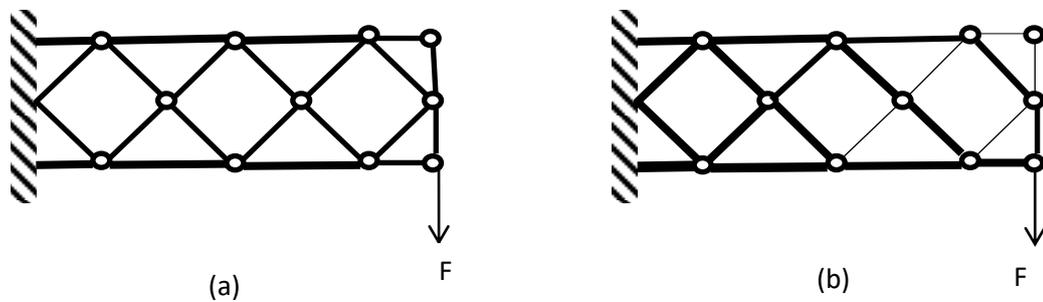


Figura 1.1 - Problema de otimização paramétrica: (a) Treliça engastada sob carga pontual na extremidade; (b) Estrutura com dimensões das seções transversais otimizadas.

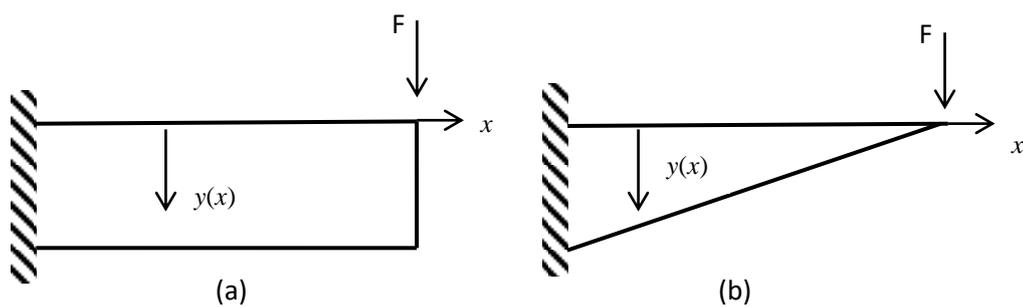


Figura 1.2 - Problema de otimização de forma: (a) Treliça engastada sob carga pontual na extremidade; (b) Estrutura com altura da seção transversal da viga otimizada.

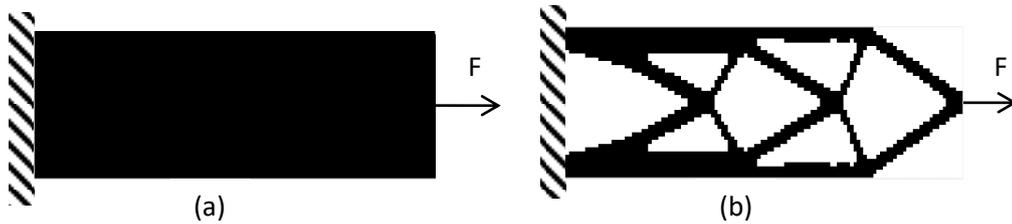


Figura 1.3 - Problema de otimização topológica para minimização da rigidez: (a) Viga engastada sob carga axial; (b) Viga otimizada com restrição de 40% do volume original.

Os parâmetros até agora considerados são estruturais, mecânicos, e não levam em conta itens como funcionalidade, estética e economia, embora obviamente os afetem. No contexto mais amplo de projeto de uma estrutura, a otimização estrutural pode ser integrada ao ciclo de projeto, conforme sugere Kirsch, 1993:

- a) *Formulação dos requerimentos funcionais*: Comumente já estabelecidos antes do começo do projeto, como o número de vias numa estrada a ser construída, ou as condições de trabalho a que estará submetida a peça sendo projetada.
- b) *Fase conceitual*: Etapa dedicada a decidir que tipo de estrutura será usada. Se for uma ponte, será treliçada, de suspensão, ou do tipo arco? Se for um componente de máquina, qual sua topologia? Quanto espaço deve ocupar idealmente?
- c) *Otimização*: Dado o conceito, restrições, e os parâmetros de desempenho, qual a melhor estrutura que pode ser feita? Minimizar custo é quase sempre um objetivo bem-vindo.
- d) *Detalhamento*: Após completar a otimização, os resultados são verificados e modificados conforme necessário.

1.1.1 Otimização Topológica

Michell, 1904, produziu o primeiro trabalho de otimização topológica estrutural, cuja proposta era encontrar a estrutura treliçada com o menor volume possível dado um único carregamento e restrições de tensão. Ainda que isso signifique que a disciplina seja centenária, e tenha evoluído ao longo do século XX, a explosão em pesquisa e

desenvolvimento na área ocorreu após o trabalho pioneiro de Bendsøe e Kikuchi, 1988. A proposta acopla uma formulação do problema de otimização topológica que resolve algumas dificuldades fundamentais associadas à necessidade de regularização, um esquema numérico iterativo de otimização, e modelagem em elementos finitos para análise estrutural. A evolução dessa abordagem levou a diferentes caminhos, sendo que entre as principais alternativas contemporâneas pode-se citar métodos por densidade, *Level-set*, derivada topológica, evolucionários, entre outros [Sigmund e Maute, 2013].

Esse trabalho aplica o método de otimização estrutural evolucionário bi-direcional (BESO – *Bi directional Evolutionary Structural Optimization*), que cai na categoria de métodos evolucionários. Sua principal distinção com relação aos métodos de densidade e *Level-set*, os mais populares juntamente ao BESO [Deaton e Grandhi, 2014], é usar variáveis de projeto discretas, ao contrário das variáveis contínuas aplicadas pelos outros métodos citados.

1.2 Análise multiescala

Certos materiais, tanto naturais quanto artificiais, podem exibir estrutura associada a mais de uma dimensão característica. Um exemplo estrutural do que diversas dimensões características representam é encontrada na torre Eiffel, construção que apresenta elementos estruturais em mais de uma escala, conforme Figura 1.4.

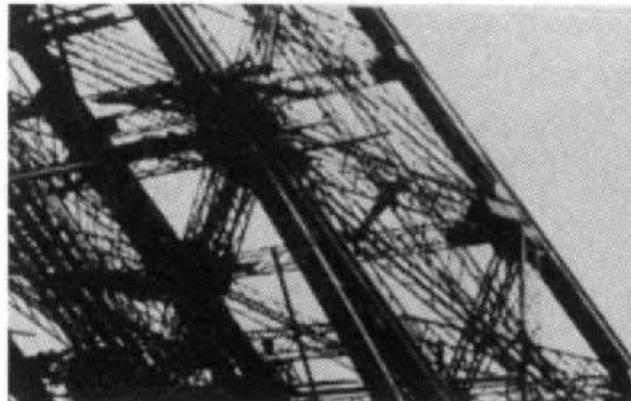
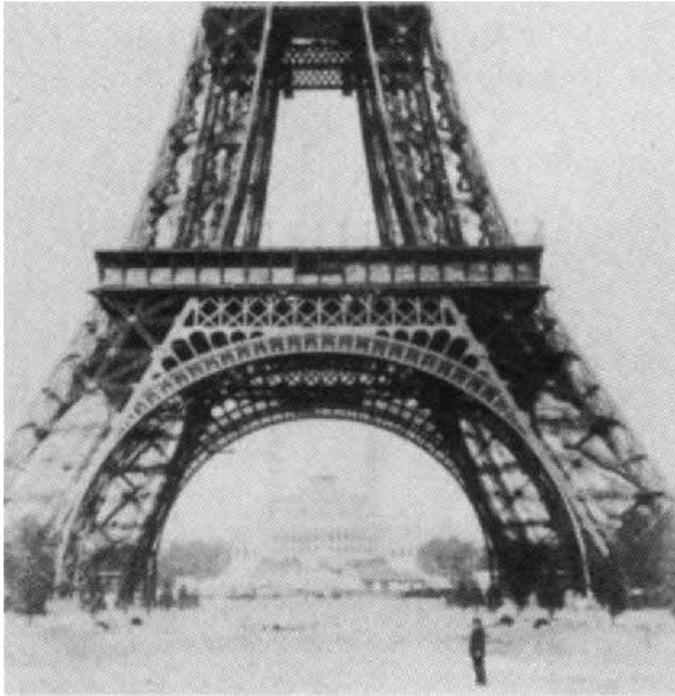


Figura 1.4 - Estrutura hierárquica na torre Eiffel. As pernas das torres são formadas a partir de intricada rede de treliças [Loyrette, 1985].

Materiais onde esse fenômeno é observado são denominados materiais hierárquicos, e a hierarquia entre as diferentes escalas estruturais é um fator preponderante na determinação de suas propriedades. Compósitos fibrosos são exemplo de materiais onde há essa dependência das propriedades do material com relação a uma escala consideravelmente menor que aquela do sólido considerado. Essa escala menor é denominada microescala, e sua análise pode ter fins tanto descritivos de materiais hierárquicos naturais, quanto de síntese de materiais sintéticos especializados [Lakes, 1993]. Quando a microestrutura de um material é composta de um único material e espaços vazios, o material é dito celular; Caso haja combinação de

dois ou mais materiais, o material é um compósito. A Figura 1.5 apresenta uma representação dessa classificação.

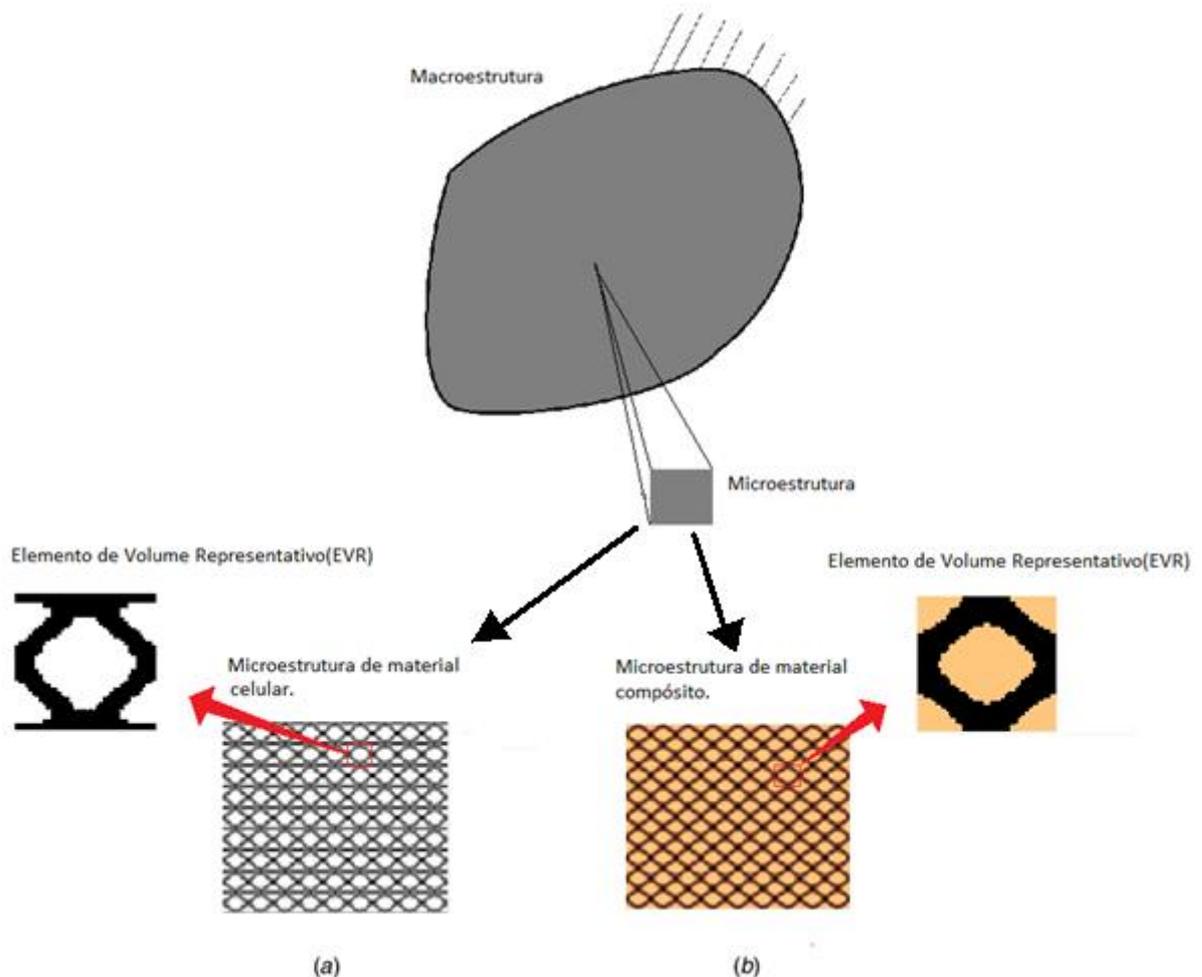


Figura 1.5 - Microestruturas possíveis: (a) Espaços ocupados por material e vazios; (b) Combinação de dois materiais sem vazios.

A conexão entre microescala e comportamento macroestrutural pode ser feita de diferentes formas. No contexto da elasticidade linear, as duas principais abordagens são aproximações assintóticas, método utilizado nesse trabalho, e através de considerações energéticas e dos teoremas da tensão e deformação média [Xia et al., 2016]. O método das expansões assintóticas deriva de uma rigorosa teoria matemática sobre o tratamento de equações diferenciais parciais com coeficientes cujos valores variam periodicamente, e possui aplicações diversas como elasticidade, difusão e permeabilidade a fluidos [Mei e Vernescu, 2010].

Materiais com microestrutura apareceram naturalmente no contexto de otimização topológica como uma das alternativas possíveis para tornar o problema bem-posto [Eschenauer e Olhoff, 2001], isto é, com solução única, existente e dependente de forma contínua dos dados e parâmetros do problema. Ainda que a inclusão de microestruturas tenha surgido como uma forma de regularizar o problema originalmente mal-posto de otimização topológica de estruturas em uma única escala [Kohn e Strang, 1986], foi natural estender a formulação para o projeto de microestruturas. Uma aplicação imediata é desenvolver materiais artificiais com propriedades extremas. Sigmund, 1994b, formulou um esquema batizado de homogenização inversa: Em vez de calcular as propriedades materiais a partir de uma certa topologia microestrutural como mais uma etapa do processo de otimização topológica, formula-se o problema tal que o objetivo passa a ser encontrar a microestrutura que extremiza certas propriedades materiais. Como exemplo, uma microestrutura com coeficiente de Poisson negativo é mostrado na Figura 1.6.

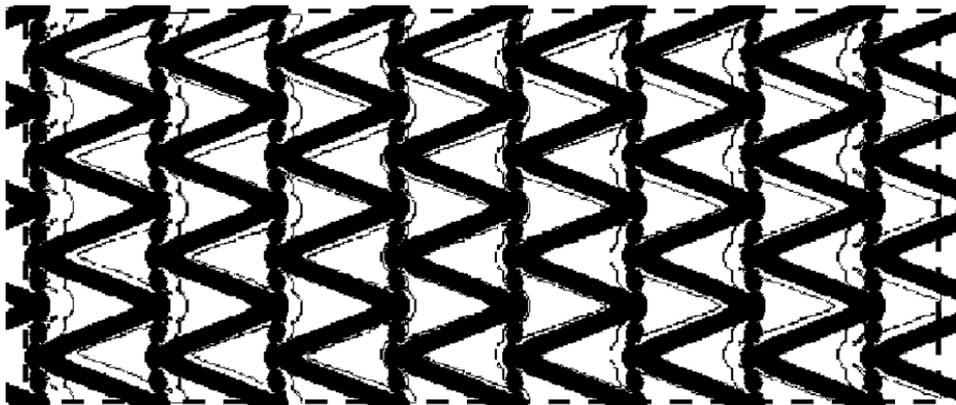


Figura 1.6 - Microestrutura de material elástico com coeficiente de Poisson de 0.9 [Sigmund, 2000a].

1.3 Motivação

Otimização Topológica é um procedimento com muitas perspectivas de aplicação em engenharia, em especial em áreas que demandam componentes de alto desempenho como a indústria automotiva, aeronáutica e aeroespacial. Dentre diversos objetivos possíveis, a otimização do desempenho dinâmico da estrutura é especialmente significativa, dado os efeitos possivelmente desastrosos associados a estruturas sujeitas a excitações próximas de suas frequências ressonantes. Exemplos de aplicação de otimização topológica para otimização com relação às frequências naturais em produtos da área automotiva podem ser

encontrados em Boonpan e Bureerat, 2012 , Kim e Jeswiet, 2015. Zhu et al., 2015, realizam uma revisão de aplicações da otimização topológica na indústria aeronáutica, além de elencar aplicações potenciais na área.

O campo de pesquisa em otimização topológica tem sido extremamente ativo desde as contribuições pioneiras de Bendsøe e Kikuchi, 1988, e Bendsøe, 1989, tanto no projeto de estruturas quanto de materiais artificiais através da manipulação da topologia microestrutural. Ainda sim, estudos que considerem a otimização simultânea tanto da estrutura quanto do material de que é composta não são tão abundantes [Zuo et al., 2013].

Com base nessas considerações, almeja-se aplicar técnicas de otimização topológica multiescala a parâmetros dinâmicos como maximização da frequência fundamental, ou minimização da resposta de um certo sistema no domínio da frequência. Através dessa abordagem, é possível obter simultaneamente tanto a topologia ideal da estrutura quanto a microestrutura do material, e conseqüentemente, as propriedades mecânicas mais adequadas a uma certa escolha de material compósito ou celular.

1.4 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é a implementação computacional de um programa que realize otimização topológica multiescala através do método evolucionário bidirecional (BESO) aplicada a problemas dinâmicos, especificamente, à maximização da frequência fundamental e a minimização da resposta estrutural no domínio da frequência.

Como objetivos específicos têm-se:

- Apresentar o procedimento de homogeneização requerido na otimização topológica multiescala;
- Apresentar o método BESO aplicado aos problemas dinâmicos multiescala de maximização da frequência fundamental e de minimização da resposta em frequência;
- Implementar e verificar o algoritmo de otimização topológica BESO aplicado a modelos multiescala com objetivo de maximização da frequência fundamental;
- Implementar e verificar o algoritmo de otimização topológica BESO aplicado a modelos multiescala com objetivo de minimização da resposta no domínio da frequência;
- Realizar experimentos numéricos de maximização da frequência fundamental para projeto microestrutural, macroestrutural e simultâneo considerando materiais compósitos e celulares;

- Realizar experimentos numéricos de minimização da resposta no domínio da frequência para projeto microestrutural, macroestrutural e simultâneo considerando materiais celulares;
- Expandir a formulação da otimização para resposta no domínio da frequência considerando materiais compósitos;

1.5 Organização do trabalho

O presente trabalho encontra-se dividido em seis capítulos.

No *Capítulo 1* são abordadas generalidades sobre otimização estrutural topológica, análise multiescala e são apresentados a motivação e os objetivos do trabalho.

O *Capítulo 2* disponibiliza a revisão bibliográfica, mostrando o histórico de desenvolvimento das metodologias envolvidas na produção deste trabalho.

O *Capítulo 3* apresenta a teoria sobre o homogenização, mais especificamente o método de homogenização por expansão assintótica das equações diferenciais parciais que regem o problema.

O *Capítulo 4* apresenta a fundamentação teórica referente ao método de otimização topológica BESO, e sua formulação aplicada a problemas de otimização multiescala com objetivo de maximizar a frequência fundamental ou minimizar a resposta de um sistema no domínio da frequência.

O *Capítulo 5* mostra os resultados obtidos para diferentes tipos de projeto de otimização topológica considerados no *Capítulo 4*, aplicados para materiais celulares e compósitos tanto no caso de maximização da frequência natural quanto no caso de minimização da resposta em frequência.

No *Capítulo 6* são apresentadas as conclusões do trabalho, além de sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, um breve histórico da otimização topológica de estruturas contínuas baseada no método de elementos finitos é apresentado. É destacada a inclusão de microescala na formulação de problemas de otimização topológica, e como essa ocorrência foi um precursor natural à formulação de problemas de análise multiescala. Em particular, ênfase é dada ao método evolucionário ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), sua evolução BESO, e a aplicações de otimização topológica em problemas dinâmicos.

2.1 Otimização topológica de estruturas contínuas com microestrutura

Rossow e Taylor, 1973, desenvolveram uma metodologia de otimização paramétrica que antecipa em certos aspectos as formulações contemporâneas para problemas de otimização topológica. O trabalho considera uma lâmina retangular com um furo central, sujeita a cargas de tração nas suas extremidades. Após dividir o domínio com uma malha de elementos finitos, o problema passa a ser encontrar a altura correspondente a cada elemento tal que a rigidez da estrutura seja máxima, sob restrição de volume total. A Figura 2.1 mostra um quarto do domínio original e sua solução, considerando simetrias.

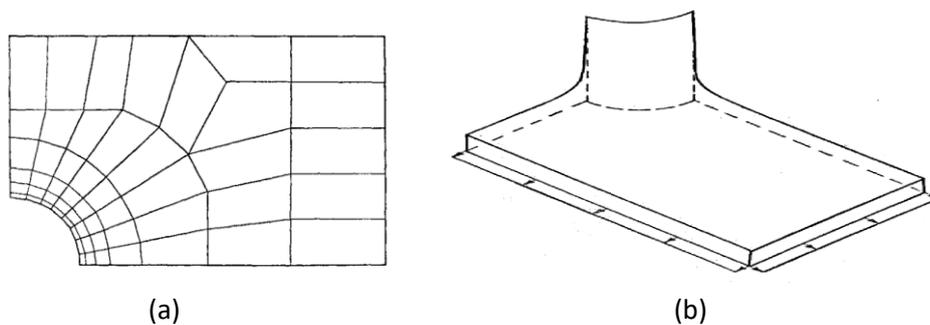


Figura 2.1 - (a) Malha de elementos finitos onde é atribuída uma altura a cada elemento;
(b) Estrutura que maximiza a rigidez [Rossow e Taylor, 1973].

Cheng e Olhoff, 1981, investigaram o mesmo problema de otimização de placas sólidas elásticas de altura variável, concluindo que, para um problema de maximização da rigidez sujeito a restrição de volume, em geral não existe um ótimo global na classe das funções suaves, tampouco na classe das funções suaves com um número finito de descontinuidades. Para contornar esse problema, uma solução sugerida é fechar o espaço das

variáveis de projeto através da consideração de ‘geometrias generalizadas’. Kohn e Strang, 1986, fizeram uma revisão sobre a necessidade de regularização do problema originalmente mal posto de otimização topológica, relacionando otimização, relaxação de problemas variacionais e teoria da homogenização.

Em um trabalho seminal, Bendsøe e Kikuchi, 1988, introduziram um procedimento que realiza otimização paramétrica similar à conduzida por Rossow e Taylor, 1973. As variáveis de projeto passam a ser parâmetros da microestrutura associada a cada elemento finito da malha, e que indicam a densidade e orientação preferencial do material nesse subdomínio. Caso a densidade resultante da microestrutura seja zero, a região ocupada pelo elemento equivale a um espaço sem material, o que possibilita a criação de “furos” e consequente modificação da topologia da estrutura 2D. Diaz e Bendsøe, 1992, aplicaram a mesma proposta à minimização da flexibilidade de estruturas elásticas considerando múltiplos carregamentos pontuais. Diaz e Kikuchi, 1992, estenderam a metodologia para outras funções objetivos além de rigidez, propondo maximizar alguma frequência natural de uma estrutura 2D considerando comportamento linear elástico. Ma et al. 1995, expandem a solução de problemas de vibração através do método da homogenização considerando múltiplos autovalores. A função objetivo passa a ser também, além da maximização de frequências, a maximização da distância entre dois autovalores quaisquer, o afastamento de autovalores de frequências especificadas, além da otimização da resposta no domínio da frequência da estrutura.

Sigmund, 1994b, modificou a formulação do problema de otimização topológica de estruturas cujas propriedades materiais são calculadas através do processo de homogenização para um problema de otimização topológica da própria microestrutura de forma a obter um material com propriedades constitutivas prescritas, num processo batizado de homogenização inversa. Essa metodologia ainda foi aplicada para obter materiais com propriedades constitutivas extremas, tais como coeficientes de expansão térmica [Sigmund e Torquato, 1996], coeficientes de Poisson negativo [Larsen et al., 1997], ou uma nova classe de compósitos com módulo de elasticidade volumétrico (*bulk modulus*) coincidentes com os limites de Hashin-Shtrikman [Sigmund, 2000b].

2.2 Método de variável contínua SIMP, método evolucionário BESO

Em sequência ao trabalho de Bendsøe e Kikuchi, 1988, que utiliza uma microestrutura perfurada, Bendsøe, 1989, publicou um trabalho comparando essa abordagem a uma que

utiliza uma microestrutura formada a partir de compósitos laminados, além de um esquema de material isotrópico artificial que penaliza densidades intermediárias e dispensa o uso de microestruturas. Zhou e Rozvany, 1991, mostraram que o método do material artificial é capaz de produzir topologias próximas a soluções exatas, além de produzir estruturas manufaturáveis no geral. O método do material artificial isotrópico penalizado se consolidou nos anos seguintes, passando a ser reconhecido pelo acrônimo em inglês, SIMP (*Solid Isotropic Material With Penalization*). Os problemas associados a essa abordagem, tais como tabuleiro de xadrez (Figura 2.2), dependência de malha e mínimos locais foram discutidos por Sigmund e Petersson, 1998. Neste trabalho os autores comentaram sobre a origem das instabilidades, além de indicar as alternativas existentes então para contorná-las. O fenômeno do tabuleiro de xadrez indica rigidez artificialmente alta e é causado por modelamento pobre da rigidez na região do tabuleiro.



Figura 2.2 - Padrão do tipo tabuleiro de xadrez nas áreas destacadas.

Pedersen, 2000, aplicou a metodologia para a maximização de autovalores no contexto do projeto de micromecanismos, dando ênfase ao controle de modos localizados que surgem em áreas de baixa densidade. Sigmund e Jensen, 2003, projetaram microestruturas de materiais fonônicos com intervalos de banda de forma a maximizar o tamanho relativo dos intervalos entre frequências, assim como minimizar ou maximizar a resposta de estruturas sujeitas a cargas periódicas. Jensen e Pedersen, 2006, aplicaram a metodologia ao projeto de estruturas compostas de dois materiais distintos, com objetivo de maximizar a diferença entre duas frequências naturais adjacentes ou a razão entre os quadrados de duas frequências naturais adjacentes. Du e Olhoff, 2007, apresentaram uma metodologia de otimização topológica SIMP para problemas de vibração capaz de lidar com a ocorrência de múltiplas frequências. Os casos tratados foram a maximização de determinadas frequências naturais da estrutura, ou então a maximização da distância entre duas frequências naturais adjacentes.

Concomitantemente ao aparecimento e popularização da metodologia SIMP, Xie e Steven, 1993, sugeriram um método de otimização topológica baseado em uma estratégia

evolucionária: Material com baixa tensão é removido gradativamente até que a estrutura resultante ocupe uma certa fração volumétrica do domínio originalmente ocupado, esquema de maximização da rigidez baseada no projeto de estruturas totalmente tensionadas. Xie e Steven, 1994, propuseram também um esquema evolucionário com objetivo de maximizar ou minimizar frequências naturais da estrutura, removendo elementos de acordo a sua influência sobre o valor da função objetivo, e Xie e Steven, 1996, ampliaram a estratégia de otimização para problemas dinâmicos sujeitos a restrição de volume descrevendo como implementar também a maximização do intervalo entre frequências naturais, e ainda como manter uma determinada frequência natural constante a medida que material é removido da estrutura. O método evolucionário, batizado de ESO, apresentava como desvantagem o fato de que material removido não poderia ser adicionado novamente à estrutura, potencialmente impedindo que se atinja um ótimo. Querin et al., 1998, sugeriu uma metodologia de otimização estrutural evolucionária bi-direcional que utiliza tanto remoção quanto adição de material, permitindo que a estrutura possa recuperar material que tenha sido retirado em um estágio anterior do processo de otimização.

O método não foi recebido sem criticismo, com Zhou e Rozvany, 2001, apontando um caso onde o processo de otimização ESO produz uma solução claramente não ótima. Rozvany e Querin, 2002, sugeriram uma combinação do ESO com o critério de otimalidade [Zhou e Rozvany, 1991] para produzir um híbrido da abordagem tradicional de otimização com uma metodologia que modifique a estrutura através da retirada e adição de elementos. Tanskanen, 2002, analisou as bases teóricas do método ESO conforme descrito por Xie e Steven, 1993, concluindo que o método proposto é equivalente a um algoritmo de minimização do produto da flexibilidade pelo volume através de programação linear sequencial resolvida pelo método Simplex.

Finalmente, Huang e Xie, 2007, apresentaram uma versão modificada do BESO corrigindo os problemas apontados anteriormente: Um esquema de filtragem das sensibilidades semelhante ao sugerido por Sigmund, 1994a, é aplicado às sensibilidades, além do histórico desses valores ser usado de forma a suavizar a variação do valor da função objetivo ao longo das iterações. Huang e Xie, 2009, introduziram então um esquema de interpolação material de forma a possibilitar um processo de atualização “*soft-kill*” da estrutura, permitindo que a malha do modelo de elementos finitos não precisasse ser reconstruída cada vez que material é retirado ou adicionado. Alternativamente, a variável de projeto associada ao elemento retirado passaria a corresponder a um certo valor pequeno

(digamos, 1×10^{-5}), resultando em uma flexibilidade local tão baixa que se comporta como um vazio. Huang et al., 2010a, aplicaram o método BESO reformulado a problemas de maximização de frequências naturais de estruturas, sugerindo um esquema de interpolação alternativo para lidar com o problema de modos localizados associado a regiões de baixa densidade.

2.3 Abordagens multiescala

Materiais com microestrutura associada surgiram por necessidade em otimização topológica, e gradativamente perderam espaço frente a alternativas como métodos por densidade, métodos evolucionários, e mais recentemente o método *Level-set*, conforme Sethian, 1999, Wang et al., 2003, e métodos que aplicam derivada topológica conforme Sokolowski e Zochowski, 1999, Cea et al., 2000, Novotny, 2003. Visto que a inclusão do processo de homogenização em otimização topológica permitiu a formulação do projeto de microestruturas [Sigmund, 1994a], não demorou muito para que aparecessem formulações de projeto multiescala, ou seja, que consideram como domínio de projeto tanto uma estrutura sujeita a certas condições de contorno quanto a microestrutura do material sendo utilizado.

Bendsøe et al., 1995, propuseram um esquema acoplado que procura tanto a distribuição ótima de material na escala da estrutura quanto na célula que descreve a microestrutura, considerando a maximização da rigidez de uma estrutura sujeita a restrições de volume em ambas escalas. Theocaris e Stavroulaki, 1999, utilizam a formulação multiescala para projetar a microestrutura de materiais compósitos de uma estrutura sujeita a certas condições de contorno. Rodrigues et al., 2002 aplicaram essa metodologia de projeto simultâneo hierárquico para problemas de otimização topológica que envolvem elasticidade plana. Posteriormente o mesmo procedimento foi usado para problemas em elasticidade 3D [Coelho et al., 2008].

No projeto multiescala simultâneo hierárquico apresentado anteriormente, a cada ponto material da estrutura é possível atribuir uma microestrutura distinta, o que é computacionalmente muito custoso. Liu et al., 2008, introduziram o projeto multiescala simultâneo concorrente, em que o material da microestrutura é considerado uniforme homogêneo, tal que o projeto da microestrutura é resolvido somente uma vez para toda a estrutura de forma a definir as propriedades materiais. A função objetivo escolhida foi de minimização da flexibilidade média, e as restrições são volumétricas em ambas as escalas.

Niu et al., 2009, usaram a mesma metodologia para o problema dinâmico de maximização da frequência fundamental do sistema. Em ambos os casos citados anteriormente, o método de densidade SIMP foi aplicado.

A primeira aplicação do método BESO para otimização topológica de microestruturas foi feita por Huang et al., 2011, visando maximizar o módulo de cisalhamento ou o *bulk modulus* do material sendo projetado, restrita a fração volumétrica de material utilizado na microestrutura. Radman et al., 2013, utiliza a mesma metodologia para obter também configurações 2D e 3D que produzam materiais com coeficiente de Poisson negativo. Huang et al., 2013, propôs uma metodologia de otimização topológica multiescala simultânea em que o projeto da microestrutura leva em conta a estrutura em que o material será usado, de forma semelhante a Theocaris e Stavroulaki, 1999.

Zuo et al., 2013, implementaram otimização multiescala concorrente para maximização da frequência fundamental de uma estrutura com um ou dois materiais, além de uma microestrutura celular ou compósita. Vicente et al., 2015, por sua vez, sugeriram um esquema de otimização multiescala com objetivo de minimizar a resposta no domínio da frequência de estruturas, considerando microestruturas celulares e restrições volumétricas em ambas escalas. Xu e Xie, 2015, propuseram uma abordagem multiescala concorrente para otimização de estruturas de materiais compósitos com microestrutura celular sob excitações randômicas, sendo ampliada para minimização da flexibilidade dinâmica de estruturas compósitas com microestrutura também compósita por Xu et al., 2015. Xu et al. 2016, também aplicaram a metodologia multiescala para problemas de cargas que variam no tempo, considerando cargas estáticas equivalentes. Yan et al., 2014, e Liu et al., 2016, utilizaram otimização multiescala concorrente para funções objetivo de minimização da flexibilidade e maximização da frequência fundamental, respectivamente. A diferença entre seus trabalhos e outras abordagens foi, em vez de restringir as frações volumétricas de cada escala separadamente, limitar o peso da estrutura, abordagem mais racional caso o objetivo seja controlar a quantidade total de material usado.

3 HOMOGENEIZAÇÃO

De forma a estabelecer um processo de análise multiescala concorrente, é necessário conectar a informação da microescala às propriedades materiais na macroescala. Neste trabalho, a metodologia escolhida é o processo de homogeneização matemática baseado em convergência-H, cujos conceitos foram introduzidos por Spagnolo, 1968 e generalizados por Tartar e Murat, 1978. No presente capítulo, as equações homogeneizadas pertinentes a problemas de elasticidade linear plana são desenvolvidos. A formulação apresentada segue os fundamentos das abordagens de Guedes e Kikuchi, 1990, Persson et al., 1993 e Hassani e Hinton, 1998, sendo o tratamento rigoroso preterido por uma abordagem operacional onde a existência das expansões e sua convergência é assumida verdadeira.

3.1 Introdução de multiescala no problema de elasticidade linear

De forma a estabelecer um processo de análise multi-escala concorrente, é necessário conectar a informação da microescala às propriedades materiais na macroescala.

Considere um corpo com comportamento elástico linear ocupando uma região Ω em \mathbb{R}^3 com contorno suave $\partial\Omega$, e estabeleça um sistema de coordenadas cartesiano $x_i, i=1,2,3$. O corpo está sujeito a um campo de forças de volume \mathbf{f} e a um campo de forças de superfície conhecido \mathbf{t} , a exceção de uma parte da superfície onde o corpo está engastado. Seja σ_{ij} o tensor tensão, \mathbf{u} o vetor de deslocamentos e \mathbf{n} o vetor unitário na direção normal da superfície $\partial\Omega$, sentido para fora do corpo Ω , conforme a Figura 3.1.

