UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE CIÊNCIAS BÁSICAS E DA SAÚDE DEPARTAMENTO DE BIOQUÍMICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS: QUÍMICA DA VIDA E SAÚDE

MARJÚNIA ÉDITA ZIMMER KLEIN

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATRIZES TENDO COMO FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

PORTO ALEGRE

2018

MARJUNIA ÉDITA ZIMMER KLEIN

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATRIZES TENDO COMO FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde, sob a orientação do Prof. Dr. José Cláudio Del Pino.

Porto Alegre

2018

CIP - Catalogação na Publicação

KLEIN, MARJUNIA ÉDITA
O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATRIZES TENDO COMO FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA / MARJUNIA ÉDITA KLEIN. -- 2018.
295 f.
Orientador: JOSÉ CLAUDIO DEL PINO.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Ciências Básicas da Saúde, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde, Porto Alegre, BR-RS, 2018.

1. ENSINO. 2. MATRIZES. 3. APRENDIZAGEM. 4. SIGNIFICATIVA. I. DEL PINO, JOSÉ CLAUDIO, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dedico este estudo a todos os professores que se preocupam com a qualidade de sua ação pedagógica e com o ensino e a aprendizagem de conceitos científicos por parte de seus alunos, tendo como objetivo a formação integral dos educandos.

AGRADECIMENTOS

É chegado o momento de agradecer e festejar a conquista de um sonho.

Impossível, numa trajetória de tantos desafios, esquecer daqueles que, ao longo do caminho, colaboraram com a realização de mais uma etapa de vida.

Agradeço a Deus, por permitir que chegasse até este momento gozando de plena saúde e vitalidade.

Aos meus pais, Anivo Odélcio Zimmer (in memoriam) e Ivone Lucila Zimmer, pela educação, empenho e estímulo de sempre buscar os meus sonhos.

Ao meu marido, Cláudio Moacir Klein, companheiro inseparável, de todas os momentos.

Aos meus filhos, Maitê e Lucas, por compreenderem que, se em alguns momentos estive ausente, é porque havia um objetivo a ser alcançado.

Aos professores que aceitaram compor a banca: a professora Ieda Maria Giongo, a professora Márcia Finimundi Nóbile, o professor Diogo Onofre Gomes e o professor Marco Antônio Moreira, pelas contribuições, que muito enriqueceram a pesquisa.

Ao meu orientador, professor José Cláudio Del Pino, que durante todos os momentos, não exitou em auxiliar-me na construção desta tese.

Aos meus alunos, que inspiram a constante busca de uma aprendizagem de real significado.

Aos colegas, que compartilharam os momentos vividos durante a construção desta tese.

RESUMO

Este trabalho de pesquisa, fundamentado na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (TAS) e seus colaboradores, tem como objetivos propor, aplicar e buscar evidências de uma aprendizagem significativa em relação aos conceitos envolvidos no campo conceitual de Matrizes. A questão de pesquisa surgiu em função da preocupação da professora pesquisadora com as dificuldades conceituais e procedimentais, já apresentadas pelos estudantes em anos anteriores, em relação ao conteúdo de matrizes. A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel ressalta que a aprendizagem significativa tem chance de acontecer quando há uma interação não arbitrária e substantiva entre os novos conhecimentos (ideias, proposições, informações, conceitos, símbolos) e os conhecimentos prévios (subsunçores), contribuindo para a diferenciação, (re)elaboração e estabilidade dos mesmos. Contudo, como o significado é idiossincrático e transforma-se em conteúdo cognitivo diferenciado em cada indivíduo, é importante que o aluno tenha a oportunidade e o tempo para explicitar e discutir as suas ideias. Moreira (2005) complementa, ao chamar a atenção para o fato de que é por meio da aprendizagem significativa crítica que o aluno vai ser capaz de lidar com as mudanças, manejar a informação, usufruir da tecnologia e ser o protagonista de sua aprendizagem, admitindo que o conhecimento é uma construção individual. Sendo assim, para que a pesquisa acontecesse, foi planejado um questionário individual, cujas respostas foram tabuladas e auxiliaram para a construção das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), nas quais os alunos, individualmente ou em pequenos grupos, poderiam explicitar, discutir e (re)constuir seus conhecimentos em relação ao tema proposto. A coleta de dados aconteceu durante o processo e envolveu o registro oral, o registro escrito, o registro das observações em sala de aula e o registro das avaliações formais, na busca de evidências de uma aprendizagem significativa. Ao final da pesquisa, foi, novamente, aplicado um questionário individual, tendo como objetivo coletar as novas impressões dos alunos após a mudança na metodologia de sala de aula. Os resultados obtidos, por meio das categorizações das UEPS e dos instrumentos formais de avaliação, confirmaram a importância de: identificar os conhecimentos prévios dos alunos para se valer deles e desenvolver os conteúdos; elaborar atividades potencialmente significativas que permitam ao aluno explicitar suas ideias, interagir com os colegas e com o professor, evoluindo assim, progressivamente, em um determinado campo conceitual. As evidências coletadas mostraram que uma metodologia baseada na TAS de Ausubel pode modificar o ensino e a aprendizagem de matrizes, fazendo com que o aluno explicite, participe, questione, compreenda e socialize suas ideias, reelaborando-as e incrementando à sua bagagem cognitiva novos conhecimentos. Contribui-se para a formação de um aluno mais crítico, criativo e autônomo, melhor preparado e capacitado para participar da sociedade.

Palavras-chave: Matemática. Matriz. Conhecimentos Prévios. Aprendizagem Significativa. Metodologia.

ABSTRACT

This research work, based on the Ausubel Theory of Meaningful Learning (TAS) and its collaborators, aims to propose, apply and search for evidences of a meaningful learning related to the concepts involved in the Matrix concepts field. The research question arose due to the researcher's concern with the conceptual and procedural difficulties, already presented by the students in previous years, regarding the content of matrices. The Ausubel Theory of Significant Learning (TAS) highlights that meaningful learning has a chance of occurring when there is a non-arbitrary and substantive interaction between foreground (ideas, propositions, information, concepts, symbols) and previous knowledge (subsumes), contributing to their differentiation, (re)elaboration and stability. However, since the meaning is idiosyncratic and becomes a diversified cognitive content in everyone, it is important that the student has the opportunity and the time to explicit and discuss their ideas. Moreira (2005) complements, by calling attention to the fact that it is through critical learning that the student will be able to deal with changes, to manage information, to enjoy technology and to be the protagonist of their learning, admitting that knowledge is an individual construction. Thus, for the research to take place, an individual questionnaire was planned, whose responses were tabulated and helped to construct the Potentially Significant Teaching Units (UEPS), in which the students, individually or in small groups, could make explicit their knowledge, as well as discuss and (re)construct them in relation to the proposed theme. Data collection took place during the process and involved oral recording, written recording, recording of classroom observations and recording of formal evaluations, in the search for evidence of meaningful learning. At the end of the research, an individual questionnaire was again applied, aiming to collect the new impressions of the students after the change in the methodology of the classroom. The results obtained through the categorization of UEPS and the formal assessment instruments confirmed the importance of: identifying students' previous knowledge to use them and to develop the contents; elaborate potentially significant activities that allow the student to explain his ideas, interact with his colleagues and with the teacher, thus progressively evolving in a certain conceptual field. The collected evidences showed that a methodology based on the Ausubel TAS can modify the teaching and learning of matrices, causing the student to explain, to participate, to question, to understand and to socialize their ideas, re-elaborating them and increasing their cognitive baggage with new knowledge. It contributes to the formation of a more critical, creative and autonomous student, better prepared and able to participate in society.

Keywords: Mathematics. Matrix. Previous Knowledge. Meaningful Learning. Methodology

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na infância e ainda na adolescência, costumávamos brincar de “escolinha”. Reuníamos a garotada da vizinhança, sentávamos em roda e, com papel, lápis, um quadro negro e giz, simulávamos uma sala de aula. Só tinha um problema: todos adoravam fazer o papel de professor. Sendo assim, distribuíamos o tempo para que todos pudessem satisfazer a sua vontade. Eu ainda não sabia, mas esta seria a minha vocação.

Depois, ao cursar o ensino fundamental e médio, a curiosidade pela Matemática e a vontade de lecionar apenas aumentou, talvez influência das professoras que tive. Nos anos iniciais do ensino fundamental (até a quinta série, sexto ano atualmente), devido ao fato de estudar numa escola de periferia, a professora lecionava todas as disciplinas e ficava com a turma durante todo o ano letivo. Isso não se repetiu nas séries finais do ensino fundamental. Após a sexta série, fui para uma escola de localização mais central (onde concluí o nono ano) e passei a ter uma professora diferente por disciplina, além de, em cada nova série alcançada, haver uma professora de Matemática diferente da série anterior, mas isso não perturbava o meu encantamento com a Matemática, continuava com a curiosidade e o bom desempenho nesse componente curricular. Permaneci nessa mesma escola para cursar o ensino médio e assim fui conhecendo outras professoras e todas continuavam a incentivar-me para o estudo da Matemática. Tive uma colega que, ao concluir a primeira série do ensino médio, foi cursar Magistério em uma escola particular, mas eu não podia, era muito caro para os meus pais assumirem, então, continuei na mesma escola, na qual terminei de cursar o ensino médio.

Chegou a hora de prestar vestibular e, apesar de algumas dúvidas e sugestões dadas pelos familiares, não poderia ser diferente: direcionei minha inscrição para a Licenciatura em Matemática, segui o meu destino. Naquela época, primeiro se cursava Licenciatura em Ciências e depois em Matemática, mas a habilitação era para lecionar em todos os níveis de ensino, fundamental e médio. Podia-se, inclusive, lecionar Física e Química nas séries finais do ensino fundamental, antiga oitava série, atual nono ano. Durante os estudos na Universidade, o encantamento continuava e procurava participar de todas as atividades, encontros e seminários promovidos pela mesma. Ainda como aluna do curso de Matemátic, fui uma das fundadoras e integrante de um grupo de professores e alunos que se encontravam periodicamente (uma vez por mês), dentro da Universidade, para discutir o ensino de Matemática, compartilhar experiências e elaborar material didático. Tínhamos uma sala específica para isso, onde organizávamos os materiais didáticos. Ela se chamava de "Laboratório de Matemática". Os encontros do grupo aconteceram por alguns anos, mas depois, por diversas razões, o grupo se dispersou. Eu mesma, já estava lecionando e com uma carga horária bem carregada, tinha dificuldades de participar do grupo.

Logo após a conclusão da graduação, fiz parte também do primeiro grupo de Pós-Graduação desta mesma Universidade. Já tendo lecionado tanto no ensino fundamental como no ensino médio, a prática de sala de aula me levou a observar que os alunos cometiam muitos erros conceituais e procedimentais por vezes sem se dar conta. Já havia percebido que não era a qualidade da aula dada que garantia a aprendizagem. Muitas dúvidas e questionamentos sobre o ensino e a aula que eu ministrava continuavam a me preocupar, procurei, então, uma Universidade onde pudesse aliar os estudos, procurando respostas para os meus questionamentos, com o trabalho. Ingressei no Mestrado e dissertei sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática com o auxílio da TAS (Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel) e TCC (Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud) no ensino de Trigonometria. A realização do Mestrado gerou a participação em encontros, seminários, capítulo de livro e artigos, além de provocar uma sensível alteração no modo de lecionar. O emprego e a observação dos resultados dessa metodologia na sala de aula fizeram com que intensificasse o estudo na TAS, de Ausubel, e procurasse evoluir ainda mais na pesquisa sobre esse assunto. Veio a intenção de aprimorar-me e tendo o interesse de evoluir ainda mais no meu processo de aperfeiçoamento, procurei ingressar no doutorado. Fui aprovada no doutorado em Ciências: Química da Vida de da Saúde, desta universidade e estou continuando a minha busca por respostas para melhorar o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Durante todo o tempo de estudos, desde a graduação até agora, sempre estive em sala de aula e, na maior parte do tempo, lecionando no ensino médio. Sendo assim, a minha trajetória profissional acompanhou os meus estudos acadêmicos e iniciou-se, ainda cursando a graduação de Matemática na Universidade. Fui contratada, em meados de maio de 1983, por uma escola particular para substituir uma professora que estava adoentada e era responsável pelo ensino de Matemática no oitavo ano. Ao final dessa substituição, o diretor agradou-se do trabalho desempenhado e solicitou que permanecesse até o final do ano ministrando aulas de reforço, para os alunos com dificuldades, no contraturno. No ano seguinte, nessa mesma escola, agora inserida no grupo docente, ministrava aulas para as sétimas séries e oitavas séries. Foi assim que ingressei na carreira do Magistério. Em seguida, surgiram outras propostas de trabalho. Cheguei a prestar concurso público e lecionar em escolas da rede pública, nas mais diferentes séries, mas optei por trabalhar no ensino privado e é onde atuo até hoje.

Atualmente, além do ensino médio, leciono na Universidade, nos cursos de graduação, e sou bolsista da CAPES/CNPQ, trabalhando com a formação de professores das séries iniciais, por meio de uma disciplina intitulada Matemática e Currículo I, na qual se questionam e se analisam os conteúdos de matemática ministrados nas séries iniciais e a metodologia aplicada. No Ensino Médio, leciono Matemática para as segundas e terceiras séries, tendo como meta, exigida pela escola, melhorar cada vez mais o aproveitamento dos alunos no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e no vestibular. Inclusive esse é um dos motivos que levam os pais dos alunos a inscrevê-los na escola.

Ao iniciar no magistério e exercer efetivamente a função de professora, cometi e acredito que ainda cometa muitos erros, pois, apesar de considerar que sou uma pessoa preocupada com o meu aperfeiçoamento, por vezes não conseguia perceber que a participação dos alunos nas atividades propostas em sala de aula era necessária e um elemento importante para o ensino e a aprendizagem de qualquer conteúdo. Segundo Vasconcellos:

> A forma de se compreender a aprendizagem do aluno depende da concepção que se tem da educação. Do ponto de vista epistemológico, grosso modo, podemos agrupar as diferentes manifestações da prática educativa em três grandes linhas: Inatista (resgate do conhecimento já existente no educando), Empirista (transferência do conhecimento do educador para o educando) e sócio interacionista (construção do conhecimento pelo educando a partir das relações que estabelece com o meio e com os outros sujeitos) (VASCONCELLOS, 2009, p.97).

A caminhada dentro da profissão de professora, as leituras, as participações em encontros da área de Matemática e os estudos provocaram reflexões e fizeram-me evoluir. Aos poucos, introduzia no meu planejamento atividades relacionadas ao cotidiano dos alunos e já tinha o hábito de avaliar os exercícios do livro didático antes de utilizá-los.

Por exemplo, ao participar de um curso de aperfeiçoamento, intitulado “Matemática Experimental”, pelo Professor Vicente Hillebrand, da PUCRS, tínhamos que elaborar uma atividade prática, relacionada com algum conteúdo de Matemática que envolvesse o ensino fundamental. Como tínhamos ganhado uma caneta, chamada de “quilométrica”, no início do curso, junto com um bloco para anotações tive a ideia de questionar sobre o nome da caneta estar diretamente ligado ao fato de ela escrever quilômetros. E foi assim que elaborei uma atividade para responder a esse questionamento, utilizando uma regra de três e o volume de tinta contido no cilindro da caneta. Esse fato, aliado a outros que já me perturbavam e inquietavam, fez perceber que, assim como eu, o aluno também tinha curiosidades e ideias para as quais, por vezes, não dávamos a devida atenção, o tempo oportuno e a oportunidade para serem resolvidas.

> Especialmente, no discurso pedagógico mais recente, o slogan que garante ser o conhecimento algo ‘que se constrói a partir da realidade do aluno’, uma ideia banal, muitas vezes repetida com seriedade e circunspecção, pode ganhar uma nova dimensão a partir da apreensão da importância da metáfora como instrumento cognitivo deflagrador de processos associativos. Levar em consideração a realidade do aluno, neste caso, pode significar eleger metáforas adequadas para a construção de novos significados a partir daqueles que supostamente os alunos já conhecem (MACHADO, 2011, p.155).

Nos encontros e seminários, nos quais participava e por vezes ministrava minicursos, vislumbrava uma Matemática menos reprovadora e com mais significado.

Os índices de aprovação dos concursos vestibulares, os índices do ENEM e os índices medidos pelo IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica e SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), divulgados pela mídia, e as notas registrada, por mim, neste componente curricular, quer no ensino médio, quer no ensino superior, também não eram nada animadoras. Alternativas eram discutidas, mas, efetivamente, poucas ações pareciam alterar este quadro.

Ao cursar o Mestrado, deparei-me com a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel e seus colaboradores. Depois disso, foi difícil de deixá-la de lado. Houve uma sintonia entre a sala de aula, esta pesquisadora e a teoria.

As DCNEM (Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio) também fazem menção às finalidades e aos objetivos do ensino de Matemática:

> No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão

> de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber. As situações e os desafios que o jovem do ensino médio terá de enfrentar no âmbito escolar, no mundo do trabalho e no exercício da cidadania fazem parte de um processo complexo, no qual as informações são apenas parte de um todo articulado, marcado pela mobilização de conhecimentos e habilidades. Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (DCNEM, 2013, p.111).

E, não menos importante, mas justamente por ainda evidenciarmos muitos problemas em relação ao seu ensino e aprendizagem, temos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para o ensino fundamental. Exigência da Lei de diretrizes e bases (LDB) para a educação e do Plano Nacional de Educação (PNE) que vem para orientar e estabelecer uma sintonia entre os conteúdos a serem desenvolvidos no país, independente de local ou escola, mas também para orientar a formação de professores.

Ao ingressar no doutorado, realizei uma pesquisa com os meus alunos do ensino médio e do ensino superior, na qual se formularam perguntas que envolviam problemas do cotidiano. Os problemas poderiam ser resolvidos por equações e frações, conteúdos já abordados em Matemática em cada um dos níveis envolvidos na pesquisa. O objetivo era verificar como esses alunos respondiam aos problemas propostos, ou seja, se utilizariam esses conteúdos de Matemática (aprendidos na escola) para resolver os problemas propostos. Os resultados surpreenderam, pois a maioria dos alunos, tanto do ensino médio como da graduação, não utilizaram equacionamentos matemáticos para resolver os problemas, nem fórmulas, mas, sim, apenas as operações aritméticas envolvendo adições, subtrações, divisões e multiplicações. Isso nos remete a pensar sobre a necessidade de permitir que o aluno possa explicitar o seu meio de resolver as situações-problema, que geralmente são bem mais simples do que as resoluções utilizadas na escola.

Todas essas iniciativas demonstram um descontentamento com os resultados do ensino e da aprendizagem de Matemática e uma preocupação em revertê-los. A

Matemática está em tudo e em tudo tem Matemática: como podemos, então, na escola e na Universidade, obter resultados tão inexpressivos e continuar tendo tantas dificuldades e reprovações? Talvez há de ser pela metodologia empregada, mas há que se provocar uma mudança, há que se provocar algum significado no seu ensino, que a Matemática tenha sentido e significado para a aprendizagem, senão corremos o risco de um discurso sem eco.

Diante disso, precisa-se estabelecer metas, estabelecer limites e objetivos a serem alcançados para que, posteriormente, as conclusões possam ser estendidas a outros conteúdos do ensino e da aprendizagem de Matemática.

Assim sendo, o objetivo geral desta tese é:

- **propor e avaliar uma metodologia de ensino baseada na TAS (Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel) e demais colaboradores, elaborando atividades no ensino e na aprendizagem de matrizes e buscando evidências de como essas atividades podem contribuir para a construção significativa dos conceitos envolvidos nesse conteúdo de Matemática.**

Já os objetivos específicos são:

- identificar as concepções prévias dos alunos em relação ao conteúdo de matrizes a ser trabalhado em sala de aula;
- elaborar e aplicar atividades baseadas na TAS (Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel) em relação ao conteúdo de matrizes;
- categorizar, analisar e validar os resultados das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), realizando correções sempre que necessárias;
- realizar um questionário inicial e um questionário ao final da aplicação da metodologia para verificar a opinião dos alunos em relação a elas;
- investigar a história das matrizes e sua relação com o livro didático adotado pelas turmas nas quais a pesquisa aconteceu.

Para que se possa atingir os objetivos delineados, a presente tese foi dividida em nove capítulos, os quais se passa a apresentar.

No capítulo I, tem-se a introdução, na qual se relatam alguns aspectos da vida pessoal dessa doutoranda e os motivos pela sua dedicação e envolvimento com a docência.

No capítulo II, faz-se uma revisão da literatura na área de Aprendizagem

Significativa envolvendo o ensino e a aprendizagem de matrizes em repositórios digitais e livros, procurando indicar possíveis pesquisas relacionadas a essa área.

No capítulo III, descreve-se, a partir do próprio Ausubel e demais colaboradores, a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), tendo como objetivo fundamentar e justificar as atividades elaboradas e descritas no capítulo V.

No capítulo IV, descreve-se a metodologia utilizada na pesquisa.

No capítulo V, relata-se sobre o questionário inicial realizado com os alunos, as atividades elaboradas e aplicadas (UEPS), os resultados obtidos com as UEPS, os resultados obtidos pelas avaliações formais já contidas no calendário da Escola, e o questionário final realizado, respeitando-se a ordem de realização de cada uma delas.

No capítulo VI, faz-se uma retrospectiva sobre a história das matrizes e uma análise do atual livro didático adotado nas turmas em que a pesquisa aconteceu.

No capítulo VII, apresenta-se a avaliação feita pelos alunos sobre a metodologia empregada pela professora-pesquisadora, coletando-se, por meio de um questionário, as suas opiniões.

No capítulo VIII, das considerações finais, tem-se a pretensão de sugerir alternativas ao ensino e à aprendizagem de matrizes de forma que os alunos possam ser os protagonistas.

No capítulo IX, faz-se um breve relato sobre a produção científica que acompanhou esta pesquisa até o momento.

Na sequência, tem-se as referências, os anexos e os apêndices.

2 REVISÃO DE LITERATURA NA ÁREA DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA ENVOLVENDO O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATRIZES

Foram pesquisados periódicos reconhecidos na área de Educação Matemática, repositórios digitais e o portal da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), envolvendo artigos, trabalhos apresentados em encontros, dissertações e teses sobre possíveis trabalhos envolvendo a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e o ensino e a aprendizagem de Matrizes e nada semelhante ao tema abordado nesta tese foi encontrado. Mesmo assim, faz-se menção de alguns trabalhos que chamaram a atenção desta pesquisadora.

Dentre os periódicos na área de Educação Matemática, pesquisados está o BOLEMA (Boletim de Educação de Matemática), um periódico que está vinculado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências Exatas da UNESP – Universidade Estadual Paulista – Campos de Rio Claro, São Paulo, Brasil de publicação quadrimestral, avaliado pela CAPES como periódico, QUALIS A1, nas áreas de ensino de Ciências e de Educação. Sua primeira edição data de 1985 e tem como objetivo disseminar a produção científica ou áreas afins publicando artigos, ensaios e resenhas cujo foco esteja relacionado ao ensino e à aprendizagem de Matemática e referente ao tema em questão nada foi encontrado.

O próximo periódico pesquisado foi a revista ZETETIKÉ. Trata-se de revista de responsabilidade exclusiva da Faculdade de Educação da Unicamp, mais especificamente ao Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática (CEMPEM) da Faculdade de Educação (FE) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) e aos Grupos de pesquisa HIFEM (Grupo de Pesquisa: História , Filosofia e Educação Matemática), PHALA (Grupo de Pesquisa Educação, Linguagem e Práticas Socioculturais) e PRAPEM (Grupo de Pesquisa Prática Pedagógica em Matemática) , da mesma Universidade, até o ano de 2015. A partir do ano de 2015, a publicação passou a ser quadrimestral, tendo como parceira a Faculdade de Educação da Universidade Federal Fluminense (FEUFF). Foi fundada em 1993 e seu objetivo é divulgar a produção acadêmica ligada à área de Educação Matemática, tanto do Brasil como do exterior, e nada foi encontrado.

Seguiram-se também pesquisas em repositórios digitais, sendo um deles o LUME, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, no qual foram encontrados alguns títulos relacionados à aprendizagem significativa e outras áreas de ensino, mas nenhum deles associado à área de Matemática com o tema matriz. O mesmo aconteceu com o Scielo (Scientific Eletronic Libraly OnLine).

Na internet, a partir da palavra-chave "aprendizagem significativa e o ensino de matrizes" também não foram encontrados títulos que tivessem esses dois assuntos relacionados.

É importante dizer que, em relação ao tema aprendizagem significativa, há vários trabalhos. Porém, envolvendo aprendizagem significativa e o ensino e a aprendizagem de matriz não se encontram publicações. Aliás, em relação ao ensino e a aprendizagem de conteúdos de Matemática e a aprendizagem significativa, percebe-se que há poucas publicações. Quando se faz a referência a publicações e ou trabalhos, remete-se a artigos, dissertações e teses.

É importante dizer que a maioria dos trabalhos relacionandos à aprendizagem significativa com o ensino e a aprendizagem está relacionada ao ensino de Física, provavelmente por ter nessa área de conhecimento um dos autores, em nível nacional e internacional, que mais tem publicações, cujo nome é citado ao longo desta tese por diversas vezes, o professor Marco Antonio Moreira, professor desta Universidade. Ele é considerado um expoente no assunto e, entre as muitas contribuições ao tema, é responsável pelo editorial da revista "Aprendizagem Significativa", a qual possui um site só com orientações, exemplos e divulgação de materiais relacionados ao tema.

Ainda insistindo na procura e utilizando a internet, digitando apenas o tema matriz, encontraram-se algumas publicações, que se passa a citar.

a) Uma publicação cujo título é "Um estudo diagnóstico sobre as dificuldades em matrizes", de autoria de Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias, Pedro Franco de Sá e Rubens Vilhena Fonseca. Ela tem como objetivo averiguar quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos ao resolver questões referentes ao assunto matrizes. O público-alvo é um grupo de estudantes do ensino superior, porém todos ingressantes no primeiro semestre dos cursos de Matemática, Sistema da Informação e Ciência da Computação, totalizando 109 universitários, no período de 5 até 15 de novembro de 2006, na Universidade do Estado do Pará. Os resultados descritos pelos autores fazem menção ao fato de que muitos dos alunos apresentam dificuldades no que se refere ao conceito e à resolução de operações, principalmente o produto entre matrizes e cálculo de determinantes. Quando questionados sobre a metodologia que lembravam de ter sido utilizada quando por ocasião, no ensino médio, trabalharam com esse assunto, a maioria afirma que o professor iniciava com a definição, seguia com exemplos, propriedades e exercícios. Segundo os autores, essa descrição confirma uma predominância do ensino de matrizes por meio de uma metodologia tradicional.

b) Uma dissertação de Mestrado, intitulada “Uma proposta para o ensino do conceito de matrizes em ambiente computacional”, de Nilce Maria de Oliveira Pereira, da Universidade de São Carlos, em Sorocaba, no ano de 2015, que propõe e avalia uma rotina de atividades alternativas ao tradicional ensino do conceito de matriz no ensino médio utilizando o ambiente *Scilab.* O público-alvo foram alunos da terceira série do ensino médio de uma escola pública estadual, e a autora concluiu que o uso da tecnologia favoreceu e incentivou os alunos a compreenderem o conceito de matrizes.

c) Um artigo intitulado “O ensino de matemática pela aprendizagem significativa: uma experiência de ensino de matemática financeira na EJA – ensino médio”, de autoria de Susana Lucia Pereira Guedes, cujo objetivo foi verificar a possibilidade de utilização do conteúdo de matemática financeira como elemento articulador entre os conteúdos de funções e progressões, pela metodologia de resolução de problemas e modelagem matemática em um processo de construção dialógica, apoiado nos princípios teóricos da aprendizagem significativa e interação propostos por Ausubel. O público-alvo foram 22 alunos matriculados no EJA, no estado do Paraná, dentro da faixa etária de 20 a 70 anos, em que apenas 4 estavam desempregados. Os resultados, segundo a autora, sinalizaram que a articulação de conteúdos contribui para promover a aprendizagem significativa e a construção de autonomia pedagógica por parte do aluno, permitindo otimizar a carga horária. Também concluiu que a modelagem matemática possibilita a problematização de situações contextualizadas, favorecendo a compreensão e a construção de conhecimentos.

d) Um artigo publicado no XI Encontro Nacional de Educação Matemática (XI ENEM), intitulado “Diferentes ferramentas para o ensino de matrizes”, de autoria de Raquel Silveira da Silva e Marcia Lorena Saurin Martinez, acadêmicas do curso Licenciatura em Matemática na disciplina de Estágio Supervisionado na Universidade Federal do Rio Grande – FURG, que descrevem e relatam as atividades desenvolvidas (a utilização do quadro de giz, o jogo Bingo de Matrizes e as situações problema) em uma turma de segundo ano do ensino médio de uma escola estadual, no município de Rio Grande, durante o segundo semestre de 2012. Concluem afirmando que as ações metodológicas e o planejamento contribuíram para a socialização entre os pares, a aprendizagem significativa de conceitos e desenvolveram habilidades como o raciocínio lógico.

e) Uma comunicação oral apresentada na XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, em Recife, de 26 a 30 de junho de 2011, intitulada “ Matrizes e Determinantes: uma proposta metodológica para o Ensino Médio”, de autoria de Nicoly Talita Hrycyna Belo, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, Paraná, cuja proposta é sugerir aos professores recursos instrucionais para motivarem os seus alunos. Sendo assim, sugere a utilização do software *Winmat* como recurso instrucional para conferência das respostas dos exercícios resolvidos em sala de aula e incentivo a novas descobertas. Cita a confecção de mapas conceituais pelos próprios alunos como forma de apropriação dos conceitos envolvidos com o tema.

f) Uma dissertação de mestrado intitulada “Efeitos de uma estratégia diferenciada de ensino do conceito de matrizes”, de Maria Helena de Figueiredo Sanchez, da Universidade de Campinas, São Paulo, de 2002, cujo objetivo foi verificar se o conhecimento anterior sobre um conceito e uma estratégia diferenciada de ensino podem auxiliar na formação dos conceitos científicos e melhorar o desempenho dos estudantes do ensino médio na solução de problemas sobre matrizes. Os resultados obtidos permitiram concluir que uma estratégia diferenciada de ensino que se fundamente na aprendizagem significativa, dando ênfase à formação dos conceitos e à solução de situações-problema que ativem os conhecimentos prévios, relacionando-os ao conteúdo conceitual, pode alcançar sucesso.

No portal da CAPES, a pesquisa mostrou que não há trabalhos semelhantes em dissertações, teses, artigos ou livros, publicados em nível nacional e internacional, relativos ao tema desta tese, “O ensino e a aprendizagem de matrizes tendo como fundamentação teórica a Teoria da Aprendizagem de Ausubel”. Encontrou-se uma dissertação de Mestrado que utiliza uma planilha e a resolução de problemas para construir conceitos relacionados ao conteúdo de matrizes. Trata-se de uma dissertação de Mestrado, intitulada “O processo de construção dos conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares no ensino médio, utilizando a planilha como recurso: um estudo comparativo”, de Aroldo César Steinhorst, da Pontífícia Universidade Católica do Rido Grande do Sul, Porto Alegre, 2011, cujo objetivo foi utilizar uma planilha agregada à resolução de problemas como recurso didático para a construção de conceitos envolvendo matrizes, determinantes e sistemas lineares, em duas turmas do Ensino Médio de uma escola particular de Porto Alegre, trabalhando de forma alternada, com e sem a planilha. A metodologia da pesquisa foi qualitativa com análise textual dos dados e o suporte teórico foi a Aprendizagem significativa de Ausubel e a resolução de problemas segundo Polya. O trabalho foi desenvolvido na forma de um projeto interdisciplinar com as disciplinas de Física, Biologia e Educação Física. Os principais resultados obtidos foram que a abordagem de resolução de problemas, agregada ao uso da planilha, foi bem aceita pelos alunos, fortaleceu as atividades em grupo, melhorou a aprendizagem e despertou o gosto pelo estudo da Matemática em alunos que tinham reservas ao seu estudo anteriormente.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Pensar em uma prática pedagógica que busque contemplar os diversos saberes, respeite o tempo de cada aluno, incentive a pergunta, considere o erro como um fato a ser analisado, escute e responda as dúvidas, mas, sobretudo, torne o aluno protagonista da sua aprendizagem deveria ser a meta de todos os educadores que procuram fazer da escola ou do mundo acadêmico um lugar, por excelência, de realização pessoal e social. Para a “Comissão da Unesco”, a missão da educação deve ser:

> [...] a educação deve organizar-se em torno de quatro aprendizagens fundamentais que, ao longo de toda a vida de cada indivíduo, serão de algum modo pilares do conhecimento: aprender a conhecer. Isto é, adquirir os conhecimentos da compreensão; aprender a fazer, para poder agir sobre o meio envolvente; aprender a viver juntos, a fim de participar e cooperar com os outros em todas as atividades humanas; e finalmente aprender a ser, conceito essencial que integra os três precedentes. É claro que essas quatro vias do saber constituem apenas uma, dado que existam entre elas múltiplos pontos de contato, de relacionamento e de permuta.
>
> Em regra, entretanto, o ensino formal orienta-se, essencialmente - se não exclusivamente -, para aprender a conhecer e, em menor escala, para aprender a fazer. As duas outras aprendizagens dependem, a maior parte das vezes, de circunstâncias aleatórias, quando não são consideradas de algum modo, como prolongamento natural das duas primeiras (DELORS, 2012, p.73).

Para compartilhar com essa proposta, optou-se por organizar as atividades de ensino e aprendizagem, nas aulas de Matemática, da segunda série do Ensino Médio, envolvendo o conteúdo de matrizes, a partir da teoria de Ausubel, implementada e acrescida das teorias de Novak, Gowin e Moreira.

A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel busca considerar aquilo que o aprendiz já sabe e orientá-lo de modo que consiga realizar conexões entre o novo conhecimento e os conhecimentos já assimilados pelo educando.

Neste capítulo, faz-se um estudo sobre a teoria de Ausubel, em uma visão mais clássica, e aponta-se para uma visão mais humanista e social a partir de Novak, Gowin, Vergnaud, Johnson-Laird, Vigostky, Maturana e Moreira a fim de que o leitor possa compreender como foram organizadas as atividades de aprendizagem aplicadas na referida segunda série do ensino médio.

3.1 A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL

Ausubel (1918-2008) nasceu em Nova York, era filho de imigrantes judeus e tornou-se um pesquisador na área da Psicologia Educacional, apesar de ser formado em Medicina Psiquiátrica. Acredita-se que seu interesse pela forma como os alunos aprendem deva-se ao fato das dificuldades encontradas quando também era estudante. Sua teoria foi apresentada em 1963, quando a teoria behaviorista (que considerava que o meio é quem influenciava o sujeito e entendia-se que os alunos só aprenderiam se fossem ensinados por alguém, ou seja, aquilo que o aluno já sabia, sequer era considerado) prevalecia.

Ausubel (1980) considera que a finalidade do ensino é a aprendizagem pelo aluno e que ambas, ensino e aprendizagem, coexistem. Considera que é útil prestarmos atenção à relação recíproca que o ensino e a aprendizagem têm, ou seja, a relação que inclui os objetivos do ensino, os efeitos do ensino e a avaliação do ensino.

> [...] é útil voltar-nos para aqueles aspectos do ensino e aprendizagem que têm uma relação dupla. Esta relação recíproca inclui os objetivos, os efeitos e a avaliação de ensino. Desta forma, embora seja verdadeiro que ensino é logicamente diferente da aprendizagem e pode ser analisado independentemente daquilo que os alunos aprendem, qual seria a vantagem prática desta análise em separada? A facilitação da aprendizagem é a própria finalidade do ensino. O ato de ensinar não se encerra em si mesmo, pois a finalidade do ensino é a aprendizagem por aparte do aluno; muito embora o insucesso na aprendizagem dos alunos não indique necessariamente a competência do professor, o produto da aprendizagem é ainda a única medida possível para se avaliar o mérito do ensino (AUSUBEL, 1980, p. 12).

Considerando o que foi dito, acredita-se que a busca por uma teoria de aprendizagem adequada pode nos auxiliar, oferecer indicações e orientar as ações pedagógicas de forma que o ensino efetivamente aconteça. Não se quer ter a pretensão de afirmar que uma teoria de aprendizagem é suficiente para a melhoria do ensino uma vez que se tem consciência de que vários fatores podem intervir, mas considera-se ser uma direção, um rumo, um caminho para que o ensino aconteça.

Ausubel (1980) distingue quatro tipos de aprendizagem: a aprendizagem automática (ou mecânica), aprendizagem significativa, aprendizagem por recepção e aprendizagem por descoberta.

Na aprendizagem automática (ou mecânica), as novas informações são aprendidas sem, necessariamente, interagirem com os conceitos relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aluno (os conceitos subsunçores), ou seja, a informação é armazenada de forma arbitrária e literal e, como não há interação, não causa modificação nos conceitos já existentes. Pode-se citar o exemplo, em Matemática, quando o aluno "decora" uma fórmula que serve somente para aquele momento.

Na aprendizagem significativa, o aluno consegue relacionar de forma não arbitrária e substantiva (não literal) uma nova informação com outras já existentes na sua estrutra cognitiva (os subsunçores), contribuindo para a sua diferenciação, estabilidade e, se necessário, modificando-os. Para Ausubel:

> A essência do processo de aprendizagem significativa é que a ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as ideias são relacionadas a algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição. A aprendizagem significativa pressupõe que o aluno manifeste uma disposição para a aprendizagem significativa – ou seja, uma disposição para relacionar, de forma não arbitrária e substantiva, o novo material à sua estrutura cognitiva – e que o material aprendido seja potencialmente significativo – principalmente incorporável à estrutura de conhecimento através de uma relação não arbitrária e não literal (AUSUBEL, 1980, p. 34).

Na aprendizagem por recepção (automática ou significativa), o conteúdo é apresentado para o aluno no seu estado final. Exige-se do aluno apenas uma incorporação do material, não envolvendo qualquer descoberta. Porém, se ela é receptiva automática, só vai se tornar significativa após o processo de internalização; se ela for receptiva significativa, já é compreendida e tem significado durante o processo de internalização.

A aprendizagem por descoberta é aquela em que o conteúdo é descoberto pelo aluno antes que seja incorporado de modo significativo à estrutura cognitiva, ou seja, o aluno deve levar em conta as informações a respeito de determinado assunto organizando-as, reagrupando-as e analisando-as de forma que consiga relacioná-las, descobrindo assim o resultado final.

Convém ressaltar que, segundo Ausubel (1980), ambas as aprendizagens podem se tornar significativas, pois uma não exclui a outra. Se ocorrer que o novo assunto incorporou-se à capacidade cognitiva do aprendiz, de forma não arbitrária e não literal, considera-se que a aprendizagem significativa aconteceu. Segundo Moreira:

> Isso significa que a aprendizagem por descoberta não é necessariamente, significativa nem a aprendizagem por recepção é, obrigatoriamente, mecânica. Tanto uma como outra pode ser significativa ou mecânica, dependendo da maneira como a nova informação é armazenada na estrutura cognitiva. Por exemplo, a solução de quebra-cabeças por ensaio e erro é um tipo de aprendizagem por descoberta em que o conteúdo descoberto (a solução) é, geralmente, incorporado de maneira arbitrária à estrutura cognitiva e, portanto, aprendido mecanicamente. Por outro lado, uma lei da física pode ser aprendida significativamente sem que o aluno tenha que descobri-la. Este pode receber a lei "pronta", ser capaz de compreendê-la e utilizá-la significativamente, desde que tenha, em sua estrutura cognitiva os subsunçores adequados (MOREIRA, 2006, p.17).

Abaixo, ilustra-se, por meio de uma figura, a concepção, a partir de Ausubel (1980, p. 21), sobre a aprendizagem por recepção e a aprendizagem por descoberta.

Aprendizagem Significativa	Clarificação de relações entre conceitos	Instrução audiotutorial bem planejada	Pesquisa científica (nova música ou arquitetura
	Leituras ou a maioria das apresentações do livro-texto	Trabalhos escolares de laboratório	Predomínio da produção intelectual ou interesse perma-nente na "pesquisa"
Aprendizagem Automática	Tabelas de multiplicação	Aplicação de fórmulas para a solução de problemas	Soluções tipo "quebra-cabeça" ensaio e erro
	Aprendizagem por recepção	Aprendizagem orientada para a descoberta	Aprendizagem por descoberta autônoma

Figura 1: Aprendizagem receptiva e aprendizagem por descoberta situam-se em diferentes contínuos que partem da aprendizagem automática ou da aprendizagem sigificativa.
Fonte: Ausubel, 1980. p. 21

Ausubel destaca que os novos conceitos (imagens, símbolos, conceitos ou proposições) precisam poder relacionar-se com os conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aluno de maneira que contribuam para esclarecer, melhorar ou até rever aquilo que já está estabelecido. Só assim haverá a possibilidade de uma aprendizagem com significado. Para que isso aconteça, deve haver uma disposição do aluno e um material que seja potencialmente signifcativo:

> A aprendizagem significativa pressupõe que o aluno manifeste uma disposição para relacionar, de forma não arbitrária e substantiva, o novo material à estrutura cognitiva – e que o material aprendido seja potencialmente significativo – principalmente incorporável à sua estrutura de conhecimento[...] (AUSUBEL, 1980, p.34).

Fica claro, que além do aluno, o professor tem uma tarefa fundamental no desenrolar das atividades: seja ao elaborar esse material e orientar o aluno na realização das atividades, seja ao observar a realização das atividades, fazendo anotações e, se necessário, intervindo de modo a reorientar os alunos quanto às suas possíveis dúvidas.

O material, então, a ser elaborado pelo professor, em uma metodologia de aprendizagem significativa, deve respeitar, no mínimo, duas condições, segundo Ausubel. Uma delas diz respeito à natureza do conteúdo a ser aprendido, que deve ter significado lógico. Considera-se que vai partir de ideias mais simples até às mais complexas, além de estabelecer relações entre elas e poder relacionar-se de forma não arbitrária e substantiva às estruturas cognitivas já existentes (a maioria dos conteúdos trabalhados na escola possui esta característica). Outra condição refere-se à natureza da estrutura cognitiva do aluno, que deve permitir, por meio de conceitos subsunçores (conhecimentos prévios), uma relação não arbitrária e substantiva entre o novo conhecimento e aquele que já existe.

É importante ressaltar que a aprendizagem significativa requer um material potencialmente significativo (com significado lógico) e uma pré-disposição do aluno para a aprendizagem. Respeitadas essas duas condições, acredita-se no seu sucesso e na formação de um novo sginificado, que é chamado, por Ausubel, de significado psicológico ou idiossincrático fenomenológico, muito particular a cada aluno.

Talvez se tenha que esclarecer sobre duas palavras que já foram utilizadas no texto diversas vezes sobre as quais o próprio Ausubel faz várias citações. Trata-se das expressões “relação não arbitrária” e “relação substantiva” que o material potencialmente significativo deve conter.

A relação não arbitrária significa que, se o material é potencialmente significativo, tem um caráter suficientemente não arbitrário (não aleatório), ou seja, é porque existe uma base adequada e suficientemente evidente para poder relacioná-lo com as ideias mais gerais, que formam um conjunto mais amplo de conhecimentos.

A relação substantiva significa que, se o material é potencialmente significativo, permitirá que um símbolo ou um grupo de símbolos ideacionalmente equivalentes relacionem-se à estrutura cognitiva do aluno sem alterar o seu significado. O mesmo conceito pode ser representado por uma linguagem sinônima.

É importante ressaltar que há uma distinção entre a aprendizagem significativa de material potencialmente significativo e a aprendizagem automática que contém tarefas com elementos já significativos. Um exemplo de aprendizagem significativa de material potencialmente significativo, no contexto de Matemática, poderia ser, por exemplo, determinar a área de um quadrilátero a partir do método de completar áreas por figuras geométricas já conhecidas, como o quadrado, o retângulo e o triângulo. A organização da atividade potencialmente significativa envolveria conceitos já adquiridos de forma não literal e substantiva para atingir outro conceito, o da área do quadrilátero. Em relação à aprendizagem automática, que contém tarefas significativas, poder-se-ia citar a aprendizagem, em Matemática, dos valores das potência de “i”, por exemplo, que são valores fixos advindos de uma divisão por quatro do expoente de qualquer número complexo, que não podem ser associados às experiências prévias do alunos.

Ausubel também destaca os organizadores prévios como recursos para um material potencialmente significativo, quando um determinado conteúdo não foi abordado, é totalmente novo para o aprendiz. Seriam materiais (curiosidades, por exemplo, ou um fato histórico) que serviriam para introduzir um determinado conteúdo de modo que os conceitos posteriores possam ser aprendidos de maneira mais significativa. Segundo Moreira:

> O uso de organizadores prévios é uma estratégia proposta por Ausubel para, deliberadamente, manipular a estrutura cognitiva, a fim de facilitar a aprendizagem significativa. Organizadores prévios são materiais introdutórios apresentados antes do material a ser aprendido em si. Contrariamente a sumários que são, em geral, apresentados ao mesmo nível de abstração, generalidade e inclusividade, simplesmente destacando certos aspectos do

> assunto, organizadores prévios são apresentados em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade. Segundo o próprio Ausubel, no entanto, a principal função de um organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, a fim de que o material possa ser aprendido de forma mais significativa, ou seja, organizadores prévios são úteis para facilitar a aprendizagem na medida em que eles funcionam como 'pontes cognitivas' (MOREIRA, 2017, p. 163).

Os organizadores prévios podem auxiliar o aprendiz a relacionar os conceitos já existentes na sua estrutura cognitiva com os conceitos a serem aprendidos.

Ausubel (1980) distingue três tipos de aprendizagem significativa: a aprendizagem representacional, a aprendizagem de conceitos e a aprendizagem proposicional. Deixa claro, porém, no decorrer de sua explanação, que poderá haver uma superposição delas.

A aprendizagem representacional acontece quando se estabelece uma equivalência de significados entre os símbolos, palavras e objetos. Segundo Ausubel (1980, p.33), "[...] tudo tem um nome, e o nome significa aquilo que seu referente significa para uma determinanda pessoa". É considerada a aprendizagem do tipo mais básico. Por exemplo, quando uma criança associa o termo "casa", quer pelo som da palavra, quer quando lhe dizem "vamos para casa" e ela "chega em casa", faz associações e de forma significativa, pois há uma relação não arbitrária e substantiva com ideias já existentes na sua estrutura cognitiva.

A aprendizagem de conceitos é, por determinado aspecto, também uma aprendizagem representacional. Considera-se conceito como objetos, eventos, situações ou propriedades que possuem características peculiares e costumam ser designados por símbolos. Há duas formas de aprender um conceito. Uma delas é por formação, que geralmente acontece quando estamos na fase pré-escolar, quando somos crianças e somos submetidos com frequência a situações sucessivas que nos remetem a estabelecer atributos para aquele conceito. Poder-se-ia dizer que há uma relação empírico-concreta que nos faz assimilar os atributos de determinado conceito e realizar, discriminações, diferenciações, generalizações e até abstrações.

Entretanto, à medida que avançamos na faixa etária, vamos adquirindo novos conceitos por meio do processo de assimilação de conceitos, ou seja, vamos associando os novos significados às ideias e aos atributos conceituais já existentes na estutura cognitiva, sem necessariamente a influência de provas empíricas.

A aprendizagem proposicional tem como tarefa aprender o significado que está além das palavras, objetos, eventos ou situações. Considera-se que, para compreender uma proposição, é necessário primeiro conhecer o significado das palavras que compõem determinada proposição. Como exemplo, pode-se citar, em Matemática, o “Teorema de Pitágoras. Só é possível comprendê-lo significativamente se souber o que é um triângulo retângulo, quais são seus elementos e suas características.

Tanto a aprendizagem por proposição quanto a aprendizagem por conceitos podem ser subordinativas, subordinativas derivativas, subordinativas correlativas, superordenadas e combinatórias. Será subordinativa quando houver uma relação de subordinação, ou seja, quando se relacionar a outras proposições inclusivas mais gerais e já existentes na estrutura cognitiva do aluno. Será subordinativa correlativa quando o novo conceito for entendido como um exemplo, colaborando ou ilustrando uma proposição já aprendida. Isso ocorrere quando o que é aprendido se torna uma extensão daquilo que já existe na estrutura cognitiva do aprendiz, o novo conceito se relaciona com os conceitos já existentes e completa-os, modifica-os, qualifica-os. Normalmente, é o processo mais comum pelo qual um novo conceito é aprendido. Em Matemática, poder-se-ia citar, como exemplo, o fato de quando um aluno aprende o conceito de divisão com números inteiros e, mais tarde, trabalhará com números racionais, esse conceito será ampliado e melhorado, usando como ancoradouro o conceito subsunçor de divisão já existente para ser aprimorado e aplicado em uma nova situação de aprendizagem.

Resumindo, na aprendizagem subordinativa derivativa, o conceito já existente não se modifica, ainda que se saiba que há novos conceitos relacionados, subordinados a ele. Já na aprendizagem subordinativa correlativa, o novo conceito tem a capacidade de modificar o conceito subsunçor já existente, qualificando-o e mostrando, por exemplo, que o conceito de divisão pode ser extendido e ter outras aplicações além daquelas que já existiam.

A aprendizagem superordenada acontece quando um conceito mais geral ou inclusivo apoia-se em conceitos já existentes e faz uso destes, para, assim, poder ser incorporado à estrutura cognitiva do aluno. Cita-se, como exemplo, em Matemática, quando o aluno já tem o conceito de quadrado e retângulo e aprende o conceito de quadrilátero, o qual o associará aos conceitos já existentes, verificando que o quadrado e o retângulo também são quadriláteros. Tudo isso fica muito próximo da aprendizagem subordinativa, poder-se-ia dizer, e, sim, é verdade: o aluno pode, ao mesmo tempo, aprender novos conceitos por subordinação e realizar superordenações, uma vez que é tudo muito dinâmico e idissiocrático.

Se as novas proposições não estiverem relacionadas, subordinativa ou superordenadamente a alguma ideia relevante na estrutura cognitiva do aprendiz, não aparecerão determinadas ideias e, neste caso, haverá a aprendizagem combinatória. Logo no início, por não estarem relacionadas às ideias da estrutura cognitiva do aprendiz, podem tornar-se mais difíceis de serem aprendidas ou de serem lembradas do que as proposições subordinativas e superordenadas. Muitas das proposições ensinadas nas disciplinas escolares (Matemática, Ciências, Ciências Humanas e Sociais) podem ser exemplos de aprendizagem combinatória. Ausubel afirma que:

> Embora adquiridas com maior dificuldade do que as proposições subordinativas e superordenadas, manifestam, uma vez adequadamente formuladas, a mesma estabilidade interna como qualquer ideia inclusiva ou superordenada na estrutura cognitiva (AUSUBEL, 1980, p.30).

As aprendizagens subordinativas, superordenadas e combinatórias são processos internos ao ser humano e ocorrem por meio de uma interação dos novos conceitos com os já existentes.

O resultado dessa interação é a aprendizagem significativa, ou seja, os conceitos subsunçores podem ser reestruturados (diferenciação progressiva) e talvez até modificados. Os novos conceitos vão sendo incorporados à estrutura cognitiva e adquirindo novos significados e, com isso, reorganizando-se (reconciliação integrativa), surgindo uma nova ideia ou aprimorando a ideia anterior.

Quando a aprendizagem significativa acontece, é porque também ocorreram a diferenciação progressiva, mais relacionada com a aprendizagem subordinada, e a reconciliação integrativa, mais relacionada com a aprendizagem superordenada e combinatória.

Ausubel define conceito como qualquer objeto, evento ou fenômeno com atributos peculiares, formando uma determinada categoria. Já se mencionou que, para que um determinado conceito possa ser incorporado à estrutura cognitiva do aprendiz, ele deve ter interagido com os conceitos já existentes de modo substantivo e não arbitrário, colaborando ou até modificando-os de forma idissiocrática (muito particular), produzindo, assim, um significado psicológico, ou seja, um significado real para o indivíduo.

Ao esclarecer sobre como acontece o processo de significação, Ausubel (1980) introduz o “princípio de assimilação” ou a “teoria da assimilação”. Segundo ele, a assimilação acontece entre os conceitos já existentes e os novos conceitos (a serem aprendidos), contribuindo para a diferenciação e a organização desses conceitos. Para ele, a assimilação é um processo contínuo e colabora para a retenção dos conceitos. Na figura abaixo, Ausubel(1980, p. 57) ilustra isso:

1. Aprendizagem Subordinativa:

A. Subordinação Derivativa

Ideia estabelecida

A

Nova→ a_5 a_1 a_2 a_3 a_4

Na aprendizagem subordinativa derivativa, a informação nova a_5 está ligada à ideia superordenada A e representa um outro exemplo ou extensão de A. Os atributos essenciais do conceito A não sofrem alteração, mas os novos exemplos são considerados relevantes.

B. Subordinação Correlativa

Ideia estabelecida

X

Nova→ y u v w

Na aprendizagem subordinativa correlativa, a nova informação y está ligada à ideia X, mas não é uma extensão, modificação ou qualificação de X. Os atributos essenciais do conceito subordinativo podem ser ampliados ou modificados com a nova subordinação correlativa.

2. Aprendizagem superordenada:

Nova ideia A→A

Ideias estabelecidas a_1 a_2 a_3

Na aprendizagem superordenada, as ideias estabelecidas a_1 , a_2 e a_3 são consideradas como exemplos mais específicos da nova ideia A e passam a associar-se a A. A ideia superordenada é definida como um novo conjunto de atributos essenciais que abrange as ideias subordinativas.

3. Aprendizagem combinatória:

Nova ideia A → B - C - D

Ideias estabelecidas

Na aprendizagem combinatória, a nova ideia A é vista como relacionada às ideias existentes B, C e D, mas não é mais abrangente nem mais específica do que as ideias B, C e D. Neste caso, considera-se que a nova ideia A tem alguns atributos essenciais em comum com as ideias preexistentes.

4. Teoria da assimilação:

A nova informação está relacionada aos aspectos relevantes, preexistentes da estrutura cognitiva e tanto a nova informação como a estrutura preexistente são modificadas no processo. Grande parte da aprendizagem significativa é essencialmente de assimilação da nova informação.

Figura 2: Formas de aprendizagem significativa segundo a Teoria da Assimilação
Fonte: Ausubel, 1980, p. 57

Um conceito, para Ausubel, é adquirido de duas formas: por formação e por assimilação.

A formação de um conceito tem uma característica indutiva e geralmente acontece na fase pré-escolar, por experiências empíricas. Como exemplo, quando aprendemos o que é uma casa, um cachorro, um carro. Ausubel considera um tipo de aprendizagem por descoberta, envolvendo uma identificação indutiva dos atributos essenciais do conceito.

A assimilação de um conceito acontece de maneira muito particular e considera-se que ele passa por algumas etapas: a abstração, a diferenciação, a formulação e o teste de hipóteses, bem como generalizações, antes de ser incorporado à estrutura cognitiva do aprendiz e produzir um novo significado.

Vigotski faz menção, também, a duas formas de aquisição de conceitos em suas pesquisas:

> Os processos que levam à formação de conceitos evoluem ao longo de duas linhas principais. A primeira é a formação dos complexos: a criança agrupa diversos objetos sob o 'nome de família' comum; esse processo passa por vários estágios. A segunda linha de desenvolvimento é a formação de 'conceitos potenciais', baseados no isolamento de certos atributos comuns. Em ambos os casos, o emprego da palavra é parte integrante dos processos de desenvolvimento, e a palavra conserva a sua função diretiva na formação dos conceitos verdadeiros, aos quais esses processos conduzem (VIGOTSKI, 2013, p. 101).

Ausubel defende que a assimilação é um processo progressivo, não é algo que termina após a ocorrência da aprendizagem significativa, mas tem efeito sobre a retenção dos conceitos. Os conceitos mais amplos, mais estáveis e diferenciados servem de ancoradouro às novas ideias e possibilitam a sua retenção. Mas, com o passar do tempo, há uma tendência de que as novas ideias sejam incorporadas de forma espontânea e progressiva às estruturas cognitivas, de tal modo que não se consegue mais reproduzi-las individualmente. Acontece, para Ausubel, um processo de obliteração, ou seja, uma redução de informações a um denomindador comum de maneira que as novas ideias estão cada vez menos dissociáveis dos subsunçores, até que não estejam mais disponíveis como entidades individuais, mas agregadas e incorporadas à estrutura cognitiva do aluno, restando apenas o subsunçor modificado.

Sabe-se que há conceitos que se desenvolvem por formação e costumam acontecer, geralmente, na idade pré-escolar e que há conceitos que são adquiridos por assimilação acontecendo, geralmente, na idade escolar e na fase adulta. Isso leva a pensar sobre a atividade na sala de aula. Será que se utilizam e exploram, com a devida propriedade, os conceitos que os alunos já têm a respeito de um determinado conteúdo, provocando a interação entre este e os já existentes, de forma que aconteça uma aprendizagem significativa?

A maioria dos conteúdos desenvolvidos na escola encontram-se na forma de proposições que envolvem os conceitos e, muitas vezes, combinações entre eles, os quais, por sua vez, dependem do desenvolvimento e da elaboração dos significados que os conceitos têm. Quando se ensinam novas proposições, exige-se mais do que aprender significados, mas, sim, uma interação entre eles e o seu aprimoramento, possibilitando-se gerar uma aprendizagem significativa. Esta é, para Ausubel, a essência do processo de assimilação: quando há interação entre o novo conhecimento e os conceitos ou proposições já aprendidos. Isso resulta em uma modificação tanto do significado da nova informação quanto do significado do conceito ou da proposição ao qual está relacionada. Observa-se uma diferenciação progressiva dos conceitos ou proposições, ou seja, uma assimilação sequencial (do conceito de menor inclusividade para o conceito de maior inclusividade), tendo como consequência o aprimoramento dos significados já existentes para posterior utilização, se necessária, em outra aprendizagem. Observa-se também uma reconciliação integradora, pois, à medida que o processo de assimilação continua, os novos significados vão sendo incorporados a ideias básicas de tal forma que delas não mais se dissociem.

A teoria da assimilação também pode auxiliar a compreender tanto o fenômeno da memorização quanto o da aprendizagem significativa, pois é responsável pelo tempo em que uma ideia aprendida de forma significativa fica retida e pela forma como o conhecimento está organizado na estrutura cognitiva do aprendiz.

O tempo e a fixação, segundo Ausubel, de um conceito podem sofrer as influências: (a) dos conceitos no qual está apoiado (ideias-âncora), ou seja, se o estudante já tem um conceito estável, o novo conceito vai alterar o equilíbrio já existente incorporando-se a ele; (b) da continuidade dessa interação entre os conceitos, que, de certa forma, mantém-se e aprimora-se na estrutura cognitiva original, permitindo relações entre o antes, o depois e possíveis conceitos semelhantes a ele relacionados; (c) do fato de o novo conceito encontrar, na estrutura cognitiva do aprendiz, uma relação não arbitrária e substantiva que facilite a aquisição do seu significado e colabore para o seu processo de memorização.

Em suma, a existência de um conceito subsunçor na estrutura cognitiva do aprendiz ao qual o novo conceito possa relacionar-se pode auxiliar no processo de memorização.

A assimilação auxilia a compreender a forma pela qual o conhecimento fica organizado, pois conceitos mais estáveis, mais gerais, têm a tendência de se manterem no topo de uma possível pirâmide e serem aprimorados pelos de menor grau de estabilidade. É o que Ausubel chama de organização sequencial da diferenciação progressiva dos conceitos.

3.2 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: UMA VISÃO CRÍTICA

Não desconsiderando o que Ausubel (1980), em uma visão mais clássica, já convidou a repensar sobre o ensino e a aprendizagem, é importante considerar que existe uma visão mais humanista, social e crítica que colabora com a mesma, agregando novas informações. Alguns de seus colaboradores seriam Novak e Gowin (1977), Johnson-Laird (1983), Vergnaud (1990; 2009), Maturana (2001) e Moreira (2000, 2005, 2010) e Vigotski (2013).

Novak nasceu em 1932, é empresário e educador, professor emérito da Cornell University e pesquisador sênior no IHMC (Institute for Human & Machine Cognition, da Universidade de West Florida), conhecido pelo desenvolvimento da teoria do mapa conceitual a partir da década de 1970. Formou-se em Ciências e Matemática, em 1952, na Universidade de Minnesota. Concluiu seu mestrado em Ciências da Educação em 1954 na mesma Universidade e o doutorado em 1958. Sua pesquisa está voltada para a aprendizagem humana, em estudos educacionais e na repesentação do conhecimento. Sua teoria de “mapa conceitual” tem por finalidade orientar a investigação e instrução, tendo sido publicada pela primeira vez em 1977 e atualizada em 1998.

Novak acredita que uma teoria de educação envolve o pensamento, o sentimento e a ação. Parte do princípio que uma teoria de educação é um conjunto de experiências cognitivas, afetivas e psicomotoras que contribuem para que o indivíduo consiga lidar com as situações do dia a dia. Conforme Novak (apud MOREIRA, 2006, p. 154), “Qualquer evento educativo é uma ação para trocar significados (pensar) e sentimentos entre o aprendiz e o professor”.

Novak cita cinco elementos que fazem parte de qualquer evento educativo. São eles: aprendiz, conhecimento, professor, contexto e avaliação. Ele quer dizer que, em qualquer evento educativo, alguém (aprendiz) aprende algo (adquire conhecimento) interagindo (permutando significados) com alguém (professor) ou com alguma coisa (computador, livro, objetos em geral) e em determinado contexto (escola, casa, grupo social, local de trabalho, etc.), acrescentando que a avaliação permeia o processo, ou deveria permear, por ser uma atitude natural do ser humano.

Figura 3: Mapa conceitual com os cinco elementos de Novak (apud MOREIRA, 2006, p. 155).

Novak contribui com a teoria de aprendizagem significativa de Ausubel no momento em que introduz duas estratégias instrucionais, o mapeamento conceitual e o Vê epistemológivo de Gowin, tendo como objetivo ampliar ainda mais o conceito de aprendizagem significativa e facilitar essa aprendizagem.

Gowin também contribui com a teoria da aprendizagem significativa no momento em que admite a mesma relação de trocas de significados entre professor e aluno por meio de materiais educativos e alia-se a Novak e Ausubel no aprimoramento da Teoria da Aprendizagem Significativa.

Conforme Moreira:

> Ausubel enfatiza a construção cognitiva por meio da aprendizagem significativa. Novak assume que a aprendizagem significativa subjaz à integração construtiva de pensamentos, sentimentos e ações; essa integração conduz ao engrandecimento (empowerment) humano. Gowin propõe uma relação triádica entre aluno, materiais educativos e professor, cujo objetivo é compartilhar significados. Quando esse objetivo é alcançado, o aluno está pronto para decidir se quer ou não aprender significativamente (MOREIRA, 2006, p. 165).

Considera-se o diagrama “Vê” como um recurso instrucional para colaborar na aprendizagem significativa, uma vez que ele nos auxilia a compreender que o conhecimento é uma estrutura organizada de conceitos e portanto pode ser diagramado.

O diagrama “Vê” foi introduzido por Gowin (apud MOREIRA,1981) como uma ferramenta instrucional que permite conectar conceitos, eventos e fatos. Os conceitos são definidos por Gowin como “[...] signos/símbolos que apontam regularidades em eventos e que utilizamos para pensar, pesquisar, aprender, enfim, para dar respostas rotineiras e estáveis ao fluxo de eventos” (GOWIN apud MOREIRA, 1981, p. 98).

Para Gowin, cada evento no diagrama “Vê” abrange o domínio conceitual e o domínio procedimental ou metodológico. O domínio metodológico contempla todos os registros do pesquisador em relação à produção do conhecimento. Corresponde ao “fazer” da pesquisa, considerando que, por meio do domínio metodológico, conseguimos responder a questão investigada e definir qual o seu valor. O domínio conceitual corresponde ao “pensar” da pesquisa, ele esclarece quais os princípios, as teorias e as filosofias usados na pesquisa. Ambos estão em interação, atividade necessária para que se chegue a uma resposta à questão de pesquisa.

Abaixo, ilustra-se o diagrama “Vê” de Gowin (apud MOREIRA, 1981,p.99).

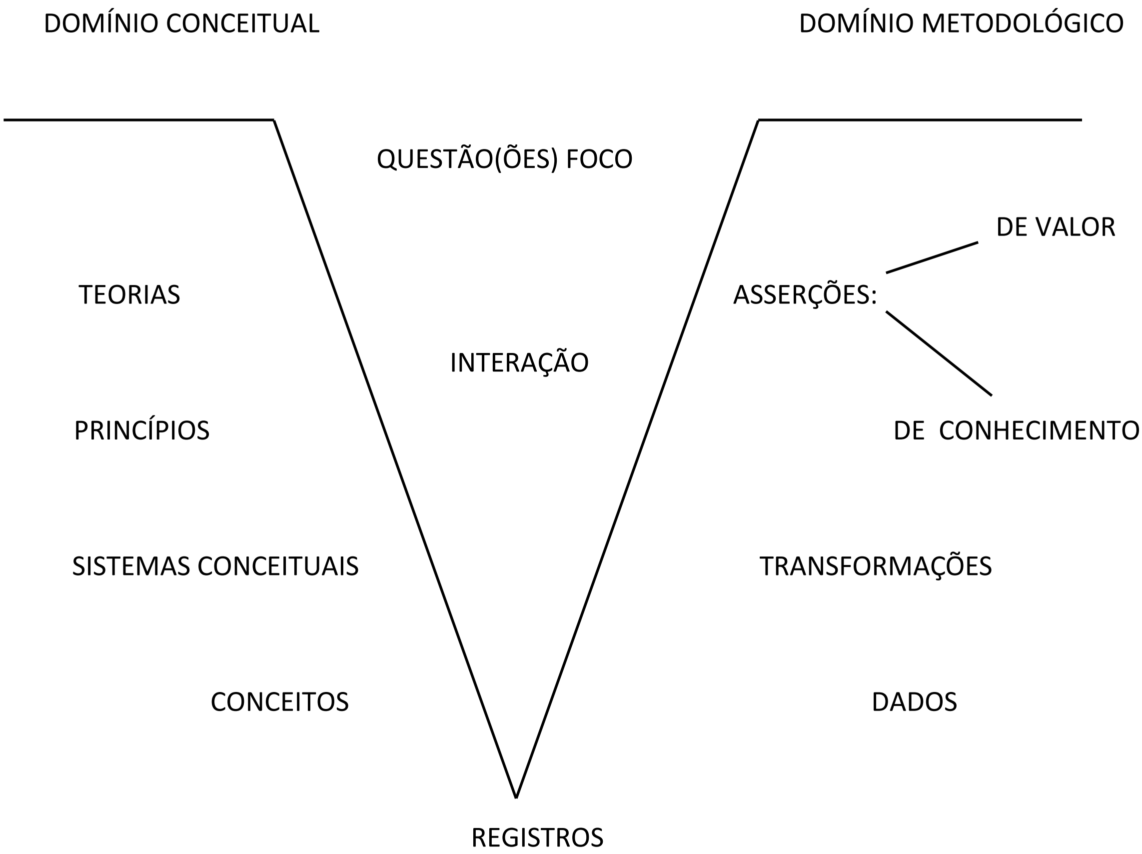


Figura 4: O “Vê” epsitemológico, segundo Gowin.

A(s) questão(ões) foco está(ão) no centro do “Vê”, pois pertence(m) tanto ao domínio conceitual quanto metodológico, é(são) ela(s) que informa(m) sobre o que foi investigado na pesquisa.