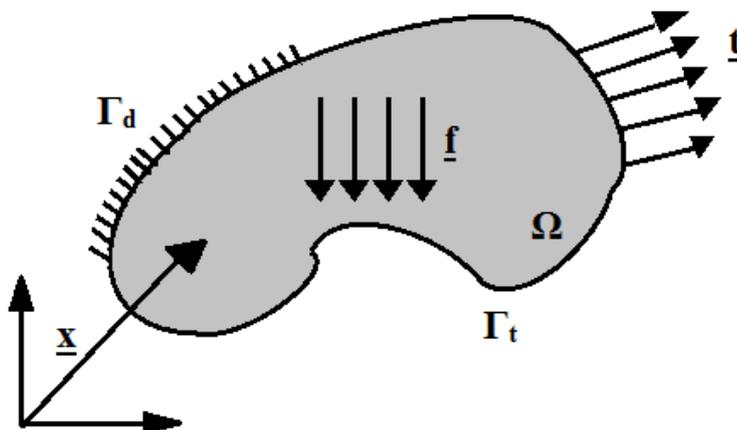


Figura 3.1 - Problema geral da elasticidade.

O equilíbrio de forças no corpo é dado por:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.1)$$

As condições de contorno cinemáticas são expressas por:

$$u_i = 0 \quad \text{em } \Gamma_d \quad (3.2)$$

onde $\Gamma_d \subset \partial\Omega$. As condições de contorno dinâmicas ficam:

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \quad \text{em } \Gamma_t \quad (3.3)$$

novamente a superfície $\Gamma_t \subset \partial\Omega$, tal que $\Gamma_t \cap \Gamma_d = \{\}$, $\Gamma_t \cup \Gamma_d = \partial\Omega$. O comportamento do material elástico linear, por sua vez, é dado pela equação constitutiva:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) \quad (3.4)$$

onde e_{kl} denota o tensor de deformação e D_{ijkl} é o tensor constitutivo positivo definido com as chamadas simetrias menores $D_{ijkl} = D_{jikl}$ e $D_{ijkl} = D_{ijlk}$, e simetria maior $D_{ijkl} = D_{klij}$. As deformações estão relacionadas com os deslocamentos através da relação:

$$e_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (3.5)$$

Combinando as Equações 3.4 e 3.5 em 3.1, e utilizando a simetria menor do tensor constitutivo, é possível escrever o problema de valor de contorno como:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) = f_i \\ u_i = 0 \text{ em } \Gamma_d \text{ e } D_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} n_j = t_i \text{ em } \Gamma_t \end{cases} \quad (3.6)$$

Assuma que o corpo Ω é composto por dois materiais ocupando as regiões Ω_1 e Ω_2 , respectivamente, e que os deslocamentos e tensões variam de forma contínua através da fronteira entre os diferentes materiais, vide Figura 3.2.

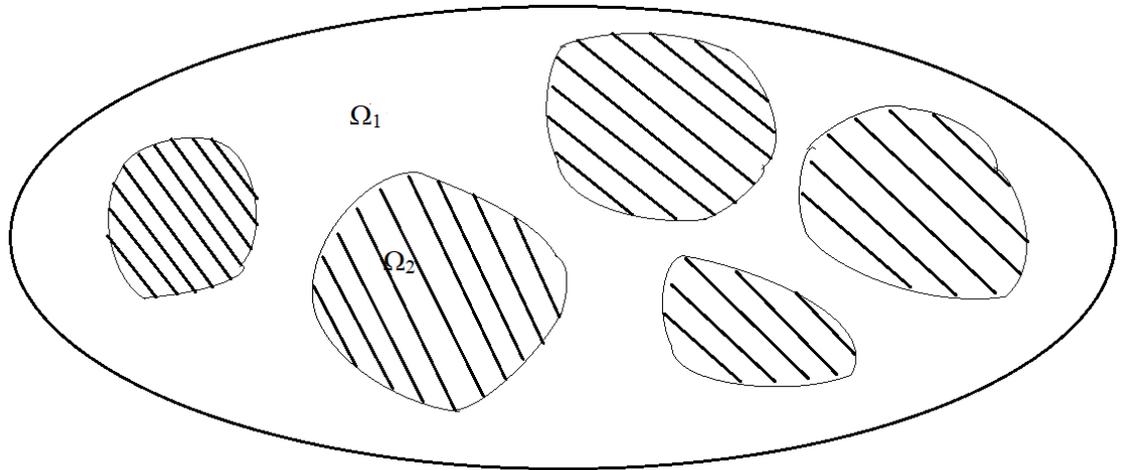


Figura 3.2 - Região ocupada por dois materiais.

Se o material que ocupa a região Ω_2 está distribuído em Ω_1 tal que $D_{ijkl}(\mathbf{x})$ oscila rapidamente através do domínio, é possível subdividir o domínio em células Y pequenas o suficiente conforme a Figura 3.3.

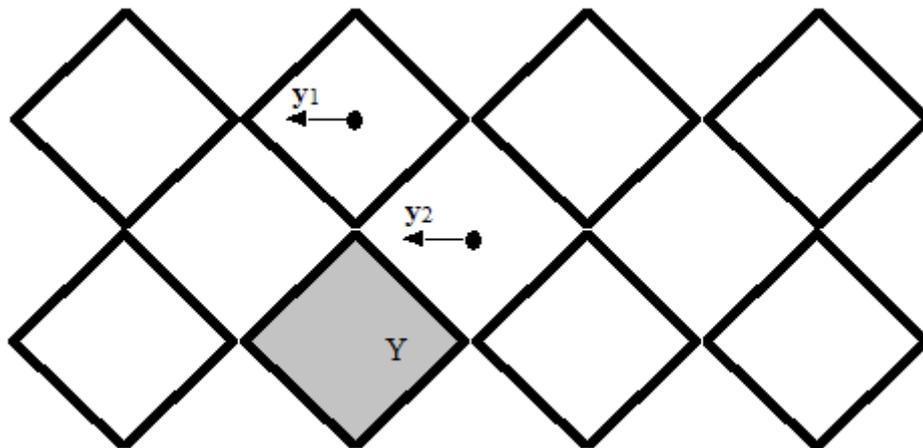


Figura 3.3 - Domínio em \mathbb{R}^2 subdividido em células idênticas.

Introduzindo um sistema local de coordenadas y_i para cada célula Y , se assume que o tensor constitutivo $D_{ijkl}(\mathbf{y})$ é periódico tal que $D_{ijkl}(\mathbf{y}_1) = D_{ijkl}(\mathbf{y}_2)$ se os pontos \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 correspondem à mesma posição em cada célula. Essa propriedade naturalmente implica que a integral sobre o contorno desse domínio zera.

$$\int_Y \frac{\partial g_i}{\partial y_i} dY = \int_{\partial Y} g_i n_i dS = 0 \quad (3.7)$$

para um campo g_i Y-periódico. Como $D_{ijkl}(\mathbf{x})$ é uma função Y-periódica em Ω com período dependente do tamanho da célula unitária Y, definindo ϵ como a razão entre a dimensão do domínio Y e do domínio Ω (ver Figura 3.4), é possível denotar a dependência do tensor constitutivo do período Y como $D_{ijkl}^\epsilon(\mathbf{x})$.

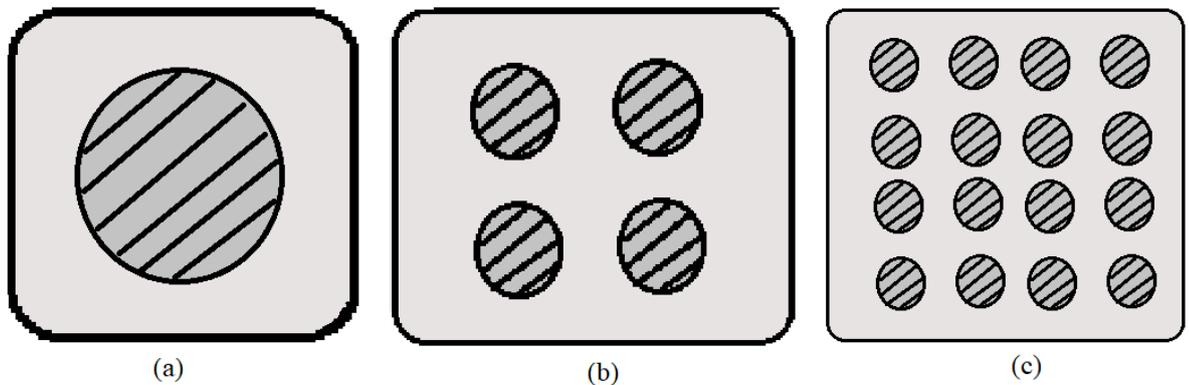


Figura 3.4 - Diferentes tamanhos característicos ϵ : (a) $\epsilon=1$; (a) $\epsilon=0.5$; (a) $\epsilon=0.25$;

A periodicidade implica então que $D_{ijkl}^\epsilon(\mathbf{x}) = D_{ijkl}\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) = D_{ijkl}(\mathbf{y})$, onde a variável local $\mathbf{y}=\mathbf{x}/\epsilon$ descreve a célula Y. Deixando $\epsilon>0$ variar, obtém-se a família de problemas de valor de contorno:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_{ijkl}^\epsilon \frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial x_i} \right) = f_i^\epsilon \\ u_i^\epsilon = 0 \text{ em } \Gamma_d \text{ e } D_{ijkl}^\epsilon \frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial x_i} n_j = t_i \text{ em } \Gamma_t \end{cases} \quad (3.8)$$

onde $u(\mathbf{x}) = u^\epsilon(\mathbf{x})$, dado que a solução também depende do parâmetro ϵ . O objetivo agora é fazer uma expansão em múltipla escala $u^\epsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 u_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots$, tal que $u^\epsilon(\mathbf{x}) \rightarrow u_0(\mathbf{x})$ a medida que $\epsilon \rightarrow 0$, sendo u_0 a solução do problema homogeneizado: obtém-se a expressão a seguir.

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \right) = f_i^H \\ u_i^0 = 0 \text{ em } \Gamma_d \text{ e } D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} n_j = t_i^H \text{ em } \Gamma_t \end{cases} \quad (3.9)$$

onde D_{ijkl}^H é o tensor constitutivo homogeneizado, f_i^H e t_i^H as forças de corpo e de superfície homogeneizadas, respectivamente.

3.2 Obtenção do problema de homogeneização

Conforme Guedes e Kikuchi, 1990, Hassani e Hinton, 1998, assumamos que existam expansões da forma:

$$u_i^\epsilon(\mathbf{x}) = u_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (3.10)$$

$$f_i^\epsilon(\mathbf{x}) = f_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon f_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 f_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (3.11)$$

Assim, o operador diferencial $\frac{\partial}{\partial x_k}$ que age sobre $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}/\epsilon}$ pode ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{dy_l}{dx_k} \Big|_{y_l=x_l/\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_l} = \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_k} \quad (3.12)$$

O operador diferencial do problema de valor de contorno original fica então:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_{ijkl}^\epsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_l} \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \left[D_{ijkl} \left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \right] = \epsilon^{-2} A_0 + \epsilon^{-1} A_1 + A_2 \quad (3.13)$$

os operadores diferenciais A_i , $i = 0, 1, 2$, foram definidos como:

$$A_0 = - \frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \quad (3.14)$$

$$A_1 = -\frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_l} \right) - D_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_l} \quad (3.15)$$

$$A_2 = -D_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \quad (3.16)$$

Substituindo as Equações 3.10, 3.11 e 3.13 na Equação 3.8 obtém-se:

$$\left(\epsilon^{-2} A_0 + \epsilon^{-1} A_1 + A_2 \right) \left(u_k^{(0)} + \epsilon u_k^{(1)} + \epsilon^2 u_k^{(2)} + \dots \right) = \left(f_i^{(0)} + \epsilon f_i^{(1)} + \epsilon^2 f_i^{(2)} + \dots \right) \quad (3.17)$$

Como essa expressão é válida para todo $\epsilon > 0$, os coeficientes que multiplicam as potências de ϵ devem ser nulos. A imposição dessa nulidade para os três primeiros coeficientes fornecerá as equações que regem os deslocamento em cada escala, além da expressão que conecta as propriedades constitutivas da macroescala à distribuição da microescala [Hassani e Hinton, 1998]. Dos coeficientes associados às três menores potências de ϵ , resultam então as Equações (3.18)-(3.20).

$$A_0 u_i^{(0)} = 0 \quad (3.18)$$

$$A_0 u_i^{(1)} + A_1 u_i^{(0)} = 0 \quad (3.19)$$

$$A_0 u_i^{(2)} + A_1 u_i^{(1)} + A_2 u_i^{(0)} = f_i^{(0)} \quad (3.20)$$

O desenvolvimento das equações é realizado conforme Peson et al., 1993, que utiliza também o seguinte resultado.

Sejam F_i , $i = 1, 2, 3$, funções quadrado integráveis sobre Y . Considere o problema de valor de contorno:

$$A_0 \Phi_i = F_i, \quad \Phi_i \text{ Y-periódica} \quad (3.21)$$

As seguintes proposições são válidas:

- (i) Uma solução Y-periódica Φ existe se e somente se $\langle F_i \rangle = 0$ para $i=1, 2, 3$

- (ii) Se uma solução Y -periódica Φ existe, então ela é única a exceção de uma constante aditiva \mathbf{c} .

onde $\langle F_i \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y F_i dY$ e $|Y| = \int_Y dY$.

Claramente $\mathbf{0}$ é uma solução da Equação 3.18, o que de (ii) implica que a solução geral de $u_i^{(0)}$ independe de \mathbf{y} . Como $u_i^{(0)} = u_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, então $u_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_i(\mathbf{x})$. Da Equação 3.19, tem-se $A_0 u_i^{(1)} + A_1 u_i^{(0)} = 0$. Substituindo $u_i^{(0)}$ por $u_i(\mathbf{x})$, obtém-se:

$$A_1 u_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(-\frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_l} \right) - D_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_l} \right) u_k(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijkl}(\mathbf{y}) \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}) \quad (3.22)$$

Assim a equação diferencial a ser resolvida fica:

$$A_0 u_i^{(1)} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijkl}(\mathbf{y}) \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}) \quad (3.23)$$

A_0 é um operador diferencial linear que age somente em \mathbf{y} , o que significa que é possível resolver um problema base para cada combinação k, l , e então simplesmente aplicar o princípio da superposição para resolver a Equação 3.23. Considere o problema:

$$A_0 \chi_i^{kl} = -\frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijkl}(\mathbf{y}) \right), \quad \chi^{kl} \text{ Y-periódica} \quad (3.24)$$

Como assumiu-se que D_{ijkl} é Y -periódica, integrando o lado direito e aplicando o teorema de Gauss chega-se a:

$$\langle F_i \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y -\frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijkl}(\mathbf{y}) \right) dY = -\frac{1}{Y} \int_{\partial Y} D_{ijkl}(\mathbf{y}) n_j dS = 0 \quad (3.25)$$

De (i) chega-se à conclusão de que existe solução para a Equação 3.24. De (ii) combinado à linearidade de A_0 obtém-se o campo de deslocamentos $u_i^{(1)}$.

$$u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\chi_i^{kl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + w_i(\mathbf{x}) \quad (3.26)$$

Resta a Equação 3.20 para resolver completamente o sistema. Uma solução para

$$A_0 u_i^{(2)} = f_i^{(0)} - A_1 u_i^{(1)} - A_2 u_i^{(0)}, \quad \mathbf{u}^{(2)} \text{ Y-periódica} \quad (3.27)$$

existe se, e somente se:

$$\langle f_i^{(0)} - A_1 u_i^{(1)} - A_2 u_i^{(0)} \rangle = 0 \quad (3.28)$$

Abrindo as expressões em termos dos $A_1, A_2, \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}$ conhecidos:

$$A_2 u_i^{(0)} = -D_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} A_1 u_i^{(1)} &= \left(-\frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_l} \right) - D_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_l} \right) \left(-\chi_i^{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + w_i(\mathbf{x}) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijkl} \chi_k^{rs} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_l \partial x_s} - \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial y_j} \frac{\partial w_k}{\partial x_l} + D_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{rs}}{\partial y_l} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_j \partial x_s} \end{aligned} \quad (3.30)$$

O que substituído na Equação 3.28 resulta em:

$$\frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} \left[f_i^{(0)} + \left(D_{ijkl} - D_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial y_s} \right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial y_j} \frac{\partial w_k}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijkl} \chi_k^{rs} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_l \partial x_s} \right] d\mathbf{Y} = 0 \quad (3.31)$$

Como tanto D_{ijkl} quanto χ_i^{kl} são funções Y-periódicas, e \mathbf{w} e \mathbf{u} dependem somente de \mathbf{x} , pela mesma justificativa aplicada na Equação 3.25 os dois últimos termos da integral são nulos, o que resulta na equação diferencial homogenizada.

$$-\frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} \left(D_{ijkl} - D_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial x_s} \right) d\mathbf{Y} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial y_l} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} f_i^{(0)} d\mathbf{Y} \quad (3.32)$$

Ou mais compactamente:

$$-\left\langle D_{ijkl} - D_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial y_s} \right\rangle \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = \langle f_i^{(0)} \rangle \quad (3.33)$$

que é um problema somente em termos da variável macroscópica \mathbf{x} , ou seja, esse é o problema da elasticidade homogenizado. Em particular:

$$-D_{ijkl}^H \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = f_i^H \quad (3.34)$$

onde:

$$f_i^H = \langle f_i^{(0)} \rangle \quad (3.35)$$

são as forças de corpo homogeneizadas, e:

$$D_{ijkl}^H = \left\langle D_{ijkl} - D_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial y_s} \right\rangle \quad (3.36)$$

é o tensor constitutivo homogenizado, o resultado que era buscado. Caso o objetivo seja calcular as relações constitutivas homogenizadas, percebe-se que o procedimento a ser seguido é resolver o problema da célula unitária expresso na Equação 3.24, e então calcular através da Equação 3.36 o tensor constitutivo homogenizado associado àquela célula. Supondo que todas as células são idênticas, as componentes do tensor constitutivo são constantes para todo ponto $\mathbf{x} \in \Omega$.

3.3 Formulação em termos do método de elementos finitos

De forma a utilizar o método de elementos finitos, é necessário expressar o problema de valor de contorno da Equação 3.24 em sua forma fraca. Como os deslocamentos são prescritos na fronteira, o espaço das variações apropriado é:

$$\wp = \{ \mathbf{v} : \mathbf{v} \in H_0^1 \} \quad (3.37)$$

onde $H_0^1(\mathbf{Y})$ é um espaço de Sobolev cujas funções são nulas no contorno, $\mathbf{v}(\partial\mathbf{Y})=0$.

Considere também o espaço dos campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis:

$$\mathfrak{N} = \{ \mathbf{u} : \mathbf{u} \in H^1, \mathbf{u} \text{ Y-periódica} \} \quad (3.38)$$

Multiplicando a Equação 3.24 por $\mathbf{v} \in \wp$, e integrando sobre o domínio obtém-se a Equação (3.39).

$$\int_{\mathbf{Y}} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial y_s} \right) v_i d\mathbf{Y} = \int_{\mathbf{Y}} \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial y_j} v_i d\mathbf{Y} \quad \forall \mathbf{v} \in \wp \quad (3.39)$$

Utilizando a regra da cadeia:

$$\int_{\mathbf{Y}} \left[\frac{\partial}{\partial y_j} \left(D_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial y_s} v_i \right) - D_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial y_s} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] d\mathbf{Y} = \int_{\mathbf{Y}} \left[\frac{\partial}{\partial y_j} (D_{ijkl} v_i) - D_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] d\mathbf{Y} \quad \forall \mathbf{v} \in \wp \quad (3.40)$$

Utilizando o teorema da divergência e considerando que $v_i(\mathbf{y})=0 \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\mathbf{Y}$, os lados esquerdo e direito da Equação 3.40 ficam, respectivamente:

$$\int_{\partial\mathbf{Y}} D_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial y_s} v_i n_j dS - \int_{\mathbf{Y}} D_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial y_s} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} d\mathbf{Y} = - \int_{\mathbf{Y}} D_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial y_s} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} d\mathbf{Y} \quad \forall \mathbf{v} \in \wp \quad (3.41)$$

$$\int_{\partial Y} D_{ijkl} v_i n_j dS - \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = - \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (3.42)$$

Assim, a Equação 3.39 fica:

$$\int_Y D_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial y_s} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (3.43)$$

que é a forma fraca da equação estática na microescala. Expressando as equações a serem resolvidas em termos das deformações, Equação 3.5, tem-se,

Determine $\chi^{kl} \in \mathcal{N}$ tal que:

$$\int_Y D_{ijrs} e_{rs}(\chi^{kl}) e_{ij}(\mathbf{v}) dY = \int_Y D_{ijkl} e_{ij}(\mathbf{v}) dY \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (3.44)$$

$$D_{ijkl}^H = \langle D_{ijkl} - D_{ijrs} e_{rs}(\chi^{kl}) \rangle \quad (3.45)$$

Utilizando notação de engenharia e considerando um problema de elasticidade plana, é possível definir: $\sigma_1 := \sigma_{11}$, $\sigma_2 := \sigma_{22}$, $\sigma_{12} := \sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\varepsilon_1 := \varepsilon_{11}$, $\varepsilon_2 := \varepsilon_{22}$ e $\varepsilon_{12} := 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21}$.

Assim, as componentes do tensor constitutivo ficam: $D_{11} := D_{1111}$, $D_{22} := D_{2222}$, $D_{33} := D_{1212}$, $D_{23} := D_{2212}$, $D_{13} := D_{1112}$ e $D_{12} := D_{1122}$, D_{ij} simétrico dado a simetria maior em D_{ijkl} . Em particular, a Equação 3.4 pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{D} = [\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3] \quad (3.47)$$

onde \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 e \mathbf{d}_3 são as colunas da matriz \mathbf{D} , ou linhas visto que $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$. A Equação 3.44 passa a ser escrita como:

$$\int_Y D_{ij} e_j(\chi^k) e_i(\mathbf{v}) dY = \int_Y D_{ik} e_i(\mathbf{v}) dY \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (3.48)$$

$$\int_Y \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^k) dY = \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \mathbf{d}_k dY \quad \forall \mathbf{v} \in \wp \quad (3.49)$$

A Equação 3.49, por sua vez, fica:

$$D_{ij}^H = \langle D_{ij} - D_{ik} e_k(\boldsymbol{\chi}^j) \rangle \quad (3.50)$$

$$D_{ij}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y (D_{ij} - \mathbf{d}_i^T \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^j)) dY \quad (3.51)$$

Aplicando o método de elementos finitos, o domínio é discretizado em n elementos bilineares retangulares com quatro nós. Associado a cada nó i existem deslocamentos na direção horizontal e vertical, $v_{1,i}$ e $v_{2,i}$, respectivamente, e também funções de forma $N_{1,i}$ e $N_{2,i}$, tal que os deslocamentos podem ser escritos como indicado na Equação 3.52.

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_{1,i} & 0 \\ 0 & N_{2,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 & \dots & N_{1,n} & 0 \\ 0 & N_{2,1} & \dots & 0 & N_{2,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ \vdots \\ v_{1,n} \\ v_{2,n} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^g(\mathbf{y}) \mathbf{v} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{N}^g(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} N_{1,1}(\mathbf{y}) & 0 & \dots & N_{1,n}(\mathbf{y}) & 0 \\ 0 & N_{2,1}(\mathbf{y}) & \dots & 0 & N_{2,n}(\mathbf{y}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = [v_{1,1} \quad v_{1,2} \quad \dots \quad v_{1,n} \quad v_{2,n}]$$

Similarmente, $\boldsymbol{\chi}_h^k(\mathbf{y}) = \mathbf{N}^g(\mathbf{y}) \boldsymbol{\chi}^k$. Todas as representações dessa espécie formam os respectivos subespaços de aproximação $\wp^h \subset \wp$, $\aleph^h \subset \aleph$. Definindo o operador diferencial:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

As deformações podem ser descritas em forma matricial conforme mostrado na Equação 3.54.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1(\mathbf{v}_h) \\ \varepsilon_2(\mathbf{v}_h) \\ \varepsilon_{12}(\mathbf{v}_h) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{G}\mathbf{v}_h = \mathbf{G}\mathbf{N}^g \mathbf{v} = \mathbf{b}\mathbf{v} \quad (3.54)$$

Onde $\mathbf{b} = \mathbf{G}\mathbf{N}^g$ é a matriz de deformações. Similarmente, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}_h^k) = \mathbf{b}\boldsymbol{\chi}_h^k$. Substituindo esses resultados na Equação 3.49 resulta na Equação (3.55).

$$\mathbf{v}^T \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D} \mathbf{b} dY \boldsymbol{\chi}_h^k = \mathbf{v}^T \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{d}_k dY \quad \forall \mathbf{v}_h \in \wp^h, \quad \mathbf{v}_h = \mathbf{N}^g(\mathbf{y})\mathbf{v}, \quad k=1,2,3 \quad (3.55)$$

Como \mathbf{v}^T é arbitrário, obtém-se a Equação 3.56.

$$\int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D} \mathbf{b} dY \boldsymbol{\chi}_h^k = \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{d}_k dY \quad (3.56)$$

Ou mais compactamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\boldsymbol{\chi}_h^k &= \mathbf{f}_k \\ \mathbf{k} &= \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D} \mathbf{b} dY \\ \mathbf{f}_k &= \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{d}_k dY \end{aligned} \quad (3.57)$$

Definindo $\hat{\mathbf{f}} = [\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3] = \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D} dY$, é possível compactar os três casos de deslocamentos como:

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\chi} = \mathbf{f} \quad (3.58)$$

Dispensando o subíndice em $\boldsymbol{\chi}_h^k(\mathbf{y})$, a Equação 3.51 pode ser escrita diretamente em termos de $\boldsymbol{\chi}$.

$$D_{ij}^H = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} (D_{ij} - \mathbf{d}_i^T \mathbf{b} \chi^j) d\mathbf{Y} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_{i1}^H & D_{i2}^H & D_{i3}^H \end{bmatrix} &= \left[\frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} (D_{i1} - \mathbf{d}_i^T \mathbf{b} \chi^1) d\mathbf{Y} \quad \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} (D_{i2} - \mathbf{d}_i^T \mathbf{b} \chi^2) d\mathbf{Y} \quad \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} (D_{i3} - \mathbf{d}_i^T \mathbf{b} \chi^3) d\mathbf{Y} \right] \\ &= \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} \left\{ \begin{bmatrix} D_{i1} & D_{i2} & D_{i3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i^T \mathbf{b} \chi^1 & \mathbf{d}_i^T \mathbf{b} \chi^2 & \mathbf{d}_i^T \mathbf{b} \chi^3 \end{bmatrix} \right\} d\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_{11}^H & D_{12}^H & D_{13}^H \\ D_{21}^H & D_{22}^H & D_{23}^H \\ D_{31}^H & D_{32}^H & D_{33}^H \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{l} \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} \left\{ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^T \mathbf{b} \chi^1 & \mathbf{d}_1^T \mathbf{b} \chi^2 & \mathbf{d}_1^T \mathbf{b} \chi^3 \end{bmatrix} \right\} d\mathbf{Y} \\ \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} \left\{ \begin{bmatrix} D_{21} & D_{22} & D_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_2^T \mathbf{b} \chi^1 & \mathbf{d}_2^T \mathbf{b} \chi^2 & \mathbf{d}_2^T \mathbf{b} \chi^3 \end{bmatrix} \right\} d\mathbf{Y} \\ \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} \left\{ \begin{bmatrix} D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_3^T \mathbf{b} \chi^1 & \mathbf{d}_3^T \mathbf{b} \chi^2 & \mathbf{d}_3^T \mathbf{b} \chi^3 \end{bmatrix} \right\} d\mathbf{Y} \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} \left\{ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^T \\ \mathbf{d}_2^T \\ \mathbf{d}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{b} \begin{bmatrix} \chi^1 & \chi^2 & \chi^3 \end{bmatrix} \right\} d\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Compactamente, a Equação 3.61 pode ser escrita como:

$$\mathbf{D}^H = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} \mathbf{D} (\mathbf{I} - \mathbf{b} \chi) d\mathbf{Y} \quad (3.62)$$

4 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA MULTIESCALA

O método de otimização estrutural evolucionária bi-direcional foi proposto em sua formulação mais recente por Huang e Xie, 2009, e aplicado em problemas de otimização multiescala concorrente pela primeira vez por Zuo et al., 2013. Neste capítulo será apresentado o esquema geral de um problema de otimização multiescala concorrente através do método BESO de forma a obter a distribuição de material ótima na macro e microescala, bem como sua particularização para os casos tratados nesse trabalho, especificamente, maximização da frequência fundamental e minimização da resposta no domínio da frequência.

4.1 Definição do problema considerado

Considere uma estrutura com microestrutura associada conforme a Figura 4.1. Na escala da estrutura, denominada macroescala, há um sistema de coordenadas \mathbf{x} . A estrutura apresenta comportamento elástico linear e ocupa uma região Ω em \mathbb{R}^2 com contorno suave $\partial\Omega$, e está submetida a condições de contorno e forças de superfície conhecidas. A cada ponto \mathbf{x} da macroescala ocupado por material, há um elemento de volume representativo (EVR) associado a uma região Y descrita por um sistema de coordenadas local \mathbf{y} . O EVR se repete periodicamente formando a microescala. Ambos os domínios Ω e Y são discretizados de forma a possibilitar a aplicação do método de elementos finitos, conforme a Figura 4.2. Mais especificamente, o domínio macroestrutural é dividido em N^{MA} elementos retangulares, enquanto o domínio microestrutural é dividido em N^{MI} elementos também retangulares. As variáveis de projeto \mathbf{X}^{MA} e \mathbf{X}^{MI} também são introduzidas, tal que \mathbf{X}^{MA} é um vetor com N^{MA} componentes indicando a presença ou ausência de material ocupando a região correspondente a cada elemento finito da macroestrutura. Considere a j -ésima componente de \mathbf{X}^{MA} , X_j^{MA} . Caso $X_j^{MA} = 1$, então o espaço associado ao j -ésimo elemento é ocupado pelo material mais rígido sendo considerado. Caso $X_j^{MA} = 0$, então o j -ésimo elemento ocupa um espaço vazio para estruturas celulares, ou é ocupado por material menos rígido no caso de um compósito. O vetor \mathbf{X}^{MI} de N^{MI} componentes representa o mesmo tipo de informação, descrevendo entretanto a distribuição de material na microestrutura.

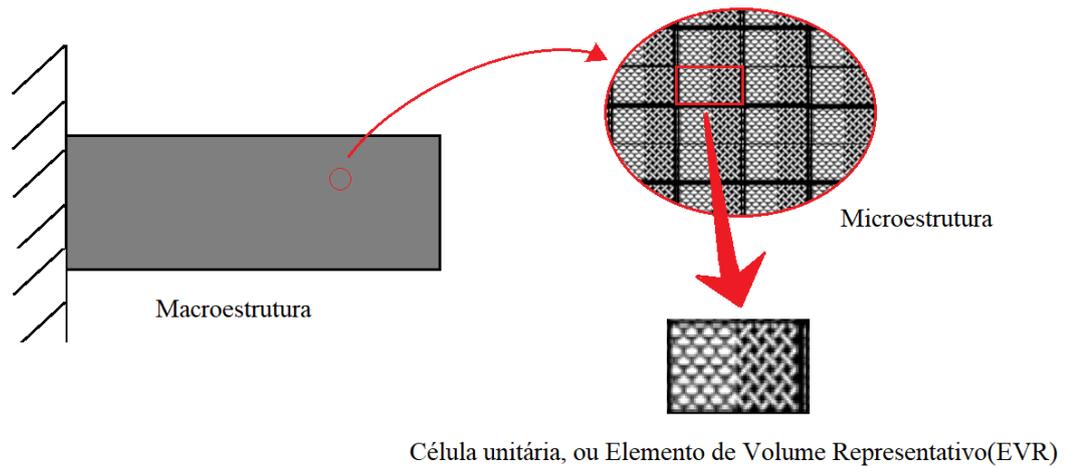


Figura 4.1 - Estrutura cujo material possui microestrutura associada.

De acordo com o Capítulo 3, o comportamento dos materiais presentes na macroescala é função da topologia e dos materiais que compoem a microescala, e tal dependência é descrita explicitamente através das equações obtidas aplicando o método matemático da homogeneização. Dessa forma, o tensor das relações constitutivas D_{ijkl}^H de um material na macroescala é dado por:

$$D_{ijkl}^H = \left\langle D_{ijkl} - D_{ijrs} \frac{\partial \chi_r^{kl}}{\partial y_s} \right\rangle \quad (4.1)$$

onde D_{ijkl} é o tensor constitutivo na microescala, \mathbf{y} são as coordenadas na microescala e χ^{kl} é a solução do problema da célula periódica Y :

$$A_0 \chi_i^{kl} = -\frac{\partial}{\partial y_j} (D_{ijkl}(\mathbf{y})) , \quad \chi^{kl} \text{ Y-periódica} \quad (4.2)$$

Aqui, A_0 diz respeito ao operador definido na Equação 3.14. Já considerando os domínios discretizados é possível escrever:

$$\mathbf{D}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{b}\boldsymbol{\chi}) dY \quad (4.3)$$

onde \mathbf{b} é a matriz de deformações na microescala, e $|\mathbf{Y}|$ é o volume da célula unitária considerada. A Equação 4.2, por sua vez, fica:

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\chi} = \mathbf{f} \quad (4.4)$$

onde $\mathbf{k} = \int_{\mathbf{Y}} \mathbf{b}^T \mathbf{D} \mathbf{b} d\mathbf{Y}$, $\boldsymbol{\chi} = [\chi^1 \ \chi^2 \ \chi^3]$, $\mathbf{f} = [\mathbf{f}^1 \ \mathbf{f}^2 \ \mathbf{f}^3]$, $\mathbf{D} = [\mathbf{d}^1 \ \mathbf{d}^2 \ \mathbf{d}^3]$ e $\mathbf{f}_k = \int_{\mathbf{Y}} \mathbf{b}^T \mathbf{d}_k d\mathbf{Y}$. Aqui \mathbf{k} é a matriz de rigidez global na microescala, $\boldsymbol{\chi}$ é a matriz dos deslocamentos e \mathbf{f} a matriz das forças externas. \mathbf{d}^k , \mathbf{f}^k e χ^k remetem à k -ésima coluna de \mathbf{D} , ao vetor de forças externas e ao campo de deslocamentos associado, respectivamente. Assim, é necessário considerar três casos distintos $k=1, 2, 3$ de carregamentos externos de forma a poder calcular a matriz constitutiva \mathbf{D}^H conforme a Equação 4.3.

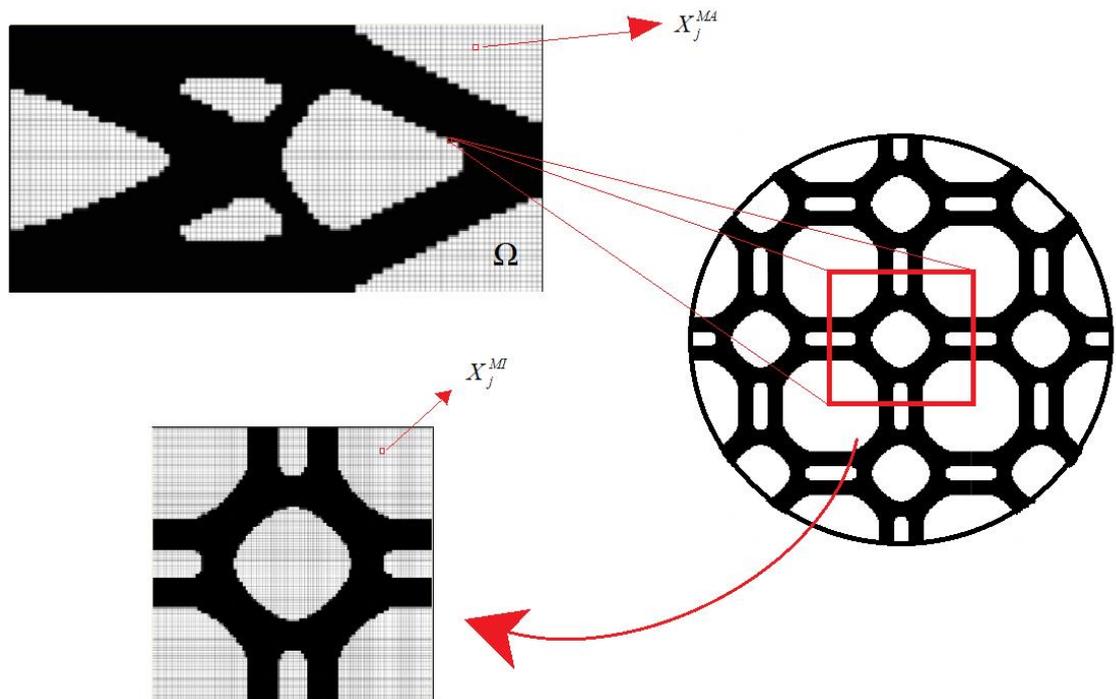


Figura 4.2 - Esquema multiescala mostrando os domínios já discretizados.

4.2 Interpolação material

O método BESO consiste em um processo de otimização topológica no qual uma certa estrutura inicial tem material removido ou adicionado de acordo com um determinado critério evolucionário. De forma a possibilitar o uso da informação do gradiente da função objetivo,

um esquema de interpolação material foi introduzido por Huang e Xie, 2009, através do qual as variáveis de projeto \mathbf{X}^{MA} e \mathbf{X}^{MI} podem ser incluídas nas equações governantes do problema.

Considere um sistema multiescala cuja macroescala é constituída por dois materiais com matrizes constitutivas e densidades $\mathbf{D}_1^{MA}, \rho_1^{MA}$ e $\mathbf{D}_2^{MA}, \rho_2^{MA}$, material mais e menos rígido, respectivamente. Cada material possui uma microestrutura bimaterial associada, sendo as matrizes constitutivas \mathbf{D}_1^{MA} e \mathbf{D}_2^{MA} construídas a partir do processo de homogeneização aplicado a elementos de material representativo de cada microestrutura Y_1 e Y_2 , respectivamente (Figura 4.3). As densidades ρ_1^{MA} e ρ_2^{MA} são calculadas a partir dos elementos de material representativo como média ponderada das densidades dos materiais presentes na microestrutura.

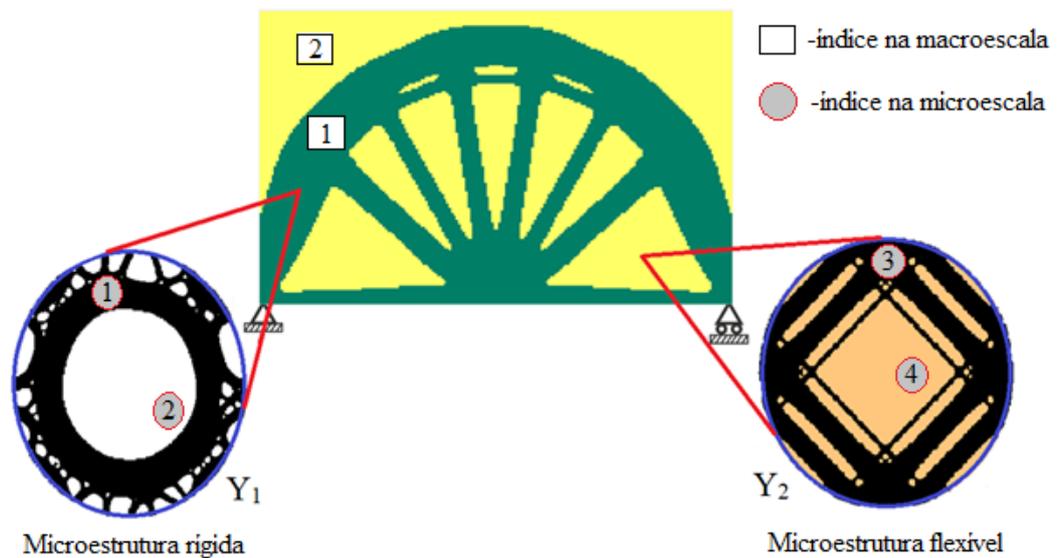


Figura 4.3 - Escalas presentes e índices associados a cada material.

A microestrutura associada ao material rígido é construída a partir de dois materiais isotrópicos, um mais rígido, com propriedades E_1, ν_1, ρ_1 , e um material mais flexível, com propriedades E_2, ν_2, ρ_2 . Simultaneamente, a microestrutura associada ao material mais flexível é constituída a partir dos materiais isotrópicos com propriedades E_3, ν_3, ρ_3 e E_4, ν_4, ρ_4 , material rígido e flexível, respectivamente.

Dessa forma, a matriz constitutiva na microestrutura Y_1 é dada pela expressão :

$$\mathbf{D}_1^{MI}(X_j^{MI}) = (X_j^{MI})^p \mathbf{D}_1 + [1 - (X_j^{MI})^p] \mathbf{D}_2 \quad j = 1, \dots, N^{MI} \quad (4.5)$$

E a densidade fica:

$$\rho_1^{MI}(X_j^{MI}) = X_j^{MI} \rho_1 + (1 - X_j^{MI}) \rho_2 \quad j = 1, \dots, N^{MI} \quad (4.6)$$

onde \mathbf{D}_1 é a matriz constitutiva de um material isotrópico com módulo de Young E_1 e coeficiente de Poisson ν_1 . Da mesma forma, \mathbf{D}_2 é a matriz do material com propriedades E_2 , ν_2 . O expoente p é o coeficiente de penalização, e vem do modelo de interpolação material sugerido por Bendsøe, 1989. A matriz constitutiva na microestrutura Y_2 , por sua vez, fica:

$$\mathbf{D}_2^{MI}(X_j^{MI}) = (X_j^{MI})^p \mathbf{D}_3 + [1 - (X_j^{MI})^p] \mathbf{D}_4 \quad j = 1, \dots, N^{MI} \quad (4.7)$$

e a densidade em Y_2 é dada por:

$$\rho_2^{MI}(X_j^{MI}) = X_j^{MI} \rho_3 + (1 - X_j^{MI}) \rho_4 \quad j = 1, \dots, N^{MI} \quad (4.8)$$

onde \mathbf{D}_3 e \mathbf{D}_4 estão associadas aos materiais com propriedades E_3 , ν_3 , e E_4 , ν_4 , respectivamente.

Na macroescala, da Equação 4.3 tem-se que a matriz constitutiva do material 1 é dada por:

$$\mathbf{D}_1^H = \frac{1}{|Y_1|} \int_{Y_1} \mathbf{D}_1^{MI} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\chi_1) dY \quad (4.9)$$

Enquanto para a matriz constitutiva do material 2:

$$\mathbf{D}_2^H = \frac{1}{|Y_2|} \int_{Y_2} \mathbf{D}_2^{MI} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\chi_2) dY \quad (4.10)$$

A densidade dos materiais que compõem a macroescala são simples médias aritméticas das densidades nas respectivas microescalas:

$$\rho_1^H = \frac{1}{N^{MI}} \sum_{i=1}^{N^{MI}} X_i^{MI} \rho_1 + (1 - X_i^{MI}) \rho_2 \quad (4.11)$$

$$\rho_2^H = \frac{1}{N^{MA}} \sum_{i=1}^{N^{MI}} X_i^{MI} \rho_3 + (1 - X_i^{MI}) \rho_4 \quad (4.12)$$

Com as matrizes constitutivas e densidades homogenizadas, é possível estabelecer o esquema de interpolação das propriedades materiais na macroescala Ω :

$$\mathbf{D}^{MA}(X_j^{MA}) = (X_j^{MA})^p \mathbf{D}_1^H + [1 - (X_j^{MA})^p] \mathbf{D}_2^H \quad j = 1, \dots, N^{MA} \quad (4.13)$$

$$\rho^{MA}(X_j^{MA}) = X_j^{MA} \rho_1^H + (1 - X_j^{MA}) \rho_2^H \quad j = 1, \dots, N^{MA} \quad (4.14)$$

A matriz de rigidez global \mathbf{K} é montada a partir das matrizes de rigidez elementares \mathbf{K}_e :

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N^{MA}} \mathbf{K}^e(X_i^{MA}) \quad (4.15)$$

onde a matriz elementar na macroescala é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e(X_i^{MA}) &= \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{MA}(X_i^{MA}) \mathbf{B} d\Omega = (X_i^{MA})^p \underbrace{\int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1^H \mathbf{B} d\Omega}_{\mathbf{K}_1^e} + [1 - (X_i^{MA})^p] \underbrace{\int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_2^H \mathbf{B} d\Omega}_{\mathbf{K}_2^e} \\ \mathbf{K}^e(X_i^{MA}) &= (X_i^{MA})^p \mathbf{K}_1^e + [1 - (X_i^{MA})^p] \mathbf{K}_2^e \quad i = 1, \dots, N^{MA} \end{aligned} \quad (4.16)$$

\mathbf{B} é a matriz de deformações na macroescala e Ω_i é o domínio onde o i -ésimo elemento está definido.

Analogamente, a matriz de massa global \mathbf{M} é montada a partir das matrizes de massa elementares \mathbf{M}_e :

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N^{MA}} \mathbf{M}^e(X_i^{MA}) \quad (4.17)$$

$$\mathbf{M}^e(X_i^{MA}) = \int_{\Omega_i} \rho_1^{MA}(X_i^{MA}) \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega = X_i^{MA} \underbrace{\int_{\Omega_i} \rho_1^H \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega}_{\mathbf{M}_1^e} + (1 - X_i^{MA}) \underbrace{\int_{\Omega_i} \rho_2^H \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega}_{\mathbf{M}_2^e} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{M}^e(X_i^{MA}) = X_i^{MA} \mathbf{M}_1^e + (1 - X_i^{MA}) \mathbf{M}_2^e \quad i = 1, \dots, N^{MA}$$

onde \mathbf{N} é a matriz das funções de forma. É possível considerar microestruturas celulares tomando os limites $E_2 \rightarrow 0$, $\nu_2 \rightarrow 0$, $\rho_2 \rightarrow 0$ ou $E_4 \rightarrow 0$, $\nu_4 \rightarrow 0$, $\rho_4 \rightarrow 0$, dependendo do material considerado numa estrutura compósita. De maneira semelhante, para modelar uma estrutura feita de um único material toma-se o limite, $\rho_2^{MA} \rightarrow 0$, forçando também todas as componentes de \mathbf{D}_2^{MA} a tender a zero. Na prática, fazer “tender a zero” significa assinalar aos materiais secundários propriedades materiais cujos valores tenham magnitude 1×10^5 ou 1×10^6 vezes menores que as propriedades do material primário, de forma que imponham tão pouca resistência que se comportem como “vazios”. Valores nulos não são adotados visto que matrizes globais de rigidez ou massa cujas entradas possuam ordens de grandeza muito distintas geram instabilidades no processo de solução do problema.

4.3 Formulação do problema de otimização topológica

O presente trabalho aborda o problema de distribuição material em um sistema multiescala considerando dois problemas vibracionais distintos. Considere uma certa estrutura sujeita a determinadas condições de contorno. Trata-se do problema de maximização da frequência de vibração fundamental da estrutura, assim como o problema de minimização da resposta no domínio da frequência da estrutura sendo excitada por uma determinada força harmônica. Os materiais dos quais a estrutura é formada possuem microescala assumida periódica. Assim, definem-se modelos de elementos finitos tanto da estrutura quanto dos EVR das microestruturas, bem como variáveis de projeto descrevendo a distribuição de material em ambas as escalas. Como os dois casos estão sujeitos a equações de estado distintas, os problemas são formulados separadamente conforme as seções 4.3.1, 4.3.2.

4.3.1 Formulação do problema de maximização da frequência fundamental

O problema de maximização da frequência fundamental de uma determinada estrutura pode ser definido conforme dispõem as Equações 4.19.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximize} \\ \mathbf{x}^{MA}, \mathbf{x}^{MI,1}, \mathbf{x}^{MI,2} \end{array} \right. \omega_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sujeito a} \\ (\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}_0 = \mathbf{0}, \\ V_f^{MA} - \sum_{i=1}^{N^{MA}} V_i^{MA} X_i^{MA} = 0, \\ V_f^{MI,1} - \sum_{j=1}^{N^{MI}} V_j^{MI,1} X_j^{MI,1} = 0, \\ V_f^{MI,2} - \sum_{j=1}^{N^{MI}} V_j^{MI,2} X_j^{MI,2} = 0, \end{array} \right. \quad (4.19)$$

N^{MA} e N^{MI} correspondem ao número de elementos na macro e microescala, respectivamente. \mathbf{X}^{MA} é o vetor das variáveis de projeto que descreve a distribuição de material na macroescala, enquanto $\mathbf{X}^{MI,1}$ e $\mathbf{X}^{MI,2}$ cumprem um papel semelhante nos domínios das microescalas. Para uma estrutura com um único material, caso a componente X_i^{MA} seja igual a 1, então o i -ésimo elemento é ocupado por material. Caso $X_i^{MA} = 0$, então a região associada ao i -ésimo elemento representa espaço vazio. Para uma estrutura compósita, $X_i^{MA} = 0$ indica que a região do i -ésimo elemento é ocupado pelo material menos rígido. Para microestruturas de material celular ou compósito a mesma lógica vale. V_f^{MA} indica a fração de volume que a estrutura ocupa com relação ao volume total do domínio macroestrutural para uma estrutura com um único material, ou a fração de volume que o material mais rígido ocupa com relação ao volume total no caso de uma estrutura bimatéria. $V_f^{MI,k}$ indica o mesmo, mas nesse caso para o material rígido presente na microescala associada ao k -ésimo material da macroestrutura. Para estruturas feitas com um único material e microestrutura celular, a fração de volume final é dada pela Equação (4.20).

$$V_f = V_f^{MI} V_f^{MA} \quad (4.20)$$

A equação de estado corresponde à equação de movimento que descreve uma estrutura vibrando livremente:

$$(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}_0 = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

\mathbf{K} e \mathbf{M} são as matrizes globais de rigidez e massa, respectivamente, ω_0 indica a frequência fundamental de vibração da estrutura e \mathbf{U}_0 é o modo de vibração associado.

4.3.2 Formulação do problema de minimização da resposta no domínio da frequência

O problema de minimização da resposta de uma estrutura no domínio da frequência pode ser enunciado como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimize} \\ \mathbf{x}^{MA}, \mathbf{x}^{MI,1}, \mathbf{x}^{MI,2} \end{array} \right. \begin{array}{l} U^k \\ (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F}, \\ V_f^{MA} - \sum_{i=1}^{N^{MA}} V_i^{MA} X_i^{MA} = 0, \\ V_f^{MI,1} - \sum_{j=1}^{N^{MI}} V_j^{MI,1} X_j^{MI,1} = 0, \\ V_f^{MI,2} - \sum_{j=1}^{N^{MI}} V_j^{MI,2} X_j^{MI,2} = 0, \end{array} \quad (4.22)$$

Aqui U^k é o deslocamento do k -ésimo grau de liberdade, enquanto \mathbf{x}^{MA} , $\mathbf{x}^{MI,1}$, $\mathbf{x}^{MI,2}$, N^{MA} , N^{MI} , V_f^{MA} , $V_f^{MI,1}$ e $V_f^{MI,2}$ representam as mesmas grandezas indicadas pela seção 4.3.1. A equação de estado vem da consideração de um corpo sujeito a uma excitação harmônica.

Considere uma força $\mathbf{P} = \mathbf{F}e^{i\omega t}$ agindo sobre uma certa estrutura, tal que o vetor deslocamento pode ser escrito como $\mathbf{V} = \mathbf{U}e^{i\omega t}$. A equação do movimento em termos do método dos elementos finitos corresponde à Equação 4.23.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{P} \quad (4.23)$$

onde novamente \mathbf{K} e \mathbf{M} são as matrizes globais de massa e rigidez. Substituindo as expressões para \mathbf{P} e \mathbf{V} e cancelando os termos dependentes do tempo, obtém-se a equação do movimento no domínio da frequência em termos das amplitudes dos vetores de força e deslocamento:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (4.24)$$

4.4 Análise da sensibilidade

O método BESO é um algoritmo evolucionário que, em sua reformulação proposta por Huang e Xie, 2009, utiliza a informação do gradiente da função objetivo com relação às variáveis de projeto para guiar a atualização da topologia. Neste trabalho, os sistemas tratados são multiescala, de forma que se projeta tanto a estrutura quanto a microestrutura dos materiais que a compoem. Dessa forma, há dois tipos de sensibilidade, cada uma referente às variáveis de projeto da macroescala ou microescala. A análise pertinente a cada função objetivo será tratada separadamente nas seções 4.4.1 e 4.4.2.

4.4.1 Sensibilidade para o problema de maximização da frequência fundamental

A frequência natural fundamental depende tanto da topologia quanto das propriedades materiais da estrutura, estas por sua vez dependentes da topologia microestrutural do material. Logo, a variação da função objetivo devido à mudança de um elemento tanto na macro quanto na microescala pode ser calculada como a derivada da função objetivo na Equação 4.19 com relação à variável de projeto \mathbf{X} . Ademais, do quociente de Rayleigh tem-se que a frequência natural relaciona-se à razão da energia potencial pela energia cinética associada ao modo através da relação:

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}}{\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}} \quad (4.25)$$

Portanto, a sensibilidade de ω em \mathbf{X} fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{1}{2\omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [\omega^2] = \frac{1}{2\omega} \left[\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{1}{\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}} \right) + \frac{1}{\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}) \right] \\ &= \frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}) - \frac{\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}}{(\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U})^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}) \right] \\ &= \frac{1}{2\omega \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}) - \frac{\overbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}}^{\omega^2}}{\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}) \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Devido à simetria de \mathbf{K} , a derivada da energia potencial é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}) &= \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \\ &= 2 \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{U}\end{aligned}\quad (4.27)$$

Como a matriz de massa também é simétrica obtém-se similarmente:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}) = 2 \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{M} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{U} \quad (4.28)$$

Normalizando \mathbf{u} com relação à matriz de massa, as Equações 4.27 e 4.28 inseridas na Equação 4.26 resultam:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{1}{2\omega} \left[2 \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{U} - \omega^2 \left(2 \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{M} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{U} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\omega} \left[\mathbf{U}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{X}} \right) \mathbf{U} + 2 \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} \right]\end{aligned}\quad (4.29)$$

Da Equação 4.19, o último termo na expressão da sensibilidade é nulo. Especializando para a primeira frequência natural, obtém-se a Equação 4.30.

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{2\omega_0} \mathbf{U}_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} - \omega_0^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{X}} \right) \mathbf{U}_0 \quad (4.30)$$

Onde \mathbf{X} pode ser o vetor das variáveis de projeto tanto na macroescala \mathbf{X}^{MA} quanto na microescala \mathbf{X}^{MI} . A seguir as sensibilidades específicas para cada escala são calculadas.

4.4.1.1 Sensibilidade para o problema de maximização da frequência fundamental na macroescala

Para o projeto da estrutura, $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{MA}$, e a sensibilidade da função objetivo com relação a remoção ou adição do j-ésimo elemento finito fica definida como na Equação 4.31.

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial X_j^{MA}} = \frac{1}{2\omega_0} \mathbf{U}_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j^{MA}} - \omega_0^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j^{MA}} \right) \mathbf{U}_0 \quad (4.31)$$

A derivada da matriz de rigidez global é obtida a partir da Equação 4.15:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j^{MA}} = \frac{\partial}{\partial X_j^{MA}} \sum_{i=1}^{N^{MA}} \mathbf{K}^e(X_i^{MA}) = \sum_{i=1}^{N^{MA}} \frac{\partial \mathbf{K}^e(X_i^{MA})}{\partial X_j^{MA}} = \frac{\partial \mathbf{K}^e(X_j^{MA})}{\partial X_j^{MA}} \quad (4.32)$$

E a derivada da matriz de rigidez elementar a partir da Equação 4.16 é:

$$\frac{\partial \mathbf{K}^e(X_i^{MA})}{\partial X_i^{MA}} = \frac{\partial}{\partial X_i^{MA}} \left[(X_i^{MA})^p \mathbf{K}_1^e + [1 - (X_i^{MA})^p] \mathbf{K}_2^e \right] = p(X_i^{MA})^{p-1} (\mathbf{K}_1^e - \mathbf{K}_2^e) \quad (4.33)$$

Aplicando o mesmo procedimento sobre a matriz de massa global, das Equações 4.17, 4.18, obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i^{MA}} = (\mathbf{M}_1^e - \mathbf{M}_2^e) \quad (4.34)$$

Assim, a sensibilidade na macroescala fica:

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial X_j^{MA}} = \frac{1}{2\omega} \mathbf{U}_0^T \left[p(X_j^{MA})^{p-1} (\mathbf{K}_1^e - \mathbf{K}_2^e) - \omega_0^2 (\mathbf{M}_1^e - \mathbf{M}_2^e) \right] \mathbf{U}_0 \quad (4.35)$$

4.4.1.2 Sensibilidade para o problema de maximização da frequência fundamental na microescala

Para o projeto material, $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{MI}$, e a sensibilidade da função objetivo com relação à remoção ou adição do j -ésimo elemento finito na microestrutura é dada pela equação 4.36.

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial X_j^{MI}} = \frac{1}{2\omega_0} \mathbf{U}_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j^{MI}} - \omega_0^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j^{MI}} \right) \mathbf{U}_0 \quad (4.36)$$

Da Equação 4.15, a derivada da matriz global de rigidez resulta:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j^{MI}} = \frac{\partial}{\partial X_j^{MI}} \sum_{i=1}^{N^{MA}} \mathbf{K}^e(X_i^{MA}) = \sum_{i=1}^{N^{MA}} \frac{\partial \mathbf{K}^e(X_i^{MA})}{\partial X_j^{MI}} = \sum_{i=1}^{N^{MA}} \left[(X_i^{MA})^p \frac{\partial \mathbf{K}_1^e}{\partial X_j^{MI}} + [1 - (X_i^{MA})^p] \frac{\partial \mathbf{K}_2^e}{\partial X_j^{MI}} \right] \quad (4.37)$$

Como a variável \mathbf{X}^{MI} diz respeito à microestrutura de um dos dois materiais presentes na macroestrutura, o somatório na Equação 4.37 se restringe somente aos subíndices i em que $X_i=1$, ou somente aos subíndices i em que $X_i=0$. Seja k o subíndice correspondente ao material cuja microestrutura é descrita por \mathbf{X}^{MI} , tal que sua matriz de rigidez elementar é denotada por \mathbf{K}_k^e ($k=1, 2$). A derivada fica então:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j^{MI}} = \sum_{i=1}^{N'} \frac{\partial \mathbf{K}_k^e(X_i^{MA})}{\partial X_j^{MI}} = \sum_{i=1}^{N'} \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}_k^H}{\partial X_j^{MI}} \mathbf{B} d\Omega \quad (4.38)$$

onde o índice i percorre todos os N' elementos finitos da macroestrutura de um determinado material.

A derivada da matriz homogenizada \mathbf{D}_k^H com relação à variável de projeto da microestrutura pode ser obtida através do método da variável adjunta [Komkov et al., 1986]. O resíduo da Equação 4.4 é utilizado como uma restrição adicionada à Equação 4.3, tal que o termo $\frac{\partial \chi}{\partial X_j^{MI}}$ possa ser tomado em consideração. Retomando as Equações 3.56, 3.57, o resíduo da equação de equilíbrio na microestrutura pode ser escrito como:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} (\mathbf{k}\chi - \mathbf{f}) = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left(\int_{\mathbf{Y}} \mathbf{b}^T \mathbf{D}_k^{MI} \mathbf{b} dY\chi - \int_{\mathbf{Y}} \mathbf{b}^T \mathbf{D}_k^{MI} dY \right) = \mathbf{0} \quad (4.39)$$

Onde \mathbf{Y} (com sub-índice omitido) é o domínio do elemento de volume representativo. Derivando essa expressão obtém-se a Equação 4.40.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_j^{MI}} &= \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left(\int_Y \mathbf{b}^T \frac{\partial \mathbf{D}_k^{MI}}{\partial X_j^{MI}} \mathbf{b} dY \chi + \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D}_k^{MI} \mathbf{b} dY \frac{\partial \chi}{\partial X_j^{MI}} - \int_Y \mathbf{b}^T \frac{\partial \mathbf{D}_k^{MI}}{\partial X_j^{MI}} dY \right) \\
&= \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left(\int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D}_k^{MI} \mathbf{b} dY \frac{\partial \chi}{\partial X_j^{MI}} - \int_Y \mathbf{b}^T \frac{\partial \mathbf{D}_k^{MI}}{\partial X_j^{MI}} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\chi) dY \right) = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Somando a expressão para o tensor constitutivo homogeneizado com o produto do resíduo por um multiplicador de Langrange λ :

$$\mathbf{D}_k^H = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_Y \mathbf{D}_k^{MI} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\chi) dY + \lambda^T \left(\int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D}_k^{MI} \mathbf{b} dY \chi - \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D}_k^{MI} dY \right) \tag{4.41}$$

Derivando por \mathbf{X}^{MI} :

$$\frac{\partial \mathbf{D}_k^H}{\partial X_j^{MI}} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left[\int_Y \frac{\partial \mathbf{D}_k^{MI}}{\partial X_j^{MI}} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\chi) dY \right] - \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left[\int_Y \mathbf{D}_k^{MI} \mathbf{b} dY \frac{\partial \chi}{\partial X_j^{MI}} \right] + \lambda^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_j^{MI}} \tag{4.42}$$

Substituindo a Equação 4.40 na derivada do resíduo, e pondo a derivada de χ em evidência:

$$\frac{\partial \mathbf{D}_k^H}{\partial X_j^{MI}} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left[\int_Y (\mathbf{I} - \mathbf{b}\lambda)^T \frac{\partial \mathbf{D}_k^{MI}}{\partial X_j^{MI}} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\chi) dY + \left(\lambda^T \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D}_k^{MI} \mathbf{b} dY - \int_Y \mathbf{D}_k^{MI} \mathbf{b} dY \right) \frac{\partial \chi}{\partial X_j^{MI}} \right] \tag{4.43}$$

Para que a contribuição de $\frac{\partial \chi}{\partial X_j^{MI}}$ seja nula, o termo que multiplica a derivada deve ser igual a zero, e consequentemente seu transposto também, tal que:

$$\int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D}_k^{MI} \mathbf{b} dY \lambda - \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D}_k^{MI} dY = \mathbf{0} \tag{4.44}$$

Uma comparação direta com a Equação 4.39 indica que $\lambda = \chi$ satisfaz a condição imposta. Dessa forma, a derivada do tensor constitutivo homogeneizado pela variável microscópica é expressa conforme a Equação 4.45.

$$\frac{\partial \mathbf{D}_k^H}{\partial X_j^{MI}} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\boldsymbol{\chi})^T \frac{\partial \mathbf{D}_k^{MI}}{\partial X_j^{MI}} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\boldsymbol{\chi}) d\mathbf{Y} \quad (4.45)$$

A derivada do tensor constitutivo na microescala, por sua vez, pode ser calculada a partir das Equações 4.5 e 4.7, dependendo de que material na macroescala esteja sendo considerado. De forma geral:

$$\frac{\partial \mathbf{D}_k^{MI}}{\partial X_j^{MI}} = p(X_j^{MI})^{p-1} (\mathbf{D}_m - \mathbf{D}_n) \quad (4.46)$$

onde \mathbf{D}_m , \mathbf{D}_n , são, respectivamente, os tensores constitutivos dos materiais rígido e flexível que compõem a microestrutura do k -ésimo material presente na macroestrutura. De acordo com o esquema adotado, para $k=1$ tem-se que $m=1$ e $n=2$, enquanto para $k=2$ tem-se que $m=3$ e $n=4$. Combinando as Equações 4.38, 4.45 e 4.46 obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j^{MI}} = \frac{p(X_j^{MI})^{p-1}}{|\mathbf{Y}|} \sum_{i=1}^{N'} \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \int_{\mathbf{Y}} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\boldsymbol{\chi})^T (\mathbf{D}_m - \mathbf{D}_n) (\mathbf{I} - \mathbf{b}\boldsymbol{\chi}) d\mathbf{Y} \mathbf{B} d\Omega \quad (4.47)$$

A derivada da matriz de massa global é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j^{MI}} = \sum_{i=1}^{N'} \frac{\partial \mathbf{M}_k^e(X_i^{MA})}{\partial X_j^{MI}} = \sum_{i=1}^{N'} \int_{\Omega_i} \frac{\partial \rho_k^H}{\partial X_j^{MI}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega = \frac{1}{N'} \sum_{i=1}^{N'} (\rho_m - \rho_n) \int_{\Omega_i} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (4.48)$$

onde a integral da Equação 4.18 e regra de interpolação para ρ_k^H vem das Equações 4.11 e 4.12. A notação indicial para as densidades segue a mesma convenção apresentada anteriormente para os tensores constitutivos da microestrutura.

Notando que a integral é igual para todos os elementos na macroestrutura, a sensibilidade da matriz de massa global é independente da variável de projeto da microestrutura:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j^{MI}} = (\rho_m - \rho_n) \int_{\Omega_i} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (4.49)$$

Como a informação da sensibilidade é usada para ordenar os elementos, esse termo não influencia o critério evolucionário utilizado, portanto, pode ser desconsiderado. Assim, a sensibilidade da função objetivo com relação à remoção ou adição do j -ésimo elemento é escrita como:

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial X_j^{MI}} = \frac{1}{2\omega_0} \frac{p(X_j^{MI})^{p-1}}{|Y|} \mathbf{U}_0^T \left[\sum_{i=1}^{N'} \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \int_Y (\mathbf{I} - \mathbf{b}\chi)^T (\mathbf{D}_m - \mathbf{D}_n) (\mathbf{I} - \mathbf{b}\chi) dY \mathbf{B} d\Omega \right] \mathbf{U}_0 \quad (4.50)$$

Lembrando que o termo entre parênteses se refere à soma da derivada de cada matriz elementar, e notando que o produto do vetor de deslocamentos global pela matriz elementar é igual ao produto dessa matriz pelo vetor de deslocamentos elementar, a expressão final para a sensibilidade fica:

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial X_j^{MI}} = \frac{1}{2\omega_0} \frac{p(X_j^{MI})^{p-1}}{|Y|} \sum_{i=1}^{N'} \mathbf{U}_i^T \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \int_Y (\mathbf{I} - \mathbf{b}\chi)^T (\mathbf{D}_m - \mathbf{D}_n) (\mathbf{I} - \mathbf{b}\chi) dY \mathbf{B} d\Omega \mathbf{U}_i \quad (4.51)$$

onde \mathbf{U}_i é o vetor de deslocamentos elementar do primeiro modo de vibração associado ao i -ésimo elemento.

4.4.2 Sensibilidade para o problema de minimização da resposta em frequência

Para a minimização da resposta da estrutura no domínio da frequência, nos referimos à formulação apresentada na Equação 4.22. Novamente se calcula a sensibilidade com relação à variável de projeto arbitrária \mathbf{X} , e então se especifica para as variáveis referentes a macro e microestrutura.

Derivando a Equação 4.24 por \mathbf{X} , e levando em consideração que a força externa \mathbf{F} não depende das variáveis de projeto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}] &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \\ \frac{\partial (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{U} + (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.52)$$

A derivada da resposta \mathbf{U} pode ser explicitada como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} = -(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \frac{\partial (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{U} \quad (4.53)$$

A função objetivo da Equação 4.22 é minimizar, especificamente, o deslocamento do k -ésimo grau de liberdade, U^k . Seja \mathbf{L} um vetor com a mesma dimensão de \mathbf{U} , e cujas componentes são todas nulas a exceção de uma entrada unitária na posição correspondente ao k -ésimo grau de liberdade de \mathbf{U} . Assim, $\mathbf{L}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial U^k}{\partial \mathbf{X}}$ e a derivada fica:

$$\frac{\partial U^k}{\partial \mathbf{X}} = - \underbrace{\mathbf{L}^T (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1}}_{\left[(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{L} \right]^T} \frac{\partial (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{U} \quad (4.54)$$

A expressão entre colchetes é a solução de:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}_L = \mathbf{L} \quad (4.55)$$

O que permite escrever a expressão para a sensibilidade como:

$$\frac{\partial U^k}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{U}_L^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{X}} \right) \mathbf{U} \quad (4.56)$$

Assim como anteriormente, as sensibilidades específicas para macro e microescala são calculadas nas seções seguintes.

4.4.2.1 Sensibilidade para o problema de minimização da resposta em frequência para a macroescala

Para o caso $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{MA}$, a sensibilidade de U^k fica escrita de acordo com o exposto na Equação 4.57.

$$\frac{\partial U^k}{\partial X_j^{MA}} = -\mathbf{U}_L^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j^{MA}} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j^{MA}} \right) \mathbf{U} \quad (4.57)$$

As sensibilidade das matrizes globais de rigidez e massa com relação à variável de projeto da macroescala já foram calculadas nas Equações 3.33 e 3.34, resultando a sensibilidade em:

$$\frac{\partial U^k}{\partial X_j^{MA}} = -\mathbf{U}_L^T \left[p(X_j^{MA})^{p-1} (\mathbf{K}_1^e - \mathbf{K}_2^e) - \omega^2 (\mathbf{M}_1^e - \mathbf{M}_2^e) \right] \mathbf{U} \quad (4.58)$$

4.4.2.2 Sensibilidade para o problema de minimização da resposta em frequência para a microescala

Já para o projeto microestrutural, $\mathbf{X}=\mathbf{X}^{MI}$, e a sensibilidade da função objetivo é dada por:

$$\frac{\partial U^k}{\partial X_j^{MI}} = -\mathbf{U}_L^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j^{MI}} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j^{MI}} \right) \mathbf{U} \quad (4.59)$$

Novamente, a partir das expressões para o cálculo do tensor homogeneizado, a sensibilidade das matrizes globais com respeito às variáveis da microescala também já foram calculadas, e correspondem às Equações 4.47 e 4.48. Da mesma forma que na seção 4.4.1.2, a sensibilidade da matriz de massa não altera o ordenamento entre as sensibilidades, podendo ser ignorada para a obtenção da expressão final:

$$\frac{\partial U^k}{\partial X_j^{MI}} = -\frac{p(X_j^{MI})^{p-1}}{|\mathbf{Y}|} \sum_{i=1}^{N'} \mathbf{U}_{L,i}^T \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \int_{\mathbf{Y}} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\boldsymbol{\chi})^T (\mathbf{D}_m - \mathbf{D}_n) (\mathbf{I} - \mathbf{b}\boldsymbol{\chi}) d\mathbf{Y} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{U}_i \quad (4.60)$$

Os vetores de deslocamento globais foram passados para dentro do somatório utilizando os vetores elementares da mesma forma que na Equação 4.51.