Explicitando cada um dos itens do diagrama “Vê”, apresentam-se:

- a(s) questã(ões) foco: identifica(m) o fenômeno de interesse, diz(em) o que foi investigado e geralmente é(são) na forma de uma pergunta;
- evento(s) e ou objeto(s): esclarece(m) como foi realizada a pesquisa ou qual o objeto utilizado para responder à(s) questão(ões) foco;
- filosofia(s): esclarece(m) qual a visão de mundo, quais as crenças que existem a respeito do fenômeno de interesse;
- teoria(s): conjunto(s) organizado(s) de princípios ou leis que guiam o fenômeno de interesse;

- princípio(s): enunciado(s) e lei(s) e relação(ões) que orienta(m) o que se poderia esperar do fenômeno de interesse;

- conceito(s): palavra(s) e ou fato(s) que está(ão) relacionado(as) ao fenômeno de interesse;
- asserção(ões) de valor: declara(m) o valor do fenômeno de interesse;
- asserção(ões) de conhecimento: declara(m) a(s) resposta(s) ao fenômeno de interesse;
- transformações: referem-se às tabelas, gráficos, categorizações e demais formas de organização dos registros efetivados durante o estudo do fenômeno de interesse;
- registros: são os dados brutos registrados durante o estudo do fenômeno de ineresse;

Johnson-Laird (1983), com a teoria dos modelos mentais, fazem menção ao fato de que, frente a um novo conhecimento ou uma situação, o indivíduo cria um modelo mental que, inclusive, poderá vir a interagir com outros conhecimentos ou outras situações e assim evoluir para um esquema de assimilação. Segundo Moreira, “Tal construção reflete uma intencionalidade do sujeito, porque se ele constrói o modelo, é porque quer dar conta da situação” (MOREIRA, 2011, p. 164). Isso poderia ser o primeiro passo para uma aprendizagem significativa.

Vergnaud (apud Moreira, 2002) ressalta o fato de que o conhecimento está organizado em campos conceituais e que a aprendizagem por parte do sujeito é lenta, progressiva, não linear e gradual, na medida em que ele vai dominando conceitos por meio de situações. Ressalta que as situações é que dão sentido aos conceitos. Sendo assim, o professor deveria propiciar aos alunos o maior número de situações, evoluindo das menos elaboradas até as mais elaboradas, não esquecendo do propósito que o aluno evolua dentro do campo conceitual almejado.

Maturana (2001) considera o ser humano como um sistema autopoiético e afirma que, para explicar como se aprende, é necessário compreendê-lo. Para ele, a linguagem é uma forma de explicar os fenômenos e situações enfrentadas pelo indivíduo e tais fenômenos e situações podem ser validadas pela ciência ou porque são aceitas pelo próprio indivíduo no seu cotidiano. A aprendizagem significativa poderá acontecer porque há mudanças internas. O indivíduo, como um sistema autopoiético, é quem vai determinar qual o tamanho do significado de determinado fenômeno ou situação e, por conseguinte, provocar a internalização do conhecimento, mantendo uma certa organização cognitiva.

> [...] ao estudar de perto o fenômeno do conhecimento e nossas ações dele surgidas, é que toda experiência cognitiva inclui aquele que conhece de um modo pessoal, enraizado em sua estrutura biológica, motivo pelo qual toda a experiência de certeza é um fenômeno individual cego em relação ao ato cognitivo do outro, numa solidão que (como veremos) só é transcendida no mundo que criamos junto com ele (MATURANA, VARELA, 2011, p.22).

Moreira (2005) enfatiza que a aprendizagem, dentro de uma óptica contemporânea, não pode preocupar-se apenas em adquirir novos conhecimentos, mas é importante adquiri-los criticamente.

> É através da aprendizagem significativa crítica que o aluno poderá fazer parte de sua cultura e , ao mesmo tempo, não ser subjugado por ela, por seus ritos, mitos e ideologias. É através dessa aprendizagem que ele poderá lidar construtivamente com a mudança ssem deixar-se dominar por ela, manejar a informação sem sentir-se impotente frente a sua grande disponibilidade e velocidade de fluxo, usufruir e desenvolver a tecnologia sem tornar-se tecnófilo. Por meio dela, poderá trabalhar com a incerteza, a relatividade, a não-causalidade, a probabilidade, a não-dicotomização das diferenças, com a ideia de que o conhecimento é construção (ou invenção) nossa, que apenas representamos o mund e nunca o captamos diretamente (MOREIRA, 2005, p.18).

Moreira (2005) sugere alguns princípios para facilitar a aprendizagem significativa crítica, a saber:

- uma negociação de significados entre o aluno e professor, centrada na interação e incentivando a formulação de perguntas ao invés de respostas;

- o uso de uma diversidade de materiais educativos, além do livro-texto, no intuito de facilitar a aprendizagem significativa;

- considerar a aprendizagem como um processo dinâmico de interação, diferenciação e integração entre conhecimentos novos e pré-existentes, incentivando o aluno a não ser passivo durante o processo, mas argumentar, discutir e socializar seus conhecimentos;

- aprender uma disciplina (Biologia, Matemática, História, Física, Literatura, entre outras) é apropriar-se de sua linguagem, com seus símbolos, signos, palavras e proposições, considerando seus significados;

- observar que o significado está nas pessoas e não nas palavras, por isso, elas só poderão dar o significado para aquilo que está ao seu alcançe ou se forem motivadas (organizadores prévios) a pensar sobre o assunto;

- considerar o erro como parte integrante do processo de aprendizagem e a sua superação como uma evolução no conhecimento de determinado conteúdo, pois conhecimento não é algo permanente, está em constante modificação e reestruturação e aprendemos corrigindo nossos erros;

- desaprender para reestruturar algum conhecimento prévio que possa estar impedindo a aprendizagem, ou porque, devido ao ambiente que está em constante transformação, há a necessidade de rever conceitos e estratégias para poder sobreviver;

- perceber que as perguntas movem a curiosidade, e o conhecimento humano, por vezes, utiliza metáforas para respondê-las;

- incentivar os alunos a perguntar ao invés de responder;

- evitar a utilização apenas do quadro como forma de transmissão de conhecimento, mas diversificar as estratégias.

A aprendizagem significativa crítica deve permitir que o aluno torne-se autônomo e participe criticamente da sociedade em constante transformação, sentindo-se parte integrante da mesma e colaborando com os seus avanços.

> Por uma questão de sobrevivência, é preciso mudar o foco da aprendizagem e do ensino que busca facilitá-la. Meu argumento, parafraseando Postman e Weingartner (1969) é que este foco deveria estar na aprendizagem significativa subversiva, ou crítica como me parece melhor, aquela que permitirá ao sujeito fazer parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, estar fora dela, manejar a informação, criticamente, sem sentir-se imponente frente a ela; usufruir a tecnologia sem idolatrá-la; mudar sem ser dominado pela mudnaça; viver em uma economia de mercado sem deixar que este resolva sua vida; aceitar a globalização sem aceitr suas perversidades; conviver com a incerteza, a relatividade, a causalidade múltipla, a construção metafórica do conhecimento, a probabilidade das coisas, a não dicotomização das diferenças, a recursividade das representações mentais; rejeitar as verdades fixas, as certezas, as definições absolutas, as entidades isoladas (MOREIRA, 2005, p. 39).

Nesse sentido, Moreira (2005) também sugere que o professor, ao elaborar um material didático, considere dez princípios facilitadores de uma aprendizagem significativa crítica:

- considerar o conhecimento prévio do aluno, pois temos mais facilidade de aprender a partir do que já sabemos;

- incentivar a pergunta, valorizando a resposta;
- utilizar diversos materiais educativos;
- analisar o erro do aluno não como forma de punição, mas incentivá-lo a corrigi-lo;
- permitir que o aluno protagonize o significado do que está aprendendo;
- considerar que o conhecimento é gradual, não linear, com rupturas e incertezas;
- ficar atento, pois às vezes o conhecimento prévio pode estar obliterando a aprendizagem;
- permitir que o aluno explicite o seu conhecimento pela linguagem;
- elaborar materiais potencialmente significativos que considerem as diversidades;
- ser um professor de “boca fechada”, ou seja, dar menos respostas e escutar mais os alunos;

Moreira (2005) cita ainda as Unidades de Ensino Pontencialmente Significativas (UEPS) como uma proposta didática para alterar, pelo menos dentro do possível, o modelo de narrativa que costumamos ter em sala de aula e que já sabemos que não está produzindo aprendizagens.

As UEPS são sequências didáticas de ensino, teoricamente fundamentadas, voltadas para a aprendizagem significativa, elaboradas pelo professor, com tópicos específicos de conhecimentos a serem desenvolvidos. Seu objetivo é auxiliar a aprendizagem significativa por meio de atividades que permitam a explicitação de conhecimentos dos alunos para posterior análise e discussão.

A construção das UEPS envolve:

- título: de acordo com o conteúdo/tópico a ser estudado;
- objetivo: definir os objetivos a serem alcançados nesta UEPS;
- filosofia: só há ensino se há aprendizagem e esta deve ser significativa;
- marco teórico: a teoria da aprendizagem significativa e seus colaboradores.

Além desses cinco componentes, as UEPS também envolvem os seguintes princípios:

- não esquecer que o conhecimento prévio é a variável que mais influencia a aprendizagem significativa;
- pensar, sentir e agir estão integrados no ser que aprende quando a aprendizagem é significativa;
- o aluno deve estar interressado em aprender;

- organizadores prévios podem e devem ser uitlizados, sempre que necessários;
- são as situações-problema que dão sentido ao conhecimento (VERGNAUD, 1990) e elas são criadas para despertar a curiosidade do aluno;
- as situações- problema podem funcionar como organizadores prévios;
- as situações-problema devem ser propostas em um nível crescente de complexidade;
- diante de uma nova situação, é importante criar um modelo mental, na memória de trabalho, análogo estruturalmente a essa situação (JOHNSON-LAIRD, 1983);
- não esquecer de levar em conta, na organização do ensino, a diferenciação progressiva, a reconciliação integrativa e a consolidação (Ausubel, 1980);
- ao longo da aprendizagem, progressivamente, deve-se buscar evidências de que ela é significativa;
  o professor é organizador e mediador de situações-problema (VERGNAUD, 1990; GOWIN, 1981);
- deve-se considerar a linguagem e a interação social durante o processo de aprendizagem;
- existe uma relação triádica professor, aluno e materiais educativos (GOWIN, 1981);
- essa relação poderá ser quádrica na medida em que o computador não for utilizado apenas como material educativo;
- a aprendizagem deve ser significativa e crítica (MOREIRA, 2005);
- a aprendizagem significativa crítica estimula a formulação de perguntas ao invés da memorização e o abandono das aulas narrativas em prol de aulas com materiais e estratégias diversificadas.

Para a construção das UEPS, também são considerados os seguintes aspectos sequenciais:

- definir os assuntos a serem abordados e identificar objetivos a serem alcançados;
- criar momentos introdutórios (discussão, mapa conceitual, questionário, filme, história, texto, ...) de aprendizagem que permitam que o aluno externalize ou registre o seu conhecimento prévio sobre o assunto;

- considerar o conhecimento prévio demonstrado na atividade anterior e elaborar situações de aprendizagem que permitam que o aluno perceba uma relação entre os seus conhecimentos prévios e os novos conhecimentos;
- respeitando a diferenciação progressiva, propor outras atividades, relacionadas ao assunto, mas que continuem permitindo ao aluno explicitar seus conhecimentos;
- retomar os aspectos mais gerais daquilo que se vai ensinar e, a partir deles, ressignificar os novos conhecimentos, evoluindo progressivamente para características mais específicas do conteúdo por meio novas situações de aprendizagem;
- concluir as situações de aprendizagem, definindo, anotando e retomando as características mais importantes e relevantes, integrando e buscando a reconciliação integrativa;
- propor novas situações de aprendizagens em níveis de maior complexidade em relação às situações anteriores;
- considerar também atividades que permitam a discussão em pequenos grupos e posterior discussão que envolva todos os aluns, sempre, com a mediação do professor;
- avaliar durante o processo de aprendizagem por meio de registros que possam dar evidências de uma aprendizagem de real significado;
- considerar, na avaliação, os aspectos individuais para a resolução de situações de aprendizagem, levando em conta o nível de interpretação e resolução conceitual e procedimental da mesma, bem como permitir avaliações colaborativas observando os mesmos itens. A avaliação permitirá também a validação das situações de aprendizagem;
- considerar que a mediação do professor pode acontecer a qualquer momento do processo como forma de esclarecer possíveis dúvidas;
- a UEPS atingirá êxito se os alunos apresentarem evidências de uma aprendizagem de real significado, interpretando, resolvendo e aplicando os conhecimentos adquiridos de forma que demonstrem terem atingido um domínio desse consteúdo.

Quanto aos aspectos transversais envolvidos na construção das UEPS, podem ser citados os que se passa a listar:

- considerar atividades diferenciadas durante o processo e incentivar o questionamento em lugar das respostas prontas;
- propor que os alunos formulem situações de aprendizagem em relação ao conteúdo em questão;
- permitir momentos individuais e em grupo durante as situações de aprendizagem.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

No intuito de investigar como uma metodologia baseada na TAS de Ausubel poderia contribuir para a construção de uma aprendizagem significativa no campo conceitual das matrizes, optou-se por utilizar uma metodologia qualitativa. Por considerar que essa metodologia poderia auxiliar de uma forma mais adequada a compreender o fenômeno, suas variáveis e relações, seus participantes e o local da pesquisa, uma vez que esse ambiente era o mesmo onde a pesquisadora também era professora. Sendo assim, julgou-se ser a análise textual discursiva a opção mais apropriada para a pesquisa. Segundo Moraes e Galiazzi:

> O processo da Análise Textual Discursiva tem fundamentos na fenomenologia e na hermenêutica. Valoriza os sujeitos em seus modos de expressão dos fenômenos. Centra sua procura em redes coletivas de significados construídos subjetivamente, os quais o pesquisador se desfia a compreender, descrever e interpretar. São processos hermenêuticos (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.169).

Era necessário observar, compreender, refletir sobre o ambiente de pesquisa no intuito de transformá-lo e promover melhorias no ensino e na aprendizagem de matrizes. Essa, também, é uma característica da pesquisa-ação, na qual caminham juntas a prática investigativa, a prática reflexiva e a prática educativa. Há de se cuidar que, sendo o próprio investigador o agente da pesquisa, suas crenças e seus pressupostos teóricos não causem influência na pesquisa.

A Análise Textual Discursiva valoriza a descrição e a interpretação do fenômeno, permitindo uma postura analítica do pesquisador. O pesquisador assume, por meio dela, um desafio permanente de produzir sentidos, categorizar e reconstruir significados sobre os dados obtidos referente ao tema que investiga. Todo esse processo ocorre concomitantemente com a pesquisa, podendo assumir uma perspectiva transformadora da própria realidade que pesquisa. Categorizar, nessa metodologia, significa valorizar uma parte do todo para melhorar a compreensão do todo e, se necessário, intervir ao longo do processo. O pesquisador precisa estar disposto a desconstruir suas ideias e convicções para imergir no processo e dele extrair novos e originais conhecimentos sobre a pesquisa.

Ao analisar os dados e as informações coletadas, procedeu-se a uma categorização e posterior produção de novas compreensões sobre o fenômeno em questão.

4.1.METODOLOGIA DA PRÁTICA PEDAGÓGICA

Foram construídos e utilizados os seguintes instrumentos de coleta de dados durante a pesquisa, a saber: uma entrevista individual sobre as dificuldades observadas pelo aluno em relação ao ensino e a aprendizagem de conteúdos de Matemática; anotações referentes aos conhecimentos prévios dos alunos em relação ao tema de matrizes; anotações referentes às atividades aplicadas; anotações do desempenho dos alunos durante a resolução das situações de aprendizagem e nas avaliações formais, na busca de evidências de uma aprendizagem significativa. Também foi realizada uma entrevista ao final da pesquisa para coletar as impressões dos alunos sobre o trabalho realizado.

Os materiais coletados estão categorizados e devidamente registrados ao longo desta tese.

As UEPS (Unidades de Ensino Potencilamente Significativas) foram planejadas e aplicadas pela pesquisadora no intuito de favorecer o ensino e aprendizagem do campo conceitual das matrizes, tendo como fundamentação teórica a TAS de Ausubel e colaboradores. Segundo Moreira, ”São sequências de ensino fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, não mecânica, que podem estimular a pesquisa aplicada em ensino, aquela voltada diretamente à sala de aula”.(MOREIRA,2017,p.2).

As atividades foram programadas e realizadas em duas turmas da segunda série do ensino médio de uma escola da rede particular de Novo Hamburgo, nas quais a pesquisadora leciona a disciplina de Matemática. Foram 51 alunos envolvidos na pesquisa: uma turma A, com 28 alunos, sendo 14 meninos e 14 meninas, com cinco períodos de Matemática por semana, e a outra turma B, com 23 alunos, sendo 09 meninos e 14 meninas, com quatro períodos de Matemática por semana. A Escola oferece duas modalidades de matrícula para os responsáveis: uma modalidade em que o aluno pertence a uma turma de segunda série que tem 33 horas-aula semanais, com isso 5 horas aula de Matemática por semana (Turma A), e outra modalidade em que o aluno pertence à turma que tem 25 horas-aula por semana, com isso 4 horas-aula de Matemática por semana (Turma B). É importante considerar que, sendo uma turma regular de ensino, por vezes nem todos os alunos estavam presentes, e o fato de cargas horárias diferenciadas também provocou um ritmo de trabalho diferenciado em cada turma, mas que será descrito ao longo do texto.

Em atendimento ao Comitê de Ética da Universidade, a escola foi informada sobre a pesquisa e autorizou todos os procedimentos, respaldada pelos responsáveis de cada aluno (Anexo 01).

A escola é parte integrante de quatro unidades de ensino. Duas delas atendem a turmas desde a educação Infantil até o sexto ano, nos turnos da manhã e tarde, e ficam na mesma cidade, Novo Hamburgo, porém, em locais diferentes. A terceira unidade conta com as turmas do Ensino Fundamental, do Ensino Médio, do Curso Técnico e do Ensino Superior, nos três turnos, sendo essa a unidade em que a pesquisa foi realizada, localizada em Novo Hamburgo.

O momento da pesquisa, em sala de aula, aconteceu de setembro de 2016 até novembro de 2016, nos períodos destinados à disciplina de Matemática, e respeitaram o conteúdo programático da série bem como as atividades já incluídas no calendário escolar da escola.

Anteriormente às UEPS, procederam-se a entrevistas individuais (Apêndice A) no intuito de investigar quais seriam as possíveis dificuldades dos alunos no ensino e na aprendizagem de Matemática percebidas até o momento e quais as posturas que costumavam utilizar para amenizar essas dificuldades.

Alguns motivos que levaram a professora e pesquisadora a trabalhar com essas turmas foram as dificuldades conceituais e procedimentais já evidenciadas durante o ano letivo em outros conteúdos programáticos e, consequentemente, com rendimentos abaixo do esperado (a média da escola é a nota 7,0). Também se levou em consideração, a exigência, por parte da escola, de melhorar os escores de resultados no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e o fato desta professora pesquisadora considerar ser possível de se trabalhar uma matemática com maior significado e que possa desenvolver o raciocínio do aluno, permitindo que ele não decore apenas regras sem sentido, mas venha a compreendê-las e aplicá-las.

A seguir, descrevem-se os resultados obtidos no questionário inicial, as atividades planejadas pela professora pesquisadora e os resultados obtidos ao longo da pesquisa, bem como os resultados obtidos no questionário final.

5 RESULTADOS DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentam-se os resultados das entrevistas individuais, os resultados obtidos com as UEPS, os resultados obtidos pelas avaliações formais já contidas no calendário da Escola e os resultados das entrevistas realizadas ao final da pesquisa com os mesmos alunos.

5.1 RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO INDIVIDUAL

A primeira atividade envolveu um questionário individual (Apêndice A) cujos objetivos eram:

- conhecer um pouco mais sobre suas expectativas, dificuldades e interesses;

- identificar suas dúvidas, erros ou motivos para as notas baixas neste componente curricular;

- diagnosticar se percebem ter e qual a relação da Matemática com cotidiano;

- coletar informações que pudessem contribuir no encaminhamento das atividades;

- criar um vínculo mais próximo do aluno, para compreender um pouco melhor as suas angústias em relação à Matemática e como ele costuma resolvê-las.

As respostas poderiam fornecer dados para mapear as possíveis dificuldades dos alunos no ensino e na aprendizagem de Matemática percebidas até o momento e quais as posturas que os alunos costumavam utilizar para amenizar essas dificuldades, auxiliando no planejamento e na aplicação das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS).

O Quadro 1 apresenta a primeira pergunta do questionário e as respostas dos alunos da turma A.

1. Você considera que possui dificuldades em Matemática?			
	Resposta	**Número de alunos**	**Percentual**
1	Sim	15	60%
2	Não	10	40%
	Total	25	100%

Quadro 1. Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta do questionário.
Fonte: a autora

O Quadro 2 apresenta as respostas da turma B para esta mesma pergunta.

1. Você considera que possui dificuldades em Matemática?			
	Resposta	**Número de alunos**	**Percentual**
1	Sim	10	77%
2	Não	3	23%
	Total	13	100%

Quadro 2. Respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta do questionário.
Fonte: a autora

Os alunos que responderam não ter dificuldades em Matemática na turma A. Alegam que isso se deve aos seguintes fatos:

- Com os exercícios consigo entender;
- Vejo que é uma matéria fácil, na explicação eu aprendo;
- Geralmente entendo o conteúdo na primeira explicação, não tenho dificuldades ao fazer os exercícios. Estudo pouco e é o suficiente, pois sempre obtive notas altas;
- Não sei, apenas não tenho;
- Pois eu sempre tive facilidade em Matemática, mas tenho muita falta de atenção;
- Pra mim é fácil trabalhar com números, só é preciso prestar um pouco de atenção nas explicações;
- Porque eu vejo sentido nos números;
- Porque sempre gosto de fazer os exercícios e é uma matéria que me interessa;
- Possuo facilidade para resolver cálculos, indo mal apenas caso não preste atenção em sala de aula;
- Porque sempre entendo os conteúdos em aula, raramente preciso estudar em casa e consigo resolver as questões matemáticas com facilidade.

Na turma B, alegam:

- Vou bem, mas há momentos em que dá branco;
- Mais fácil, compreender a lógica;
- Não sei, acho que tenho facilidades, , é uma matéria que eu gosto.

Porém percebe-se que a maioria dos alunos indica ter dificuldades em Matemática e, quando questionados sobre se eles conseguem exemplificar essas dificuldades e em quais momentos elas acontecem, vem uma variedade de respostas.

O Quadro 3 apresenta as respostas da turma A.

1.1.1.	Você consegue exemplificar essas dificuldades e em que momentos elas acontecem?	
	Exemplos citados pelos alunos	**Número de alunos**
1	Meios (Como fazer?)	1
2	Atenção	2
3	Regras Básicas (fração, radicais, mmc)	5
4	Interpretação	7
5	Avaliações	8
6	Exercícios	9

Quadro 3. Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta do questionário.
Obs. Alguns alunos responderam duplamente
Fonte: a autora

O Quadro 4 apresenta as respostas da turma B.

1.1.1.	Você consegue exemplificar essas dificuldades e em que momentos elas acontecem?	
	Exemplos citados pelos alunos	**Número de alunos**
1	Depende do cálculo, depende das fórmulas	1
2	Exercícios	2
3	Compreensão	1
4	Avaliações (nervosismo)	4
5	Falta atenção	2
6	Erro de sinal	2
7	Não procuro esclarecimentos	1
8	Ás vezes tem conteúdo que não consigo aprender	1
9	Regras básicas (sinal, divisão, fração, racionalização)	3
10	Misturo tudo	1
11	Todos os momentos	1

Quadro 4. Respostas dos alunos da turma B para a segunda pergunta do questionário.
Obs.: Alguns alunos responderam duplamente
Fonte: a autora

Percebe-se, nas respostas dadas pelos alunos das duas turmas, que as avaliações são citadas como um dos momentos de maior percepção das dificuldades, quer talvez por nervosismos ou dificuldades de interpretação/compreensão. Apesar das diversas dificuldades citadas, na maioria, referem-se a dificuldades em regras básicas, tais como sinal, divisão, fração e racionalização.

No intuito de saber como costumam resolver essas dificuldades, partiu-se para a terceira pergunta e observaram-se as seguintes respostas.

1.1.1. Como você costuma resolver as suas dificuldades em Matemática?		
	Alternativas citadas pelos alunos	**Número de alunos**
1	Prestando atenção	1
2	Auxílio com colegas	5
3	Auxílio na internet	6
4	Auxílio com a professora	7
5	Refazer os exercícios	9

Quadro 5. Respostas dos alunos da turma A para a terceira pergunta do questionário.
Obs.: Alguns alunos responderam duplamente
Fonte: a autora

1.1.1. Como você costuma resolver as suas dificuldades em Matemática?		
	Alternativas citadas pelos alunos	**Número de alunos**
1	Procuro me acalmar	1
2	Prestar atenção	1
3	Fazer exercícios	2
4	Revisar cálculo	2
5	Aula particular	2
6	Professora	5
7	Colegas	3
8	Internet	5

Quadro 6. Respostas dos alunos da turma B para a terceira pergunta do questionário.
Obs.: Alguns alunos responderam duplamente
Fonte: a autora

Aqui há uma tendência muito clara de elucidar suas dificuldades com a professora e na internet, praticamente esas respostas empatam nas duas turmas. O fato de se procurar auxílio na internet é relevante e considera-se até preocupante, uma vez que, muitas vezes, ou talvez nunca, haja um profissional por perto para avaliar a forma e a autenticidade do que está sendo abordado. Entende-se que demonstra uma necessidade de o professor realmente assumir o seu papel de mediador e intervir no processo de ensino e aprendizagem dentro da sala de aula com intervenções esclarecedoras e de real significado para o aluno. Segundo Becker:

> O professor é entendido, ora como organizador de situações, como alguém que propõe desafios, que faz perguntas, ou como orientador da aprendizagem; ora como alguém que faz as crianças pensarem, que ensina a pensar, a fazer com que os alunos desenvolvam habilidades, a ensinar, dar ferramentas, a mostrar como usar as ferramentas; ora, ainda, a colaborar para o insight do aluno, a expor, estimular, transmitir, dar conteúdo; enfim, ‘chegar onde o aluno está’ (BECKER, 2012, p. 180).

A quarta e última pergunta do questionário tinha o objetivo de obter do aluno a explicitação do que, realmente, no ensino e na aprendizagem de Matemática, ele considerava ter significado e aplicação para alguma situação do cotidiano.

O quadro 7 apresenta as respostas da turma A.

1. Você consegue dar significado ao conteúdo desenvolvido em aula, por exemplo, aplicando-o em alguma situação do cotidiano?			
Respostas	Número de alunos	Percentual	Motivos apresentados
Não	7	28%	Só regra de três, soma, divisão e no cálculo das notas das provas Só ao fazer compras Só para quem faz engenharia e setor financeiro
Sim	9	36%	Em tudo, comprar algo envolve Matemática e muitas profissões Feira de Ciências Fazer compras Progressão Aritmética e Progressão Geométrica Viagem, quilometragem Pagar contas e receber troco Auxilia no raciocínio, ajuda a resolver questões diárias
Às vezes sim	7	28%	Trigonometria, os ângulos Bháskara Cálculo, finanças, viagem Bhàskara, geometria e Matemática Financeira Ir na padaria Somente em Matemática Financeira e Geometria
Não souberam responder	2	8%	
Total	25	100%	

Quadro 7: Respostas dos alunos da turma A para a quarta pergunta do questionário.
Fonte: a autora

O quadro 8 apresenta as respostas da turma B.

1. Você consegue dar significado ao conteúdo desenvolvido em aula, por exemplo, aplicando-o em alguma situação do cotidiano?			
Respostas	Número de alunos	Percentual	Motivos apresentados
Não	5	38,46%	Esse ano não, mas a gente já usou em porcentagem
Sim	5	38,46%	Ângulos na academia em exercícios, o personal orienta Na academia Mercado e jogando vôlei Supermercado, comparando preços Relógio, porcentagem, metade, skate 360° (ângulo, manobras)
Às vezes Sim	3	23,08%	Depende do conteúdo Soma, subtração e Bháskara Não sei
Total	13	100%	

Quadro 8: respostas dos alunos da turma B para a quarta pergunta do questionário.
Fonte: a autora

Ao observarmos os resultados tabulados nas duas turmas, vemos que aproximadamente um pouco mais de 50% dos alunos considera a Matemática como uma disciplina de aplicação em diversos campos do cotidiano, porém com citações pobres dessas aplicações, e algumas delas relacionadas possivelmente a conteúdos que estão mais próximos das suas lembranças, por intensidade de utilização ou que tenham tido algum significado. Segundo Consenza e Guerra:

> Quem ensina precisa ter sempre presente a indagação: por que aprender isso? E em seguida: qual a melhor forma de apresentar isso aos alunos, de modo que eles reconheçam como significante? Terá mais chance de ser significante aquilo que tenha ligações com o que já é conhecido, que atenda a expectativas ou seja estimulante e agradável. Uma exposição prévia do assunto a ser aprendido, que faça ligações do seu conteúdo com o cotidiano do aprendiz e que crie expectativas adequadas é uma boa forma de atingir esse objetivo. Um ambiente estimulante e agradável pode ser criado envolvendo os estudantes em atividades em que eles assumam um papel ativo e não sejam meros expectadores. Lições centradas nos alunos, o uso da interatividade, bem como a apresentação e a supervisão de metas a serem atingidas são também recursos compatíveis com o que conhecemos do funcionamento dos processos atencionais (COSENZA e GUERRA, 2011, p. 48).

Ao concluir essa etapa da pesquisa, pôde-se perceber que os alunos têm uma concepção de que Matemática é parte integrante do cotidiano, mas, por vezes, não conseguem identificá-la nem compreendê-la dentro desse contexto. Isso talvez se deva ao fato de que, na sala de aula, haja uma preocupação excessiva com os conteúdos em detrimento das atividades de contextualização e da aplicabilidade dos conceitos compreendidos. Isso leva a refletir e a repensar sobre o fazer pedagógico.

Partiu-se, então, para a construção de um mapa conceitual que permitisse à professora pesquisadora organizar e planejar as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS).

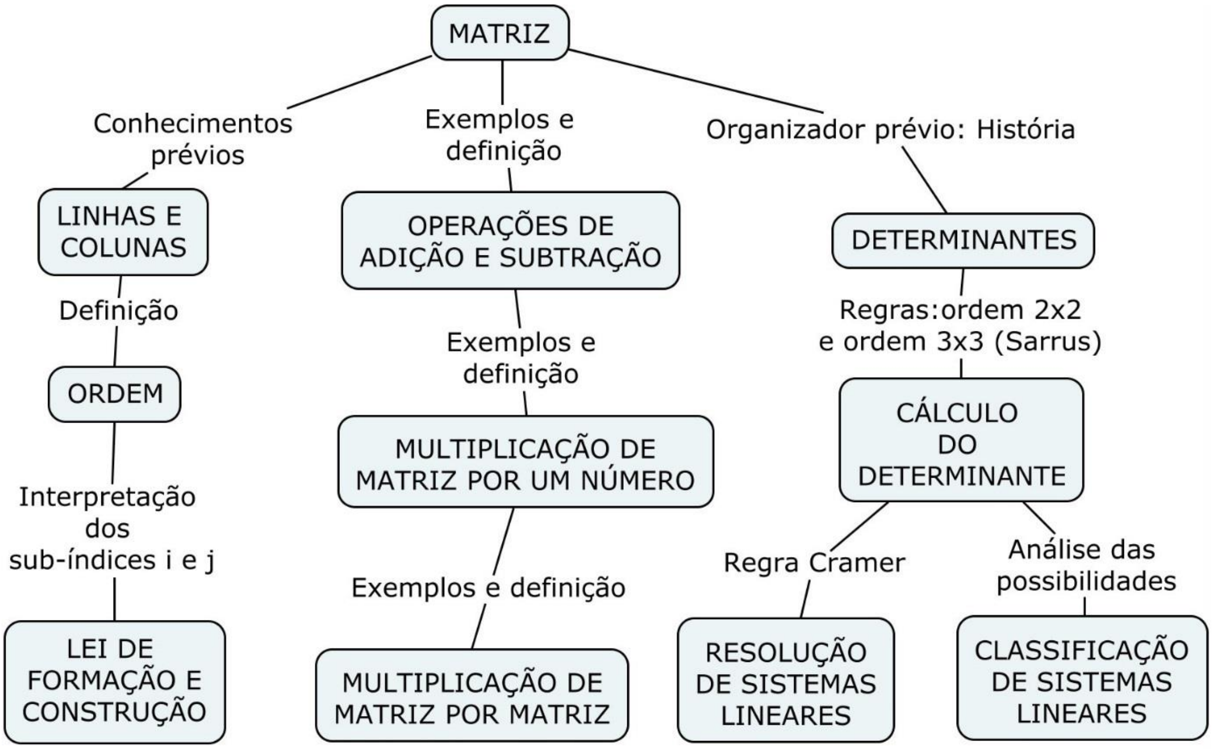


Figura 5: Mapa conceitual do conteúdo de Matriz
Fonte: a autora

Segundo Moreira: “O mapeamento conceitual é uma técnica muito flexível e em razão disso pode ser usado em diversas situações, para diferentes finalidades: instrumento de análise do currículo, técnica didática, recurso de aprendizagem, meio de avaliação” (Moreira e Buchweitz apud MOREIRA, 2011, p.127).

Foram planejadas oito UEPS, cujos resultados passam a ser relatados a seguir.

5.2 BUSCA DE EVIDÊNCIAS DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA A PARTIR DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS ÀS UEPS E ÀS AVALIAÇÕES FORMAIS

Na sequência, serão descritas as atividades planejadas e aplicadas (UEPS) no ensino e na aprendizagem de matrizes, bem como os resultados obtidos.

O relato das atividades, as anotações e os registros da professora pesquisadora seguem a ordem de realização das mesmas em cada uma das turmas, às quais chamam-se de turmas A e B, como já citado.

É importante considerar que, durante todo o projeto de pesquisa, a professora pesquisadora precisou respeitar o cronograma, já em andamento, da escola considerando a política pedagógica. Foram utilizados os períodos destinados à disciplina de Matemática em cada uma das turmas A e B para trabalhar com o projeto de pesquisa, observando-se que alguns intervenientes se fizeram presentes, como por exemplo:

- nem sempre todos os 51 alunos se faziam presentes à aula;

- alguns dos momentos, já planejados, sofriam algum tipo de alteração em função da modificação do cronograma letivo, discutido nas reuniões semanais;

- a escola, na série em que foi realizada a pesquisa, adota um livro-texto (versão impressa e digital) que não pôde ser desconsiderado no momento do desenvolvimento da pesquisa (geralmente ele era utilizado para exercícios de reforço à aprendizagem);

- as avaliações sistemáticas (PAS – Projeto de Avaliação Sistemática[1]), incluídas no calendário escolar sobre o conteúdo em desenvolvimento, considerando questões de vestibular e de ENEM, continuaram acontecendo.

Antes de aplicar o questionário inicial, foi esclarecido aos alunos que, a partir daquele momento, trabalhariam de uma forma diferente e que suas respostas seriam muito importantes para o processo de pesquisa e aprendizagem. Também se reforçou que não se preocupassem com o “certo” e o “errado”, mas que procurassem responder às atividades propostas com a maior sinceridade possível para que se encaminhassem as soluções para as indagações.

5.2.1 Busca de evidências de aprendizagem significativa a partir da análise das respostas obtidas na UEPS 01 e na UEPS 02

A UEPS 01 (Apêndice B) foi considerada como uma atividade motivadora para a definição e a escrita de matriz, identificando linhas, colunas e seus elementos.

Pretendia-se que a UEPS 01 tivesse significado para o aluno, incentivando a sua reflexão, estabelecendo relações com conceitos já conhecidos, reorganizando-os ou fortalecendo-os. Surgiu a ideia da tabela de classificação do Brasil nas Eliminatórias da Copa do Mundo de 2018. A tabela serviu para que os alunos, por meio de perguntas, retirassem informações da mesma e identificassem alguns elementos regulares e constantes na construção de uma tabela (linha, coluna, tamanho e informações marginais), para depois associar com o tema Matriz (um

[1] PAS – Projeto de Avaliação Sistemática – Projeto inserido no calendário da escola, que acontece três vezes no trimestre, contendo cinco questões de cada componente curricular que envolvem o conteúdo trabalhado e têm como objetivo avaliar o desempenho dos alunos, simulando uma situação de vestibular e de ENEM.

conjunto de elementos/informações dispostos em linhas e colunas). Foi esclarecido que as informações marginais não contabilizariam como sendo linhas e colunas, apenas o conteúdo da tabela seria analisado.

A escolha dessa UEPS 01 partiu do pressuposto de que:

> A aprendizagem significativa é aquela em o significado do novo conhecimento é adquirido, atribuído construído, por meio da intervenção de algum conhecimento prévio, especificamente relevante, existente na estrutura do aprendiz. Interação é a palavra-chave: interação entre conhecimentos novos e conhecimentos prévios (MOREIRA, 2008, p.15).

Todas as perguntas da UEPS 01 tiveram as respostas com resultados corretos acima de 80% nas turmas A e B, como evidenciam os quadros seguintes.

1) Para verificar qual a classificação do Brasil nas eliminatórias, até o momento, qual a linha que você consultaria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
a segunda linha	15	88%
a segunda coluna	01	6%
Classificação	01	6%
TOTAL	17	100%

Quadro 9: Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta da UEPS 01
Fonte: a autora

1) Para verificar qual a classificação do Brasil nas eliminatórias, até o momento, qual a linha que você consultaria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
A segunda linha	14	74%
Linha de classificação	02	11%
2.1	01	5,3%
A dos pontos 2:1 – 2:5	01	5,3%
A coluna “p’ e a segunda linha	01	5,3%
TOTAL	19	100%

Quadro 10: Respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta da UEPS 01
Fonte: a autora

Observando os quadros 9 e 10, constata-se que nem todos os alunos responderam da mesma forma, o que leva a considerar que, como ainda não sabem a notação e a representação formal de uma matriz, sentem-se livres para efetuarem o registro que melhor lhes convier.

2) Para verificar qual o número de empates que os times têm nas eliminatórias, até o momento, qual a coluna que você consultaria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
a quarta coluna	16	94%
a quinta coluna	01	6%
TOTAL	17	100%

Quadro 11: Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta da UEPS 01
Fonte: a autora

2) Para verificar qual o número de empates que os times têm nas eliminatórias, até o momento, qual a coluna que você consultaria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
a quarta coluna	16	84%
4	03	16%
TOTAL	19	100%

Quadro 12: Respostas dos alunos da turma B para a segunda pergunta da UEPS 01
Fonte: a autora

Nesta segunda pergunta da UEPS 01, percebe-se que praticamente foi unânime a definição de que coluna é a posição vertical para o elemento/informação a ser colhida na tabela.

3) Em que linha e coluna você identificaria o número de pontos que o Brasil tem até o momento?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
segunda linha primeira coluna	09	53%
primeira coluna segunda linha	03	17%
linha 2 e primeira coluna	01	6%
segunda linha, segunda coluna	01	6%
primeira coluna	01	6%
2 e 1	01	6%
segunda coluna	01	6%
TOTAL	17	100%

Quadro 13: Respostas dos alunos da turma A para a terceira pergunta da UEPS 01
Fonte: a autora

3) Em que linha e coluna você identificaria o número de pontos que o Brasil tem até o momento?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Na quinta linha e primeira coluna	12	63%
Coluna 1 e linha 5	03	16%
Na linha 5 coluna “p”	01	5,3%
Linha “p”	01	5,3%
Na primeira linha vertical, quinta linha horizontal	01	5,3%
Na coluna “p”	01	5,3%
TOTAL	19	100%

Quadro 14: Respostas dos alunos da turma B para a terceira pergunta da UEPS 01
Fonte: a autora

Nesta etapa da UEPS 01, já se intensificaram os graus de interpretação e exigência ao acrescentar uma pergunta que questiona sobre linha e coluna ao mesmo tempo. O que fica evidente é que isso não se torna mais problema, pois a maioria identifica ambos os elementos na tabela, linha como a posição horizontal e coluna como a posição vertical.

4) Qual é o saldo de gols do Brasil até o momento? Como você fez para identificar essa informação?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
tem 7, no SG (Saldo de Gols), segunda linha e oitava coluna.	07	41%
olha-se a coluna SG (saldo de Gols). Oitava coluna e segunda linha	05	29%
7, olhando a oitava coluna.	02	12%
8, olhei na tabela	01	6%
olha na oitava coluna	01	6%
olhando a nona coluna da segunda linha	01	6%
TOTAL	17	100%

Quadro 15: Respostas dos alunos da turma A para a quarta pergunta da UEPS 01
Fonte: a autora

4) Qual é o saldo de gols do Brasil até o momento? Como você fez para identificar essa informação?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Na quinta linha, oitava coluna	07	37%
Na oitava coluna	06	31%
8,5	02	11%
Na coluna “SG”	02	11%
14, olhando a linha GP	01	5,3%
Fui à oitava linha e olhei a correspondente ao Brasil, ou seja, a quinta linha horizontal, 6 é o saldo	01	5,3%
TOTAL	19	100%

Quadro 16: Respostas dos alunos da turma B para a quarta pergunta da UEPS 01
Fonte: a autora

Até este momento, ainda não se tinha definido formalmente a matriz, pois se abordavam as informações da tabela fornecida pela professora pesquisadora sem preocupação com as notações, sem medo de acertar ou errar, apenas registrando e compartilhando as respostas. O que se percebe é que alguns registraram a coluna antes da linha, sem saber que, depois, por ocasião da definição, seria feita uma combinação que integra a representação e a linguagem formal das matrizes, ou seja, primeiro identifica-se a linha e depois a coluna na qual o elemento fica localizado na matriz.

Para finalizar a UEPS 01, procedeu-se a formalização da escrita. Combinou-se que, em primeiro lugar, registrar-se-ia a linha e, depois, a coluna para identificar a posição do elemento na matriz. Definiu-se o que seria uma representação matricial e seus elementos com naturalidade, assim como o tamanho da matriz. Os alunos não demonstraram dificuldades na notação.

Como forma de ratificar a definição e a escrita formal da matriz, pariu-se para a UEPS 02 (Apêndice C), direcionada a fazer com que os alunos, em duplas, elaborassem perguntas, a partir de recortes de tabelas obtidas no jornal da cidade, para que os colegas respondessem. Em seguida, fariam a troca do material com os colegas para que esses respondessem as perguntas formuladas. Novamente, de posse das respostas, realizariam a correção das perguntas.

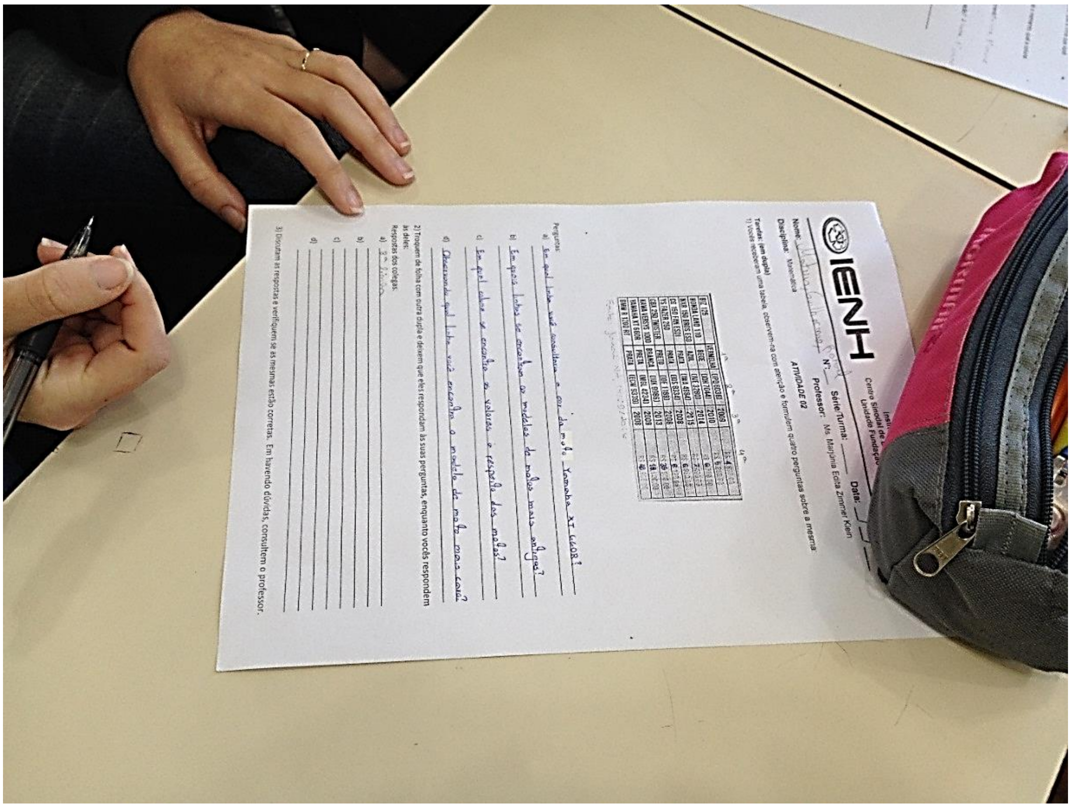


Figura 6: Aluno resolvendo a UEPS 02
Fonte: a autora

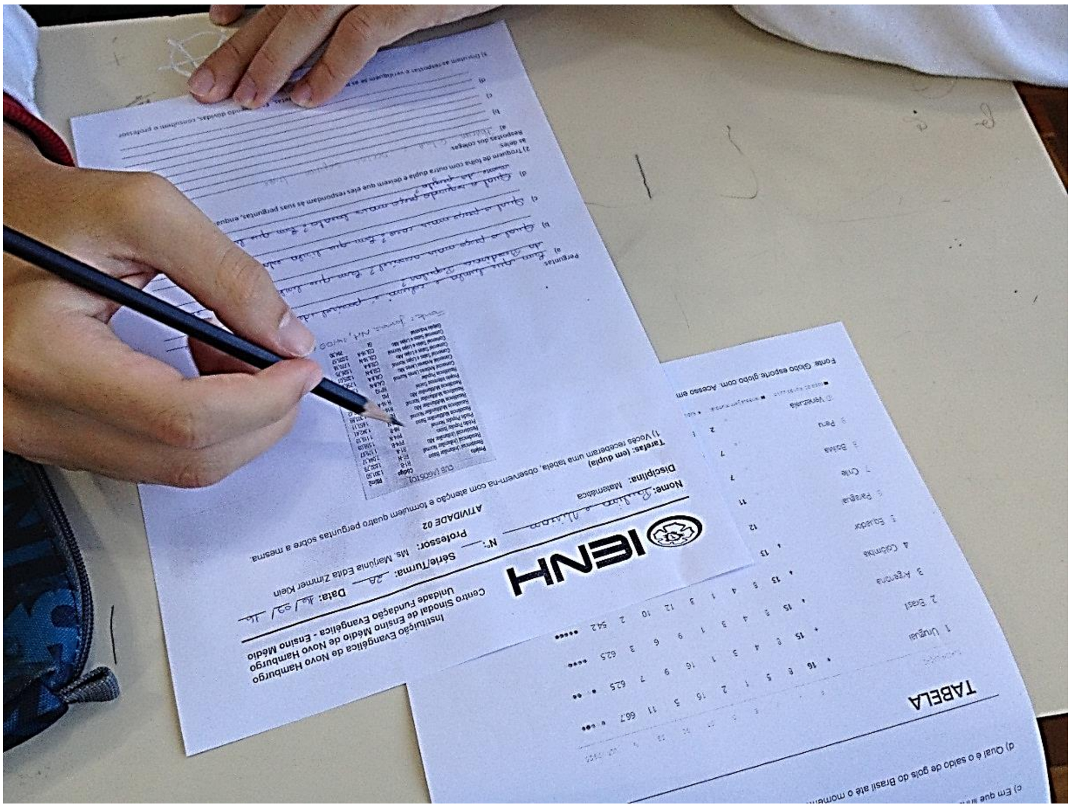


Figura 7: Aluno resolvendo a UEPS 02
Fonte: a autora

A partir dessa atividade com o jornal, pediu-se que eles dessem alguns exemplos das matrizes que receberam. Esses exemplos foram expostos no quadro da sala. Os exemplos permitiram a conclusão de que, para localizar um elemento na matriz, era necessário identificar a linha e a coluna do elemento. A partir dessa constatação, surgiu a pergunta: como vamos fazer o registro disso? Aproveitou-se para falar que um elemento da matriz pode ser anotado pelo nome dado à matriz, com letra minúscula e um subíndice contendo as informações da linha e da coluna onde ele se encontra. A partir de então, era possível definir-se a matriz de uma forma mais genérica, porém com significado, e foi o que se fez. O quadro da sala de aula serviu para registrarem algumas matrizes e suas notações.

Depois disso, evidenciou-se, no livro-texto, uma notação simbólica a ser considerada para interpretar os problemas propostos e verificou-se quão importante é escrever de forma legível e coerente sobre aquilo que se quer saber. A escrita é uma forma de comunicação e, como tal, deve estar correta e relatar exatamente o que se deseja. Caso contrário, pode-se ter surpresas no meio do caminho. Observaram-se algumas dúvidas nessa notação simbólica, mas que logo foram esclarecidas. Uma delas referiu-se a uma questão bem tradicional nos livros didáticos, segundo a qual se deve construir a matriz a partir de uma ordem pré-estabelecida e uma lei de formação que inclui a linha e a coluna de cada elemento. Além disso, havia construções que envolviam o que já foi citado e os símbolos de maior e menor que costumam causar dificuldades de interpretação. Também houve a necessidade, devido aos exercícios propostos pelo livro-texto, de se identificarem alguns tipos de matrizes: a matriz quadrada, a matriz identidade, a matriz oposta e a matriz transposta.

Acreditando que a aprendizagem não é linear, instantânea e precisa ser refletida, além de acontecer em uma troca de informações entre pares, em que ambos devem estar comprometidos, esclareceram-se as dúvidas, refizeram-se as anotações e partiu-se para novos conceitos sobre matrizes.

5.2.2 Busca de evidências de aprendizagem significativa a partir da análise das respostas obtidas na UEPS 03

A UEPS 03 (Apêndice D) teve como objetivo chegar à definição do conceito de adição e subtração para as matrizes. Assim como as demais UEP, partiu de problemas contextualizados.

A atividade envolveu duas tabelas para o problema gerador e partiu-se de perguntas que tiveram um tempo para serem respondidas, individualmente, mas com discussão nas duplas ou trios conforme o espelho de classe. No segundo momento, contou-se com compartilhamento, em sala de aula, das respostas.

Observou-se que os alunos da turma A não tiveram dificuldades em somar e subtrair para obter as respostas solicitadas.

1) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Matemática até o momento, como você faria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Somar a nota de Matemática da primeira matriz (a_{11}) com a nota da segunda matriz (b_{11}). 5,0 +6,5=11,5	27	96%
Olhar a primeira coluna	01	4%
TOTAL	28	100%

Quadro 17: Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta da UEPS 03
Fonte: a autora

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Faria 6,5 menos 5,0, ou seja, a diferença entre eles, que daria 1,5.	28	100%
TOTAL	28	100%

Quadro 18: Respostas dos alunos da turma A para o complemento da primeira pergunta da UEPS 03
Fonte: a autora

Assim como os alunos da turma B.

1) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Matemática até o momento, como você faria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Somaria quem está na primeira linha primeira coluna, 5,0, da primeira matriz com quem está na primeira linha, primeira coluna 6,5, da segunda matriz	21	88%
Juntar os dois e dividir por dois. 5,0 +6,5 =11,5:2=5,75	3	12%
TOTAL	24	100%

Quadro 19: Respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta da UEPS 03
Fonte: a autora

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Faria a segunda nota menos a primeira e daria 1,5	24	100%
TOTAL	24	100%

Quadro 20: Respostas dos alunos da turma B para o complemento da primeira pergunta da UEPS 03
Fonte: a autora

Nas demais perguntas da UEPS 03, também se percebeu um alto índice de respostas corretas, como se pode observar nos Quadros a seguir.

2) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Química até o momento, como você faria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Somar a_{12} com b_{12} $\rightarrow$ 6,0 + 7,5 = 13,5	15	54%
Somaria as médias dos dois trimestres	11	39%
Olhar a segunda coluna	02	7%
TOTAL	28	100%

Quadro 21: Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta da UEPS 03
Fonte: a autora

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Diminuir as duas médias	20	71%
Subtração $b_{12} - a_{11} = 1{,}5$	08	29%
TOTAL	28	100%

Quadro 22: Respostas dos alunos da turma A para o complemento da segunda pergunta da UEPS 03
Fonte: a autora

2) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Química até o momento, como você faria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Somaria quem está na primeira linha, segunda coluna com quem está na segunda linha, segunda coluna e vai dar 13,5	21	88%
Somar as duas e ver quanto falta para 21	01	4%
Juntar e dividir por dois, 13,5:2=6,75	02	8%
TOTAL	24	100%

Quadro 23: Respostas dos alunos da turma B para a segunda pergunta da UEPS 03
Fonte: a autora

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Subtrair o maior do menor e vai dar 1,5	24	100%
TOTAL	24	100%

Quadro 24: Respostas dos alunos da turma A para o complemento da segunda pergunta da UEPS 03
Fonte: a autora

3) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Física até o momento, como você faria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Somaria as duas médias	17	61%
Somar os elementos $a_{13} + b_{13} = 12{,}5$	07	25%
Olhar a terceira coluna	02	7%
Segunda linha e quarta coluna, soma as duas = 12,5	02	7%
TOTAL	28	100%

Quadro 25: Respostas dos alunos da turma A para a terceira pergunta da UEPS 03
Fonte: a autora

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Fazer a diferença entre as média, resultando 1,5	20	71%
Diminuir b_{13} de a_{13} resultando 1,5	08	29%
TOTAL	28	100%

Quadro 26: Respostas dos alunos da turma A para o complemento da terceira pergunta da UEPS 03
Fonte: a autora

3) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Física até o momento, como você faria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Ver quem está na primeira linha, terceira coluna e somar com quem está na segunda linha, terceira linha, dando 12,5	23	96%
Olharia a terceira coluna na primeira linha dos dois trimestres, somaria as notas e dividiria por 2.	01	4%
TOTAL	24	100%

Quadro 27: Respostas dos alunos da turma B para a terceira pergunta da UEPS 03
Fonte: autora

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Faria a subtração das duas notas	24	100%
TOTAL	24	100%

Quadro 28: Respostas dos alunos da turma B para o complemento da terceira pergunta da UEPS 03
Fonte: a autora

Fica evidente que, como a definição ainda não aconteceu, há registros diferenciados, e os alunos sentem-se à vontade para fazer isso, semelhante ao ocorrido na atividade anterior. Permitir que o aluno explicite o seu conhecimento é parte integrante de uma aprendizagem de real significado.

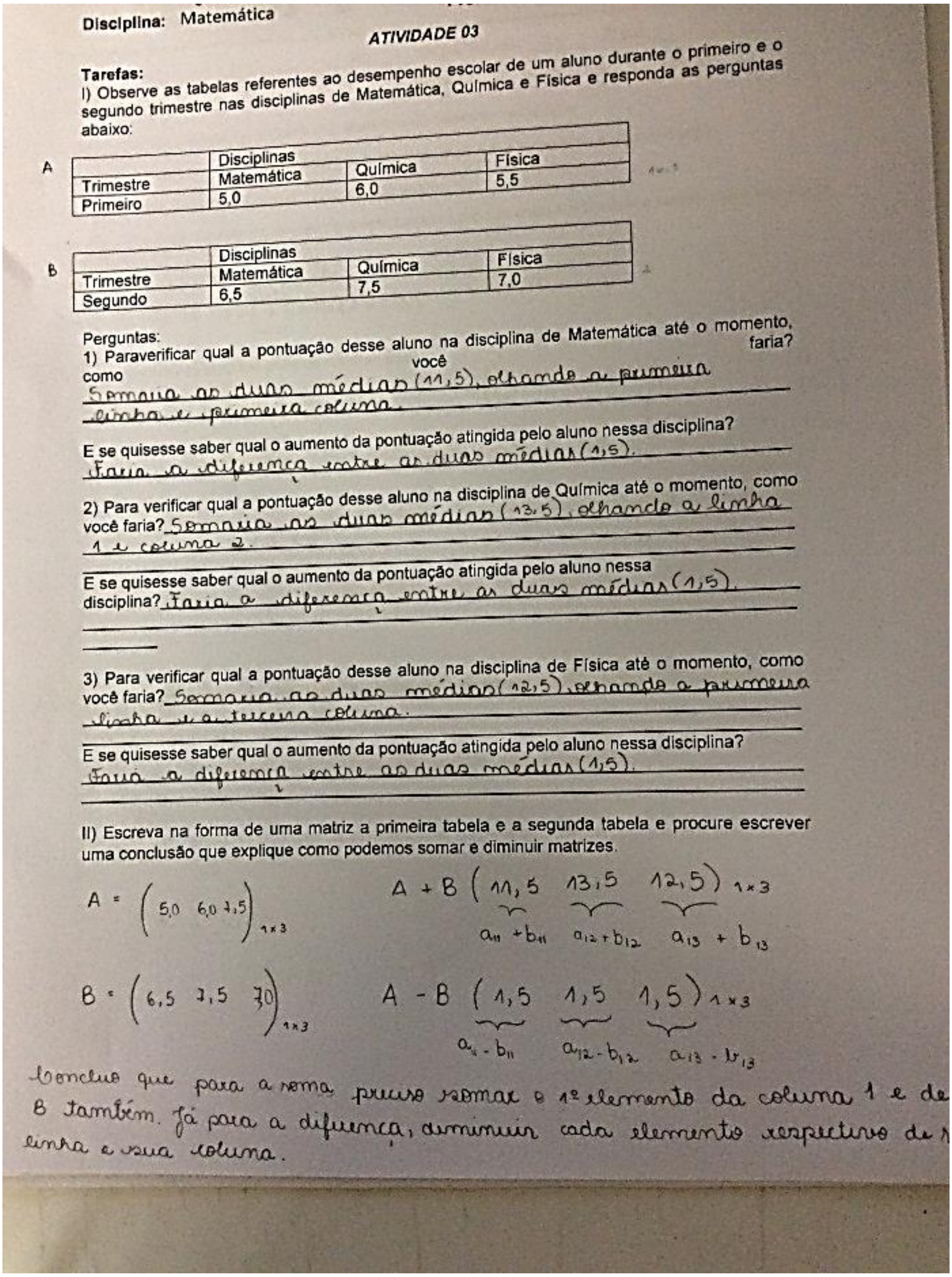
Na última tarefa da UEPS, tinha-se a pretensão de reunir os questionamentos anteriores e verificar a capacidade de síntese dos alunos. Veja como eles efetuaram os registros.

Escreva na forma de uma matriz a primeira tabela e a segunda tabela e procure escrever uma conclusão que explique como podemos somar e diminuir matrizes.		
Resposta	Número de alunos	Percentual
$A = (5{,}0 \quad 6{,}0 \quad 5{,}5)_{1x3}$ e $B = (6{,}5 \quad 7{,}5 \quad 7{,}0)_{1x3}$ $A + B = (11{,}5 \quad 13{,}5 \quad 12{,}5)_{1x3}$ e $B - A = (1{,}5 \quad 1{,}5 \quad 1{,}5)_{1x3}$ Somar e subtrair os valores das mesmas linhas e colunas de diferentes matrizes	19	68%
$A = (5{,}0 \quad 6{,}0 \quad 5{,}5)_{1x3}$ e $B = (6{,}5 \quad 7{,}5 \quad 7{,}0)_{1x3}$ $A + B = (11{,}5 \quad 13{,}5 \quad 12{,}5)_{1x3}$ e $B - A = (1{,}5 \quad 1{,}5 \quad 1{,}5)_{1x3}$	9	32%
TOTAL	28	100%

Quadro 29: Respostas dos alunos da turma A para a quarta tarefa da UEPS 03
Fonte: a autora

Escreva na forma de uma matriz a primeira tabela e a segunda tabela e procure escrever uma conclusão que explique como podemos somar e diminuir matrizes.		
Resposta	Número de alunos	Percentual
$A = (5{,}0 \quad 6{,}0 \quad 5{,}5)_{1x3}$ e $B = (6{,}5 \quad 7{,}5 \quad 7{,}0)_{1x3}$ $A + B = (11{,}5 \quad 13{,}5 \quad 12{,}5)_{1x3}$ e $B - A = (1{,}5 \quad 1{,}5 \quad 1{,}5)_{1x3}$ Somar e subtrair os valores das mesmas linhas e colunas de diferentes matrizes	12	50%
$A = (5{,}0 \quad 6{,}0 \quad 5{,}5)_{1x3}$ e $B = (6{,}5 \quad 7{,}5 \quad 7{,}0)_{1x3}$ $A + B = (11{,}5 \quad 13{,}5 \quad 12{,}5)_{1x3}$ e $B - A = (1{,}5 \quad 1{,}5 \quad 1{,}5)_{1x3}$	12	50%
TOTAL	24	100%

Quadro 30: Respostas dos alunos da turma B para a quarta tarefa da UEPS 03
Fonte: a autora



Disciplina: Matemática

ATIVIDADE 03

Tarefas:
I) Observe as tabelas referentes ao desempenho escolar de um aluno durante o primeiro e o segundo trimestre nas disciplinas de Matemática, Química e Física e responda as perguntas abaixo:

A

	Disciplinas		
Trimestre	Matemática	Química	Física
Primeiro	5,0	6,0	5,5

B

	Disciplinas		
Trimestre	Matemática	Química	Física
Segundo	6,5	7,5	7,0

Perguntas:
1) Paraverificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Matemática até o momento, como você faria? Somaria as duas médias (11,5), olhando a primeira linha e primeira coluna.

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina? Faria a diferença entre as duas médias (1,5).

2) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Química até o momento, como você faria? Somaria as duas médias (13,5), olhando a linha 1 e coluna 2.

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina? Faria a diferença entre as duas médias (1,5).

3) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Física até o momento, como você faria? Somaria as duas médias (12,5), olhando a primeira linha e a terceira coluna.

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina? Faria a diferença entre as duas médias (1,5).

II) Escreva na forma de uma matriz a primeira tabela e a segunda tabela e procure escrever uma conclusão que explique como podemos somar e diminuir matrizes.

$A = \begin{pmatrix} 5,0 & 6,0 & 7,5 \end{pmatrix}_{1\times 3}$ $\quad A + B \begin{pmatrix} \underbrace{11,5}_{a_{11}+b_{11}} & \underbrace{13,5}_{a_{12}+b_{12}} & \underbrace{12,5}_{a_{13}+b_{13}} \end{pmatrix}_{1\times 3}$

$B = \begin{pmatrix} 6,5 & 7,5 & 7,0 \end{pmatrix}_{1\times 3}$ $\quad A - B \begin{pmatrix} \underbrace{1,5}_{a_{11}-b_{11}} & \underbrace{1,5}_{a_{12}-b_{12}} & \underbrace{1,5}_{a_{13}-b_{13}} \end{pmatrix}_{1\times 3}$

Concluo que para a soma preciso somar o 1º elemento da coluna 1 e de B também. Já para a diferença, diminuir cada elemento respectivo de [illegible] linha e sua coluna.

Figura 8: Registro de um aluno durante a realização da UEPS 03
Fonte: a autora

A partir da figura acima, é possível perceber que a maioria dos alunos já está utilizando a notação matricial e efetua a soma e/ou subtração partindo dela. A conclusão da atividade foi feita em conjunto e evidenciou-se que a soma ou a subtração acontece termo a termo, respeitando a posição do termo dentro da matriz e, por conseguinte, é necessário, que elas tenham a mesma ordem. Nesse contexto de ensino, esse fato foi natural e não precisou ser dito pelo professor, pois partiu dos alunos essa observação.

As conclusões foram registradas no quadro da sala de aula e cada um foi convidado a fazer o mesmo no seu caderno.

Partiu-se para a realização dos exercícios do livro-texto sobre esse assunto e surgiu a questão da igualdade de matrizes, mas verificou-se que os próprios alunos conseguiram identificar que duas matrizes são iguais quando possuem a mesma ordem e têm termo a termo o mesmo elemento na mesma posição (linha e coluna). Alguns alunos, mas poucos, precisaram de auxílio nesses exercícios. Também surgiu a multiplicação de uma matriz por um número e foi tranquila, com a conclusão de que cada elemento deveria sofrer a multiplicação daquele número. Também se realizaram alguns exercícios de vestibular e do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

Além das evidências de sala de aula, mas que ainda envolviam um momento muito mais social, precisavam-se de evidências individuais para avaliar como o uso dessa metodologia estava influenciando, até o momento, a aprendizagem de cada aluno. Além disso, na próxima semana, de acordo com o calendário escolar, realizar-se-ia o PAS - Projeto de Avaliação Sistemática, incluso no processo pedagógico da escola e que também tem como meta avaliar o processo de aprendizagem. Até então, os registros eram individuais, realizados e discutidos em duplas ou trios e compartilhados com a turma. Essas anotações poderiam mostrar o pensamento individual ou o pensamento compartilhado, mas que não privilegiavam um momento de maior introspecção. Havia a necessidade de se obter evidências individuais a partir de um momento propício para isso. Combinou-se, então, de realizar uma avaliação individual do conteúdo sobre matrizes desenvolvido até aqui. Isso envolveria a definição, seus elementos, sua construção, os tipos e as operações de adição de subtração entre matrizes (Apêndice E).

5.2.3 Busca de evidências de aprendizagem significativa a partir da análise dos resultados da primeira avaliação individual sobre matrizes

Em relação à primeira e à segunda pergunta do primeiro problema da avaliação, que se referia ao aluno visualizar elementos na matriz, obteve-se, como resultados, na turma A 88% das respostas corretas para a primeira pergunta e 92% para a segunda. Na turma B, esses índices foram de 100% para ambas.