4.5 Filtragem das sensibilidades

Originalmente, o método de otimização topológica com interpolação material apresentava problemas como padrões do tipo tabuleiro de xadrez e dependência de malha [Sigmund e Petersson, 1998]. O padrão tabuleiro de xadrez (Figura 4.4) se deve ao uso de elementos finitos bilineares ou trilineares de baixa ordem, o que permite que a sensibilidade seja descontínua através das fronteiras dos elementos [Jog e Haber, 1996].

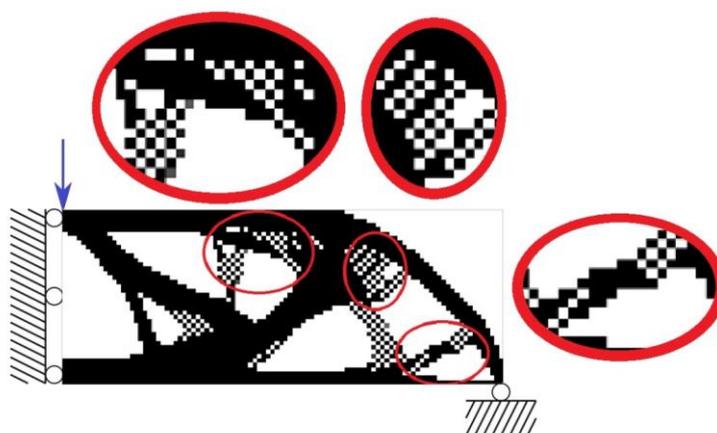


Figura 4.4 - Padrão tabuleiro de xadrez, com elementos ligados somente por um vértice.

O problema de dependência de malha está associado à inexistência de soluções [Sigmund e Petersson, 1998] para alguns problemas de otimização topológica, e se manifesta através da não convergência da estrutura para um resultado único a medida que a malha é refinada.

Originalmente proposto por Sigmund, 1994a, o esquema de filtragem numérica, análogo à técnica de tratamento de imagem, foi aplicado por Li et al., 2001, ao método ESO, e incorporado por Huang e Xie, 2007, ao método BESO. Esse esquema foi aplicado neste trabalho, com a diferença que não há conversão entre sensibilidades nodais e elementares. Embora necessário para esquemas BESO que removam completamente os elementos da malha (*hard-kill*), o uso de sensibilidades nodais não é um pré-requisito caso um esquema de interpolação material seja utilizado, e no geral leva a resultados equivalentes à filtragem através de sensibilidades nodais [Xia et al., 2016].

De forma a aplicar o filtro, primeiramente é definida uma quantidade r_{\min} denominada raio de filtragem. Ela define como a sensibilidade de um elemento é influenciada pela

sensibilidade de seus vizinhos, estabelecendo uma área circular dentro da qual as sensibilidades são suavizadas, ver Figura 4.5. Assim, se α_j é a sensibilidade do j -ésimo elemento numa malha de q elementos, a sensibilidade filtrada pode ser escrita como:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^q W_{ij} \alpha_j}{\sum_{j=1}^q W_{ij}} \quad (4.61)$$

onde o peso W_{ij} é definido como:

$$W_{ij} = \max(0, r_{\min} - r_{ij}) \quad (4.62)$$

r_{ij} , por sua vez, indica a distância entre os centróides dos i -ésimo e j -ésimo elementos da malha. Conforme a expressão anterior indica, o peso dos elementos vizinhos decresce linearmente até que a distância limite r_{\min} seja atingida, ponto em que a contribuição passa a ser nula.

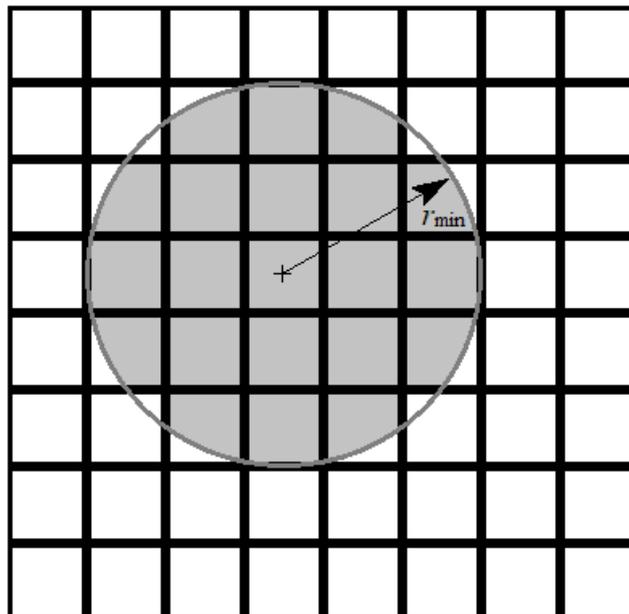


Figura 4.5 - Raio de filtragem definindo quais sensibilidades elementares são consideradas no processo de suavização.

De forma geral, além de eliminar os tabuleiros, o filtro espacial também induz o processo de otimização a um resultado independente do refino da malha, dado que padrões menores que o raio mínimo tendem a ser suprimidos.

Em adição à suavização espacial, também é usado um filtro cujo objetivo é suavizar as sensibilidades ao longo do processo evolucionário, de acordo com a expressão:

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^k + \alpha_i^{k-1}}{2} \quad (4.63)$$

Esse esquema visa estabilizar o algoritmo, dado que a remoção ou adição de membros estruturais ao longo do processo pode levar a grandes variações na função objetivo (Figura 4.6) e potencialmente alterar o resultado da otimização.

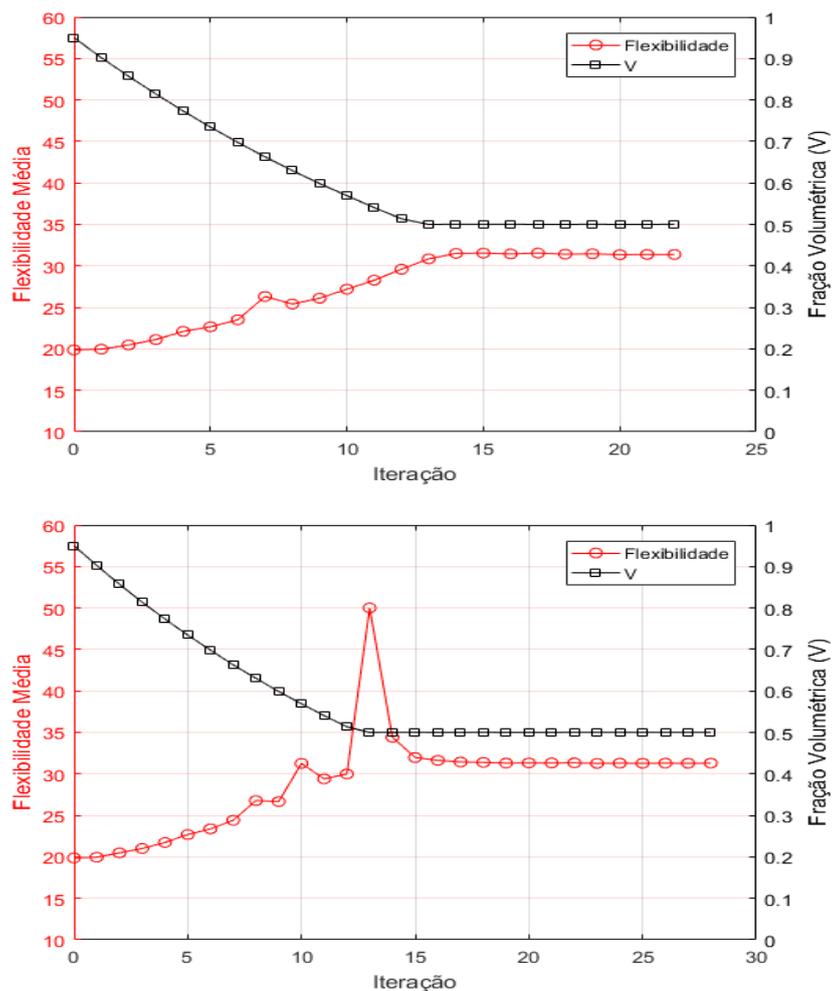


Figura 4.6 - Otimização: (a) Com estabilização; (b) Sem estabilização.

4.6 Atualização das variáveis de projeto

Dado o enunciado de um problema de otimização topológica, o método de otimização estrutural bidirecional evolucionário visa, partindo de um projeto inicial, modificar a topologia através de sucessivas remoções ou adições de material até que as restrições volumétricas sejam obedecidas e um critério de parada satisfeito. A quantidade de material removida ou adicionada é definida através da taxa evolucionária ER , parâmetro de entrada. Seja V_k a fração volumétrica de um determinado material na k -ésima iteração. A fração volumétrica objetivo para a iteração seguinte V_{k+1} é calculada como:

$$V_{k+1} = V_k (1 \pm ER) \quad (4.64)$$

onde o sinal depende da fração volumétrica atual V_k ser maior ou menor que a restrição volumétrica imposta V_f . Para $V_k > V_f$ o sinal é negativo, já para $V_k < V_f$, o sinal é positivo. Caso a restrição já esteja satisfeita ($V_k = V_f$), a quantidade de material presente na estrutura não se altera:

$$V_{k+1} = V_k = V_f \quad (4.65)$$

Ainda assim, a distribuição material pode mudar de acordo com as sensibilidades associadas a cada elemento. Para um problema de minimização, a sensibilidade α_i indica a variação na função objetivo causada pela retirada do material que ocupa o espaço correspondente a um certo elemento da malha (macro ou microestrutural). Para minimizar essa variação, as sensibilidades são ordenadas em ordem decrescente tal que $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$ para uma malha com n elementos finitos, e os elementos com as menores sensibilidades são retirados. Para um problema de maximização o procedimento é o mesmo, embora a sensibilidade indique então o negativo da variação da função objetivo.

Além disso, o parâmetro AR_{\max} é utilizado para controlar a quantidade de material que pode ser adicionado a regiões vazias em cada iteração. A remoção ou adição de grandes quantidades de material numa única iteração podem causar o rompimento abrupto de membros estruturais, potencialmente levando à degeneração da estrutura (ou da

microestrutura). De acordo com Huang e Xie, 2010b, o esquema de atualização pode ser descrito proceduralmente como:

Sejam α_{del}^{th} e α_{add}^{th} duas quantidades tais que para um elemento com sensibilidade α_i o elemento é removido caso $\alpha_i < \alpha_{del}^{th}$ e haja material nessa região, adicionado caso $\alpha_{add}^{th} < \alpha_i$ e não haja material ali. Após ordenar a sensibilidade de todos os elementos em ordem decrescente, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$, a atualização das variáveis de projeto é realizada em três passos:

1. α_{del}^{th} e α_{add}^{th} são definidos como $\alpha_{add}^{th} = \alpha_{del}^{th} = \alpha^{th}$. A sensibilidade de corte α^{th} , por sua vez, é escolhida tal que a fração volumétrica V_{k+1} para a próxima iteração satisfaça a Equação 4.64. Por exemplo, para uma malha que conta com 100 elementos, fração volumétrica atual $V_k = 100\%$, restrição volumétrica V_f menor que 100% e taxa evolucionária $ER=5\%$, tem-se que $\alpha^{th} = \alpha_{95}$.
2. A fração volumétrica de material adicionado, AR , é calculada, e caso esteja abaixo do limite AR_{max} , o processo de atualização das variáveis de projeto é encerrado.
3. Caso $AR_{max} < AR$, as sensibilidades são reordenadas em ordem decrescente, porém em listas separadas, uma para as regiões vazias e outra para aquelas ocupadas por material. Para as sensibilidades associadas a regiões vazias, α_{add}^{th} é definida tal que $AR = AR_{max}$. Para a lista das regiões ocupadas por material, a sensibilidade de corte α_{del}^{th} é tal que a quantidade de material removido satisfaça a Equação 4.64.

A atualização das variáveis de projeto é repetida até que a restrição volumétrica seja satisfeita e um critério de parada seja atingido:

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^M f_{k-i+1} - \sum_{i=1}^M f_{k-M-i+1}}{\sum_{i=1}^M f_{k-i+1}} \right| \leq \tau \quad (4.66)$$

Aqui k é o contador de iterações, τ é uma tolerância pré-estabelecida e M é o número de iterações a serem consideradas. Por exemplo, para $M=2$ o critério consiste em avaliar somente

as duas últimas iterações f_k e f_{k-1} . Para evitar que o processo de otimização seja interrompido prematuramente, é recomendado utilizar $M \geq 5$ [Huang e Xie, 2010b].

4.7 Sumário do algoritmo BESO aplicado a problemas multiescala

O método BESO para problemas de otimização topológica multiescala concorrente aplicado à maximização da frequência fundamental ou à minimização da resposta no domínio da frequência de estruturas pode ser esquematizado através da lista de procedimentos a seguir.

1. Definem-se as condições de contorno da estrutura, e os parâmetros correspondentes ao método em cada domínio considerado: Taxas de evolução ER^{MA} , $ER^{MI,1}$ e $ER^{MI,2}$, taxas de adição máxima AR_{\max}^{MA} , $AR_{\max}^{MI,1}$ e $AR_{\max}^{MI,2}$, frações volumétricas finais V_f^{MA} , $V_f^{MI,1}$ e $V_f^{MI,2}$, raios de filtragem r_{\min}^{MA} , $r_{\min}^{MI,1}$ e $r_{\min}^{MI,2}$, tolerância τ e número de elementos finitos nas malhas N^{MA} , $N^{MI,1}$ e $N^{MI,2}$. Os indicadores numéricos 1 e 2 nos superíndices se referem aos elementos de volume representativo dos materiais mais e menos rígido, respectivamente.
2. Os domínios são discretizados em malhas de elementos finitos, e valores são assinalados às variáveis de projeto \mathbf{X}^{MA} , $\mathbf{X}^{MI,1}$ e $\mathbf{X}^{MI,2}$. Em geral, se assinala 1 a todas as componentes de forma que todos os domínios comecem com fração volumétrica de 100%.
3. O problema dos deslocamentos no elemento de volume representativo (Equação 4.4) é resolvido para as microestruturas (caso estejam definidas), e os tensores constitutivos \mathbf{D}^H são contruídos usando a Equação 4.3.
4. Resolvem-se as Equações de estado 4.21 ou 4.24.
5. Calcula-se o valor da função objetivo e as sensibilidades a partir das Equações 4.35 e 3.51, ou a partir de 4.58 e 4.60.
6. O filtro descrito na seção 4.5 é aplicado às sensibilidades.
7. A atualização das variáveis de projeto é realizada conforme a seção 4.6.
8. Os passos de 3 a 7 são repetidos até que tanto as restrições volumétricas quanto o critério de parada sejam satisfeitos para todos os domínios.

Um fluxograma do processo pode ser visto na Figura 4.7.

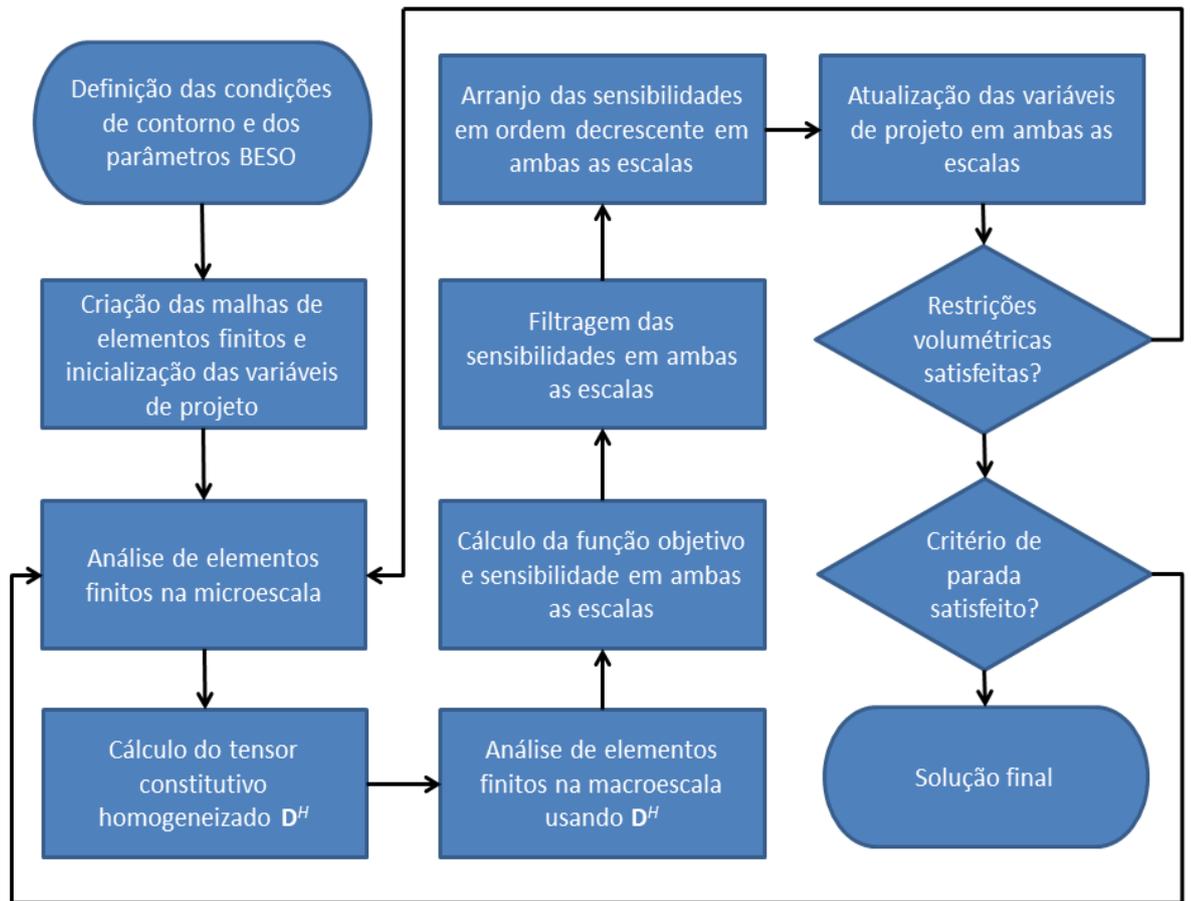


Figura 4.7 - Fluxograma para o procedimento BESO multiescala.

5 RESULTADOS

Neste capítulo o método BESO é aplicado a diferentes casos de otimização topológica, tanto em relação às condições de contorno, quanto aos domínios e funções objetivo considerados. O algoritmo é validado comparando-se os resultados obtidos àqueles presentes na literatura. Também é avaliada a influência de alguns parâmetros do método, assim como o efeito de pequenas alterações nas condições de contorno. Por fim, é estudado o impacto da escolha das escalas a serem consideradas para a otimização sob restrições volumétricas equivalentes.

5.1 Otimização para maximização da frequência fundamental

A otimização para maximização da frequência fundamental sob certa restrição volumétrica consiste em procurar a distribuição de material que leva a uma estrutura com a maior frequência fundamental possível. Um problema associado a esse tipo de otimização é o eventual aparecimento de frequências naturais multimodais à medida que frequências associadas a diferentes modos se aproximam, problema não detectado para os casos considerados nesse trabalho. Um procedimento adotado para lidar com esse fenômeno é sugerido por Yang et al., 1999, em que a sensibilidade associada a uma frequência multimodal consiste na média aritmética das sensibilidades associadas a cada modo. A modelagem de elementos finitos é realizada utilizando elementos bilineares de quatro nós com lado unitário para todos os casos considerados.

5.1.1 Projeto estrutural aplicado à maximização da frequência fundamental

O projeto estrutural consiste em obter a melhor distribuição de material somente na macroestrutura, conforme a Figura 5.1. Dado um ou dois materiais, a estrutura é modificada de forma a maximizar a frequência fundamental enquanto satisfaz uma determinada restrição volumétrica. Corresponde à abordagem convencional em otimização topológica, onde os materiais são dados e não é possível variar suas propriedades constitutivas.

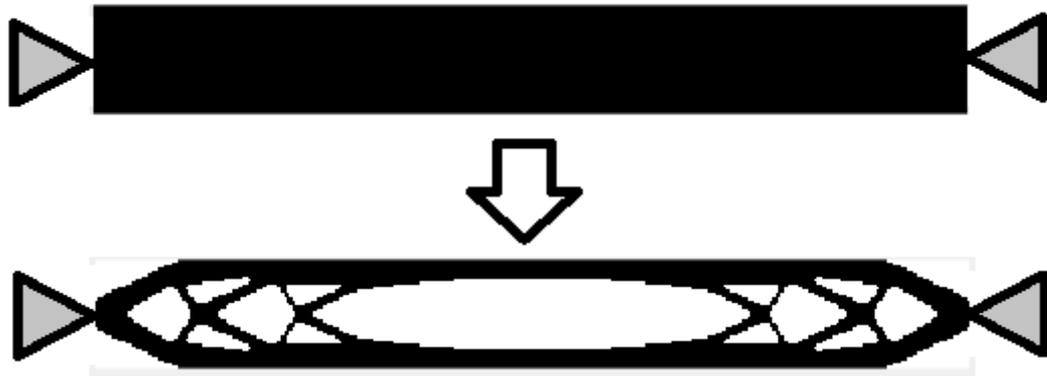


Figura 5.1 - Projeto estrutural de viga biapoada, mostrando domínio viável e topologia otimizada.

5.1.1.1 Validação do esquema de interpolação.

De forma a validar o esquema de interpolação bimatéria implementado, o projeto estrutural de uma viga biengastada compósita é comparado ao resultado obtido por Zuo et al., 2013. Consideram-se as dimensões e os materiais apresentados na Figura 5.2. A figura também apresenta a frequência fundamental da estrutura.

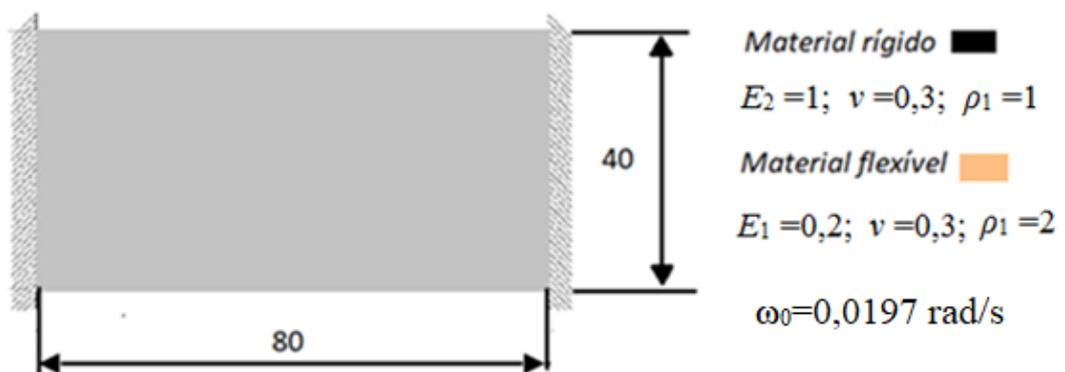


Figura 5.2 - Esquema das condições de contorno e dos materiais utilizados. Unidades não especificadas assumidas no SI.

É utilizada uma malha de 80×40 elementos de lados 1×1 para simular a estrutura, e os parâmetros BESO são taxa evolucionária $ER^{MA} = 2\%$, taxa de adição máxima $AR_{\max}^{MA} = 2\%$, fração volumétrica $V_f^{MA} = 50\%$, raio de filtragem $r_{\min}^{MA} = 4$, fator de

penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0.01\%$. A comparação entre os resultados obtidos pela literatura e neste trabalho é mostrada na Figura 5.3.

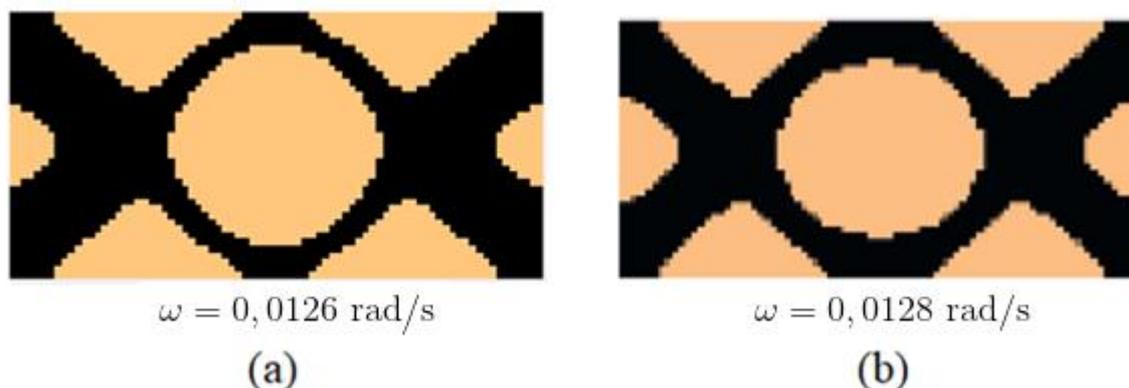


Figura 5.3 - Frequência fundamental e estrutura otimizada composta por dois materiais:
(a) Neste trabalho; (b) Zuo et al., 2013.

É possível observar pequenas diferenças entre a espessura das “barras” e do anel central presente nos dois resultados, assim como uma variação de $\approx 1\%$ no valor da frequência fundamental obtida. Tais discrepâncias podem ser resultado de diferentes parâmetros utilizados por Zuo et al., 2013, que não especifica taxa de evolução ou adição máxima, ou ainda do processo numérico de resolução do problema de autovalores, Equação 4.21. De forma geral, a topologia e frequência fundamental obtida são coerentes com a literatura, visto que o erro relativo é pouco maior que 1%. Portanto, são considerados adequados o esquema de interpolação material, bem como o módulo do código responsável pela otimização na macroestrutura. A Figura 5.4 mostra a evolução da frequência fundamental da estrutura de acordo com o progresso do processo de otimização.

5.1.2 Projeto material aplicado à maximização da frequência fundamental

O projeto de materiais consiste na otimização das propriedades de materiais com microestrutura associada. Para um elemento de volume representativo com certos materiais base, é possível projetar a microestrutura tal que alguma propriedade constitutiva seja extremizada [Sigmund, 1994b], ou de forma mais especializada, projetar a microestrutura dos materiais que compõem uma estrutura tal que sua frequência fundamental seja otimizada, conforme ilustrado na Figura 5.5.

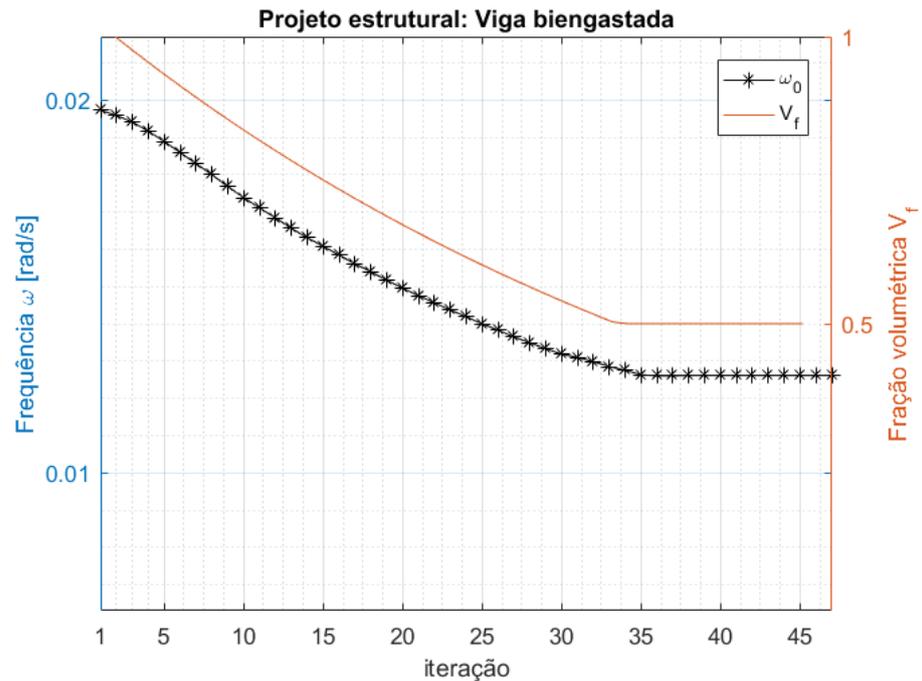


Figura 5.4 - Histórico da função objetivo e fração volumétrica.

Para todos os casos de projeto material os dois materiais utilizados são os mesmos do exemplo da seção 5.1.1.1, cujas propriedades são listadas na Tabela 5.1. O material 1 será referido como o material “mais rígido” daqui em diante, devido a seu módulo de elasticidade 5 vezes maior que do material 2, “menos rígido”, ainda que para materiais reais dificilmente um material menos rígido será mais denso que o mais rígido. Os valores foram escolhidos de forma a permitir a comparação aos resultados obtidos no trabalho de Zuo et al., 2013.

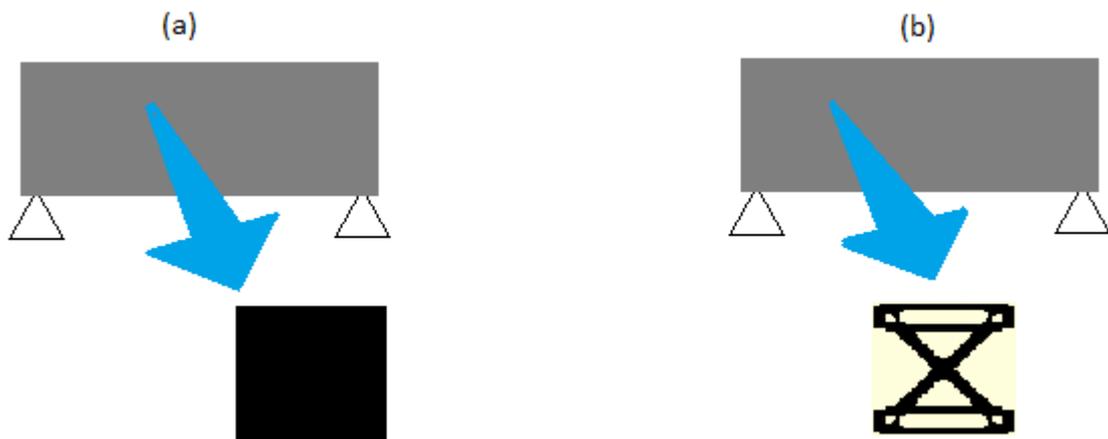


Figura 5.5 - Otimização topológica para projeto de materiais. Estrutura composta por: (a) Material isotrópico cheio; (b) Material com microestrutura otimizada.

Tabela 5.1 – Propriedades dos materiais base utilizados

	Módulo de Young	Coefficiente de Poisson	Densidade
Material 1	1	0,3	1
Material 2	0,2	0,3	2,0

5.1.2.1 Validação do processo de homogeneização

A ligação entre a microestrutura e o comportamento estrutural se dá pelo uso das propriedades materiais obtidas através do processo de homogeneização no cálculo da equação de estado da estrutura. Assim, o cálculo das propriedades equivalentes é fundamental no projeto de materiais para uma determinada estrutura. A fim de validar a componente do algoritmo aplicada ao cálculo das propriedades constitutivas equivalentes, assim como do módulo de otimização da microestrutura, comparam-se os resultados obtidos nesse trabalho com aqueles fornecidos por Zuo et al., 2013.

Considere uma estrutura igual àquela dada pela Figura 5.2. Otimiza-se a microestrutura celular dessa viga, composta a partir do material base 1, propriedades de acordo com a Tabela 5.1. A frequência fundamental da estrutura não otimizada é de 0,0197 rad/s. É utilizada uma malha de 80×40 elementos de lado 1 para simular a estrutura, enquanto a microestrutura é discretizada com uma malha de 40×40 elementos de lado unitário. Os parâmetros BESO são taxa evolucionária $ER^{MI} = 5\%$, taxa de adição máxima $AR_{max}^{MI} = 5\%$, fração volumétrica na microestrutura $V_f^{MI} = 50\%$, raio de filtragem $r_{min}^{MI} = 4$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0,01\%$. A comparação entre os resultados da literatura e desse trabalho é mostrada na Figura 5.6.

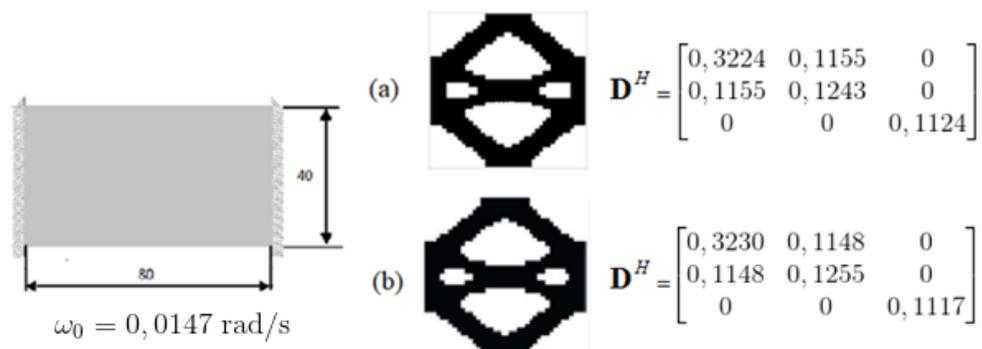


Figura 5.6 - Microestruturas obtidas para o caso da viga biengastada: (a) Nesse trabalho; (b) Zuo et al., 2013.

Da Figura 5.6, é possível notar que a distribuição de material é similar para os dois resultados, enquanto os valores obtidos para a matriz das propriedades constitutivas do material também variam somente após a segunda casa decimal. Portanto, o módulo responsável pelo cálculo das propriedades constitutivas efetivas é considerado adequado, assim como a rotina para a otimização microestrutural de estruturas.

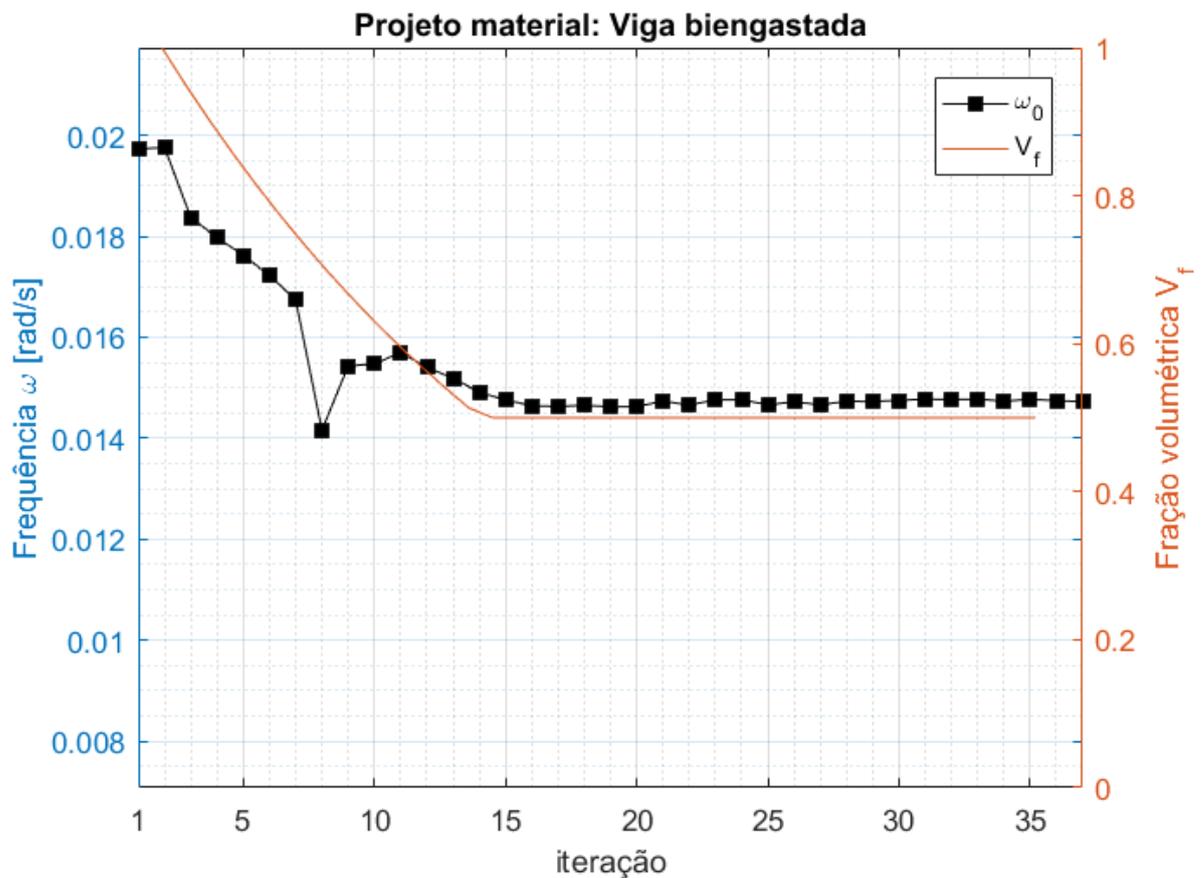


Figura 5.7 - Histórico da frequência fundamental e da fração volumétrica.

A Figura 5.7 mostra o histórico evolucionário da otimização. É possível observar que a frequência fundamental varia significativamente durante as 9 primeiras iterações, mas que daí em diante o processo se estabiliza e assim que a restrição volumétrica é atingida não há mais flutuações significativas.

5.1.2.2 Estudo da influência da taxa de evolução ER

O método BESO requer parâmetros de entrada que ajustam a filtragem das sensibilidades (r_{\min}) e o esquema de interpolação (p), ambos presentes em outros métodos de otimização topológica, assim como parâmetros próprios dessa metodologia, por exemplo, a taxa de evolução ER . A fim de avaliar a sensibilidade do projeto de materiais à taxa de evolução, um caso de otimização da microestrutura foi resolvido para diferentes taxas de evolução.

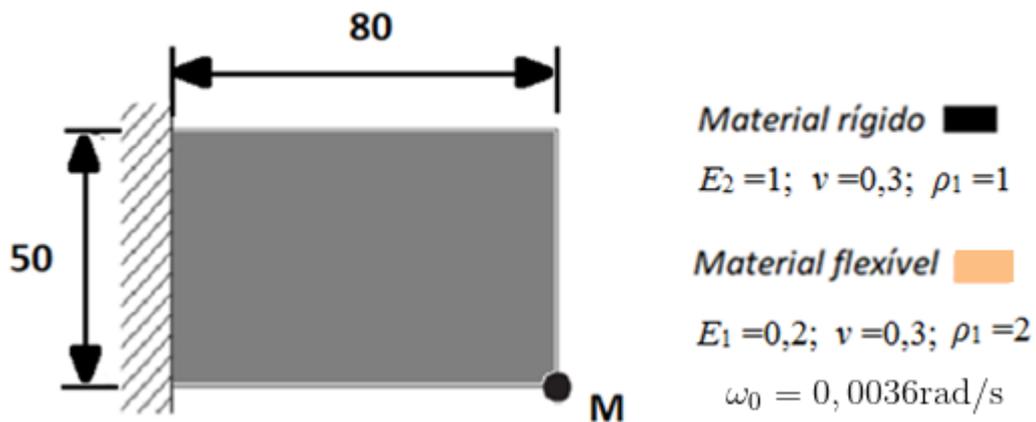


Figura 5.8 - Condições de contorno e materiais utilizados. Valor da frequência fundamental indicado por ω_0 .

Considere uma viga em balanço com uma massa concentrada na extremidade livre conforme a Figura 5.8. Novamente são utilizados os materiais de base 1 e 2 correspondentes ao material rígido e flexível, respectivamente. O objetivo é determinar a topologia da microestrutura da viga em balanço com uma massa concentrada $M=2000$ de forma a maximizar sua primeira frequência natural. A estrutura é discretizada com uma malha de 50×80 elementos, enquanto a microestrutura é composta de uma malha de 80×80 elementos. Os parâmetros BESO utilizados são fração volumétrica na microestrutura $V_f^{MI} = 50\%$, raio de filtragem $r_{\min}^{MI} = 4$, fator de penalidade $p=3$, tolerância $\tau = 0.01\%$, taxa de evolução ER^{MI} e taxa de adição máxima AR^{MI} variando de 1% a 10%. Os resultados podem ser vistos na Figura 5.9.

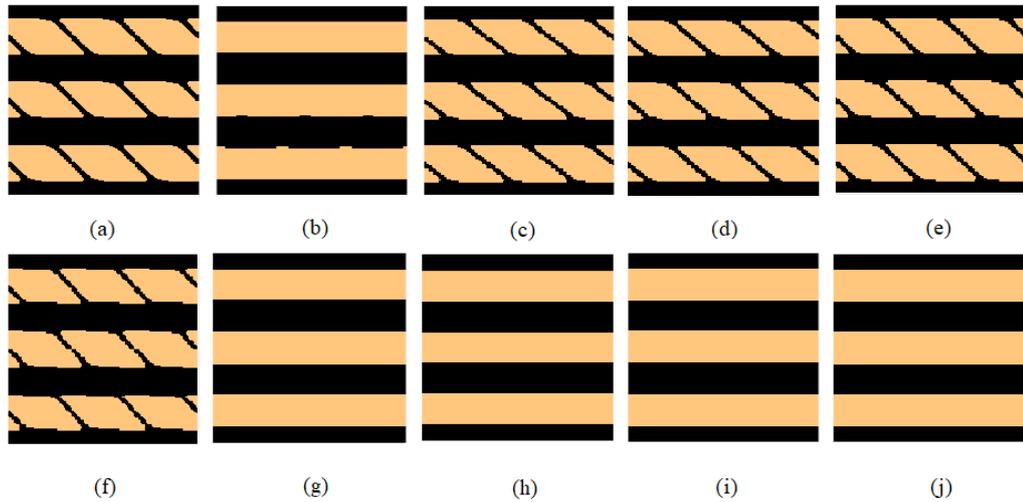


Figura 5.9 - Microestruturas obtidas para ER^{MI} variando de de (a) 1% a (j) 10%.

Vê-se que para a maior parte das taxas de evolução de 1% a 6%, a microestrutura apresenta uma certa anisotropia devido à localização da massa concentrada, enquanto para as taxas de evolução na faixa de 7% a 10% a quantidade de material retirada a cada iteração não permite que o processo de otimização convirja para a topologia mais detalhada.

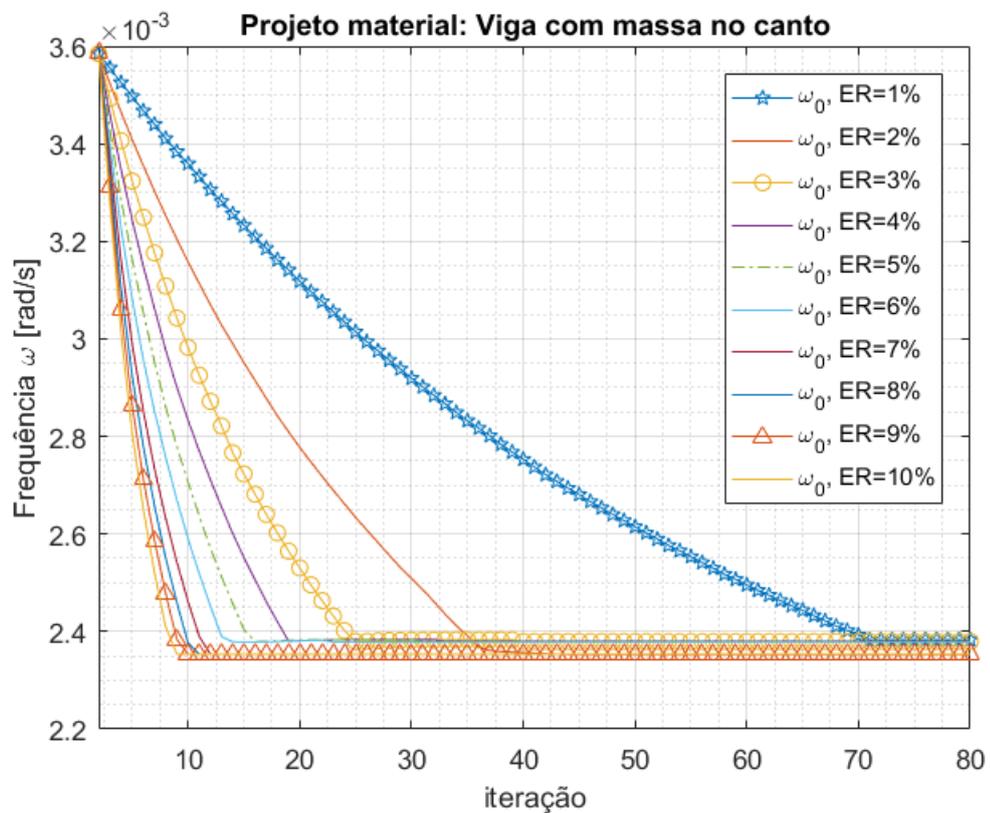


Figura 5.10 - Histórico da função objetivo para diferentes taxas de evolução ER^{MI} .

O valor da frequência fundamental, por sua vez, não varia consideravelmente dentro da faixa de 1% a 10%, conforme indica a Figura 5.10 (diferença relativa máxima de 1,3%), o que indica que variações pequenas na distribuição de material microestrutural não alteram significativamente o valor final de $\omega_0 = 0,0024 \text{ rad/s}$ obtido para a função objetivo.

5.1.2.3 Avaliação da influência das condições de contorno para projeto de materiais

O projeto de materiais é guiado pelas sensibilidades atribuídas a cada elemento do domínio microestrutural, que determinam em que regiões material é adicionado ou retirado. A informação da macroestrutura é levada em conta através da expressão para as sensibilidades, Equação 4.51, onde o vetor do primeiro modo da estrutura aparece. Portanto, é esperado que uma alteração nas condições de contorno altere o caminho evolucionário e possivelmente a microestrutura resultante.

Para verificar essa possibilidade, a viga engastada com massa concentrada da seção 5.1.2.2 foi reavaliada com a massa alocada em outra posição, conforme a Figura 5.11:

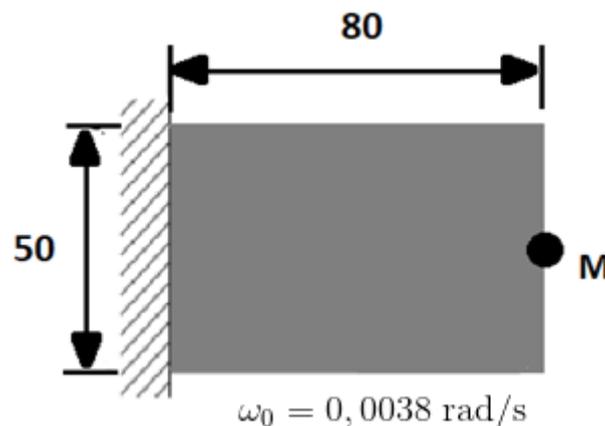


Figura 5.11 - Viga em balanço com massa concentrada no centro da extremidade livre. Valor da frequência fundamental indicado por ω_0 .

A discretização em elementos finitos para a macro e a microestrutura é a mesma do caso resolvido para a massa concentrada no canto inferior da viga. Os parâmetros BESO utilizados são taxa evolucionária $ER^{MI} = 5\%$, taxa de adição máxima $AR_{\max}^{MI} = 5\%$, fração volumétrica na microestrutura $V_f^{MI} = 50\%$, raio de filtragem $r_{\min}^{MI} = 4$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0,01\%$. A Figura 5.12 mostra o resultado da otimização.

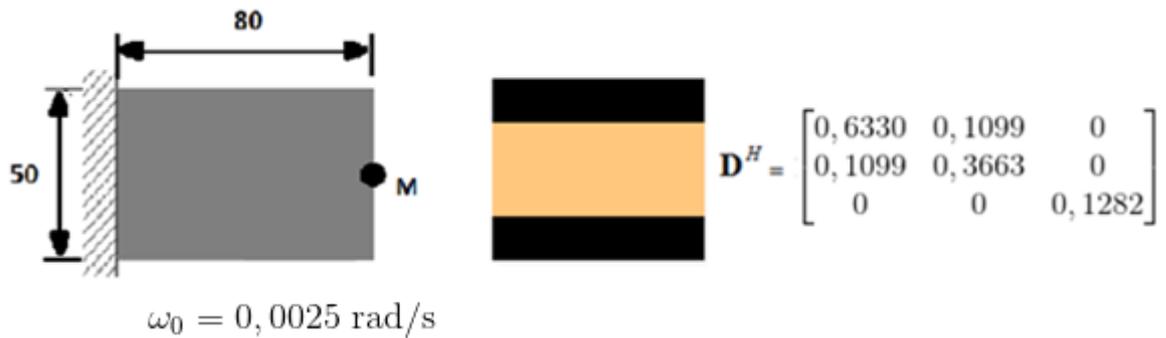


Figura 5.12 - Frequência fundamental, microestrutura e matriz constitutiva obtidas para a viga em balanço com massa concentrada no meio da extremidade livre.

A microestrutura resultante é simétrica com relação à linha central horizontal, o tensor constitutivo demonstra a ortogonalidade da microestrutura, e a função objetivo tem um leve acréscimo com relação ao valor obtido para a massa concentrada localizada no canto inferior da extremidade da viga. A Figura 5.13 apresenta o histórico evolucionário do caso resolvido.

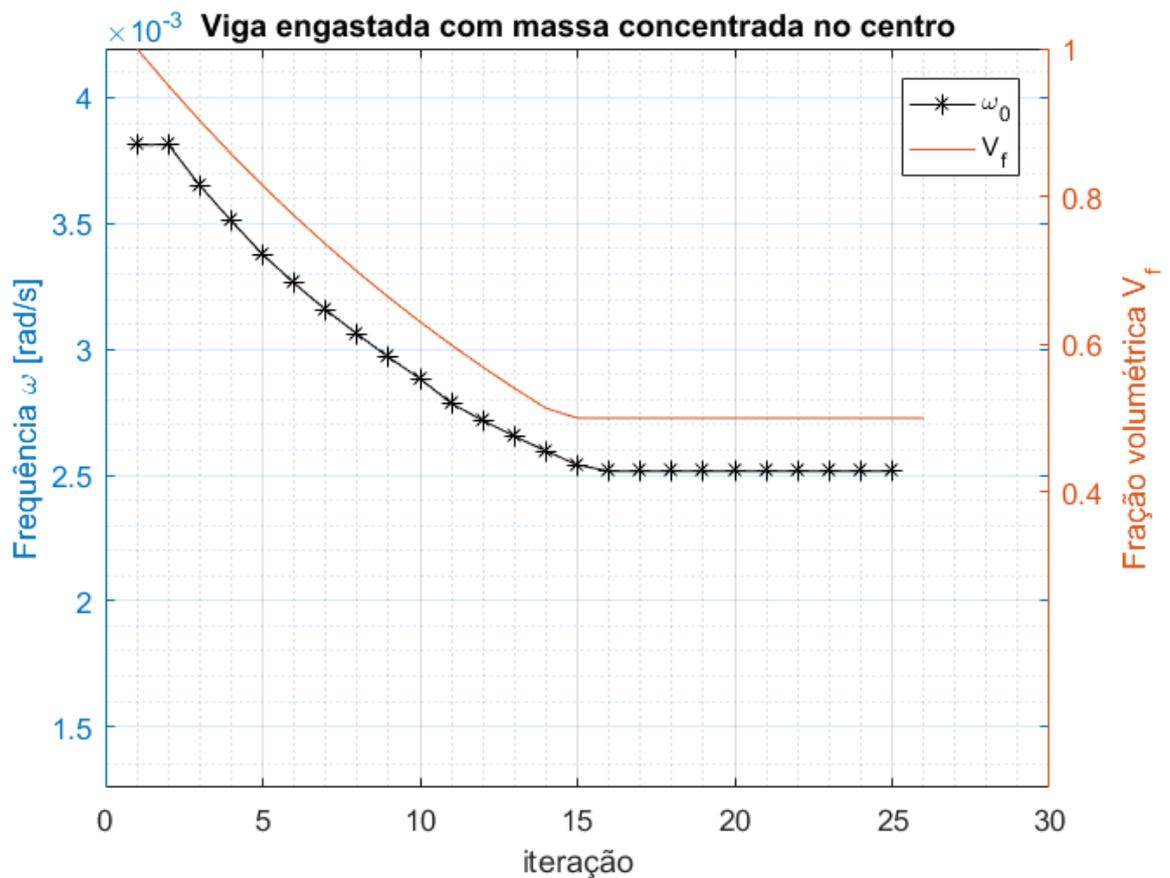


Figura 5.13 - Evolução dos valores da função objetivo e da fração volumétrica ao longo da otimização.

5.1.2.4 Materiais com microestrutura anisotrópica

Como mencionado na seção 5.2.3, o primeiro modo da macroestrutura influencia a evolução da otimização através da expressão para as sensibilidades microestruturais, Equação 4.51. No caso anterior considerado para a viga em balanço, a microestrutura resultante possui simetria horizontal, da mesma forma que a estrutura original (a exceção da massa concentrada).

Considera-se agora uma estrutura sem simetria vertical nem horizontal. Mais especificamente, a viga em L com massa concentrada $M = 2000$ de acordo com a Figura 5.14:

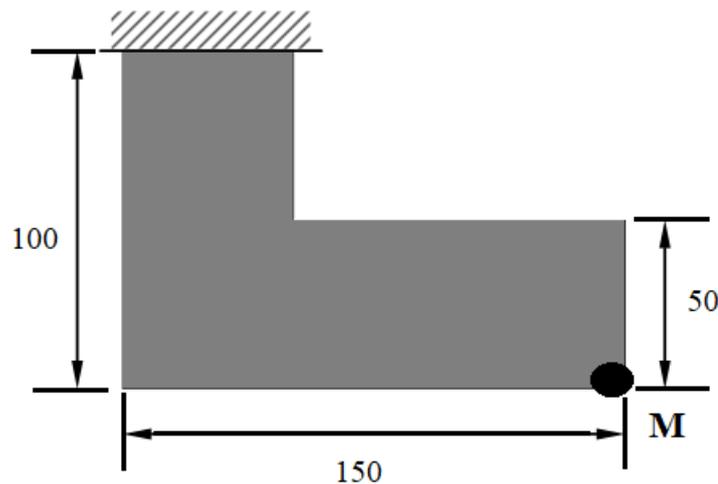


Figura 5.14 - Viga em L com massa concentrada na extremidade livre.

Assumindo que o material do qual a viga é constituída possui microestrutura associada, e que essa é composta pelos materiais 1 e 2 conforme a Tabela 5.1, conduz-se a otimização da topologia do elemento de volume representativo desse compósito. A macroestrutura é discretizada por uma malha de 60 elementos na horizontal por 40 na vertical, enquanto a microestrutura é discretizada através de uma malha de 120×120 . Os parâmetros BESO utilizados são taxa evolucionária $ER^{MI} = 1\%$, taxa de adição máxima $AR_{\max}^{MI} = 1\%$, fração volumétrica na microestrutura $V_f^{MI} = 75\%$, raio de filtragem $r_{\min}^{MI} = 2$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0,1\%$.

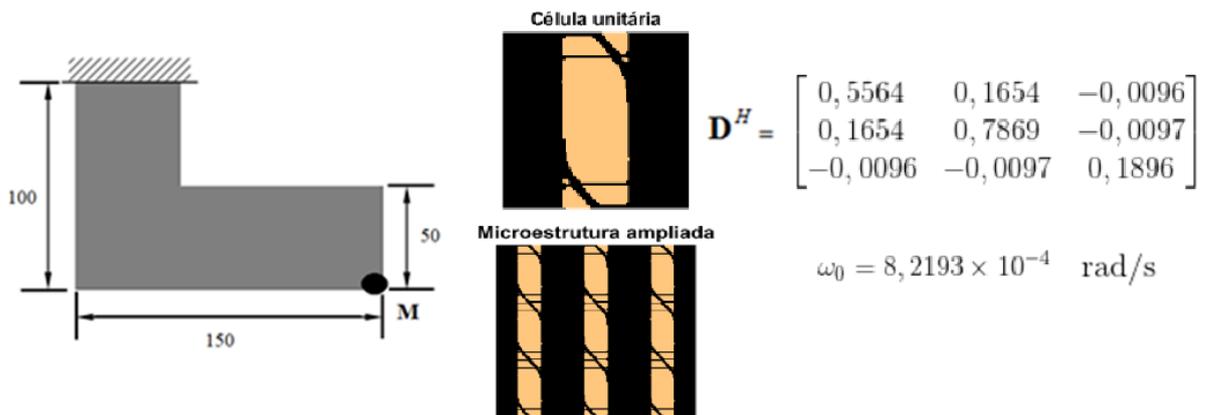


Figura 5.15 - Microestrutura e matriz constitutiva e frequência fundamental obtidas para a viga em L.

Dos resultados da Figura 5.15, é possível ver que a topologia da microestrutura não é simétrica, possuindo feixes do material mais rígido se estendendo na direção diagonal, além das faixas verticais já esperadas na direção perpendicular ao engaste. Observando a matriz constitutiva com todas as entradas diferentes de zero, se conclui que o material possui comportamento anisotrópico, conforme Malvern, 1969.

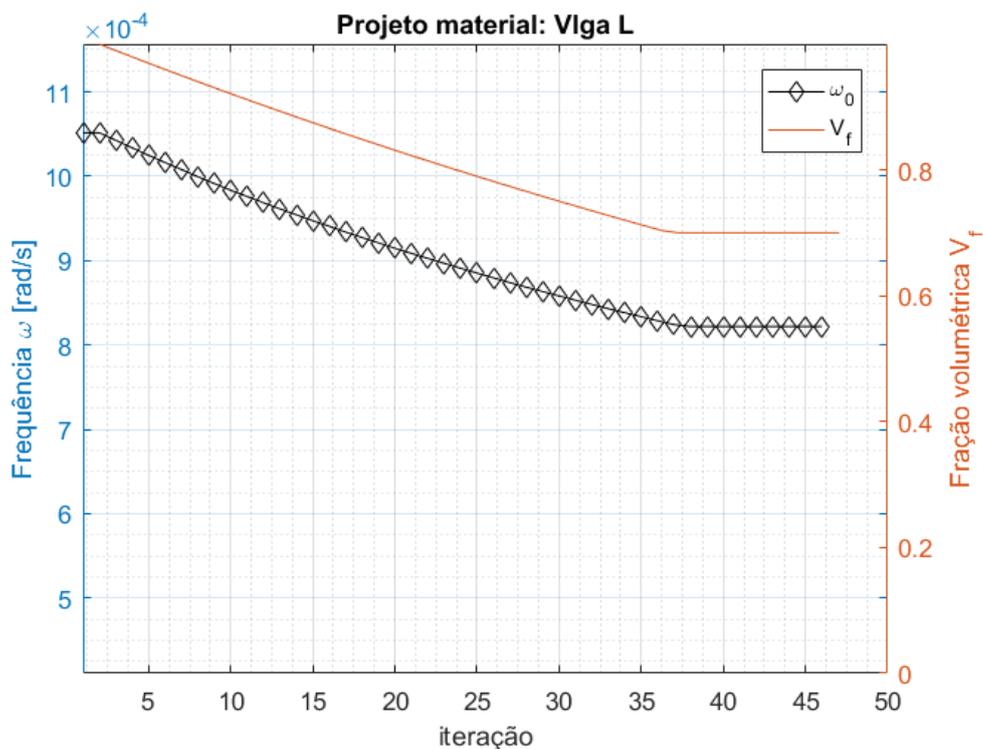


Figura 5.16 - Histórico da frequência fundamental e da fração volumétrica.

A Figura 5.16 apresenta o histórico evolucionário do processo de otimização, cujo valor da função objetivo varia suavemente até se estabilizar aproximadamente simultaneamente ao momento em que a restrição volumétrica é satisfeita.

5.1.2.5 Viga biengastada com microestrutura

O próximo exemplo considera os mesmos materiais e estrutura que na seção 5.1.1.1, embora o domínio em que a otimização ocorre é distinto. Em vez de uma viga composta de dois materiais, trabalha-se agora com uma viga de um material único e com microestrutura associada. O EVR correspondente é composto pelos mesmos materiais base 1 e 2 referentes à Tabela 5.1. O objetivo é determinar a topologia ótima dessa microestrutura, obedecendo às mesmas restrições volumétricas, de forma que a quantidade de material utilizado seja o mesmo, somente que distribuída numa escala distinta. Como anteriormente, o domínio macroestrutural é discretizado por uma malha de 80×40 elementos, enquanto a microestrutura é descrita por uma malha de 40×40 . Os parâmetros BESO também são praticamente os mesmos, mas aplicados ao domínio pertinente: taxa evolucionária $ER^{MI} = 5\%$, taxa de adição máxima $AR_{\max}^{MI} = 5\%$, fração volumétrica na microestrutura $V_f^{MI} = 50\%$, raio de filtragem $r_{\min}^{MI} = 4$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0,01\%$. Os resultados podem ser vistos na Figura 5.17:

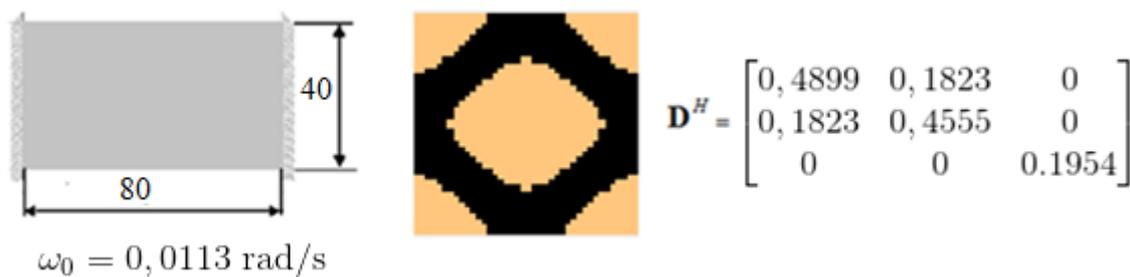


Figura 5.17 - Frequência fundamental, microestrutura e matriz constitutiva obtidas para a viga biengastada.

Dadas as simetrias horizontal e vertical presentes na viga, não é surpreendente que a microestrutura também apresente simetria. A ortogonalidade presente também é perceptível através da matriz constitutiva, cujas componentes sindicativas da interação entre a tensão

cisalhante e deformações normais são nulas. A Figura 5.18 apresenta a evolução da otimização.

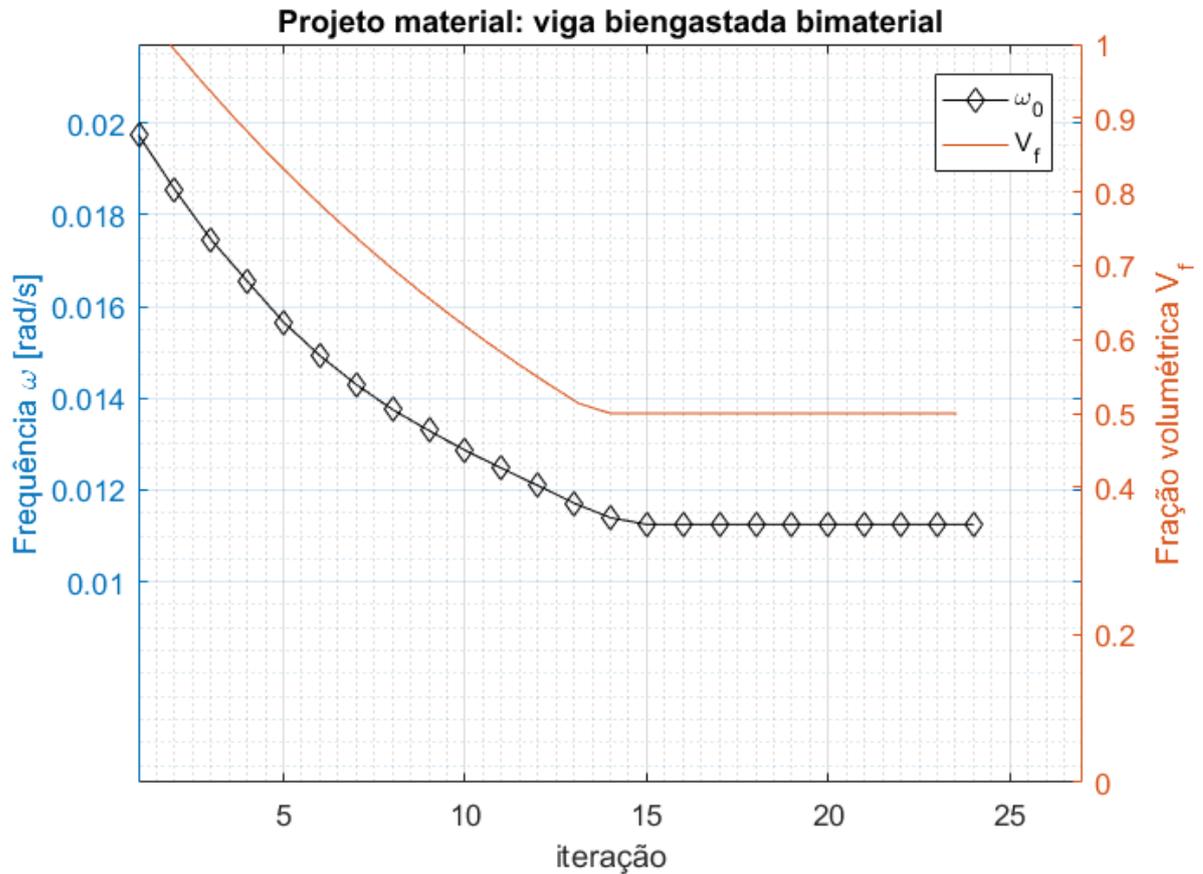


Figura 5.18 - Histórico da frequência fundamental e da fração volumétrica para a viga biengastada.

5.1.3 Projeto multiescala aplicado à maximização da frequência fundamental

O projeto multiescala consiste na otimização topológica simultânea de uma estrutura composta por um ou dois materiais e das microestruturas associadas aos materiais presentes. Da mesma forma que para o projeto de materiais na seção 5.1.2, é necessário discretizar através de uma malha de elementos finitos tanto a estrutura quanto o elemento de volume representativo de cada material presente. A sensibilidade microestrutural, Equação 4.51, leva em conta a informação modal, e a sensibilidade macroestrutural, Equação 4.35, leva em consideração as propriedades materiais calculadas através do processo de homogeneização, descrito pelas Equações 4.3 e 4.4. Adicionalmente, as restrições volumétricas, a taxa de evolução, raio de filtragem e demais parâmetros necessários para a execução do processo de

otimização devem ser definidos para ambas as escalas. A fração volumétrica de material é dada pela Equação 4.20, e o esquema de hierarquias é apresentado na Figura 5.19.

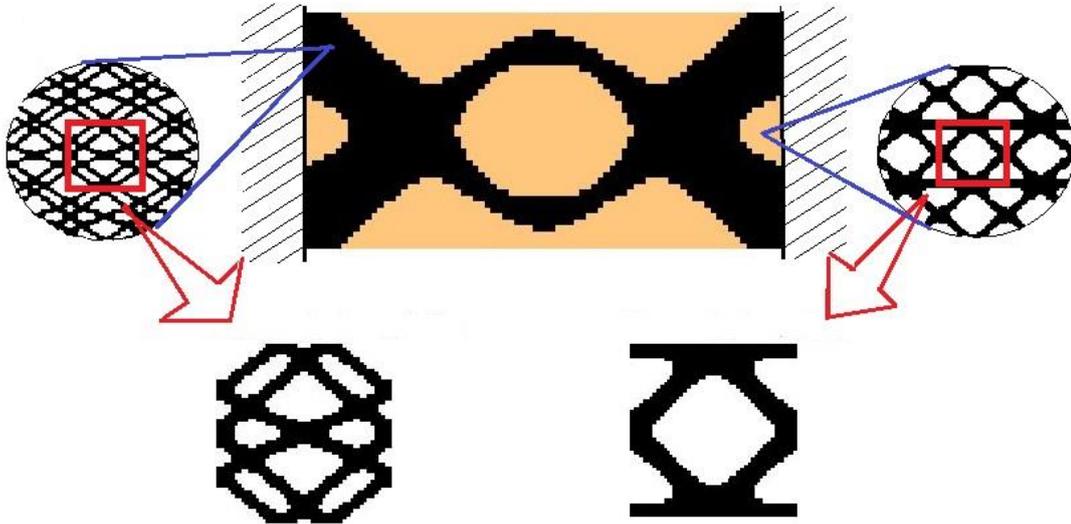


Figura 5.19 - Otimização topológica multiescala simultânea: Estrutura composta por materiais com microestruturas associadas.

Quatro materiais são utilizados para todos os exemplos dessa seção, incluindo os dois materiais das seções anteriores.

Tabela 5.2 – Propriedades dos materiais utilizados

	Módulo de Young	Coefficiente de Poisson	Densidade específica
Material 1	1	0,3	1
Material 2	0,3	0,3	1,5
Material 3	0,2	0,3	2,0
Material 4	0,05	0,3	0,8

5.1.3.1 Comparação dos esquemas de otimização na escala microestrutural, macroestrutural e multiescala

O exemplo da viga biengastada foi investigado na seção 5.1.1.1 dentro do escopo de projeto de estruturas, e na seção 5.1.2.5 no contexto de projeto de materiais. Ambos os casos consideram a distribuição dos materiais 1 e 3 da Tabela 5.2 sob a mesma restrição volumétrica em diferentes escalas, de forma que é natural considerar agora a otimização simultânea multiescala satisfazendo essa mesma restrição. Visto que a fração volumétrica

final do material sendo distribuído é dada pelo produto das frações volumétricas em cada escala, para que uma comparação coerente seja feita, adota-se para a macro e microescala frações volumétricas $V_f^{MI} = V_f^{MA} = \sqrt{V_f} = 70,71\%$ de material rígido. A macroestrutura é composta pelo material de base 3 como fase mais flexível, enquanto como fase mais rígida há um material com microestrutura compósita feita a partir dos materiais 1 e 3 conforme a Tabela 5.2.