Em relação à terceira pergunta do primeiro problema, cujo objetivo era o de representar a matriz em questão, verificou-se que:

Na turma A:

Resposta	N° de alunos	%
Responderam correto. Uma matriz 4x4	18	69%
Responderam considerando a massa como uma coluna mais, ficou uma matriz 4X5	06	23%
Inverteu linha por coluna	01	4%
Escreveu assim $\begin{pmatrix} 17 \\ 1{,}75 \\ 81 \end{pmatrix}_{3x1}$	01	4%
TOTAL	26	100%

Quadro 31: Resultados das respostas dos alunos da turma A à terceira pergunta do primeiro problema da avaliação 01, envolvendo o conceito de matriz, a construção, seus elementos e as operações de adição e subtração.
Fonte: a autora

Resposta	N°de alunos	%
Responderam correto. Uma matriz 4x4	22	100%
TOTAL	22	100%

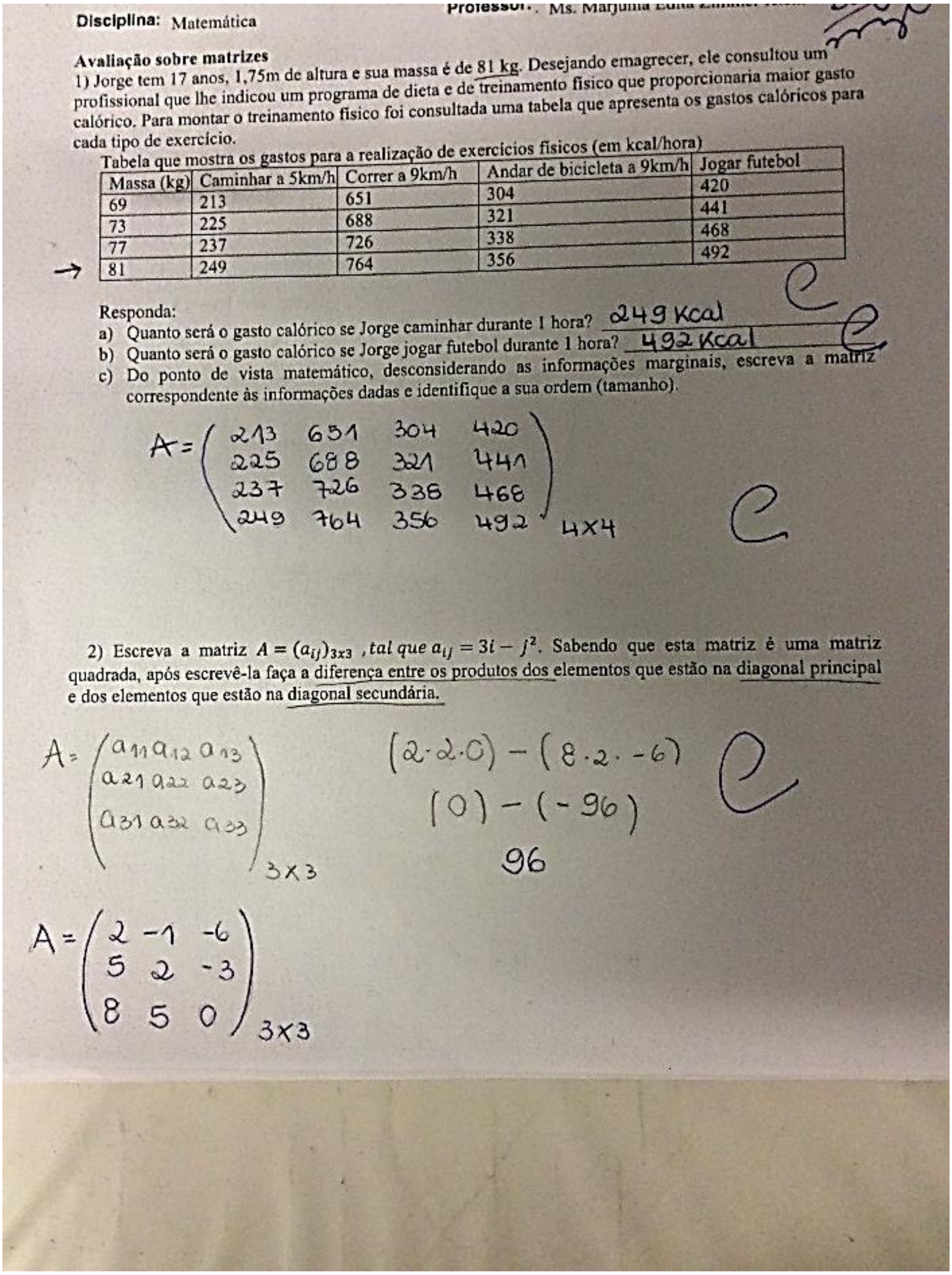
Quadro 32: Resultados das respostas dos alunos da turma B à terceira pergunta do primeiro problema da avaliação 01, envolvendo o conceito de matriz, a construção, seus elementos e as operações de adição e subtração.
Fonte: a autora

Seguindo com a procura de evidências de aprendizagem significativa e analisando as respostas dos alunos para a segunda questão da primeira avaliação, cujo objetivo era fazer com que o aluno, por meio de uma lei de formação, interpretasse-a e construísse a matriz, realizando operações entre seus elementos, observou-se que, na turma A:

Resposta	N° de alunos		%
Responderam corretamente	15		58%
Construíram as matrizes corretamente, porém deran como resultado -96 para a diagonal principal menos secundária	06		23%
Construíram as matrizes corretamente, porém deran como resultado -92 para a diagonal principal menos secundária -96+4=-92	02		8%
Apenas escreveu corretamente as matrizes, mas nã fez o cálculo solicitado	02		8%
Construíram as matrizes corretamente, porém deran como resultado -6 para a diagonal principal menos a secundária, fazendo 2+2++0-8+2-6=-8	01		3%
TOTAL	26		100%

Quadro 33: Resultados das respostas dos alunos da turma A para a segunda questão da avaliação 01, envolvendo o conceito de matriz, a construção, seus elementos e as operações de adição e subtração.
Fonte: a autora

Os seis alunos que deram a resposta – 96 fizeram a diferença entre o produto dos elementos da diagonal secundária pelo produto dos elementos da diagonal principal, ou seja, inverteram a ordem do enunciado do problema, talvez por falta de atenção ou dificuldade de interpretação. Os dois alunos que responderam -92 porque ao realizarem o produto dos elementos da diagonal principal, que eram 2, 2 e zero, deram como resultado 4 e não zero. Dois alunos apenas construíram, mas não concluíram a ordem do enunciado, talvez falta de atenção ou dificuldade de interpretação. Um aluno interpretou produto como soma, o que é uma dificuldade conceitual. Alguns exemplos abaixo.



Disciplina: Matemática **Professor:** Ms. [illegible]

Avaliação sobre matrizes

1) Jorge tem 17 anos, 1,75m de altura e sua massa é de 81 kg. Desejando emagrecer, ele consultou um profissional que lhe indicou um programa de dieta e de treinamento físico que proporcionaria maior gasto calórico. Para montar o treinamento físico foi consultada uma tabela que apresenta os gastos calóricos para cada tipo de exercício.

Tabela que mostra os gastos para a realização de exercícios físicos (em kcal/hora)

Massa (kg)	Caminhar a 5km/h	Correr a 9km/h	Andar de bicicleta a 9km/h	Jogar futebol
69	213	651	304	420
73	225	688	321	441
77	237	726	338	468
81	249	764	356	492

Responda:

a) Quanto será o gasto calórico se Jorge caminhar durante 1 hora? 249 Kcal

b) Quanto será o gasto calórico se Jorge jogar futebol durante 1 hora? 492 Kcal

c) Do ponto de vista matemático, desconsiderando as informações marginais, escreva a matriz correspondente às informações dadas e identifique a sua ordem (tamanho).

$$A = \begin{pmatrix} 213 & 651 & 304 & 420 \\ 225 & 688 & 321 & 441 \\ 237 & 726 & 338 & 468 \\ 249 & 764 & 356 & 492 \end{pmatrix}_{4\times4}$$

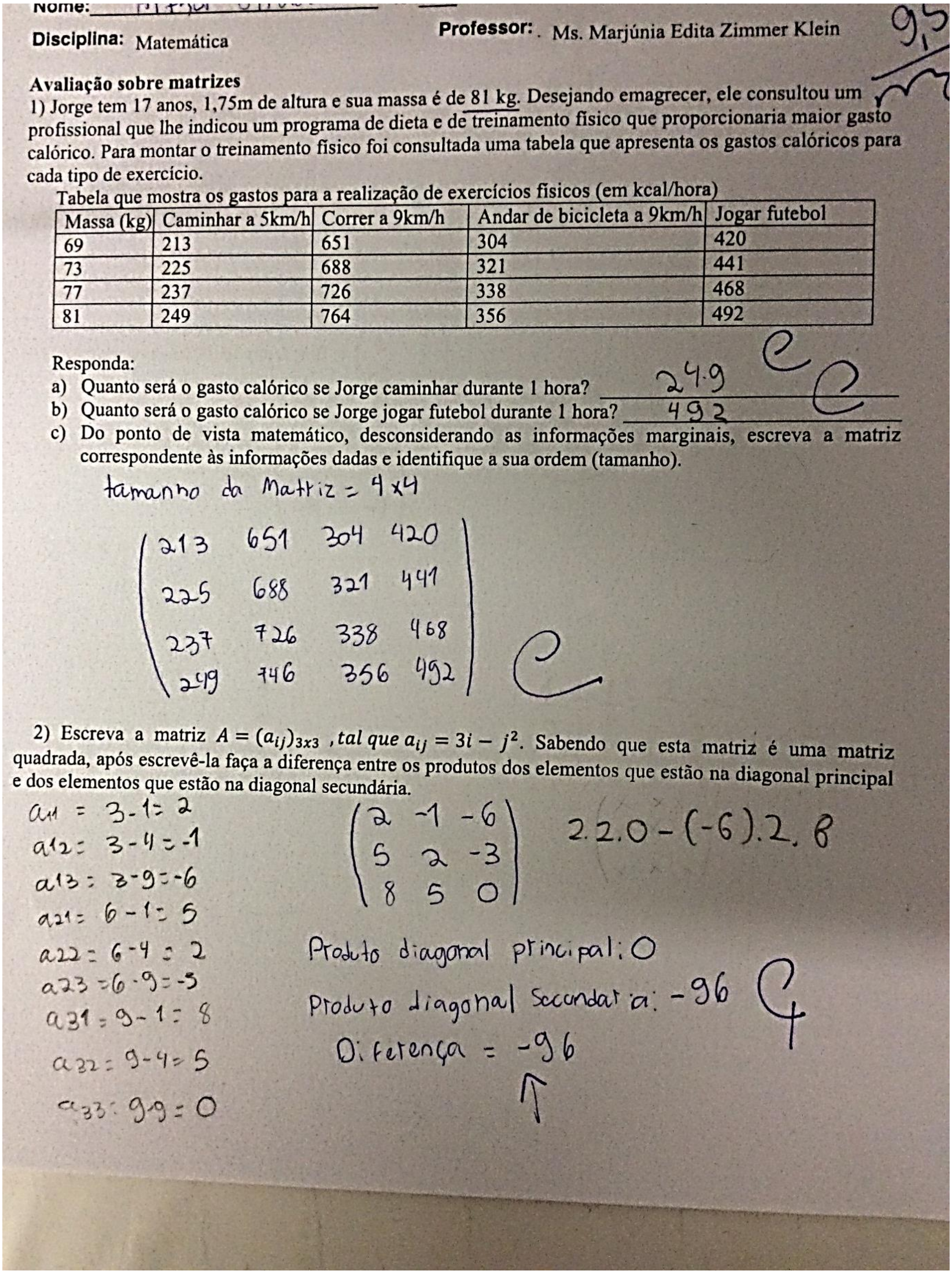
2) Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$, *tal que* $a_{ij} = 3i - j^2$. Sabendo que esta matriz é uma matriz quadrada, após escrevê-la faça a diferença entre os produtos dos elementos que estão na diagonal principal e dos elementos que estão na diagonal secundária.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times3}$$

$$(2\cdot2\cdot0) - (8\cdot2\cdot-6)$$
$$(0) - (-96)$$
$$96$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

Figura 9: Respostas do aluno que não cometeu nenhum erro
Fonte: a autora



Nome:

Disciplina: Matemática **Professor:** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

9,5

Avaliação sobre matrizes

1) Jorge tem 17 anos, 1,75m de altura e sua massa é de 81 kg. Desejando emagrecer, ele consultou um profissional que lhe indicou um programa de dieta e de treinamento físico que proporcionaria maior gasto calórico. Para montar o treinamento físico foi consultada uma tabela que apresenta os gastos calóricos para cada tipo de exercício.

Tabela que mostra os gastos para a realização de exercícios físicos (em kcal/hora)

Massa (kg)	Caminhar a 5km/h	Correr a 9km/h	Andar de bicicleta a 9km/h	Jogar futebol
69	213	651	304	420
73	225	688	321	441
77	237	726	338	468
81	249	764	356	492

Responda:

a) Quanto será o gasto calórico se Jorge caminhar durante 1 hora? 249 C

b) Quanto será o gasto calórico se Jorge jogar futebol durante 1 hora? 492 C

c) Do ponto de vista matemático, desconsiderando as informações marginais, escreva a matriz correspondente às informações dadas e identifique a sua ordem (tamanho).

tamanho da Matriz = 4x4

$$\begin{pmatrix} 213 & 651 & 304 & 420 \\ 225 & 688 & 321 & 441 \\ 237 & 726 & 338 & 468 \\ 249 & 746 & 356 & 492 \end{pmatrix}$$

C

2) Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$, tal que $a_{ij} = 3i - j^2$. Sabendo que esta matriz é uma matriz quadrada, após escrevê-la faça a diferença entre os produtos dos elementos que estão na diagonal principal e dos elementos que estão na diagonal secundária.

$a_{11} = 3-1 = 2$

$a_{12} = 3-4 = -1$

$a_{13} = 3-9 = -6$

$a_{21} = 6-1 = 5$

$a_{22} = 6-4 = 2$

$a_{23} = 6-9 = -3$

$a_{31} = 9-1 = 8$

$a_{32} = 9-4 = 5$

$a_{33} = 9-9 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$2.2.0 - (-6).2.8$

Produto diagonal principal: 0

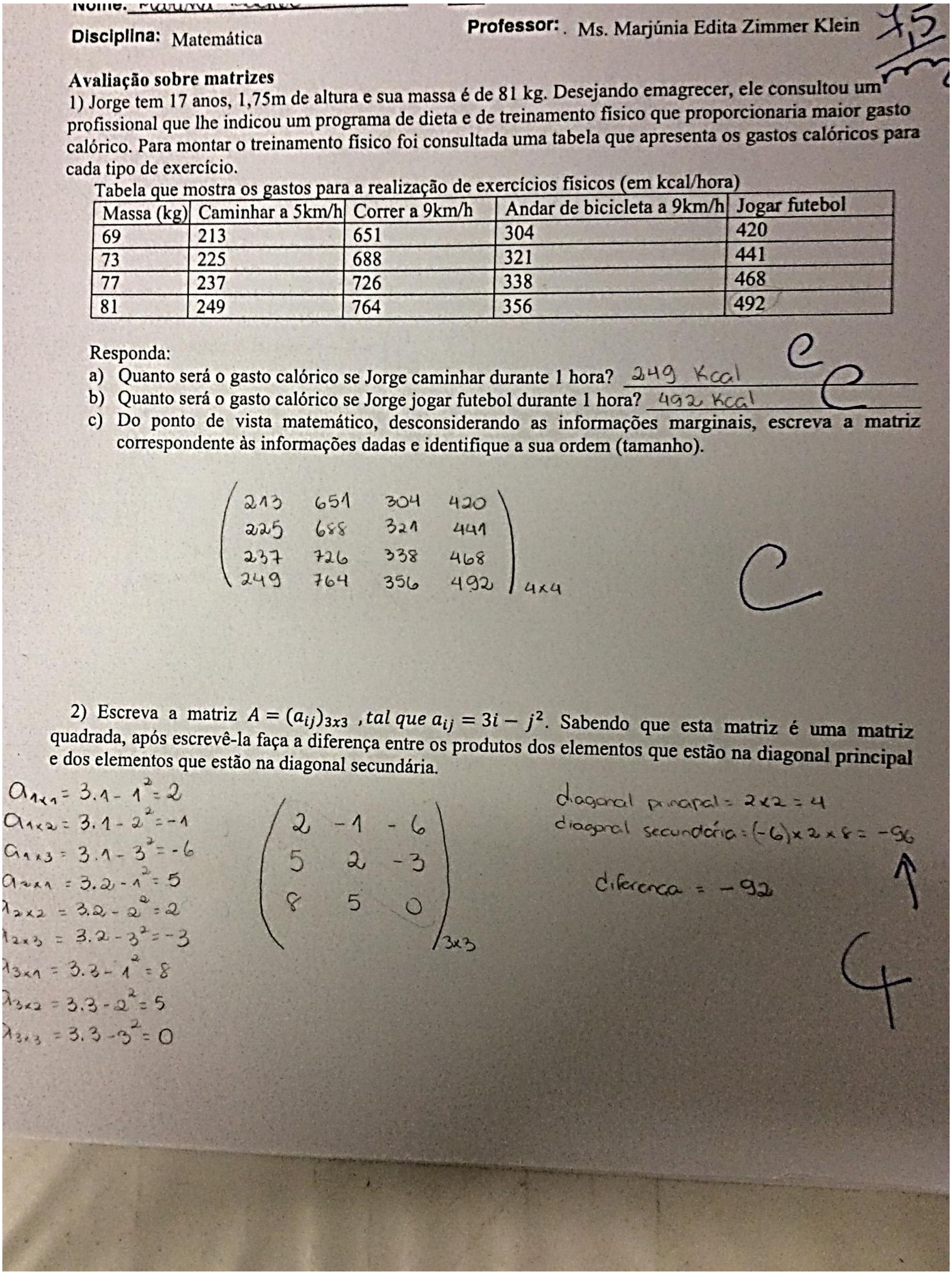
Produto diagonal secundária: -96

Diferença = -96

C

Figura 10: Respostas de um aluno que fez a diferença entre o produto dos elementos da diagonal secundária e o produto dos elementos da diagonal principal

Fonte: a autora



Nome:

Disciplina: Matemática **Professor:** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

7,5

Avaliação sobre matrizes

1) Jorge tem 17 anos, 1,75m de altura e sua massa é de 81 kg. Desejando emagrecer, ele consultou um profissional que lhe indicou um programa de dieta e de treinamento físico que proporcionaria maior gasto calórico. Para montar o treinamento físico foi consultada uma tabela que apresenta os gastos calóricos para cada tipo de exercício.

Tabela que mostra os gastos para a realização de exercícios físicos (em kcal/hora)

Massa (kg)	Caminhar a 5km/h	Correr a 9km/h	Andar de bicicleta a 9km/h	Jogar futebol
69	213	651	304	420
73	225	688	321	441
77	237	726	338	468
81	249	764	356	492

Responda:

a) Quanto será o gasto calórico se Jorge caminhar durante 1 hora? 249 Kcal C

b) Quanto será o gasto calórico se Jorge jogar futebol durante 1 hora? 492 Kcal C

c) Do ponto de vista matemático, desconsiderando as informações marginais, escreva a matriz correspondente às informações dadas e identifique a sua ordem (tamanho).

$$\begin{pmatrix} 213 & 651 & 304 & 420 \\ 225 & 688 & 321 & 441 \\ 237 & 726 & 338 & 468 \\ 249 & 764 & 356 & 492 \end{pmatrix}_{4\times4}$$

C

2) Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$, $tal\ que\ a_{ij} = 3i - j^2$. Sabendo que esta matriz é uma matriz quadrada, após escrevê-la faça a diferença entre os produtos dos elementos que estão na diagonal principal e dos elementos que estão na diagonal secundária.

$a_{1x1} = 3.1 - 1^2 = 2$

$a_{1x2} = 3.1 - 2^2 = -1$

$a_{1x3} = 3.1 - 3^2 = -6$

$a_{2x1} = 3.2 - 1^2 = 5$

$a_{2x2} = 3.2 - 2^2 = 2$

$a_{2x3} = 3.2 - 3^2 = -3$

$a_{3x1} = 3.3 - 1^2 = 8$

$a_{3x2} = 3.3 - 2^2 = 5$

$a_{3x3} = 3.3 - 3^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$$

diagonal principal = 2x2 = 4

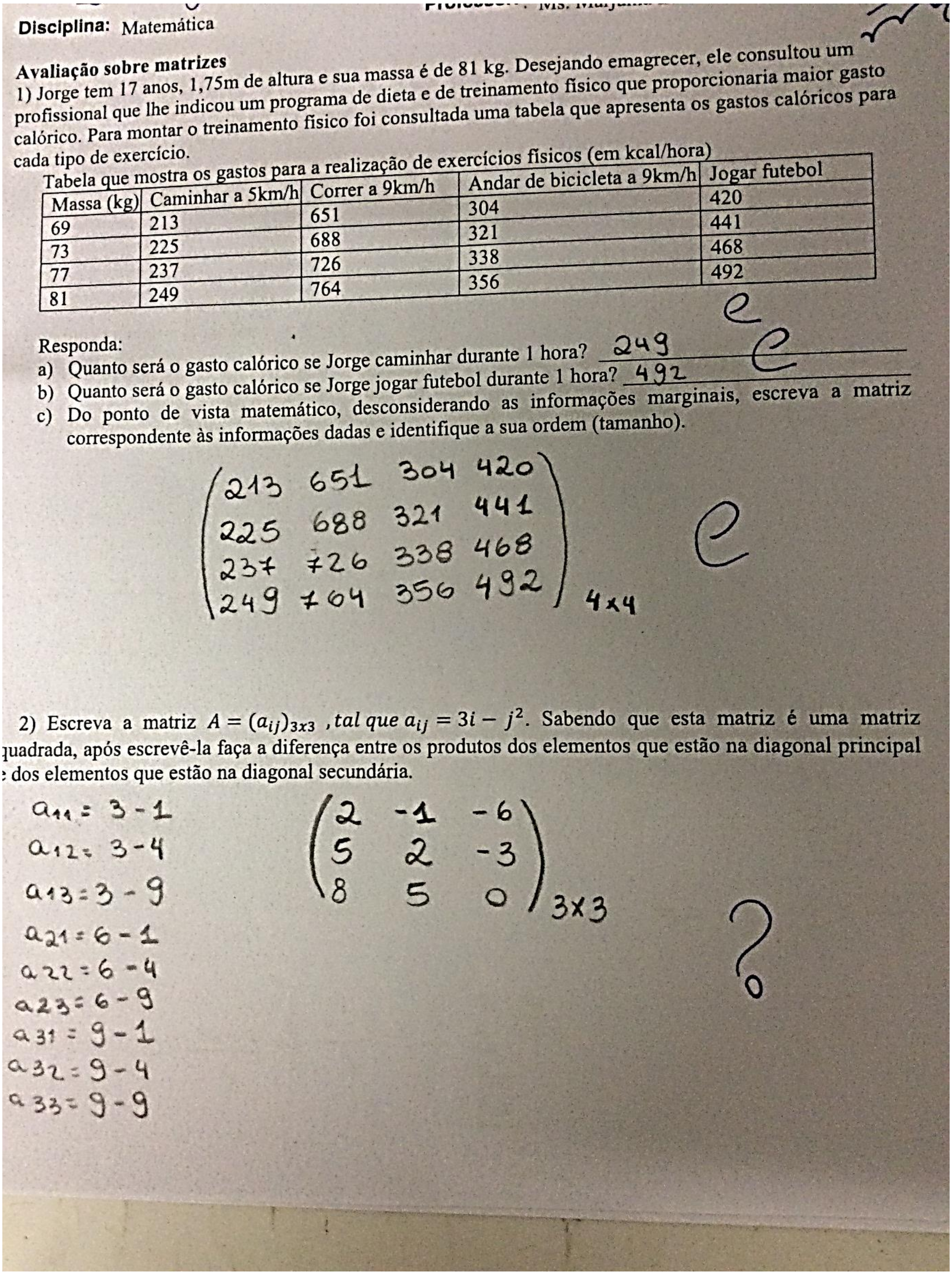
diagonal secundária = (-6)x2x8 = -96

diferença = -92

4

Figura 11: Respostas do aluno que fez 2x2 e esqueceu do elemento zero contido na diagonal principal, com isto fez 4 – 96 e obteve a resposta -92

Fonte: a auora



Disciplina: Matemática

Avaliação sobre matrizes

1) Jorge tem 17 anos, 1,75m de altura e sua massa é de 81 kg. Desejando emagrecer, ele consultou um profissional que lhe indicou um programa de dieta e de treinamento físico que proporcionaria maior gasto calórico. Para montar o treinamento físico foi consultada uma tabela que apresenta os gastos calóricos para cada tipo de exercício.

Tabela que mostra os gastos para a realização de exercícios físicos (em kcal/hora)

Massa (kg)	Caminhar a 5km/h	Correr a 9km/h	Andar de bicicleta a 9km/h	Jogar futebol
69	213	651	304	420
73	225	688	321	441
77	237	726	338	468
81	249	764	356	492

e

Responda:

a) Quanto será o gasto calórico se Jorge caminhar durante 1 hora? 249 e

b) Quanto será o gasto calórico se Jorge jogar futebol durante 1 hora? 492

c) Do ponto de vista matemático, desconsiderando as informações marginais, escreva a matriz correspondente às informações dadas e identifique a sua ordem (tamanho).

$$\begin{pmatrix} 213 & 651 & 304 & 420 \\ 225 & 688 & 321 & 441 \\ 237 & 726 & 338 & 468 \\ 249 & 764 & 356 & 492 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

e

2) Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$, *tal que* $a_{ij} = 3i - j^2$. Sabendo que esta matriz é uma matriz quadrada, após escrevê-la faça a diferença entre os produtos dos elementos que estão na diagonal principal e dos elementos que estão na diagonal secundária.

$a_{11} = 3 - 1$

$a_{12} = 3 - 4$

$a_{13} = 3 - 9$

$a_{21} = 6 - 1$

$a_{22} = 6 - 4$

$a_{23} = 6 - 9$

$a_{31} = 9 - 1$

$a_{32} = 9 - 4$

$a_{33} = 9 - 9$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

?

Figura 12: Respostas do aluno que esqueceu de concluir a questão.
Fonte: a autora

Resposta	N° de alunos	%
Responderam correto	21	95%
Construíram a matriz corretamente, mas como resultad 92 para a diagonal principal menos a secundária	01	5%
TOTAL	22	100%

Quadro 34: Resultados das respostas dos alunos da turma B para a segunda questão da avaliação 01, envolvendo o conceito de matriz, a construção, seus elementos e as operações de adição e subtração.
Fonte: a autora

Observa-se que, na turma B, apenas um aluno cometeu o mesmo erro que dois dos alunos da turma A, ao realizar o produto de 2 por 2 e por zero e dar como resultado 4, talvez um erro conceitual ou de atenção.

Na sequência, construindo e operando entre matrizes, seguem a terceira questão com duas perguntas e a quarta questão com duas perguntas.

Na terceira questão, na turma A, 81% dos alunos acertaram a construção da matriz A. Se observado o enunciado, percebe-se que a simbologia incluída na lei de formação do problema é bastante exigente, ou seja, envolve símbolos matemáticos (>, <) e a sua interpretação, além de operações de potenciação. Novamente, os alunos apresentaram um alto nível de interpretação e conclusão da questão.

Resposta	N° de alunos	%
Acertaram a matriz A	21	81%
Erraram	05	19%
TOTAL	26	100%

Quadro 35: Resultados das respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta da terceira questão da avaliação 01, envolvendo o conceito de matriz, a construção, seus elementos e as operações de adição e subtração.
Fonte: a autora

Os alunos da turma B também tiveram um ótimo resultado.

Resposta	N° de alunos	%
Acertaram a matriz A	15	68%
Erraram a matriz A	07	32%
TOTAL	22	100%

Quadro 36: Resultados das respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta da terceira questão da avaliação 01, envolvendo o conceito de matriz, a construção, seus elementos e as operações de adição e subtração.
Fonte: a autora

Ao se observarem-se erros dos alunos, percebe-se que muitos deles devem-se ao fato de que os alunos tiveram dificuldades de efetuar as operações com potência sendo a base um número inteiro e o expoente um expoente negativo e quando a base da potência era uma fração e o expoente da base era um expoente negativo. Trata-se um conceito que exige bastante compreensão. Talvez a falta de saber o que fazer diante da situação ou diante da falta de conceitos ou diante de regras que consideravam corretas, mas que não o são.

Segundo Saturnino de La Torre:

> Outro aspecto é que vejamos a aprendizagem, a formação, como um processo em que a característica principal seja a indeterminação. Nesse sentido, o erro acompanha inevitavelmente o processo. As intervenções do professor não pretendem limpar o caminho de dificuldades, nem evitar os erros, nem provocá-los, mas utilizá-los quando surgem. Desse modo, a afirmação de que o erro desanima ou distancia se transforma em: o erro atrai a atenção do professor e do aluno. O professor pode chegar a utilizá-lo didaticamente como situação de aprendizagem, já que o aluno costuma estar interessado em averiguar por que algo não saiu bem ou por que se enganou (LA TORRE, 2007, p. 27).

A quarta e última questão da primeira avaliação envolvia duas matrizes a serem construídas e a realização de operações de adição, subtração, multiplicação por um número e transposição de linhas por colunas.

O Quadro 37 demonstra os resultados da turma em cada uma das três perguntas da questão.

Resposta	N° de alunos	%
Acertaram as matrizes e efetuaram corretamente as operações	19	73%
Acertaram as matrizes e efetuaram apenas a operação “a” corretamente	04	15%
Acertaram apenas a construção das matrizes	01	4%
Acertou a construção das matrizes e errou a letra “a”	01	4%
Não acertou nem a construção das matrizes e nem as operações	01	4%
TOTAL	26	100%

Quadro 37: Resultados das respostas dos alunos da turma A para quarta e última questão da avaliação 01, envolvendo o conceito de matriz, a construção, seus elementos e as operações de adição e subtração.
Fonte: a autora

Os resultados da turma B foram os que se ilustram no Quadro 38:

Resposta	N° de alunos	%
Acertaram as matrizes e efetuaram corretamente as operações	15	68%
Acertaram as matrizes e efetuaram apenas a operação “a” corretamente	04	17%
Acertaram apenas a construção das matrizes	01	5%
Acertou a construção das matrizes e errou a letra “a”	01	5%
Acertou apenas a construção da matriz A	01	5%
TOTAL	22	100%

Quadro 38: Resultados das respostas dos alunos da turma B para quarta e última questão da avaliação 01, envolvendo o conceito de matriz, a construção, seus elementos e as operações de adição e subtração.
Fonte: a autora

A avaliação demonstra que os alunos deram evidências de que compreenderam o conceito de matriz, a sua representação e efetuaram as operações de maneira correta. Em termos de notas, pois o processo de avaliação da escola atribui uma nota ao final do trimestre ao aluno, os resultados foram muito bons. Considerando a média da turma A, tivemos o valor 8,7, observandos-se que a média da escola para não realizar recuperação no final do ano é 7,0, média a que todos almejam. A turma B teve a média 8,1. O resultado do PAS – Projeto de Avaliação Sistemática, que aconteceu logo na semana seguinte e teve cinco questões (Apêndice F), também demonstrou bons resultados: a média da turma A foi 9,3 e da turma B, foi 8,1, ressaltando que, dessa vez, as questões foram selecionadas a partir de processos seletivos (ENEM e vestibulares), pois esse é um dos critérios para se elaborarem as questões para o PAS.

5.2.4 Busca de evidências de aprendizagem significativa a partir da análise das respostas na UEPS 04

A UEPS 04 (Apêndice G) foi planejada e aplicada com o objetivo de levar o aluno à definição de multiplicação de matriz por matriz, quais as condições para que isso aconteça e como se faz essa multiplicação.

A UEPS 04 continha três problemas contextualizados. O primeiro deles fazia menção aos pontos obtidos por quatro equipes de basquete em cada tipo de lance, e a primeira pergunta sobre esse problema solicitava que os alunos representassem, em formato matricial, desconsiderando as informações marginais, os dados contidos nas tabelas.

Na turma A, 100% dos alunos fizeram a representação corretamente das duas tabelas; na turma B, 83% dos alunos representaram corretamente as duas tabelas, conforme se representa nos Quadros 39 e 40.

Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Tabela A: 4x3 Tabela B: 3x1	25	100%
TOTAL	25	100%

Quadro 39: Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta do primeiro problema da UEPS 04
Fonte: a autora

Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Tabela A: 4x3 Tabela B: 3x1	19	83%
Tabela A: 4x3 Tabela B: 1x3	03	13%
Tabela A: 4x3 Sobre a outra matriz não fez referência	01	4%
TOTAL	23	100%

Quadro 40: Respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta do primeiro problema da UEPS 04
Fonte: a autora

Observa-se que três alunos da turma B ainda estavam invertendo de posição linhas por colunas, sendo necessário chamar a atenção sobre esse fato.

Em relação a segunda pergunta do primeiro problem, nas duas turmas, obtiveram-se 100% de respostas corretas.

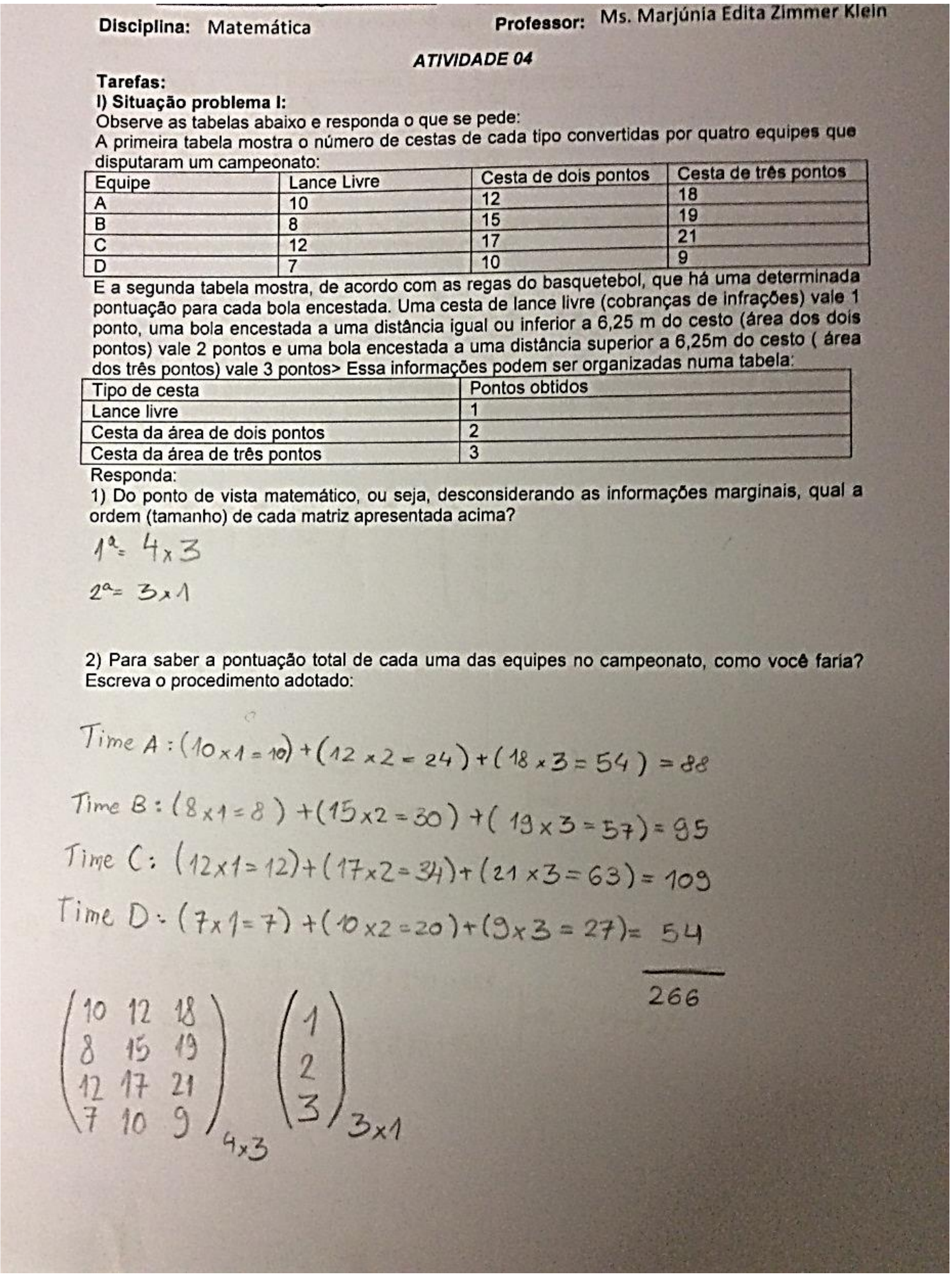
Para saber a pontuação total de cada uma das equipes no campeonato, como você faria? Escreva o procedimento adotado:		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Multiplicar os lances livres por 1, as cestas de dois pontos por dois e as cestas de três pontos por três. Somar estes valores conforme a linha de cada equipe. $\underset{4x3}{\begin{pmatrix} 10 & 12 & 18 \\ 8 & 15 & 19 \\ 12 & 17 & 21 \\ 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}} \text{ x } \underset{3x1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \underset{4x1}{\begin{pmatrix} 88 \\ 95 \\ 109 \\ 54 \end{pmatrix}}$	25	100%
TOTAL	25	100%

Quadro 41: Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta do primeiro problema da UEPS 04
Fonte: a autora

Para saber a pontuação total de cada uma das equipes no campeonato, como você faria? Escreva o procedimento adotado:		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Tem que fazer a primeira coluna vezes 1, a segunda vezes 2 e a terceira vezes 3. Depois somar os pontos por linha. $\underset{4x3}{\begin{pmatrix} 10 & 12 & 18 \\ 8 & 15 & 19 \\ 12 & 17 & 21 \\ 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}} \text{ x } \underset{3x1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \underset{4x1}{\begin{pmatrix} 88 \\ 95 \\ 109 \\ 54 \end{pmatrix}}$	23	100%
TOTAL	23	100%

Quadro 42: Respostas dos alunos da turma B para a segunda pergunta do primeiro problema da UEPS 04
Fonte: a autora

Alguns deles explicaram exatamente o que fizeram, conforme se vê na figura a seguir.



Disciplina: Matemática **Professor:** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

ATIVIDADE 04

Tarefas:

I) Situação problema I:

Observe as tabelas abaixo e responda o que se pede:

A primeira tabela mostra o número de cestas de cada tipo convertidas por quatro equipes que disputaram um campeonato:

Equipe	Lance Livre	Cesta de dois pontos	Cesta de três pontos
A	10	12	18
B	8	15	19
C	12	17	21
D	7	10	9

E a segunda tabela mostra, de acordo com as regas do basquetebol, que há uma determinada pontuação para cada bola encestada. Uma cesta de lance livre (cobranças de infrações) vale 1 ponto, uma bola encestada a uma distância igual ou inferior a 6,25 m do cesto (área dos dois pontos) vale 2 pontos e uma bola encestada a uma distância superior a 6,25m do cesto (área dos três pontos) vale 3 pontos> Essa informações podem ser organizadas numa tabela:

Tipo de cesta	Pontos obtidos
Lance livre	1
Cesta da área de dois pontos	2
Cesta da área de três pontos	3

Responda:

1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

1ª = 4x3

2ª = 3x1

2) Para saber a pontuação total de cada uma das equipes no campeonato, como você faria? Escreva o procedimento adotado:

Time A : (10x1 = 10) + (12 x 2 = 24) + (18 x 3 = 54) = 88

Time B : (8x1 = 8) + (15x2 = 30) + (19 x 3 = 57) = 95

Time C : (12x1 = 12) + (17x2 = 34) + (21 x 3 = 63) = 109

Time D : (7x1 = 7) + (10x2 = 20) + (9x3 = 27) = 54

266

$$\begin{pmatrix} 10 & 12 & 18 \\ 8 & 15 & 19 \\ 12 & 17 & 21 \\ 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}_{4\times 3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

Figura 13: Respostas de um aluno para a UEPS 04, explicando o procedimento que deu origem a matriz produto.
Fonte: a autora

O segundo problema proposto referia-se a um empresário que, querendo saber onde seria mais barato efetuar as compras de alguns produtos para dois orfanatos, fez uma consulta de preços. Os alunos, diante das duas tabelas, deveriam calcular os valores de cada produto em cada supermercado e responder à pergunta de qual supermercado seria mais barato comprar.

Na turma A, as respostas à primeira pergunta estão representados no Quadro 43. E, na turma B, no quadro 44.

Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Tabela A: 2x4 Tabela B: 4x2	25	100%
TOTAL	25	100%

Quadro 43: Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta do segundo problema da UEPS 04
Fonte: a autora

Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Tabela A: 2x4 Tabela B: 4x2	22	96%
Tabela A: 2x4 Tabela B: 2x4	01	4%
TOTAL	23	100%

Quadro 44: Respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta do segundo problema da UEPS 04
Fonte: a autora

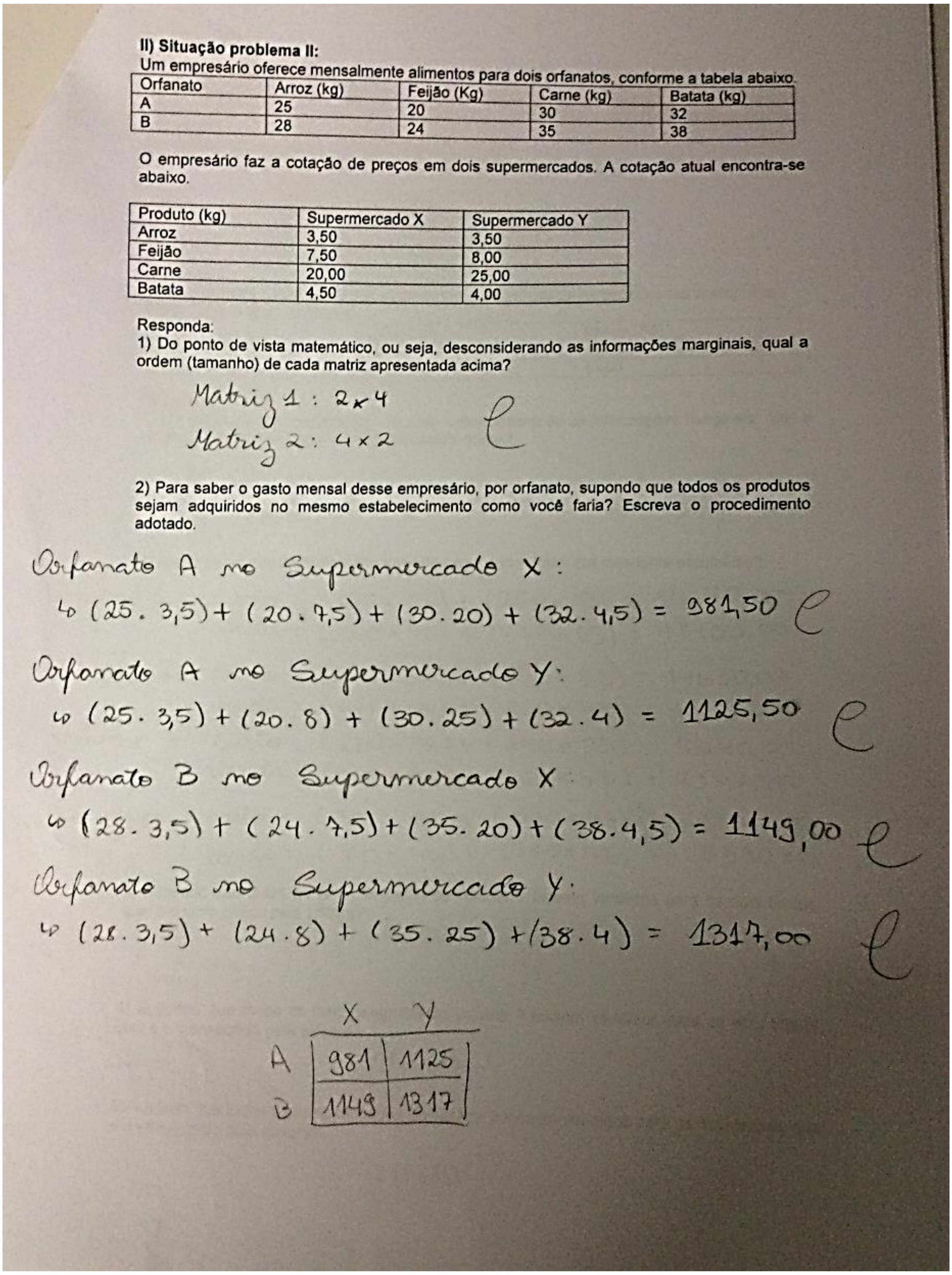
Trata-se de resultados muito satisfatórios para as atividades até o momento.

Na sequência, apresentas-se a segunda pergunta do segundo problema, e pode-se observar que, como esse problema continha mais informações, surgiram outras formas de registros para encontrar a solução à pergunta feita.

Para saber o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo estabelecimento, como você faria? Escreva o procedimento adotado.		
Resposta	N° de alunos	Percentual
Multiplicando a quantidade de quilos necessários pelo seu valor por quilo. Após, somaria os valores de todos os produtos na mesma coluna, mesmo supermercado, fazendo separadamente para cada supermercado. $\begin{pmatrix} 25 & 20 & 30 & 32 \\ 28 & 24 & 35 & 38 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 3,50 & 3,50 \\ 7,50 & 8,00 \\ 20,00 & 25,00 \\ 4,50 & 4,00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 981,5 & 1125,5 \\ 1149,00 & \cdots 1317,00 \end{pmatrix}$	22	88%
A + B no supermercado X → 981,50 + 1149,50 = 2130,50 e A + B no supermercado Y → 1125,50 + 1317,00 = 2442,50	03	12%
TOTAL	25	100%

Quadro 45: Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta do segundo problema da UEPS 04
Fonte: a autora

Ao se analisarem as respostas dos alunos da turma A, percebe-se que, sem nenhuma definição de como multiplicar as matrizes entre si, todos fizeram a multiplicação da forma correta, mas três alunos registraram-na de forma diferenciada, somando todos os valores de todos os produtos que o orfanato A e o orfanato B gastaria no supermercado X, o que não está errado, apenas é uma forma diferente de interpretar o problema, segundo a qual o valor de cada produto em cada supermercado não aparece discriminado, mas apenas o total gasto. Seguem as figuras demonstrando o que foi citado.



II) Situação problema II:
Um empresário oferece mensalmente alimentos para dois orfanatos, conforme a tabela abaixo.

Orfanato	Arroz (kg)	Feijão (Kg)	Carne (kg)	Batata (kg)
A	25	20	30	32
B	28	24	35	38

O empresário faz a cotação de preços em dois supermercados. A cotação atual encontra-se abaixo.

Produto (kg)	Supermercado X	Supermercado Y
Arroz	3,50	3,50
Feijão	7,50	8,00
Carne	20,00	25,00
Batata	4,50	4,00

Responda:
1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

Matriz 1 : 2x4
Matriz 2: 4x2 C

2) Para saber o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo estabelecimento como você faria? Escreva o procedimento adotado.

Orfanato A no Supermercado X:
↳ (25 . 3,5) + (20 . 7,5) + (30 . 20) + (32 . 4,5) = 981,50 C

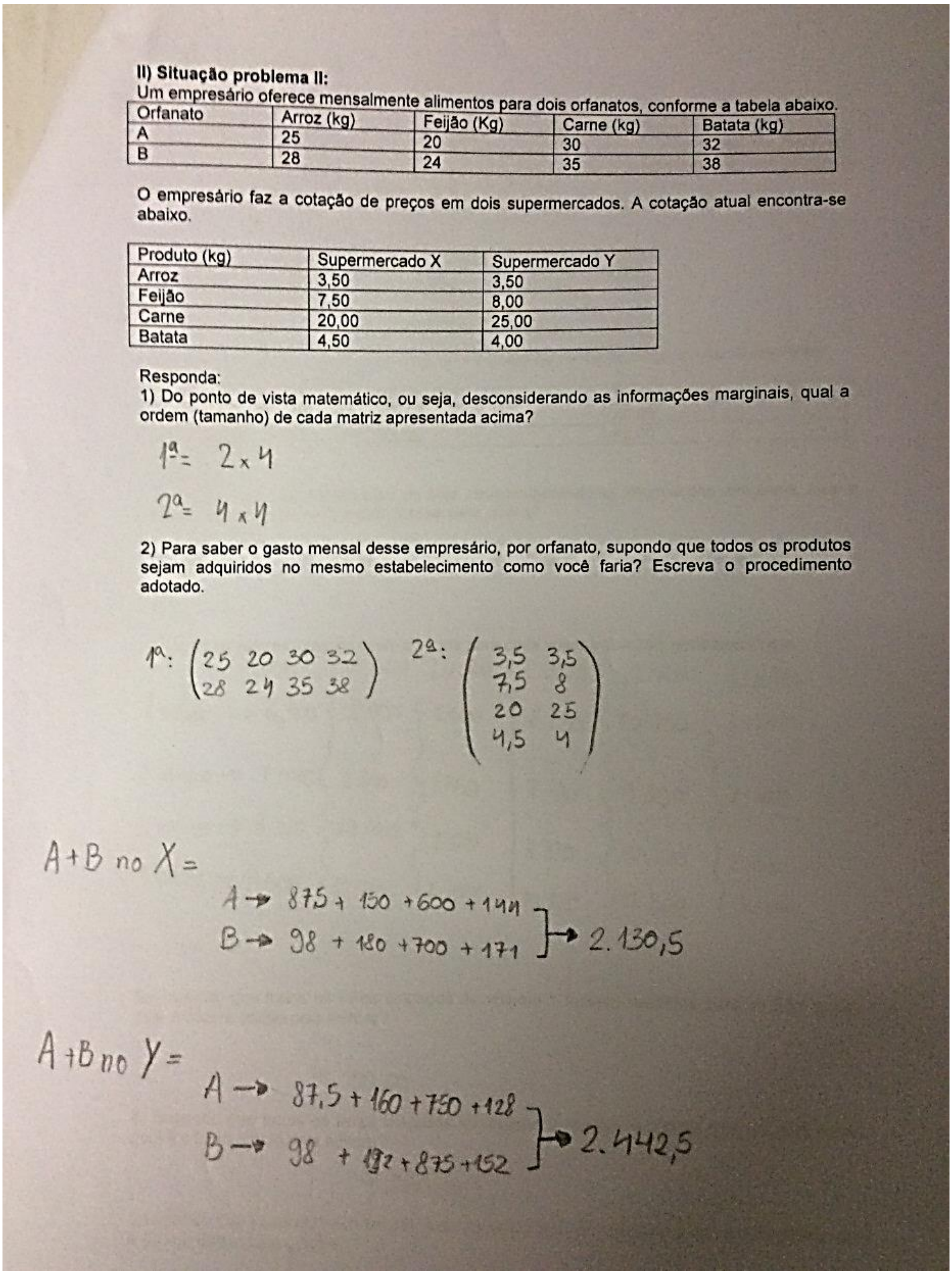
Orfanato A no Supermercado Y:
↳ (25 . 3,5) + (20 . 8) + (30 . 25) + (32 . 4) = 1125,50 C

Orfanato B no Supermercado X
↳ (28 . 3,5) + (24 . 7,5) + (35 . 20) + (38 . 4,5) = 1149,00 C

Orfanato B no Supermercado Y:
↳ (28 . 3,5) + (24 . 8) + (35 . 25) + (38 . 4) = 1317,00 C

	X	Y
A	981	1125
B	1149	1317

Figura14: Respostas de um aluno que fez a questão corretamente
Fonte: a autora



II) Situação problema II:

Um empresário oferece mensalmente alimentos para dois orfanatos, conforme a tabela abaixo.

Orfanato	Arroz (kg)	Feijão (Kg)	Carne (kg)	Batata (kg)
A	25	20	30	32
B	28	24	35	38

O empresário faz a cotação de preços em dois supermercados. A cotação atual encontra-se abaixo.

Produto (kg)	Supermercado X	Supermercado Y
Arroz	3,50	3,50
Feijão	7,50	8,00
Carne	20,00	25,00
Batata	4,50	4,00

Responda:

1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

1ª = 2 x 4

2ª = 4 x 4

2) Para saber o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo estabelecimento como você faria? Escreva o procedimento adotado.

$$1^a: \begin{pmatrix} 25 & 20 & 30 & 32 \\ 28 & 24 & 35 & 38 \end{pmatrix} \quad 2^a: \begin{pmatrix} 3,5 & 3,5 \\ 7,5 & 8 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4 \end{pmatrix}$$

A+B no X =

A → 87,5 + 150 + 600 + 144

B → 98 + 180 + 700 + 171 → 2.130,5

A+B no Y =

A → 87,5 + 160 + 750 + 128

B → 98 + 192 + 875 + 152 → 2.442,5

Figura15: Respostas de uma aluna que somou todos os gastos.
Fonte: a autora

Já na turma B, tem-se:

Para saber o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo estabelecimento como você faria? Escreva o procedimento adotado.		
Resposta	N°de alunos	Percentual
Eu faria cada produto vezes o seu preço de um determinado mercado. $\begin{pmatrix} 25 & 20 & 30 & 32 \\ 28 & 24 & 35 & 38 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3{,}50 & 3{,}50 \\ 7{,}50 & 8{,}00 \\ 20{,}00 & 25{,}00 \\ 4{,}50 & 4{,}00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 981{,}5 & 1125{,}5 \\ 1149{,}00 & \cdots 1317{,}00 \end{pmatrix}$	20	88%
$\begin{pmatrix} 981{,}5 \\ 1125{,}50 \\ 1149{,}00 \\ 1317{,}00 \end{pmatrix}$	02	8%
$\begin{pmatrix} 1317{,}00 \\ 1149{,}00 \\ 1125{,}50 \\ 981{,}50 \end{pmatrix}$	01	4%
TOTAL	23	100%

Quadro 46: Respostas dos alunos da turma B para a segunda pergunta do segundo problema da UEPS 04
Fonte: a autora

É muito interessante observar que o registro dos alunos apresenta formas diferentes de indicar a multiplicação de matriz por matriz. Esses registros fazem pensar que, se isso não fosse permitido, talvez eles, simplesmente, copiariam do quadro as respostas, sem pensar no que estavam fazendo. Assim, tiveram a oportunidade de explicitar seus conhecimentos e discuti-los.

Na turma B, três alunos não viram nenhum problema em registrar os resultados obtidos sem discriminá-los, apenas somando-os e colocando-os em colunas, inclusive um deles fez a ordem da coluna exatamente o contrário do outro. Segundo Vergnaud:

> Em geral, os alunos não são capazes de explicar ou mesmo expressar em linguagem natural seus teoremas e conceito-em-ação. Na abordagem de uma situação, os dados a serem trabalhados e a sequência de cálculos a serem feitos dependem de teoremas-em-ação e da identificação de diferentes tipos de elementos pertinentes. A maioria desses conceitos e teoremas-em-ação permanecem totalmente implícitos, mas eles podem também ser explícitos ou tornarem-se explícitos e aí entra o ensino: ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos e cientificamente aceitos, a partir do conhecimento implícito. É nesse sentido que conceito-em-ação e teoremas-em-ação podem, progressivamente, tornarem-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos, mas isso pode levar muito tempo. (MOREIRA, 2004, p. 17).

Passa-se, agora, para o terceiro e último problema desta UEPS 04. Mas, antes, é importante dizer que na turma B este problema não foi aplicado, teve-se um problema de carga horária. O tema era sobre uma editora que pretendia publicar uma coleção de dois livros em três volumes. O problema continha duas tabelas, uma delas informando sobre a quantidade de exemplares de cada livro em cada volume e a outra sobre o preço de custo e o preço de venda de cada livro. Quando solicitados a responder cinco perguntas sobre o problema, 100% dos alunos acertaram as três primeiras perguntas, conforme demonstram os Quadros 47, 48 e 49.

Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Tabela A: 4x2 Tabela B: 2x2	25	100%
TOTAL	25	100%

Quadro 47: Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta do terceiro problema da UEPS 04
Fonte: a autora

Quais os valores totais de custo e venda para cada volume dos dois temas escolhidos?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
$\begin{pmatrix} 200 & 250 \\ 220 & 230 \\ 260 & 240 \\ 300 & 310 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 32 & 40 \\ 33 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14650 & 18750 \\ 14630 & 13690 \\ 16240 & 20720 \\ 19830 & 25330 \end{pmatrix}$	25	100%
TOTAL	25	100%

Quadro 48: Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta do terceiro problema da UEPS 04
Fonte: a autora

Supondo que todos os livros lançados do volume 1 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
R$ 4 100,00	25	100%
TOTAL	25	100%

Quadro 49: Respostas dos alunos da turma A para a terceira pergunta do terceiro problema da UEPS 04
Fonte: a autora

Em relação à quarta pergunta, quando se propuseram questões mais desafiadoras, percebe-se que os registros, acredita-se que devido à interpretação, começam a se diferenciar.

Supondo que todos os livros lançados do volume 2 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
R$ 4 060,00	24	100%
R$ 4 460,00	01	4%
TOTAL	25	100%

Quadro 50: Respostas dos alunos da turma A para a quarta pergunta do terceiro problema da UEPS 04
Fonte: a autora

Em relação à quinta pergunta, exigimos um pouco mais de interpretação e observa-se que, em aumentando o número de exigências, o número de registros diferentes também aumenta.

Supondo que todos os livros lançados do volume 2 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
R$ 4 480,00	22	88%
R$ 4 472,00	01	4%
R$ 5 180,00	01	4%
R$ 3 680,00	01	4%
TOTAL	25	100%

Quadro 51: Respostas dos alunos da turma A para a quinta pergunta do terceiro problema da UEPS 04
Fonte: a autora

O aumento de informações torna a resposta cada vez mais peculiar. Isso, para alguns alunos, interfere na resposta, talvez pela dificuldade de interpretação ou pela falta de atenção, aumentando o número de registros diferentes, todavia ainda não interferindo no percentual de maneira significativa.

Convém destacar que os alunos, em duplas, tiveram tempo para realizar as tarefas da UEPS 04 e depois se discutiram as respostas no quadro. Porém, não estando satisfeita com os resultados, a professora pesquisadora aplicou mais uma UEPS, a UEPS 05, sobre o tema de multiplicação de matriz por matriz. Isso se deveu ao fato de que ter a percepção de que alguns dos alunos precisavam de mais exemplos para poderem acompanhar os demais e juntos concluírem a respeito das regras da multiplicação de matriz por matriz.

Na UEPS 05 (Apêndice H), relata-se o desempenho das turmas A. Depois, por uma outra UEPS, chamada de UEPS 05B, relata-se o desempenho da turma B, pois a turma B, mesmo tendo apenas dois problemas na UEPS 04, participou dessa UEPS 05, mas considerou-se que deveriam ter uma UEPS diferenciada da turma A, porém abordando o mesmo tema, multiplicação de matriz por matriz.

O primeiro problema da UEPS 05 tinha quatro perguntas e nas quatro perguntas o resultado da turma A foi muito bom, conforme se observa a seguir.

a) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Primeira matriz = 3x3 e a segunda matriz = 3x2	29	100%
TOTAL	29	100%

Quadro 52: Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta do primeiro problema da UEPS 05
Fonte: a autora

b) Quantos gramas do ingrediente x precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Junho: 3x80+2x100+5x150=1 190g Julho 3x50+2x120+5x90= 840g	29	100%
TOTAL	29	100%

Quadro 53: Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta do primeiro problema da UEPS 05
Fonte: a autora

c) Quantos gramas do ingrediente y precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Junho: 7x80+4x100+1x150=1 110g Julho: 7x50+4x120+1x90= 920g	26	90%
Junho: 7x80+4x100+1x150=1 110g Julho: 7x50+4x120+90x150= 14 330g	03	10%
TOTAL	29	100%

Quadro 54: Respostas dos alunos da turma A para a terceira pergunta do primeiro problema da UEPS 05
Fonte: a autora

d) Quantos gramas do ingrediente z precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Junho: 10x80+5x100+6x150=2 200g Julho: 10x50+5x120+6x90= 1 640g	29	100%
TOTAL	29	100%

Quadro 55: Respostas dos alunos da turma A para a quarta pergunta do primeiro problema da UEPS 05
Fonte: a autora

Em relação ao segundo problema, que tinha duas perguntas, também se observou um desempenho muito bom.

<table>
<tr><td colspan="3">a) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?</td></tr>
<tr><td>Resposta</td><td>Número de alunos</td><td>Percentual</td></tr>
<tr><td>Primeira matriz = 5x3 e Segunda matriz = 3x1</td><td>27</td><td>93%</td></tr>
<tr><td>Matriz 5x3</td><td>02</td><td>7%</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td>29</td><td>100%</td></tr>
</table>

Quadro 56: Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta do segundo problema da UEPS 05
Fonte: a autora

<table>
<tr><td colspan="3">b) Determine a pontuação de cada país e assinale Falso ou Verdadeiro para cada alternativa que diz respeito a essa nova tabela que vais formar (a tabela de pontos):
( ) A pontuação do Brasil seria superior à do Quênia, México e Tailândia.
( ) A pontuação do Brasil seria inferior apenas à do Quênia e da Espanha.
( ) O Brasil estaria melhor colocado em relação aos demais países por obter o maior número de medalhas.
( ) Na classificação geral, o país que tem o maior número de pontos é a Espanha.
( ) A pontuação do México seria apenas inferior à do Brasil e à da Espanha.</td></tr>
<tr><td>Resposta</td><td>Número de alunos</td><td>Percentual</td></tr>
<tr><td>V,F,F,V,F</td><td>18</td><td>62%</td></tr>
<tr><td>V,F,V,V,F</td><td>10</td><td>35%</td></tr>
<tr><td>V,F,V,V,V</td><td>01</td><td>3%</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td>29</td><td>100%</td></tr>
</table>

Quadro 57: Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta do segundo problema da UEPS 05
Fonte: a autora

Considerando que a resposta contendo o maior número de afirmativas corretas para esse segundo problema seria a primeira linha e observa-se que a maioria dos alunos acertou, porém vemos novamente que, quando se acrescentam mais peculiaridades, as dificuldades também vão aumentando.

Discutiram-se as respostas no quadro e partiu-se para uma definição da multiplicação de matriz por matriz. Os alunos logo visualizaram a condição de que o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz. E, depois disso, também concluíram que era óbvio utilizar-se a primeira linha com a primeira coluna para obter os resultados parciais da pergunta e assim sucessivamente obtendo a matriz, que chamaram de matriz resultado. Essa turma já estava pronta para realizar os exercícios do livro-texto.

Na turma B, também foi aplicada uma UEPS, que denominou-se de UEPS 05B (Apêndice I), porque foi diferenciada em virtude de problemas na carga horária e de observar-se algumas dificuldades ainda de interpretação e registro dos resultados pela UEPS 04, que foi anterior a esta.

A UEPS 05B continha dois problemas. O primeiro, com três perguntas, era sobre as medalhas alcançadas por cada um dos países numa olimpíada. O segundo, com cinco perguntas, era sobre o consumo de remédios fabricados por um laboratório com ingredientes diferentes. Porém os dois problemas ainda envolviam a multiplicação de matriz por matriz. Os resultados estão representados a seguir.

a) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Primeira matriz = 5x3 e Segunda matriz = 3x1	21	91%
Matriz 4x3 e matriz 3x1	01	4,5%
Matriz 3x5 e matriz 1x3	01	4,5%
TOTAL	23	100%

Quadro 58: Respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta do primeiro problema da UEPS 05B
Fonte: a autora

b) Determine a pontuação de cada país e escreva uma matriz que contenha essa pontuação.		
Resposta	Número de alunos	Percentual
3x3+ 3x2+5x1=20 2x3+3x2+3x1=14 1x3+0+2x1=5 0+6x2+6x1= 18 $\begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$ 5x1	17	74%
3x3+ 3x2+5x1=20 2x3+3x2+3x1=14 1x3+0+2x1=5 0+6x2+6x1= 18	06	26%
TOTAL	23	100%

Quadro 59: Respostas dos alunos da turma B para a segunda pergunta do primeiro problema da UEPS 05B
Fonte: a autora

O fato interessante nessa nova UEPS aplicada na turma B é que, como na UEPS anterior eles tinham apresentado dificuldades de registro e faziam ainda muita confusão sobre quem multiplica quem, após as discussões a partir da UEPS 04, encontraram uma maneira bem curiosa. Antes de registrarem na forma matricial, fizeram os cálculos de cada resultado, como mostra na tabela acima.

c) As afirmativas abaixo estão relacionadas com o resultado obtido na matriz que contém a pontuação dos países. Leia as afirmações e assinale F se ela for falsa e ou V se ela for verdadeira: ( ) A pontuação do Brasil seria superior à do Quênia, México e Tailândia. ( ) A pontuação do Brasil seria inferior apenas à do Quênia e da Espanha. ( ) O Brasil estaria melhor colocado em relação aos demais países por obter o maior número de medalhas. ( ) Na classificação geral, o país que tem o maior número de pontos é a Espanha. ( ) A pontuação do México seria apenas inferior à do Brasil e da Espanha.		
Resposta	Número de alunos	Percentual
V,F,V,V,F	21	91%
V,F,F,V,F	02	9%
TOTAL	23	100%

Quadro 60: Respostas dos alunos da turma B para a terceira pergunta do primeiro problema da UEPS 05B
Fonte: a autora

A resposta correta para esta pergunta é a primeira linha, e observa-se que a maioria dos alunos acertaram. Agora, pode-se perceber que os alunos da turma B parecem que engrenaram no conteúdo. Abaixo, apresentam-se os resultados do segundo problema.

a) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Matriz 3x3 e matriz 3x2	20	87%
Matriz 3x2	01	4%
Não responderam	02	9%
TOTAL	23	100%

Quadro 61: Respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta do segundo problema da UEPS 05B
Fonte: a autora

b) Quantos gramas do ingrediente x precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
X em Junho: 3x80+2x100+5x150= 1 190g X em Julho: 3x50+2x120+5x90=840g	21	91%
Não responderam	02	9%
TOTAL	23	100%

Quadro 62: Respostas dos alunos da turma B para a segunda pergunta do segundo problema da UEPS 05B
Fonte: a autora

c) Quantos gramas do ingrediente y precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Y em Junho: 7x80+4x100+1x150= 1 110g Y em Julho: 7x50+4x120+1x90=920g	21	91%
Não responderam	02	9%
TOTAL	23	100%

Quadro 63: Respostas dos alunos da turma B para a terceira pergunta do segundo problema da UEPS 05B
Fonte: a autora

d) Quantos gramas do ingrediente z precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Z em Junho:10x80+5x100+6x150= 2 200g Z em Julho:10x50+5x120+6x90= 1 640g	21	91%
Não responderam	02	9%
TOTAL	23	100%

Quadro 64: Respostas dos alunos da turma B para a quarta pergunta do segundo problema da UEPS 05B
Fonte: a autora

e) Escreva uma nova matriz que contenha estas informações		
Resposta	Número de alunos	Percentual
$\begin{pmatrix} 1\,190 & 840 \\ 1\,110 & 680 \\ 2\,200 & 1\,640 \end{pmatrix}_{3x2}$	17	74%
$\begin{array}{c\|c\|c} & \text{Junho} & \text{Julho} \\ \hline X & 1\,190 & 840 \\ \hline Y & 1\,110 & 680 \\ \hline Z & 2\,200 & 1\,640 \end{array}$	04	17%
Não responderam	02	9%
TOTAL	23	100%

Quadro 65: Respostas dos alunos da turma B para a quinta pergunta do segundo problema da UEPS 05B
Fonte: a autora

As respostas dão indícios de uma aprendizagem com significado, sendo possível fazer o mesmo procedimento da turma A, definir a multiplicação de matriz por matriz e partir para os exercícios do livro-texto.

5.2.5 Busca de evidências de aprendizagem significativa a partir da análise dos resultados das avaliações individuais sobre as UEPS 04 e 05 e os PAS 02 de 14 de outubro e o PAS 03 de 03 novembro.

Seguiu-se com uma avaliação individual (Apêndice J) para as turmas A e B, na qual se solicitaram novamente os conteúdos pertinentes à construção, identificação de elementos e operações entre matrizes, cujos resultados são relatados a seguir. Convém esclarecer que a turma B, devido aos períodos letivos, só realizou seis das oito questões elaboradas para essa avaliação.

A primeira questão envolvia algumas afirmativas em relação ao conteúdo citado acima, e o aluno, aos lê-las, devia responder “F”, se a afirmativa era falsa e “V”, se a afirmativa era verdadeira. Os alunos da turma A obtiveram o seguinte resultado.

Respostas	Número de alunos	Percentual
V,F,V,F,V	14	66%
V,F,V,V,V,	04	19%
V,F,F,V,V	01	5%
V,F,V.V,F	01	5%
F,V,V,V,F	01	5%
TOTAL	21	100%

Quadro 66: Respostas dos alunos da turma A para a primeira questão da segunda avaliação
Fonte: a autora

As respostas corretas para essa primeira questão seriam V, F, V, F e V. Vê-se que 66% dos alunos acertaram a questão completamente, quatro erraram apenas uma delas, dois erraram três das questões e um aluno errou quatro das cinco questões.

Na turma B, temos apenas três alunos que acertaram todas as questões, mas muitos deles, no total onze, acertaram quatro das cinco questões, ou seja, mais da metade teve um bom percentual de acertos, ao todo 75%.

Respostas	N° de alunos	Percentual
V,F,V,F,V	03	15%
F,F,V,F,V	02 errou só a segunda	10%
V,F,V,F,F	05 errou só a última	25%
,V,F,V,V,V	04 errou só a penultima	25%
V,F,V,V,F	01 errou as duas últimas	5%
F,F,V,V,V	02 errou a primeira e a penultima	10%
F,F,V,F,F	01 errou a segunda e a última	5%
V,V,V,V,V	01 errou a terceira e a penultima	5%
F,V,V,V,F	01 só acertou a quarta	5%
TOTAL	20	100%

Quadro 67: Respostas dos alunos da turma B para a primeira questão da segunda avaliação
Fonte: a autora

Ao se comparar a turma A com a turma B, constata-se que na turma A também 75% dos alunos acertaram pelo menos quatro das cinco questões. Isso leva a bons indícios de aprendizagem significativa e indica que se está no caminho certo.

Apresentam-se, na sequência, as categorizações da avaliação 02.

Em relação à primeira pergunta da segunda questão da avaliação 02, tem-se que, na turma A, 95% dos alunos efetuaram corretamente o produto entre as matrizes.

Resposta	N° de alunos	%
$\begin{pmatrix} -13 & -6 & -9 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	20	95%
$\begin{pmatrix} 30 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$	01	5%
TOTAL	21	100%

Quadro 68: Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta da segunda questão da segunda avaliação
Fonte: a autora

Na turma B, não se obteve um resultado muito positivo nessa questão, mas depois a situação melhorou.