O domínio macroestrutural é discretizado através de uma malha de 80×40 elementos, já a microestrutura é modelada com uma malha quadrada de 40×40 elementos. Os parâmetros BESO utilizados são: taxas evolucionárias $ER^{MA} = 5\%$ e $ER^{MI} = 5\%$, taxas de adição máxima $AR_{\max}^{MA} = 5\%$ e $AR_{\max}^{MI} = 5\%$, fração volumétrica na macroestrutura $V_f^{MA} = 70,71\%$, fração volumétrica na microestrutura $V_f^{MI} = 70,71\%$, raios de filtragem $r_{\min}^{MA} = r_{\min}^{MI} = 4$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0,01\%$. A Figura 5.20

Figura 5.20 mostra os resultados da otimização.

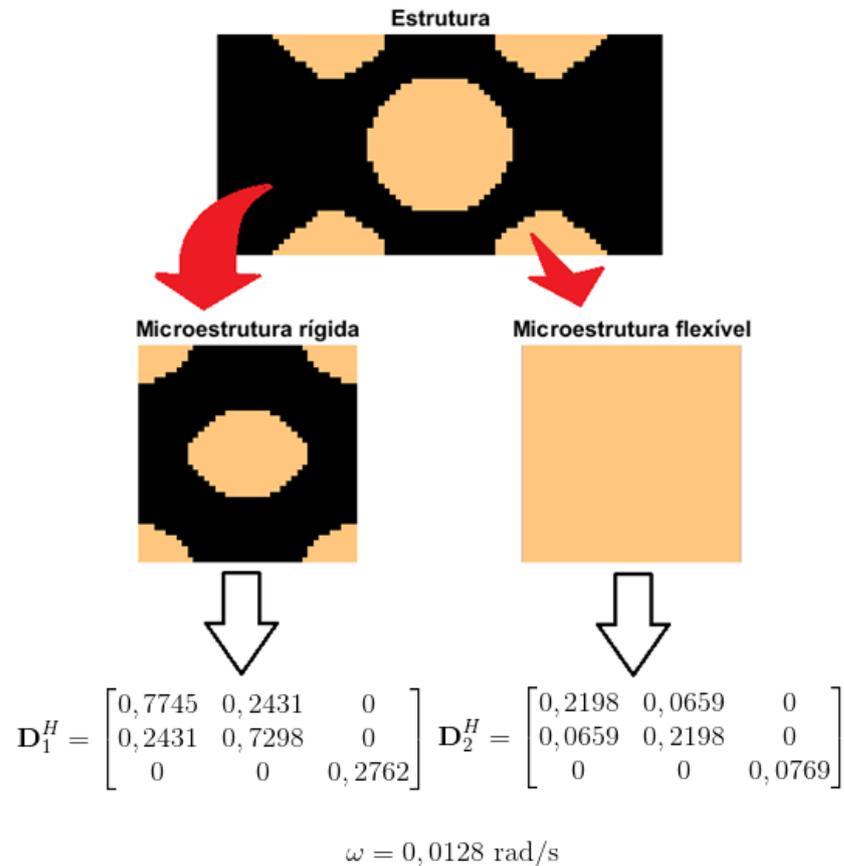


Figura 5.20 - Topologias macro e micro, matrizes constitutivas e frequência fundamental obtida.

Como $V_f = V_f^{MI} V_f^{MA}$, $V_f = 50\%$ e os exemplos anteriormente tratados para a viga biengastada utilizam os mesmos dois materiais sob a mesma restrição volumétrica, faz sentido comparar os resultados obtidos aplicando uma abordagem puramente macroestrutural, microestrutural e simultânea multiescala. A Figura 5.21 apresenta a comparação entre esses resultados.

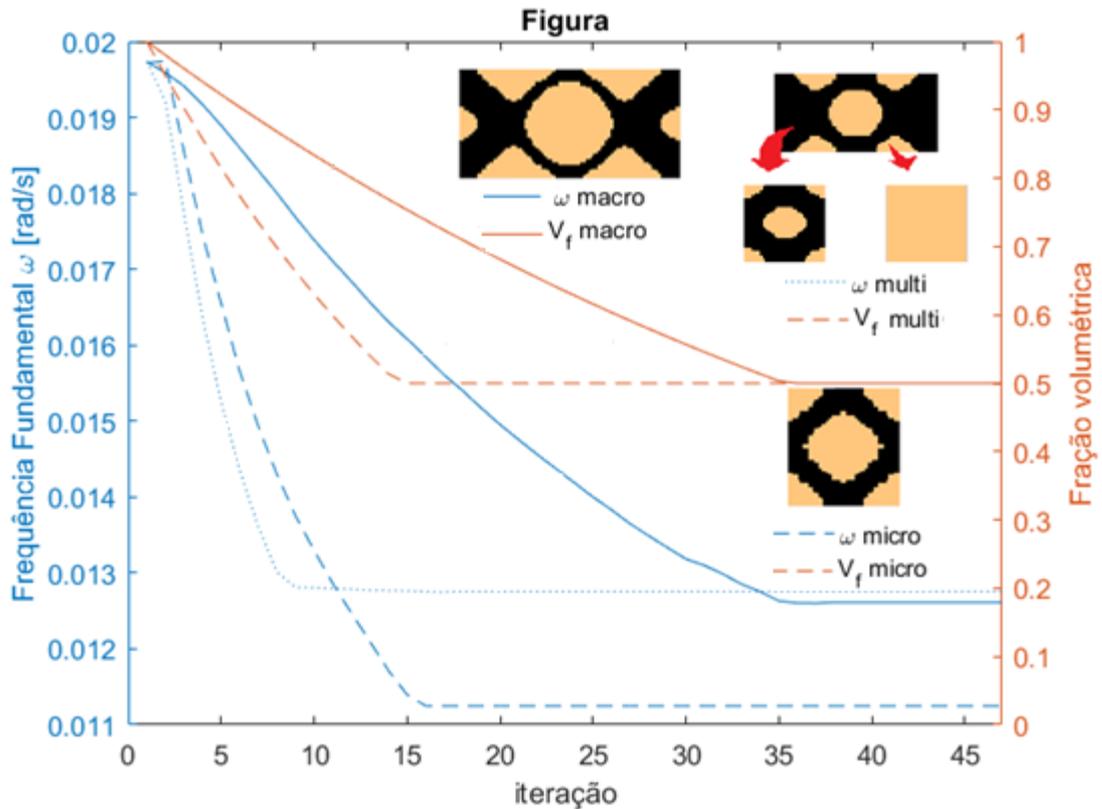


Figura 5.21 - Função objetivo (em azul) e fração volumétrica (em laranja) para os três casos considerados.

É possível observar as frequências partindo de 0,0197 rad/s e diminuindo a medida que material é redistribuído. A abordagem multiescala é a que atinge a maior frequência natural final, seguida pela abordagem macroestrutural e finalmente pela abordagem microestrutural. O resultado mostra que a distribuição material na macroestrutura tem um impacto maior que na microestrutura, já que essa última somente altera as propriedades constitutivas no nível macroestrutural. Ainda assim, percebe-se que a possibilidade de fazer a otimização em mais de uma escala simultaneamente permite a obtenção de resultados ainda melhores, visto que é possível colocar a microestrutura especializada somente nas regiões estruturalmente mais demandadas da viga, dessa forma otimizando o uso da microestrutura especializada.

5.1.3.2 Otimização simultânea multiescala para duas microestruturas

O exemplo da seção 5.1.2.2 considerou a otimização microestrutural de uma viga em balanço com massa concentrada $M=2000$ no canto inferior da extremidade livre. Resolve-se novamente esse caso, agora para dois materiais presentes na escala macroestrutural: um material compósito mais rígido com microestrutura associada, materiais de base 1 e 2, e um material compósito menos rígido cuja microestrutura é constituída pelos materiais base 3 e 4, todos referentes à Tabela 5.2. As malhas macro e microestrutural são idênticas ao exemplo do projeto microestrutural. Os parâmetros utilizados são taxas evolucionárias $ER^{MA} = 8\%$, $ER^{MI,1} = ER^{MI,2} = 8\%$, taxas de adição máxima $AR_{\max}^{MA} = 8\%$, $AR_{\max}^{MI,1} = AR_{\max}^{MI,2} = 8\%$, fração volumétrica na macroestrutura $V_f^{MA} = 50\%$, frações volumétricas nas microestruturas $V_f^{MI,1} = V_f^{MI,2} = 50\%$, raios de filtragem $r_{\min}^{MA} = r_{\min}^{MI,1} = r_{\min}^{MI,2} = 4$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0.01\%$.

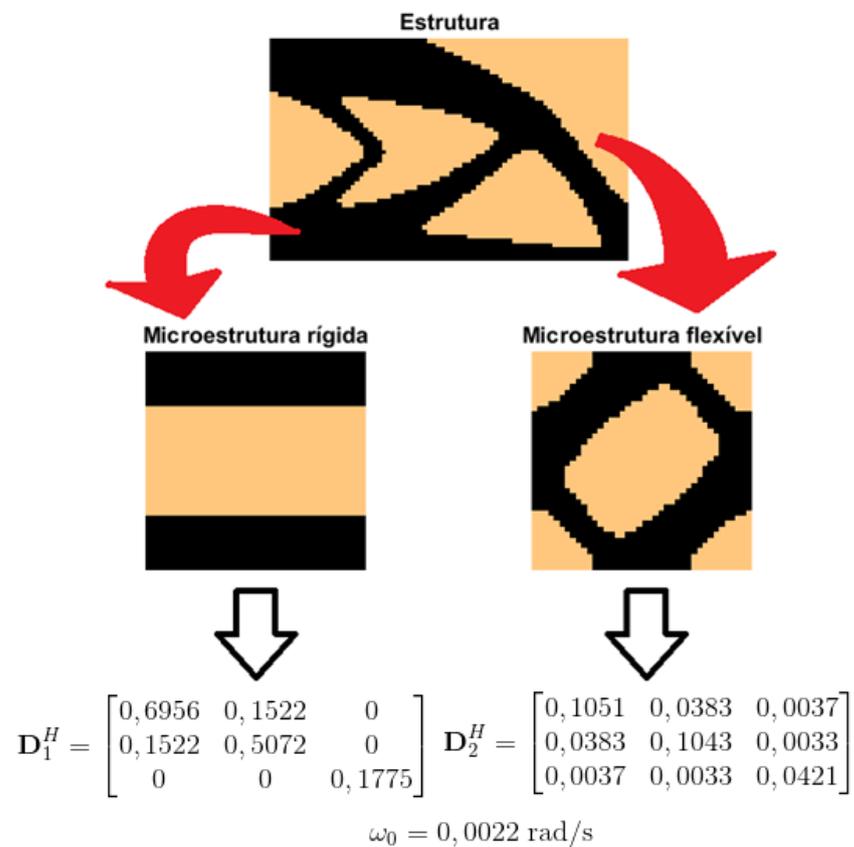


Figura 5.22 - Topologias macro e micro, matrizes constitutivas e frequência fundamental obtida.

A Figura 5.22 apresenta os resultados da otimização, e a Figura 5.23 mostra o gráfico da função objetivo ao longo do processo evolucion. A microestrutura associada ao material rígido é semelhante à obtida na seção 5.1.2.2, enquanto a microestrutura do material flexível apresenta topologia não simétrica, e conseqüentemente, comportamento anisotrópico. A macroestrutura também apresenta uma distribuição de material rígido assimétrica com relação a linha horizontal que passa sobre seu centroide, o que está de acordo com a localização da massa concentrada.

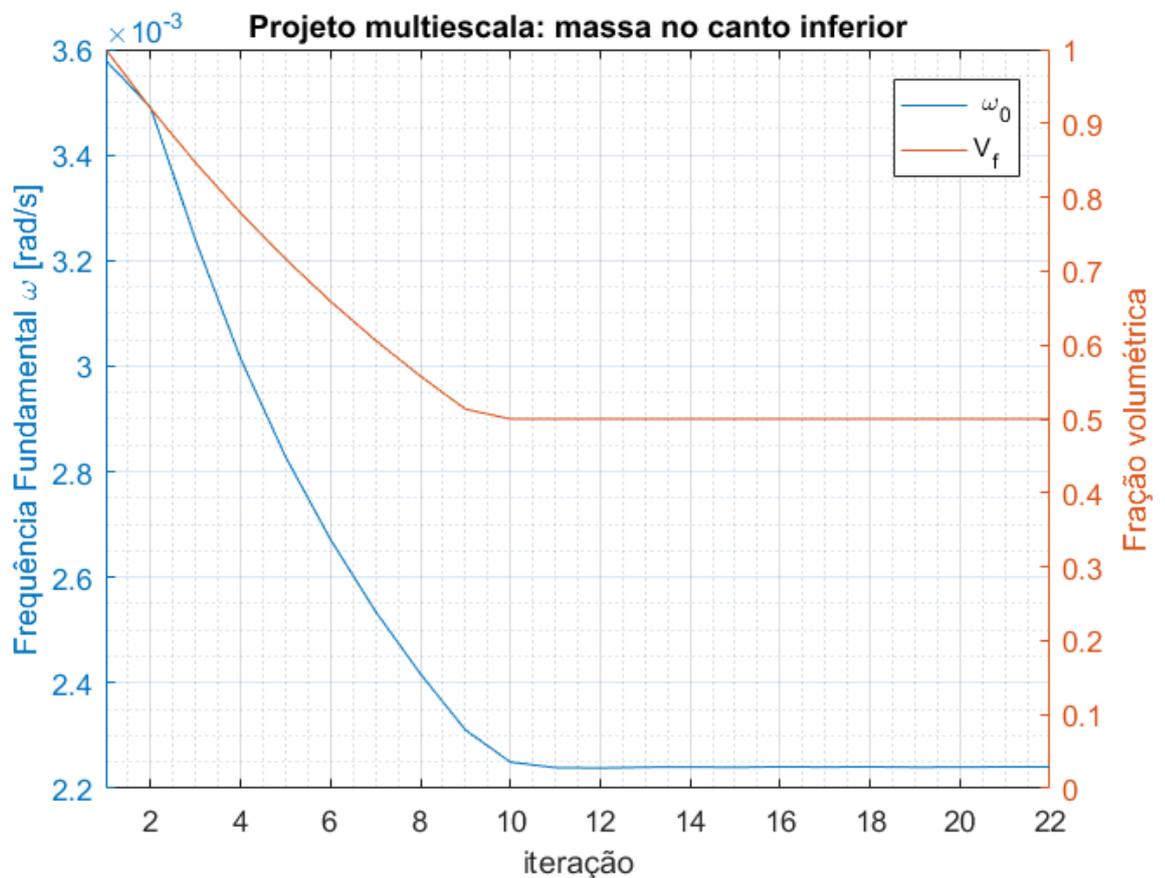


Figura 5.23 - Histórico da frequência fundamental e da fração volumétrica ao longo do processo de otimização.

5.1.3.3 Influência das condições de contorno para otimização simultânea multiescala

Resolve-se agora o exemplo da seção anterior com a massa concentrada no centro da extremidade livre, conforme exposto na Figura 5.11. Os domínios modelados, materiais utilizados e malhas de elementos finitos são os mesmos que na seção 5.1.3.2, assim como os

parâmetros BESO de otimização: taxas evolucionárias $ER^{MA} = 8\%$, $ER^{MI,1} = ER^{MI,2} = 8\%$, taxas de adição máxima $AR_{\max}^{MA} = 8\%$, $AR_{\max}^{MI,1} = AR_{\max}^{MI,2} = 8\%$, fração volumétrica na macroestrutura $V_f^{MA} = 50\%$, frações volumétricas nas microestruturas $V_f^{MI,1} = V_f^{MI,2} = 50\%$, raios de filtragem $r_{\min}^{MA} = r_{\min}^{MI,1} = r_{\min}^{MI,2} = 4$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0,01\%$. A Figura 5.24 contém os resultados da otimização multiescala.

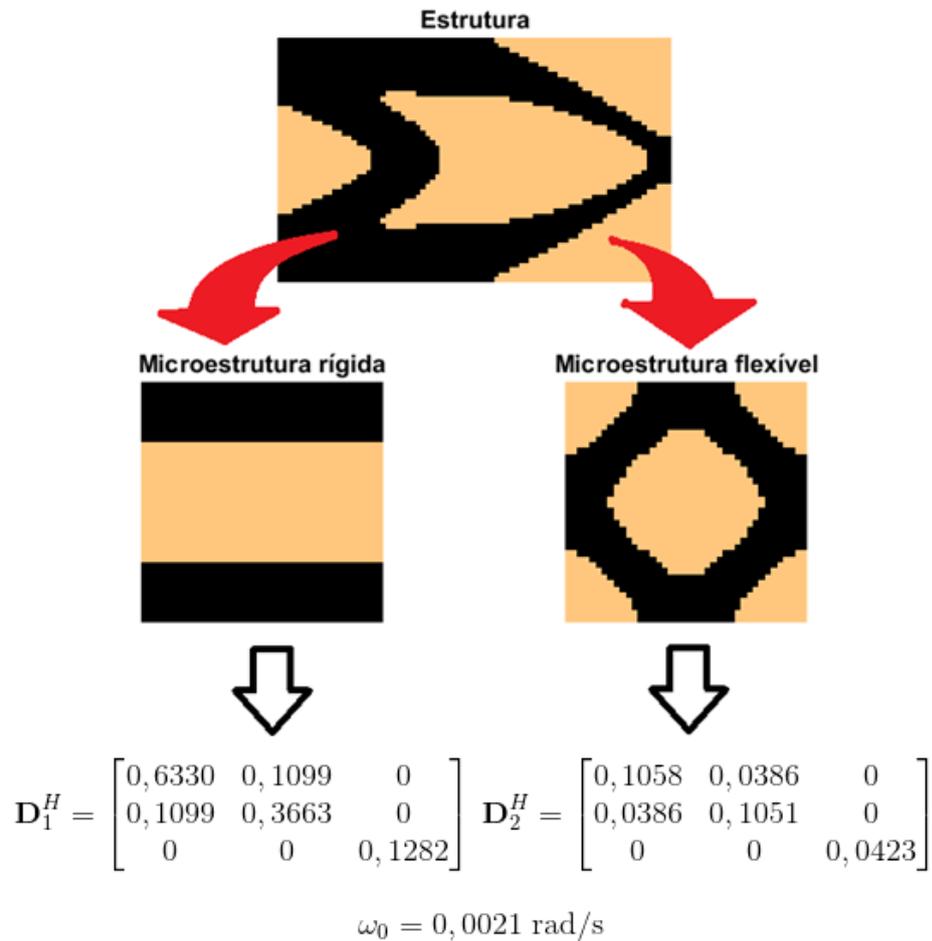


Figura 5.24 - Topologias macro e microescalares, matrizes constitutivas e frequência fundamental obtida.

Com relação ao resultado da seção anterior, é perceptível a perda de anisotropia na fase flexível e na macroestrutura, o que ratifica a conclusão obtida na comparação realizada na seção 5.1.2.3 de que a distribuição de material na macroescala é mais sensível às mudanças nas condições de contorno, embora nesse caso a microestrutura da fase flexível também tenha seguido a ortotropia/anisotropia da estrutura. A Figura 5.25 apresenta o histórico do processo de otimização, que estabiliza após poucas iterações sem variações bruscas.

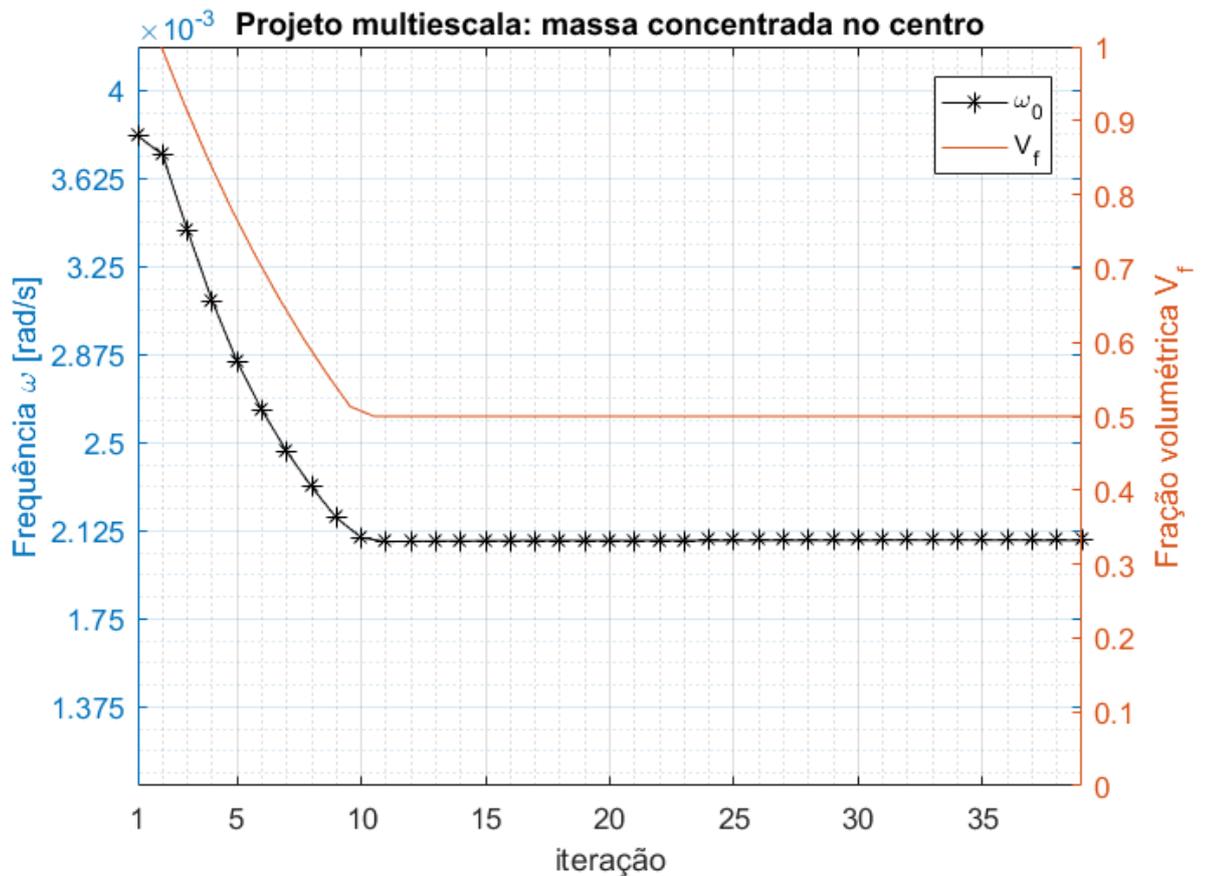


Figura 5.25 - Função objetivo e fração volumétrica em função da iteração.

5.2 Otimização para minimização da resposta no domínio da frequência

O processo de otimização para a minimização da resposta no domínio da frequência consiste em determinar a distribuição de materiais obedecendo a restrições volumétricas de forma a minimizar a magnitude da k -ésima componente da resposta de uma estrutura sujeita a excitação por uma certa força harmônica. Trabalha-se com dois tipos de excitação: tanto forças harmônicas aplicadas numa frequência específica, quanto forças que atuam numa faixa de frequências. Nesse último caso, considera-se a média aritmética de um certo número de frequências pontuais dentro dessa faixa durante o cálculo das sensibilidades e da função objetivo. Assim como no caso de maximização da frequência fundamental, a modelagem de elementos finitos é realizada utilizando elementos bilineares de quatro nós. Finalmente, para todos os exemplos considerados dois materiais são utilizados conforme a Tabela 5.3.

Tabela 5.3 –Materiais utilizados para otimização da resposta em frequência

	Módulo de Young [Gpa]	Coefficiente de Poisson	Densidade [kg/m ³]
Material 1	210	0,3	7800
Material 2	70	0,3	2800

5.2.1 Projeto estrutural aplicado à minimização da resposta no domínio da frequência

Nesta seção são resolvidos exemplos de otimização topológica considerando somente a escala macroestrutural para estruturas compostas por um ou dois materiais. O algoritmo para essa abordagem é validado através da comparação com resultados da literatura, e o modelo bimatricial de interpolação é aplicado a um caso de projeto estrutural.

5.2.1.1 Validação do esquema de otimização macroestrutural

Com o objetivo de validar o algoritmo de otimização topológica responsável pelo processo de otimização da macroescala se considera um problema resolvido por Vicente et al., 2015. O domínio estrutural e a amplitude da força harmônica aplicada são mostrados na Figura 5.26. Considera-se uma força harmônica na faixa de frequências de 1 Hz a 3 Hz. Dez frequências pontuais equidistantes dentro desse intervalo são utilizadas.

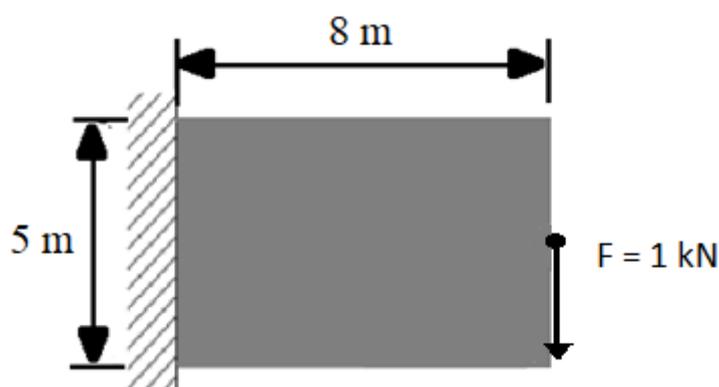


Figura 5.26 - Viga em balanço com força pontual no centro da extremidade livre.

O objetivo proposto é projetar a estrutura tal que a amplitude do deslocamento vertical no ponto onde a força é aplicada seja minimizado. As propriedades constitutivas e densidade correspondem ao material 1 conforme a primeira linha da Tabela 5.3, enquanto o domínio estrutural é discretizado por uma malha de 192×120 elementos. Os parâmetros BESO

utilizados são: taxa evolucionária $ER^{MA} = 1,5\%$, taxa de adição máxima $AR_{\max}^{MA} = 2\%$, fração volumétrica $V_f^{MA} = 20\%$, raio de filtragem $r_{\min}^{MA} = 0,3\text{ m}$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0,1\%$. Aqui o raio de filtragem é dado em metros. A comparação dos resultados pode ser vista na Figura 5.27. Para estruturas de um único material, emprega-se um esquema de cores indicando a sensibilidade elementar, dos valores mais baixos (em azul), aos mais altos (em vermelho).

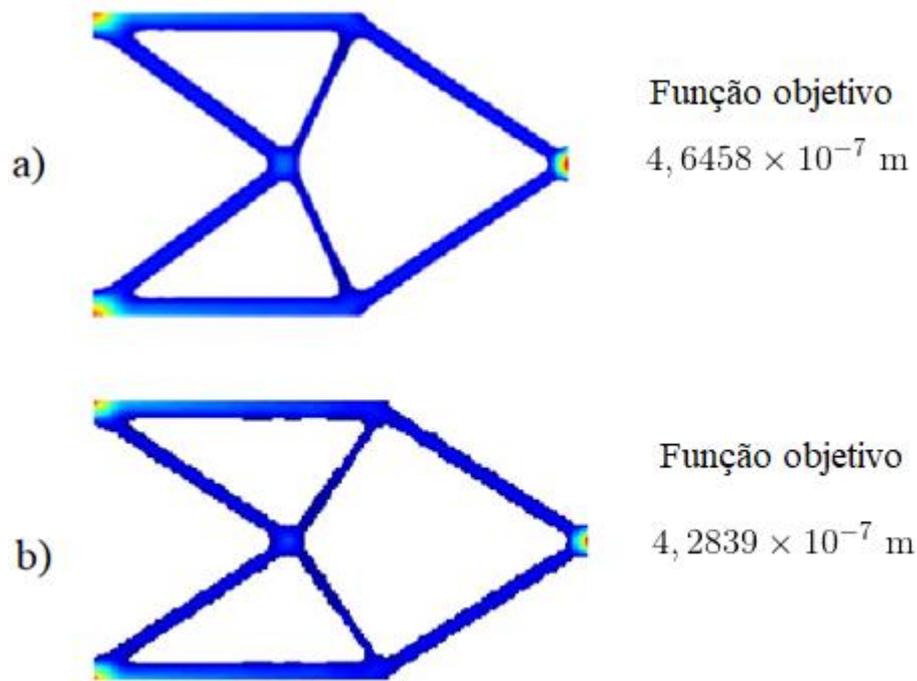


Figura 5.27 - Resultados obtidos: Por (a) Vicente et al., 2015; (b) Este trabalho.

É possível ver que a estrutura obtida é similar em ambos os casos, e que a diferença relativa entre as funções objetivos é de 8%. Dessa forma, verifica-se que o módulo responsável pela otimização macroestrutural foi bem sucedido em reproduzir o exemplo escolhido, a parte de eventuais erros advindos da discretização ou do processo de solução numérica da equação de estado. A Figura 5.28 apresenta o histórico evolucionário, onde a função objetivo converge suavemente durante a maior parte do processo de otimização. A Figura 5.29, por sua vez, apresenta as funções de resposta em frequência (FRF) para a estrutura inicial e otimizada.

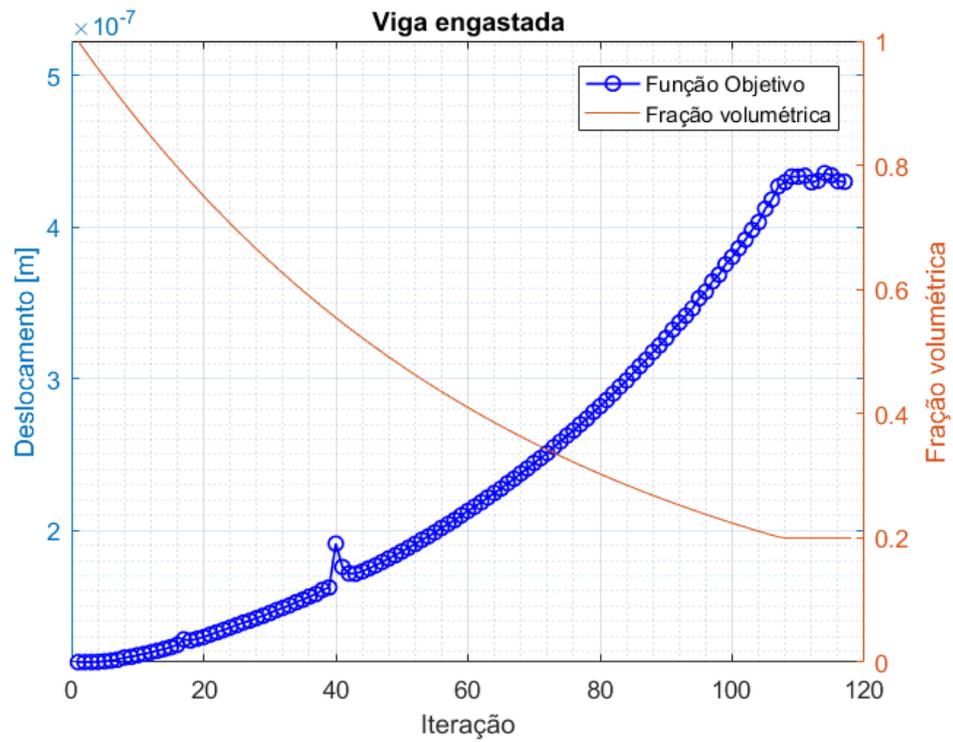


Figura 5.28 - Função objetivo e fração volumétrica em função da iteração.

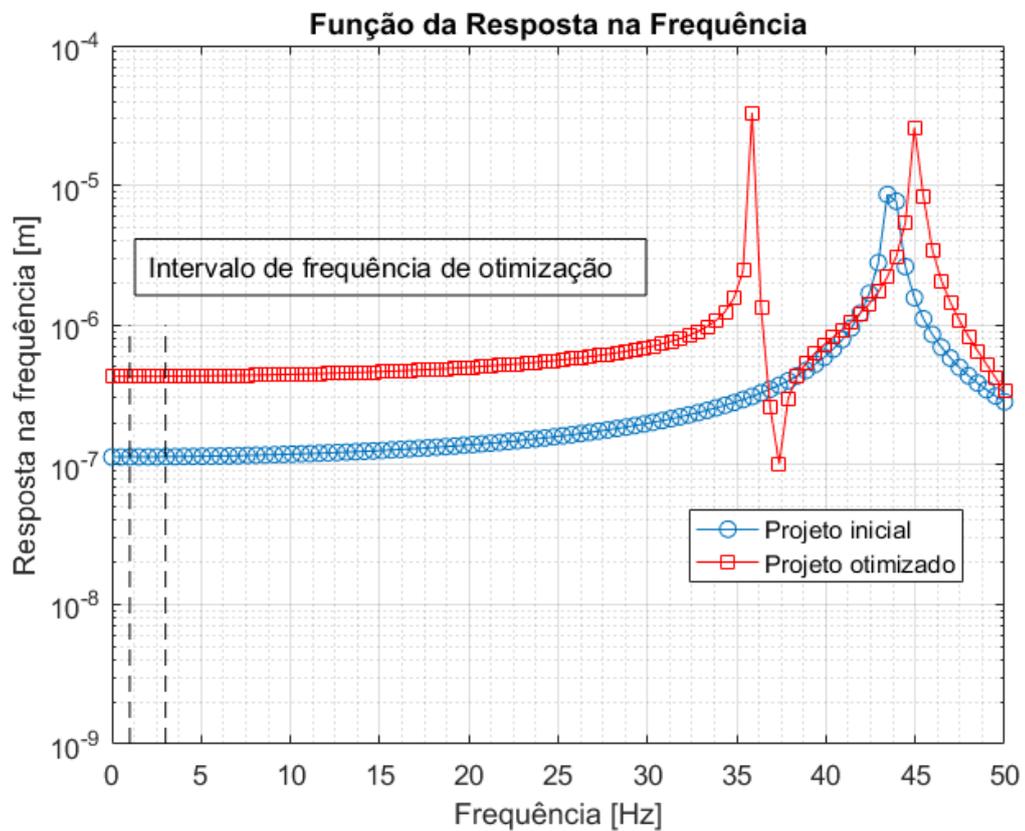


Figura 5.29 - Funções de resposta em frequência original e após a otimização.

5.2.1.2 Otimização de uma viga bimaterial

Neste trabalho propôs-se estender o esquema de otimização multiescala para estruturas e microestruturas celulares de forma a modelar também estruturas com dois materiais, além de microestruturas de compósitos com dois materiais presentes. O primeiro passo necessário nessa implementação é integrar o novo modelo material ao módulo do código que resolve o problema de elementos finitos da equação de estado, além dos trechos responsáveis pelo cálculo da sensibilidade na macroescala.

Feito isso, resolve-se um caso representativo conforme indicado na Figura 5.30.

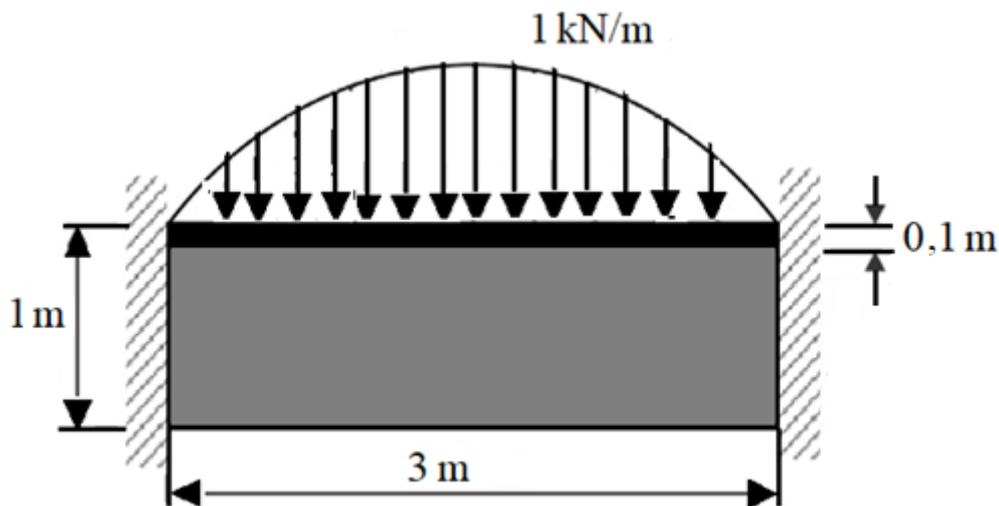


Figura 5.30 - Viga biengastada com força parabólica distribuída.

Uma viga biengastada está sujeita a uma força distribuída parabólica harmônica, cuja intensidade é de 1 kN/m na região central e zero em seus extremos. A faixa de atuação dessa força é no intervalo de 300 Hz a 400 Hz, discretizado em 10 pontos equidistantes. A região superficial onde a carga atua, de 0,1 m de espessura, é definida como fixa durante a otimização. Deseja-se minimizar o deslocamento vertical através da redistribuição de material guiada pelo processo de otimização topológica BESO. O domínio estrutural é discretizado por uma malha de 360×120 elementos. Propõe-se fazer a otimização a partir dos dois materiais presentes na Tabela 5.3. Considera-se os parâmetros de otimização: taxa evolucionária $ER^{MA} = 1\%$, taxa de adição máxima $AR_{\max}^{MA} = 2\%$, fração volumétrica $V_f^{MA} = 60\%$, raio de filtragem $r_{\min}^{MA} = 0,2 \text{ m}$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0,1\%$. A fração volumétrica, que diz respeito ao espaço ocupado pelo material mais rígido, é imposta como 60%, enquanto

o processo de otimização inicia com 70% do domínio ocupado, diferentemente dos casos anteriores onde a fração volumétrica inicial é de 100%.

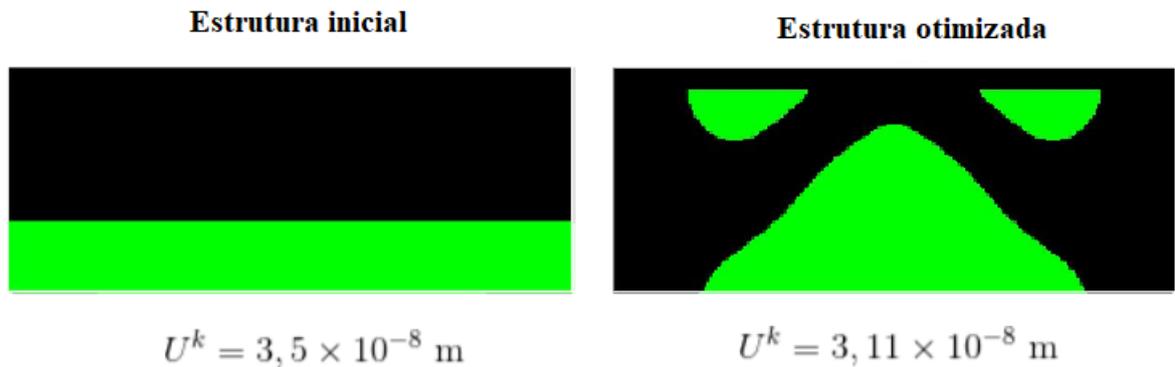


Figura 5.31 - Topologia e função objetivo otimizadas. O material rígido é representado em preto, enquanto o material flexível aparece em verde.

Da Figura 5.31 tem-se a topologia resultante e o valor da função objetivo obtida. A fase rígida com o material mais resistente lembra uma ponte, o que condiz com o tipo de suporte e carregamento desse exemplo. A Figura 5.32 mostra as FRFs de 0 Hz a 500 Hz, e comprova que a estrutura otimizada apresenta redução no deslocamento devido a excitações forçadas dentro da faixa de interesse. De forma geral, verifica-se que a implementação do modelo de interpolação bimaterial foi bem sucedida. A evolução da função objetivo pode ser consultada na Figura 5.33.

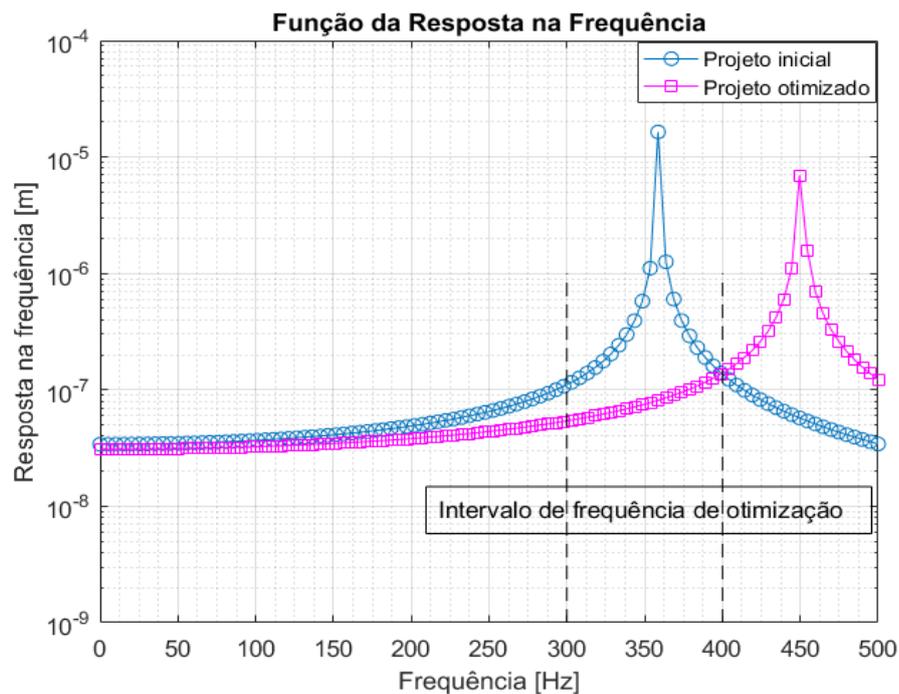


Figura 5.32 - Resposta em frequência para a estrutura original e otimizada.

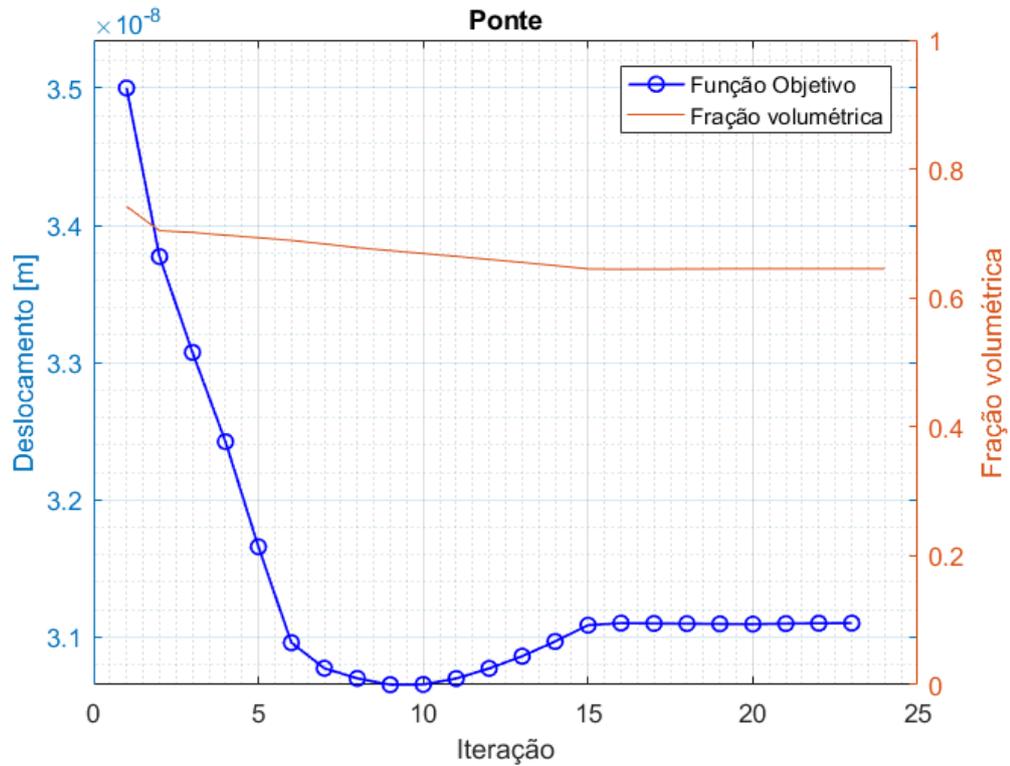


Figura 5.33 - Histórico da resposta em frequência e da fração volumétrica ao longo do processo de otimização.

5.2.2 Projeto material aplicado à minimização da resposta no domínio da frequência

Nesta seção são resolvidos exemplos de otimização topológica considerando somente a escala microestrutural como domínio de projeto. O algoritmo para essa abordagem é validado através de comparação com resultados da literatura, e analisa-se a influência da topologia inicial sobre a microestrutura obtida. O modelo bimaterial de interpolação também é aplicado a um caso de projeto material.

5.2.2.1 Dependência da convergência da microestrutura com relação à topologia inicial

Novamente é resolvido o exemplo da seção 5.2.1.2, agora considerando que 60% do volume da macroestrutura fixa é ocupado por um único material com estrutura associada, e os 40% restantes são espaço vazio. Essa configuração é usada de forma a possibilitar a comparação dos resultados desse trabalho com aqueles obtidos por Vicente et al., 2015. Como é necessário modelar a macroestrutura, discretiza-se esse domínio com uma malha de 60×20

elementos, enquanto o elemento de volume representativo da microestrutura é modelado através de uma malha de 100×100 elementos. A microestrutura é celular, sendo composta somente pelo material 1 da Tabela 5.3 e por espaços vazios. Os parâmetros BESO utilizados são: taxa evolucionária $ER^{MI} = 1\%$, taxa de adição máxima $AR_{\max}^{MI} = 2\%$, fração volumétrica $V_f^{MI} = 50\%$, raio de filtragem $r_{\min}^{MI} = 0,12$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0,1\%$. Na Figura 5.34 é mostrada a comparação entre os resultados.

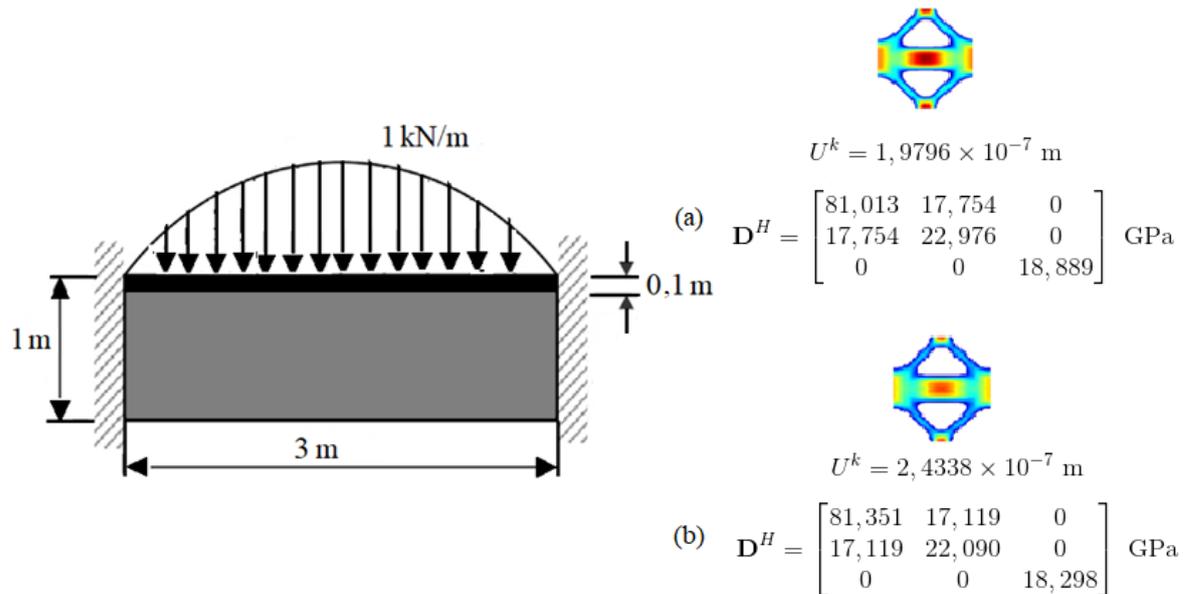


Figura 5.34 - Resultados obtidos por: (a) Vicente et al., 2015; (b) Nesse trabalho.

É possível observar que tanto a topologia microestrutural obtida quanto a matriz constitutiva homogenizada estão de acordo com o trabalho referenciado, enquanto o valor da função objetivo apresenta uma discrepância de 20% no valor da função objetivo. Como o material considerado é o mesmo, a diferença necessariamente vem da resolução do problema (4.24), o que pode estar relacionado tanto à abordagem de discretização quanto ao comportamento contínuo da estrutura com relação à frequência de excitação. A Figura 5.35 mostra a evolução da função objetivo, que transcorre suavemente e apresenta maior variação durante as primeiras 20 iterações, enquanto é possível comprovar que a fração volumétrica foi mantida constante durante a otimização.

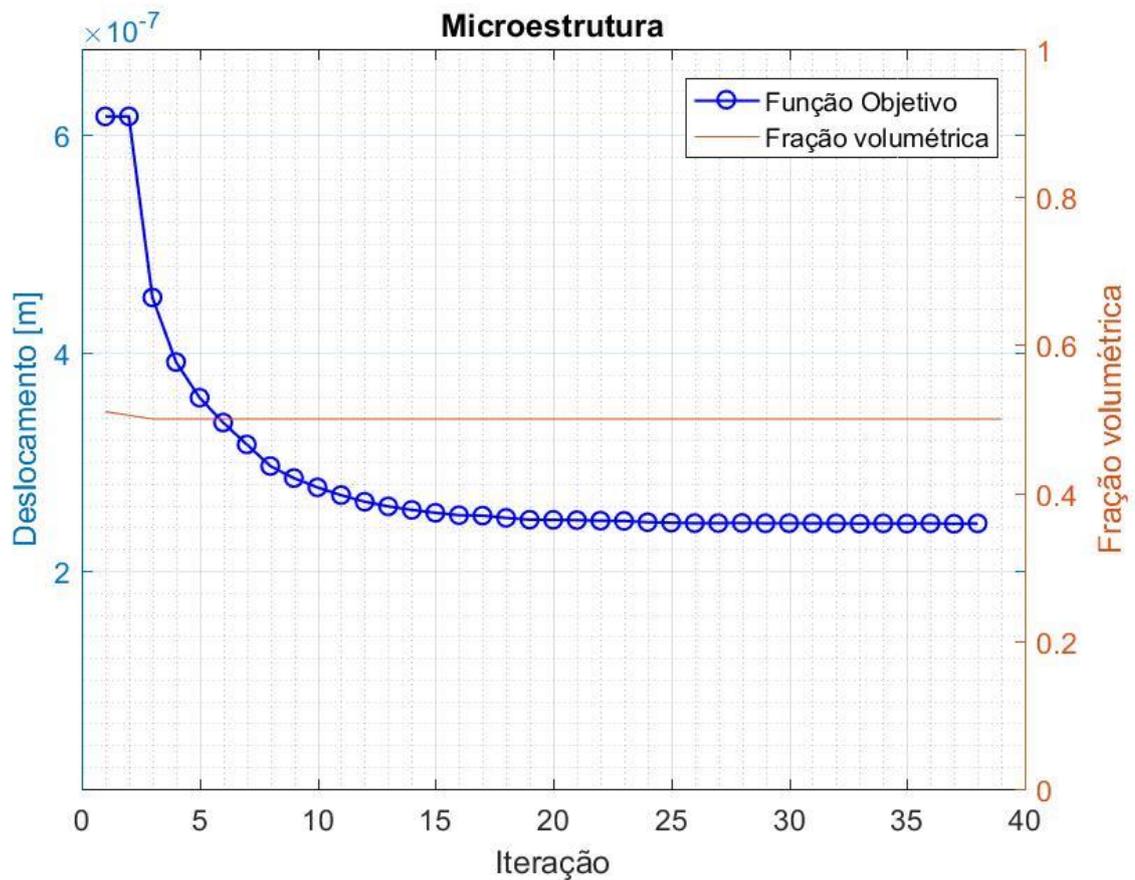


Figura 5.35 - Resposta em frequência e fração volumétrica em função da iteração.

5.2.2.2 Influência da topologia inicial no projeto material de microestrutura compósita

Retoma-se o problema considerado na seção 5.2.1.1, agora para uma viga constituída de um material cuja microestrutura é formada a partir dos dois materiais base descritos na Tabela 5.3. O domínio macroestrutural, discretizado com uma malha de 16×10 , é tomado como fixo, e o domínio de projeto microestrutural é discretizado por uma malha de 100×100 elementos. A influência da topologia inicial é estudada tomando-se quatro microestruturas com topologias e frações volumétricas distintas sendo otimizadas sob a mesma restrição volumétrica final. Os parâmetros BESO utilizados são: taxa evolucionária $ER^{MI} = 1\%$, taxa de adição máxima $AR_{\max}^{MI} = 2\%$, fração volumétrica $V_f^{MI} = 50\%$, raio de filtragem $r_{\min}^{MI} = 0,1$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0,1\%$. Os resultados podem ser conferidos na Figura 5.36.

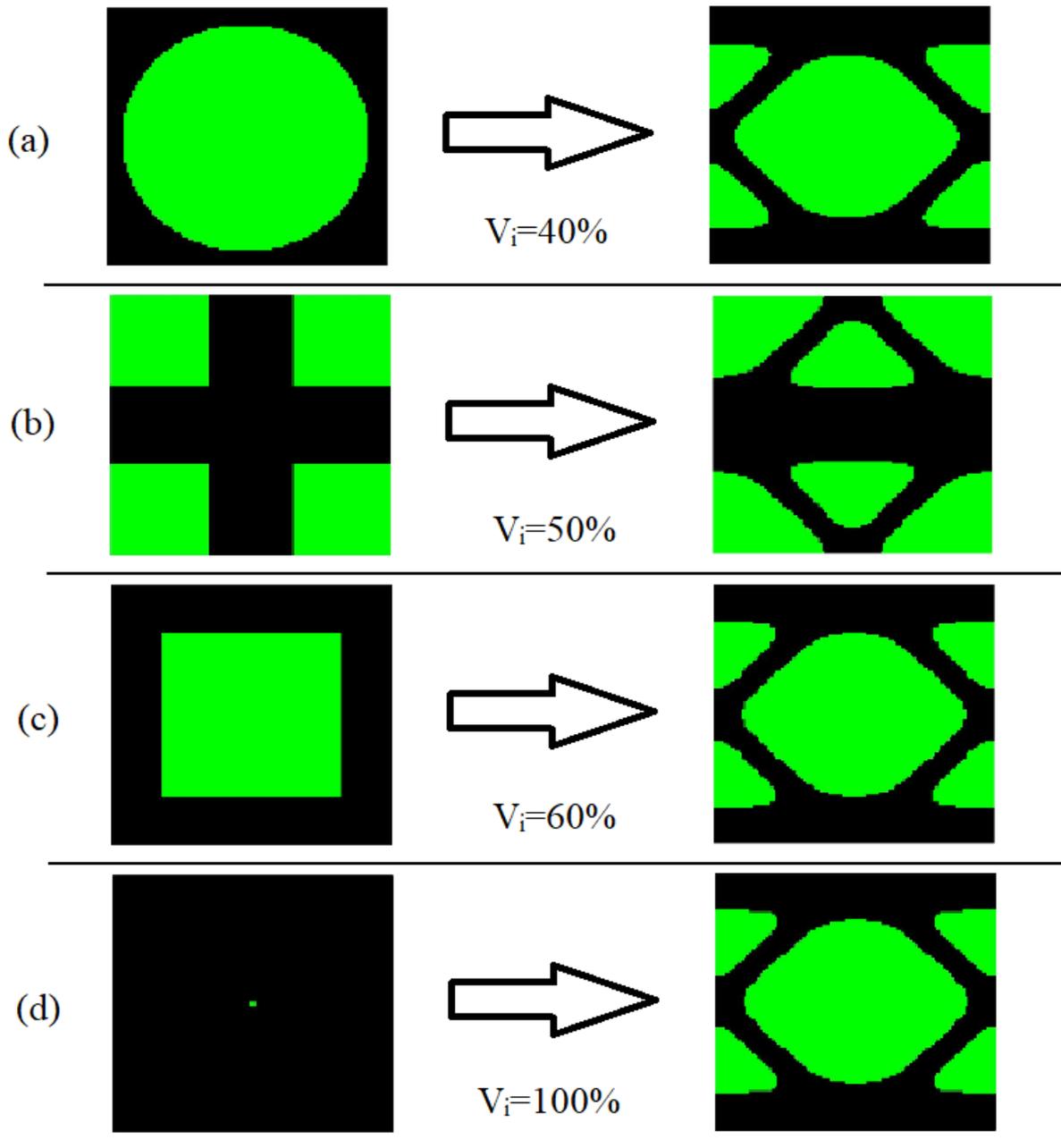


Figura 5.36 - Otimização da microestrutura: (a) Topologia inicial; (b) Resultado final.

Vê-se que, independentemente da topologia inicial, o algoritmo é bem sucedido em convergir para um resultado único. O resultado do item (b), aparentemente distinto, pode ser melhor compreendido através de uma comparação com o item (a), que permite visualizar os elementos representativos distribuídos ao longo da microestrutura.

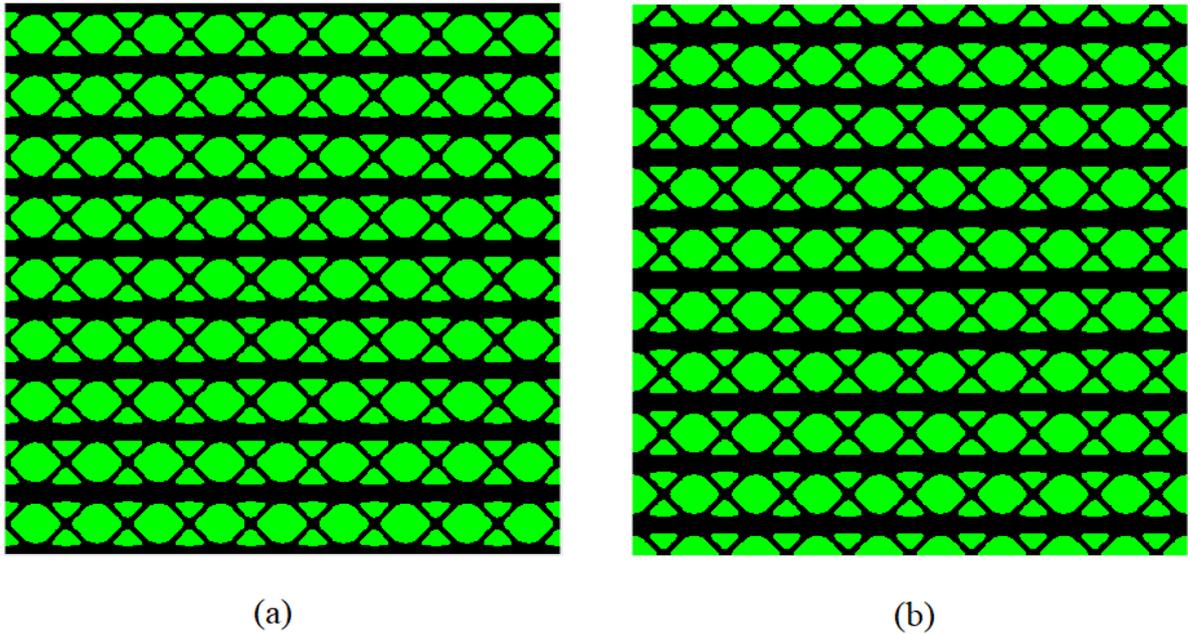


Figura 5.37 - Microestruturas obtidas para topologia inicial com frações volumétricas de: (a) 40%; (b) 50%. Ambas as figuras contém 9x9 EVRs.

A Figura 5.37 revela que conduzir a otimização a partir da microestrutura com a parte rígida inicialmente em forma de cruz leva ao mesmo elemento de volume representativo com a referência deslocada. Por fim, a Figura 5.38 mostra a evolução da função objetivo para as diferentes topologias iniciais, onde é possível ver que todas convergem para o mesmo valor de $3,75 \times 10^{-7}$ m para a função objetivo. Em especial, para o processo de otimização que inicia com uma fração volumétrica de 100%, a função objetivo passa por um pico devido à quebra de elementos estruturais responsáveis por transmitir esforços na direção vertical. Com o objetivo de ilustrar a variação da FRF, a Figura 5.39 mostra as funções de resposta das estruturas inicial e otimizada para o caso (b) da Figura 5.36.

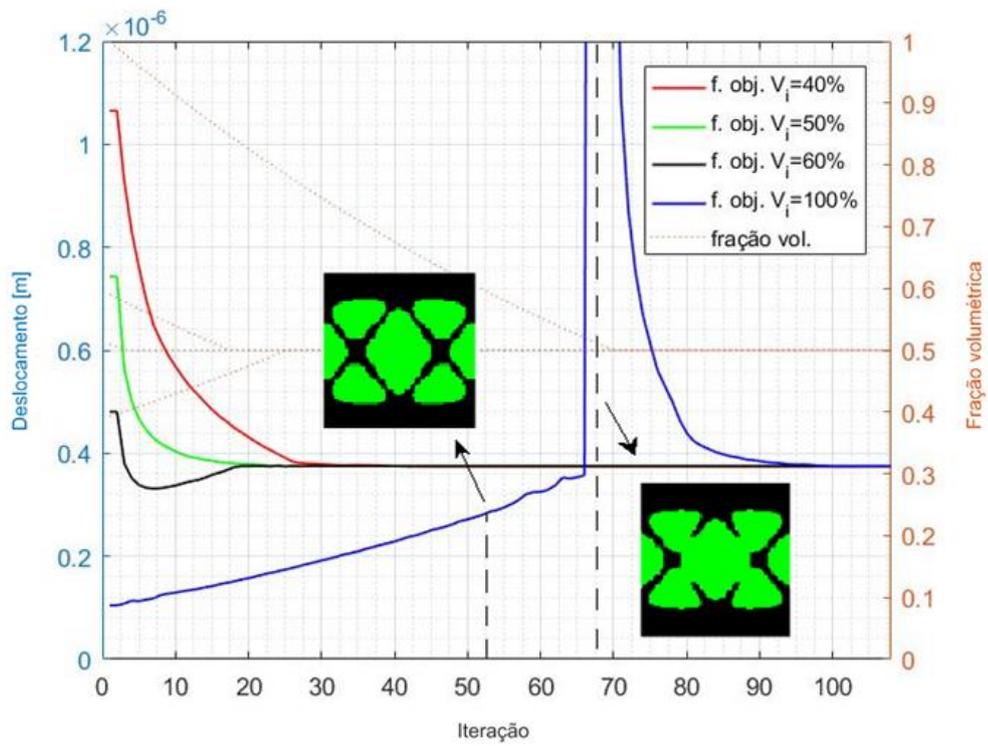


Figura 5.38 - Evolução das funções objetivo ao longo do processo iterativo.

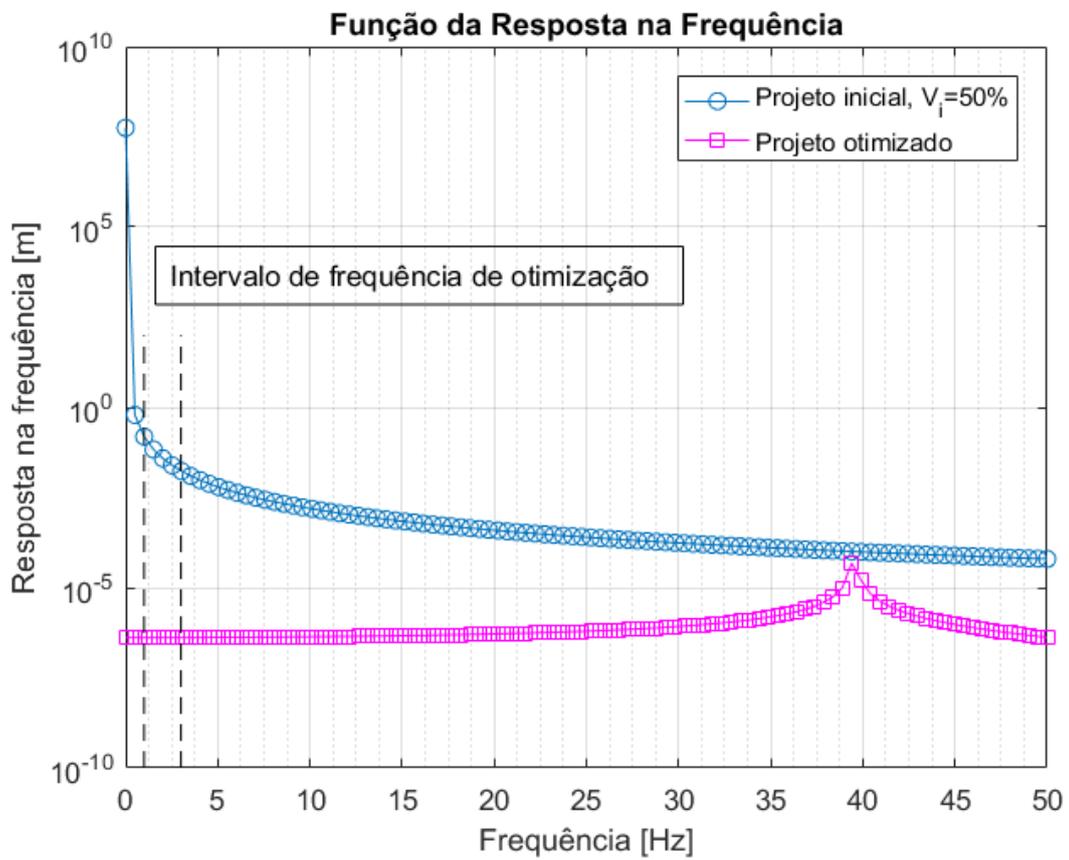


Figura 5.39 - FRFs para o caso (b) de otimização a volume constante.

5.2.3 Projeto multiescala aplicado à minimização da resposta no domínio da frequência

Nesta seção são resolvidos exemplos de otimização topológica concorrente multiescala sendo tanto a macroestrutura quanto a microestrutura consideradas como domínio de projeto. As microestruturas podem ser compostas por um ou dois materiais, assim como as próprias estruturas em si. O algoritmo para essa abordagem é validado através de comparação com resultados da literatura. Em especial, o modelo bimaternal de interpolação é aplicado a um caso de projeto concorrente, além de ser estudada a variação da minimização alcançada para a mesma fração volumétrica de material distribuída de forma distinta entre a macro e microescala.

5.2.3.1 Viga L

A validação para o algoritmo multiescala é realizada através de um modelo tipicamente usado para *benchmarking* em otimização topológica, uma viga em L engastada [Sigmund e Maute, 2013]. É aplicada uma carga harmônica de 1 kN à sua extremidade conforme a Figura 5.40.

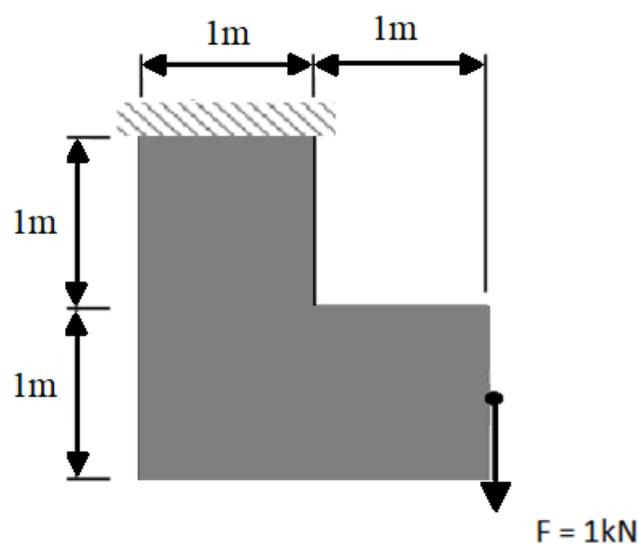


Figura 5.40 - Viga engastada em L.

O objetivo desse exemplo é minimizar o deslocamento vertical no mesmo ponto onde a força age, sendo considerado que a excitação atua no intervalo de frequências de 20 Hz a 40 Hz. Novamente 10 frequências pontuais equidistantes dentro dessa faixa são utilizadas no cálculo das sensibilidade e da equação de estado. Na escala macroestrutural um único material, ocupando inicialmente 100% do domínio de projeto, é distribuído até que a fração volumétrica macroescalar atinga 45%, sendo o espaço restante vazio. O material usado possui uma microestrutura celular associada cujo material de base corresponde à primeira entrada na Tabela 5.3. Nessa escala, a fração volumétrica é mantida em 40% durante o processo de otimização. As malhas para a aplicação do método de elementos finitos são de 30 mil elementos na macroestrutura, e de 60×60 na microestrutura. Os parâmetros BESO de otimização utilizados são: taxas evolucionárias $ER^{MA} = 1\%$, $ER^{MI} = 1\%$, taxas de adição máxima $AR_{\max}^{MA} = 2\%$, $AR_{\max}^{MI} = 2\%$, fração volumétrica na macroestrutura $V_f^{MA} = 45\%$, fração volumétrica na microestrutura $V_f^{MI} = 40\%$, raios de filtragem $r_{\min}^{MA} = 0,06$ m, $r_{\min}^{MI} = 0,04$ fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0,01\%$.