Resposta	N° de alunos	%
$\begin{pmatrix} -13 & -6 & -9 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	03	15%
Impossível	11	55%
Não efetuou nenhuma operação matemática	01	5%
Efetuou o produto, mas trocou a ordem da matriz resultante	02	10%
Efetuou o produto e resultou numa matriz 2x2	01	5%
Não efetuou o produto e justificou ser impossível por causa do número de colunas da primeira matriz	02	10%
TOTAL	20	100%

Quadro 69: Respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta da segunda questão da segunda avaliação
Fonte: a autora

Em relação à segunda pergunta, que ainda envolvia a multiplicação de matriz por matriz, obteve-se, na turma A, o seguinte resultado.

Resposta	N°de alunos	%
$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ -8 & -4 & 10 \\ -12 & -6 & 15 \end{pmatrix}$	16	75%
(7)	02	10%
$\begin{pmatrix} -4 & -8 & -12 \\ -2 & -4 & -6 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$	02	10%
Não é possível	01	5%
TOTAL	21	100%

Quadro 70: Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta da segunda questão da segunda avaliação
Fonte: a autora

E, na turma B, segue o resultado.

Resposta	N° de alunos	%
$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ -8 & -4 & 10 \\ -12 & -6 & 15 \end{pmatrix}$	10	50%
(7)	03	15%
$(-4 \quad -4 \quad 15)$	03	15%
$\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix}$	01	5%
(17)	01	5%
$(7 \quad 7 \quad 7)$	01	5%
Não é possível	01	5%
TOTAL	20	100%

Quadro 71: Respostas dos alunos da turma B para a segunda pergunta da segunda questão da segunda avaliação
Fonte: a autora

Observa-se que, na turma B, ainda houve algumas dificuldades conceituais que corroboram para procedimentos incorretos.

Em relação à terceira pergunta, que envolvia uma multiplicação de matriz por matriz e cálculos de valores desconhecidos, na turma A, a maioria dos alunos interpretou e resolveu corretamente a questão.

Resposta		N° de alunos	%
$x = -3\ e\ y = \frac{1}{2}$		17	80%
$x = -3\ e\ y = \ -1$		01	5%
$x = 5\ e\ y = \ \frac{1}{2}$		01	5%
$x = -6\ e\ y = -2$		01	5%
$x = -6\ e\ y = -4$		01	5%
TOTAL		21	100%

Quadro 72: Respostas dos alunos da turma A para a terceira pergunta da segunda avaliação
Fonte: a autora

Na turma B:

Resposta	N° de alunos	%
$x = -3\ e\ y = \frac{1}{2}$	09	45%
$x = 1\ e\ y = \ -2$	01	5 %
$x = 1\ e\ y = \ \frac{1}{2}$	01	5 %
$x = 2\ e\ y = \frac{3}{2}$	01	5 %
$x = -1 e\ y = -4$	01	5 %
$x = -8\ e\ y = -2$	01	5 %
$x = -6\ e\ y = -4$	02	10 %
$x = 5 e\ y = 4$	04	20 %
TOTAL	20	100%

Quadro 73: Respostas dos alunos da turma B para a terceira pergunta da segunda avaliação
Fonte: a autora

A quarta questão envolvia um problema contextualizado sobre multiplicação de matriz por matriz. Na turma , houve novamente um ótimo resultado.

Resposta	N°de alunos	%
4 100 Portas e 12 000 janelas	19	90%
9 900 portas e 13 200 janelas	01	5%
Não respondeu	01	5%
TOTAL	21	100%

Quadro 74: Respostas dos alunos da turma A para a quarta pergunta da segunda avaliação
Fonte: a autora

Na turma B, verificou-se que ainda havia a necessidade de revisar as regras da multiplicação de matriz por matriz, pois alguns alunos ainda mostravam dúvidas.

Resposta	N° de alunos	%
4 100 Portas e 12 000 janelas	07	35 %
4 100 portas e 11 400 janelas	02	10 %
4 100 portas e 4 800janelas	01	5%
4 100 portas e 7 200 janelas	01	5%
4 100 portas e 11 000 janelas	01	5%
4 100 portas e 10 100 janelas	01	5%
Não respondeu	01	5%
Erraram as duas questões	06	30%
TOTAL	20	100%

Quadro 75: Respostas dos alunos da turma B para a quarta pergunta da segunda avaliação
Fonte: a autora

A quinta, a sexta, a sétima e a oitava pergunta eram questões de vestibular, de universidades do país.

Na turma A:

Resposta	N° de alunos	%
Marcaram a letra (e)	17	80%
Marcaram a letra (b)	02	10%
Marcaram a letra (c)	01	5%
Marcaram a letra (d)	01	5%
TOTAL	21	100%

Quadro 76: Respostas dos alunos da turma A para a quinta pergunta da segunda avaliação
Fonte: a autora

Resposta	N°de alunos	%
Marcaram a letra (a)	20	95%
Marcaram a letra (e)	01	5%
TOTAL	21	100%

Quadro 77: Respostas dos alunos da turma A para a sexta pergunta da segunda avaliação
Fonte: a autora

Resposta	N°de alunos	%
Marcaram a letra (b)	20	95%
Marcaram a letra (c)	01	5%
TOTAL	21	100%

Quadro 78: Respostas dos alunos da turma A para a sétima pergunta da segunda avaliação
Fonte: a autora

Resposta	N°de alunos	%
Marcaram a letra (b)	20	95%
Marcaram a letra (d)	01	5%
TOTAL	21	100%

Quadro 79: Respostas dos alunos da turma A para a oitava pergunta da segunda avaliação
Fonte: a autora

Na turma B:

Resposta	N° de alunos	%
Marcaram a letra (e)	09	45%
Marcaram a letra (b)	02	10%
Marcaram a letra (c)	07	35 %
Marcaram a letra (d)	02	10 %
TOTAL	20	100%

Quadro 80: Respostas dos alunos da turma B para a quinta pergunta da segunda avaliação
Fonte: a autora

Resposta	N° de alunos	%
Marcaram a letra (a)	18	90 %
Marcaram a letra (d)	02	10 %
TOTAL	20	100%

Quadro 81: Respostas dos alunos da turma B para a sexta pergunta da segunda avaliação
Fonte: a autora

Aconteceram ainda dois PAS (Projetos de Avaliação Sistemática). O PAS 02 (Apêndice K) e o PAS 03 (Apêndice L), cujas médias, respectivamente, das turmas A e B foram, 8,7 e 8,1 e 7,5 e 6,7.

Antes de se dar andamento ao conteúdo sobre matrizes, precisou-se introduzir um organizador prévio, pois agora se entraria em um dos objetivos de se estudar esse conteúdo: resolver sistemas lineares.

5.2.6 Organizador prévio sobre sistemas lineares

Um organizador prévio, se bem manipulado, pode servir de âncora para motivar e introduzir novos conhecimentos. Segundo Moreira:

> Organizadores prévios podem tanto fornecer ‘ideias-âncora’ relevantes para a aprendizagem significativa do novo material, quanto estabelecer relações entre ideias, proposições e conceitos já existentes na estrutura cognitiva e

> aqueles contidos no material de aprendizagem, ou seja, para explicitar a relacionabilidade entre os novos conhecimentos e aqueles que o aprendiz já tem, mas não percebe que são relacionáveis aos novos. (MOREIRA, 2011, p. 105).

Era o que precisávamos, um organizador prévio para começar a trabalhar com determinantes e, por fim, chegarmos a análise de sistemas lineares. Então, pensou-se em fornecer um texto contendo um pouco da história dos sistemas lineares e nesta história estaria envolvido o conteúdo de determinantes. Surgiu a UEPS 06 (Apêndice M), como forma de motivar os alunos e envolvê-los de maneira significativa.

O texto foi lido, em conjunto, em sala de aula, com discussão sobre o tema, e a seguir, definiu-se o que seria um determinante e como calculá-los para matrizes quadradas de ordem dois e três. Fizemos alguns exemplos no quadro e, depois, alguns exercícios do livro-texto.

Partiu-se então, para outra UEPS, a UEPS 07 (Apêndice N), na qual a proposta era, em duplas, resolverem, com liberdade de procedimentos, problemas contextualizados de duas incógnitas com duas equações, num período de aula (60 minutos). Passado este tempo passamos a discutir a forma como haviam resolvido os problemas e verificamos que a maioria havia atribuído para cada valor desconhecido do problema uma letra (as letras que mais apareceram foram x e y), mas alguns deram a inicial do problema, por exemplo se o problema tratava de bois e galinhas, alguns utilizaram a letra “b” e “g”.

Discutiu-se a resolução dos problemas, em conjunto, no quadro, e alguns lembraram de que já haviam trabalhado com este tipo de problema em séries anteriores. Aproveitou-se a lembrança e definiu-se o que seria um sistema linear. E, neste momento, da discussão, explicou-se a resolução de sistemas lineares pela regra de CRAMER, respeitando todos os passos exigidos pela mesma. Exercitamos a Regra de Cramer, realizando exercícios do livro-texto. Não se verificaram muitas dúvidas na resolução dos problemas, a maior parte dos erros cometidos davam conta de erros de cálculos (procedimentais e não conceituais).

Era necessário, devido ao adiantado do calendário escolar, trabalhar-se com problemas de três incógnitas e três equações, para então, depois introduzir a análise de sistemas.

Planejou-se mais uma UEPS, a UEPS 08 (Apêndice O), que continha dois problemas contextualizados e que agora, já poderiam ser resolvidos por CRAMER, e, foi assim que os alunos subentenderam que precisariam ter mais um cálculo por ter aumentado o número de incógnitas. Um deles chegou a perguntar: *"e se continuar aumentando professora, como faremos?"* Respondi que o Método de CRAMER é um dos métodos que utilizamos para resolvermos sistemas lineares, mas que há outros, dentre eles o "Método da eliminação de GAUSS", ou como é mais conhecido, "Método do Escalonamento".

Para dar sequência nas atividades previstas, realizamos exercícios do livro-texto e começou-se a verificar que, em algumas situações, poder-se-ia ter uma única solução, não ter solução ou infinitas. Esse foi o momento de discutir em conjunto o que fazer.

Verificou-se que, para o cálculo de cada uma das incógnitas, havia a participação do determinante principal, e isto era decisivo para único resultado, se ele não fosse zero. Mas em assumindo o valor zero, precisar-se-ia calcular o próximo determinante, chamado de determinante em "x" e verificar o que aconteceria com ele. Se o seu valor desse zero como o determinante principal, ter-se-ia uma divisão de zero por zero, o que, na Matemática, é uma indeterminação. Se o seu valor fosse diferente de zero, haveria uma divisão de zero por um número, o que, na Matemática, não se obtém resultado, ou seja, um sistema sem solução. E, assim, definiu-se o que poderia acontecer com um sistema linear.

Era o momento de resolverem mais exercícios no livro-texto e buscaram-se evidências de uma aprendizagem significativa.

Partiu-se para a realização de uma atividade avaliativa (Apêndice 16), individual, que continha o assunto abordado, resolução de sistemas lineares.

5.2.7 Busca de evidências de aprendizagem significativa a partir da análise dos resultados das avaliações individuais sobre análise de sistemas

Foi realizada a avaliação (Apêndice P) contendo dez questões de vestibular que envolviam o conteúdo de análise de sistemas. Dentre elas, os alunos deveriam escolher oito questões para resolver.

Os resultados foram tabulados e estão relatados abaixo.

Na turma A, obtiveram-se os seguintes dados:

Questão 1	Acertaram	18	64%
	Erraram	10	36%
	Optaram por não fazer	0	0%
	Total	28	100%
Questão 2	Acertaram	2	7%
	Erraram	4	14%
	Optaram por não fazer	22	79%
	Total	28	100%
Questão 3	Acertaram	24	86%
	Erraram	4	14%
	Optaram por não fazer	0	0%
	Total	28	100%
Questão 4	Acertaram	18	64%
	Erraram	4	14%
	Optaram por não fazer	6	22%
	Total	28	100%
Questão 5	Acertaram	26	93%
	Erraram	2	7%
	Optaram por não fazer	0	0%
	Total	28	100%
Questão 6	Acertaram	22	79%
	Erraram	6	21%
	Optaram por não fazer	0	0%
	Total	28	100%
Questão 7	Acertaram	22	79%
	Erraram	6	21%
	Optaram por não fazer	0	0%
	Total	28	100%
Questão 8	Acertaram	16	57%
	Erraram	10	36%
	Optaram por não fazer	2	7%
	Total	28	100%
Questão 9	Acertaram	14	50%
	Erraram	0	0%
	Optaram por não fazer	14	50%
	Total	28	100%
Questão 10	Acertaram	24	86%
	Erraram	4	14%
	Optaram por não fazer	0	0%
	Total	28	100%

Quadro 82: Respostas dos alunos da turma A para as questões da terceira avaliação
Fonte: a autora

Observa-se que os resultados para as questões escolhidas foram muito bons, o que dá bons indícios de uma aprendizagem com real significado. Transferindo essas informações para o registro oficial da escola que é uma nota entre zero e dez, almejando a média 7,0, a da turma A obteve a média de 8,1.

Na turma B, tem-se:

Questão 1	Acertaram	12	55%
	Erraram	2	9%
	Optaram por não fazer	8	36%
	Total	22	100%
Questão 2	Acertaram	12	55%
	Erraram	4	18%
	Optaram por não fazer	6	27%
	Total	22	100%
Questão 3	Acertaram	18	82&
	Erraram	4	18%
	Optaram por não fazer	0	0%
	Total	22	100%
Questão 4	Acertaram	16	73%
	Erraram	4	18%
	Optaram por não fazer	2	9%
	Total	22	100%
Questão 5	Acertaram	20	95%
	Erraram	2	9%
	Optaram por não fazer	0	0%
	Total	22	100%
Questão 6	Acertaram	4	18%
	Erraram	18	82%
	Optaram por não fazer	0	0%
	Total	22	100%
Questão 7	Acertaram	20	91%
	Erraram	2	9%
	Optaram por não fazer	0	0%
	Total	22	100%
Questão 8	Acertaram	16	73%
	Erraram	6	27%
	Optaram por não fazer	0	0%
	Total	22	100%
Questão 9	Acertaram	10	46%
	Erraram	0	0%
	Optaram por não fazer	12	54%
	Total	22	100%
Questão 10	Acertaram	14	65%
	Erraram	8	36%
	Optaram por não fazer	0	0%
	Total	22	100%

Quadro 83: Respostas dos alunos da turma B para as questões da terceira avaliação
Fonte: a autora

A turma B também obteve um bom resultad, e a sua média foi de 7,6 na avaliação.

A descrição dessa avaliação encerra os relatos pertinentes à metodologia desta tese até o momento, mas não encerra a perspectiva de continuar adotando nas aulas de Matemática a metodologia da aprendizagem significativa de Ausubel e seus colaboradores por considerar-se que o planejamento e a aplicação das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas incentivam a participação, a explicitação das ideias dos alunos, a criatividade, o raciocínio lógico, a interação social e permitem obter evidências de uma aprendizagem de real significado para o aluno.

Julgou-se necessário pesquisar sobre a história das matrizes para utilizar possíveis informações durante a formação das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas, bem como investigar a abordagem desse conteúdo no livro didático utilizado pela Escola.

6 A HISTÓRIA DAS MATRIZES E A INVESTIGAÇÃO DA ABORDAGEM DO CONTEÚDO DE MATRIZES NO LIVRO DIDÁTICO ADOTADO NAS TURMAS EM QUE ACONTECEU A PESQUISA

A primeira menção sobre o conteúdo de matrizes, abordando o assunto de resolução de sistemas, foi citada no livro chinês “Chui-Chang Suan-Shu” ou “Nove Capítulos”, escrito por Wangs Hs’iao-t’ung, que data de cerca de 250 A.C.. O livro descreve sobre a arte da Matemática, tem 246 problemas sobre assuntos que envolvem medidas de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações e propriedades dos triângulos retângulos. É no capítulo oito que se encontra a solução de problemas sobre equações lineares, utilizando números positivos e negativos. O livro relata que foi a preocupação do autor com a resolução dos diagramas (ou quadrados mágicos) que o incentivou a resolver equações lineares.

> Os algebristas chineses estudaram permutação e combinação de objetos, séries, resolveram equações algébricas de grau elevado, desenvolveram e usaram aquilo que chamamos teorema binomial, extraíram raízes quadradas, por volta do ano 200 a.C; resolveram sistemas de equações, ou seja, eram capazes de resolver equações lineares simultâneas com duas ou três incógnitas e, no século IV de nossa era, até equações indeterminadas. Mas todo esse desenvolvimento possui uma coisa em comum: a forma. Observando o quadrado mágico, o triângulo de Pascal e o método da extração de raiz quadrada vemos que os chineses gostavam de montar diagramas numéricos, então não é de se estranhar que também para a

> resolução de sistemas de equações fosse inventado um diagrama, ou mais precisamente, em linguagem atual, matrizes, cujas origens estão ligadas diretamente à China e que aparecem pela primeira vez no livro *Nove Capítulos* (CONTADOR, 2006, p. 488).

É interessante observar que a resolução de sistemas lineares, pelos chineses, realizava operações entre colunas ao invés de operações entre linhas (resolução por escalonamento), como habitualmente se costuma fazer hoje. Veja-se o exemplo a seguir:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Ao escrever a matriz com os coeficientes originais, chamada de matriz ampliada, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}$$

Ao multiplicar a segunda coluna por três e subtrair da terceira coluna multiplicada por dois, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

Ao multiplicar a primeira coluna por três e subtrair da terceira coluna, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

Ao multiplicar a primeira coluna por cinco e subtrair da segunda coluna multiplicada por quatro, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

E, a partir de agora, pode-se encontrar os valores de z, y e x, fazendo:

$36z=99$, $5y+z=24$ e $3x+2y+z=39$.

Acredita-se que, se a matemática chinesa tivesse tido uma continuidade ininterrupta, teria fornecido ótimas ideias para a matemática atual. Em 213 a.C., o imperador da China mandou queimar livros, fato que prejudicou a propagação e a evolução dos conhecimentos chineses em relação à matemática, mas há indícios de que alguns livros não foram queimados. Acredita-se também que os contatos entre a China, a Índia e o Ocidente podem ter facilitado a transmissão, o aprendizado e a ênfase no ensino de matemática, principalmente em relação ao comércio e ao calendário.

Ainda no Oriente, em 1683, há o registro de que um chinês, chamado Seki Takakazu ou também conhecido por Seki Kõwa (1642 – 1708), publicou um trabalho no qual menciona o antigo método chinês para resolver sistemas de equações lineares, associando os coeficientes a um quadrado e daí mencionando o determinante.

No Ocidente,houve, nos séculos XVII e XVIII, dois grandes Matemáticos, Newton (1642-1727) e Leibniz (1646 – 1716), que efetuam grandes descobertas em relação ao cálculo. É atribuída a Leibniz a primeira menção sobre o método de determinantes para resolver sistemas lineares, porém a publicação dessa descoberta aconteceu somente em 1850, sendo redescoberta por Maclaurin (1698 – 1746), no livro “The Treatise of Algebra”, publicado em 1748, dois anos após a sua morte. Enquanto isso, Gabriel Cramer (1704-1752) fez a publicação da regra que leva seu nome somente em 1750, na obra “Introduction à l’analyse des lignes courbes algebriques de Cramer” e parece que, apesar da obra de Maclaurin ter sido editada por seis vezes, a regra de Cramer ficou mais popular, talvez devido ao fato notacional em que índices estavam associados a coeficientes literais para facilitar a determinação dos sinais.

Em 1764, o francês Étienne Bézout (1730 – 1783) sistematizou a regra dos sinais nos determinantes, e outro francês, Alexandre Vandermonde (1735 – 1796), fez uma abordagem dos determinantes independentes dos sistemas lineares.

Laplace (1749-1827) contribuiu com mais ênfase nas matrizes, mais especificamente, no conteúdo relacionado aos determinantes. Na história, Laplace aparece muito mais em citações relativas à teoria gravitacional de Newton e na teoria das probabilidades, sendo considerado, com a publicação da obra “Mécanique céleste”, um marco na explicação sobre o sistema solar.

Sarrus (1798 – 1861), matemático francês, integrante da Academia das Ciências (1842), autor de vários trabalhos, descobriu uma regra mnemônica para calcular o determinante de uma matriz de ordem três, que levou o seu nome “Regra de Sarrus”.

Já se percebe que a história dos determinantes é uma colcha de retalhos, aparecendo desde a China, na antiguidade, e seguindo com publicações de Leibniz, Cramer e Laplace. Apenas no século XIX, no continente europeu, é que Cauchy (1789 – 1857) e Jacobi (1804-1851) iniciaram um estudo mais continuado sobre os determinantes. Comenta-se que também é de Cauchy, em 1826, o nome “tableau”, que significa tabela. Cauchy gostava de publicar seus trabalhos, assim que conseguisse qualquer resultado. Em 1812, publicou um artigo sobre determinantes e apresentou-o à Academia de Ciências. A partir daí, passou a utilizá-lo em várias situações. Em 1815, aplicou a linguagem dos determinantes a um problema de Geometria e a outro de Física. Afirmou que:

> Se A,B,C são os comprimentos de três arestas de um paralelepípedo, e se as projeções delas sobre os eixos x,y e z de uma sistema de coordenadas retangulares são: $\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1; \\ A_2 & B_2 & C_2; \\ C_3 & B_2 & C_3; \end{matrix}$ então o volume do paralelepípedo será $A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 = S(\pm A_1B_2C_3)$. Na mesma memória, a propósito da propagação das ondas, ele aplicou sua notação de determinantes a derivadas parciais, substituindo uma condição que ocupava duas linhas pela simples abreviação.
>
> $S = \left(\pm \frac{dx}{da}\ \frac{dy}{db}\ \frac{dz}{dc}\right) = 1$. (BOYER, 1974, p. 377).

Jacobi estava ligado aos determinantes, porque seu algoritmo, chamado de “jacobiano”, apareceu no primeiro membro da equação acima, feita na citação, por Cauchy, e porque, depois disso, publicou uma obra, em 1841, intitulada “De determinantibus functionalibus”, na qual ele observou que:

> [...] este determinante funcional é em muitos pontos análogo, para funções de várias variáveis, do quociente diferencial de uma função de uma variável; e naturalmente ele chamou à atenção para seu papel na questão de saber se uma coleção de funções ou equações é independente. Mostrou que se n funções em n variáveis são funcionalmente relacionadas, o jacobiano deve anular-se identicamente; se as funções são mutualmente independentes, o jacobiano não pode ser identicamente zero (BOYER, 1974, p.378).

O século XIX ficou conhecido como a idade áurea da Matemática devido as suas descobertas, tanto no que diz respeito à qualidade quanto à quantidade de assuntos relacionados a essa disciplina.

Outro fato relevante é que muitas dessas descobertas aconteciam quase que concomitantemente em diferentes partes do planeta. Por isso, ainda no século XIX, houve também a contribuição de outros dois autores na teoria das matrizes. Um deles, o inglês Arthur Cayley (1821 – 1895), provindo da Universidade da Cambridge, contribuiu para o aparecimento da álgebra moderna e,com ela, o estudo das matrizes. Em 1843, Cayley iniciou a geometria analítica ordinária do espaço n-dimensional, utilizando determinantes como instrumento essencial. Nessa notação, utilizando coordenadas homogêneas, fez a notação das equações de reta e de plano na forma matricial. Logo após, fez menção às transformações lineares na linguagem matricial e seguiu definindo que as operações com matrizes podem assemelhar-se às operações utilizadas na "álgebra". Assim, o estudo da álgebra de matrizes e de outras álgebras foi um dos principais fatores no desenvolvimento de uma visão cada vez mais abstrata da álgebra. Outro autor, James Joseph Sylvester (1814 – 1897), também provindo da Universidade da Cambridge, contribuiu na teoria das matrizes pelo método dialítico de Sylvester para eliminar uma incógnita entre duas equações polinomiais e no desenvolvimento da teoria das "formas", já proposta por Cayley, tanto que vieram a ser chamados de "gêmeos invariantes". Os casos mais importantes na geometria analítica e na física são as formas quadráticas, em especial $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, que, quando igualada a uma constante não nula, pode representar uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole. Porém, se a forma é transformada, por uma rotação de eixos em torno da origem, obtêm-se novas formas e a chamada característica da forma é um invariante sob tal transformação. Comenta-se que foi dele a denominação de "matriz', por volta de 1850, e que Cayley, na sua obra "Memoir on the Theory of Matrices", em 1858, passou a divulgar esse nome e demonstrar a sua utilidade.

Atualmente, muitas das aplicações das matrizes aparecem na computação. Como, por exemplo, os movimentos rígidos, seja na geração dos movimentos e deformações que vemos nos efeitos especiais do cinema, da TV, dos games de computadores, seja nas visualizações das simulações científicas. Mas o que são os movimentos rígidos? Os movimentos rígidos ou euclidianos são as transformações que preservam distância entre pontos e, como tais, preservam o tamanho e a forma das figuras. Há três tipos de movimentos rígidos básicos no plano:

- as translações;
- as reflexões relativamente a uma reta dada;
- as rotações de um ângulo dado e em torno de um centro dado (as rotações sempre são medidas no sentido anti-horário).

Os movimentos rígidos básicos utilizados no plano têm generalização imediata no espaço, no que se refere a translações e a reflexões, sendo um pouco mais delicados no caso das rotações. Todo movimento rígido, plano ou espacial, pode ser obtido fazendo uma translação seguida de uma rotação e finalmente de uma reflexão. Há trabalhos de pesquisa nesta área e aplicativos que podem auxiliar na visualização dos movimentos.

Além da computação, há também o uso de matrizes na criptografia. A palavra criptografia vem do grego “kriptos”, que significa oculto. A maioria da transações eletrônicas, como serviços disponíveis na internet e em movimentações bancárias, dependem dela para manter o sigilo dos dados. Um dos métodos para criptografar é trabalhar com um par de matrizes A e B, sendo B a matriz inversa de A, tal que o produto das matrizes A e B dá origem à matriz identidade. O remetente utilizará a matriz A para criptografar a mensagem; o destinatário; a matriz B para decodificar a mensagem. Ao codificar a mensagem, o remetente vai utilizar pares de caracteres e criar uma tabela de correspondência transformando o alfabeto em números para poder operar entre as matrizes. Ainda sobre esse tema segue a sugestão de assistir ao filme “O jogo da imitação”, do diretor Morten Tyldum, que conta a história real de Alan Turing, que durante a II Guerra Mundial, correu contra o tempo para decifrar o famoso código alemão “Enigma”.

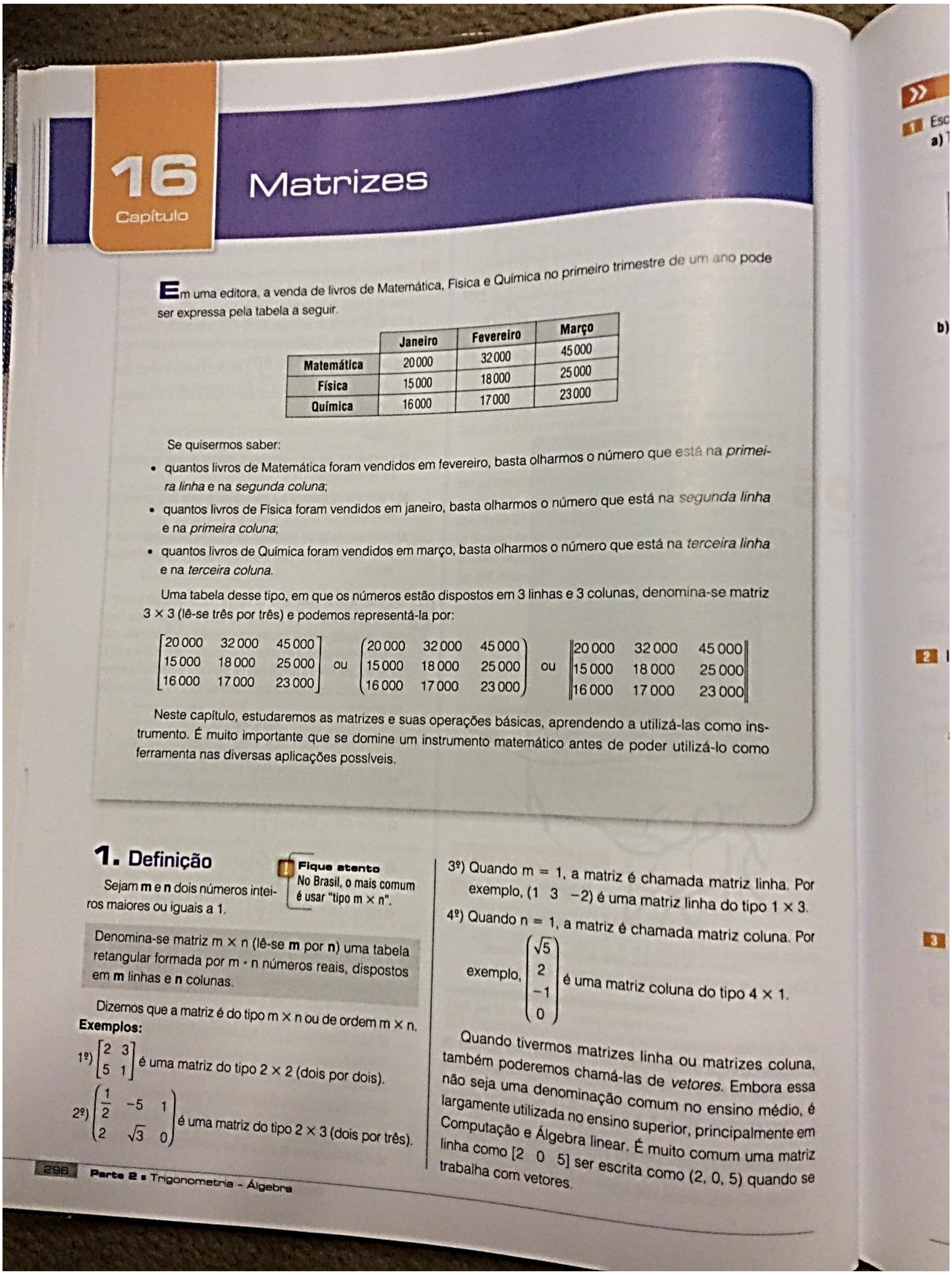
Os sistemas de localização e orientação têm sido aprimorados por diversos motivos. Um dos mais eficientes é o Sistema de Posicionamento Global (GPS – Global Positioning System), originalmente desenvolvido pelos americanos (1945-1991) devido à Guerra Fria. Ele é controlado por vinte e quatro satélites, colocados em seis órbitas diferentes, que percorrem o entorno da Terra duas vezes ao dia em uma velocidade de 13 000 km/h e a uma altura de, aproximadamente, 20 000 km. Sua composição utiliza conteúdos matriciais, tais como a translação e a rotação.

A tomografia computadorizada é uma modalidade da radiologia reconhecida pelo alto potencial de diagnóstico. A imagem por tomografia computadorizada é um mapeamento do coeficiente linear de atenuação da seção do corpo humano em estudo. A imagem é apresentada como uma matriz bidimensional em que a cada elemento desta matriz, o pixel, é atribuído um valor numérico, denominado número de tomografia computadorizada. Ele é expresso em unidades Hounsfield (UH), e está relacionado ao coeficiente linear médio de atenuação do elemento de volume, voxel, no interior do corte que o pixel representa. Uma imagem-padrão é gerada por um sistema que tem, no mínimo, 262 144 incógnitas. Muitos foram os algoritmos desenvolvidos para tratar o sistema sobredeterminado, sendo adotado o algoritmo de Kaczmarz, que pertence a uma classe chamada Técnicas de Reconstrução Algébrica. A questão consiste em resolver o mesmo problema matemático básico: encontrar uma boa solução aproximada de um sistema sobredeterminado e inconsistente constituído de um grande número de equações lineares e assim obter uma imagem de qualidade que permita um diagnóstico o mais próximo possível da realidade.

Sugere-se que a história das matrizes e suas aplicações possam ser utilizadas pelo professor como elemento motivador ao planejar suas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS).

Concomitante à pesquisa, procedeu-se a análise do conteúdo de matrizes no livro didático adotado pela escola e utilizado no decorrer da mesma. Era necessário a sua utilização, pois ele continha exercícios de fixação, questões de vestibulares e questões do ENEM, que também foram trabalhadas no decorrer da pesquisa. Relatam-se, a seguir, as observações feitas ao analisar o conteúdo de matrizes no livro didático adotado pela Escola.

Na introdução do conteúdo de matrizes, o livro mostra uma tabela, apresentada na Figura 17, com informações sobre a venda de livros de Física e Matemática durante os meses de janeiro, fevereiro e março e faz três afirmações sobre a mesma para, logo em seguida, definir a ordem da matriz e a notação genérica. Segue classificando os tipos de matrizes e, entre os assuntos ainda pertinentes à definição, propõe alguns exercícios genéricos utilizando os sub-índices “i”, para identificar a linha e “j” para identificar a coluna. Antes de iniciar as operações, propõe, na lista de exercícios, um exercício contextualizado do Enem.



16 Capítulo

Matrizes

Em uma editora, a venda de livros de Matemática, Física e Química no primeiro trimestre de um ano pode ser expressa pela tabela a seguir.

	Janeiro	Fevereiro	Março
Matemática	20000	32000	45000
Física	15000	18000	25000
Química	16000	17000	23000

Se quisermos saber:

- quantos livros de Matemática foram vendidos em fevereiro, basta olharmos o número que está na *primeira linha* e na *segunda coluna*;
- quantos livros de Física foram vendidos em janeiro, basta olharmos o número que está na *segunda linha* e na *primeira coluna*;
- quantos livros de Química foram vendidos em março, basta olharmos o número que está na *terceira linha* e na *terceira coluna*.

Uma tabela desse tipo, em que os números estão dispostos em 3 linhas e 3 colunas, denomina-se matriz 3 × 3 (lê-se três por três) e podemos representá-la por:

$$\begin{bmatrix} 20\,000 & 32\,000 & 45\,000 \\ 15\,000 & 18\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 17\,000 & 23\,000 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 20\,000 & 32\,000 & 45\,000 \\ 15\,000 & 18\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 17\,000 & 23\,000 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{Vmatrix} 20\,000 & 32\,000 & 45\,000 \\ 15\,000 & 18\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 17\,000 & 23\,000 \end{Vmatrix}$$

Neste capítulo, estudaremos as matrizes e suas operações básicas, aprendendo a utilizá-las como instrumento. É muito importante que se domine um instrumento matemático antes de poder utilizá-lo como ferramenta nas diversas aplicações possíveis.

1. Definição

Sejam **m** e **n** dois números inteiros maiores ou iguais a 1.

Fique atento
No Brasil, o mais comum é usar "tipo m × n".

Denomina-se matriz m × n (lê-se **m** por **n**) uma tabela retangular formada por m · n números reais, dispostos em **m** linhas e **n** colunas.

Dizemos que a matriz é do tipo m × n ou de ordem m × n.

Exemplos:

1º) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 × 2 (dois por dois).

2º) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -5 & 1 \\ 2 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 × 3 (dois por três).

3º) Quando m = 1, a matriz é chamada matriz linha. Por exemplo, $(1 \quad 3 \quad -2)$ é uma matriz linha do tipo 1 × 3.

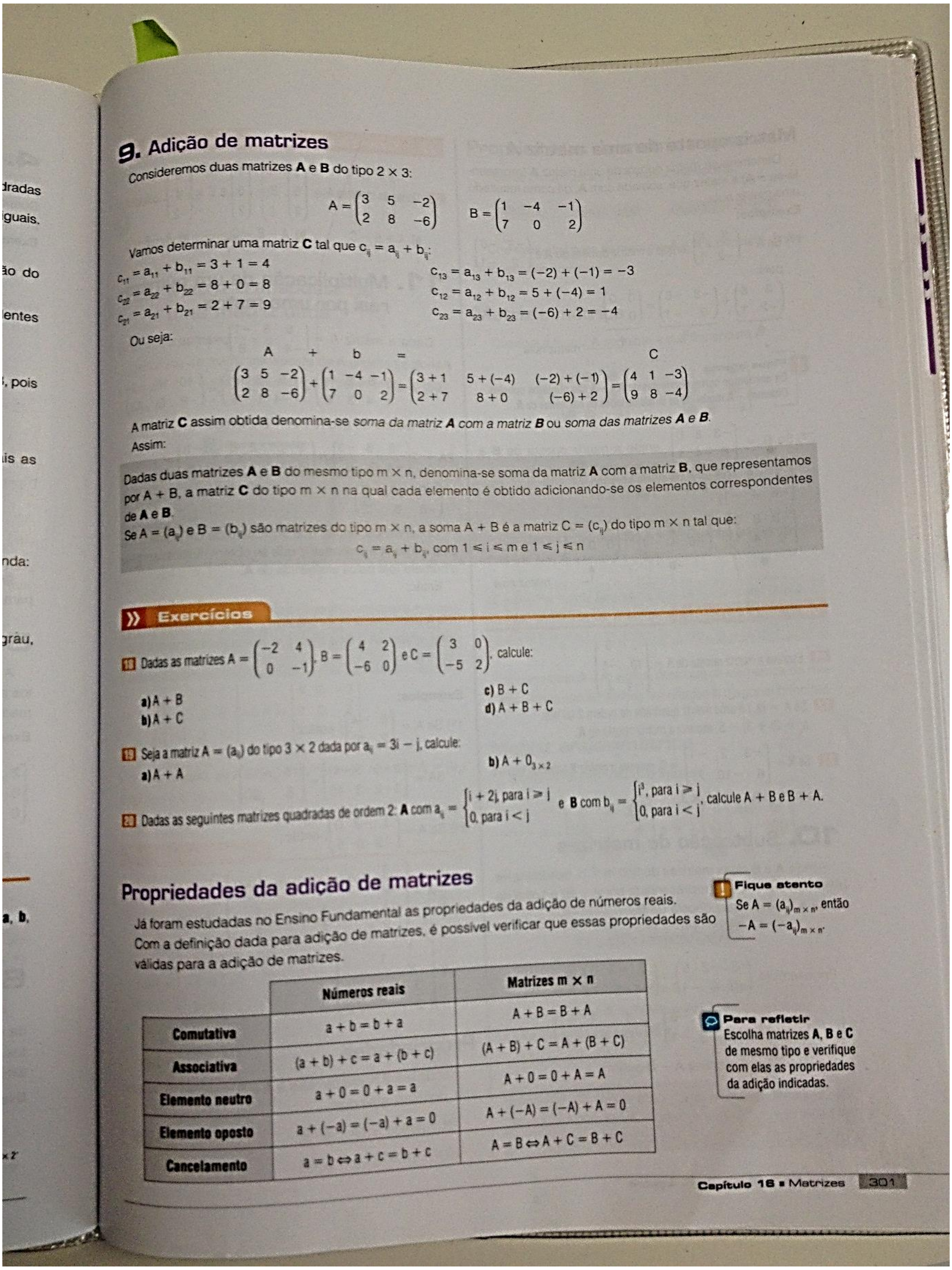
4º) Quando n = 1, a matriz é chamada matriz coluna. Por exemplo, $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna do tipo 4 × 1.

Quando tivermos matrizes linha ou matrizes coluna, também poderemos chamá-las de *vetores*. Embora essa não seja uma denominação comum no ensino médio, é largamente utilizada no ensino superior, principalmente em Computação e Álgebra linear. É muito comum uma matriz linha como $[2 \quad 0 \quad 5]$ ser escrita como (2, 0, 5) quando se trabalha com vetores.

298 Parte 2 • Trigonometria – Álgebra

Figura 16: Abordagem da introdução de matrizes pelo livro didático
Fonte: a autora

Nas operações de adição e subtração de matrizes, define-as por um exemplo sem contexto, sendo que na subtração faz menção à matriz oposta. Em seguida, propõe exercícios de fixação sem contextualização. Menciona ainda sobre as propriedades da adição e subtração de matrizes e a matriz transposta.



9. Adição de matrizes

Consideremos duas matrizes **A** e **B** do tipo 2×3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vamos determinar uma matriz **C** tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$:

$c_{11} = a_{11} + b_{11} = 3 + 1 = 4$

$c_{22} = a_{22} + b_{22} = 8 + 0 = 8$

$c_{21} = a_{21} + b_{21} = 2 + 7 = 9$

$c_{13} = a_{13} + b_{13} = (-2) + (-1) = -3$

$c_{12} = a_{12} + b_{12} = 5 + (-4) = 1$

$c_{23} = a_{23} + b_{23} = (-6) + 2 = -4$

Ou seja:

$$\begin{array}{ccccccc} A & + & b & = & & & C \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 3+1 & 5+(-4) & (-2)+(-1) \\ 2+7 & 8+0 & (-6)+2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 9 & 8 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

A matriz **C** assim obtida denomina-se *soma da matriz* ***A*** *com a matriz* ***B*** ou *soma das matrizes* ***A*** *e* ***B***.

Assim:

Dadas duas matrizes **A** e **B** do mesmo tipo $m \times n$, denomina-se soma da matriz **A** com a matriz **B**, que representamos por $A + B$, a matriz **C** do tipo $m \times n$ na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de **A** e **B**.

Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes do tipo $m \times n$, a soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})$ do tipo $m \times n$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

Exercícios

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $A + B$

b) $A + C$

c) $B + C$

d) $A + B + C$

Seja a matriz $A = (a_{ij})$ do tipo 3×2 dada por $a_{ij} = 3i - j$, calcule:

a) $A + A$

b) $A + 0_{3 \times 2}$

Dadas as seguintes matrizes quadradas de ordem 2: **A** com $a_{ij} = \begin{cases} i + 2j, \text{ para } i \geq j \\ 0, \text{ para } i < j \end{cases}$ e **B** com $b_{ij} = \begin{cases} i^3, \text{ para } i \geq j \\ 0, \text{ para } i < j \end{cases}$, calcule $A + B$ e $B + A$.

Propriedades da adição de matrizes

Já foram estudadas no Ensino Fundamental as propriedades da adição de números reais. Com a definição dada para adição de matrizes, é possível verificar que essas propriedades são válidas para a adição de matrizes.

	Números reais	Matrizes $m \times n$
Comutativa	$a + b = b + a$	$A + B = B + A$
Associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Elemento neutro	$a + 0 = 0 + a = a$	$A + 0 = 0 + A = A$
Elemento oposto	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	$A + (-A) = (-A) + A = 0$
Cancelamento	$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$	$A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$

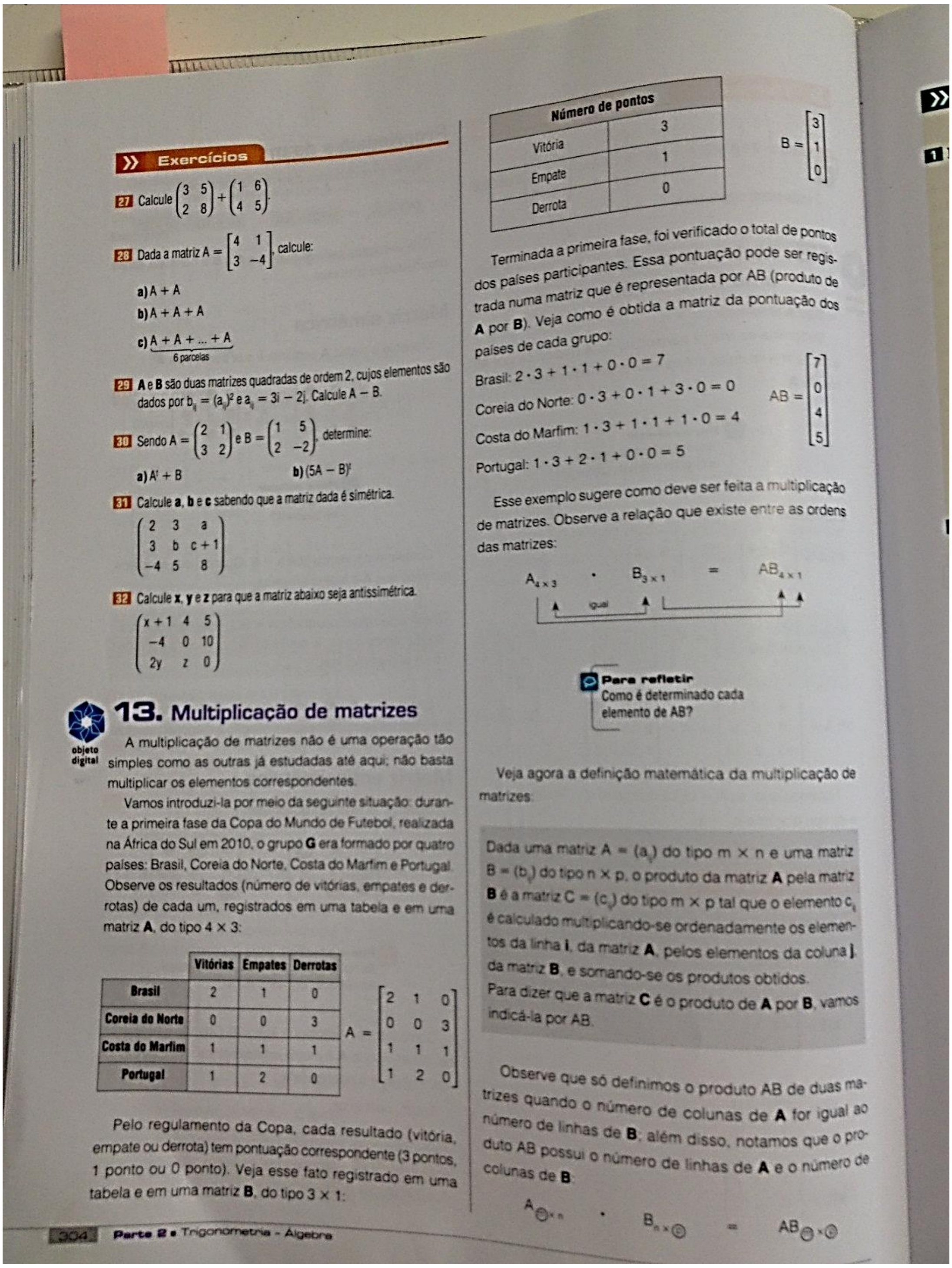
Fique atento
Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$.

Para refletir
Escolha matrizes **A**, **B** e **C** de mesmo tipo e verifique com elas as propriedades da adição indicadas.

Capítulo 16 ■ Matrizes 301

Figura 17: Imagem do livro didático na abordagem de adição de matrizes
Fonte: a autora

Na multiplicação de matriz por matriz, apresenta um exemplo contextualizado, mas realiza o resultado da multiplicação de matriz por matriz sem permitir que o aluno realize o processo e perceba como acontece a multiplicação de matriz por matriz, ou seja, já explica como se faz e dá a condição para que aconteça. Em seguida, propõe treze exercícios de fixação, sendo apenas dois deles contextualizados.



Exercícios

27 Calcule $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

28 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $A + A$

b) $A + A + A$

c) $\underbrace{A + A + ... + A}_{6 \text{ parcelas}}$

29 **A** e **B** são duas matrizes quadradas de ordem 2, cujos elementos são dados por $b_{ij} = (a_{ij})^2$ e $a_{ij} = 3i - 2j$. Calcule $A - B$.

30 Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, determine:

a) $A^t + B$

b) $(5A - B)^t$

31 Calcule **a**, **b** e **c** sabendo que a matriz dada é simétrica.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ 3 & b & c+1 \\ -4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

32 Calcule **x**, **y** e **z** para que a matriz abaixo seja antissimétrica.

$$\begin{pmatrix} x+1 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 10 \\ 2y & z & 0 \end{pmatrix}$$

13. Multiplicação de matrizes

objeto digital

A multiplicação de matrizes não é uma operação tão simples como as outras já estudadas até aqui; não basta multiplicar os elementos correspondentes.

Vamos introduzi-la por meio da seguinte situação: durante a primeira fase da Copa do Mundo de Futebol, realizada na África do Sul em 2010, o grupo **G** era formado por quatro países: Brasil, Coreia do Norte, Costa do Marfim e Portugal. Observe os resultados (número de vitórias, empates e derrotas) de cada um, registrados em uma tabela e em uma matriz **A**, do tipo 4×3:

	Vitórias	Empates	Derrotas
Brasil	2	1	0
Coreia do Norte	0	0	3
Costa do Marfim	1	1	1
Portugal	1	2	0

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo regulamento da Copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem pontuação correspondente (3 pontos, 1 ponto ou 0 ponto). Veja esse fato registrado em uma tabela e em uma matriz **B**, do tipo 3×1:

Número de pontos	
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Terminada a primeira fase, foi verificado o total de pontos dos países participantes. Essa pontuação pode ser registrada numa matriz que é representada por AB (produto de **A** por **B**). Veja como é obtida a matriz da pontuação dos países de cada grupo:

Brasil: $2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 7$

Coreia do Norte: $0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0$

Costa do Marfim: $1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4$

Portugal: $1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 5$

$$AB = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esse exemplo sugere como deve ser feita a multiplicação de matrizes. Observe a relação que existe entre as ordens das matrizes:

$$A_{4 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = AB_{4 \times 1}$$

igual

Para refletir
Como é determinado cada elemento de AB?

Veja agora a definição matemática da multiplicação de matrizes:

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ do tipo $m \times n$ e uma matriz $B = (b_{ij})$ do tipo $n \times p$, o produto da matriz **A** pela matriz **B** é a matriz $C = (c_{ij})$ do tipo $m \times p$ tal que o elemento c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha **i**, da matriz **A**, pelos elementos da coluna **j** da matriz **B**, e somando-se os produtos obtidos.
Para dizer que a matriz **C** é o produto de **A** por **B**, vamos indicá-la por AB.

Observe que só definimos o produto AB de duas matrizes quando o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**; além disso, notamos que o produto AB possui o número de linhas de **A** e o número de colunas de **B**:

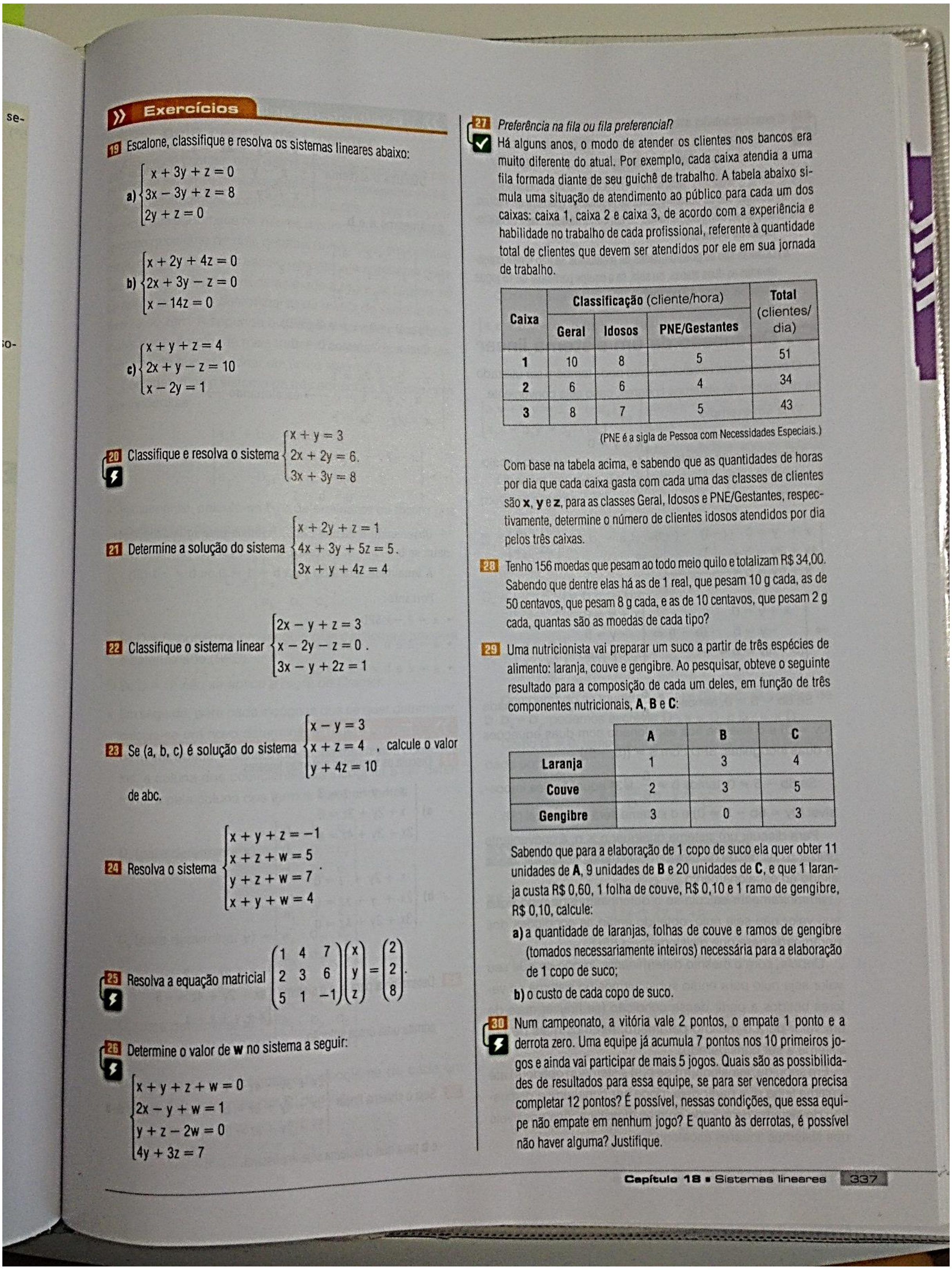
$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = AB_{m \times p}$$

304 Parte 2 • Trigonometria - Álgebra

Figura 18: Imagem da abordagem da multiplicação de matrizes pelo livro didático
Fonte: a autora

Apresenta o conteúdo de determinantes sem contextualizar, esclarecendo que só existe determinante de matriz quadrada (número de linhas igual ao número de colunas) e dá as regras para calculá-los. Fornece exercícios de fixação e menciona sobre as propriedades dos determinantes. Segue com outra lista quinze exercícios de fixação.

Em relação ao conteúdo de sistemas lineares, faz uma introdução utilizando dois problemas contextualizados, mas fornece todas as respostas, servindo os problemas para a leitura e compreensão daquilo que chama de as incógnitas dos problemas, “x” e “y”. Termina os dois problemas resolvendo o sistema formado pelas duas equações com duas incógnitas, para depois definir, genericamente, o que é um sistema linear. Segue esclarecendo que a solução de um sistema linear são os valores que satisfazem as equações do sistema e propõe exercícios de fixação. Classifica um sistema linear de duas incógnitas com duas equações por meio de interpretação gráfica (retas no plano). Esclarece que será um sistema possível e determinado quando há uma solução comum, um ponto de encontro para as duas retas; impossível, quando graficamente tivermos duas retas paralelas (nenhum ponto de encontro entre as retas) e indeterminado, quando uma reta coincidir com a outra. Continua o capítulo mencionando e explicando, por meio de um exemplo resolvido, o método do escalonamento (eliminação de Gauss) e ainda menciona sobre o que são sistemas lineares equivalentes (quando possuem o mesmo conjunto solução). A seguir, sugere exercícios de fixação, na sua maioria, sem contextos.



Exercícios

19 Escalone, classifique e resolva os sistemas lineares abaixo:

a) $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - 3y + z = 8 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x - 14z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y - z = 10 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

20 Classifique e resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \\ 3x + 3y = 8 \end{cases}$.

21 Determine a solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 4x + 3y + 5z = 5 \\ 3x + y + 4z = 4 \end{cases}$.

22 Classifique o sistema linear $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases}$.

23 Se (a, b, c) é solução do sistema $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + 4z = 10 \end{cases}$, calcule o valor de abc.

24 Resolva o sistema $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + z + w = 5 \\ y + z + w = 7 \\ x + y + w = 4 \end{cases}$.

25 Resolva a equação matricial $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

26 Determine o valor de **w** no sistema a seguir:

$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x - y + w = 1 \\ y + z - 2w = 0 \\ 4y + 3z = 7 \end{cases}$

27 *Preferência na fila ou fila preferencial?*
Há alguns anos, o modo de atender os clientes nos bancos era muito diferente do atual. Por exemplo, cada caixa atendia a uma fila formada diante de seu guichê de trabalho. A tabela abaixo simula uma situação de atendimento ao público para cada um dos caixas: caixa 1, caixa 2 e caixa 3, de acordo com a experiência e habilidade no trabalho de cada profissional, referente à quantidade total de clientes que devem ser atendidos por ele em sua jornada de trabalho.

Caixa	Classificação (cliente/hora)			Total (clientes/dia)
	Geral	Idosos	PNE/Gestantes	
1	10	8	5	51
2	6	6	4	34
3	8	7	5	43

(PNE é a sigla de Pessoa com Necessidades Especiais.)

Com base na tabela acima, e sabendo que as quantidades de horas por dia que cada caixa gasta com cada uma das classes de clientes são **x**, **y** e **z**, para as classes Geral, Idosos e PNE/Gestantes, respectivamente, determine o número de clientes idosos atendidos por dia pelos três caixas.

28 Tenho 156 moedas que pesam ao todo meio quilo e totalizam R$ 34,00. Sabendo que dentre elas há as de 1 real, que pesam 10 g cada, as de 50 centavos, que pesam 8 g cada, e as de 10 centavos, que pesam 2 g cada, quantas são as moedas de cada tipo?

29 Uma nutricionista vai preparar um suco a partir de três espécies de alimento: laranja, couve e gengibre. Ao pesquisar, obteve o seguinte resultado para a composição de cada um deles, em função de três componentes nutricionais, **A**, **B** e **C**:

	A	B	C
Laranja	1	3	4
Couve	2	3	5
Gengibre	3	0	3

Sabendo que para a elaboração de 1 copo de suco ela quer obter 11 unidades de **A**, 9 unidades de **B** e 20 unidades de **C**, e que 1 laranja custa R$ 0,60, 1 folha de couve, R$ 0,10 e 1 ramo de gengibre, R$ 0,10, calcule:

a) a quantidade de laranjas, folhas de couve e ramos de gengibre (tomados necessariamente inteiros) necessária para a elaboração de 1 copo de suco;

b) o custo de cada copo de suco.

30 Num campeonato, a vitória vale 2 pontos, o empate 1 ponto e a derrota zero. Uma equipe já acumula 7 pontos nos 10 primeiros jogos e ainda vai participar de mais 5 jogos. Quais são as possibilidades de resultados para essa equipe, se para ser vencedora precisa completar 12 pontos? É possível, nessas condições, que essa equipe não empate em nenhum jogo? E quanto às derrotas, é possível não haver alguma? Justifique.

Capítulo 18 ▪ Sistemas lineares 337

Figura 19: Exercícios de fixação, referente à analise de sistemas do livro didático.
Fonte: a autora

Encerra o capítulo com os temas *discussão de um sitema linear* e a *resolução de sistemas por escalonamento,* sugerindo alguns exercícios de fixação, mas sem contexto.

Registra-se que nenhum comentário sobre a história das matrizes aparece no livro didático.

A análise do conteúdo de matrizes, no livro didático utilizado pela Escola, tinha como objetivo verificar se esse material poderia agregar novas contribuições ao material das UEPS já elaboradas e aplicadas e observar como é feita a abordagem do conteúdo. É praticamente desnecessário afirmar que a contribuição restringiu-se ao possível, aproveitamento dos problemas contextualizados, quando apareciam. Quanto à forma de introdução do conteúdo, a sua sequência e a intensidade de aplicações das situações-problema, observou-se que o livro desconsiderou algumas etapas importantes das UEPS, a saber:

- aproveitar o conhecimento prévio do aluno;

- organizar sequencialmente os conteúdos numa ordem lógica;

- permitir e respeitar a explicitação de ideias pelos alunos;

- proporcionar a discussão dessas ideias e a(s) consequente(s) conclusão(ões) por meio de estratégias de aprendizagem;

- avançar progressivamente nas especificidades do conteúdo, ressignificando conceitos já trabalhados;

- considerar o tempo como um fator facilitador e não um empecilho, pois o conhecimento não tem validade, pode ser utilizado sempre que necessário;

Seria interessante se o livro didático, na função de apoio ao ensino e à aprendizagem de matrizes, pudesse rever algumas formas de abordagem do conteúdo e a seleção de exercícios sugeridos.

Não se pode ter a “ilusão pedagógica”, como diz Vergnaud, de que um conteúdo, cuja apresentação esteja organizada clara e rigorosamente quanto às teorias formais que lhe deram origem, servirá de garantia para um ensino e uma aprendizagem de real significado para o aluno. Considera-se que a Matemática é parte integrante do cotidiano dos alunos e que deve ser entendida por eles, nas suas diferentes aplicações, seja na aritmética, na geometria ou na álgebra. O ensino e a aprendizagem de matrizes deve capacitar os estudantes para analisar as situações-problema, diagnosticar e interpretar as informações contidas, avaliando a melhor forma de resolvê-las, utilizando, para isso, todos os conhecimentos que já estão disponíveis no seu campo conceitual ou, se necessário, buscando auxílio externo, seja com o colega, com o professor ou alguma tecnologia digital que lhe permita esclarecer e buscar a solução do problema, mas sempre com autonomia e discernimento.

7 AVALIAÇÃO DOS ALUNOS ACERCA DA METODOLOGIA UTILIZADA NAS AULAS

Considerou-se ser importante registrar a opinião dos alunos acerca metodologia empregada nas aulas em que foram aplicadas as UEPS. Para tanto, solicitou-se que respondessem a um questionário (Apêndice Q).

Na primeira pergunta, observam-se as respostas da turma A.

1. Você observou que alteramos a metodologia de ensino nas aulas de Matemática durante este terceiro trimestre. Você considera que essa alteração na metodologia auxiliou na sua aprendizagem em Matemática?			
	Resposta	Número de alunos	Percentual
1	Sim	22	88%
2	Não	3	12%
	Total	25	100%

Quadro 84: Respostas dos alunos da turma A para primeira pergunta do questionário final, após a aplicação da metodologia da aprendizagem significativa
Fonte: a autora

Percebe-se que a maioria dos alunos identificou uma mudança na metodologia e que isso auxiliou na sua aprendizagem em Matemática. Quando questionados sobre como isso aconteceu, há vários relatos dos próprios alunos sobre esse fato.

1.1 Se você marcou sim, você consegue exemplificar?		
	Exemplos citados pelos alunos	Número de alunos
1	Pois fazer os exercícios ficou mais fácil.	1
2	A assimilação com coisas que conhecemos melhor ajuda no entendimento do conteúdo.	1
3	A compreensão do conteúdo tornou mais fácil uma vez que a professora utilizou situações com elementos da vida cotidiana antes da real explicação do conteúdo.	1
4	A aprendizagem sobre matrizes se tornou mais fácil, pois realizamos exercícios antes de ouvirmos a explicação.	1
5	Eu aprendi melhor o conteúdo ao ver como ele se aplica no cotidiano.	1
6	Consegui entender melhor a matéria, o que resultou em melhores notas no PAS.	1
7	Iniciação ao conteúdo de maneira diferente	1
8	Consegui aplicar nas questões de vestibular com mais entendimento, a partir de questões mais perto do cotidiano.	1
9	Com esse método, não decoramos como fazer, mas entendemos cada questão, temos melhor interpretação.	1
10	É melhor trabalhar com algo que tu saiba usar no dia a dia, muitas vezes identificar onde tu não imaginava.	1
11	Identifico que as aulas estão mais participativas e estão envolvendo todos os alunos com todas as dúvidas individuais	1
12	Consegui entender melhor o conteúdo de forma que consigo aplicá-los em diversos cálculos.	1
13	Achei bom a nova metodologia, pois ensina a relacionar o conteúdo com coisas do cotidiano.	1
14	A partir das notas notei um crescimento da aprendizagem, além de achar o conteúdo mais fácil e prático de aplicar.	1
15	Porque entendi melhor o conteúdo.	1
16	Exige mais dedicação e atenção do aluno pois ele estará realizando a atividade. Com isso, desenvolverá bem mais o entendimento do conteúdo.	1
17	Sim, pois conseguimos conciliar o conteúdo de uma forma diferente e descontraída, conseguindo também alcançar em aspectos do nosso cotidiano.	1
18	Conseguimos conciliar o conteúdo de um jeito diferente	1
19	O desenvolvimento de um raciocínio para fazer as questões foi melhor.	1
20	Auxiliou, pois consigo entender onde posso aplicar meu conhecimento no cotidiano.	1
21	Sim, pois foi melhor trabalhar com algo que dá para aplicar no cotidiano, aplicando nas coisas.	1
22	Porque consegui ver os meus erros sobre o que eu pensei na aprendizagem.	1

Quadro 85: Respostas dos alunos da turma A para as justificativas a relacionadas à primeira pergunta do questionário final, após a aplicação da metodologia da aprendizagem significativa
Fonte: a autora

É interessante, comparando com o questionário inicial, a variedade de justificativas dadas pelos alunos. Na maioria delas, observa-se que o fato de citarem que conseguiram relacionar o conteúdo de matrizes com o cotidiano e o quanto isto foi importante.

1. Você consegue dar significado ao conteúdo desenvolvido em aula, por exemplo, aplicando-o em alguma situação do cotidiano?			
	Resposta	**Número de alunos**	**Percentual**
1	Sim	21	84%
2	Não	4	16%
	Total	25	100%

Quadro 86: Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta do questionário final, após a aplicação da metodologia da aprendizagem significativa
Fonte: a autora

Enquanto no primeiro questionário, os alunos, na sua maioria, não percebiam a relação dos conteúdos de Matemática com o cotidiano, agora 84% dos alunos da turma A encontram uma relação, fato já citado por eles, na pergunta anterior.

Na turma B, na primeira pergunta, o resultado, foi semelhante.

1. Você observou que alteramos a metodologia de ensino nas aulas de Matemática durante este terceiro trimestre. Você considera que esta alteração na metodologia auxiliou na sua aprendizagem em Matemática?			
	Resposta	Número de alunos	Percentual
1	Sim	16	76%
2	Não	5	24%
	Total	21	100%

Quadro 87: Respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta do questionário final, após a aplicação da metodologia da aprendizagem significativa
Fonte: a autora

E, na segunda pergunta, temos:

1.1 Se você marcou sim, você consegue exemplificar?		
	Exemplos citados pelos alunos	**Número de alunos**
1	É mais fácil entender o conteúdo quando estudamos exemplos do nosso cotidiano.	1
2	Melhorou o rendimento.	3
3	Ajudou em alguns PAS e nas tarefas	1
4	A Sora mudou o jeito de explicar, nos PAS as questões eram mais fáceis.	1
5	Eu consegui entender, aprender melhor e consequentemente tirar melhores notas.	1
6	Conseguimos na aula nos concentrar mais e focar no que deve ser feito e aprendido	1
7	Melhor entendimento do conteúdo	1
8	Consegui aprender melhor, pois entendi de onde são “tiradas” as fórmulas e termos matemáticos e não apenas aplica-los	1
9	Melhora no rendimento	1
10	Minhas notas melhoraram e consigo resolver os exercícios mais facilmente do que antes.	1
11	Não consigo exemplificar, porém a mudança é notável.	1
12	Sim, percebo que o ensino de algo utilizado em um cotidiano para se familiarizar com a matéria para depois a questão teórica.	1
13	Entendi melhor e como consequência notas melhores	1
14	Acho que ajudou muito no PAS, deixando ele mais fácil e os exercícios dados em aula ajudou muito.	1

Quadro 88: Respostas dos alunos da turma B para as justificativas relacionadas à primeira pergunta do questionário final, após a aplicação da metodologia da aprendizagem significativa
Fonte: a autora

2. Você consegue dar significado ao conteúdo desenvolvido em aula, por exemplo, aplicando-o em alguma situação do cotidiano?			
	Resposta	Número de alunos	Percentual
1	Sim	13	62%
2	Não	02	9%
3	Não sei ou em branco	06	29%
Total		21	100%

Quadro 89: Respostas dos alunos da turma B para a segunda pergunta do questionário final, após a aplicação da metodologia da aprendizagem significativa
Fonte: a autora

A análise das respostas dadas pelos alunos justifica todo o empenho e a dedicação na realização desta pesquisa. É gratificante perceber que os alunos foram os maiores beneficiados pela metodologia aplicada.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retoma-se o objetivo geral da pesquisa, que era o de propor e avaliar uma metodologia de ensino baseada na TAS (Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel) e demais colaboradores, elaborando atividades no ensino e na aprendizagem de matrizes, buscando evidências de como essas atividades podem contribuir para a construção significativa dos conceitos envolvidos nesse conteúdo de Matemática. Também se relembram os objetivos específicos, que auxiliaram na delimitação do tema. A partir dessa retomada, compartilham-se algumas considerações.