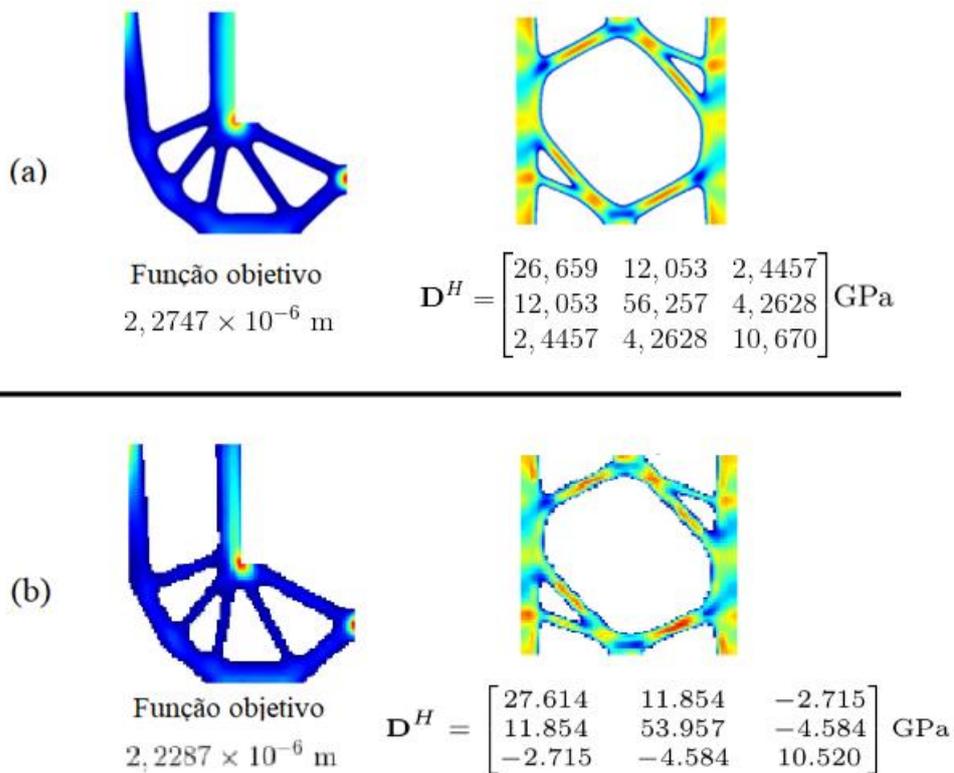


Figura 5.41 - Estruturas, microestruturas e matrizes homogeneizadas obtidas para o caso da viga em L obtidas por: (a) Vicente et al., 2015; (b) Esse trabalho;

A comparação dos resultados é apresentada na Figura 5.41. O valor da função objetivo final é 2% menor que para o caso da literatura, enquanto a topologia é similar ao exemplo na referência. Uma diferença relevante é a discretização mais refinada do trabalho de Vicente et al., 2015, com uma malha de mais de 235 mil elementos para a macroestrutura e de 160 mil elementos para a microestrutura, além do raio de filtragem para a microestrutura ser metade daquele usado na referência, onde $r_{\min}^{MA} = 0,12$ m. A comparação das FRFs da estrutura inicial e final pode ser vista Figura 5.42, enquanto a Figura 5.43 mostra a evolução da função objetivo e da fração volumétrica ao longo do processo de otimização.

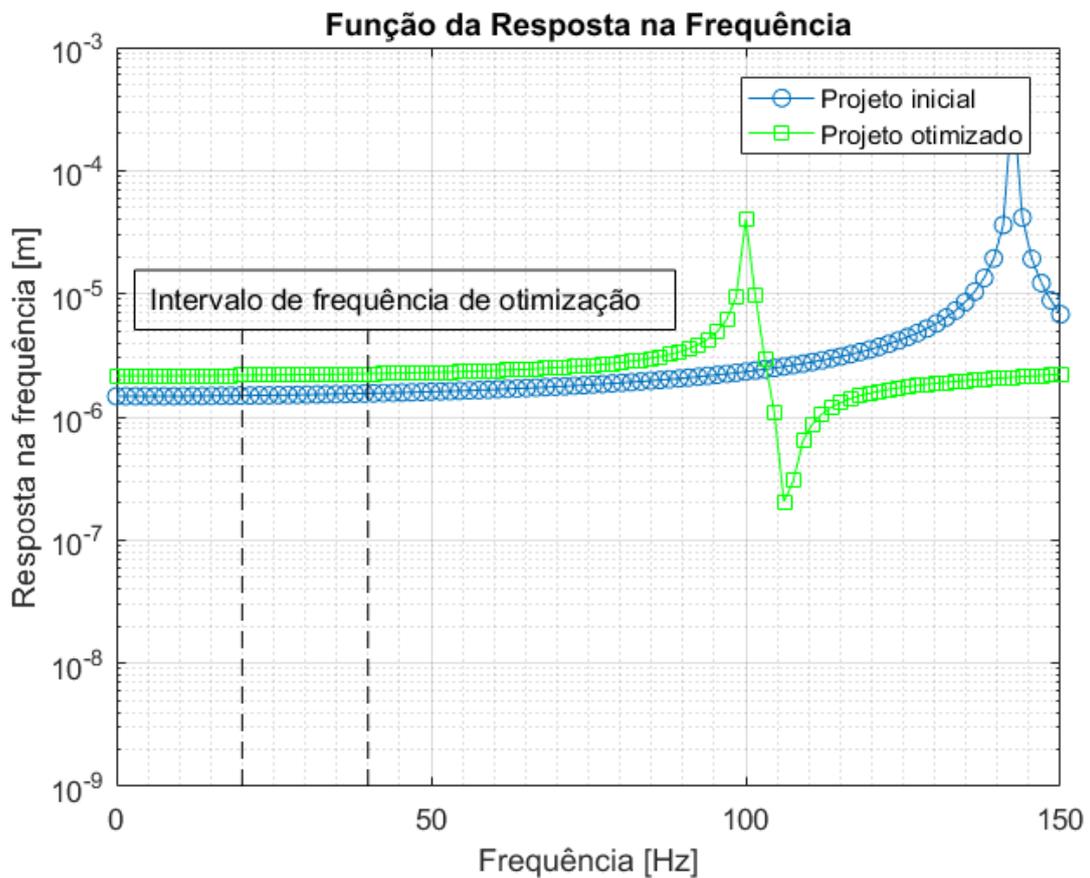


Figura 5.42 - Resposta em frequência para a estrutura inicial e otimizada.

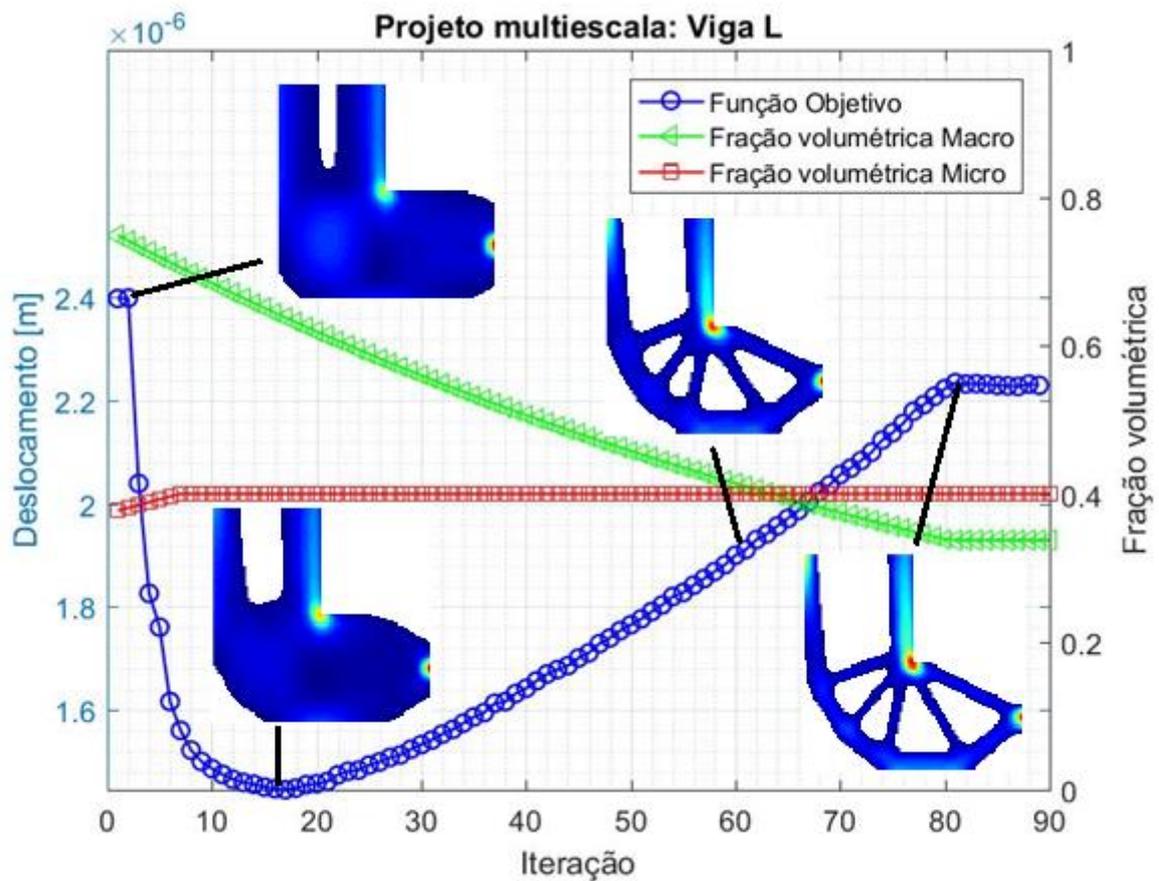


Figura 5.43 - Evolução da função objetivo e frações volumétricas nas diferentes escalas.

5.2.3.2 Influência da distribuição de material nas escalas macro e micro

Com a possibilidade de distribuir material tanto na macroescala quanto na microescala é natural questionar, dadas restrições volumétricas absolutas, em qual escala é mais adequado distribuir o material, ou se o ideal é distribuí-los em ambas as escalas. O exemplo dessa seção explora essa questão para o domínio macroestrutural mostrado na Figura 5.44.

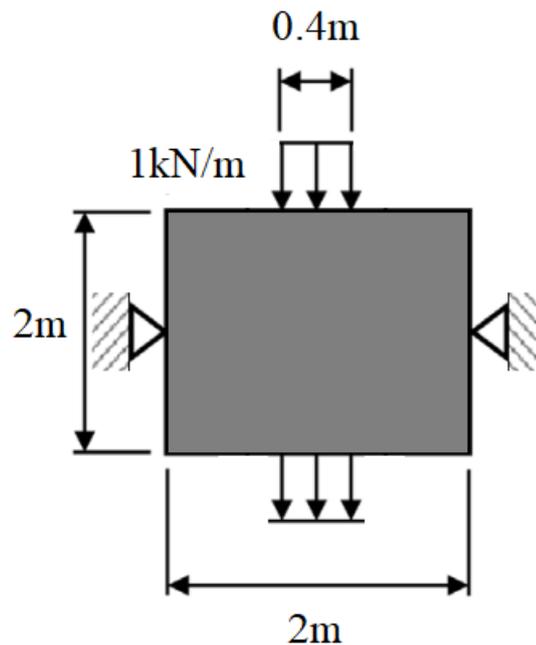


Figura 5.44 - Viga biapoiada com carga distribuída de 1 kN/m de intensidade.

A viga biapoiada está sujeita a excitação harmônica sobre suas faces superior e inferior: cargas distribuídas de 1 kN/m a 2,5 Hz, ambas com mesmo sentido e direção. A viga é composta por dois materiais, um mais flexível correspondendo à segunda linha da Tabela 5.3, e outro material mais rígido com microestrutura associada. Seu elemento de volume representativo, por sua vez, é composto pelos mesmos materiais base da tabela supracitada. Para uma estrutura cujo material rígido ocupa 24% do espaço disponível, as frações volumétricas para macro e microescala podem variar desde que satisfaçam $V_f = V_f^{MI} V_f^{MA} = 24\%$. O problema de minimização do deslocamento do ponto central da face superior da viga é resolvido então para diferentes frações volumétricas. Os parâmetros BESO de otimização escolhidos são: taxas evolucionárias $ER^{MA} = 1\%$, $ER^{MI} = 1\%$, taxas de adição máxima $AR_{\max}^{MA} = 2\%$, $AR_{\max}^{MI} = 2\%$, raios de filtragem $r_{\min}^{MA} = 0,1$ m, $r_{\min}^{MI} = 0,04$ fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0,01\%$. As frações volumétricas utilizadas, assim como os respectivos resultados, podem ser consultados na Figura 5.45.

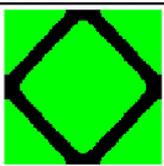
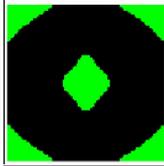
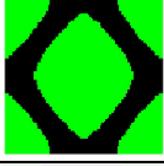
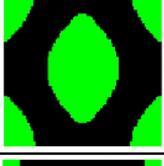
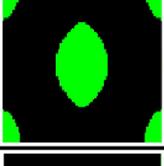
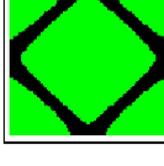
	Estrutura		Microestrutura rígida	
Caso 1		$V_i^{MA} = 100\%$ $V_i^{MI} = 24\%$		$\begin{bmatrix} 97.199 & 32.756 & 0 \\ 32.756 & 98.204 & 0 \\ 0 & 0 & 37.117 \end{bmatrix}$ GPa
Função objetivo 3.9402×10^{-9}				
Caso 2		$V_i^{MA} = 80\%$ $V_i^{MI} = 30\%$		$\begin{bmatrix} 102.55 & 35.05 & 0 \\ 35.05 & 105.54 & 0 \\ 0 & 0 & 39.50 \end{bmatrix}$ GPa
Função objetivo 3.6984×10^{-9}				
Caso 3		$V_i^{MA} = 60\%$ $V_i^{MI} = 40\%$		$\begin{bmatrix} 112.77 & 39.04 & 0 \\ 39.04 & 118.52 & 0 \\ 0 & 0 & 43.77 \end{bmatrix}$ GPa
Função objetivo 3.3765×10^{-9}				
Caso 4		$V_i^{MA} = 49\%$ $V_i^{MI} = 49\%$		$\begin{bmatrix} 123.23 & 42.49 & 0 \\ 42.49 & 132.21 & 0 \\ 0 & 0 & 47.73 \end{bmatrix}$ GPa
Função objetivo 3.1410×10^{-9}				
Caso 5		$V_i^{MA} = 40\%$ $V_i^{MI} = 60\%$		$\begin{bmatrix} 138.28 & 46.81 & 0 \\ 46.81 & 150.60 & 0 \\ 0 & 0 & 53.04 \end{bmatrix}$ GPa
Função objetivo 2.9049×10^{-9}				
Caso 6		$V_i^{MA} = 30\%$ $V_i^{MI} = 80\%$		$\begin{bmatrix} 175.89 & 55.94 & 0 \\ 55.94 & 187.71 & 0 \\ 0 & 0 & 64.60 \end{bmatrix}$ GPa
Função objetivo 2.5661×10^{-9}				
Caso 7		$V_i^{MA} = 24\%$ $V_i^{MI} = 100\%$		$\begin{bmatrix} 230.77 & 69.23 & 0 \\ 69.23 & 230.77 & 0 \\ 0 & 0 & 80.77 \end{bmatrix}$ GPa
Função objetivo 2.2781×10^{-9}				

Figura 5.45 - Resultados da otimização para a estrutura(macro) e para a microestrutura.

Devido ao padrão de carregamento e à geometria da estrutura, as topologias resultantes para ambas as escalas são semelhantes, a exceção das regiões ocupadas por pequenas frações volumétricas de material flexível na microescala, que tendem a ser arredondadas, diferentemente do que ocorre para a macroescala. A Figura 5.46 mostra as funções de resposta em frequência para alguns dos casos considerados. É perceptível que a minimização é tão boa quanto mais se destina a distribuição de material da micro para a macroescala, a exceção de quando o projeto é realizado unicamente na macroescala. Apesar da fração volumétrica de material rígido diminuir consideravelmente na macroescala, essa perda é

compensada pelo ganho de eficiência do material, visto que as regiões mais exigidas da estrutura são constituídas por um material sólido isotrópico.

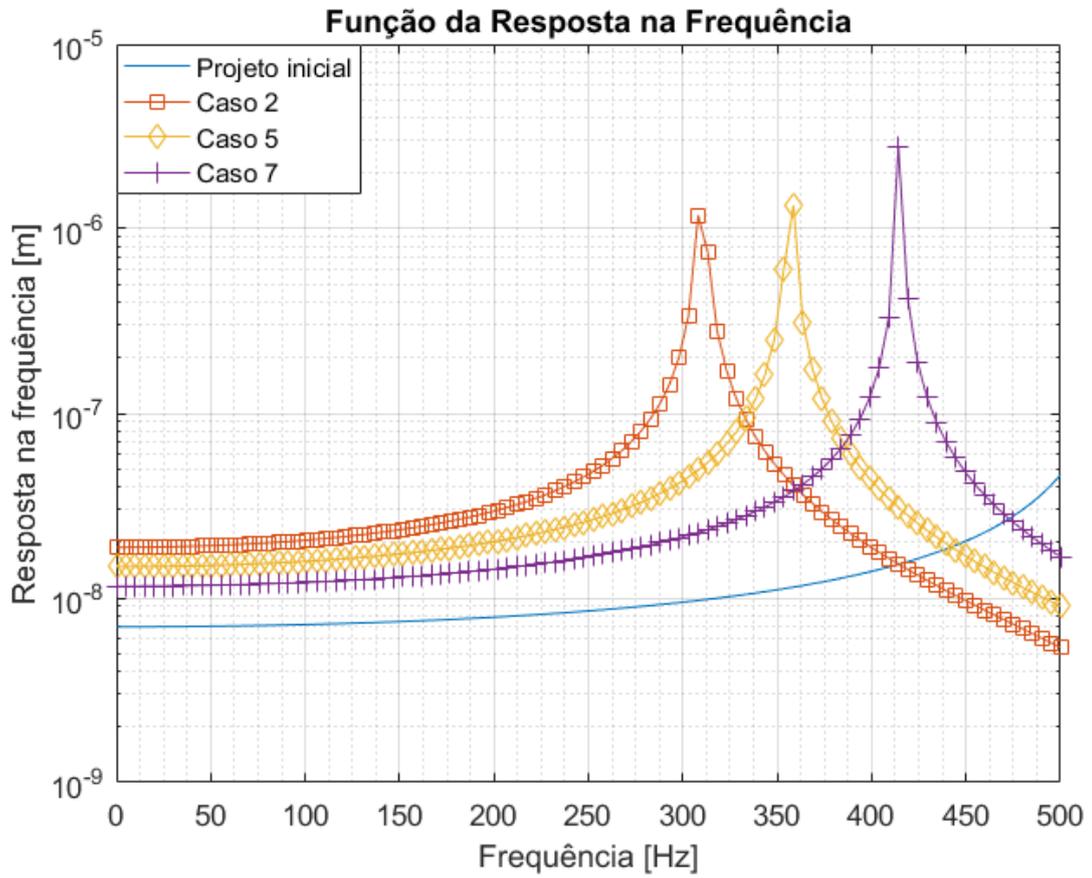


Figura 5.46 - Resposta em frequência para alguns casos selecionados.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O objetivo do presente trabalho era a implementação computacional de um programa que realize otimização topológica multiescala através do método evolucionário bidirecional (BESO) aplicado a problemas dinâmicos, especificamente, à maximização da frequência fundamental e a minimização da resposta estrutural no domínio da frequência. Adicionalmente, um modelo de interpolação bimaterial foi implementado para o caso de otimização da resposta em frequência multiescala. Neste capítulo os resultados são comentados e conclusões são desenvolvidas. Além disso, enumeram-se sugestões para trabalhos futuros relacionados ao tema abordado.

6.1 Conclusões

O método BESO de otimização topológica evolucionária para problemas multiescala foi implementado em um código computacional Matlab[®] considerando problemas de maximização da frequência fundamental de estruturas, assim como de minimização de suas respostas no domínio da frequência. Para ambas as aplicações a validação foi feita através da comparação dos resultados obtidos àqueles da literatura. Modelos de interpolação material com um e dois materiais foram utilizados. Em especial, o uso do modelo bimaterial foi estendido à minimização da resposta no domínio da frequência para problemas multiescala.

O procedimento de homogeneização, tal como é abordado quando acoplado à otimização topológica [Bendsøe e Kikuchi, 1988], foi apresentado e desenvolvido para as equações da elastostática, de forma a obter o tensor constitutivo equivalente do material com microestrutura, assim como sua dependência das variáveis de projeto na microescala, etapa necessária para o cálculo das sensibilidades nos problemas de otimização com presença de mais de uma escala.

A metodologia BESO, bem como as equações pertinentes aos problema de maximização da frequência fundamental e minimização da resposta no domínio da frequência para problemas multiescala com ou dois materiais foram desenvolvidas. De relevância maior são as expressões para o cálculo das sensibilidades, especialmente no caso com micro e macroescala acopladas.

Em geral, a modelagem para ambos os problemas se mostrou adequada, embora as especificidades dos projetos puramente estrutural, de materiais e multiescala necessitem considerações particularizadas, as quais são apresentadas a seguir:

Para a maximização da frequência fundamental, a aplicação ao projeto estrutural permitiu validar o modelo de interpolação bimatricial através da comparação com a literatura, assim como o algoritmo de otimização topológica quando restrito à macroescala.

Restringindo a aplicação ao projeto material, primeiramente validou-se tanto o módulo responsável pelo processo de homogeneização quanto pela otimização microestrutural, novamente por comparação com a literatura. Para o caso particular de uma viga engastada como uma massa concentrada na sua extremidade livre, foi avaliada a influência de um parâmetro particular do método BESO, a taxa de evolução ER , sobre a topologia microestrutural, não sendo verificada influência do parâmetro sobre o resultado final para a faixa de valores estudada. Observou-se também que a mudança da posição da massa concentrada não resultou em uma topologia microestrutural diferente, ainda que a viga tenha perdido sua linha de simetria horizontal. Para uma viga em L, entretanto, foi possível observar anisotropia resultante na topologia microestrutural, e conseqüentemente, na matriz constitutiva do material associado.

A otimização multiescala concorrente, por sua vez, foi aplicada a um exemplo já empregado para os projetos estrutural e de materiais de forma a verificar sua potencialidade como estratégia superior a otimização em uma única escala. Para o caso da viga biengastada, ao menos, a otimização multiescala foi a mais eficiente em maximizar a frequência fundamental sobre a mesma restrição material que as outras abordagens. A viga engastada com massa concentrada foi revisitada para a aplicação da maximização concorrente, não somente da macroestrutura e do material da fase rígida, mas também daquele associado à fase flexível, o que por sua vez resultou em padrões anisotrópicos tanto para a estrutura quanto para uma das microestruturas, diferentemente do resultado obtido para o projeto de materiais. Foi estudada também a influência do primeiro modo sobre a topologia microestrutural através de uma particularização do caso da viga biengastada.

Para a minimização da resposta no domínio da frequência, primeiramente foi abordado o projeto estrutural de uma viga engastada como carga concentrada na extremidade, cujo objetivo foi validar o módulo de otimização quando o domínio de projeto é restrito à macroescala. Em seguida, foi implementado o modelo bimatricial para esse tipo de otimização.

Tomou-se então a microescala como domínio de projeto, comparando-se os resultados obtidos com aqueles da literatura, validando dessa vez o projeto de materiais e homogeneização quando aplicados a esse tipo de otimização. Um caso com microestrutura compósita foi usado para avaliar como a topologia inicial pode influenciar o resultado da otimização. Para a estrutura considerada, a viga biengastada, nem valor da função objetivo tampouco topologia final foram afetadas.

Finalmente, para o projeto multiescala concorrente, foram abordados casos restritos à otimização da macroestrutura e da microestrutura associada a um único material. A viga em L foi tomada como exemplo para *benchmark*, resultando em uma estrutura coerente, embora não exatamente como o exemplo da literatura, o que se deve possivelmente à diferença na discretização das malhas usadas. O exemplo da viga biengastada com material distribuído diferentemente entre as escalas, por sua vez, demonstrou resultados melhores quando o material é distribuído na macroescala, diferentemente do que ocorre para a otimização multiescal, em que o projeto concorrente obteve o melhor desempenho.

6.2 Sugestões

Para trabalhos futuros cujo foco seja relacionado ao tema abordado aqui, sugere-se:

- Implementar um código de otimização multiescala BESO para estruturas tridimensionais.
- Implementar a generalização tridimensional para o processo de homogenização integrado à otimização, potencialmente considerando outras propriedades além das que relacionam tensão e deformação, por exemplo, transmissão de ondas em meios mecânicos.
- Implementar um código otimizado, idealmente vetorizado, paralelizado, e escrito numa linguagem que privilegie desempenho.
- Construir protótipos a partir dos resultados de otimização, e validá-los através de testes mecânicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bendsøe, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, vol. 1, n. 4, p. 193-202, 1989.

Bendsøe, M. P.; Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 71, n. 2, p. 197-224, 1988.

Bendsøe, M. P.; Diaz, A. R.; Lipton, R.; Taylor, J. E. Optimal design of material properties and material distribution for multiple loading conditions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 38, n. 7, p. 1149-1170, 1995.

Boonpan, A.; Bureerat, S. Multi-stage design of an automotive component. **International Journal of Vehicle Design**, vol. 60, n. 1/2, p. 84-89, 2012.

Céa, J.; Garreau, S.; Guillaume, P.; Masmoudi, M. The shape and topological optimizations connection. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.188, n. 4, p. 713-726, 2000.

Cheng, K. T.; Olhoff, N. An investigation concerning optimal design of solid design of solid elastic plates. **International Journal of Solids and Structures**, vol.17, n. 3, p. 305-323, 1981.

Christensen, P. W.; Klarbing, A. **An introduction to structural optimization**. Springer Science & Bussiness media, 2008.

Coelho, P. G.; Fernandes, P. R.; Guedes, J. M.; Rodrigues, H. C. A hierarchical model for concurrent material and topology optimisation of three-dimensional structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 35, n. 2, p. 107-115, 2008.

Deaton, J. D.; Grandhi, R. V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 49, n. 1, p. 1-38, 2014.

Diaz, A. R.; Bendsøe, M. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method. **Structural Optimization**, vol. 4, n. 1, p. 17-22, 1992.

Diaz, A. R.; Kikuchi, N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol.35, n. 7, p. 1487-1502, 1992.

Du, J.; Olhoff, N. Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 34, n. 2, p. 91-110, 2007.

Eschenauer, H. A.; Olhoff, N. Topology optimization of continuum structures: a review. **Applied Mechanics Reviews**, vol. 54, n. 4, p. 331-390, 2001.

Gordon, J. G. **Structures or Why Things Don't Fall Down**. Penguin, Baltimore, 1978.

Guedes, J.; Kikuchi, N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 83, n. 2, p. 143-198, 1990.

Hassani, B.; Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization II-analytical and numerical solution of homogenization equations. **Computers & Structures**, vol. 69, n. 6, p. 719-738, 1998.

Huang, X.; Xie, Y. M. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 43, n. 14, p. 1039-1049, 2007.

Huang, X.; Xie, Y. M. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials. **Computational Mechanics**, vol. 43, n. 3, p. 393, 2009.

Huang, X.; Zuo, Z. H.; Xie, Y. M. Evolutionary topological optimization of vibrating continuum structures for natural frequencies. **Computer & Structures**, vol. 88, n. 5-6, p. 357-364, 2010a.

Huang, X.; Xie, Y. M. **Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications**. John Wiley & Sons, 2010b.

Huang, X.; Radman, A.; Xie, Y. M. Topological design of microstructures of cellular materials for maximum bulk or shear modulus. **Computational Materials Science**, vol. 50, n. 6, p. 1861-1870, 2011.

Huang, X.; Zhou, S. W.; Xie, Y. M.; Li, Q. Topology optimization of microstructures of cellular materials and composites for macrostructures. **Computational Materials Science**, vol. 67, p. 397-407, 2013.

Jensen, J. S.; Pedersen, N. L. On maximal eigenfrequency separation in two-material structures: the 1D and 2D scalar cases. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 289, n. 4-5, p. 967-986, 2006.

Jog, C. S.; Haber, R. B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 130, n. 3-4, p. 203-226, 1996.

Kim, L. C.; Jeswiet, J. Conceptual and detailed design of an automotive engine cradle by using topology, shape, and size optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 51, n. 2, p. 547-564, 2015.

Kirsch, U. **Structural optimization: fundamentals and applications**. Springer Science & Business Media, 2012.

Kohn, R. V.; Strang, G. Optimal design and relaxation of variational problems, I. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, vol. 39, n. 1, p. 113-117, 1986.

Komkov, V.; Choi, K. K.; Haug, E. J. **Design sensitivity analysis of structural systems**. Academic press, 1986.

Lakes, R. Materials with structural hierarchy. **Nature**, vol.361, n. 6412, p. 511, 1993.

Larsen, U. D.; Sigmund, O.; Bouwstra, S. Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio. **Journal of Microelectromechanical Systems**, vol. 6, n. 2, p. 99-106, 1997.

Li, Q.; Steven, G. P.; Xie, Y. M. A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 22, n. 3, p. 220-239, 2001.

Liu, L.; Yan, J.; Cheng, J. Optimum structure with homogeneous optimum truss-like material. **Computers & Structures**, vol. 86, n. 13-14, p. 1417-1425, 2008.

Liu, Q.; Chan, R.; Huang, X. Concurrent topology optimization of macrostructures and material microstructures for natural frequency. **Materials & Design**, vol. 106, p. 380-390, 2016.

Loyrette, H. Gustave Eiffel. Rizzoli, 1985.

Ma, Z. D.; Kikuchi N.; Cheng, H. C. Topological design for vibrating structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.121, n.1-4, p. 259-280, 1995.

Malvern, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. 1969.

Mei, C. C.; Vernescu, B. **Homogenization methods for multiscale mechanics**. World scientific, 2010.

Michell, A. G. M. LVIII. The limits of economy of material in frame-structures. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, vol. 8, n. 47, p. 589-597, 1904.

Murat, F.; Tartar, L. H-convergence. In: **Topics in the mathematical modelling of composite materials**. Birkhäuser, Boston, MA, 1997, p. 21-43.

Niu, B.; Yan, J.; Cheng, G. Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 39, n. 2, p. 115, 2009.

Novotny, A. A. **Análise de sensibilidade topológica**. LNCC/MCT, D. Sc., Modelagem Computacional, 2003.

Pedersen, N. L. Maximization of eigenvalues using topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol.20, n. 1, p. 2-11, 2000.

Persson, L. E.; Persson, L.; Svanstedt, N.; Wyller, J. **The homogenization method: An introduction**. Studentlitteratur AB, 1993.

Querin, O. M.; Steven, G. P.; Xie, Y. M. Evolutionary structural optimisation(ESO) using a bidirectional algorithm. **Engineering Computations**, vol.15, n. 8, p. 1031-1048, 1998.

Radman, A.; Huang, X.; Xie, Y. M. Topological optimization for the design of microstructures of isotropic cellular materials. **Engineering Optimization**, vol. 45, n. 11, p. 1331-1348, 2013.

Rodrigues, H.; Guedes, J. M.; Bendsøe, M. P. Hierarchical optimization of material and structure. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 24, n. 1, p. 1-10, 2002.

Rossow, M. P.; Taylor, J. E. A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets. **Aiaa Journal**, vol. 11, n. 11, p. 1566-1569, 1973.

Rozvany, G. I. N.; Querin, O. M. Combining ESO with rigorous optimality criteria. **International Journal of Vehicle Design**, vol. 28, n. 4, p. 294-299, 2002.

Sethian, J. A. **Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and material science**. Cambridge university press, 1999.

Sigmund, O. **Design of material structures using topology optimization**. 1994a. Tese de Doutorado. Technical University of Denmark.

Sigmund, O. Materials with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem. **International Journal of Solid and Structures**, vol. 31, n. 17, p. 2313-2329, 1994b.

Sigmund, O.; Torquato, S. Composites with extremal thermal expansion coefficients. **Applied Physics Letters**, vol.69, n. 21, p. 3203-3205, 1996.

Sigmund, O.; Petersson, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, vol.16, n. 1, p. 68-75, 1998.

Sigmund, O. Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, vol. 358, n. 1765, p. 211-227, 2000a.

Sigmund, O. A new class of extremal composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol.48, n.2, p. 397-426, 2000b.

Sigmund, O.; Jensen, J. S. Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, vol. 361, n. 1806, p. 1001-1019, 2003.

Sigmund, O.; Maute, K. Topology optimization approaches. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 48, n. 6, p. 1031-1035, 2013.

Sokolowski, J.; Zochowski, A. Topological derivative in shape optimization. In: **Encyclopedia of Optimization**. Springer, Boston, MA, 2001, p. 2625-2626.

Spagnolo, S. Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche. **ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE E SUPERIORE DI PISA. SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE**, vol. 22, p. 571-597, 1968.

Theocaris, P. S.; Stavroulakis, G. E. Optimal material design in composites: An iterative approach based on homogenized cells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 169, n. 1-2, p. 31-42, 1999.

Tanskanen, P. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 191, n. 47-48, p. 5485-5498, 2002.

Vicente, W. M.; Zuo Z. H.; Pavanello R.; Calixto, T. K. L.; Picelli, R.; Xie, Y. M. Concurrent topology optimization for minimizing frequency responses of two-level hierarchical structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 301, p. 116-136, 2016.

Wang, M. Y.; Wang, X.; Guo, D. A level set method for structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 192, n. 1-2, p. 227-246, 2003.

Xia, L.; Xia, Q.; Huang, X., Xie, Y. M. Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials: a comprehensive review. **Archives of Computational Methods in Engineering**, vol. 25, n. 2, p. 437-478, 2016.

Xie, Y. M.; Steven, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. **Computers & Structures**, vol. 49, n. 5, p. 885-896, 1993.

Xie, Y. M.; Steven, G. P. A simple approach to structural frequency optimization. **Computers & Structures**, vol. 53, n. 6, p. 1487-1491, 1994.

Xie, Y. M.; Steven, G. P. Evolutionary structural optimization for dynamic problems. **Computers & Structures**, vol. 58, n. 6, p. 1067-1073, 1996.

Xu, B.; Jiang, J. S.; Xie, Y. M. Concurrent design of composite macrostructure and multi-phase material microstructure for minimum dynamic compliance. **Composite Structures**, vol. 128, p. 221-233, 2015.

Xu, B.; Xie, Y. M. Concurrent design of composite macrostructure and cellular microstructure under random excitations. **Composite Structures**, vol. 123, p. 65-77, 2015.

Xu, B.; Huang, X.; Xie, Y. M. Two-scale dynamic optimal design of composite structures in the time domain using equivalent static loads. **Composite Structures**, vol. 142, p. 335-345, 2016.

Yan, X.; Huang, X.; Zha, Y.; Xie, Y. M. Concurrent topology optimization of structures and their composite microstructures. **Computers & Structures**, vol. 133, p. 103-110, 2014.

Yang, X. Y.; Xie, Y. M.; Steven, G. P.; Querin, O. M. Topology optimization for frequencies using an evolutionary method. **Journal of Structural Engineering**, vol. 125, n. 12, p. 1432-1438, 1999.

Zhou, M.; Rozvany, G. I. N. The COC algorithm, Part II: topological, geometrical and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 89, n. 1-3, p. 309-336, 1991.

Zhou, M.; Rozvany, G. I. N. On the validity of ESO type methods in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 21, n. 1, p. 80-83, 2001.

Zhu, J. H.; Zhang, W. H.; Xia, L. Topology optimization in aircraft and aerospace structures design. **Archives of Computational Methods in Engineering**, vol. 23, n. 4, p. 595-622, 2016.

Zuo, Z. H.; Huang, X.; Rong, J. H.; Xie, Y. M. Multi-scale design of composite materials and structures for maximum natural frequencies. **Materials & Design**, vol. 51, p. 1023-1034, 2013.