A pesquisa envolveu quatro momentos de sala de aula. O primeiro, com a elaboração de um questionário inicial, aplicado aos alunos, permitiu mapear algumas das possíveis formas de estudo, formas de esclarecimento de dúvidas no componente curricular de Matemática e quais evidências essa Matemática da escola tem com o cotidiano. Os resultados já tabulados e apresentados no decorrer desta tese sinalizaram que a maioria deles afirma ter dificuldades em Matemática e que elas acontecem principalmente nos momentos de avaliação e ou exercícios. Costumam resolvê-las refazendo os exercícios, contando com o auxílio da professora, da internet, dos colegas ou de aulas particulares. Além disso, também ficou claro que a maioria dos alunos têm a concepção de que a Matemática é parte integrante do cotidiano, mas não conseguem identificá-la nesse contexto.

Essas informações foram importantes para o planejamento e a aplicação do segundo momento da pesquisa, em que foram elaboradas as Unidades de Ensino Potencilamente Signficativas (UEPS), cuja proposta didática era a de alterar a sequência de narrativa e permitir a explicitação e a discussão dos conceitos em questão por parte dos alunos, incentivando a construção dos conceitos. Ficou evidente, ao se categorizarem as respostas dos alunos nas UEPS, que eles realmente conseguiram evoluir nas suas discussões e conseguiram chegar às definições sobre os conceitos envolvidos no campo conceitual de matrizes com algumas intervenções desta professora pesquisadora. Na maioria das atividades de sala de aula, proporcionadas pelas UEPS, o quadro era utilizado de forma comunitária para socializar as conclusões obtidas.

> Segundo Ausubel, o problema principal da aprendizagem consiste na aquisição de um corpo organizado de conhecimentos e na estabilização de ideias inter-relacionadas que constiuem a estrutura desse conhecimento. O problema, pois, da aprendizagem em sala de aula está na utilização de recursos que facilitem a captação da estrutura conceitual do conteúdo e sua integração à estrutura cognitiva do aluno, tornando o material significativo (MOREIRA; MASINI, 2016, p. 47).

O terceiro momento, de busca de evidências de aprendizagem significativa, seja por meio de avaliações formais (PAS – Projeto de Avaliação Sistemática e Simulados do Enem), incluídas no calendário da escola, seja por meio de registros feitos na realização das UEPS, acontecia praticamente concomitante com o anterior. Era importante que as evidências fossem coletadas e registradas para andamento do conteúdo e reorganização das UEPS. Além disso, o poder analítico de um diagnóstico deve caminhar junto com o processo de ensino e aprendizagem para que sejam feitas as devidas intervenções em tempo hábil.

As evidências de aprendizagem significativa apareceram de forma clara nas ideias explicitadas e registradas nas UEPS pelos alunos, nos exercícios dolivro-texto e nas avaliações, em que as notas, tendo como referência média sete, pela escola, sempre foram alcançadas e ou ultrapassadas. O bom desempenho ficou documentado e registrado durante a tese e demonstrou que há possibilidades de alterar o quadro de dificuldades de aprendizagem no conteúdo de matrizes.

O quarto momento de sala de aula refere-se aos dados obtidos pelo questionário aplicado ao final da pesquisa, que coletou a opinião dos alunos sobre a metodologia utilizada. Verifica-se, pelas respostas categorizadas, que a maioria dos alunos aprovou a metodologia utilizada. Percebe-se, por meio das diversas citações, que a mesma alterou a sua forma de participação e envolvimento nas aulas de Matemática. Exemplificam afirmando que a mudança de metodologia permitiu a explicitação, a discussão e a aplicação do conteúdo em situações do cotidiano. Citam que agora é mais fácil compreender e realizar os exercícios de Matemática, pois evidenciam a utilização do conteúdo em situações dia a dia.

Pelo que já foi exposto e por todo o envolvimento dos alunos e da professora pesquisadora, é possível afirmar que uma metodologia baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa, que utiliza um material potencialmente significativo, tem condições de produzir sensíveis mudanças no processo de ensino e de aprendizagem de matrizes, fazendo do aluno um indivíduo que participa do processo, explicita, discute e socializa as suas ideias. Permite-se, assim, que reelabore os seus conhecimentos prévios e incremente a sua bagagem cognitiva novos conhecimentos.

Todo esse processo também contribui para a formação de um aluno mais crítico, criativo e autônomo, enriquecendo o seu crescimento pessoal e daqueles que convivem com ele. Torna-se, desse modo, melhor preparado para uma sociedade em constante mudanças, que exige cada vez mais habilidades e competências para a tomada de decisões.

Afirmar que Aprendizagem Significativa pode modificar a aprendizagem é poder considerar que se você encontra o significado para o que está aprendendo, você aumenta as possibilidades de assimilar o conhecimento.

9 PRODUÇÃO CIENTÍFICA

Até este momento, apresenta-se a seguinte produção científica:

- 2016 - ENEM, Encontro Nacional de Educação Matemática, de 13 a 16 de julho de 2016, em São Paulo, ministrando minicurso sobre o ensino de trigonometria e a aprendizagem significativa (Apêndice R);
- 2017 - Envio de artigo para a revista BOLEMA, em outubro de 2017 (Apêndice R);
- 2017 - Festival da Matemática, de 25 a 28 de 2017, em São Leopoldo, ministrando um minicurso e uma apresentação oral sobre trigonometria e a aprendizagem significativa (Apêndice T e U);
- 2017 - Salão de Ciências da UFRGS, de 16 a 20 de outubro de 2017, em Porto Alegre, apresentando uma comunicação oral sobre o ensino de matrizes e a aprendizagem significativa (Apêndice V);
- 2017 - VIII Encontro sobre Aprendizagem Significativa, na cidade de Esquel, de 04 a 08 de dezembro de 2018, apresentando uma comunicação oral sobre o ensino de matrizes e a aprendizagem significativa (ApêndiceX);
- 2017 - 11th Southern Hemisphere Conference on the Teaching and Learning of Undergraduate Mathematics and Statistics, de 26 de novembro a 01 de dezembro, em Gramado, RS, Brasil, apresentando uma comunicação oral intilulada: "Analysis of resolutions provided by engineering course students for the problems proposed, a meaningful view" (Apêndice Y);
- 2017 - Publicação de um capítulo no livro "Tendências em Educação Matemática", pela Editora Canto, intitulado, "O ensino da trigonometria: uma análise metodológica." (Apêndice Z).
- 2018 – Publicação de um artigo na Aprendizagem Significativa em Revista (ASR), intitulado, " O ensino e a aprendizagem de matrizes tendo como fundamentação teórica a teoria da aprendizagem significativa". (Apêndice W)
- 2018 – VII ENAS – Encontro de Aprendizagem Significativa – 10 a 14 de setembro de 2018, em Blumenau, Santa Catarina, apresentando uma comunicação oral intitulada "A Teoria da Aprendizagem Significativa e o ensino de Matrizes". (Apêndice AA)

- Publicação de um capítulo no livro “Relatos de Experiência do Projeto PARFOR na UNISINOS, intitulado “A Matemática das contas de cabeça: É possível compereender ? “ (Apêndice AB)

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph, D.; HANESIAN, Helen. *Psicologia Educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana. 1980. 625p.

BARDIN, Laurence. *Análise de Conteúdo.* São Paulo. Edições 70, 2012.279p.

BELO, Nicoly Talita Hrycyna. *Matrizes e Determinantes: uma proposta metodológica para o Ensino Médio*. Disponível em:<www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/1717. pdf > Acesso em: 12 set. 2017.

BECKER, Fernando. *Epistemologia do Professor de Matemática*. Petrópolis: Vozes. 2012. 496p.

COSENZA, Ramon M.; GUERRA, Leonor B. *Neurociência e Educação:* como o cérebro aprende. Porto Alegre. Artmed. 2011. 151p.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. *Matemática, uma breve história*. 2.ed.. Volume 2. São Paulo. Editora da Física. 2006. 505p.

DANTE, Luiz Roberto Dante. *Matemática*: projeto VOAZ. 1.ed. Vol. 2. São Paulo: Ática. 2012

DELORS, Jacques. *Educação:* um tesouro a descobrir. São Paulo: Cortez, 2012. 238p.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. 5.ed.. São Paulo: Unicamp, 2011. 843p.

GUEDES, Susana Lucia Pereira. *O ensino de matemática pela aprendizagem significativa:* uma experiência de ensino de matemática financeira na EJA – ensino médio. Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/410-4.pdf > Acesso em: 12 set. 2017.

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e Didática.* São Paulo: Cortez, 2011.

MATURANA, Humberto R.; VARELA, Francisco J. *A árvore do conhecimento:* as fases biológicas da compreensão humana. São Paulo: Palas Athena, 2011. 283p.

MASINI, Elcie F.; MOREIRA, Marco A. *Aprendizagem Significativa:* a teoria de Ausubel.São Paulo: Centauro, 2016.111p.

MESSIAS, Maria Alice de Vasconcelos Feio: SÁ, Pedro Franco de; VILHENA, Rubens Fonseca. *Um Estudo Diagnóstico Sobre as Dificuldades em Matrizes.* Disponível em : <http://www.sbem.com. br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/ PO839696592T.doc.>. Acesso em: 12 set. 2017.

Ministério da Educação-MEC. *DCNEM.* Disponível em: <http://portal.mec.gov. br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 29 maio 2017.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO – MEC, 2013*. Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM).* Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ CienciasNatureza.pdf > Acesso em: 12 ago. 2016.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO – MEC, 2004*. Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio.* Disponível em: < portal.mec.gov.br › PET › Secretarias › SEB - Educação Básica > Acesso em 12 de agosto de 2016.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO – MEC, 2013*. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.* Disponível em: < portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/...diretrizes-educacao-basica-2013-pdf >. Acesso em:12 ago. 2016.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. *Análise Textual Discursiva*. Ijuí: Unijuí, 2007. 224p.

MOREIRA, Marco Antonio. *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.* Brasília: Universidade de Brasília, 2006, 186p.
MOREIRA, Marco Antônio. *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo: E.P.U. 2017. 242p.

MOREIRA, Marco Antonio*. Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares.* São Paulo: Livraria da Física, 2011.

MOREIRA, Marco Antonio. *Aprendizagem Significativa Crítica.* Porto Alegre. C.D.U. 2005. 47p.

MOREIRA, Marco Antonio. *Diagramas “V”.* Disponível em: < www.if.ufrgs/~moreira. , p.2 > Acesso em: 12 ago. 2016.

MOREIRA, Marco Antonio. *Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS.* Disponível em: < www.if.ufrgs/~moreira. , p.2 > Acesso em: 12 ago. 2016.

MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie F. S. *Aprendizagem significativa: condições para ocorrência e lacunas que levam a compromentimentos.* São Paulo: Vetor, 2016.

MOREIRA, Marco Antonio. *A Teoria dos Campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a investigação nesta área.* Porto Alegre: Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.107p.

PEREIRA, Nilce de Oliveira. *Uma proposta para o ensino do conceito de matrizes em ambiente computacional.* Dissertação (Mestrado de Ensino em Ciências Exatas) – PPG em Ciências Exatas. Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), 2015. Disponível em: <http://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/7673/DissNMOP.pdf > Acesso em: 12 set. 2017.

VASCONCELLOS, Celso dos Santos. *Currículo:* a atividade humana como princípio educativo. São Paulo: Libertad, 2009.

VIGOTSKI, L. V., *Pensamento e Linguagem.* São Paulo: Martins Fontes. 2013. 193p.

SANCHEZ, Maria Helena de Figueiredo. *Efeitos de uma estratégia diferenciada de ensino do conceito de matrizes.* Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de Campinas – UNICAMP, 2001. Disponível em : < http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/253429> Acesso em: 11 set. 2017.

SILVA, Raquel Silveira da; MARTINEZ, Marcia Lorena Saurin. *Diferentes ferramentas para o ensino de matrizes.* Disponível em: < sbem. Web1471.kinghost.net/anais/XI *ENEM/pdf/1935_1076_ID.pdf> Acesso em : 12 set. 2017.*

TORRE, Saturnino de La. *Aprender com os erros.* Porto Alegre. Artmed. 2007. 240p.

ANEXOS

Anexo 01 – Termo de Livre Consentimento

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado/a para participar, como voluntário, em uma pesquisa. Após ser esclarecido/a sobre as informações a seguir, no caso de aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua e a outra é do pesquisador responsável.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Título do Projeto: **O ensino da Matemática subsidiado pela Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel**

Estagiário/ Pesquisador Responsável : **Marjúnia Édita Zimmer klein**

Telefone para contato (inclusive ligações a cobrar): **(051) 35826898 e (051) 99780085**

Pesquisadores participantes: ____

Telefones para contato : ____

Para descrição do estagiário/ pesquisador

- Descrição da pesquisa, objetivos, detalhamento dos procedimentos, forma de acompanhamento (informar a possibilidade de inclusão em grupo controle ou placebo, se for o caso)
- Especificação dos riscos, prejuízos, desconforto, lesões que podem ser provocados pela pesquisa, formas de indenização, ressarcimento de despesas.
- Descrever os benefícios decorrentes da participação na pesquisa
- Explicar procedimentos, intervenções, tratamentos, métodos alternativos (atualmente em vigor)
- Esclarecimento do período de participação, término, garantia de sigilo, direito de retirar o consentimento a qualquer tempo. Em caso de pesquisa onde o sujeito está sob qualquer forma de tratamento, assistência, cuidado, ou acompanhamento, apresentar a garantia expressa de liberdade de retirar o consentimento, sem qualquer prejuízo da continuidade do acompanhamento/ tratamento usual

Nome e Assinatura do estagiário/ pesquisador : ____________________________________

Marjúnia Édita Zimmer Klein

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO SUJEITO

Eu, ______________________________, RG________________________, abaixo assinado, concordo em participar do estudo ___________________________________ , como sujeito. Fui devidamente informado e esclarecido pelo estagiário/ pesquisador Marjúnia Édita Zimmer Klein sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação. Foi-me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve à qualquer penalidade ou interrupção de meu acompanhamento/ assistência/tratamento.

Local e data: Novo Hamburgo, 05 de dezembro de 2016.

Nome: ____

Assinatura do sujeito da pesquisa ou responsável: ______________________________

APÊNDICES

APÊNDICE A

PPG EM CIÊNCIAS: QUÍMICA DA VIDA E DA SAÚDE

Aluna: Marjunia Édita Zimmer Klein, aluna do Doutorado (2015/1)

Título: "**O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATRIZES TENDO COMO FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL"**

Questões para a entrevista preliminar:

Objetivo: Identificar se o aluno considera ter dificuldades em Matemática e consegue identificá-las.

Data:_____/_____/2016

1. Você considera que possui dificuldades em Matemática?

1.1. (   ) Sim
1.1.1. Você consegue exemplificar essas dificuldades e em que momentos elas acontecem?
1.1.2. Como você costuma resolver as suas dificuldades em Matemática?
2. (   ) Não
2.1. Por quê?
3. Você consegue dar significado ao conteúdo desenvolvido em aula, por exemplo, aplicando-o em alguma situação do cotidiano?

Obs.:

APÊNDICE B – UEPS 01

PROPOSTA DE UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO (UEPS) PARA O ENSINO DE MATRIZES – UEPS 01

Objetivo: Ensinar o conceito de matriz para alunos da segunda série do Ensino Médio, representando-a e identificando os seus elementos.

Sequência:

1. Situação-problema inicial: Os alunos receberão uma folha com o logo da escola e que contenha uma tabela com alguns questionamentos sobre a mesma.

IENH

Instituição Evangélica de Novo Hamburgo
Centro Sinodal de Ensino Médio de Novo Hamburgo
Unidade Fundação Evangélica - Ensino Médio

Nome:____________________________ **N°:**___ **Série/Turma:** ______ **Data:** __/ __/ ____

Disciplina: Matemática **Professor:** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

ATIVIDADE 01

1) Observe a tabela abaixo e responda às perguntas sobre ela:

a) Para verificar qual é a classificação do Brasil nas eliminatórias, até o momento, qual a linha que você consultaria?

b) Para verificar qual é o número de empates que os times têm nas eliminatórias, até o momento, qual a coluna que você consultaria?

c) Em que linha e coluna você identificaria o número de pontos que o Brasil tem até o momento?

d) Qual é o saldo de gols do Brasil até o momento? Como você fez para identificar essa informação?

TABELA

CLASSIFICAÇÃO		P	J	V	E	D	GP	GC	SG	%	ÚLT. JOGOS
1 Uruguai	1 ↑	**16**	8	5	1	2	16	5	11	66.7	
2 Brasil	3 ↑	**15**	8	4	3	1	16	9	7	62.5	
3 Argentina	2 ↓	**15**	8	4	3	1	9	6	3	62.5	
4 Colômbia	1 ↓	**13**	8	4	1	3	12	10	2	54.2	
5 Equador	1 ↓	**13**	8	4	1	3	13	12	1	54.2	
6 Paraguai	0 ■	**12**	8	3	3	2	9	11	-2	50.0	
7 Chile	0 ■	**11**	8	3	2	3	13	12	1	45.8	
8 Bolívia	0 ■	**7**	8	2	1	5	9	13	-4	29.2	
9 Peru	0 ■	**7**	8	2	1	5	8	15	-7	29.2	
10 Venezuela	0 ■	**2**	8	0	2	6	9	21	-12	8.3	

■ copa do mundo 2018 ■ repescagem mundial ↑ subiu ↓ caiu ■ manteve ● vitória ● empate ● derrota

Fonte: Globo esporte.globo.com. Acesso em 09 de set de 2016.

2. Discussão: Permitir que os alunos externalizem as suas respostas para o grupo de sala de aula e discutam-nas, observando as diferentes formas de se registrar o que foi perguntado.

3. Conclusão: Definir, em conjunto com a professora, qual será a forma de registrar os dados contidos na tabela e qual das informações virá em primeiro lugar, se a linha ou a coluna, anotando estas conclusões no seu caderno.

4. Avaliação: Diagnóstico analítico, pela professora, sobre as evidências que envolvem o conceito de matriz, que percebeu ou não, ao longo das tarefas individuais e no grupo.

5. Número de horas-aula destinadas para a atividade: 04 h/a

APÊNDICE C- UEPS 02

PROPOSTA DE UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO (UEPS) PARA O ENSINO DE MATRIZES – UEPS 02

Objetivo: Reforçar o ensino do conceito de matriz para alunos da segunda série do Ensino Médio, representando-a e identificando os seus elementos.

Sequência:

1. Situação-problema inicial: Será distribuído aos alunos, em duplas, uma folha que contenha uma tabela, coletada no jornal da cidade, e de onde eles terão que realizar as seguintes tarefas:

Obs.: cada dupla receberá uma folha contendo uma tabela diferente da dos colegas.

1.1. Vocês receberam uma tabela, observem-na com atenção e formulem quatro perguntas sobre a mesma:

a)

b)

c)

d)

2. Troquem a folha com outra dupla e deixem que eles respondam às suas perguntas, enquanto vocês respondem às deles.

Respostas dos colegas:

a)

b)

c)

d)

3. Discutam as respostas e verifiquem se as mesmas estão corretas (a partir daquilo que foi concluído na aula anterior). Havendo dúvidas, consultem a professora.

2. Discussão: Permitir que alguns grupos externalizem as respostas para que o grupo de sala de aula possa discutir e observar as diferenças, se houver

3. Conclusão: Esclarecer possíveis dúvidas que ainda tenham permanecido sobre o registro de uma matriz e a identificação de seus elementos.

4. Avaliação: Diagnóstico analítico, pela professora, sobre as evidências que envolvem o conceito de matriz, que percebeu ou não, ao longo das tarefas em dupla e no grupo.

5. Número de horas-aula destinadas para a atividade: 04 h/a

APÊNDICE D – UEPS 03

PROPOSTA DE UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO (UEPS) PARA O ENSINO DE MATRIZES – UEPS 03

Objetivo: Definir a adição e a subtração de matrizes

Sequência:

1. Situação-problema inicial: Os alunos receberão individualmente uma folha (ver abaixo) com situações problemas para serem resolvidas.

IENH Instituição Evangélica de Novo Hamburgo
Centro Sinodal de Ensino Médio de Novo Hamburgo
Unidade Fundação Evangélica - Ensino Médio

Nome:____________________________ **N°:**____ **Série/Turma:** ______ **Data:** ___/ ___/ ____

Disciplina: Matemática **Professor:** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

ATIVIDADE 03

Tarefas:

I) Observe as tabelas referentes ao desempenho escolar de um aluno durante o primeiro e o segundo trimestre nas disciplinas de Matemática, Química e Física e responda as perguntas abaixo:

	Disciplinas		
Trimestre	Matemática	Química	Física
Primeiro	5,0	6,0	5,5

	Disciplinas		
Trimestre	Matemática	Química	Física
Segundo	6,5	7,5	7,0

Fonte: a autora.

Perguntas:

1) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Matemática até o momento, como você faria?

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?

2) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Química até o momento, como você faria?

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?

3) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Física até o momento, como você faria?
E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?

II) Escreva na forma de uma matriz a primeira tabela e a segunda tabela e procure escrever uma conclusão que explique como podemos somar e diminuir matrizes.

2. Discussão: Permitir que algumas duplas externalizem as respostas para que o grupo de sala de aula possa discutir e observar as diferenças, se houver.

3. Conclusão: Definir, em conjunto como podemos somar e subtrair matrizes, questionando se existe uma condição para que a soma/subtração aconteça.

4. Avaliação: Diagnóstico analítico, pela professora, sobre as evidências que envolvem a adição e a subtração de matrizes, que percebeu ou não, ao longo das tarefas e no grupo.

5. Número de horas-aula destinadas para a atividade: 04 h/a

APÊNDICE E

Instituição Evangélica de Novo Hamburgo
Centro Sinodal de Ensino Médio de Novo Hamburgo
Unidade Fundação Evangélica - Ensino Médio

Nome:___________________________ **N°:**___ **Série/Turma:** ______ **Data:** ___/ ___/ ____

Disciplina: Matemática **Professor:** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

Avaliação sobre matrizes

1)Jorge tem 17 anos, 1,75, de altura e sua massa é de 81kg. Desejando emagrecer, ele consultou um profissional que lhe indicou um programa de dieta e de treinamento físico que lhe proporcionaria maior gasto calórico. Para montar o treinamento físico foi consultada uma tabela que apresenta os gastos calóricos para cada exercício.

Tabela que mostra os gastos para a realização de exercícios físicos (em kcal/hora)

Massa (kg)	Caminhar a 5km/h	Correr a 9km/h	Andar de bicicleta a 9km/h	Jogar futebol
69	213	651	304	420
73	225	688	321	441
77	237	726	338	468
81	249	764	356	492

Fonte: *Matemática, 2ª série: ensino médio/ Felipe Fujita [et al.], São Paulo: Edições SM, 2009. (Coleção Ser protagonista).*

Responda:

a) Quanto será o gasto calórico se Jorge caminhar durante 1 hora? ______
b) Quanto será o gasto calórico se Jorge jogar futebol durante 1 hora? _____
c) Do ponto de vista matemático, desconsiderando as informações marginais, escreva a matriz correspondente às informações dadas e identifique a sua ordem (tamanho).

2) Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$, tal que $a_{ij} = 3i - j^2$. Sabendo que esta matriz é uma matriz quadrada, após escrevê-la faça a diferença entre os produtos dos elementos que estão na diagonal principal e dos elementos que estão na diagonal secundária.

3) Considere a matriz $A = (a_{ij})_{2x2}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} 2^{i-j}, se\ i < j \\ 0, se\ i = j \\ (\frac{1}{2})^{j-i}, se\ i < j \end{cases}$

a) Escreva a matriz A;

b) Determine a matriz B tal que $A + B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

4) Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} i^2, se\ i = j \\ i + j, se\ i \neq j \end{cases}$ e escreva a matriz $B = (b_{ij})_{3x3,}$ tal que $b_{ij} = 2i - 3j$.

Matriz A Matriz B

a) Determine a matriz $2A + B^t$
b) Determine o valor de $3B - A^t$

APÊNDICE F

PAS – Projeto de Avaliação Sistemática
Componente Curricular: Matemática
Série/Turma: 22 A,B Professor/a: Marjúnia Édita Zimmer Klein
Questões 11 a 15

---

11) Escreva a matriz quadrada de ordem 2, tal que $a_{ij} = i^2 - 3j + i.j$.

a) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

12) Determine os valores de x e y na igualdade de matrizes $\begin{pmatrix} 2 & x \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ y & 0 \end{pmatrix}$.

a) x = 3 e y = -7

b) x = -3 e y = 7

c) x= 0 e y = 3

d) x= -7 e y = 3

e) x = 7 e y = -3

13) Sendo $B = (b_{ij})_{4x4}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, se\ i = j \\ i - j, se\ i \neq j \end{cases}$, calcule a diferença entre os produtos dos elementos da diagonal principal e da diagonal secundária:

a) 125

b) 285

c) 375

d) 380

e) 385

14) Num final de semana, registrou-se o número de fregueses que fizeram compras numa padaria, bem como o período (manhã, tarde ou noite) da visita. A matriz abaixo indica o número de visitas ocorridas no sábado (primeira linha) e no domingo (segunda linha) e nos turnos da manhã (primeira coluna) , no turno da tarde (segunda coluna e no turno da noite(terceira coluna) que aconteceram nessa padaria.

A= $\begin{pmatrix} 64 & 90 & 42 \\ 82 & 55 & 38 \end{pmatrix}$

Qual foi o número de clientes que a padaria recebeu no sábado à tarde?

a) 64

b) 42

c) 82

d) 90

e) 55

15) As tabelas abaixo indicam o número de faltas de três alunos (A,B,C) em cinco disciplinas (Português, Matemática, Biologia, História e Física), representadas pelas suas iniciais, nos meses de março e abril.

Tabela A

	P	M	B	H	F
Aluno A	2	1	0	4	2
Aluno B	1	0	2	1	1
Aluno C	5	4	2	2	2

Tabela B

	P	M	B	H	F
Aluno A	1	2	0	1	3
Aluno B	0	1	1	3	1
Aluno C	3	1	3	2	3

Qual o aluno que teve o maior número de faltas nos dois trimestres e em qual disciplina?

a) O aluno B em Matemática

b) O aluno C em História

c) O aluno A em Física

d) o aluno B em Biologia

e) o aluno C em Português

APÊNDICE G- UEPS 04

PROPOSTA DE UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO (UEPS) PARA O ENSINO DE MATRIZES – UEPS 04

Objetivo: Definir a multiplicação de matriz por matriz

Sequência:

1. Situação-problema inicial: Os alunos receberão individualmente uma folha (ver abaixo) com situações problemas para serem resolvidas em duplas.

IENH

Instituição Evangélica de Novo Hamburgo
Centro Sinodal de Ensino Médio de Novo Hamburgo
Unidade Fundação Evangélica - Ensino Médio

Nome:_____________________________ **Nº:**____ **Série/Turma:** ______ **Data:** ___/ ___/ _____

Disciplina: - Matemática **Professor:** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

ATIVIDADE 04

Tarefas:

I) Situação-problema I:

Observe as tabelas abaixo e responda o que se pede:

A primeira tabela mostra o número de cestas de cada tipo convertidas por quatro equipes que disputaram um campeonato:

Equipe	Lance Livre	Cesta de dois pontos	Cesta de três pontos
A	10	12	18
B	8	15	19
C	12	17	21
D	7	10	9

E a segunda tabela mostra, de acordo com as regas do basquetebol, que há uma determinada pontuação para cada bola encestada. Uma cesta de lance livre (cobranças de infrações) vale 1 ponto, uma bola encestada a uma distância igual ou inferior a 6,25 m do cesto (área dos dois pontos) vale 2 pontos e uma bola encestada a uma distância superior a 6,25m do cesto (área dos três pontos) vale 3 pontos> Essa informações podem ser organizadas numa tabela:

Tipo de cesta	Pontos obtidos
Lance livre	1
Cesta da área de dois pontos	2
Cesta da área de três pontos	3

Fonte: *Matemática, 2ª série: ensino médio/ Felipe Fujita [et al.], São Paulo: Edições SM, 2009. (Coleção er protagonista).*

Responda:
1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

2) Para saber a pontuação total de cada uma das equipes no campeonato, como você faria? Escreva o procedimento adotado:

II)Situação-problema II:
Um empresário oferece mensalmente alimentos para dois orfanatos, conforme a tabela abaixo.

Orfanato	Arroz (kg)	Feijão (Kg)	Carne (kg)	Batata (kg)
A	25	20	30	32
B	28	24	35	38

O empresário faz a cotação de preços em dois supermercados. A cotação atual encontra-se abaixo.

Produto (kg)		Supermercado X	Supermercado Y
Arroz		3,50	3,50
Feijão		7,50	8,00
Carne		20,00	25,00
Batata		4,50	4,00

Fonte: Matemática Fundamental: uma nova abordagem. Volume unico/ José Ruy Giovanni, José Ruy Giovanni Jr, José Roberto Bonjorno. São Paulo. 2ª ed. FTD. 2011.

Responda:
1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

2) Para saber o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo estabelecimento como você faria? Escreva o procedimento adotado.

III) Situação-problema III:
Uma editora pretende publicar uma coleção de livros de História do Brasil e História Geral em duas versões : Volumes 1,2,3 e único. A primeira tabela mostra a quantidade de cada volume a ser lançada.
Quantidade de exemplares (em milhares de unidades)

Volume	História do Brasil	História Geral
1	200	250

2	220	230
3	260	240
Único	300	310

A segunda tabela mostra o preço de custo e o preço de venda de cada um dos exemplares.
Preço por exemplar (em reais)

Tema	Custo(R$)	Venda (R$)
História do Brasil	32,00	40,00
História Geral	33,00	43,00

Fonte: *Matemática, 2ª série: ensino médio/ Felipe Fujita [et al.], São Paulo: Edições SM, 2009. (Coleção ser protagonista).*

Responda:
1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

2) Quais os valores totais de custo e venda para cada volume dos dois tema escolhidos?

3) Supondo que todos os livros lançados do volume 1 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?

4) Supondo que todos os livros lançados do volume 2 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?

5) Supondo que todos os livros lançados do volume 3 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?

2. Discussão: Permitir que algumas duplas externalizem as respostas para que o grupo de sala de aula possa discutir e observar as diferenças, se houver.

3. Conclusão: Anotar algumas observações quanto às tabelas respostas e verificar como podemos multiplicar uma matriz por outra matriz, questionando se existe uma condição para que a soma/subtração aconteça.

4. Avaliação: Diagnóstico analítico, pela professora, sobre as evidências que envolvem a multiplicação de matriz por matriz, que percebeu ou não, ao longo das tarefas e no grupo.

5. Número de horas-aula destinadas para a atividade: 04 h/a

APÊNDICE H – UEPS 05

PROPOSTA DE UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO (UEPS) PARA O ENSINO DE MATRIZES – UEPS 05

Objetivo: Definir a multiplicação de matriz por matriz

Sequência:

1. Situação-problema inicial: Os alunos receberão individualmente uma folha (ver abaixo) com situações problemas para serem resolvidas em duplas.

IENH
Instituição Evangélica de Novo Hamburgo
Centro Sinodal de Ensino Médio de Novo Hamburgo
Unidade Fundação Evangélica - Ensino Médio

Nome:____________________________ **N°:**___ **Série/Turma:** ______ **Data:** ___/ ___/ ____

Disciplina: - Matemática **Professor:** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

ATIVIDADE 05

Tarefas:

Situação-problema IV) Um laboratório que fabrica, dentre outros, os remédios a,b e c. Para a produção de 1 unidade a são necessários 3g do ingrediente x, 7 g do ingrediente y e 10 g do ingrediente z. Com relação ao remédio b são necessários 2g de x, 4g de y e 5g de z. E, para o remédio c precisamos de 5g de x, 1g de y e 6g de z.

Dispondo os dados em forma de tabela, temos:

	a	b	c
x	3	2	5
y	7	4	1
z	10	5	

Supondo que o consumo dos três remédios, nos meses de junho e julho, seja:
- junho : 80 unidade de a, 100 de b e 150 de c;
- julho: 50 unidades de a, 120 de b e 90 de c.

Dispondo estes dados em forma de tabela:

	junho	julho
a	80	50
b	100	120
c	150	90

Fonte : *Matemática para a escola de hoje: livro único. Walter Fachinni. São Paulo. FTD. 2006.*

Responda:
a) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

b) Quantos gramas do remédio x precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?

c) Quantos gramas do remédio y precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?

d) Quantos gramas do remédio z precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?

Situação-problema V) Abaixo, temos uma tabela com o número total de medalhas de alguns países numa determinada olimpíada e outra tabela que fornece o peso (em pontos) de cada medalha.
Tabela com o número de medalhas de cada país Tabela com os pontos por medalha

	Ouro	Prata	Bronze
Espanha	3	3	5
Quênia	2	3	2
México	1	2	3
Tailândia	1	0	2
Brasil	0	6	6

	Peso
Ouro	3
Prata	2
Bronze	1

Fonte: SEPEB – II (concurso para professor de Matemática)
Responda:
a) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?
b) Determine a pontuação de cada país e assinale Falso ou Verdadeiro para cada alternativa que diz respeito a essa nova tabela que vais formar (a tabela de pontos):
( ) A pontuação do Brasil seria superior à do Quênia, México e Tailândia.
( ) A pontuação do Brasil seria inferior apenas à do Quênia e da Espanha.
( ) O Brasil estaria melhor colocado em relação aos demais países por obter o maior número de medalhas.
( ) Na classificação geral, o país que tem o maior número de pontos é a Espanha.
( ) A pontuação do México seria apenas inferior à do Brasil e da Espanha.

2. Discussão: Permitir que algumas duplas externalizem as respostas para que o grupo de sala de aula possa discutir e observar as diferenças, se houver.

3. Conclusão: Anotar algumas observações quanto às tabelas respostas e verificar como podemos multiplicar uma matriz por outra matriz, questionando se existe uma condição para que a soma/subtração aconteça.
Definir como acontece a multiplicação de matriz por matiz e anotar no caderno.

4. Avaliação: Diagnóstico analítico, pela professora, sobre as evidências que envolvem a multiplicação de matriz por matriz, que percebeu ou não, ao longo das tarefas e no grupo.

5. Número de horas-aula destinadas para a atividade: 04 h/a

APÊNDICE I - UEPS 05B

PROPOSTA DE UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO (UEPS) PARA O ENSINO DE MATRIZES – UEPS 05B

Objetivo: Definir a multiplicação de matriz por matriz

Sequência:

1. Situação-problema inicial: Os alunos receberão individualmente uma folha (ver abaixo) com situações problemas para serem resolvidas em duplas.

IENH Instituição Evangélica de Novo Hamburgo
Centro Sinodal de Ensino Médio de Novo Hamburgo
Unidade Fundação Evangélica - Ensino Médio

Nome:____________________________ **N°:**___ **Série/Turma:** ______ **Data:** ___/ ___/ ____

Disciplina: - Matemática . **Professor** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

ATIVIDADE 05B

Tarefas:

Situação-problema III) Abaixo, temos uma tabela com o número total de medalhas de alguns países numa determinada olimpíada e outra tabela que fornece o peso (em pontos) de cada medalha.

Tabela com o número de medalhas de cada país

	Ouro	Prata	Bronze
Espanha	3	3	5
Quênia	2	3	2
México	1	2	3
Tailândia	1	0	2
Brasil	0	6	6

Tabela com os pontos por medalha

	Peso
Ouro	3
Prata	2
Bronze	1

Fonte: SEPEB – II (concurso para professor de Matemática)

Responda:

a) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

b) Determine a pontuação de cada país e escreva uma matriz que contenha essa pontuação.

c) As afirmativas abaixo estão relacionadas com o resultado obtido na matriz que contém a pontuação dos países. Leia as afirmações e assinale Falso se ela for falsa e ou Verdadeiro se ela for verdadeira:

( ) A pontuação do Brasil seria superior à do Quênia, México e Tailândia.

( ) A pontuação do Brasil seria inferior apenas à do Quênia e da Espanha.

(   ) O Brasil estaria melhor colocado em relação aos demais países por obter o maior número de medalhas.
(   ) Na classificação geral, o país que tem o maior número de pontos é a Espanha.
(   ) A pontuação do México seria apenas inferior à do Brasil e da Espanha.

Situação-problema IV) Um laboratório que fabrica, entre outros, os remédios a,b e c. Para a produção de 1 unidade a são necessários 3g do ingrediente x, 7 g do ingrediente y e 10 g do ingrediente z. Com relação ao remédio b são necessários 2g de x, 4g de y e 5g de z. E, para o remédio c precisamos de 5g de x, 1g de y e 6g de z.
Dispondo os dados em forma de tabela, temos:

	a	b	c
x	3	2	5
y	7	4	1
z	10	5	6

Supondo que o consumo dos três remédios, nos meses de junho e julho, seja:
- junho : 80 unidades de a, 100 de b e 150 de c;
- julho: 50 unidades de a, 120 de b e 90 de c.

Dispondo estes dados em forma de tabela:

	junho	julho
a	80	50
b	100	120
c	150	90

Fonte : *Matemática para a escola de hoje: livro único. Walter Fachinni. São Paulo. FTD. 2006.*

Responda:
a) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

b) Quantos gramas do ingrediente x precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?

c) Quantos gramas do ingrediente y precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?

d) Quantos gramas do ingrediente z precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?

e) Escreva uma nova matriz que contenha estas informações

2. Discussão: Permitir que algumas duplas externalizem as respostas para que o grupo de sala de aula possa discutir e observar as diferenças, se houver.

3. Conclusão: Anotar algumas observações quanto às tabelas respostas e verificar como podemos multiplicar uma matriz por outra matriz, questionando se existe uma condição para que a soma/subtração aconteça.
Definir como acontece a multiplicação de matriz por matiz e anotar no caderno.

4. Avaliação: Diagnóstico analítico, pela professora, sobre as evidências que envolvem a multiplicação de matriz por matriz, que percebeu ou não, ao longo das tarefas e no grupo.

5. Número de horas-aula destinadas para a atividade: 04 h/a

APÊNDICE J – AVALIAÇÃO 02

Instituição Evangélica de Novo Hamburgo
Centro Sinodal de Ensino Médio de Novo Hamburgo
Unidade Fundação Evangélica - Ensino Médio

Nome:__________________________ **Nº:**___ **Série/Turma:** ______ **Data:** ___/ ___/ ____

Disciplina: Matemática **Professor:** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

1) Assinale F, quando a afirmativa for falsa e V, quando a afirmativa for verdadeira:

(   ) Se A é uma matriz 2x4 e B é uma matriz 4x3, existe o produto A.B e o resultado é uma matriz 2 x3.

(   ) O produto entre $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $e\ D = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, não existe.

(   ) Se A e B são duas matrizes quadradas de ordem 3,então o produto entre A e B existe e também será uma matriz quadrada de ordem 3.

(   ) Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, então $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 25 & 9 \end{pmatrix}$.

(   ) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, então$A.B = (-20)$.

2) Efetue, se possível, os produtos entre as matrizes abaixo:

a) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$=

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$=

3) Calcule os valores de x e y, de modo que a igualdade seja verdadeira:

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & 3 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \end{pmatrix}$

4) Resolva: Para a construção de casas populares, um prefeito sugeriu dois tipos de casa: **M** e **G.** As casas do tipo **M** têm 5 portas, 6 janelas e 6 caixas de luz. As casas do tipo **G** têm 8 portas, 9 janelas e 10 caixas de luz. Numa primeira etapa serão construídas 500 casas do tipo **M** e 200 casas do tipo **G**; numa segunda etapa, 600 casas do tipo **M** e 400 do tipo **G**. Chame de A a matriz, material x tipo de casa e a matriz B, número de casas x etapas. Calcule A . B e responda:

a) Quantas portas serão necessárias na construção de todas as casas da primeira etapa?
b) Quantas janelas serão necessárias na construção de todas as casas?

5) (CESGRANRIO) Cláudio anotou suas médias bimestrais de matemática, português, ciências e estudos sociais em uma tabela com quatro linhas e quatro colunas, formando uma matriz, como mostra a figura.

Sabe-se que as notas de todos os bimestres têm o mesmo peso, isto é, para calcular a média anual do aluno em cada matéria basta fazer a média aritmética de suas médias bimestrais. Para gerar uma nova matriz cujos elementos representem as médias anuais de Cláudio, na mesma ordem da matriz apresentada, bastará multiplicar essa matriz por:

$$\begin{array}{l} \\ \text{matemática} \\ \text{português} \\ \text{ciências} \\ \text{est. sociais} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1^{\underline{o}}b & 2^{\underline{o}}b & 3^{\underline{o}}b & 4^{\underline{o}}b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5{,}0 & 4{,}5 & 6{,}2 & 5{,}9 \\ 8{,}4 & 6{,}5 & 7{,}1 & 6{,}6 \\ 9{,}0 & 7{,}8 & 6{,}8 & 8{,}6 \\ 7{,}7 & 5{,}9 & 5{,}6 & 6{,}2 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

6) (UFGRS) A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usados num restaurante: A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo P1, P2 e P3 desse restaurante:
A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P1, P2, e P3, está indicada na alternativa:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{arroz} & \text{carne} & \text{salada} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{prato } P_1 \\ \text{prato } P_2 \\ \text{prato } P_3 \end{array}$$

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

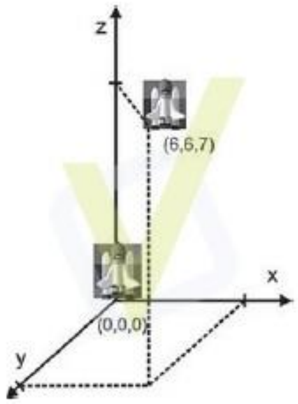
7) (PUCCAMP) Em um laboratório, as substâncias A, B e C são a matéria-prima utilizada na fabricação de dois medicamentos. O Mariax é fabricado com 5g de A, 8g de B e 10g de C e o Luciax é fabricado com 9g de A, 6g de B e 4g de C. Os preços dessas substâncias estão em constante alteração e, por isso, um funcionário criou um programa de computador para enfrentar essa dificuldade. Fornecendo-se ao programa os preços X, Y e Z de um grama das substâncias A, B e C, respectivamente, o programa apresenta uma matriz C, cujos elementos correspondem aos preços de custo da matéria-prima do Mariax e do Luciax. Essa matriz pode ser obtida de

a) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ X & Y & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 6 & 4 \\ X & Y & Z \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ X & Y & Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ X & Y & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

8) (ENEM) Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6, 6, 7) no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros.



Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo x, 3 km para trás na direção do eixo y, e 11 km para frente, na direção do eixo z, então o foguete atingiu a posição:

a) $(7 \quad 3 \quad 9)$ b) $(8 \quad 3 \quad 18)$ c) $(6 \quad 18 \quad 3)$ d) $(4 \quad 9 \quad -4)$ e) $(3 \quad 8 \quad 18)$

APÊNDICE K

PAS – Projeto de Avaliação Sistemática
Componente Curricular: Matemática
Série/Turma: 22 A, B   Professor/a: Marjúnia Édita Zimmer Klein
Questões 11 a 15

11) (ENEM) O índice de massa corpórea (IMC) é uma medida que permite aos médicos fazer uma avaliação preliminar das condições físicas e do risco de uma pessoa desenvolver certas doenças, conforme mostra a tabela a seguir.

IMC	Classificação	Risco de doença
Menos de 18,5	Magreza	Elevado
Entre 18,5 e 24,9	Normalidade	Baixo
Entre 25 e 29,9	Sobrepeso	Elevado
Entre 30 e 39,9	Obesidade	Muito elevado
40 ou mais	Obesidade grave	Muitíssimo elevado

Considere as seguintes informações a respeito de João, Maria, Cristina, Antônio e Sérgio:

Nome	Peso (kg)	Altura (m)	IMC
João	113,4	1,80	35
Maria	45	1,50	20
Cristina	48,6	1,80	15
Antônio	63	1,50	28
Sérgio	115,2	1,60	45

Os dados das tabelas indicam que:
a) Cristina está dentro dos padrões de normalidade.
b) Maria está magra, mas não corre risco de desenvolver doenças.
c) Antônio está com sobrepeso e o risco de desenvolver doenças é muito elevado.
d) João está obeso e o risco de desenvolver doenças é muito elevado.
e) Sérgio está com sobrepeso, mas não corre risco de desenvolver doenças.

12) (ENEM) Define-se genoma como o conjunto de todo o material genético de uma espécie, que, na maioria dos casos, são as moléculas de DNA. Durante muito tempo, especulou-se sobre a possível relação entre o tamanho do genoma — medido pelo número de pares de bases (pb) —, o número de proteínas produzidas e a complexidade do organismo. As primeiras respostas começam a aparecer e já deixam claro que essa relação não existe, como mostra a tabela abaixo.

Espécie		Nome Comum	Tamanho estimado do Genoma (pb)	Número de proteínas descritas
Oryza sativa		Arroz	5 000 000 000	224 181
Mus musculus		Camundongo	3 454 200 000	249 081
Homo sapiens		Homem	3 400 000 000	459 114
Rattus norvegicus		Rato	2 900 000 000	109 077

Drosophila Melanogaster		Mosca das frutas	180 000 000	86 255

Fonte: www.cbs.dtu.dk e www.ncbi.nlm.nih.gov.

De acordo com as informações acima,
a) o conjunto de genes de um organismo define o seu DNA.
b) a produção de proteínas não está vinculada à molécula de DNA.
c) o tamanho do genoma não é diretamente proporcional ao número de proteínas produzidas pelo organismo.
d) quanto mais complexo o organismo, maior o tamanho de seu genoma.
e) genomas com mais de um bilhão de pares de bases são encontrados apenas nos seres vertebrados.

13) (UEL- PR) Uma indústria utiliza borracha, couro e tecido para fazer três modelos de sapatos. A matriz Q fornece a quantidade de cada componente na fabricação dos modelos de sapatos, enquanto a matriz C fornece o custo unitário, em reais, destes componentes.

Dados:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{borracha} & \text{couro} & \text{tecido} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{modelo 1} \\ \text{modelo 2} \\ \text{modelo 3} \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{borracha} \\ \text{couro} \\ \text{tecido} \end{array}$$

A matriz V que fornece o custo final, em reais, dos três modelos de sapatos é dada por:

a) $V = \begin{pmatrix} 110 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}$ b) $V = \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$ c) $V = \begin{pmatrix} 80 \\ 110 \\ 80 \end{pmatrix}$ d) $V = \begin{pmatrix} 120 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix}$ e) $V = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 80 \end{pmatrix}$

14) (Unimontes MG - adaptada) Um construtor tem contratos para construir 2 estilos de casa: moderno e colonial. A quantidade de material empregado em cada tipo de casa é dada pela matriz:

Estilo	Ferro	Madeira	Tijolo
Moderno	6	20	18
Colonial	5	22	12

Os preços por unidade de cada material estão descritos na tabela abaixo:

Material	Preço (R$)
Ferro	15,00
Madeira	8,00
Tijolo	10,00

Suponha que o construtor vá construir 2 casas de tipo moderno e 3 do tipo colonial. Então o custo total do material empregado é igual a:

a) R$ 1 973,00 b) R$ 1 923,00 c) R$ 1 602,00 d) R$ 1 932,00 e) R$ 2 000,00

15) **(UFRJ – MODELO ENEM)** Uma fábrica de guarda-roupas utiliza três tipos de fechaduras (dourada, prateada e bronzeada) para guarda-roupas de mogno e cerejeira, nos modelos básico, luxo e requinte. A tabela 1 mostra a produção de móveis durante o mês de outubro de 2005, e a tabela 2, a quantidade de fechaduras utilizadas em cada tipo de armário no mesmo mês.

Tabela 1: Produção de armários em outubro de 2005

	Modelo		
Madeira	**Básico**	**Luxo**	**Requinte**
Mogno	3	5	4
Cerejeira	4	3	5

Tabela 2: Fechaduras usadas em outubro de 2005

	Madeira	
Tipo	**Mogno**	**Cerejeira**
Dourada	10	12
Prateada	8	8
Bronzeada	4	6

A quantidade de fechaduras usadas nos armários do modelo requinte nesse mês foi de

a) 170 b) 218 c) 120 d) 192 e) 188

APÊNDICE L

PAS – Projeto de Avaliação Sistemática
Componente Curricular: Matemática
Série/Turma: 22A,B Professor/a: Marjúnia Édita Zimmer Klein
Questões 11 a 15

11) (Cefet-PR) Uma pesquisa de preços resultou nas seguintes tabelas:

I. PREÇO DOS AUTOMÓVEIS – nas linhas estão as agências *A*, *B* e *C* e nas colunas os carros Levott, Só-corro e Vodemil (na ordem citada):

$$\begin{bmatrix} 13.900 & 14.990 & 15.990 \\ 12.990 & 15.900 & 15.990 \\ 12.990 & 14.990 & 15.900 \end{bmatrix}$$

II. PREÇO DOS SEGUROS DOS AUTOMÓVEIS – nas linhas estão as seguradoras α, β e γ e nas colunas os carros Levott, Só-corro e Vodemil (na ordem citada):

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 1.200 & 1.200 \\ 1.150 & 1.050 & 1.200 \\ 1.050 & 1.100 & 1.150 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que a agência *A* só utiliza a seguradora α, a agência B só usa a seguradora β e a agência *C* só usa a seguradora γ. Determine a diferença entre o maior e o menor preço do conjunto carro mais seguro:

a) R$ 3 050,00

b) R$ 3 150,00

c) R$ 3 060,00

d) R$ 315,00

e) R$ 306,00

12) (Unesp) Considere três lojas, L1, L2 e L3, e três tipos de produtos, P1, P2 e P3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_i , com i, j = 1, 2, 3.

	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Produto 1	30	19	20

Produto 2	15	10	8
Produto 3	12	16	11

Escrevendo uma matriz que desconsidera as informações marginais dessa tabela e analisando essa matriz, podemos afirmar que:

a) a quantidade de produtos do tipo P2 vendidos pela loja L2 é 11.
b) a quantidade de produtos do tipo P1 vendidos pela loja L3 é 30.
c) a soma das quantidades de produtos do tipo P3 vendidos pelas três lojas é 40.
d) a soma das quantidades de produtos do tipo Pi vendidos pelas lojas Li, i = 1, 2, 3, é 52.
e) a soma das quantidades dos produtos dos tipos P1 e P2 vendidos pela loja L1 é 45.

13) (Esam-RN) O produto A . B de duas matrizes só é possível quando número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Então, identifique a alternativa incorreta.

a) Se A e B são matrizes quadradas de ordem 3, então o produto A.B será, também, uma matriz quadrada de ordem 3.

b) Se A é uma matriz 5x2 e B é uma matiz 2x5, existe o produto B.A

c) Se A é uma matriz 3x2 e B é uma matriz 2x2, então A.B é uma matriz 3x2.

d) Se A é uma matriz 2x2 então a matriz A^2 é, também uma matriz do tipo 2x2.

e) Só podemos calcular B^2, quando B é uma matriz quadrada.

14) Na matriz $A = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 5 \\ 18 & 21 & 4 \end{pmatrix}$, os elementos da primeira linha representam os preços unitários em reais de três artigos diferentes na loja X e os da segunda linha, os respectivos preços unitários em reais dos mesmos artigos na loja Y. os elementos da matriz A.B, com $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, representam os preços a serem pagos pela compra de 1 unidade do primeiro artigo, 2 do segundo e 1 do terceiro, nessas lojas. Se fizermos a compra em Y, gastaremos, em relação ao que seria gasto na loja X:

a) R$ 3,00 a mais

b) R$ 3,00 a menos

c) R$ 4,00 a mais

d) o mesmo valor

e) nda

15) Multiplicando as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, obtemos $\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}$. O produto dos elementos x e y da primeira matriz é:

a) 4

b) 6

c) -4

d) -6

e) -8

APÊNDICE M

PROPOSTA DE UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO (UEPS) PARA O ENSINO DE MATRIZES – UEPS 06

Objetivo: Motivar os alunos para introduzir o cálculo de determinantes.

Sequência:

1. Situação-problema inicial: Os alunos receberão individualmente uma folha contendo um texto motivador para o próximo conteúdo a ser trabalhado: cálculo de determinantes e sistemas lineares para realizarem uma leitura individual.

IENH

Instituição Evangélica de Novo Hamburgo
Centro Sinodal de Ensino Médio de Novo Hamburgo
Unidade Fundação Evangélica - Ensino Médio

Nome:_____________________________ N°:____ Série/Turma: ______ Data: ___/ ___/ _____

Disciplina: - Matemática Professor: Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

Origem dos Sistemas Lineares e Determinantes

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação — que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos Nove capítulos sobre a arte da matemática, um texto que data provavelmente do século 111 a.C.

Mas foi só em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a ideia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de Leibniz, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo). Para tanto criou até uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escreveríamos como a_{12}, Leibniz indicava por 1_2.

A conhecida regra de Cramer para resolver sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698-1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicada postumamente em 1748 no seu Treatise of algebra. Mas o nome do suíço Gabriel Cramer (1704-1752) não aparece nesse episódio de maneira totalmente gratuita. Cramer também chegou à regra (independentemente), mas depois, na sua Introdução à análise das curvas planas (1750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0.

O francês Étienne Bézout (1730-1783), autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735-1796), em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares — embora também os usasse na resolução destes sistemas. O importante teorema de Laplace, que permite a expansão de um determinante através dos menores de r filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio Laplace num artigo que, a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: "Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo".

O termo determinante, com o sentido atual, surgiu em 1812 num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à Academia de Ciências, Cauchy sumariou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1841 com Arthur Cayley) e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes — meses antes J. F. M. Binet (1786-1856) dera a primeira demonstração deste teorema, mas a de Cauchy era superior.

Além de Cauehy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl G. J. Jacobi (1804-1851), cognominado às vezes "o grande algorista". Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje elementarmente. Como algorista, Jacobi era um entusiasta da notação de determinante, com suas potencialidades. Assim, o importante conceito de jacobiano de uma função, salientando um dos pontos mais característicos de sua obra, é uma homenagem das mais justas.

Fonte: http://www.solracmatematematico.com/.Acesso em 01 de novembro de 2016.

CURIOSIDADE SOBRE O NOME MATRIZ E A ORDEM CRONOLÓGICA DOS TEMAS ABORDADOS NO SEU ESTUDO

O pai do nome matriz

Foi só há pouco mais de 150 anos que as matrizes tiveram sua importância detectada e saíram da sombra dos determinantes. O primeiro a lhes dar um nome parece ter sido Cauchy, 1826 : tableau (= tabela).O nome matriz só veio com James Joseph **Sylvester, 1850.** Seu amigo Cayley, Aliás as matrizes começaram seu estudo a partir dos determinantes e só depois estudaram-se as operações e a matriz inversa.

Fonte: Adaptado do site: https://pt.scribd.com**. Acesso em 01 de novembro de 2016.**

2. Discussão: Após a leitura individual, permitir que algumas externalizem a sua opinião sobre o texto para que o grupo de sala de aula.

3. Conclusão: Verificar junto com os alunos que o conteúdo de determinantes é parte integrante de análise de sistemas e que haverá a necessidade de compreende-lo em primeiro lugar para depois analisar os sistemas lineares

4. Avaliação: Observar os comentários e evidenciar que os alunos perceberam a importância do conteúdo de determinantes para a resolução e a análise de sistemas lineares.

5. Número de horas-aula destinadas para a atividade: 01 h/a

APÊNDICE N – UEPS 07

PROPOSTA DE UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO (UEPS) PARA O ENSINO DE MATRIZES – UEPS 07

Objetivo: Motivar os alunos para introduzir o cálculo de determinantes.

Sequência:

1. Situação-problema inicial: Os alunos receberão individualmente uma folha contendo quatro problemas que envolvem sistemas lineares, todos eles com duas incógnitas e duas equações e deverão em duplas resolvê-los, utilizando para isso qualquer forma de resolução.

IENH

Instituição Evangélica de Novo Hamburgo
Centro Sinodal de Ensino Médio de Novo Hamburgo
Unidade Fundação Evangélica - Ensino Médio

Nome:____________________________ **N°:**____ **Série/Turma:** _______ **Data:** ___/ ___/ _____

Disciplina: - Matemática **Professor:** - Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

ATIVIDADE 05 – Resolução de sistemas lineares (duas incógnitas)

1) Numa fazenda há galinhas e bois, totalizando 55 animais. A quantidade de patas é de 170. Quantas galinhas e quantos bois há nessa fazenda?

2) Num jogo de basquete cada cesta fora do garrafão (além de 6,5m da cesta) vale 3 pontos e no garrafão (exatamente a 6,5 m da cesta) vale 2 pontos. Sabendo que um time fez 40 cestas e que estas totalizaram 95 pontos. Quantas destas cestas foram no garrafão e quantas foram fora do garrafão?

3) Uma copeira lavou os 800 copos utilizados numa festa. Ela recebeu R$ 0,05 por copo que lavou e teve que pagar R$ 0,25 por copo que quebrou. Terminado o serviço, a copeira recebeu R$ 35,80. Qual foi o número de copos que ela quebrou?

4) Numa festa junina, uma barraca de tiro ao alvo oferece R$ 15,00 ao participante cada vez que ele acertar o alvo. Entretanto, se errar, o participante paga R$ 10,00. Um indivíduo deu 30 tiros e recebeu R$ 175,00. Nessas condições, qual foi o número de vezes que ele errou o alvo?

2. Discussão: Ainda em duplas, compartilhar com o grupo de alunos as resoluções e verificar aquelas que estão corretas e quais não estão corretas, procurando analisar qual foi o erro dos colegas. As anotações serão feitas no quadro. É uma forma de garantir que as observações de cada dupla sejam analisadas pelo grupo.

3. Conclusão: Verificar que nem todas as duplas resolveram da mesma maneira e, por vezes, até puderam errar, devido a algum motivo (falta de atenção, erro de cálculo ou até mesmo de interpretação). Relembrar que esse assunto já foi abordado no ensino fundamental. Ver se recordam. Mostrar que existe outra forma de resolver os problemas propostos, por determinantes, utilizando a Regra de Cramer. Resolver os mesmos problemas utilizando a Regra de Cramer. Permitir que os alunos resolvam, após a explicação do professor, os demais problemas antes do professor concluir no quadro.

4. Avaliação: Observar os comentários e as resoluções das duplas e intervir, sempre que necessário. Observar e intervir nos comentários do grande grupo e realizar anotações no quadro sobre as conclusões que estão sendo percebidas pelo grupo.

5. Número de horas-aula destinadas para a atividade: 04 h/a

6. Referências: Curso de Matemática: volume único/ Edwaldo Bianchini, Herval Paccola. 3ª ed. Revisada e ampliada. São Paulo. Moderna 2003.

APÊNDICE O – UEPS 08

PROPOSTA DE UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO (UEPS) PARA O ENSINO DE MATRIZES – UEPS 08

Objetivo: Ensinar os alunos a utilizar a regra de Cramer para resolver sistemas lineares

Sequência:

1. Situação-problema inicial: Os alunos receberão individualmente uma folha contendo dois problemas que envolvem sistemas lineares, todos eles com três incógnitas e três equações e deverão em duplas resolvê-los, utilizando para isso a Regra de Cramer, aprendida na aula anterior.

IENH

Instituição Evangélica de Novo Hamburgo
Centro Sinodal de Ensino Médio de Novo Hamburgo
Unidade Fundação Evangélica - Ensino Médio

Nome:____________________________ **N°:**___ **Série/Turma:** ______ **Data:** ___/ ___/ ____

Disciplina: Matemática - **Professor:** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

ATIVIDADE 05 – Resolução de sistemas lineares(três incógnitas)

1) Um shopping reservou uma área para as crianças brincarem sobre rodas e colocou à disposição bicicletas (duas rodas), triciclos (três rodas) e carrinhos (quatro rodas). Após algum tempo, devido ao desgaste, tiveram de trocar todos os pneus. Entre bicicletas e triciclos foram trocados 90 pneus, entre bicicletas e carrinhos, 130 pneus e entre triciclos e carrinhos 160 pneus. Quantas eram as bicicletas que estiveram à disposição das crianças?

2) Em um restaurante, são servidos três tipos de saladas: A, B e C. Num dia de movimento, observaram-se os clientes X, Y e Z. O cliente X serviu-se de 200g de salada A, 300g da B e 100g da C e pagou R$5,50 pelo prato. O cliente Y serviu-se de 150g de salada A, 250g da B e 200g da C e pagou R$5,85. Já o cliente Z serviu-se de 120g de salada A, 200g da B e 250g da C e pagou R$5,76. Calcule o preço do quilo de cada salada.

2. Discussão: Ainda em duplas, compartilhar com o grupo de alunos as resoluções e verificar aquelas que estão corretas e quais não estão corretas, procurando analisar qual foi o erro dos colegas. As anotações serão feitas no quadro. É uma forma de garantir que as observações de cada dupla sejam analisadas pelo grupo.

3. Conclusão: Verificar que a Regra de Cramer foi estendida para problemas que possuem três incógnitas e três equações e os procedimentos de resolução foram praticamente os mesmos. Observar que, quando aumenta o número de incógnitas e o número de equações, fica mais demorado e até mais difícil tentar resolver o problema por técnicas aprendidas no Ensino Fundamental. Permitir que os alunos compartilhem com o grupo as suas respostas antes de corrigi-las

4. Avaliação: Observar os comentários e as resoluções das duplas e intervir, sempre que necessário. Observar e intervir nos comentários do grande grupo e realizar anotações no quadro sobre as conclusões que estão sendo percebidas pelo grupo.

5. Número de horas-aula destinadas para a atividade: 04 h/a

6. Referências: Curso de Matemática: volume único/ Edwaldo Bianchini, Herval Paccola. 3ª ed. Revisada e ampliada. São Paulo. Moderna 2003.

APÊNDICE P -Avaliação

Instituição Evangélica de Novo Hamburgo
Centro Sinodal de Ensino Médio de Novo Hamburgo
Unidade Fundação Evangélica - Ensino Médio

Nome:_____________________________ **N°:**___ **Série/Turma:** ______ **Data:** ___/ ___/ ____

Disciplina: Matemática **Professor:** Ms. Marjúnia Édita Zimmer Klein

I) Resolva as questões abaixo, apresentando os cálculos correspondentes e marque a alternativa correta:

1) (UFRGS) 0 sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ a.x + y + b.z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$, com **a** e **b** reais, é indeterminado se e somente se

a) b = -a + 1 b) b $\neq$ -a + 1 c) b = a – 1 d) b $\neq$ a – 1 e) b $\neq$ a + 1

2) (UFRGS) 0 sistema $\begin{cases} \alpha.x + 3y = 4 \\ 5x + \alpha.y = -1 \end{cases}$, onde α > 0, admite uma única solução com x = -1 se e somente se α é um determinado número real

a) primo b) irracional c) múltiplo de 5 d) divisível por 3 e) quadrado perfeito

3) (PUC) 0 sistema $\begin{cases} 3x + m.y = n \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ admite infinitas soluções se e somente se o valor de **m + n** é

a) 9 b) 6 c) 3 d) 1 e) 0

4) (UCS) Para que o sistema $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - (m+1).y = 2 \end{cases}$ seja possível e determinado, devemos ter:

a) m = $\frac{5}{2}$ b) m = $\frac{2}{3}$ c) m $\neq$ $\frac{2}{5}$ d) m $\neq$ -$\frac{5}{2}$ e) m = 0

5) (PUC) 0 sistema $\begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ m.x + 9y = 15 \end{cases}$ será indeterminado se **m** for igual a:

a) - 2 b) 0 c) 2 d) 3 e) 6

6) (ULBRA) 0 sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ a.x + 2y = b \end{cases}$, onde **a** e **b** $\in \Re$, é possível e determinado se, e somente se,

a) $a \neq 2$ b) a = 2 e b = 0 c) a = 2 e b = 2 d) a=2 e $b \neq 2$ e) a=2

7) (PUC) Para que o sistema $\begin{cases} 2x - n.y = 0 \\ x + 5y = 0 \end{cases}$ tenha soluções diferentes de zero, **n** deve ser igual a

a) - 10 b) - 5 c) –2 d) 5 e) 10

8) (ULBRA) 0 sistema de equações $\begin{cases} 6x + 8y - 2z = 0 \\ 4x - 2y + 6z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

a) admite uma única solução não trivial
b) admite apenas a solução trivial
c) admite apenas soluções triviais
d) admite infinitas soluções
e) não tem solução

9) (UFRGS) As ternas ordenadas (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) são soluções distintas do sistema $\begin{cases} x + a.y + b.z = 0 \\ a.x + y + b.z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$ Então, o valor absoluto da **a** é

a) ab b) a c) b d) 1 e) 0

10) (UFRGS) 0 sistema $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{cases}$ tem:

a) nenhuma solução.

b) uma única solução

c) exatamente três soluções

d) exatamente duas soluções

e) infinitas soluções

APÊNDICE Q – Questionário final aplicado aos alunos

PPG EM CIÊNCIAS: QUÍMICA DA VIDA E DA SAÚDE

Aluna: Marjunia Édita Zimmer Klein, aluna do Doutorado (2015/1)

Questões para a entrevista preliminar: (primeira entrevista) (Gravar as entrevistas!)

Objetivo: Identificar as percepções do aluno devido à mudança de metodologia no ensino e na aprendizagem de matrizes.

Turma:

1. Você observou que alteramos a metodologia de ensino nas aulas de Matemática durante este terceiro trimestre. Você considera que esta alteração na metodologia auxiliou na sua aprendizagem em Matemática?

1.1. Se você marcou sim, você consegue exemplificar?

2. Você consegue dar significado ao conteúdo desenvolvido em aula, por exemplo, aplicando-o em alguma situação do cotidiano?

APÊNDICE R – Material, na modalidade minicurso, enviado e aprovado no XII ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, São Paulo, 2016.

TRIGONOMETRIA NA PRÁTICA

Marjúnia Édita Zimmer Klein

UFRGS

marjunia.klein@gmail.com

Resumo:

O presente minicurso tem como objetivo instrumentalizar o professor com atividades práticas que possam contribuir para a aprendizagem significativa do conteúdo de trigonometria e aborda desde as razões trigonométricas no triângulo retângulo até as funções trigonométricas na circunferência trigonométrica e as relações entre elas. As atividades foram elaboradas pela autora tendo como fundamentação teórica a TAS (Teoria da Aprendizagem Significativa, de Ausubel) e a TCC (Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud) e já foram aplicadas em sala de aula obtendo resultados positivos.

Palavras-chave: Trigonometria. Funções trigonométricas. Aprendizagem. Atividades.

1. Introdução

O conteúdo de trigonometria é ministrado, normalmente, na segunda série do Ensino Médio e, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM,1988), deve proporcionar no educando o desenvolvimento de competências e habilidades que permitam identificar, formular e resolver problemas, utilizando um rigor lógico-científico na análise da situação-problema, bem como a correlação com outros campos do saber.

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.
> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança, desprendimento para analisar e enfrentar situações, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza, da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de ouras capacidades pessoais (PCNEM, 1998, p.40).

Porém, ao lecionar este conteúdo, verifica-se que os alunos apresentam muitas dificuldades na compreensão dos mesmos. Motivo pelo qual as atividades a seguir foram elaboradas pela autora e pretendem auxiliar na compreensão dos conceitos matemáticos que envolvem o conteúdo de Trigonometria, tendo como fundamentação teórica Ausubel e Vergnaud.

2 Fundamentação teórica

A teoria da aprendizagem significativa proposta por David P. Ausubel e continuada, interpretada e complementada por Joseph D. Novak (Ausubel et al., 1980) e D. Bob Gowin (1981 apud MOREIRA, 2006), tem, como ideia mais importante, considerar aquilo que o aprendiz já sabe. Ao dizer isso, Ausubel quer enfocar a estrutura cognitiva do indivíduo, ou seja, as ideias e o conteúdo que ele tem a respeito de determinado assunto. De posse dessa informação, é possível fazer um mapeamento das ideias prévias do aluno, com o objetivo de ensiná-lo de acordo, identificando os conceitos organizadores básicos e utilizando recursos que facilitem a aprendizagem de maneira significativa. Segundo Ausubel:

> A essência do processo de aprendizagem significativa é que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as ideias são relacionadas a algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição (AUSUBEL et. al., p. 34, 1980).

Aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação interage com uma estrutura do conhecimento, já existente e específica (conceito subsunçor), produzindo uma nova informação que adquire um novo significado, inclusive para os subsunçores preexistentes. Ou seja, há uma interação não arbitrária e não literal que contribui para a diferenciação, a elaboração e a estabilidade da própria estrutura cognitiva, fazendo com que o indivíduo adquira um corpo de conhecimento claro, estável e organizado, que passa a ser a principal variável independente, na aquisição de novas informações da mesma área.

Ausubel quer dizer que, se as ideias-âncora não forem consistentes e estáveis na estrutura cognitiva do aprendiz, elas podem, facilmente, ser substituídas e, até mesmo, criar um relacionamento inadequado com as novas ideias.

Porém, a estrutura cognitiva do aprendiz pode, por sua vez, ser influenciada de duas maneiras:

- pela apresentação de conceitos com maior poder explanatório e propriedades integradoras;

➢ pela utilização de métodos adequados e uma organização sequencial apropriada.

O papel do professor, nessa tarefa de facilitação da aprendizagem significativa, envolve quatro aspectos, que são:

➢ identificar os conceitos mais relevantes, os que têm um nível intermediário de generalidade e inclusividade e os menos inclusivos, realizando um “mapeamento” da estrutura conceitual, preocupando-se com a qualidade e não com a quantidade;

➢ identificar quais são os subsunçores (conceitos, proposições e ideias claras, precisas, estáveis) que o aluno deveria ter na sua estrutura cognitiva e que são relevantes à aprendizagem significativa do conteúdo;

➢ diagnosticar o que o aluno já sabe, isto é, saber distinguir entre o que é importante, relevante para a aprendizagem e aquilo que o aluno já tem disponível na sua estrutura cognitiva;

➢ ensinar através de recursos e princípios que auxiliem o aluno a assimilar a matéria e organizem a sua própria área de conhecimento, pela aquisição de significados claros, estáveis e transferíveis.

Ausubel et al. (1980) sugerem que o professor, ao organizar o ensino, segundo a sua teoria, deverá, em primeiro lugar, identificar os conhecimentos prévios dos alunos, depois, então, poderá dar atenção a outros aspectos, os quais ele chama de princípios e que dizem respeito à organização eficiente do conteúdo, não esquecendo das variáveis, que são importantes para a estrutura cognitiva do aprendiz:

➢ a diferenciação progressiva (ideias, mais gerais e inclusivas, devem ser apresentadas no início da instrução e, progressivamente diferenciadas através de detalhes e especificidades);

➢ e a reconciliação integrativa (explorar relações entre conceitos e proposições, prestando atenção em aspectos similares e/ou diferenças que permitam reconciliar inconsistências reais ou aparentes) ;

➢ a organização sequencial (prestar atenção para que cada novo tópico possa ser relacionado com ideias já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz);

➢ a consolidação (o novo tópico não deve ser introduzido, antes que o precedente esteja estável e organizado;

Concomitante com a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel (1980), considero relevante citar a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1993), pois, em muitos aspectos, as teorias são complementares.

Para Vergnaud, existe a premissa de que o conhecimento está organizado em campos conceituais. Segundo ele:

> Campo conceitual é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição (VERGNAUD, apud MOREIRA, 2004, p. 8).

A teoria dos campos conceituais é uma teoria psicológica cognitivista que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento das competências complexas, sobretudo, às que dependem da ciência e da técnica. Sua principal finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes, entende-se por “conhecimentos”, tanto as habilidades quanto as informações expressas.

As palavras-chave da teoria dos campos conceituais são: campo conceitual, conceito, situação, esquema e invariante operatório (teorema-em-ação ou conceito-em-ação).

Campo conceitual é um conjunto de situações, problemas, relações, conteúdos, operações de pensamento e procedimentos que o indivíduo dispõe ou acessa para dar sentido a uma determinada unidade (assunto), para compreender o real.

Vergnaud, para definir campo conceitual, levou em consideração o fato de que:

- um conceito necessita de mais do que uma situação para ser formado;
- numa única situação, não se analisa só um conceito, ela envolve vários conceitos;
- para apropriar-se de um conceito ou dos aspectos que envolvem uma situação o indivíduo pode levar muito tempo.

A tese subjacente à teoria dos campos conceituais é a de que um bom desempenho didático baseia-se, necessariamente, no conhecimento das dificuldades das tarefas cognitivas, dos obstáculos, do repertório de procedimentos e das representações possíveis; o que, em muito se assemelha à teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, quando sugere que uma das tarefas do professor é a de conhecer a estrutura cognitiva do aluno, seus conhecimentos prévios (subsunçores), “mapeando-os” para então, organizar as atividades facilitadoras da aprendizagem.

3 Atividades e metodologia

As atividades citadas a seguir, a partir de seus objetivos, serão trabalhadas no minicurso e será fornecido o material necessário para a realização das mesmas.

Atividade 01: O objetivo dessa atividade é a definição das razões trigonométricas a partir das medidas de ângulos (utilizando o transferidor) e lados (utilizado a régua) nos triângulos retângulos que serão fornecidos pela autora. Os participantes, individualmente receberão triângulos de E.V.A. e deverão medir lados (régua) e ângulos (transferidor), para depois verificarem quais deles têm triângulos com mesma medida angular e se reunirem a partir dessa característica. Em seguida, já reunidos, vão realizar algumas discussões sobre o motivo de estarem no mesmo grupo e vão definir um ângulo de referência em cada triângulo e, a partir dele, calcular as razões trigonométricas. Por fim, vão aparecer, além dos valores notáveis, outros valores, mas o mais importante é que no final verificam que é a partir do ângulo escolhido, não por causa dos lados que as razões trigonométricas permanecem constantes.

Atividade 02: O objetivo dessa atividade é a construção de um astrolábio e a sua utilização para determinar alturas que objetos. Essa atividade acontecerá na parte externa à sala de aula.

O astrolábio é um instrumento utilizado para medir alturas (ângulos na vertical), aparece junto com a alidade (instrumento que mede ângulos na horizontal) em outro instrumento muito utilizado pelos agrimensores, engenheiros e arquitetos que é o teodolito. Sua construção enriquece o conteúdo trabalhado anteriormente realizado (as razões trigonométricas) e justifica o seu valor. Para a confecção do mesmo serão utilizados, por grupo (sugestão é de 4 componentes), um transferidor, um pedaço de barbante, fita métrica, fita adesiva, caneta "bic" vazia e material para anotações. Após a construção, a professora explica como funciona o seu uso e resgata um pouco do seu histórico. Em seguida, os participantes irão para a parte externa da sala e realizarão medidas, utilizando o astrolábio, que lhes permitirá, a partir de uma das razões trigonométricas determinar a medida da altura de um determinado objeto. Anotações serão feitas e compartilhadas pelos grupos com um fechamento propiciado pela professora.

Atividade 03: O objetivo é a definição do raio unitário, do radiano e das equivalências entre as unidades radiano e grau. Na sequencia, discutiremos que a razões não dependem das medidas dos lados, mas sim das medidas dos ângulo, então não há necessidade de nos preocuparmos, ao transpormos para a circunferência trigonométrica, com a medida do raio. Esse por sua vez pode ser unitário (uma unidade). Em seguida trabalharemos com as equivalências angulares, o grau e o radiano.

Atividade 04: O objetivo é a definição das funções trigonométricas na circunferência trigonométrica e a construção de uma circunferência trigonométrica para uso individual, a partir de uma matriz (anexo) criada e fornecida pela autora, onde possam ser visualizados os valores notáveis e a redução ao primeiro quadrante. Nessa atividade, os participantes vão visualizar na circunferência trigonométrica os valores notáveis e por sua vez os triângulos em cada quadrante, a repetição de valores que acontecem, porem com mudança de sinal e assim definir regras para a redução ao primeiro quadrante.

4 Considerações finais

O cunho mais prático da modalidade de minicurso propicia aos participantes um espaço de discussão e interação do conteúdo abordado. Neste intuito, pretendo contribuir com a minha experiência fornecendo sugestões de atividades que já foram realizadas em sala de aula com os meus alunos e que propiciaram um resultado positivo. Agradeço aos participantes, desde já, pelas contribuições para o tema em questão. A sugestão de público-alvo é para professores da segunda série do Ensino Médio.

5. Referências

AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph, D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional.** Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. 625p.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. Trad. De Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488p.

BRIGHENTI, Maria José Lorenção. **Representações gráficas.** São Paulo, EDUSC, 2003.149p.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAUJO, Jussara de Loiola (orgs). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. 118p.

VERGNAUD, G. **Teoria dos campos conceituais**. In: Nasser, L., 1993, Rio de Janeiro. Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.

VERGNAUD, Gerard. **Atividade humana e conceituação**. Trad. Esther P. Grossi. Porto Alegre: Comunicação Impressa. 2008. 66p.

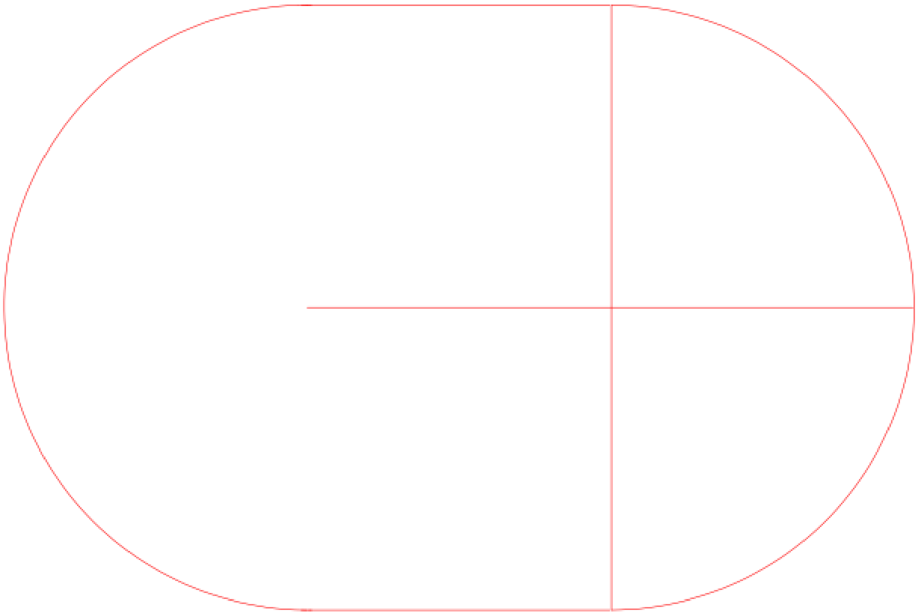
VERGNAUD, Gerard. **Atividade humana e conceituação**. Trad. Esther P. Grossi. Porto Alegre: UFRGS. 2008. 59p.

VERGNAUD, Gerard. **O campo conceitual da multiplicação**. Trad. Esther P. Grossi. Porto Alegre: Comunicação Impressa. 2001. 41p.

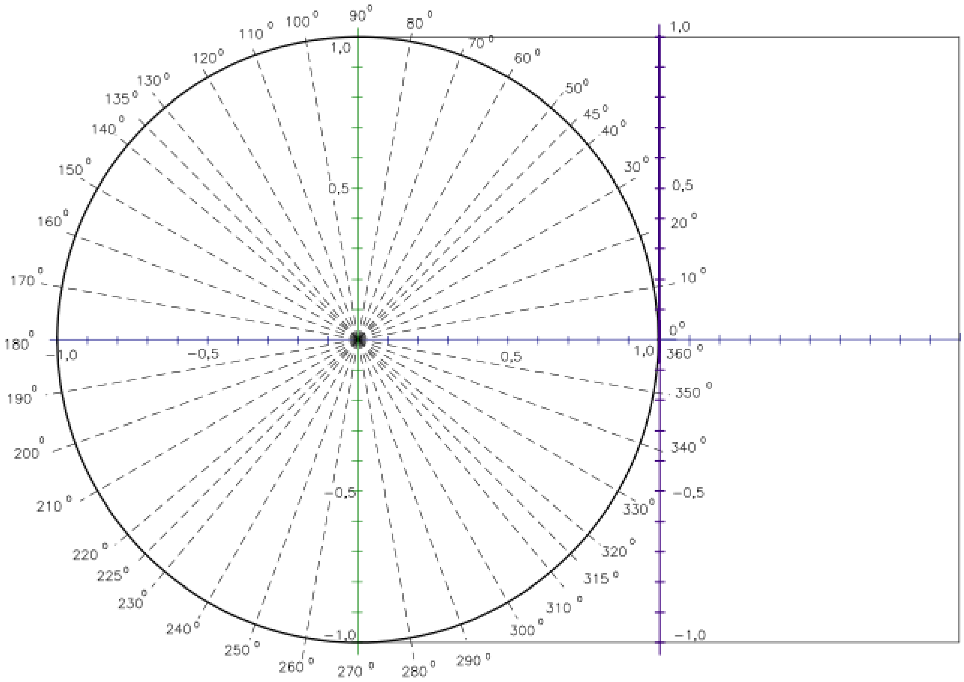
VERGNAUD, Gerard. Lev Vygotsky: **Pedagogo do nosso tempo.** Trad. Ayalla K. de Aguiar. Porto Alegre: Impresul. 2004. 109p.

6. Anexos

Anexo 01



Anexo 02



Obs.: Os anexos não estão em tamanho real.

APÊNDICE S – Material enviado para a Revista BOLEMA, em 27 de outubro de 2017.

O ensino e a aprendizagem da multiplicação de matrizes utilizando uma metodologia fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (TAS)

The teaching and learning of matrix multiplication employing a methodology founded on the Theory of Learning.

Marjúnia Édita Zimmer Klein[2]

José Cláudio Del Pino**

Resumo

Neste artigo, apresenta-se um estudo, realizado com 25 alunos do segundo ano do Ensino Médio, onde foi aplicada uma metodologia fundamentada na Teoria da Aprendizagem de Ausubel (TAS), tendo como objetivo promover uma aprendizagem significativa no ensino da multiplicação de matriz por matriz. A metodologia de análise foi a qualitativa, baseada na análise textual discursiva, no intuito de compreender e categorizar as respostas dos alunos nas atividades propostas. Percebeu-se que a utilização da TAS contemplou os aspectos conceituais e procedimentais do conteúdo além de favorecer a concentração, o envolvimento, a reflexão, a formulação de hipóteses e um melhor desempenho dos alunos nas avaliações formais da escola.

Palavras-chave: Ensino. Aprendizagem. Matemática. Matrizes. Significativo.

---

*Licenciatura em Ciências e Matemática pela UNISINOS. Especialização em Matemática pela UNISINOS. Mestrado em Educação em Ciências e Matemática pela FAFIS (Faculdade de Física da PUCRS), doutoranda do Programa de Pós-Graduação: Química da Vida e da Saúde da UFRGS (Universidade Federal do Rio Grande do Sul), professora do Ensino Médio, na Instituição Evangélica de Novo Hamburgo e professora do Ensino Superior na Universidade do Vale do Rio dos Sinos, UNISINOS. Rua Santa Sofia, 570, Bairro Ideal, Novo Hamburgo, RS, Brasil, CEP.: 93336-200. E-mail: marjunia.klein@gmail.com

**Licenciatura em Química e Químico PUCRS. Especialização em Ensino de Química UCS. Mestrado em Ciências Biológicas: Bioquímica UFRGS. Doutorado em Engenharia - Química de Biomassa UFRGS. Pós-doutorado em Educação Universidade de Aveiro - Portugal. Professor-orientador do PPG Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde UFRGS e do PPG Ensino UNIVATES. Bolsa de Produtividade em Pesquisa CNPq. Rua Prof. Cristiano Fischer, 2140/401, Bairro Partenon, Porto Alegre, RS, Brasil, CEP.: 91410-000. E-mail: delpinojc@yahoo.com.br

Abstract

This article presents a study that was carried out with 25 students in the second year of Intermediate Education in which a methodology founded on Ausubel's Theory of Learning was employed. The objective of this study was to promote meaningful learning in teaching matrix by matrix multiplication. The analysis methodology was qualitative, based on discursive textual analysis with the intent of comprehending and categorizing students' answers for the proposed activities. It was perceived that the employment of Theory of Meaningful Learning included the conceptual and procedural aspects of the content, in addition to favoring concentration, involvement, reflection, hypothesis formulation, and better student performance in the school's final exams.

Keywords: Teaching. Learning. Mathematics. Matrices. Meaningful.

1 Introdução

A pesquisa surgiu da preocupação em relação ao fato de que muitos alunos têm dificuldades no ensino e na aprendizagem de conceitos matemáticos envolvendo o conteúdo de matrizes. Além disso, os resultados em nível nacional e internacional relativos ao ensino e à aprendizagem não são animadores para o país. Institutos como o INEP e o PISA realizam, respectivamente, de dois em dois anos e de três em três anos pesquisas que demonstram essa situação, e a Matemática encontra-se incluída nessas avaliações.

O INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), criado em 2007, é o órgão federal que coordena as avaliações da aprendizagem e é também responsável pela divulgação de seus resultados. O PISA (Programme for International Student Assessment), ou seja, Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, que é coordenado pela OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico) oferece um perfil de conhecimentos e habilidades dos estudantes nos campos das ciências, da leitura e da matemática. Nesse ranking, estamos em oitava posição, considerando o último colocado.

Concomitantemente, ao realizar uma pesquisa bibliográfica em periódicos reconhecidos na área de educação matemática, verificou-se que há pouca produção científica publicada relacionando o conteúdo de matrizes com a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. Assim também aconteceu com teses e dissertações no site da CAPES (Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior), da SCIELO (Scientific Eletronic Library OnLine) e do LUME (Repositório Digital da Universidade Federal do Rio Grande do Sul). Os livros didáticos também apresentam, quando apresentam, uma contextualização de forma que a segunda matriz participante da multiplicação seja de uma coluna, fato que vamos citar ao longo desta pesquisa.

Acreditamos que a sala de aula constitui-se como o lugar mais apropriado para começar alguma mudança. Nesse sentido, citamos a orientação do relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI, segundo a qual, diante de um mundo tecnológico e em constante modificações, com um desenvolvimento espetacular da informação no que tange à fonte ou à rapidez, as crianças chegam à escola com muitas imagens pré-estabelecidas, que não exigem qualquer esforço para serem alcançadas. Tal fato deve fazer com que repensemos a nossa posição.

> Dessa forma, tendo perdido, em grande parte, a preeminência que tinham na educação, professores e escola encontram-se confrontados com novas tarefas: fazer da escola um lugar mais atraente para alunos e fornecer-lhes as chaves e uma compreensão verdadeira da sociedade da informação. (DELORS, 2012, p. 124).

Neste texto, em vista disso, compartilhamos as atividades e os resultados obtidos por meio da utilização de uma metodologia fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, Jopeph Novak e demais colaboradores.

Consideramos que o diferencial da pesquisa é o investimento sobre as concepções que os alunos já têm (subsunçores) e a sua utilização pelo professor para planejar e mediar as atividades subsequentes. Essas atividades foram previamente elaboradas e contemplaram os aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais, favorecendo ao aluno o papel de protagonista ao construir e evoluir no seu conhecimento.

2 Fundamentação teórica

A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel busca considerar aquilo que o aprendiz já sabe e orientá-lo de modo que consiga realizar conexões entre o novo conhecimento e os conhecimentos já assimilados pelo educando. De acordo com o autor:

> [...] a essência do processo de aprendizagem significativa é que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as ideias são relacionadas a algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição. (AUSUBEL et. al., 1980, p. 34).

Ausubel (1980) considera que a finalidade do ensino é a aprendizagem pelo aluno e que ambas, ensino e aprendizagem coexistem. Considera que é útil prestarmos atenção à relação recíproca que o ensino e a aprendizagem têm, ou seja a relação que inclui os objetivos do ensino, os efeitos do ensino e a avaliação do ensino. Nas palavras do autor:

> [...] é útil voltar-nos para aqueles aspectos do ensino e aprendizagem que têm uma relação dupla. Esta relação recíproca inclui os objetivos, os efeitos e a avaliação de ensino. Desta forma, embora seja verdadeiro que ensino é logicamente diferente da aprendizagem e pode ser analisado independentemente daquilo que os alunos aprendem, qual seria a vantagem prática desta análise em separada? A facilitação da aprendizagem é a própria finalidade do ensino. O ato de ensinar não se encerra em si mesmo, pois a finalidade do ensino é a aprendizagem por aparte do aluno; muito embora o insucesso na aprendizagem dos alunos não indique necessariamente a competência do professor, o produto da aprendizagem é ainda a única medida possível para se avaliar o mérito do ensino. (AUSUBEL, 1980, p. 12).

Ausubel (1980) destaca que os novos conceitos (imagens, símbolos, conceitos ou proposições) precisam relacionar-se com os conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aluno de maneira que contribuam para esclarecer, melhorar ou até rever aquilo que já está estabelecido. Só assim haverá a possibilidade de uma aprendizagem com significado. Para que para que isso aconteça, deve haver uma disposição do aluno e um material que seja potencialmente significativo:

> A aprendizagem significativa pressupõe que o aluno manifeste uma disposição para relacionar, de forma não arbitrária e substantiva, o novo material à estrutura cognitiva – e que o material aprendido seja potencialmente significativo – principalmente incorporável à sua estrutura de conhecimento[...] (AUSUBEL, 1980, p.34).

Fica claro que, além do aluno, o professor tem uma tarefa fundamental no desenrolar das atividades quer seja ao elaborar esse material e orientar o aluno na realização das atividades, seja ao observar a realização das atividades, fazendo anotações e, se necessário, intervindo de modo a reorientar os alunos quanto às suas possíveis dúvidas.

O material, então, a ser elaborado pelo professor em uma metodologia de aprendizagem significativa, deve respeitar, no mínimo, duas condições, segundo Ausubel (1980). Uma delas diz respeito ao fato de que:

- a natureza do conteúdo a ser aprendido deve ter significado lógico. Consideramos que vai partir de ideias mais simples até às mais complexas, além de estabelecer relações entre elas e poder relacionar-se de forma não arbitrária e substantiva às estruturas cognitivas já existentes. Observamos que a maioria dos conteúdos trabalhados na escola possui esta característica. Outra condição diz respeito

- à natureza da estrutura do aluno, que deve permitir, por meio de conceitos subsunçores (conhecimentos prévios), uma relação não arbitrária e substantiva entre o novo conhecimento e aquele que já existe.

É importante ressaltar que a aprendizagem significativa então, requer um material potencialmente significativo (com significado lógico) e uma pré-disposição do aluno para a aprendizagem. Respeitadas essas duas condições acreditamos no seu sucesso e na formação de um novo significado, que é chamado por Ausubel, de significado psicológico ou idiossincrático fenomenológico, muito particular a cada aluno.

Convém esclarecer sobre duas expressões que já foram utilizadas no texto diversas vezes, acerca das quais o próprio Ausubel faz várias citações. Trata-se dos termos “relação não arbitrária” e a “relação substantiva”, componentes que o material potencialmente significativo deve conter.

A relação não arbitrária significa que se o material é potencialmente significativo tem um caráter suficientemente não arbitrário (não aleatório), ou seja, é porque existe uma base adequada e suficientemente evidente para poder relacioná-lo com as ideias mais gerais, que formam um conjunto mais amplo de conhecimentos. Por exemplo, em Matemática, as informações, oriundas da trigonometria, utilizadas para determinar ângulos na vertical e ângulos na horizontal podem relacionar-se significativamente com altitudes, latitudes, posições geográficas, temperaturas e assim por diante, desencadeando uma série de generalizações.

A relação substantiva significa que se o material é potencialmente significativo permitirá que um símbolo ou um grupo de símbolos ideacionalmente equivalentes se relacionem à estrutura cognitiva do aluno sem alterar o seu significado. O mesmo conceito pode ser representado por uma linguagem sinônima. Como exemplo citamos, em Matemática, as notações para a palavra “metade” que poderiam ser: a notação decimal, 0,5, a notação de fração $\frac{1}{2}$, e a notação percentual 50%. Todas elas têm o mesmo significado.

Ausubel (1980) também destaca como recurso para um material potencialmente significativo, quando um determinado conteúdo não foi abordado, é totalmente novo para o aprendiz, os organizadores prévios. Seriam materiais (curiosidades, fatos históricos, reportagens, entre outros), que serviriam para introduzir um determinado conteúdo de modo que os conceitos posteriores possam ser aprendidos de maneira mais significativa.

> Organizadores prévios são materiais introdutórios, apresentados antes do material de aprendizagem em si. Contrariamente a sumários que são, de um modo geral apresentados ao mesmo nível de abstração, generalidade e abrangência,

> simplesmente destacando certos aspectos do assunto, organizadores são apresentados em um ´nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade. (MOREIRA, 2011, p.105).

Segundo o próprio Ausubel (1980), no entanto, a principal função de um organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, a fim de que o material possa ser aprendido de forma mais significativa, ou seja, organizadores prévios são úteis para facilitar a aprendizagem na medida em que eles funcionam como “pontes cognitivas”. Dessa forma, os organizadores prévios podem auxiliar o aprendiz a relacionar os conceitos já existentes na sua estrutura cognitiva com os conceitos a serem aprendidos.

Ausubel (1980) distingue três tipos de aprendizagem significativa: a aprendizagem representacional, a aprendizagem de conceitos, e a aprendizagem proposicional.

A aprendizagem representacional acontece quando se estabelece uma equivalência de significados entre os símbolos, palavras e objetos. Segundo Ausubel (1980, p.33), “tudo tem um nome e o nome significa aquilo que seu referente significa para uma determinada pessoa”. É considerada a aprendizagem do tipo mais básico. Por exemplo, quando uma criança associa o termo “casa”, seja pelo som da palavra seja quando lhe dizem “vamos para casa” e ela ”chega em casa”, faz associações e de forma significativa pois há uma relação não arbitrária e substantiva com ideias que já existentes na sua estrutura cognitiva.

A aprendizagem de conceitos, é por determinado aspecto, também uma aprendizagem representacional. Consideramos conceito como objetos, eventos, situações ou propriedades que possuem características peculiares e costumam ser designados por símbolos ou signos ou, até mesmo, palavras. Há duas formas de aprender um conceito: por formação, que geralmente acontece quando estamos na fase pré-escolar, quando somos crianças e somos submetidos com frequência a situações sucessivas que nos remetem a estabelecer atributos para aquele conceito. Poderíamos dizer que há uma relação empírico-concreta que nos faz assimilar os atributos de determinado conceito e realizar, discriminações, diferenciações, generalizações e até abstrações.

Entretanto, à medida que avançamos na faixa etária, vamos adquirindo novos conceitos por meio do processo de assimilação de conceito, ou seja, vamos associando os novos significados às ideias e aos atributos conceituais já existentes na estrutura cognitiva, sem necessariamente a influência de provas empíricas.

A aprendizagem proposicional tem como tarefa aprender o significado que está além das palavras, objetos, eventos ou situações. Consideramos que para compreender uma proposição, é necessário primeiro conhecer o significado das palavras que compõem determinada proposição. Como exemplo, podemos citar, em Matemática, o “Teorema de Pitágoras”, só poderemos compreendê-lo significativamente se soubermos o que é um triângulo retângulo, quais são seus elementos e suas características.

Tanto a aprendizagem por proposição quanto a aprendizagem por conceitos podem ser subordinativas, subordinativas derivativas, subordinativas correlativas, superordenada e combinatórias. Será subordinativa quando houver uma relação de subordinação, ou seja, quando estiver relacionada a outras proposições inclusivas mais gerais e já existentes na estrutura cognitiva do aluno. Será subordinativa correlativa quando o novo conceito for entendido como um exemplo, colaborando ou ilustrando uma proposição já aprendida, ou seja, quando o que é aprendido se torna uma extensão daquilo que já existe na estrutura cognitiva do aprendiz. O novo conceito se relaciona com os conceitos já existentes e completa-os, modifica-os, qualifica-os. Normalmente é o processo mais comum pelo qual um novo conceito é aprendido. Em Matemática, poderíamos citar como exemplo, o fato de quando um aluno aprende o conceito de divisão com números inteiros e mais tarde vai trabalhar com números racionais, esse conceito será ampliado, melhorado e usando como ancoradouro o conceito subsunçor de divisão já existente para ser aprimorado e aplicado em uma nova situação de aprendizagem.

Resumindo, na aprendizagem subordinativa derivativa, o conceito já existente não se modifica, mas sabemos que há novos conceitos relacionados, subordinados a ele. Na aprendizagem subordinativa correlativa o novo conceito tem a capacidade de modificar o conceito subsunçor já existente, qualificando-o e mostrando que o conceito de divisão, por exemplo, pode ser estendido e ter outras aplicações além daquelas que já haviam.

Na aprendizagem superordenada acontece quando um conceito mais geral ou inclusivo apóia-se em conceitos já existentes e faz uso destes, para assim, poderem ser incorporados à estrutura cognitiva do aluno. Poderíamos citar como exemplo, em Matemática, quando o aluno já tem o conceito de quadrado e retângulo e aprende o conceito de quadrilátero. Ele associará este aos conceitos já existentes, verificando que o quadrado e o retângulo também são quadriláteros. Tudo isso fica muito próximo da aprendizagem subordinativa. Poderíamos dizer que o aluno pode, ao mesmo tempo estar aprendendo novos conceitos por subordinação e realizando superordenações, uma vez que é tudo muito dinâmico e idiossincrático.

Se as novas proposições não estiverem relacionadas, subordinativamente ou superordenadamente a alguma ideia relevante na estrutura cognitiva do aprendiz não teremos o aparecimento de determinadas ideias. Nesse caso, teremos a aprendizagem combinatória. Logo no início, por não estarem relacionadas às ideias da estrutura cognitiva do aprendiz, podem se tornar mais difíceis de serem aprendidas ou de serem lembradas do que as proposições subordinativas e superordenadas. Muitas das proposições ensinadas nas disciplinas escolares (Matemática, Ciências, Ciências Humanas e Sociais) podem ser exemplo de uma aprendizagem combinatória. Ausubel afirma:

> “Embora adquiridas com maior dificuldade do que as proposições subordinativas e superordenadas, manifestam, uma vez adequadamente formuladas, a mesma estabilidade interna como qualquer ideia inclusiva ou superordenada na estrutura cognitiva.” (AUSUBEL, 1980, p.30).

As aprendizagens subordinativas, superordenadas e combinatórias são processos internos ao ser humano e ocorrem por meio de uma interação dos novos conceitos e os conceitos já existentes.

O resultado dessa interação é a aprendizagem significativa, ou seja, os conceitos subsunçores podem ser reestruturados (diferenciação progressiva) e talvez até, modificados. Já os novos conceitos vão sendo incorporados à estrutura cognitiva e adquirindo novos significados e com isso se reorganizando (reconciliação integrativa), surgindo assim uma nova ideia ou aprimorando a ideia anterior.

Dizemos que, quando a aprendizagem significativa acontece é porque também ocorreu a diferenciação progressiva mais relacionada com a aprendizagem subordinada e a reconciliação integrativa, mais relacionada com a aprendizagem superordenada e combinatória.

Já designamos, anteriormente o que Ausubel (1980) define como conceito: qualquer objeto, evento ou fenômeno com atributos peculiares, formando uma determinada categoria. Já foi mencionado que para que um determinado conceito possa ser incorporado à estrutura cognitiva do aprendiz ele deve ter interagido com os conceitos já existentes de modo substantivo e não arbitrário, colaborando ou até os modificando de forma idissiocrática (muito particular), produzindo, assim, um significado psicológico, ou seja, um significado real para o indivíduo.

Ao esclarecer sobre como acontece o processo de significação, Ausubel (1980) introduz o “princípio de assimilação” ou a “teoria da assimilação”. Segundo ele, a assimilação acontece entre os conceitos já existentes e os novos conceitos (a serem aprendidos), contribuindo para a diferenciação e a organização desses conceitos. Para ele, a assimilação é um processo contínuo e colabora para a retenção dos conceitos.

Um conceito, para Ausubel (1980), é adquirido de duas formas: por formação e por assimilação.

A formação de um conceito tem uma característica indutiva, geralmente acontece na fase pré-escolar, por experiências empíricas. Como exemplo, quando aprendemos o que é uma casa, um cachorro, um carro. Ausubel considera um tipo de aprendizagem por descoberta, envolvendo uma identificação indutiva dos atributos essenciais do conceito.

A assimilação de um conceito acontece de maneira muito particular, passa por algumas etapas, tais como a abstração, a diferenciação, a formulação e o teste de hipóteses, bem como generalizações, antes de ser incorporado à estrutura cognitiva do aprendiz e produzir um novo significado.

Vigostki também faz menção a duas formas de aquisição de conceitos em suas pesquisas:

> Os processos que levam à formação de conceitos evoluem ao longo de duas linhas principais. A primeira é a formação dos complexos: a criança agrupa diversos objetos sob o "nome de família" comum; esse processo passa por vários estágios. A segunda linha de desenvolvimento é a formação de "conceitos potenciais", baseados no isolamento de certos atributos comuns. Em ambos os casos, o emprego da palavra é parte integrante dos processos de desenvolvimento, e a palavra conserva a sua função diretiva na formação dos conceitos verdadeiros, aos quais esses processos conduzem. (VIGOSTKI, 2013, p. 101).

Ausubel (1980) defende que a assimilação é um processo progressivo, não é algo que termina após a ocorrência da aprendizagem significativa, mas tem efeito sobre a retenção dos conceitos. Os conceitos mais amplos, mais estáveis e diferenciados servem de ancoradouro às novas ideias e possibilitam a sua retenção. Com o passar do tempo, há uma tendência de que as novas ideias sejam incorporadas de forma espontânea e progressiva às estruturas cognitivas de tal modo que não conseguimos mais reproduzi-las individualmente. Acontece, para Ausubel, um processo de obliteração, ou seja, uma redução de informações a um denominador comum de tal maneira que as novas ideias sejam cada vez menos dissociáveis dos subsunçores, até que não estejam mais disponíveis como entidades individuais, mas agregadas e incorporadas à estrutura cognitiva do aluno, restando apenas o subsunçor modificado.

Já sabemos que há conceitos que se desenvolvem por formação e costumam acontecer, geralmente, na idade pré-escolar, e que há conceitos que são adquiridos por assimilação acontecendo, geralmente, na idade escolar e na fase adulta. Isso nos leva a pensar sobre a nossa atividade na sala de aula. Será que estamos utilizando e explorando com a devida propriedade os conceitos que os alunos já têm a respeito de um determinado conteúdo e assim provocando a interação entre deste e dos já existentes, de forma que aconteça uma aprendizagem significativa?

A maioria dos conteúdos desenvolvidos na escola encontra-se na forma de proposições que envolvem os conceitos e muitas vezes combinações entre eles, os quais por sua vez, dependem do desenvolvimento e da elaboração dos significados que os conceitos têm. Quando ensinamos novas proposições, exigimos mais do que aprender significados, mas sim, uma interação entre eles e o seu aprimoramento, possibilitando-se gerar uma aprendizagem significativa. Essa é, para Ausubel, a essência do processo de assimilação, quando há interação entre o novo conhecimento e os conceitos ou proposições já aprendidas. Isso resulta em uma modificação tanto do significado da nova informação quanto do significado do conceito ou da proposição aos quais está relacionada. Observamos uma diferenciação progressiva dos conceitos ou proposições, ou seja, uma assimilação sequencial (do conceito de menor inclusividade para o conceito de maior inclusividade), tendo como consequência o aprimoramento dos significados já existentes para posterior utilização, se necessário, em outra aprendizagem. Observamos também uma reconciliação integradora, pois, à medida que o processo de assimilação continua, os novos significados vão sendo incorporados a ideias básicas de tal forma que delas não mais se dissociem.

A teoria da assimilação também pode nos auxiliar a compreender tanto o fenômeno da memorização quanto o da aprendizagem significativa, pois é responsável pelo tempo em que uma ideia aprendida de forma significativa fica retida e pela forma como o conhecimento está organizado na estrutura cognitiva do aprendiz.

O tempo e a fixação de um conceito, segundo Ausubel (1980), podem sofrer a influência:

- dos conceitos nos quais está apoiado (ideias-âncora), ou seja, se o estudante já tem um conceito estável, o novo conceito vai alterar o equilíbrio já existente incorporando-se a ele;

- da continuidade dessa interação entre os conceitos, que de certa forma, mantém-se e aprimora-se na estrutura cognitiva original, permitindo relações entre o antes, o depois e possíveis conceitos semelhantes a ele relacionados;

- do fato de o novo conceito encontrar na estrutura cognitiva do aprendiz uma relação não arbitrária e substantiva que facilite a aquisição do seu significado e colabore para o seu processo de memorização.

Em suma, a existência de um conceito subsunçor na estrutura cognitiva do aprendiz ao qual o novo conceito possa relacionar-se pode auxiliar no processo de memorização.

A assimilação auxilia a compreender a forma como o conhecimento fica organizado, pois conceitos mais estáveis, mais gerais, têm a tendência de se manterem no topo de uma possível pirâmide e serem aprimorados pelos de menor grau de estabilidade.É, o que Ausubel chama de organização sequencial da diferenciação progressiva dos conceitos.

Novak e Gowin, colaboradores da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, contribuem com ela no momento em que introduzem duas estratégias instrucionais, o mapeamento conceitual e o “Vê” epistemológico, tendo como objetivo ampliar ainda mais o conceito de aprendizagem significativa e facilitar essa aprendizagem.

> Ausubel enfatiza a construção cognitiva por meio da aprendizagem significativa. Novak assume que a aprendizagem significativa subjaz à integração construtiva de pensamentos, sentimentos e ações; essa integração conduz ao engrandecimento (empowerment) humano. Gowin propõe uma relação triádica entre aluno, materiais educativos e professor, cujo objetivo é compartilhar significados. Quando esse objetivo é alcançado, o aluno está pronto para decidir se quer ou não aprender significativamente. (MOREIRA, 2006, p. 165).

Considera-se o diagrama “Vê” como um recurso instrucional para colaborar na aprendizagem significativa uma vez que ele nos auxilia a compreender que o conhecimento é uma estrutura organizada de conceitos e, portanto, pode ser diagramado.

O diagrama “Vê” foi introduzido por Gowin (apud MOREIRA, 2017), como uma ferramenta instrucional que permite conectar conceitos, eventos e fatos. Os conceitos são definidos por Gowin como: “[...]signos/símbolos que apontam regularidades em eventos e que utilizamos para pensar, pesquisar, aprender, enfim, para dar respostas rotineiras e estáveis ao fluxo de eventos.” (apud MOREIRA, 2006, p. 62).

Para Gowin cada evento no diagrama “Vê” abrange o domínio conceitual e o domínio procedimental ou metodológico. O domínio metodológico contempla todos os registros do pesquisador em relação à produção do conhecimento. Corresponde ao “fazer” da pesquisa. Por meio do domínio metodológico conseguimos responder à questão investigada e definir qual o seu valor. O domínio conceitual, corresponde ao “pensar” da pesquisa. E, esclarece quais os princípios, as teorias e as filosofias usados na pesquisa. Ambos, estão em interação, que é necessária para que se chegue a uma resposta à questão de pesquisa.

Partindo do que foi exposto e acreditando que ambos os autores têm a contribuir com a aprendizagem significativa de Ausubel, adotamos o mapeamento conceitual como um recurso instrucional para a organização e elaboração das atividades.

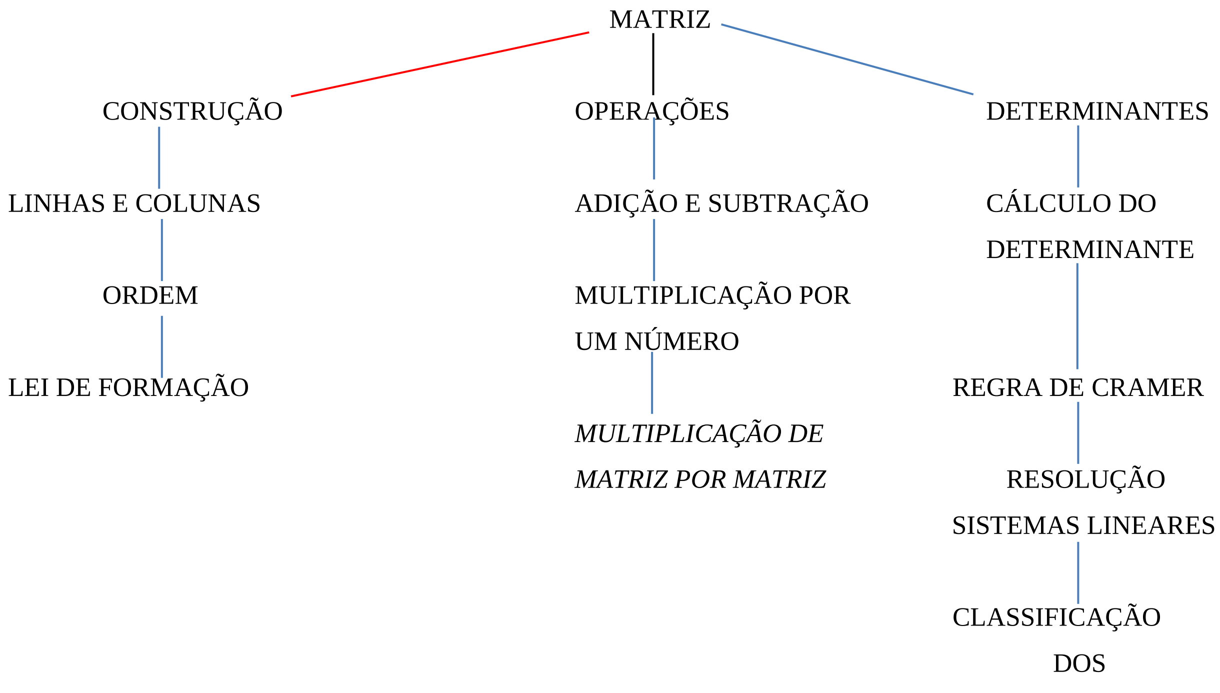
3 Descrição da metodologia

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, baseada na análise Textual Discursiva (ATD), tendo como objetivo compreender e analisar as respostas dos alunos nas atividades propostas e promovendo, sempre que necessário, possíveis correções. Como dizem Moraes e Galiazzi (2007, p.56), "Podemos constatar que toda a pesquisa pretende uma ampliação da compreensão ou da capacidade de explicação dos fenômenos que investiga. A compreensão geralmente é associada às pesquisas qualitativas".

O público-alvo foi uma turma regular do Ensino Médio, em uma escola particular, envolvendo 25 alunos, durante os cinco períodos de Matemática da semana e com duração de três semanas. Os alunos têm entre 16 e 17 anos, sendo a maioria alunos regulares da escola desde o Ensino Fundamental. Apenas dois deles vieram de outras escolas particulares no início do ano letivo.

Na primeira etapa, a partir da fundamentação teórica, construímos um recurso instrucional, o mapa conceitual (Figura 1) do conteúdo de matrizes, tendo como objetivo identificar quais os conceitos mais inclusivos e seus derivados. Segundo Moreira (2006, p. 10) "Mapas conceituais devem ser entendidos como diagramas bidimensionais que procuram mostrar relações hierárquicas entre conceitos de um corpo de conhecimentos e que derivam sua existência da própria estrutura conceitual desse corpo de conhecimentos". Depois, planejamos atividades que privilegiassem a participação dos alunos no conteúdo de multiplicação de matriz por matriz ao longo das próximas três semanas.

MAPA CONCEITUAL DO CONTEÚDO DE MATRIZES



SISTEMAS LINEARES

Figura 1: Mapa conceitual do conteúdo de Matriz
Fonte: os autores
Comentário: Neste mapa conceitual, os conteúdos encontram-se em uma hierarquia, segundo a qual os mais inclusivos estão na primeira linha e em seguida os menos inclusivos, nem por isso menos importantes. Em itálico, o conteúdo abordado neste artigo.

Na segunda etapa, solicitamos que os alunos, em duplas, resolvessem os problemas propostos (APÊNDICE A). Foi feita a análise, em sala de aula, das diferentes representações que surgiram, definindo, em conjunto, como deveria acontecer a multiplicação de matriz por matriz, realizando, após, exercícios do livro-texto. Nessa etapa utilizamos doze horas-aula.

Na terceira etapa, analisamos os resultados advindos de avaliações, que incluíam este conteúdo; convém esclarecer que a turma pertencia a uma situação regular de ensino e por este motivo, dentro do contexto escolar, era submetida a avaliações periódicas, que serão esclarecidas no momento oportuno. Nesta etapa, utilizamos três horas aula.

4 Discussão dos resultados

A primeira atividade da segunda etapa envolvia três problemas relacionados à multiplicação de matriz por matriz, em um primeiro momento, e depois mais dois problemas foram encaminhados. O primeiro problema tratava sobre a pontuação de times em um jogo de basquete de acordo com o valor de cada cesta. O segundo tratava sobre uma compra de produtos alimentícios em dois supermercados por dois orfanatos. O terceiro era sobre a publicação de livros de História Geral e História do Brasil por uma editora em volumes e o custo disso.

Todos os alunos da turma responderam corretamente à notação matricial dos três problemas, bem como a ordem de cada matriz envolvida no problema. Acreditamos que isso se deva ao fato de já termos trabalhado anteriormente a notação matricial utilizando a mesma metodologia. Em relação ao primeiro problema quando orientados a escreverem sobre o procedimento utilizado para resolvê-lo, todos responderam que *"deveriam multiplicar os lances livres por 1, as cestas de dois pontos por dois e as cestas de três pontos por três, somando os valores conforme a linha de cada equipe"*, observando que também representaram essa multiplicação.

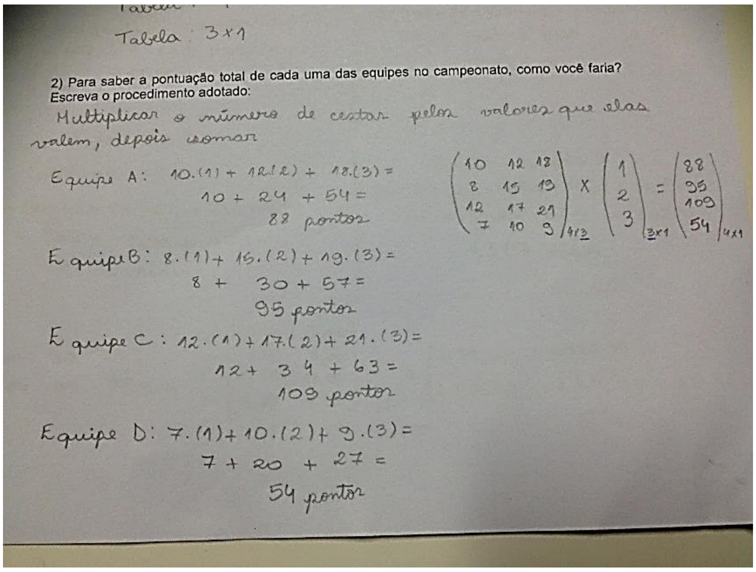


Tabela: 3x1

2) Para saber a pontuação total de cada uma das equipes no campeonato, como você faria?
Escreva o procedimento adotado:

Multiplicar o número de cestas pelos valores que elas valem, depois somar

Equipe A: $10.(1) + 12.(2) + 18.(3) =$
$10 + 24 + 54 =$
88 pontos

$$\begin{pmatrix} 10 & 12 & 18 \\ 8 & 15 & 19 \\ 12 & 17 & 21 \\ 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}_{4x3} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} 88 \\ 95 \\ 109 \\ 54 \end{pmatrix}_{4x1}$$

Equipe B: $8.(1) + 15.(2) + 19.(3) =$
$8 + 30 + 57 =$
95 pontos

Equipe C: $12.(1) + 17.(2) + 21.(3) =$
$12 + 34 + 63 =$
109 pontos

Equipe D: $7.(1) + 10.(2) + 9.(3) =$
$7 + 20 + 27 =$
54 pontos

Figura 2: representação do problema I realizada por um aluno
Fonte: os autores

Percebemos que, primeiro, os alunos realizaram os cálculos e depois, quando solicitados, escreveram a notação matricial. Eles realizaram uma diferenciação progressiva, no momento em que conseguiram associar a escrita matricial para os resultados obtidos, evoluindo o seu conhecimento sobre matrizes. Surge o que Ausubel chama de aprendizagem representacional derivativa, pois os novos conhecimentos complementam os conceitos anteriores.

Em relação ao segundo problema na descrição do procedimento os 22 alunos responderam que *"multiplicando a quantidade de quilos necessários pelo seu valor por quilo. Após, somaria os valores de todos os produtos na mesma coluna, mesmo supermercado, fazendo separadamente para cada supermercado".* Acreditamos que, para esses alunos, a diferenciação progressiva foi tranquila. Apesar de a segunda matriz ter duas colunas, prevaleceram aos conceitos subsunçores anteriores, fato que, para eles, não causou diferença. Porém, três alunos somaram as compras dos dois supermercados dando o resultado por supermercado (como resultado uma matriz de duas linhas e uma coluna, quando deveria ser de duas linhas e duas colunas). Isso fez com que se repensasse a ordem das tarefas e foi feita uma reestrutura, acrescentando mais uma ordem às tarefas: que antes de escrever a matriz resultante, o aluno escreva uma tabela com os resultados obtidos por orfanato em cada supermercado e depois reescreva esta tabela na forma de matriz. Abaixo, ilustramos o fato ocorrido.

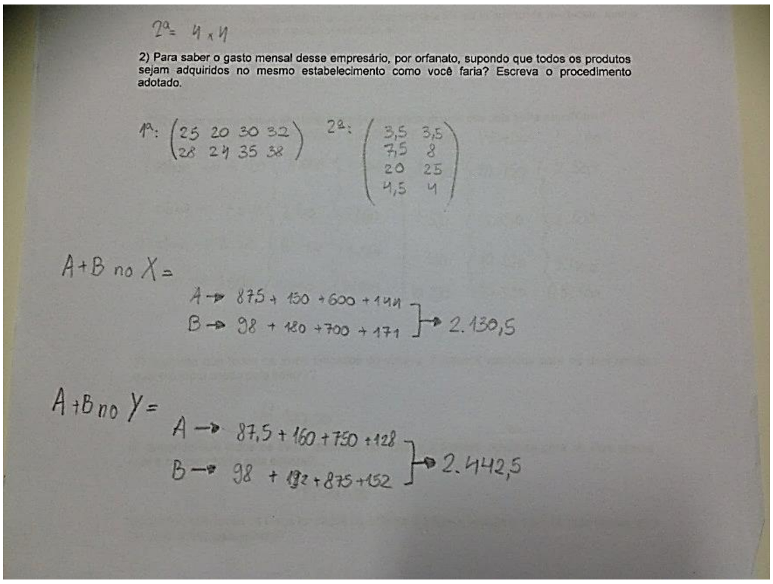


Figura 3: representação do problema II por um aluno
Fonte: os autores

Em relação ao terceiro problema verificamos que todos acertaram a notação matricial das matrizes envolvidas na multiplicação, visto que alguns ainda resistiam na notação, assim como no problema dois, pois havia mais colunas na segunda matriz participante do produto.

Discutimos, em sala de aula, os resultados obtidos em cada um dos três primeiros problemas e percebemos que, enquanto alguns alunos já conseguiam identificar o que estava acontecendo entre os problemas e as matrizes que os representavam, outros alunos ainda tinham dificuldades e necessitavam de um tempo maior e de outros exemplos. Em termos de aprendizagem significativa, enquanto alguns alunos já haviam entendido que a multiplicação de matriz por matriz era um conceito subordinado e correlativo à escrita da notação matricial e por isso conseguiam utilizar essa escrita como subsunçor para resolver os problemas propostos, outros ainda demonstravam dificuldades em percebê-lo.

Providenciamos mais uma atividade contendo mais dois problemas. O primeiro envolvia um laboratório que fabricava remédios por dosagem de três ingredientes; o segundo problema envolvia a quantidade de medalhas obtidas por alguns países em uma olimpíada e os pontos por elas determinados. Novamente, a notação das matrizes em ambos os problemas foi representada corretamente, mas a notação da matriz produto exigia atenção, pois alguns alunos, quando havia mais de uma coluna ainda demonstravam certa dificuldade de representá-la, o que reforçou a necessidade, já sugerida anteriormente, de se fazer uma representação inicial na forma de tabela e depois uma representação matricial dessa tabela. Isso foi reforçado, no quadro, pela professora, no momento em que se discutiam as representações dos alunos.

Em todas as situações-problema sugeridas ficou claro o fato de que o professor deve oportunizar situações nas quais o aluno tenha a chance de manifestar-se, seja de forma oral, seja de forma escrita, e faça a escuta e a análise do desempenho dos alunos nessas situações.

> Em geral, os alunos não são capazes de explicar ou mesmo expressar em linguagem natural seus teoremas e conceitos-em-ação. Na abordagem de uma situação, os dados a serem trabalhados e a sequência de cálculos a serem feitos dependem de teoremas-em-ação e da identificação de diferentes tipos de elementos pertinentes. A maioria desses conceitos e teoremas-em-ação permanecem totalmente implícitos, mas eles podem também ser explícitos ou tornarem-se explícitos e aí entra o ensino: ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos e cientificamente aceitos, a partir do conhecimento implícito (MOREIRA, 2004, p.17).

Esse poder analítico do professor só pode ser reforçado na medida em que as atividades permitam a explicitação do pensamento implícito dos alunos.

Após rediscutirmos, em sala de aula, chegamos a um denominador comum. Definimos, em conjunto, como acontece a multiplicação de matriz por matriz, ficando claro a questão de que o número de colunas da primeira matriz integrante do produto tem que ser igual ao número de linhas da segunda matriz. Essa condição geralmente é definida pelo professor quando se introduz a multiplicação de matriz por matriz de modo mecânico e sem significado. Mas, como as atividades elaboradas e realizadas propiciaram uma ação em tempo real e a escuta das representações feitas pelos alunos, essa condição apareceu de maneira lógica, clara e natural.

> Quando se fala em aprendizagem segundo o construto construtivista, está se encarando a aprendizagem como um processo de armazenamento de informação, condensação em classes mais genéricas de conhecimentos, que são incorporados a uma estrutura na mente do indivíduo, de modo que esta possa ser manipulada e utilizada no futuro. É a habilidade de organização das informações que deve ser desenvolvida. (MOREIA-MASINI, 2016, p. 13).

Seguiram-se exercícios do livro-texto, adotado pela escola, sobre o conteúdo de multiplicação de matriz por matriz e exercícios de processos seletivos (é uma exigência da escola que se contemplem exercícios de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM).

Na terceira e última etapa, tínhamos a necessidade de colher evidências individuais sobre os efeitos dessa metodologia. Não queríamos apenas notas, apesar do regimento institucional nos manter atrelados a uma nota. Tínhamos indícios, pela participação em sala de aula, durante a realização das atividades e durante a realização dos exercícios de que a aprendizagem com significado e a consolidação do conteúdo havia acontecido, mas era necessário verificar e respeitando-se as normas da escola, foram elaboradas duas atividades avaliativas, que foram categorizadas.

Todas as questões envolvidas nas atividades avaliativas contemplavam os aspectos conceituais e procedimentais do conteúdo, permitindo uma descrição da ação interpretativa do aluno à luz dos problemas propostos. Avaliamos o desempenho correto na primeira avaliação que continha oito questões. A avaliação foi realizada em sala de aula, na presença da professora e com necessidade de se apresentarem os respectivos desenvolvimentos em cinco das oito questões. O percentual de acertos na primeira questão foi de 66%; na segunda, 85%; na terceira, 80%; na quarta, 90%; na quinta, 80%; na sexta, 95%; na sétima, 95% e na oitava, 95%. Trata-se de um desempenho excelente, demonstrando que os resultados obtidos por meio dessa metodologia são consideráveis e podem orientar para uma aprendizagem de real significado para o aluno.

A segunda atividade avaliativa fazia parte de um projeto que a escola possui, chamado Projeto de Avaliação Sistemática – PAS, que acontece, em média de três em três semanas e contempla vários componentes curriculares ao mesmo tempo, em uma única prova, objetiva (estilo ENEM e vestibulares), cuja duração é de três horas-aulas, na qual cada componente tem cinco questões a serem resolvidas com peso dois, totalizando a nota dez. As questões de Matemática para esta avaliação foram elaboradas a partir do conteúdo de multiplicação de matriz por matriz. A nota média dos alunos foi de oito vírgula quatro, desempenho também considerado muito bom.

Considerações finais

O objetivo da nossa pesquisa era utilizar uma metodologia de ensino baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel e verificar se essa metodologia poderia causar uma aprendizagem de real significado, melhorando o desempenho em um determinado conteúdo, qual seja, a multiplicação de matriz por matriz.

Assim sendo, organizamos e programamos as atividades de sala de aula, privilegiando:

- a construção de um mapa conceitual que organiza os conteúdos, dos mais inclusivos para os menos inclusivos;
- a elaboração de atividades potencialmente significativas que desafiassem o aluno a resolvê-las e respeitassem a diferenciação progressiva do conteúdo, fazendo com que utilizassem conceitos já assimilados;
- o respeito ao tempo necessário para a realização com a devida atenção para a escuta das manifestações orais ou escritas dos alunos, ou seja, verificando se eles estão relacionando os novos conceitos aos conceitos já aprendidos, aprimorando-os (reconciliação integrativa);

- a intervenção, sempre que necessária, para que um novo tópico não seja introduzido antes do que está sendo trabalhado não seja compreendido, ou seja, a consolidação de ideias;
- o incentivo à formulação de hipóteses e à argumentação, com momento de discussão;
- a utilização de estratégias de sociabilidade, permitindo a realização das tarefas de forma individual e em grupos;
- o incentivo à motivação, por meio de organizadores prévios, de modo que sirvam de ponte aos novos conteúdos;
- a avaliação dos resultados considerada como um momento desafiador e de reflexão, em que o aluno terá que colocar à prova o seu conhecimento;

Percebemos que, agindo dessa forma e não tendo a pretensão de afirmar que essa é a única forma de se alcançar uma aprendizagem de real significado, os alunos tiveram a oportunidade de concentrarem-se nas atividades, respeitando-se o tempo para isso, explicitar as suas ideias, levantando hipóteses e argumentando e finalizarem com uma conclusão sobre o conteúdo.

Não bastassem essas evidências de sala de aula, também tivemos um desempenho muito bom nas avaliações realizadas de forma individual, as quais já foram citadas.

Considerando o aprender como uma aquisição organizada de conhecimentos relacionados e estabilizados com a estrutura cognitiva do aluno de forma que ele possa utilizá-los em situações do cotidiano e como forma de progressão para alcançar a plena realização profissional, queremos afirmar que esse grupo de alunos aprendeu a multiplicação de matriz por matriz e conseguirá fazer uso dela quando solicitado. A aprendizagem significativa ocorreu de forma que o aluno foi o protagonista da sua aprendizagem.

> O professor pode somente apresentar ideias de modo tão significativo quanto possível. A tarefa de organizar novas ideias num quadro de referência pessoal só pode ser realizada pelo aluno. Conclui-se, portanto, que ideias impostas aos alunos ou aceitas de modo passivo e não crítico, não poderão ser significativas no verdadeiro sentido da palavra (AUSUBEL, 1980, p. 335).

Sabemos que muitos fatores podem interferir no ensino e na aprendizagem, mas acreditamos que, diante de estatísticas nada animadoras, precisávamos realizar algo e foi por meio da metodologia que alcançamos os resultados aqui compartilhados. Verificamos que uma metodologia baseada na TAS de Ausubel causa uma mudança de postura no aluno e no professor, incentiva a formulação de hipóteses e a participação, além de contemplar os aspectos conceituais e procedimentais do conteúdo.

Acreditamos que esta pesquisa aponta para outra forma de trabalho em sala de aula e desejamos, sinceramente, que ela possa ter causado um momento de reflexão para quem a leu e, assim, de alguma forma, vir a contribuir no ensino e na aprendizagem de matrizes.

Referências

AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph, D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana Ltda. 1980.

DELORS, Jacques. **Educação: um tesouro a descobrir.** São Paulo: Cortez. 2012.

VIGOTSKI, L. V., **Pensamento e Linguagem.** São Paulo: Martins Fontes. 2013.

MORAES, R.; GALIAZZI, M.C. **Análise textual Discursiva**. Ijuí: UNIJUí, 2007.

MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias de Aprendizagem**. Porto Alegre: Pedagógica e Universitária, 2017.

_________, Marco Antonio e MASINI, Elcie F. S. Aprendizagem significativa. A teoria de Ausubel. São Paulo: Centauro, 2016.

_________, Marco Antonio. **Mapas Conceituais e Diagrama V**. Porto Alegre: UFRGS, 2006.

_________, Marco Antonio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.** Brasília: Universidade de Brasília, 2006.

_________, Marco Antonio. **Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares.** São Paulo: Livraria da Física, 2011.

_________, Marco Antonio. **A Teoria dos Campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a investigação nesta área.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.

MEC. Instituto Nacional e Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. <http://portal.inep.gov.br/web/guest/ideb>. Acesso:set. 2017.

PISA. Results in Focous. <http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf.> Acesso: set. 2017.

APÊNDICE A – Atividade para introduzir a multiplicação de matriz por matriz

I) Situação-problema I: Tarefas:

Observe as tabelas abaixo e responda o que se pede:

A primeira tabela mostra o número de cestas de cada tipo convertidas por quatro equipes que disputaram um campeonato:

Equipe	Lance Livre	Cesta de dois pontos	Cesta de três pontos
A	10	12	18
B	8	15	19
C	12	17	21
D	7	10	9

E a segunda tabela mostra, de acordo com as regas do basquetebol, que há uma determinada pontuação para cada bola encestada. Uma cesta de lance livre (cobranças de infrações) vale 1 ponto, uma bola encestada a uma distância igual ou inferior a 6,25 m do cesto (área dos dois pontos) vale 2 pontos e uma bola encestada a uma distância superior a 6,25m do cesto (área dos três pontos) vale 3 pontos> Essa informações podem ser organizadas numa tabela:

Tipo de cesta	Pontos obtidos
Lance livre	1
Cesta da área de dois pontos	2
Cesta da área de três pontos	3

Responda:

1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

2) Para saber a pontuação total de cada uma das equipes no campeonato, como você faria? Escreva o procedimento adotado:

II) Situação-problema II:

Um empresário oferece mensalmente alimentos para dois orfanatos, conforme a tabela abaixo.

Orfanato	Arroz (kg)	Feijão (Kg)	Carne (kg)	Batata (kg)
A	25	20	30	32
B	28	24	35	38

O empresário faz a cotação de preços em dois supermercados. A cotação atual encontra-se abaixo.

Produto (kg)	Supermercado X	Supermercado Y
Arroz	3,50	3,50
Feijão	7,50	8,00
Carne	20,00	25,00
Batata	4,50	4,00

Responda:

1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

2) Para saber o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo estabelecimento como você faria? Escreva o procedimento adotado.

III) Situação-problema III:

Uma editora pretende publicar uma coleção de livros de História do Brasil e História Geral em duas versões : Volumes 1,2,3 e único. A primeira tabela mostra a quantidade de cada volume a ser lançada.

Quantidade de exemplares (em milhares de unidades)

Volume	História do Brasil	História Geral
1	200	250
2	220	230
3	260	240
Único	300	310

A segunda tabela mostra o preço de custo e o preço de venda de cada um dos exemplares.

Preço por exemplar (em reais)

Tema	Custo(R$)	Venda (R$)
História do Brasil	32,00	40,00
História Geral	33,00	43,00

Responda:

1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

2) Quais os valores totais de custo e venda para cada volume dos dois tema escolhidos?

3) Supondo que todos os livros lançados do volume 1 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?

4) Supondo que todos os livros lançados do volume 2 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?

5) Supondo que todos os livros lançados do volume 3 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?

Situação-problema IV) Um laboratório que fabrica, dentre outros, os remédios a,b e c. Para a produção de 1 unidade a são necessários 3g do ingrediente x, 7 g do ingrediente y e 10 g do ingrediente z. Com relação ao remédio b são necessários 2g de x, 4g de y e 5g de z. E, para o remédio c precisamos de 5g de x, 1g de y e 6g de z.

Dispondo os dados em forma de tabela, temos:

	a	b	c
x	3	2	5
y	7	4	1
z	10	5	

Supondo que o consumo dos três remédios, nos meses de junho e julho, seja:

- junho : 80 unidade de a, 100 de b e 150 de c;

- julho: 50 unidades de a, 120 de b e 90 de c.

Dispondo estes dados em forma de tabela:

	junho	julho
a	80	50
b	100	120
c	150	90

Responda:

a) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

b) Quantos gramas do remédio x precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?

c) Quantos gramas do remédio y precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?

d) Quantos gramas do remédio z precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?

Situação-problema V) Abaixo, temos uma tabela com o número total de medalhas de alguns países numa determinada olimpíada e outra tabela que fornece o peso (em pontos) de cada medalha.

Tabela com o número de medalhas de cada país

	Ouro	Prata	Bronze
	3	3	5
Quênia	2	3	2
México	1	2	3
Tailândia	1	0	2
Brasil	0	6	6

Tabela com os pontos por medalha

	Peso
Ouro	3
Prata	2
Bronze	1

Responda:

a) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

b) Determine a pontuação de cada país e assinale Falso ou Verdadeiro para cada alternativa que diz respeito a essa nova tabela que vais formar (a tabela de pontos):

(   ) A pontuação do Brasil seria superior à do Quênia, México e Tailândia.

(   ) A pontuação do Brasil seria inferior apenas à do Quênia e da Espanha.

(   ) O Brasil estaria melhor colocado em relação aos demais países por obter o maior número de medalhas.

(   ) Na classificação geral, o país que tem o maior número de pontos é a Espanha.

(   ) A pontuação do México seria apenas inferior à do Brasil e da Espanha.

APÊNDICE T – Material para enviado e aprovado para o Festival da Matemática, São Leopoldo.

FESTIVAL DA MATEMÁTICA DE 25 ATÉ 28 DE OUTUBRO DE 2017 - UNISINOS

1. Dados da proposta: APRESENTAÇÃO ORAL DE CURTA DURAÇÃO

Título: Construção de uma régua trigonométrica
Nome e Instituição de origem do responsável: Marjúnia Édita Zimmer Klein
Professora da UNISINOS – Universidade do Vale do Rio dos Sinos – São Leopoldo e doutoranda do PPG: Química da Vida e da Saúde da UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre.
Contatos do responsável: Professora Ms. Marjúnia Édita Zimmer Klein
e-mail:marjunia.klein@gmail.com
Telefone: (051) 999 78 00 85
Demais participantes: Professor Dr.José Cláudio Del Pino – Professor do PPG: Química da Vida e da Saúde da UFRGS
e-mail: delpinojc@yahoo.com.br
Telefone 051) 998 08 52 37

2. Tipo de atividade
(x) Apresentação oral de curta duração

3. Recursos especiais
A atividade não necessita de recursos especiais

4. Descrição detalhada da atividade

O objetivo é a definição das funções trigonométricas na circunferência trigonométrica e a construção de uma circunferência trigonométrica para uso individual, a partir de uma matriz criada e fornecida pela autora, em que possam ser visualizados os valores notáveis e a redução ao primeiro quadrante. Nessa atividade, os participantes vão visualizar, na circunferência trigonométrica, os valores notáveis e por sua vez os triângulos semelhantes em cada quadrante. Perceberão a repetição de valores, porém com mudança de sinal e, assim, definir-se-ão as regras para a redução ao primeiro quadrante.

Obs.: Esta atividade já foi apresentada no XII ENEM, em São Paulo, em 2016, na Universidade Cruzeiro do Sul e houve uma participação muito positiva dos integrantes do minicurso ministrado no referido encontro. Eles gostaram da proposta de confecção do material para uso individual dos alunos em sala de aula.

5.Existe algum impedimento para apresentar a proposta em algum dos dias do evento (25 a 25 de outubro)?
Pela manhã ministro aulas, das 7h 30min até as 12h na quarta, na quinta e na sexta e quinta à tarde das 13h 20min até as 15h. Então o melhor horário seria na quarta à tarde ou sexta à tarde. À noite ministro aulas também das 19h 30min até 22h 23 min.

6.Se algum participante for menor de idade...
Não há participantes menores de idade.

APÊNDICE U – Material enviado e aprovado para o Festival da Matematica, São Leopoldo.

FESTIVAL DA MATEMÁTICA DE 25 ATÉ 28 DE OUTUBRO DE 2017

1. Dados da proposta: OFICINA DE CURTA DURAÇÃO
Título: Trigonometria na prática, medindo alturas.
Nome e Instituição de origem do responsável: Marjúnia Édita Zimmer Klein
Professora da UNISINOS – Universidade do Vale do Rio dos Sinos – São Leopoldo e doutoranda do PPG: Química da Vida e da Saúde da UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre.
Contatos do responsável: Professora Ms. Marjúnia Édita Zimmer Klein
e-mail:marjunia.klein@gmail.com
Telefone: (051) 999 78 00 85
Demais participantes: Professor Dr.José Cláudio Del Pino – Professor do PPG: Química da Vida e da Saúde da UFRGS
e-mail: delpinojc@yahoo.com.br
Telefone: (051) 998 08 52 37
2. Tipo de atividade
(x) Oficina de curta duração
3. Recursos especiais
A atividade não necessita de recursos especiais
4. Descrição detalhada da atividade

Primeiro momento: O objetivo dessa atividade é a definição das razões trigonométricas a partir das medidas de ângulos (utilizando o transferidor) e lados (utilizado a régua) nos triângulos retângulos que serão fornecidos pela autora. Os participantes, individualmente receberão triângulos de E.V.A. e deverão medir lados (régua) e ângulos (transferidor), para depois verificarem quais deles têm triângulos com mesma medida angular e se reunirem a partir dessa característica. Em seguida, já reunidos, vão realizar algumas discussões sobre o motivo de estarem no mesmo grupo e vão definir um ângulo de referência em cada triângulo e, a partir dele, calcular as razões trigonométricas. Por fim, vão aparecer, além dos valores notáveis, outros valores, mas o mais importante é que no final verificam que é a partir do ângulo escolhido, não por causa dos lados que as razões trigonométricas permanecem constantes.

Segundo momento: O objetivo dessa atividade é a construção de um astrolábio e a sua utilização para determinar alturas de objetos escolhidos pelos participantes. Essa atividade acontecerá na parte externa à sala de aula.

O astrolábio é um instrumento utilizado para medir alturas (ângulos na vertical), aparece junto com a alidade (instrumento que mede ângulos na horizontal) em outro instrumento muito utilizado pelos agrimensores, engenheiros e arquitetos que é o teodolito. Sua construção enriquece o conteúdo trabalhado anteriormente (as razões trigonométricas) e justifica o seu valor. Para a confecção do mesmo serão utilizados, por grupo (sugestão é de 4 componentes), um transferidor, um pedaço de barbante, fita métrica, fita adesiva, caneta "bic" vazia e material para anotações. Após a construção, a professora explica como funciona o seu uso e resgata um pouco do seu histórico. Em seguida, os participantes irão para a parte externa da sala e realizarão medidas, utilizando o astrolábio, que lhes permitirá, a partir de uma das razões trigonométricas determinar a medida da altura de um determinado objeto. Anotações serão feitas e compartilhadas pelos grupos com um fechamento propiciado pela professora.

Obs.: Esta atividade já foi apresentada no XII ENEM, em São Paulo, em 2016, na Universidade Cruzeiro do Sul e houve uma participação muito positiva dos integrantes do minicurso ministrado no referido encontro.

5.Existe algum impedimento para apresentar a proposta em algum dos dias do evento (25 a 25 de outubro)?
Pela manhã ministro aulas, das 7h 30min até as 12h na quarta, na quinta e na sexta e quinta à tarde das 13h 20min até as 15h. Então o melhor horário seria na quarta à tarde ou sexta à tarde. À noite ministro aulas também das 19h 30min até 22h 23 min.
6.Se algum participante for menor de idade...
Não há participantes menores de idade.

APÊNDICE V – Material enviado e aprovado para o XIII Salão de Ensino da UFRGS

RESUMO: O conteúdo de matrizes é parte integrante do componente curricular de Matemática, lecionado normalmente na segunda série do Ensino Médio. Percebe-se que os alunos apresentam dificuldades conceituais e operacionais nessa etapa. Assim sendo e por causa da pesquisa do doutorado, resolveu-se investigar uma metodologia de aprendizagem que pudesse auxiliar na redução dessas dificuldades. A metodologia utilizada foi baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel. A teoria da aprendizagem significativa proposta por David P. Ausubel e continuada, interpretada e complementada por Joseph D. Novak (Ausubel et al., 1980) e D. Bob Gowin (1981 apud MOREIRA, 2006) tem como ideia mais importante considerar aquilo que o aprendiz já sabe. Ao dizer isso, Ausubel quer enfocar a estrutura cognitiva do indivíduo, ou seja, as ideias e o conteúdo que ele tem a respeito de determinado assunto. De posse dessa informação, é possível fazer um mapeamento das ideias prévias do aluno com o objetivo de ensiná-lo de acordo, identificando os conceitos organizadores básicos e utilizando recursos que facilitem a aprendizagem de maneira significativa. Aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação interage com uma estrutura do conhecimento, já existente e específica (conceito subsunçor), produzindo uma nova informação que adquire um novo significado, inclusive para os subsunçores preexistentes. Ou seja, há uma interação não arbitrária e não literal que contribui para a diferenciação, a elaboração e a estabilidade da própria estrutura cognitiva, fazendo com que o indivíduo adquira um corpo de conhecimento claro, estável e organizado que passa a ser a principal variável independente na aquisição de novas informações da mesma área. Ausubel (1980) quer dizer que, se as ideias-âncora não forem consistentes e estáveis na estrutura cognitiva do aprendiz, elas podem, facilmente, ser substituídas e, até mesmo, haver relacionamento inadequado com as novas ideias. Porém, a estrutura cognitiva do aprendiz pode, por sua vez, ser influenciada de duas maneiras: a) pela apresentação de conceitos com maior poder explanatório e propriedades integradoras; b) pela utilização de métodos adequados e uma organização sequencial apropriada. O papel do professor, nessa tarefa de facilitação da aprendizagem significativa, envolve quatro aspectos: a)identificar os conceitos mais relevantes, os que têm um nível intermediário de generalidade e inclusividade e os menos inclusivos, realizando um "mapeamento" da estrutura conceitual, preocupando-se com a qualidade e não com a quantidade; b) identificar quais são os subsunçores (conceitos, proposições e ideias claras, precisas, estáveis) que o aluno deveria ter na sua estrutura cognitiva e que são relevantes à aprendizagem significativa do conteúdo; c) diagnosticar o que o aluno já sabe, isto é, saber distinguir entre o que é importante, relevante para a aprendizagem e aquilo que o aluno já tem disponível na sua estrutura cognitiva; d) ensinar através de recursos e princípios que auxiliem o aluno a assimilar a matéria e organizem a sua própria área de conhecimento, pela aquisição de significados claros, estáveis e transferíveis. Ausubel et al. (1980) sugere que o professor, ao organizar o ensino, segundo a sua teoria, deverá, em primeiro lugar, identificar os conhecimentos prévios dos alunos; depois, então, poderá dar atenção a outros aspectos, os quais ele chama de princípios e que dizem respeito à organização eficiente do conteúdo, não esquecendo das variáveis, que são importantes para a estrutura cognitiva do aprendiz: a) a diferenciação progressiva (ideias, mais gerais e inclusivas, devem ser apresentadas no início da instrução e, progressivamente, diferenciadas através de detalhes e especificidades); b) a reconciliação integrativa (explorar relações entre conceitos e proposições, prestando atenção em aspectos similares e/ou diferenças que permitam reconciliar inconsistências reais ou aparentes); c) a organização sequencial (prestar atenção para que cada novo tópico possa ser relacionado com ideias já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz); d) a consolidação (o novo tópico não deve ser introduzido antes que o precedente esteja estável e organizado). Foram elaboradas e realizadas atividades, desde a definição de matrizes, operações entre matrizes, cálculo de determinantes e resolução de sistemas, respeitando a TAS. As atividades aconteceram em duas turmas regulares do Ensino Médio (52 alunos), e, para a análise das respostas, foi utilizada a análise textual discursiva. Os resultados foram catalogados após o término de cada atividade por meio de atividades avaliativas e dos comentários dos alunos durante as aulas, além de uma avaliação coletiva que acontece três vezes ao trimestre e que é similar a uma prova de vestibular ou ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), já inserida no calendário escolar. Os resultados das avaliações, nos seus diferentes formatos, foram muito bons. Pode-se dizer que, sendo 7,0 a nota mínima exigida pela escola, os alunos, nas atividades propostas, ficaram sempre acima dessa média. No entanto, também se analisarem os resultados, não apenas em termos de nota, será possível verificar que a compreensão e a resolução dos exercícios melhoraram e os erros tiveram menor intensidade do que em anos anteriores, tendo como consequência, o que já foi exposto anteriormente, a melhora das notas. Como comentário final e importante dizer é que a mudança na metodologia influenciou em muito nos resultados do ensino e da aprendizagem do conteúdo de matrizes. Isso implica em afirmar que a Teoria da Aprendizagem Significativa, quando aplicada em sala de aula pode produzir resultados positivos e ser uma alternativa para reduzirmos o mau desempenho dos alunos em Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Matrizes. Aprendizagem. Significativa.

APÊNDICE X – Material enviado e aprovado no VIII Encontro Internacional de Aprendizagem Significativa, em Esquel, na Argentina, de 04 a 08 de dezembro de 2017

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATRIZES TENDO COMO FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL

Marjúnia Édita Zimmer Klein
Doutoranda do Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências: Química da Vida e da Saúde
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
marjunia.klein@gmail.com
José Cláudio Del Pino
Professor do Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências: Química da Vida e da Saúde
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS
delpinojc@yahoo.com.br

Resumo

A presente comunicação oral tem como objetivo compartilhar as atividades e os resultados obtidos no ensino e na aprendizagem de matrizes, em uma turma de segunda série do Ensino Médio, tendo como foco uma metodologia de ensino fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. As atividades privilegiaram a definição de matriz e as operações de adição, subtração, multiplicação por um número e multiplicação de matriz por matriz. Verifica-se que os resultados foram positivos e mostraram que é possível promover uma aprendizagem significativa no ensino e na aprendizagem de matrizes por meio da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

Palavras-chave: Matrizes. Aprendizagem. Significativa. Atividades.

1 Considerações iniciais

Em nível Nacional, por meio do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) e Internacional, por meio do PISA (*Programme for International Student Assessment*), os resultados com o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos não têm sido nada animadores. Podemos perceber que os alunos apresentam dificuldades conceituais e procedimentais que os impedem de resolver as situações propostas, acumulando, dessa forma, resultados negativos.

Acreditamos ser a sala de aula o local mais apropriado para procuramos evidências de como amenizarmos essa situação. Assim sendo, elencamos o conteúdo de matrizes e a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel como elementos motivadores para iniciar essa mudança.

Temos como objetivo propor e avaliar uma metodologia de ensino baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (TAS), elaborando atividades no ensino e na aprendizagem de matrizes e estudando como essas atividades podem contribuir para a construção significativa dos conceitos envolvidos nesse conteúdo de Matemática.

Entende-se que a Matemática deve proporcionar ao educando o desenvolvimento de competências e habilidades que permitam identificar, formular e resolver problemas, utilizando um rigor lógico-científico na análise da situação-problema, bem como a correlação com outros campos do saber.

O presente estudo está subdividido em fundamentação teórica, metodologia e relato das atividades e de seus resultados. Ele faz parte da tese de doutorado da professora pesquisadora.

Acreditamos que o diferencial da pesquisa é o investimento sobre as concepções que os alunos já têm (subsunçores) e a sua utilização pelo professor para planejar e mediar as atividades subsequentes. Essas atividades foram previamente elaboradas e contemplaram os aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais, favorecendo ao aluno o papel de protagonista ao construir e evoluir no seu conhecimento.

Além disso, ao se pesquisar, em repositórios digitais e em revistas (muitas delas eletrônicas) em busca de artigos sobre Aprendizagem Significativa e Matrizes, não se encontram trabalhos relacionando ambos os temas. Também arriscamos dizer que a Aprendizagem Significativa e o componente curricular de Matemática encontram-se em fase de enamoramento, pois há poucos trabalhos nessa área.

2 Fundamentação Teórica

A teoria da aprendizagem significativa, proposta por David P. Ausubel e continuada, interpretada e complementada por Joseph D. Novak (AUSUBEL et al., 1980) e D. Bob Gowin (1981 apud MOREIRA, 2006), tem como ideia mais importante considerar aquilo que o aprendiz já sabe.

Ao dizer isso, Ausubel enfoca a estrutura cognitiva do indivíduo, ou seja, as ideias e o conteúdo que ele tem a respeito de determinado assunto. De posse dessa informação, é possível fazer um mapeamento das ideias prévias do aluno com o objetivo de ensiná-lo de acordo, identificando os conceitos organizadores básicos e utilizando recursos que facilitem a aprendizagem de maneira significativa. Segundo Ausubel,

> [...] a essência do processo de aprendizagem significativa é que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as ideias são relacionadas a algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição (AUSUBEL et. al., 1980, p. 34).

Aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação interage com uma estrutura do conhecimento já existente e específica (conceito subsunçor), produzindo uma nova informação que adquire um novo significado, inclusive para os subsunçores preexistentes. Ou seja, há uma interação não arbitrária e não literal que contribui para a diferenciação, a elaboração e a estabilidade da própria estrutura cognitiva, fazendo com que o indivíduo adquira um corpo de conhecimento claro, estável e organizado, que passa a ser a principal variável independente na aquisição de novas informações da mesma área.

Ausubel (1980) afirma que, se as ideias-âncora não forem consistentes e estáveis na estrutura cognitiva do aprendiz, elas podem, facilmente, ser substituídas e, até mesmo, haver um relacionamento inadequado com as novas ideias. Porém, a estrutura cognitiva do aprendiz pode, por sua vez, ser influenciada de duas maneiras:

- pela apresentação de conceitos com maior poder explanatório e propriedades integradoras;

- pela utilização de métodos adequados e uma organização sequencial apropriada.

O papel do professor, nessa tarefa de facilitação da aprendizagem significativa, envolve quatro aspectos, que são:

- identificar os conceitos mais relevantes, os que têm um nível intermediário de generalidade e inclusividade e os menos inclusivos, realizando um "mapeamento" da estrutura conceitual, preocupando-se com a qualidade e não com a quantidade;

- identificar quais são os subsunçores (conceitos, proposições e ideias claras, precisas, estáveis) que o aluno deveria ter na sua estrutura cognitiva e que são relevantes à aprendizagem significativa do conteúdo;

- diagnosticar o que o aluno já sabe, isto é, saber distinguir entre o que é importante, relevante para a aprendizagem e aquilo que o aluno já tem disponível na sua estrutura cognitiva;

- ensinar a partir de recursos e princípios que auxiliem o aluno a assimilar a matéria e organizem a sua própria área de conhecimento, pela aquisição de significados claros, estáveis e transferíveis.

Ausubel et al. (1980) sugerem que o professor, ao organizar o ensino, segundo a sua teoria, deverá, em primeiro lugar, identificar os conhecimentos prévios dos alunos. Depois, então, poderá dar atenção a outros aspectos, aos quais ele chama de princípios e que dizem respeito à organização eficiente do conteúdo, não se esquecendo das variáveis, que são importantes para a estrutura cognitiva do aprendiz:

- a diferenciação progressiva (ideias mais gerais e inclusivas devem ser apresentadas no início da instrução e, progressivamente, diferenciadas a partir de detalhes e especificidades);

- a reconciliação integrativa (explorar relações entre conceitos e proposições, prestando atenção em aspectos similares e/ou diferenças que permitam reconciliar inconsistências reais ou aparentes);

- a organização sequencial (prestar atenção para que cada novo tópico possa ser relacionado a ideias já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz);

- a consolidação (o novo tópico não deve ser introduzido antes que o precedente esteja estável e organizado).

3 Metodologia de ensino e atividades

As atividades foram programadas e realizadas em duas turmas da segunda série do Ensino Médio de uma escola da rede particular de Novo Hamburgo - RS, Brasil, nas quais a autora leciona, durante o ano letivo de 2016, totalizando 52 alunos, observando-se uma das turmas possuía quatro períodos de Matemática por semana e a outra, cinco. Isso promoveu um ritmo diferente de trabalho em cada grupo.

Alguns motivos que levaram a professora e pesquisadora a trabalhar com essas turmas foram: as dificuldades conceituais e procedimentais já evidenciadas durante o ano letivo em outros conteúdos programáticos e, consequentemente, alunos com rendimentos abaixo do esperado (a média da escola é a nota 7,0); a exigência por parte da escola de melhorar os escores de resultados no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio); o fato de a pesquisadora/professora considerar ser possível de se trabalhar a Matemática com maior significado, desenvolvendo o raciocínio do aluno, permitindo que ele não decore apenas regras sem sentido, mas que venha a compreendê-las e aplicá-las.

Assim, ao conversar com a supervisão escolar e apresentar a proposta de trabalho, houve o consentimento tanto por parte da escola quanto dos responsáveis pelos alunos.

É importante ressaltar que a professora pesquisadora fez um diagrama “de vê”, para cada atividade elaborada. O diagrama “vê” é, segundo Gowin, (1981, apud MOREIRA, 2006, p.97), “m instrumento de análise da estrutura do processo de produção do conhecimento e de análise do currículo, bem como um recurso útil no ensino, na aprendizagem e na avaliação”.

A escolha dos problemas motivadores tanto para a primeira atividade como para as demais partiu do pressuposto de que:

> Pode-se dizer, então, que a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação “ancora-se” em conceitos relevantes, (subsunçores) preexistentes na estrutura cognitiva. Ou seja, novas ideias, conceitos, proposições podem ser aprendidas significativamente (e retidos), na medida em que outras ideias, conceitos, proposições relevantes e inclusivos estejam, adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem às primeiras (MOREIRA, 2006, p. 15).

Ou seja, considerando o que foi citado, propunham-se atividades que partissem de conhecimentos prévios dos alunos, estivessem contextualizadas e tivessem significado para o aluno. A intenção era permitir que ele estabelecesse relações com conceitos já conhecidos, mais amplos, reorganizando-os ou fortalecendo-os. Trata-se, portanto, de vir ao encontro de um dos aspectos mais relevantes da teoria de Ausubel.

A primeira atividade (Apêndice A) contemplou, em função da época, a ideia da tabela de classificação da seleção brasileira de futebol nas Eliminatórias da Copa do Mundo de 2018. A tabela serviu para inspirar perguntas que os alunos discutiram em grupos (formados por dois ou três componentes), conforme estivessem situados no espelho de classe, tendo um tempo para o registro das respostas. Depois desse momento, que se considera de reflexão mais individual, partiu-se para uma discussão que envolveu todo o grupo, quando se permitiu o compartilhamento das respostas, corrigindo-as quando necessário. Uma das dúvidas que surgiram em relação a uma pergunta sobre em que linha e em que coluna seria verificada determinada resposta, fez com que se estabelecesse que as informações marginais não contabilizariam como linha e coluna ao se representar a matriz para a tabela da Copa. Apenas se colocariam na forma matricial as informações numéricas não marginais. Outra dúvida foi a respeito de se ter uma ordem ao informar o que viria primeiro, se a linha ou a coluna. Após essas combinações, representou-se a tabela dos resultados da classificação do Brasil nas Eliminatórias da Copa do Mundo na forma de matriz, utilizando parênteses e escrevendo o número de linhas e de colunas, ou seja, 10 linhas e 9 colunas no lado direito, abaixo da última linha da matriz e fora dos parênteses a notação 10 x 9 (ordem ou tamanho da matriz). Chamou a atenção o fato de que nenhum aluno teve dificuldades em identificar linha como a parte horizontal da tabela e coluna como a parte vertical da tabela.

Após essa atividade, programou-se outra atividade, mantendo o mesmo foco de aprendizagem, ainda na definição de matriz, porém com tabelas extraídas do jornal da cidade, contendo informações das mais diversas possíveis. Solicitou-se que, em duplas, fizessem quatro perguntas sobre a tabela que lhes coube, sem respondê-las. Reservado um tempo para que todos concluíssem as perguntas, realizaram-se as trocas dos materiais entre as duplas, observando-se queoutra dupla teria como tarefa responder às perguntas dos colegas. Havendo dúvidas sobre as perguntas, poder-se-ia fazer contato com a dupla que as idealizaram.

Ainda houve o retorno da atividade para a dupla que elaborou as perguntas para a devida correção. Foi muito interessante, porque os alunos perceberam quão importante é escrever de forma legível e coerente sobre aquilo que queremos saber, pois a escrita é uma forma de comunicação, portanto deve estar correta e relatar exatamente o que queremos, Caso contrário, poderemos ter surpresas.

Desafiou-se cada grupo que elaborou as perguntas, após a correção, a reescrever a tabela recebida na forma matricial e anotar a sua ordem (tamanho). Alguns grupos já tinham feito essa pergunta na tarefa da própria atividade. Observou-se que a liberdade em poder elaborar perguntas fez com que alguns alunos ficassem em dúvida sobre o que perguntar. Por vezes, pareceu que alguns estavam sem rumo, pois podiam perguntar algo ao invés de apenas responder.

Era necessário estabelecer algumas informações sobre como localizar uma determinada informação na matriz. A partir dessa atividade com o jornal, pediu-se que eles dessem alguns exemplos das matrizes que receberam e colocaram-se esses exemplos no quadro da sala. A partir desses exemplos, verificou-se que, para localizar um elemento na matriz, era necessário identificar a linha e a coluna do elemento. Então, surgiu a pergunta: como vamos fazer o registro disso? Aproveitou-se para falar que um elemento da matriz pode ser anotado pelo nome dado à matriz, com letra minúscula e um subíndice contendo as informações da linha e da coluna em que ele se encontra. A partir de então, era possível definir-se a matriz de uma forma mais genérica, porém com significado. E fez-se isso.

Como já citado anteriormente, a escola adota um livro-texto e ele deve ser utilizado em sala de aula. Então, agora, já se poderia realizar os exercícios do livro-texto para aplicação do conteúdo, e, talvez, ainda surgiriam dúvidas. E realmente surgiram. Uma delas foi em relação a uma questão bem tradicional nos livros didáticos, em que se deve construir a matriz a partir de uma ordem pré-estabelecida e uma lei de formação, que inclui a linha e a coluna de cada elemento. Além disso, havia construções que envolviam o que já foi citado e os símbolos de maior e de menor, que costumam causar dificuldades de interpretação. Também foi sentida a necessidade devido aos exercícios de identificarmos alguns tipos de matrizes: a matriz quadrada, a matriz identidade, a matriz oposta e a matriz transposta.

Acreditando que a aprendizagem não é linear, instantânea e precisa ser refletida, além de acontecer em uma troca de informações entre pares, na qual ambos devem estar comprometidos, esclarecemos as dúvidas, refizemos as anotações e partimos para novos conceitos sobre matrizes.

A próxima atividade (Apêndice B) tinha como objetivo definir a adição e a subtração de matrizes e a multiplicação por um número.

A atividade envolveu duas tabelas para o problema gerador e partiu de perguntas que tiveram um tempo para serem respondidas, individualmente, mas com discussão nas duplas ou nos trios, conforme o espelho de classe e, em um segundo momento, com compartilhamento, em sala de aula, das respostas.

Como a notação matricial já estava mais clara e assimilada, verificou-se uma tranquilidade maior para realizá-la e efetuar a soma e a subtração das matrizes. Concluiu-se, ao final da atividade, que a soma ou a subtração acontecem termo a termo, respeitando a posição do termo dentro da matriz e, por conseguinte, é necessário que elas tenham a mesma ordem.

Registraram-se as conclusões no quadro da sala de aula e cada um foi convidado a fazer o mesmo no seu caderno.

Partiu-se para a realização dos exercícios do livro-texto sobre esse assunto e surgiu a questão da igualdade de matrizes, mas se verificou que os próprios alunos conseguiram identificar que duas matrizes são iguais quando possuem a mesma ordem e têm, termo a termo, o mesmo elemento na mesma posição (linha e coluna). Alguns alunos, poucos, precisaram de auxílio nesses exercícios. Também surgiu a multiplicação de uma matriz por um número, e foi tranquila a conclusão de que cada elemento deveria sofrer a multiplicação daquele número.

A responsabilidade, uma vez que os resultados até aqui foram positivos, parece que aumentou e o sentimento de continuar com problemas geradores e de significado para os alunos foi motivadora para a atividade seguinte.

Essa atividade envolvia a multiplicação de matriz por matriz (Apêndice C) e tinha como objetivo refletir sobre como acontece a multiplicação de matrizes. Como as atividades anteriores eram contextualizadas e se procurava significado para os alunos, com essa não foi diferente. Por meio dos problemas geradores, porém contextualizados, procurou-se definir como acontecia essa multiplicação. Os alunos demonstraram algumas dúvidas e discutimos até que as regras pudessem ser concluídas. Foi necessária a elaboração, além dos três problemas iniciais, de mais dois problemas adicionais para continuar a discussão (Apêndice D). Porém, a conclusão surgiu e fizeram-se os devidos registros. Como nas demais atividades e pelo motivo de termos um livro-texto, precisava-se realizar os exercícios do livro e continuar elucidando as dúvidas.

É importante esclarecer que os conteúdos desenvolvidos nas atividades citadas foram avaliados, e o resultado está descrito a seguir.

4 Considerações finais

Os indicadores utilizados para avaliar os resultados dessa proposta didática, lembrando que se trata de uma turma regular do Ensino Médio para a qual a pesquisadora-professora leciona, foram individuais (por meio de testes e o PAS – Projeto de Avaliação Sistemática da Escola, por meio do qual os alunos realizam uma prova de 60 questões envolvendo o conteúdo trabalhado em sala de aula). Também foram registrados os comentários dos alunos no momento da realização das atividades (alguns deles já citados no texto), tendo como objetivo compreender melhor as suas dúvidas e esclarecendo-as.

Os resultados das turmas A e B, em ambas avaliações individuais e em ambos os conteúdos, foram acima da média da Escola, que é 7,0 (tanto nos testes quanto no PAS).

Convém destacar que, nos processos avaliativos já citados, manteve-se coerência entre a metodologia de ensino proposta e os problemas a serem resolvidos pelos alunos. Não foram envolvidas questões que exigiam apenas a aplicação de fórmulas, mas questões que continham leitura, interpretação e aplicação de conceitos já trabalhados em sala de aula, com as suas respectivas resoluções, envolvendo os procedimentos coerentes. É importante que, ao se rever a metodologia de ensino, a avaliação também seja revista.

Também se faz necessário afirmar que o tempo de desenvolvimento do conteúdo é maior do que em um tempo de metodologia tradicional. Os alunos interagem e necessitam compartilhar suas conclusões entre si e com a pesquisadora-professora, sendo esse momento muito rico em observações.

Isso nos faz refletir sobre a nossa proposta didática e a nossa postura como professores. Sendo professora de Matemática há alguns anos e considerando que essa disciplina é sempre tão questionada quanto aos seus resultados e ao seuaprendizado, é preciso ressaltar que, ao conseguir bons resultados no ensino e aprendizagem de um determinado conteúdo, ainda mais utilizando uma teoria de aprendizagem na qual se depositam todas as convicções pessoais, fica-se muito contente e se sente necessidade de compartilhar, bem como investir ainda mais na metodologia.

Acreditamos que ainda há possibilidades de transformar o ensino e a aprendizagem de conteúdos em Matemática por meio de metodologias com significado para o aluno, no qual ele seja o protagonista do seu conhecimento.

Escolhemos uma metodologia de ensino, baseada na Aprendizagem Significativa de Ausubel, para elaborarmos as atividades didáticas e obtivemos ótimos resultados. Por esse motivo, compartilhamos os mesmos e desejamos que a nossa pesquisa possa contribuir com a melhoria e a qualidade do ensino e da aprendizagem em Matemática, mais especificamente, no conteúdo de matrizes.

Referências

AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph, D.; HANESIAN, Helen. Psicologia Educacional. Rio de Janeiro: Interamericana Ltda. 1980. 625p.

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula. Brasília: Universidade de Brasília, 2006, 186p.

6. Apêndices

Apêndice A – Problema gerador da discussão sobre a representação matricial

É comum, em diversas atividades humanas, a utilização de matrizes para organizar informações numéricas. Analise a situação abaixo, referente à classificação do Brasil nas Eliminatórias da Copa do Mundo de 2018, e responda às perguntas:

TABELA

CLASSIFICAÇÃO		P	J	V	E	D	GP	GC	SG	%	ÚLT. JOGOS
1 Argentina	2 ↑	**14**	7	4	2	1	7	4	3	66.7	
2 Uruguai	1 ↓	**13**	7	4	1	2	12	5	7	61.9	
3 Colômbia	2 ↑	**13**	7	4	1	2	11	8	3	61.9	
4 Equador	2 ↓	**13**	7	4	1	2	12	10	2	61.9	
5 Brasil	1 ↑	**12**	7	3	3	1	14	8	6	57.1	
6 Paraguai	1 ↑	**12**	7	3	3	1	9	7	2	57.1	
7 Chile	3 ↓	**10**	7	3	1	3	13	12	1	47.6	
8 Bolívia	1 ↑	**6**	7	2	0	5	9	13	-4	28.6	
9 Peru	1 ↓	**4**	7	1	1	5	6	14	-8	19.0	
10 Venezuela	0	**1**	7	0	1	6	7	19	-12	4.8	

copa do mundo 2018 · repescagem mundial · ↑ subiu · ↓ caiu · manteve · vitória · empate · derrota

Fonte: Globo esporte.globo.com. Acesso em 06 de set de 2016.

PERGUNTAS:

1) Para verificar qual a classificação do Brasil nas eliminatórias, até o momento, qual a linha que você consultaria?
2) Para verificar qual o número de empates que os times têm nas eliminatórias, até o momento, qual a coluna que você consultaria?
3) Em que linha e coluna você identificaria o número de pontos que o Brasil tem até o momento?
4) Qual é o saldo de gols do Brasil até o momento? Como você fez para identificar essa informação?

Apêndice B - Atividade para a definição da adição e subtração de matrizes

Tarefas:

I) Observe as tabelas referentes ao desempenho escolar de um aluno durante o primeiro e o segundo trimestre nas disciplinas de Matemática, Química e Física e responda as perguntas abaixo:

	Disciplinas		
Trimestre	Matemática	Química	Física
Primeiro	5,0	6,0	5,5

	Disciplinas		
Trimestre	Matemática	Química	Física
Segundo	6,5	7,5	7,0

Perguntas:

1) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Matemática até o momento, como você faria?

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?

2) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Química até o momento, como você faria?

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?

3) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Física até o momento, como você faria?

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?

II) Escreva, na forma de uma matriz, a primeira tabela e a segunda tabela e procure escrever uma conclusão que explique como podemos somar e diminuir matrizes.

Apêndice C – Multiplicação de matriz por matriz

Tarefas:

I) Situação-problema I:

Observe as tabelas abaixo e responda o que se pede:

A primeira tabela mostra o número de cestas de cada tipo convertidas por quatro equipes que disputaram um campeonato:

Equipe	Lance Livre	Cesta de dois pontos	Cesta de três pontos
A	10	12	18
B	8	15	19
C	12	17	21
D	7	10	9

E a segunda tabela mostra, de acordo com as regas do basquetebol, que há uma determinada pontuação para cada bola encestada. Uma cesta de lance livre (cobranças de infrações) vale 1 ponto, uma bola encestada a uma distância igual ou inferior a 6,25 m do cesto (área dos dois pontos) vale 2 pontos e uma bola encestada a uma distância superior a 6,25m do cesto (área dos três pontos) vale 3 pontos. Essa informações podem ser organizadas em uma tabela:

Tipo de cesta	Pontos obtidos
Lance livre	1
Cesta da área de dois pontos	2
Cesta da área de três pontos	3

Responda:

1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, represente, na forma de matriz, cada uma das tabelas apresentadas acima, indicando a sua ordem.

2) Para saber a pontuação total de cada uma das equipes no campeonato, como você faria? Escreva o procedimento adotado:

3) Seria possível escrever uma tabela com a pontuação total por equipe e, consequentemente, transformá-la em uma matriz? Qual seria a sua ordem?

II) Situação-problema II:

Um empresário oferece mensalmente alimentos para dois orfanatos, conforme a tabela abaixo.

Orfanato	Arroz (kg)	Feijão (Kg)	Carne (kg)	Batata (kg)
A	25	20	30	32
B	28	24	35	38

O empresário faz a cotação de preços em dois supermercados. A cotação atual encontra-se abaixo.

Produto (kg)	Supermercado X	Supermercado Y
Arroz	3,50	3,50
Feijão	7,50	8,00
Carne	20,00	25,00
Batata	4,50	4,00

Responda:

1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, represente, na forma de matriz, cada uma das tabelas apresentadas acima, indicando a sua ordem.

2) Para saber o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo supermercado, como você faria? Escreva o procedimento adotado.

Apêndice D – Multiplicação de matriz por matriz (continuação)

Tarefas:

Situação-problema III

Abaixo, temos uma tabela com o número total de medalhas de alguns países em uma determinada olimpíada e outra tabela que fornece o peso (em pontos) de cada medalha.

Tabela com o número de medalhas de cada país

	Ouro	Prata	Bronze
Espanha	3	3	5
Quênia	2	3	2
México	1	2	3
Tailândia	1	0	2
Brasil	0	6	6

Tabela com os pontos por medalha

	Peso
Ouro	3
Prata	2
Bronze	1

Responda:

a) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

b) Determine a pontuação de cada país e escreva uma matriz que contenha essa pontuação.

c) As afirmativas abaixo estão relacionadas com o resultado obtido na matriz que contém a pontuação dos países. Leia as afirmações e assinale Falso se ela for falsa e ou Verdadeiro se ela for verdadeira:

(   ) A pontuação do Brasil seria superior à do Quênia, México e Tailândia.

(   ) A pontuação do Brasil seria inferior apenas à do Quênia e da Espanha.

(   ) O Brasil estaria melhor colocado em relação aos demais países por obter o maior número de medalhas.

(   ) Na classificação geral, o país que tem o maior número de pontos é a Espanha.

(   ) A pontuação do México seria apenas inferior à do Brasil e da Espanha.

Situação-problema IV

Um laboratório que fabrica, dentre outros, os remédios a, b e c. Para a produção de 1 unidade a são necessários 3g do ingrediente x, 7 g do ingrediente y e 10g do ingrediente z. Com relação ao remédio b são necessários 2g de x, 4g de y e 5g de z. E, para o remédio c, precisamos de 5g de x, 1g de y e 6g de z.

Dispondo os dados em forma de tabela, temos:

	a	b	c
x	3	2	5
y	7	4	1
z	10	5	

Supondo que o consumo dos três remédios, nos meses de junho e julho, seja:

- junho: 80 unidades de a, 100 de b e 150 de c;

- julho: 50 unidades de a, 120 de b e 90 de c.

Dispondo esses dados em forma de tabela:

	junho	julho
a	80	50
b	100	120
c	150	90

Responda:

a) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

b) De quantos gramas do ingrediente x precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?

c) De quantos gramas do ingrediente y precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?

d) De quantos gramas do ingrediente z precisaremos para produzir o que será consumido em cada mês?

e) Escreva uma nova matriz que contenha essas informações

3) Seria possível escrever uma tabela com o gasto desse empresário em cada um dos supermercados e, consequentemente, transformá-la em uma matriz? Qual seria a sua ordem?

4) Qual o supermercado mais barato?

APÊNDICE Y – Material enviado e aprovado no 11th Southern Hemisphere Conference on the Teaching and Learning of Undergraduate Mathematics and Statistics, 26 de novembro a 01 de dezembro de 2017, Gramado, RS

TITLE: ANALYSIS OF RESOLUTIONS PROVIDED BY ENGINEERING COURSE STUDENTS FOR THE PROBLEMS PROPOSED, A MEANINGFUL VIEW

Marjúnia Édita Zimmer Klein[3]
marjunia.klein@gmail.com
José Cláudio Del Pino[4]
delpinojc@yahoo.com.br

ABSTRACT: Instigated by the fact that Higher Education students express conceptual and procedural difficulties regarding the interpretation, analysis and solving of problems, and such skill being deemed necessary for the Calculus I subject, it was decided to investigate how students taking that subject solved problems. Taking as theoretical foundation Ausubel's Theory of Meaningful Learning as proposed by David P. Ausubel and followed up, interpreted and complemented by Joseph D. Novak (Ausubel et al., 1980) and D. Bob Gowin (1981 apud MOREIRA, 2006), in which the main idea is to consider what learners already know and, by stating that, Ausubel intends to focus on the individual's cognitive framework, that is, the ideas and contents they have regarding a given topic, it was intended to map out students' previous ideas with the objective of teaching them accordingly by identifying the basic organizational concepts and utilizing resources that would facilitate learning in a meaningful fashion. Meaningful learning is a process through which a new piece of information interacts with the existing, specific knowledge framework (subsumer concept) resulting in a new piece of information that acquires a new meaning, including for the pre-existing subsumers. After categorizing the obtained solutions, it was perceived that most students did not use mathematical knowledge taught at school for the proposed problem solving, but did use resolutions that contained their own logical reasoning in such a way that equations appeared with low frequency.
KEY WORDS: Problems. Mathematics. Learning. Meaningful.

---

3 Licenciatura em Ciências e Matemática pela UNISINOS. Especialização em Matemática pela UNISINOS. Mestrado em Educação em Ciências e Matemática pela FAFIS (Faculdade de Física da PUCRS), doutoranda do Programa de Pós-Graduação: Química da Vida e da Saúde da UFRGS (Universidade Federal do Rio Grande do Sul), professora do Ensino Médio, na Instituição Evangélica de Novo Hamburgo e professora do Ensino Superior na Universidade do Vale do Rio dos Sinos, UNISINOS. E-mail: marjunia.klein@gmail.com

4 Licenciatura em Química e Químico PUCRS. Especialização em Ensino de Química UCS. Mestrado em Ciências Biológicas: Bioquímica UFRGS. Doutorado em Engenharia - Química de Biomassa UFRGS. Pós-doutorado em Educação Universidade de Aveiro - Portugal. Professor-orientador do PPG Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde UFRGS e do PPG Ensino UNIVATES. Bolsa de Produtividade em Pesquisa CNPq. E-mail: delpinojc@yahoo.com.br

APÊNDICE Z – Material publicado como capítulo do livro “Tendências em Educação Matemática”, pela Editora canto.

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA: UMA ANÁLISE METODOLÓGICA

Marjúnia Edita Zimmer Klein[5]
marjunia.klein@gmail.com
José Cláudio Del Pino[6]
delpinojc@yahoo.con.br

RESUMO: Este texto aborda alguns aspectos da história da trigonometria, propõe uma tarefa de coleta de dados e analisa as respostas dadas pelos alunos com o objetivo de refletir sobre as concepções prévias destes e os erros a respeito do assunto de trigonometria. Ainda sugere uma ferramenta metodológica no intuito de auxiliar a organizar o ensino voltado para a aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Trigonometria. Erros. Metodologia.

1 INTRODUÇÃO

Parte deste artigo foi um ensaio para a dissertação de Mestrado cujo título é “O ensino da Trigonometria subsidiado pelas Teorias da Aprendizagem Significativa e dos Campos Conceituais”, defendida em 2009 e está subdividido em três partes: a história da trigonometria (que terminou por ser um dos anexos da dissertação); a observação dos conceitos prévios e erros cometidos pelos alunos durante a atividade proposta; a análise das possíveis variáveis que influenciaram os erros cometidos pelos alunos, além da sugestão de uma metodologia de ensino que possa amenizar as dificuldades evidenciadas e promover uma aprendizagem significativa.

---

5 Licenciatura em Ciências e Matemática pela UNISINOS. Especialização em Matemática pela UNISINOS. Mestrado em Educação em Ciências e Matemática pela FAFIS (Faculdade de Física da PUCRS), doutoranda do Programa de Pós-Graduação: Química da Vida e da Saúde da UFRGS (Universidade Federal do Rio Grande do Sul), professora do Ensino Médio, na Instituição Evangélica de Novo Hamburgo e professora do Ensino Superior na Universidade do Vale do Rio dos Sinos, UNISINOS.

6 Licenciatura em Química e Químico PUCRS. Especialização em Ensino de Química UCS. Mestrado em Ciências Biológicas: Bioquímica UFRGS. Doutorado em Engenharia - Química de Biomassa UFRGS. Pós-doutorado em Educação Universidade de Aveiro - Portugal. Professor-orientador do PPG Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde UFRGS e do PPG Ensino UNIVATES. Bolsa de Produtividade em Pesquisa CNPq.

2 A HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Remontando à história da trigonometria, vemos que ela surgiu da necessidade de orientação do homem frente a um universo desconhecido e pronto para ser explorado. Assim como outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação. Alguns teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes já teriam sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônicos.

Aproximadamente em 585 a.C., Tales de Mileto (nascido por volta do ano 640 a.C. e falecido cerca de 550 a.C.), próspero negociante, hábil comerciante, grande político diante dos senhores da terra, engenheiro, astrônomo, famoso pela sua cultura filosófica, incluído como um dos sete sábios da antiguidade, além de ter previsto o eclipse do sol, ocorrido em 28 de maio de 585 a.C., também calculou a altura da pirâmide real. Isto fez com que o rei Amasis ficasse profundamente surpreendido com a aplicação prática de uma ciência abstrata.

Pitágoras de Samus (nascido por volta do ano 580 a.C. e falecido cerca de 500 a.C.) era um profeta e místico, nascido em Samus, uma das ilhas do Dodecaneso, não muito longe de Mileto, lugar do nascimento de Tales, é citado também como um matemático daquela época. Fundou uma sociedade secreta com bases filosóficas e matemáticas. Foram os pitagóricos, assim chamados os frequentadores da sociedade, que demonstraram o teorema de Pitágoras (o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos).

Através dos gregos, encontramos, pela primeira vez, um estudo sistemático de relações entre ângulos (arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subtendem. Essas relações eram conhecidas desde o tempo de Hipócrates (460 a.C. – 377 a.C.) e é provável que Eudoxo (390 a.C. – 338 a.C.) tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da terra e a distância entre o sol e a lua.

Na obra de Euclides (360 a.C. – 295 a.C.) *Os elementos* não há nenhuma referência à trigonometria, no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas.

Notadamente, cada vez mais os astrônomos da Idade Alexandrina – Eratóstenes de Cirene (por volta de 276 a.C. – 194 a.C.) e Aristarco de Samus (por volta de 310 a. C. – 230 a.C.) envolviam-se com problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas.

Aristarco (310 a.C. - 230 a.C), segundo Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) propôs um sistema heliocêntrico, antecipando-se a Copérnico, porém o escrito se perdeu. Em lugar disso temos dele o tratado (cerca de 260 a.C.) *"Sobre os tamanhos e distâncias do sol e da lua em um Universo geocêntrico".*

Outro cálculo que completaria o tratado anterior deve-se a Eratóstenes de Cirene, contemporâneo mais jovem de Arquimedes e Aristarco, que calculou a medida do comprimento da Terra.

Eratóstenes colocou um bastão na posição vertical, na cidade de Alexandria, mediu o comprimento de sua sombra (fig. 1) com isso calculou o ângulo formado entre o bastão e os raios solares, encontrando sete graus. Observando que os raios solares são paralelos, utilizou essa medida angular também na cidade de Siena (fig.2) e, como sabia a distância entre Alexandria e Siena, através de uma regra de três, calculou o comprimento da Terra (fig.3).

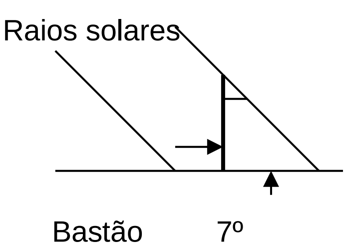


Figura 1

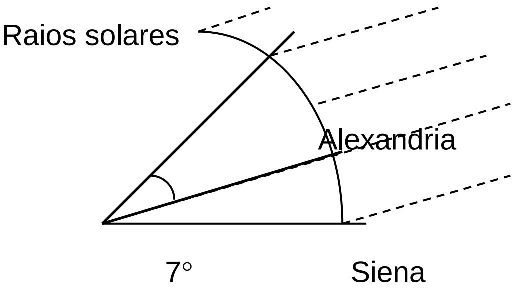


Figura 2

Cálculo de Eratóstenes

794 km - 7º

X - 360º

$$X = \frac{794 \times 360}{7}$$

Figura 3

Aproximadamente, durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Erastótenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e suas aplicações à astronomia. A partir daí, acredita-se que durante a segunda metade do segundo século a.C. foi compilada o que se supõe como a primeira tabela trigonométrica, tarefa realizada por Hiparco de Nicéia (180 a.C. - 125 a.C.), que assim passou a ser chamado o “pai da trigonometria”. Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu.

Não se sabe bem quando se passou a utilizar o círculo com 360º, mas parece que Hiparco, novamente, através de sua tabela de cordas, influenciou essa decisão. É possível que ele a tenha tomado de Hipsicles, que anteriormente teria dividido o dia em 360 partes, inspirado pela astronomia babilônica, em que o zodíaco fora dividido em doze “signos” ou trinta e seis decanatos. Um ciclo de estações, de aproximadamente 360 dias, podia ser facilmente posto em correspondência com o sistema de signos zodiacais e decanatos, subdividindo cada signo em trinta partes e cada decanato em dez partes.

Nosso sistema de medida de ângulos pode derivar dessa correspondência. Além disso, como o sistema proposicional dos babilônios para frações era superior ao sistema unitário utilizado pelos egípcios e às frações comuns gregas, era natural que Ptolomeu subdividisse seus graus em *sessenta partes minutae primae*, cada uma das quais era dividida em *sessenta partes minutae secundae*, e assim por diante. É dessas expressões que provêm nossas palavras minutos e segundos e o nosso sistema sexagesimal, ao trabalharmos com a trigonometria.

Como Hiparco fez sua tabela não se sabe, pois suas obras se perderam, é provável que seus métodos fossem semelhantes aos de Ptolomeu. Da vida de Ptolomeu sabemos pouco, sequer quando nasceu, mas que fez observações em Alexandria por volta de 151 a. C. – 127 a. C. e, por isso, supomos que nasceu pelo fim do primeiro século. O *Almajesto*, de Ptolomeu, sobreviveu aos estragos do tempo e lá ele cita as tabelas trigonométricas e também métodos utilizados para a sua construção.

Deve-se lembrar que, desde Hiparco até os tempos modernos, não se usavam termos como *razões trigonométricas*, mas *linhas trigonométricas*. Depois dos gregos tivemos os hindus e os árabes que utilizaram o termo *linhas trigonométricas*, que eram a princípio cordas num círculo, e que Ptolomeu já havia associado a valores numéricos (ou aproximações).

A partir de Alexandre, o Grande, houve muita comunicação entre a Grécia e a Mesopotâmia e parece claro que a aritmética e a geometria algébrica babilônica continuavam a exercer influência no mundo helenístico. Nota-se isso através dos trabalhos de Heron de Alexandria (por volta do ano 100 a.C.), conhecido pela fórmula que leva o seu nome e que calcula a área de um triângulo através do seu semiperímetro. Heron nos mostrou que nem toda a matemática da Grécia era do tipo “clássico”. Havia dois níveis: uma era eminentemente racional, chamada geometria, e a outra era prática, chamada geodésia.

A matemática grega estendeu-se aproximadamente desde 600 a.C. até 600 d.C. e contribuiu significativamente para a evolução da trigonometria, que durante o primeiro milênio de sua existência era quase que exclusivamente um adjunto da astronomia e da geografia. Somente no século XVII foram descobertas aplicações da trigonometria na refração e outras partes da física e ela evoluiu com maior propriedade.

Sendo assim, não podemos negar que o fato de conhecermos um pouco da história inicial da trigonometria faz-nos pensar no momento atual e a sua aplicabilidade em situações do cotidiano. Ressalta-se que há diversos ramos da sociedade que usam a trigonometria, tais como a navegação aérea, a navegação marítima, a engenharia, a arquitetura, a astronomia, a física e as ciências da saúde (em muitos diagnósticos, a exemplo da optimetria).

.

3 A ANÁLISE DA ATIVIDADE

Com o objetivo de conhecer os conceitos prévios dos alunos a respeito da trigonometria e verificar os erros cometidos por eles, elaborou-se uma atividade envolvendo tarefas que pudessem coletar tais informações, sem contar com a interferência do professor nesse primeiro momento. A mesma encontra-se descrita abaixo:

TAREFAS:

1. Construir um triângulo retângulo com um ângulo interno de 30° e hipotenusa 5 cm.

2. Construir um triângulo retângulo com um ângulo interno de 30° e hipotenusa 8 cm.

3. Construir um triângulo retângulo com um ângulo interno de 30° e hipotenusa 10 cm.

4. Batizar os vértices da seguinte maneira: A para o ângulo de 90°
   C para o ângulo de 30°

   B para o outro

5. Medir, utilizando a régua, os catetos e anotar os resultados.
6. Calcular para cada triângulo as razões: $\frac{AB}{BC}, \frac{AC}{BC}, \frac{AB}{AC}$

Ângulo de 30°	BC = 5 cm	BC = 8 cm	BC = 10 cm
$\frac{AB}{BC}$			
$\frac{AC}{BC}$			
$\frac{AB}{AC}$			

7. Responda: Se construíssemos um quarto triângulo, tomando para ângulo interno o valor de 30° e qualquer medida para a hipotenusa, quais seriam os valores das razões acima?
8. Mantendo os valores para a hipotenusa de 5cm, 8cm e 10 cm, construir três triângulos retângulos tomando agora, para ângulo interno o valor de 45°.
9. Depois de batizar os vértices como já citado anteriormente e medir os catetos, determine as razões.

Ângulo de 45°	BC = 5 cm	BC = 8 cm	BC = 10 cm
$\frac{AB}{BC}$			
$\frac{AC}{BC}$			
$\frac{AB}{AC}$			

10. Responda: Se construíssemos um quarto triângulo, tomando para ângulo interno o valor de 45° e qualquer medida para a hipotenusa, quais seriam os valores das razões acima ?

11. Responda: de que dependem, num triângulo retângulo, as razões acima?

12. Complete a tabela:

	Ângulo de 30°	Ângulo de 45°
$\frac{AB}{BC}$		
$\frac{AC}{BC}$		
$\frac{AB}{AC}$		

13. Conclusão: Seno de um ângulo é:

Cosseno de um ângulo é:

Tangente de um ângulo é:

Num segundo momento, tinha como meta analisar os erros cometidos para posteriormente esclarecê-los e organizar um material didático que pudesse auxiliar, de maneira significativa, o ensino da trigonometria. Segundo La Torre (2007, p. 47) “os erros refletem, entre outras coisas, as diferenças de estilo e a adequação das estratégias para a solução de problemas”.

A análise das respostas obtidas seguiu o Modelo de Análise Didática de Erros (MADE), citado por La Torre (2007) e que considera como variantes do erro a entrada de informações, a organização dessas informações e a sua execução.

Ao observar que durante a realização dos desenhos dos triângulos, muitos alunos não sabiam trabalhar com o transferidor, considera-se esse um erro operacional, porque o professor, ao elaborar a tarefa, julgou que o aluno já tivesse se familiarizado com o transferidor em séries anteriores e saberia como utilizá-lo, portanto desconsiderou, omitiu a possibilidade de desconhecimento ou esquecimento sobre a utilização do mesmo. O que se percebeu é que os alunos auxiliaram-se mutuamente na realização da tarefa.

Alguns alunos necessitaram de ajuda para identificar no triângulo retângulo os catetos e a hipotenusa, o que pode demonstrar um erro conceitual e talvez esse devesse chamar mais a nossa atenção, pois dele dependem uma série de relações.

Outros demonstraram dúvidas quanto ao fato de que, em se aumentando a medida da hipotenusa, o ângulo sofreria alteração de valor, poucos perceberam de que é o ângulo que determina a variação nos valores do seno, do cosseno e da tangente, e não o tamanho do triângulo. Este é outro erro conceitual que pode causar sérios transtornos, pois dele dependem as definições das razões trigonométricas, ou seja, toda a compreensão futura da trigonometria.

Nem todos os alunos conseguiram concluir as tarefas, o que considero como um erro estratégico, tanto por parte do professor que elaborou o questionário, quanto por parte dos alunos que resolveram as tarefas. O erro estratégico é considerado pelo MADE como um erro de execução e pode causar sim, sérias repercussões na aprendizagem.

Observou-se que a atividade também estava muito extensa, necessitando ser refeita para uma futura dissertação. Surgindo assim um novo modelo. Veja como ficou:

Questionário (reformulado):

1. O que você entende por triângulo retângulo? Existe alguma característica que o diferencia dos demais triângulos?___________________________________

   ____

2. Num triângulo retângulo, como você identifica os catetos e a hipotenusa ?
   Catetos:____

   Hipotenusa:____

3. Com o auxílio de um transferidor e de uma régua, faça o desenho de dois triângulos retângulos, ambos com hipotenusa medindo 5,0 cm de comprimento: em um deles, um dos ângulos internos deve ser 30º e, o outro, um dos ângulos internos deve ser 45º.
4. Identifique em cada desenho do item 3:
   - o cateto adjacente (CA) ao ângulo de 30º e o cateto oposto (CO) ao ângulo de 30º;

   - o cateto adjacente (CA) ao ângulo de 45º e o cateto oposto ao ângulo de 45º (CO);

5. Utilizando a régua, meça (em cm) cada um dos catetos dos desenhos do

item e anote as medidas encontradas na tabela abaixo: (utilize uma casa decimal)

ângulo	hipotenusa	catetos	
		oposto	adjacente
30º	5 cm		
45º	5 cm		

5. Responda: O cateto pode ser maior do que a hipotenusa?
   ( ) Sim ( ) Não
   Justifique:____

Num ambiente de sala de aula é muito importante poder considerar todas as variáveis que identifiquem a forma de pensar do aluno e com isso auxiliá-lo na sua aprendizagem, porém isso não é uma tarefa fácil e muito menos rotineira. Normalmente o erro é visto como elemento de punição e não diagnóstico.

Uma pedagogia que preza pelo respeito ao ambiente de aprendizagem vê o erro como um elemento a mais nesse processo e faz um uso positivo do mesmo e não punitivo e classificador apenas.

Cury (2007) destaca que:

> As pesquisas sobre erros na aprendizagem de Matemática devem fazer parte do processo de formação dos futuros professores, pois, ao investigar erros, ao observar como os alunos resolvem um determinado problema, ao discutir as soluções com os estudantes, os licenciandos em Matemática estarão refletindo sobre o processo de aprendizagem nessa disciplina e sobre as possíveis metodologias de ensino que vão implementar no início de suas práticas, podendo ajudar seus alunos logo que detectarem alguma dificuldade(p.93).

4 UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DA TRIGONOMETRIA

A teoria da aprendizagem significativa, proposta por David P. Ausubel e continuada, interpretada e complementada por Joseph D. Novak e D. Bob Gowin, tem como ideia mais importante considerar-se aquilo que o aprendiz já sabe. Ao dizer isso, Ausubel quer focar a estrutura cognitiva do indivíduo, ou seja, as ideias e o conteúdo que ele tem a respeito de determinado assunto. Para tanto, uma das sugestões dadas é fazer um mapeamento das ideias prévias do aluno com o objetivo de ensiná-lo de acordo, identificando os conceitos organizadores básicos e utilizando recursos que facilitem a aprendizagem de maneira significativa. Segundo Ausubel (1980, p. 34),

> A essência do processo de aprendizagem significativa é que as idéias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as idéias são relacionadas a algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição.

Aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação interage com uma estrutura do conhecimento, já existente e específica (conceito subsunçor), produzindo uma nova informação que adquire um novo significado, inclusive para os subsunçores preexistentes. Ou seja, há uma interação não arbitrária e não literal que contribui para a diferenciação, a elaboração e a estabilidade da própria estrutura cognitiva, fazendo com que o indivíduo adquira um corpo de conhecimento claro, estável e organizado, que passa a ser a principal variável independente na aquisição de novas informações da mesma área.

De acordo com Ausubel (1978, p.164 apud Moreira, 1999, p.168), existem três variáveis importantes da estrutura cognitiva que devem ser levadas em conta na facilitação da aprendizagem significativa e da retenção:

- a disponibilidade, na estrutura cognitiva do aprendiz, de ideias-âncora, especificamente relevantes, em nível ótimo de inclusividade, generalidade e abstração;

- a discriminação de conceitos e princípios, similares ou diferentes (mas potencialmente confundíveis), usados no material de aprendizagem;

- a estabilidade e clareza das ideias-âncora.

Porém, a estrutura cognitiva do aprendiz pode, por sua vez, ser influenciada de duas maneiras:

- pela apresentação de conceitos com maior poder explanatório e propriedades integradoras;

- pela utilização de métodos adequados e uma organização sequencial apropriada.

O papel do professor nessa tarefa de facilitação da aprendizagem significativa envolve quatro aspectos, quais sejam:

- identificar os conceitos mais relevantes, os que têm um nível intermediário de generalidade e inclusividade e os menos inclusivos, realizando um “mapeamento” da estrutura conceitual, preocupando-se com a qualidade e não com a quantidade;

- identificar quais são os subsunçores (conceitos, proposições e ideias claras, precisas, estáveis) que o aluno deveria ter na sua estrutura cognitiva e que são relevantes à aprendizagem significativa do conteúdo;

- diagnosticar o que o aluno já sabe, isto é, saber distinguir entre o que é importante, relevante para a aprendizagem e aquilo que o aluno já tem disponível na sua estrutura cognitiva;

- ensinar através de recursos e princípios que auxiliem o aluno a assimilar a matéria e organizem a sua própria área de conhecimento, pela aquisição de significados claros, estáveis e transferíveis.

Ausubel (1980) sugere que o professor, ao organizar o ensino, deverá proporcionar a diferenciação progressiva (ideias mais gerais e inclusivas devem ser apresentadas no início da instrução e progressivamente diferenciadas através de detalhes e especificidades) e a reconciliação integrativa (explorar relações entre conceitos e proposições, prestando atenção em aspectos similares e/ou diferenças que permitam reconciliar inconsistências reais ou aparentes).

Para promover esses dois aspectos, o referido autor sugere a utilização de organizadores prévios. Por exemplo, para a promoção da diferenciação progressiva a sugestão é de que tanto os conteúdos quanto as unidades de ensino estejam hierarquizadas, em ordem decrescente de inclusividade. Para a promoção da reconciliação integrativa, os organizadores prévios podem auxiliar o aprendiz a diagnosticar as relações entre as ideias que ele já tem na sua estrutura cognitiva e as ideias a serem aprendidas.

Um instrumento sugerido por Gowin, colaborador de Ausubel, é a elaboração do diagrama Vê. Moreira (2006) destaca:

> Os diagramas Vê foram criados para ajudar estudantes a identificar os componentes de produção do conhecimento ou, em outras palavras, a estrutura do conhecimento. A idéia subjacente é a de que como o conhecimento não é descoberto e sim produzido pelas pessoas, ele tem uma estrutura que pode ser analisada(p.81).

O Vê, epistemológico de Gowin, tem o aspecto abaixo e pode ser aplicado a qualquer conteúdo, sendo um instrumento que aborda tanto o domínio conceitual quanto o metodológico. Observe o aspecto do Vê, descrito abaixo.

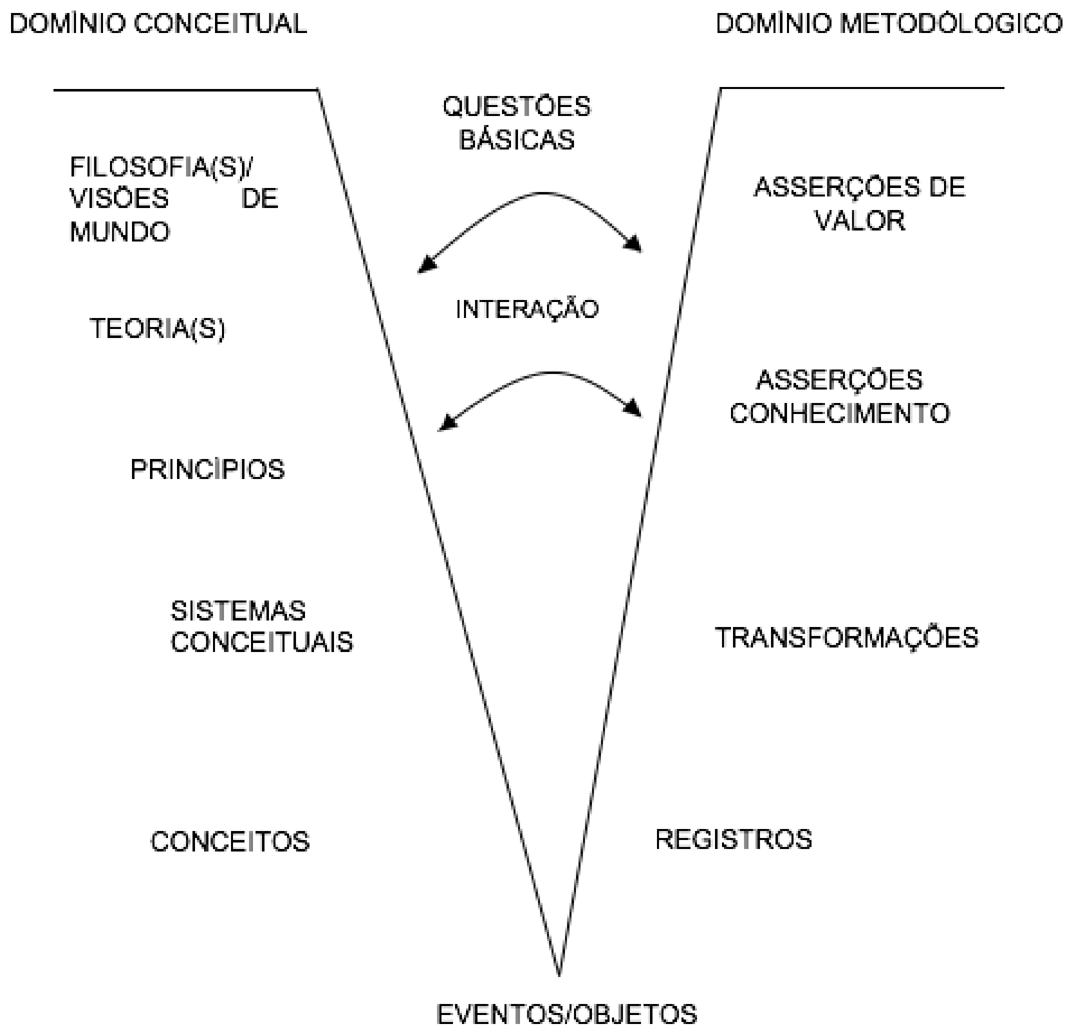


Figura 1. O "V" epistemológico de Gowin

Os procedimentos para a construção de um diagrama Vê são:

- escolha um evento/atividade para ser observado/pesquisado;
- assegure-se de que poderão ser feitos registros sobre o evento (escritos ou áudio gravados);

- escreva a questão foco em forma de pergunta(s);

- procure verificar como serão feitos os registros para a questão foco escolhida e de que forma poderão ser tabulados, se em forma de gráficos, tabelas, ou observações;

- identifique a filosofia e as teorias que estão envolvidas na atividade;

- discuta as asserções de conhecimento (que é/são a/s resposta/s questão/ões foco);

- discuta as asserções de valor (que são as melhorias a serem implantadas no diagrama);

- compare, revise, explore maneiras de utilizar o diagrama da melhor forma possível.

O Vê epistemológico de Gowin é uma das ferramentas que permite o diagnóstico e esclarece um pouco a respeito do conhecimento que o aluno tem sobre determinado assunto. Segundo Moreira (2006),

> O diagrama Vê mostra os elementos epistemológicos envolvidos na construção e descrição de novos conhecimentos. Todos os elementos interagem uns com os outros no processo de construção de novas asserções de conhecimento ou de valor, na tentativa de compreendê-los para quaisquer conjuntos de eventos e questões (p.87).

De posse dessas informações, a sugestão é de que o diagrama Vê de Gowin seja utilizado como ferramenta para que o professor possa elaborar uma atividade com o objetivo de distinguir aquilo que o aluno já sabe a respeito de qualquer assunto, ou seja, suas concepções prévias, aquilo que ele tem disponível na sua estrutura cognitiva e, partindo da coleta de dados, reorganize a metodologia e os recursos com o objetivo de permitir que a aprendizagem aconteça.

No caso, o objeto de pesquisa foi o assunto de trigonometria, as relações trigonométricas no triângulo retângulo e o objetivo era que eles evidenciassem de que o que importa é o ângulo e não as dimensões do triângulo.

Veja, a seguir, como ficou o Vê epistemológico de Gowin para essa atividade.

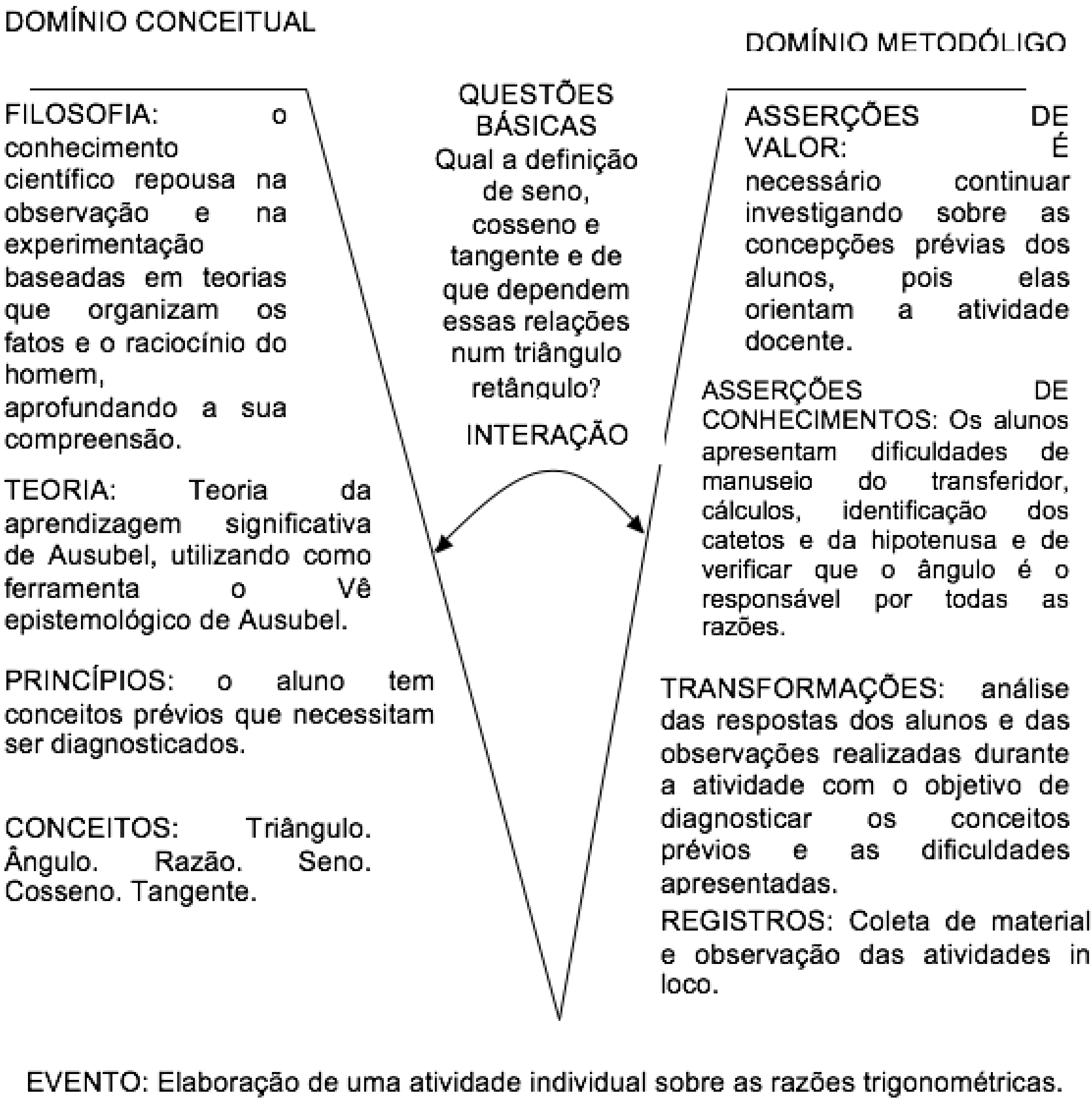


Figura 2. O “V” epistemológico de Gowin para a atividade de trigonometria

Considerando o que já foi dito e respeitando do “V epistemológico” de Gowin, elaborou-se uma atividade (MARJUNIA, 2009) que procurasse atender os objetivos propostos e auxiliasse na aprendizagem das razões trigonométricas e o que se pode dizer é que essa atividade produziu resultados muito bons e continua sendo aplicada.

Veja abaixo, o material confeccionado em E.V.A. (Etil, Vinil e Acetato) pela professora para dar prosseguimento, da atividade, cujo objetivo era a definição das razões trigonométricas, pré-requisito para os demais conteúdos da trigonometria.

Confecção dos triângulos em E.V.A. (esclarecimento do material necessário)

Ângulos	Hipotenusa	Cor
1) 10º e 80º	10 cm	Branco
	20 cm	Branco
	30 cm	Branco
2) 20º e 70º	10 cm	Rosa
	20 cm	Rosa
	30 cm	Rosa
3) 25º e 65º	10 cm	Roxo
	20 cm	Roxo
	30 cm	Roxo
4) 30º e 60º	10 cm	Amarelo
	20 cm	Amarelo
	30 cm	Amarelo
5) 35º e 55º	10 cm	Azul
	20 cm	Azul
	30 cm	Azul
6) 37º e 53º	10 cm	Rosa
	20 cm	Rosa
	30 cm	Rosa
7) 40º e 50º	10 cm	Branco
	20 cm	Branco
	30 cm	Branco
8) 45º e 45º	10 cm	Roxo
	20 cm	Roxo
	30 cm	Roxo
9) 62º e 28º	10 cm	Azul
	20 cm	Azul
	30 cm	Azul
10) 75º e 15º	10 cm	Amarelo
	20 cm	Amarelo
	30 cm	Amarelo

TAREFAS: (cada aluno recebeu um triângulo retângulo)

1. Meça os ângulos internos do triângulo que você recebeu. Você o classificaria como um triângulo retângulo? _________

Por quê?____

A seguir, meça também os comprimentos dos lados do triângulo e registre todos os resultados nos espaços abaixo:

Ângulos: ___________ Catetos:_________ Hipotenusa:_______

___________ _________

____

2. Procure o(s) colega(s) que tenha(m) triângulos com os mesmos valores para ângulos internos do triângulo que você tem e forme com ele(s) um grupo.

3. No grupo, discuta e responda às perguntas abaixo:

3.1. Compare os triângulos e escreva abaixo, quais são as suas diferenças e quais são as suas semelhanças (o que eles têm em comum).

Diferenças:____

____

Semelhanças:____

____

3.2. Represente com desenhos os triângulos (não necessariamente em tamanho real), que demonstre as conclusões acima, referentes à comparação entre os triângulos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partindo do pressuposto de que a aprendizagem significativa acontece quando uma nova informação interage com outra já concebida, adquirida, assimilada pelo aluno, e de que há uma interação entre os conceitos prévios e os novos conceitos, contribuindo para a organização, a estabilização e a clareza dos conhecimentos, faz-se necessário que o professor investigue essas concepções prévias.

O professor, para investigar as concepções prévias dos alunos, poderá valer-se de um instrumento, o diagrama Vê de Gowin, já citado anteriormente.

Ao fazer a coleta dos dados, registros, assim chamados pelo diagrama, o professor responde à questão foco e reorienta o seu trabalho docente no que diz respeito à metodologia e aos recursos que devam ser utilizados com o objetivo de promover essa aprendizagem. As dificuldades, os erros cometidos, as dúvidas mais constantes conseguem ser identificadas e muitas vezes o diagnóstico pode nos surpreender.

Por outro lado, o desenvolvimento de um conteúdo, que já esteve no plano de ensino, não dá garantias de que a aprendizagem aconteceu. Por exemplo, o fato de que o assunto trigonometria já havia sido visto (no nono ano do Ensino Fundamenta), ou de que alguns alunos tinham alguma lembrança, não foi garantia de sucesso nas atividades.

A realização da atividade por meio de tarefas que coletaram os conhecimentos prévios dos alunos evidenciou que o conteúdo visto por alguns deles, e por outros sequer visto, não havia sido aprendido nem compreendido pela grande maioria dos alunos. A aprendizagem estava comprometida e havia a necessidade de elaborar um instrumento que permitisse esclarecer conceitos e procedimentos no que diz respeito à trigonometria, com atividades de manuseio do transferidor, construção de triângulos retângulos, utilizando o transferidor e esclarecendo os seus elementos (hipotenusa e catetos), sem falar na definição do que seja uma razão e rever cálculos com números decimais.

Portanto, quero enfatizar a necessidade do uso de algum instrumento que permita diagnosticar os conceitos prévios dos alunos e a análise dos erros durante todo o processo da aprendizagem como diagnóstico e não punição. No caso exposto, sugeri o Vê epistemológico de Gowin, como material metodológico para reorientar a atividade docente, promovendo uma aprendizagem significativa e auxiliando na tarefa de educar.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph, D.; HANESIAN, Helen. *Psicologia Educacional.* Rio de Janeiro: Interamericana Ltda. 1980. 625p.

BOYER, Carl. *História da Matemática.* trad. de Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488p.

CARVALHO, Anna M. Pessoa de; GIL- Pérez. *Formação de Professores de Ciências.* São Paulo: Cortez, 1993.

CURY, Helena Noronha. *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* Belo Horizonte: Autêntica, 2007, 116p.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Transdisciplinaridade.* São Paulo: Palas Athena. 1997. 174p.

_____, Ubiratan*. Da Realidade à ação: reflexões sobre Educação e Matemática.* São Paulo: Universidade Estadual de Campinas,1986. 115p.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática.* Trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Unicamp, 1995. 843p.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática.* Porto Alegre: Globo, 1946. 715p.

KARLSON, Paul. *A magia dos números.* Porto Alegre: Globo, 1961. 605p.

KLEIN, Marjunia Édita Zimmer. *O ensino da trigonometria subsidiado pelas teorias da Aprendizagem significativa e dos campos conceituais.* Porto Alegre, PUCRS, 2009, 120p.

MOREIRA, Marco Antonio. *Mapas Conceituais e Diagrama V.* Porto Alegre: UFRGS, 2006. 103p.

MOREIRA, Marco Antonio. *Teorias de Aprendizagem.* Porto Alegre: Pedagógica e Universitária Ltda, 1999. 195p.

MOREIRA, Marco Antonio. *Aprendizagem significativa: um conceito subjacente.* 1999. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Física, UFRGS, Porto Alegre, 1999.

MOREIRA, Marco Antonio. *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.* Brasília: Universidade de Brasília, 2006, 186p.

MOREIRA, Marco Antonio. *A Teoria dos campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a Investigação nesta área.* Faculdade de Física, UFRGS, Porto Alegre, 2004

TORRE, Saturnino de La. *Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança.* Artmed, POA, 2007, 240p.

VERGNAUD, G. *Teoria dos campos conceituais.* In: Nasser, L., 1993, Rio de Janeiro. Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.

APÊNDICE W – Material publicado como artigo científico na revista “Aprendizagem Significativa em Revista”, uma publicação da UFRGS.

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATRIZES TENDO COMO FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA
(Matrix teaching and learning with the meaningful learning theory as a theoretical foundation)

MARJUNIA ÉDITA ZIMMER KLEIN [marjunia.klein@gmail.com]
Doutoranda do Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências: Química da Vida e da Saúde
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

JOSÉ CLÁUDIO DEL PINO [delpinojc@yahoo.com.br]
Professor do Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências: Química da Vida e da Saúde
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

ASR175

Resumo

Este trabalho de pesquisa tem como objetivos: propor, aplicar e buscar evidências de uma aprendizagem significativa em relação aos conceitos envolvidos no campo conceitual de Matrizes. A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel ressalta que a aprendizagem significativa tem chance de acontecer quando há uma interação não arbitrária e substantiva entre os novos conhecimentos (ideias, proposições, informações, conceitos, símbolos) e os conhecimentos prévios (subsunçores), contribuindo para a sua diferenciação, (re)elaboração e estabilidade. Moreira (2005) complementa essa ideia, ao chamar a atenção para o fato de que é por meio da aprendizagem significativa crítica que o aluno vai ser capaz de lidar com as mudanças, manejar a informação, usufruir da tecnologia e ser o protagonista de sua aprendizagem, admitindo que o conhecimento é uma construção individual. Sendo assim, foram planejadas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas, envolvendo o conteúdo de matrizes, nas quais, os alunos, poderiam explicitar, discutir e (re)construir seus conhecimentos em relação ao tema proposto. Os resultados confirmaram a importância de: identificar os conhecimentos prévios dos alunos para se valer deles e desenvolver os conteúdos; elaborar atividades potencialmente significativas que permitam ao aluno explicitar suas ideias, interagir com os colegas e com o professor, evoluindo progressivamente em um determinado campo conceitual.

Palavras-chave: Matemática. Matriz. Conhecimentos prévios. Aprendizagem significativa. Metodologia.

Abstract

The objectives of this research paper are to propose, apply and seek evidence of meaningful learning in relation to the concepts involved in the Matrices conceptual field. Ausubel's Meaningful Learning Theory points out that there is a chance for meaningful learning when there is non-arbitrary and substantive interaction between new concepts (ideas, propositions, information, concepts, symbols) and previous knowledge (subsumers) that contribute to their differentiation, (re)elaboration and stability. Moreira (2005) complements this by calling attention to the fact that it is through critical meaningful learning that students will be capable of leading with changes, manage information, make use of technology and be protagonists of their learning by admitting that knowledge is an individual construction. This way, Potentially Meaningful Teaching Units were planned that involved the matrix contents in which students could explicit, discuss and (re)construct all their knowledge regarding the proposed theme. The results confirm how important it is to identify students' previous knowledge to make use of them and develop the contents; elaborate potentially meaningful activities that would allow students to explicit their ideas, interact with colleagues and with teachers, thus progressively evolving within a certain conceptual field.

Keywords: Mathematics. Matrix. Previous knowledge. Meaningful learning. Methodology.

Introdução

A Matemática evoluiu ao longo do tempo tendo como função: interpretar, equacionar e resolver os problemas do cotidiano. Porém, na escola, muitas vezes, deparamo-nos com situações adversas a esse histórico. Talvez porque deva ser importante que o professor conceba que o ensino e a aprendizagem de um conteúdo dentro desse componente curricular exigem uma contextualização, um significado e, efetivamente, a participação do aluno nas atividades propostas. Segundo Vasconcellos:

> A forma de se compreender a aprendizagem do aluno depende da concepção que se tem da educação. Do ponto de vista epistemológico, grosso modo, podemos agrupar as diferentes manifestações da prática educativa em três grandes linhas: Inatista (resgate do conhecimento já existente no educando), Empirista (transferência do conhecimento do educador para o educando) e sócio interacionista (construção do conhecimento pelo educando a partir das relações que estabelece com o meio e com os outros sujeitos). (VASCONCELLOS, 2009, p.97).

Momentos de sala de aula que permitam a reflexão, a discussão e a explicitação das ideias relacionadas ao conteúdo em questão, têm uma melhor oportunidade de serem compreendidos, pois a aprendizagem do conteúdo está no significado que cada indivíduo atribui a ele.

AsDCNEM (Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio) como orientações sobre as fin alidades e objetivos do ensino de matemática no Brasil, procuram dar um norte, mas o problema é como fazer com que estas metas sejam alcançadas de forma efetiva.

> No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação

> de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber. As situações e os desafios que o jovem do ensino médio terá de enfrentar no âmbito escolar, no mundo do trabalho e no exercício da cidadania fazem parte de um processo complexo, no qual as informações são apenas parte de um todo articulado, marcado pela mobilização de conhecimentos e habilidades. Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (DCNEM, 2013, p.111).

Não menos importante, temos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para o ensino fundamental, exigência da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) para a educação e do Plano Nacional de Educação (PNE) que têm como objetivos orientar e estabelecer uma sintonia entre os conteúdos a serem desenvolvidos no país, independente de local ou escola e a formação de professores.

O que parece é que há indícios de como se proceder, mas, efetivamente, essa ação de mudança não acontece. Os resultados dos índices de aprovação dos concursos vestibulares, os índices do ENEM e os índices medidos pelo IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) e SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), divulgados pelos órgãos competentes e pela mídia, neste componente curricular, continuam abaixo do esperado.

Nesse sentido, e preocupados com tais reflexões pensou-se, especificamente, em um determinado conteúdo de matemática, neste caso, o conteúdo de matrizes, para desenvolver-se uma mudança na metodologia, privilegiando a participação dos alunos e momentos de reflexão. Optou-se pela construção de UEPS, Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (Moreira, 2016) fundamentadas na Aprendizagem Significativa, conforme proposta por Ausubel e aprimorada por Novak, Gowin, Moreira, entre os pesquisadores.

Segundo Moreira (2005), é importante considerar alguns princípios para facilitar a aprendizagem significativa, tais como, diversificar o uso de materiais educativos que permitam uma negociação de significados e considerem a aprendizagem como um processo dinâmico entre os novos conhecimentos e os conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva do aluno, permitindo a diferenciação progressiva e a formulação de perguntas ao invés de respostas.

Fundamentação Teórica

Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e colaboradores busca considerar aquilo que o aprendiz já sabe e orientá-lo de modo que consiga realizar conexões entre o novo conhecimento e os conhecimentos já assimilados pelo educando.

Ausubel, Novak e Gowin (1980) consideram que a finalidade do ensino é a aprendizagem pelo aluno e que ensino e aprendizagem coexistem. Consideram que é útil prestarmos atenção à relação recíproca que o ensino e a aprendizagem têm, ou seja a relação que inclui os objetivos do ensino, os efeitos do ensino e a avaliação do ensino. Conforme os autores:

> [...] é útil voltar-nos para aqueles aspectos do ensino e aprendizagem que têm uma relação dupla. Esta relação recíproca inclui os objetivos, os efeitos e a avaliação de ensino. Desta forma, embora seja verdadeiro que ensino é logicamente diferente da aprendizagem e pode ser analisado independentemente daquilo que os alunos aprendem, qual seria a vantagem prática desta análise em separada? A facilitação da aprendizagem é a própria finalidade do ensino. O ato de ensinar não se encerra em si mesmo, pois a finalidade do ensino é a aprendizagem por parte do aluno; muito embora o insucesso na aprendizagem dos alunos não indique necessariamente a competência do professor, o produto da aprendizagem é ainda a única medida possível para se avaliar o mérito do ensino. (AUSUBEL, NOVAK e GOWIN, 1980, p. 12).

A partir do excerto, pode-se afirmar que, na aprendizagem significativa, o aluno consegue relacionar de forma não arbitrária e substantiva (não literal) uma nova informação com outras já existentes na sua estrutura cognitiva (os subsunçores) contribuindo para a sua diferenciação, estabilidade e, se necessário, modificando-os. Para Ausubel, Novak e Gowin:

> A essência do processo de aprendizagem significativa é que a ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as ideias são relacionadas a algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição. A aprendizagem significativa pressupõe que o aluno manifeste uma disposição para a aprendizagem significativa – ou seja, uma disposição para relacionar, de forma não arbitrária e substantiva, o novo material à sua estrutura cognitiva – e que o material aprendido seja potencialmente significativo – principalmente incorporável à estrutura de conhecimento através de uma relação não arbitrária e não literal. (AUSUBEL, NOVAK e GOWIN, 1980, p. 34).

Destacam que os novos conceitos (imagens, símbolos, conceitos ou proposições) precisam relacionar-se com os conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aluno de maneira que contribuam para esclarecer, melhorar ou até rever aquilo que já está estabelecido. Só assim haverá a possibilidade de uma aprendizagem com significado e para que isso aconteça, deve haver uma disposição do aluno e um material que seja potencialmente significativo.

Fica claro que, além do aluno, o professor tem uma tarefa fundamental no desenrolar das atividades, seja ao elaborar esse material e orientar o aluno na realização das atividades, seja ao observar a realização das atividades, fazendo anotações e, se necessário, intervindo de modo a reorientar os alunos quanto às suas possíveis dúvidas.

O material, então, a ser elaborado, pelo professor em consonância com a teoria da aprendizagem significativa, deve respeitar no mínimo duas condições.

A primeira delas diz respeito:

- à natureza do conteúdo a ser aprendido, que deve ter significado lógico. Considera-se que a abordagem pedagógica de determinado conteúdo partirá de ideias mais simples até às mais complexas, além de estabelecer relações entre elas e poder relacionar-se de forma não arbitrária e substantiva às estruturas cognitivas já existentes. Ressalta-se que a maioria dos conteúdos trabalhados na escola possui essa característica.

Já a segunda característica do material a ser elaborado pelo professor refere-se:

- à natureza da estrutura cognitiva do aluno, que deve permitir, por meio de conceitos subsunçores (conhecimentos prévios), uma relação não arbitrária e substantiva entre o novo conhecimento e aquele que já existe.

É importante ressaltar que a aprendizagem significativa, dessa forma, requer um material potencialmente significativo (com significado lógico) e uma pré-disposição do aluno para a aprendizagem. Respeitadas estas duas condições, acredita-se no seu sucesso e na formação de um novo significado, que é chamado por Ausubel e colaboradores, de significado psicológico ou idiossincrático fenomenológico, muito particular de cada aluno (AUSUBEL, NOVAK e GOWIN, 1980).

Moreira (2005) enfatiza que a aprendizagem, dentro de uma óptica contemporânea, não pode se preocupar apenas em adquirir novos conhecimentos, mas é importante adquiri-los criticamente.

> É através da aprendizagem significativa crítica que o aluno poderá fazer parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, não ser subjugado por ela, por seus ritos, mitos e ideologias. É através dessa aprendizagem que ele poderá lidar construtivamente com a mudança sem deixar-se dominar por ela, manejar a informação sem sentir-se impotente frente a sua grande disponibilidade e velocidade de fluxo, usufruir e desenvolver a tecnologia sem tornar-se tecnófilo. Por meio dela, poderá trabalhar com a incerteza, a relatividade, a não-causalidade, a probabilidade, a não-dicotomização das diferenças, com a ideia de que o conhecimento é construção (ou invenção) nossa, que apenas representamos o mundo e nunca o captamos diretamente. (MOREIRA, 2005, p.18).

Moreira (2005) sugere alguns princípios para facilitar a aprendizagem significativa crítica, a saber:

- considerar importante que haja uma negociação de significados entre o aluno e o professor, centrada na interação;

- diversificar o uso de materiais educativos, além do livro texto;

- considerar a aprendizagem como um processo dinâmico de interação, diferenciação e integração entre conhecimentos novos e pré-existentes, incentivando o aluno a não ser passivo durante o processo, mas argumentar, discutir, registrar e socializar seus conhecimentos;

- perceber que aprender uma disciplina (Biologia, Matemática, História, Física, Literatura, ...) é apropriar-se de sua linguagem, com seus símbolos, signos, palavras e proposições, considerando seus significados;

- considerar que o significado está nas pessoas e não nas palavras, as quais só poderão dá-lo para aquilo que está ao seu alcance ou se forem motivadas (organizadores prévios) a pensar sobre o assunto;

- considerar o erro como parte integrante do processo de aprendizagem e a sua superação como uma evolução no conhecimento de determinado conteúdo;

- considerar que o conhecimento não é algo permanente, linear, está em constante modificação e reestruturação e aprendemos corrigindo nossos erros;

- permitir o ato de desaprender para reestruturar algum conhecimento prévio que possa estar impedindo a aprendizagem ou porque, devido ao ambiente que está em constante transformação, há a necessidade de rever conceitos e estratégias para poder sobreviver;

- permitir e incentivar os questionamentos em sala de aula, percebendo que as perguntas movem a curiosidade e o conhecimento humano;

- diversificar as estratégias de ensino e aprendizagem.

A aprendizagem significativa crítica deve permitir que o aluno se torne autônomo e participe criticamente da sociedade em constante transformação, sentindo-se parte integrante e colaborando com os seus avanços.

> Por uma questão de sobrevivência, é preciso mudar o foco da aprendizagem e do ensino que busca facilitá-la. Meu argumento, parafraseando Postman e Weingartner (1969) é que este foco deveria estar na aprendizagem significativa subversiva, ou crítica como me parece melhor, aquela que permitirá ao sujeito fazer parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, estar fora dela, manejar a informação, criticamente, sem sentir-se imponente frente a ela; usufruir a tecnologia sem idolatrá-la; mudar sem ser dominado pela mudança; viver em uma economia de mercado sem deixar que este resolva sua vida; aceitar a globalização sem aceitar suas perversidades; conviver com a incerteza, a relatividade, a causalidade múltipla, a construção metafórica do conhecimento, a probabilidade das coisas, a não dicotomização das diferenças, a recursividade das representações mentais; rejeitar as verdades fixas, as certezas, as definições absolutas, as entidades isoladas. (MOREIRA, 2005, p. 39).

Neste sentido, Moreira (2005) também sugere que o professor, ao elaborar um material didático, considere dez princípios facilitadores de uma aprendizagem significativa crítica:

- levar em conta o conhecimento prévio do aluno, pois temos mais facilidade de aprender a partir do que já sabemos;

- incentivar o aluno a perguntar, valorizando a resposta;

- providenciar e utilizar diversos materiais educativos;

- considerar o erro do aluno não como forma de punição, mas incentivá-lo a corrigi-lo;

- permitir que o aluno protagonize o significado do que está aprendendo;

- considerar que o conhecimento é gradual, não linear, com rupturas e incertezas;

- ficar atento, pois, às vezes, o conhecimento prévio pode estar obliterando a aprendizagem;

- permitir que o aluno explicite o seu conhecimento pela linguagem oral e escrita;

- elaborar materiais potencialmente significativos que considerem as diversidades;

- ser um professor de "boca fechada", ou seja, dar menos respostas e escutar mais os alunos.

Moreira (2005) criou as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), como uma proposta didática para alterar, pelo menos dentro do possível, o modelo de narrativa que costumamos ter em sala de aula e que já sabemos que não está produzindo aprendizagens.

As UEPS são sequências didáticas de ensino, teoricamente fundamentadas, voltadas para a aprendizagem significativa, elaboradas pelo professor, com tópicos específicos de conhecimentos a serem desenvolvidos. Seu objetivo é auxiliar a aprendizagem significativa por meio de atividades que permitam a explicitação de conhecimentos dos alunos para posterior análise e discussão.

A construção de uma UEPS, segundo Moreira (2005), envolve:

- Título: de acordo com o conteúdo/tópico a ser estudado;
- Objetivo: definir os objetivos a serem alcançados na UEPS;
- Filosofia: só há ensino se há aprendizagem e esta deve ser significativa;
- Marco teórico: a teoria da aprendizagem significativa na perspectiva original e com os aportes e seus elaboradores;
- Princípios:
  - não esquecer que o conhecimento prévio é a variável que mais influencia a aprendizagem significativa;
  - pensar, sentir e agir estão integrados no ser que aprende, quando a aprendizagem é significativa;
  - o aluno dever estar interessado em aprender;
  - organizadores prévios podem e devem ser utilizados, sempre que necessário;
  - são as situações-problema que dão sentido ao conhecimento (Vergnaud, 1990) e elas são criadas para despertar a curiosidade do aluno;
  - as situações- problema podem funcionar como organizadores prévios;
  - as situações-problema devem ser propostas em um nível crescente de complexidade;
  - diante de uma nova situação é importante criar um modelo mental, na memória de trabalho, análogo estruturalmente a essa situação (Johnson-Laird, 1983);
  - não se esquecer de levar em conta, na organização do ensino, a diferenciação progressiva, a reconciliação integrativa e a consolidação (Ausubel);
  - ao longo da aprendizagem, progressivamente, buscar evidências de que ela é significativa;
  - o professor é organizador e mediador de situações-problema (Vergnaud; Gowin);
  - considerar a linguagem e a interação social durante o processo de aprendizagem;
  - existe uma relação triádica professor, aluno e materiais educativos (Gowin);
  - essa relação poderá ser quádrica na medida em que o computador não for utilizado apenas como material educativo;
  - a aprendizagem deve ser significativa e crítica (Moreira);

- a aprendizagem significativa crítica estimula a formulação de perguntas ao invés da memorização e o abandono das aulas narrativas em prol de aulas com materiais e estratégias diversificadas;

- Aspectos sequenciais:
  - definir os assuntos a serem abordados e identificar objetivos a serem alcançados;
  - criar momentos introdutórios (discussão, mapa conceitual, questionário, filme, história, texto, ...) de aprendizagem que permitam que o aluno externalize ou registre o seu conhecimento prévio sobre o assunto;
  - considerar o conhecimento prévio demonstrado na atividade anterior e elaborar situações de aprendizagem que permitam que o aluno perceba uma relação entre os seus conhecimentos prévios e os novos conhecimentos;
  - respeitando a diferenciação progressiva, propor outras atividades, relacionadas ao assunto, mas que continuem permitindo ao aluno explicitar seus conhecimentos;
  - retomar os aspectos mais gerais daquilo que se vai ensinar e a partir deles, ressignificar os novos conhecimentos, evoluindo progressivamente para características mais específicas do conteúdo por meio de novas situações de aprendizagem;
  - concluir as situações de aprendizagem, individualmente ou em grupo, definindo, anotando e retomando as características mais importantes e relevantes, integrando e buscando a reconciliação integrativa. Propor novas situações de aprendizagens em níveis de maior complexidade em relação às situações anteriores. É importante que se considerem também atividades que permitam a discussão em pequenos grupos e posterior discussão que envolva todos os alunos, sempre com a mediação do professor;
  - a avaliação deve acontecer durante o processo de aprendizagem por meio de registros que possam dar evidências de uma aprendizagem de real significado;
  - será importante considerar os aspectos individuais para a resolução de situações de aprendizagem, considerando o nível de interpretação e resolução conceitual e procedimental da mesma, bem como permitir avaliações colaborativas observando os mesmos itens;
  - a avaliação permitirá também a validação das situações de aprendizagem;
  - é importante considerar que a mediação do professor pode acontecer a qualquer momento do processo como forma de esclarecer possíveis dúvidas;
  - a UEPS atingirá êxito se os alunos apresentarem evidências de uma aprendizagem de real significado, interpretando, resolvendo e aplicando os conhecimentos adquiridos de forma que demonstrem terem atingido um domínio desse conteúdo.
- Aspectos transversais:
  - considerar atividades diferenciadas durante o processo e incentivar o questionamento em lugar das respostas prontas;
  - propor que os alunos formulem situações de aprendizagem em relação ao conteúdo em questão;
  - permitir momentos individuais e em grupo durante as situações de aprendizagem.

Considerando a fundamentação teórica elaboraram-se as atividades da pesquisa que se encontram descritas a seguir.

Metodologia da pesquisa

No intuito de investigar como uma metodologia fundamentada na TAS poderia contribuir para a construção e desenvolvimento de uma proposta de ensino com potencial de favorecer uma aprendizagem significativa no campo conceitual[7] das matrizes, optou-se por realizar uma investigação de abordagem qualitativa. Tal decisão baseia-se na ideia de que esta poderia auxiliar de uma forma mais adequada a compreender o fenômeno, suas variáveis e relações, seus participantes e o local da pesquisa, uma vez que esse ambiente era o mesmo, no qual a pesquisadora também era professora. Sendo assim, julgou-se ser a análise textual discursiva a opção mais apropriada para a construção e interpretação dos dados da pesquisa. Segundo Moraes e Galiazzi:

O processo da Análise Textual Discursiva tem fundamentos na fenomenologia e na hermenêutica. Valoriza os sujeitos em seus modos de expressão dos fenômenos. Centra sua procura em redes coletivas de significados construídos subjetivamente, os quais o pesquisador se desafia a compreender, descrever e interpretar. São processos hermenêuticos. (MORAES, GALIAZZI, 2007, p.169).

Era necessário observar, compreender, refletir sobre o ambiente de pesquisa no intuito de transformá-lo e promover melhorias no ensino e na aprendizagem de matrizes no segundo ano do ensino médio. A Análise Textual Discursiva valoriza a descrição e a interpretação do fenômeno, permitindo uma postura analítica do pesquisador. O pesquisador assume por meio dela, um desafio permanente de produzir sentidos, categorizar e reconstruir significados sobre os dados obtidos referente ao tema que investiga. Todo esse processo ocorre concomitante com a pesquisa, podendo assumir uma perspectiva transformadora da própria realidade que pesquisa. Categorizar, nesta metodologia, significa valorizar uma parte do todo para melhorar a compreensão do todo e, se necessário, intervir ao longo do processo. O pesquisador precisa estar disposto a desconstruir suas ideias e convicções para imergir no processo e dele extrair novos e originais conhecimentos sobre a pesquisa.

Ao analisar os dados e as informações coletadas, procedeu-se a uma categorização e a uma posterior produção de novas compreensões sobre o fenômeno em questão.

Metodologia da prática pedagógica

Foram construídos e utilizados os seguintes instrumentos de coleta de dados durante a pesquisa, que se passa a listar:

Um questionário inicial (Apêndice A) contendo três perguntas que envolviam quais as dificuldades que os alunos encontravam no ensino e na aprendizagem de conteúdos de Matemática, como costumavam resolver essas dificuldades e qual o significado que conseguiam dar ao conteúdo desenvolvido em sala de aula;

Uma coleta dos conhecimentos prévios dos alunos em relação ao conteúdo de matrizes, por meio de uma UEPS, denominada UEPS 01, que continha perguntas sobre um quadro das eliminatórias da Copa do Mundo de 2018 permitindo que o aluno explicitasse seu conhecimento sobre linhas e colunas;

---

[7] Vergnaud parte da premissa de que o conhecimento está organizado em campos conceituais e estes, por sua vez, envolvem um conjunto de problemas, situações, conceitos, relações, conteúdos, operações e estruturas que estão relacionados e conectados uns aos outros.

Mais sete UEPS envolvendo os demais temas sobre matrizes. A UEPS 02 versou sobre a definição de matrizes, a UEPS 03, sobre adição e subtração de matrizes, a UEPS 04 (Apêndice B) tratou da multiplicação de matriz por matriz, a UEPS 05 também sobre a multiplicação de matriz por matriz, a UEPS 06 foi considerada um organizador prévio sobre determinantes e sistemas lineares, a UEPS 07 abordou o conteúdo sobre sistemas lineares de duas equações contendo duas incógnitas e a UEPS 08 abordou o conteúdo sobre sistemas lineares contendo três equações e três incógnitas;

Um questionário final (Apêndice C) contendo três perguntas que envolviam o fato de termos alterado a metodologia de ensino nas aulas de Matemática, sobre como isso modificou ou não a sua aprendizagem e o significado do conteúdo em situações do cotidiano;

Avaliações formais de ensino, totalizando seis momentos, sendo que três deles continham questões objetivas e subjetivas (permitindo a explicitação escrita dos procedimentos) e foram elaborados pela professora e os outros três no modelo PAS8 (contendo apenas questões objetivas extraídas de concursos vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM). A avaliação 01 foi sobre a definição de matriz e a construção de matrizes de forma genérica, um PAS envolvendo o mesmo assunto, a avaliação 02 sobre as operações de adição, subtração, igualdade de matrizes, um PAS envolvendo o mesmo assunto, um PAS sobre a multiplicação de matriz por matriz e a avaliação 03 sobre resolução de sistemas lineares.

As atividades foram programadas e realizadas em duas turmas da segunda série do ensino médio de uma escola da rede particular de Novo Hamburgo, nas quais a primeira autora deste texto leciona a disciplina de Matemática. Foram 51 alunos envolvidos na pesquisa, divididos em turmas A e B. A turma A é composta de 28 alunos, sendo 14 meninos e 14 meninas, com cinco períodos de Matemática por semana; a turma B, com 23 alunos, sendo 09 meninos e 14 meninas, com quatro períodos de Matemática por semana. A escola oferece duas modalidades de matrícula para os responsáveis, uma modalidade em que o aluno pertence a uma turma de segunda série que tem 33 horas aulas semanais, com isto 5 horas aula de Matemática por semana (Turma A) e outra modalidade em que o aluno pertence a turma que tem 25 horas-aula por semana, com isso 4 horas-aula de Matemática por semana (Turma B). É importante considerar que, sendo turmas regulares de ensino, por vezes, nem todos os alunos estavam presentes e o fato de cargas horárias diferenciadas também provocou um ritmo de trabalho diferenciado em cada turma, mas que será descrito ao longo do texto.

A pesquisa em sala de aula, aconteceu de setembro a novembro de 2016, nos períodos destinados à disciplina de Matemática e respeitaram o conteúdo programático da série, bem como às atividades já incluídas no calendário escolar da escola.

Alguns dos motivos que nos levaram a trabalhar com essas turmas foram as dificuldades conceituais e procedimentais já evidenciadas durante o ano letivo em outros conteúdos programáticos e, consequentemente, com rendimentos abaixo do esperado (a média

[8] PAS - Projeto de Avaliação Sistemática – Avaliação individual, por série, aplicada uma vez por mês, de acordo com o calendário escolar, contendo cinco questões objetivas de cada componente curricular da respectiva série sobre o conteúdo desenvolvido nesse período.

da escola é a nota 7,0); a exigência por parte da escola de melhorar os escores de resultados no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio); o fato de a professora considerar ser possível se trabalhar uma matemática com maior atribuição de significados e que possa desenvolver o raciocínio do aluno, permitindo que ele não decore apenas regras sem sentido, mas venha a compreendê-las e aplicá-las.

As UEPS foram planejadas e aplicadas no intuito de favorecer o ensino e a aprendizagem do campo conceitual das matrizes, tendo como fundamentação teórica a TAS de Ausubel e colaboradores. O planejamento respeitou a evolução do conteúdo e consideramos importante que cada UEPS abordasse um determinado assunto específico do campo conceitual de matrizes e tivesse uma carga horária pertinente com o tempo necessário para ser concluída, em média quatro horas-aula. Procedendo dessa maneira poderíamos tabular e analisar os dados obtidos em cada UEPS, intervindo, se necessário, durante o processo. Também é importante dizer que todas as análises forneceram evidências positivas de uma aprendizagem de real significado no campo conceitual de matrizes, mas que devido à limitação do texto, optamos por descrever os resultados obtidos na aplicação da UEPS 04, que envolvia a multiplicação de matriz por matriz.

A descrição completa de todos os instrumentos de coleta de dados e os seus resultados encontram-se na tese (em fase de conclusão) da primeira autora desse artigo.

Resultados e discussão

A UEPS 04 (Apêndice B) foi planejada e aplicada com o objetivo de levar o aluno a compreender a definição de multiplicação de matriz por matriz, descobrindo quais são as condições para que isto aconteça e como se faz esta multiplicação.

A UEPS 04 tinha três problemas (I, II, e III) contextualizados. O problema I fazia menção aos pontos obtidos por quatro equipes de basquete em cada tipo de lance. A primeira pergunta sobre este problema solicitava que os alunos representassem, em formato matricial, desconsiderando as informações marginais, os dados contidos nas tabelas.

Na turma A, 100% dos alunos fizeram a representação corretamente das duas tabelas; na turma B, 83% dos alunos representaram corretamente as duas tabelas, conforme se demonstra nos quadros 1 e 2.

Quadro 1: Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta do problema I da UEPS 04

Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Tabela A: 4x3 Tabela B: 3x1	25	100%
TOTAL	25	100%

Fonte: os autores

Quadro 2: Respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta do problema I da UEPS 04

Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Tabela A: 4x3 Tabela B: 3x1	19	83%
Tabela A: 4x3 Tabela B: 1x3	03	13%
Tabela A: 4x3 Sobre a outra matriz não fez referência	01	4%
TOTAL	23	100%

Fonte: os autores

Observa-se que três alunos da turma B ainda estavam invertendo de posição linhas por colunas sendo necessário chamar a atenção sobre este fato.

Em relação à segunda pergunta do primeiro problema, constata-se que, nas duas turmas, foi obtido um percentual de 100% de respostas corretas.

Quadro 3: Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta do problema I da UEPS 04

Para saber a pontuação total de cada uma das equipes no campeonato, como você faria? Escreva o procedimento adotado:		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Multiplicar os lances livres por 1, as cestas de dois pontos por dois e as cestas de três pontos por três. Somar estes valores conforme a linha de cada equipe. $\underset{4x3}{\begin{pmatrix} 10 & 12 & 18 \\ 8 & 15 & 19 \\ 12 & 17 & 21 \\ 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}} \times \underset{3x1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \underset{4x1}{\begin{pmatrix} 88 \\ 95 \\ 109 \\ 54 \end{pmatrix}}$	25	100%
TOTAL	25	100%

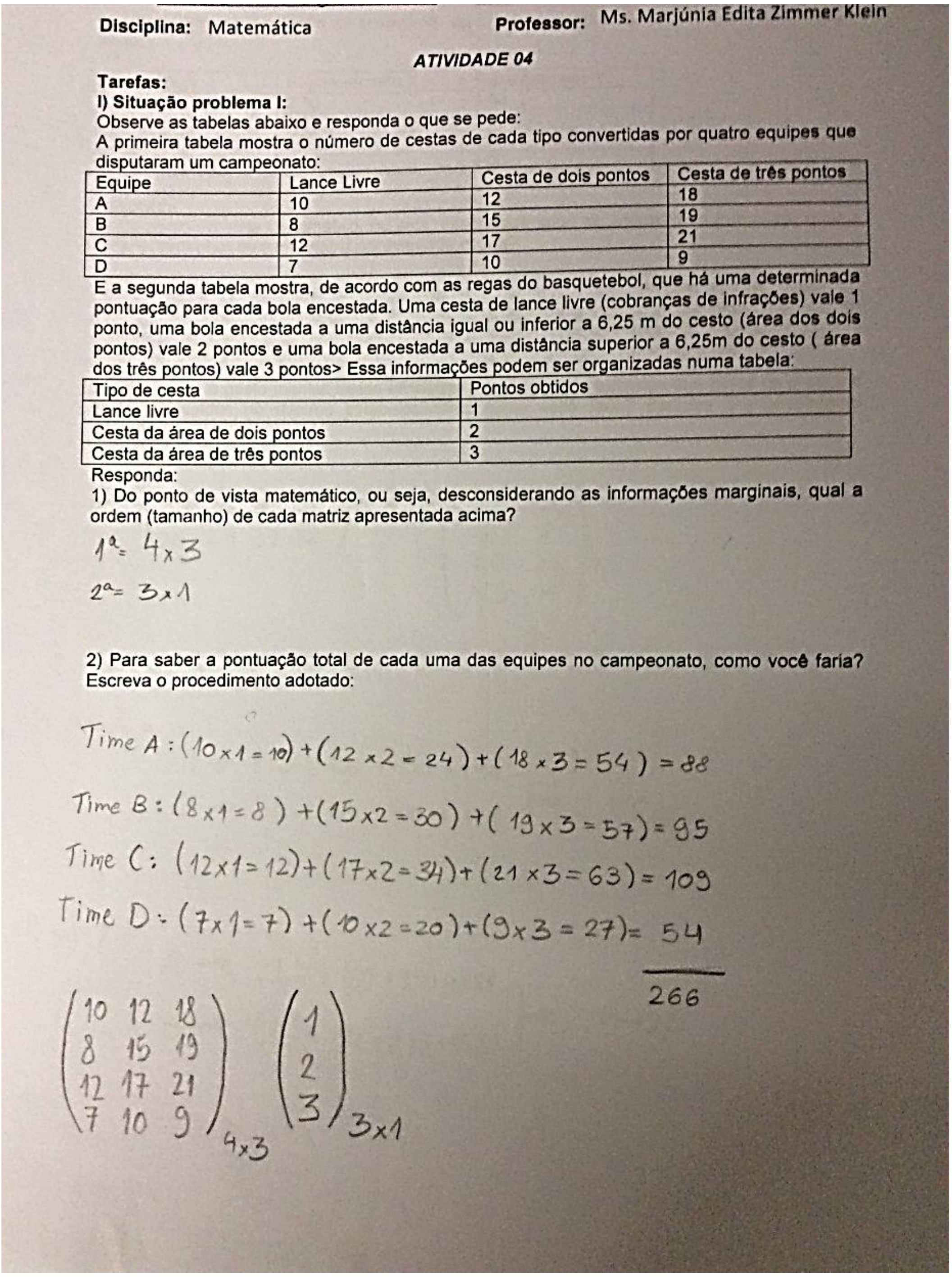
Fonte: os autores

Quadro 4: Respostas dos alunos da turma B para a segunda pergunta do problema I da UEPS 04

Para saber a pontuação total de cada uma das equipes no campeonato, como você faria? Escreva o procedimento adotado:		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Tem que fazer a primeira coluna vezes 1, a segunda vezes 2 e a terceira vezes 3. Depois somar os pontos por linha. $\underset{4x3}{\begin{pmatrix} 10 & 12 & 18 \\ 8 & 15 & 19 \\ 12 & 17 & 21 \\ 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}} \times \underset{3x1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \underset{4x1}{\begin{pmatrix} 88 \\ 95 \\ 109 \\ 54 \end{pmatrix}}$	23	100%
TOTAL	23	100%

Fonte: os autores

Alguns deles explicaram exatamente o que fizeram, conforme demonstra a figura abaixo.



Disciplina: Matemática **Professor:** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

ATIVIDADE 04

Tarefas:

I) Situação problema I:

Observe as tabelas abaixo e responda o que se pede:

A primeira tabela mostra o número de cestas de cada tipo convertidas por quatro equipes que disputaram um campeonato:

Equipe	Lance Livre	Cesta de dois pontos	Cesta de três pontos
A	10	12	18
B	8	15	19
C	12	17	21
D	7	10	9

E a segunda tabela mostra, de acordo com as regas do basquetebol, que há uma determinada pontuação para cada bola encestada. Uma cesta de lance livre (cobranças de infrações) vale 1 ponto, uma bola encestada a uma distância igual ou inferior a 6,25 m do cesto (área dos dois pontos) vale 2 pontos e uma bola encestada a uma distância superior a 6,25m do cesto (área dos três pontos) vale 3 pontos> Essa informações podem ser organizadas numa tabela:

Tipo de cesta	Pontos obtidos
Lance livre	1
Cesta da área de dois pontos	2
Cesta da área de três pontos	3

Responda:

1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

1ª= 4x3

2ª= 3x1

2) Para saber a pontuação total de cada uma das equipes no campeonato, como você faria? Escreva o procedimento adotado:

Time A : (10x1 = 10) + (12 x 2 = 24) + (18 x 3 = 54) = 88

Time B : (8x1 = 8) + (15x2 = 30) + (19 x 3 = 57) = 95

Time C : (12x1 = 12) + (17x2 = 34) + (21 x 3 = 63) = 109

Time D : (7x1 = 7) + (10x2 = 20) + (9x3 = 27) = 54

266

$$\begin{pmatrix} 10 & 12 & 18 \\ 8 & 15 & 19 \\ 12 & 17 & 21 \\ 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}_{4\times3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times1}$$

Figura 1: Respostas de um aluno para a UEPS 04, explicando o procedimento que deu origem a matriz produto.
Fonte: os autores

O problema II referia-se a um empresário que, querendo saber onde seria mais barato efetuar as compras de alguns produtos para dois orfanatos, fez uma consulta de preços e os alunos diante das duas tabelas deveriam calcular os valores de cada produto em cada supermercado e responder à pergunta de qual supermercado seria mais barato comprar.

Na turma A, obtiveram-se as seguintes respostas à primeira pergunta.

Quadro 5: Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta do problema II da UEPS 04

Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Tabela A: 2x4 Tabela B: 4x2	25	100%
TOTAL	25	100%

Fonte: os autores

Na turma B:

Quadro 6: Respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta do problema II da UEPS 04

Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Tabela A: 2x4 Tabela B: 4x2	22	96%
Tabela A: 2x4 Tabela B: 2x4	01	4%
TOTAL	23	100%

Fonte: os autores

Trata-se, portanto, de resultados muito satisfatórios para as atividades até o momento.

Na sequência, apresenta-se a segunda pergunta do problema II. A partir dela, observa-se que, como esse problema continha mais informações, surgiram outras formas de registros para encontrar a solução à pergunta feita, conforme se demonstra no Quadro 7.

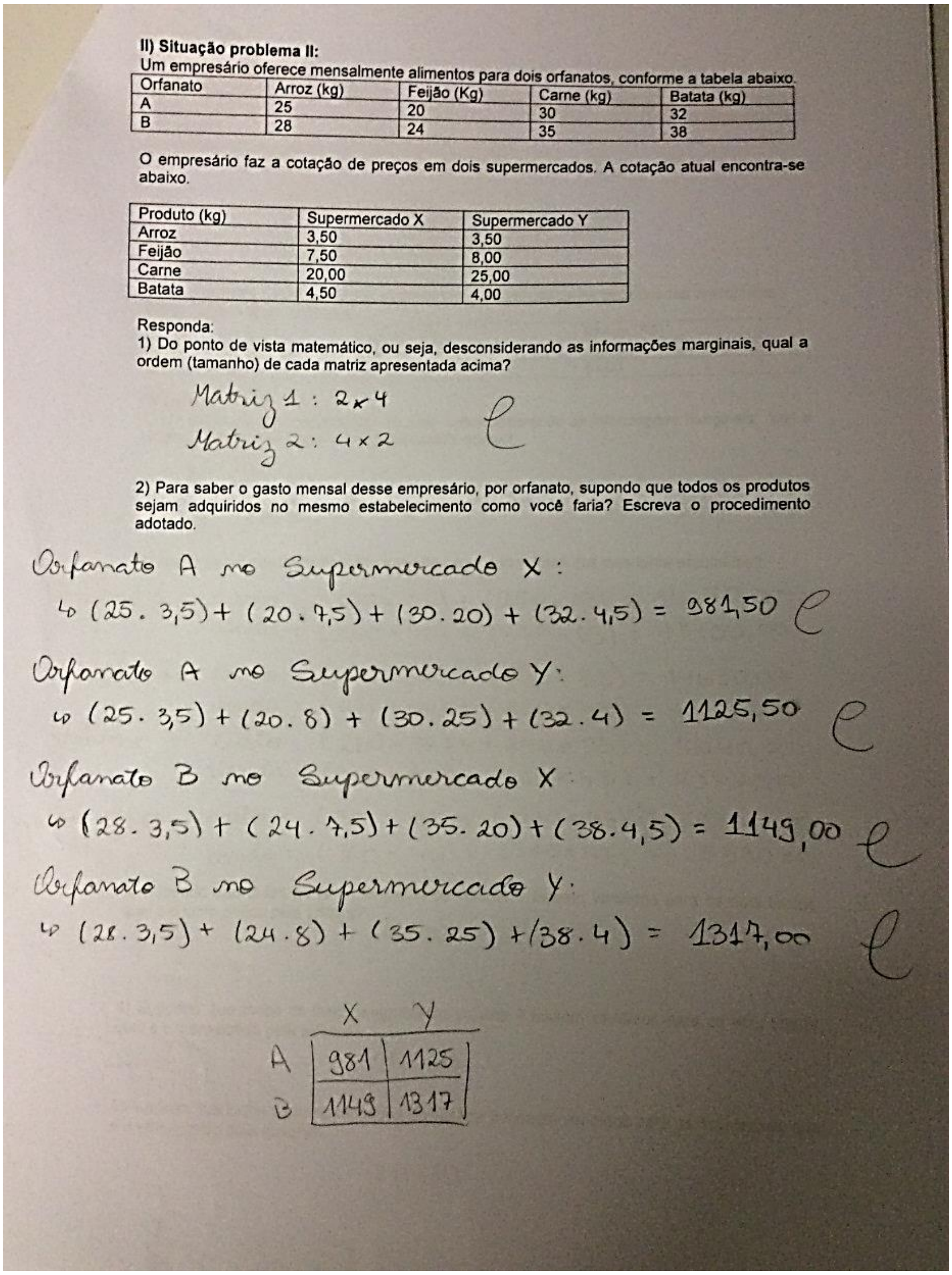
Quadro 7: Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta do problema II da UEPS 04

Para saber o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo estabelecimento como você faria? Escreva o procedimento adotado.		
Resposta	N° de alunos	Percentual
Multiplicando a quantidade de quilos necessários pelo seu valor por quilo. Após, somaria os valores de todos os produtos na mesma coluna, mesmo supermercado, fazendo separadamente para cada supermercado. $\begin{pmatrix} 25 & 20 & 30 & 32 \\ 28 & 24 & 35 & 38 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 3,50 & 3,50 \\ 7,50 & 8,00 \\ 20,00 & 25,00 \\ 4,50 & 4,00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 981,5 & 1125,5 \\ 1149,00 & \cdots 1317,00 \end{pmatrix}$	22	88%
A + B no supermercado X → 981,50 + 1149,50 = 2130,50 e A + B no supermercado Y → 1125,50 + 1317,00 = 2442,50	03	12%
TOTAL	25	100%

Fonte: os autores

Ao analisarem as respostas dos alunos da turma A, percebe-se que, sem nenhuma definição de como multiplicar as matrizes entre si, todos fizeram a multiplicação da forma correta, mas três alunos registraram-na de forma diferenciada, somando todos os valores de todos os produtos que o orfanato A e o orfanato B gastaria no supermercado X, o que não está errado, apenas é uma forma diferente de interpretar o problema, onde o valor de cada produto em cada supermercado não aparece discriminado, mas apenas o total gasto.

As figuras 2 e 3 registram o que foi descrito.



II) Situação problema II:
Um empresário oferece mensalmente alimentos para dois orfanatos, conforme a tabela abaixo.

Orfanato	Arroz (kg)	Feijão (Kg)	Carne (kg)	Batata (kg)
A	25	20	30	32
B	28	24	35	38

O empresário faz a cotação de preços em dois supermercados. A cotação atual encontra-se abaixo.

Produto (kg)	Supermercado X	Supermercado Y
Arroz	3,50	3,50
Feijão	7,50	8,00
Carne	20,00	25,00
Batata	4,50	4,00

Responda:
1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

Matriz 1 : 2x4
Matriz 2 : 4x2 C

2) Para saber o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo estabelecimento como você faria? Escreva o procedimento adotado.

Orfanato A no Supermercado X:
→ (25 . 3,5) + (20 . 7,5) + (30 . 20) + (32 . 4,5) = 981,50 C

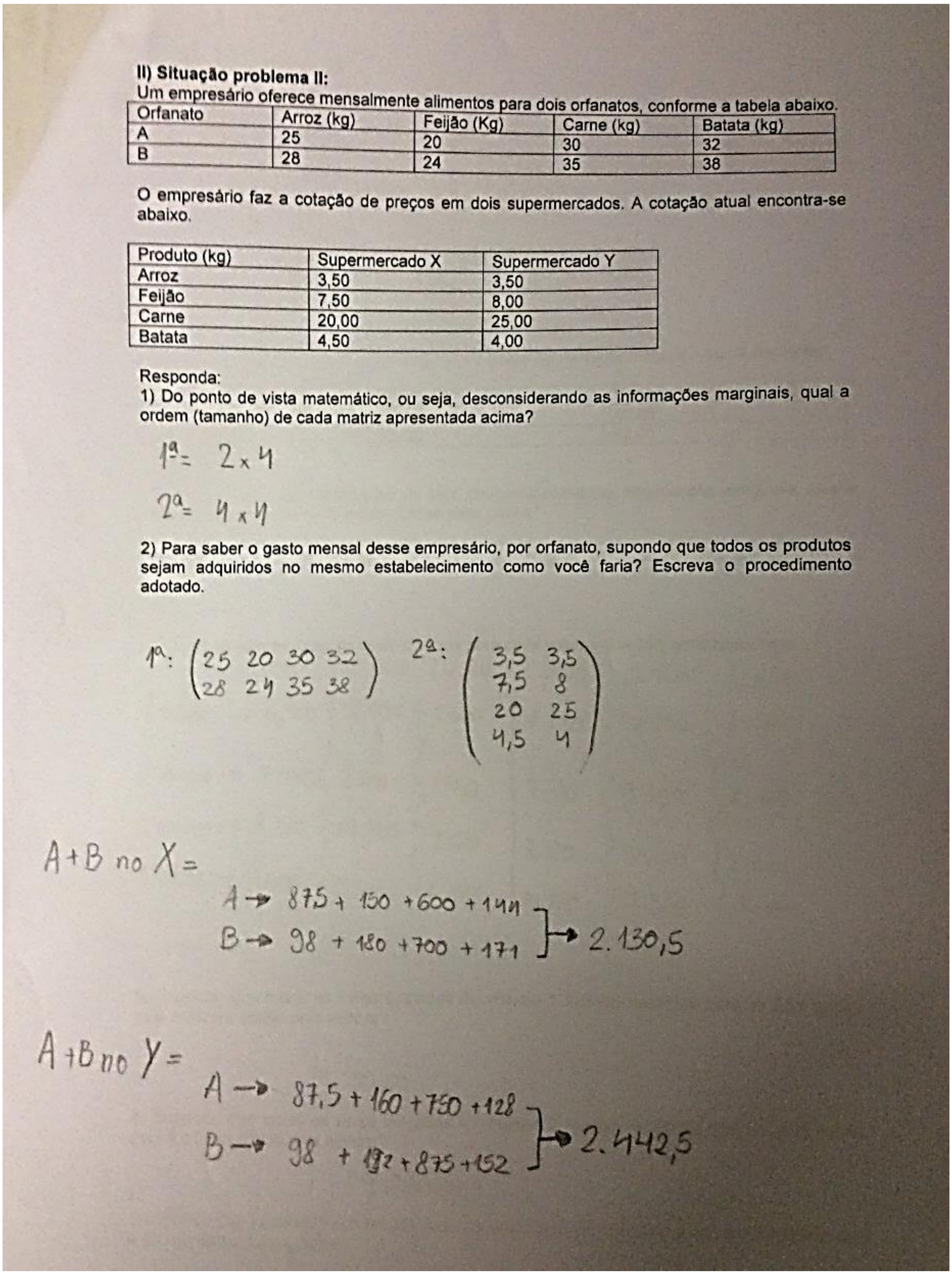
Orfanato A no Supermercado Y:
→ (25 . 3,5) + (20 . 8) + (30 . 25) + (32 . 4) = 1125,50 C

Orfanato B no Supermercado X
→ (28 . 3,5) + (24 . 7,5) + (35 . 20) + (38 . 4,5) = 1149,00 C

Orfanato B no Supermercado Y:
→ (28 . 3,5) + (24 . 8) + (35 . 25) + (38 . 4) = 1317,00 C

	X	Y
A	981	1125
B	1149	1317

Figura 2: Respostas de um aluno que fez a questão corretamente
Fonte: os autores



II) Situação problema II:

Um empresário oferece mensalmente alimentos para dois orfanatos, conforme a tabela abaixo.

Orfanato	Arroz (kg)	Feijão (Kg)	Carne (kg)	Batata (kg)
A	25	20	30	32
B	28	24	35	38

O empresário faz a cotação de preços em dois supermercados. A cotação atual encontra-se abaixo.

Produto (kg)	Supermercado X	Supermercado Y
Arroz	3,50	3,50
Feijão	7,50	8,00
Carne	20,00	25,00
Batata	4,50	4,00

Responda:

1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

1ª = 2 x 4

2ª = 4 x 4

2) Para saber o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo estabelecimento como você faria? Escreva o procedimento adotado.

$1^a: \begin{pmatrix} 25 & 20 & 30 & 32 \\ 28 & 24 & 35 & 38 \end{pmatrix}$ $2^a: \begin{pmatrix} 3,5 & 3,5 \\ 7,5 & 8 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4 \end{pmatrix}$

A+B no X =

A → 87,5 + 150 + 600 + 144
B → 98 + 180 + 700 + 171 → 2.130,5

A+B no Y =

A → 87,5 + 160 + 750 + 128
B → 98 + 192 + 875 + 152 → 2.442,5

Figura 3: Respostas de uma aluna que somou todos os gastos.

Fonte: os autores

Já na turma B, foram obtidas as seguintes respostas, demonstradas por meio do Quadro 8.

Quadro 8: Respostas dos alunos da turma B para a segunda pergunta do problema II da UEPS 04

Para saber o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo estabelecimento como você faria? Escreva o procedimento adotado.		
Resposta	N° de alunos	Percentual
Eu faria cada produto vezes o seu preço de um determinado mercado. $\begin{pmatrix} 25 & 20 & 30 & 32 \\ 28 & 24 & 35 & 38 \end{pmatrix} \mathrm{x} \begin{pmatrix} 3,50 & 3,50 \\ 7,50 & 8,00 \\ 20,00 & 25,00 \\ 4,50 & 4,00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 981,5 & 1125,5 \\ 1149,00 & \cdots 1317,00 \end{pmatrix}$	20	88%
$\begin{pmatrix} 981,5 \\ 1125,50 \\ 1149,00 \\ 1317,00 \end{pmatrix}$	02	8%
$\begin{pmatrix} 1317,00 \\ 1149,00 \\ 1125,50 \\ 981,50 \end{pmatrix}$	01	4%
TOTAL	23	100%

Fonte: os autores

É muito interessante observar que o registro dos alunos apresenta formas diferentes de indicar a multiplicação de matriz por matriz. Esses registros fazem refletir que, se isso não fosse permitido, talvez eles, simplesmente, copiariam do quadro as respostas, sem pensar no que estavam fazendo. Assim, tiveram a oportunidade de explicitar seus conhecimentos e discuti-los.

Na turma B três alunos não viram nenhum problema em registrar os resultados obtidos sem discriminá-los, apenas somando-os e colocando-os em colunas, inclusive um deles fez a ordem da coluna exatamente o contrário do outro. Segundo Vergnaud:

Em geral, os alunos não são capazes de explicar ou mesmo expressar em linguagem natural seus teoremas e conceitos-em-ação. Na abordagem de uma situação, os dados a serem trabalhados e a sequência de cálculos a serem feitos dependem de teoremas-em-ação e da identificação de diferentes tipos de elementos pertinentes. A maioria desses conceitos e teoremas-em-ação permanecem totalmente implícitos, mas eles podem também ser explícitos ou tornarem-se explícitos e aí entra o ensino: ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos e cientificamente aceitos, a partir do conhecimento implícito. É nesse sentido que conceito-em-ação e teoremas-em-ação podem, progressivamente, tornarem-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos, mas isso pode levar muito tempo. (VERGNAUD apud MOREIRA, 2004, p. 17).

Antes de analisar o problema III desta UEPS 04, é importante dizer que na turma B este problema não foi aplicado, pois houve uma situação envolvendo a carga horária. O tema do problema III era sobre uma editora que pretendia publicar uma coleção dois livros em três volumes. O problema continha duas tabelas, uma delas informando sobre a quantidade de exemplares de cada livro em cada volume e a outra sobre o preço de custo e o preço de venda de cada livro. Quando solicitados a responder cinco perguntas sobre o problema, 100% dos alunos acertaram as três primeiras perguntas. Isso é demonstrado nos Quadros 9, 10 e 11.

Quadro 9: Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta do problema III da UEPS 04

Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Tabela A: 4x2 Tabela B: 2x2	25	100%
TOTAL	25	100%

Fonte: os autores

Quadro 10: Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta do problema III da UEPS 04

Quais os valores totais de custo e venda para cada volume dos dois temas escolhidos?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
$\begin{pmatrix} 200 & 250 \\ 220 & 230 \\ 260 & 240 \\ 300 & 310 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 32 & 40 \\ 33 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14650 & 18750 \\ 14630 & 13690 \\ 16240 & 20720 \\ 19830 & 25330 \end{pmatrix}$	25	100%
TOTAL	25	100%

Fonte: os autores

Quadro 11: Respostas dos alunos da turma A para a terceira pergunta do problema III da UEPS 04

Supondo que todos os livros lançados do volume 1 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
R$ 4 100,00	25	100%
TOTAL	25	100%

Fonte: os autores

Em relação à quarta pergunta, quando se começou a propor questões mais desafiadoras, percebeu-se que os registros, começaram a se diferenciar, provavelmente devido à interpretação dessas questões. É o que se pode observar a partir dos dados contidos nos quadros a seguir.

Quadro 12: Respostas dos alunos da turma A para a quarta pergunta do problema III da UEPS 04

Supondo que todos os livros lançados do volume 2 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
R$ 4 060,00	24	100%
R$ 4 460,00	01	4%
TOTAL	25	100%

Fonte: os autores

Em relação à quinta pergunta, exigiu-se um pouco mais de interpretação e observou-se que, em aumentando o número de exigências, o número de registros diferentes também aumentou.

Quadro 13: Respostas dos alunos da turma A para a quinta pergunta do problema III da UEPS 04

Supondo que todos os livros lançados do volume 2 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
R$ 4 480,00	22	88%
R$ 4 472,00	01	4%
R$ 5 180,00	01	4%
R$ 3 680,00	01	4%
TOTAL	25	100%

Fonte: os autores

O aumento de informações nos problemas propostos torna a resposta cada vez mais peculiar. Isso, para alguns alunos, interfere na resposta, talvez pela dificuldade de interpretação ou pela falta de atenção, aumentando o número de registros diferentes, todavia ainda não interferindo no percentual de maneira significativa.

Convém destacar que os alunos, em duplas, tiveram tempo para realizar as tarefas desta UEPS 04 e depois discutiram-se as respostas no quadro em conjunto com a professora. No item que solicitava uma conclusão para que a multiplicação de matriz por matriz pudesse acontecer, a maioria dos alunos percebeu que o número de colunas da primeira matriz deveria ser igual ao número de linhas da segunda matriz. Porém, não estando satisfeitos com os resultados, foi aplicada mais uma UEPS, a UEPS 05, ainda sobre o tema de multiplicação de matriz por matriz. Isto se deveu ao fato de que tivemos o sentimento que alguns dos alunos precisavam de mais exemplos para poderem acompanhar os demais e confirmarem suas conclusões a respeito da condição para que a multiplicação de matriz por matriz aconteça. Na sequência, foram realizados exercícios do livro texto e outros elaborados pela professora envolvendo questões de ENEM e de vestibulares, as avaliações formais e o PAS.

Considerações finais

Pelo que foi exposto e por todo o envolvimento dos alunos e da professora pesquisadora é possível afirmar que uma metodologia baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa e que utiliza um material potencialmente significativo tem condições de produzir sensíveis mudanças no processo de ensino e de aprendizagem de matrizes, fazendo do aluno um indivíduo que participa do processo, explicita, discute e socializa as suas ideias. A coleta de dados após a realização de cada uma das UEPS e a sua análise confirmou esse fato. Mais especificamente, sobre a UEPS 04, cujo objetivo era o de definir como e quais são as condições para que aconteça a multiplicação de matriz por matriz, percebemos que os alunos construíram as matrizes corretamente e responderam aos questionamentos propostos sem maiores dificuldades, obtendo um alto percentual de acertos. Na descrição da condição de multiplicação de matriz por matriz os alunos perceberam, sem grandes dificuldades, que os dados de cada uma das linhas da primeira matriz estavam sendo relacionados com os dados de cada uma das colunas da segunda matriz e registraram esse fato, utilizando diversas maneiras, mas com significado. Após a aplicação da UEPS 04, na resolução dos exercícios do livro texto, na resolução das questões de ENEM e de vestibulares e nas respostas dadas nas avaliações individuais, os alunos tiveram oportunidades de explicitar, discutir, registrar e aplicar seus conhecimentos sobre o conteúdo de multiplicação de matriz por matriz em situações semelhantes e, em todas as atividades propostas, a análise dos resultados demonstrou evidências de uma aprendizagem de real significado.

A metodologia também permitiu que o aluno reelaborasse os seus conhecimentos prévios e incrementasse à sua bagagem cognitiva novos conhecimentos.

Acreditamos que todo esse processo contribuiu para a formação de um aluno mais crítico, criativo e autônomo, enriquecendo o seu crescimento pessoal e daqueles que convivem com ele. Consideramos que esse aluno estará melhor preparado para uma sociedade em constantes mudanças, que exige cada vez mais habilidades e competências para a tomada de decisões.

Afirmar que Aprendizagem Significativa pode modificar a aprendizagem é poder considerar que se o aluno encontra o significado para o que está aprendendo, aumenta as possibilidades de (re)construir o seu conhecimento.

Referências

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. Psicologia Educacional. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. 625p.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO – MEC, 2013. Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM). Acesso em 10 de agosto, 2016, http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO – MEC, 2018. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Acesso em 15 de março, 2018, http://basenacionalcomumcurricular.mec.gov.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO – MEC, 2018. Plano Nacional de Educação (PNE). Acesso em 15 de março, 2018, http://pne.mec.gov.br

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. Análise Textual Discursiva. Ijuí. Unijuí. 2007. 224p.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem Significativa Crítica. Porto Alegre. 2005. 47p.

MOREIRA, M. A. Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS. Acesso em 10 de agosto, 2016, www.if.ufrgs/~moreira. p.2

MOREIRA, M. A. ; MASINI, E. F. S. Aprendizagem significativa: condições para ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos. São Paulo, 2016. Vetor. 2008. 295p.

MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a investigação nesta área. Porto Alegre: Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004. 107p.

VASCONCELLOS, Celso dos Santos. Currículo: A atividade Humana como princípio educativo. São Paulo: Libertad, 2009. 259p.

APÊNDICES

Apêndice A – Questionário inicial

PPG EM CIÊNCIAS: QUÍMICA DA VIDA E DA SAÚDE

Aluna: Marjunia Édita Zimmer Klein, aluna do Doutorado (2015/1)

Título: "O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATRIZES TENDO COMO FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL"

Questões para a entrevista preliminar:

Objetivo: Identificar se o aluno considera ter dificuldades em Matemática e consegue identificá-las.

Data:_____/_____/2016

1. Você considera que possui dificuldades em Matemática?

( ) Sim

Você consegue exemplificar essas dificuldades e em que momentos elas acontecem?

Como você costuma resolver as suas dificuldades em Matemática?

( ) Não

Por quê?

Você consegue dar significado ao conteúdo desenvolvido em aula, por exemplo, aplicando-o em alguma situação do cotidiano?

Obs.:

Apêndice B - UEPS 04

PROPOSTA DE UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO (UEPS) PARA O ENSINO DE MATRIZES – UEPS 04

Objetivo: Definir a multiplicação de matriz por matriz

Sequência:

1. Situação-problema inicial: os alunos receberão individualmente uma folha (ver abaixo) com situações problemas para serem resolvidas em duplas.

Instituição Evangélica de Novo Hamburgo
Centro Sinodal de Ensino Médio de Novo Hamburgo
Unidade Fundação Evangélica - Ensino Médio

Nome:____________________________ **Nº:**___ **Série/Turma:** ______ **Data:** ___/ ___/ ____

Disciplina: - Matemática **Professor:** Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein

ATIVIDADE 04

Tarefas:

I) Situação-problema I:

Observe as tabelas abaixo e responda o que se pede:

A primeira tabela mostra o número de cestas de cada tipo convertidas por quatro equipes que disputaram um campeonato:

Equipe	Lance Livre	Cesta de dois pontos	Cesta de três pontos
A	10	12	18
B	8	15	19
C	12	17	21
D	7	10	9

E a segunda tabela mostra, de acordo com as regras do basquetebol, que há uma determinada pontuação para cada bola encestada. Uma cesta de lance livre (cobranças de infrações) vale 1 ponto, uma bola encestada a uma distância igual ou inferior a 6,25 m do cesto (área dos dois pontos) vale 2 pontos e uma bola encestada a uma distância superior a 6,25m do cesto (área dos três pontos) vale 3 pontos. Essas informações podem ser organizadas numa tabela:

Tipo de cesta	Pontos obtidos
Lance livre	1
Cesta da área de dois pontos	2
Cesta da área de três pontos	3

Fonte: Matemática, 2ª série: ensino médio/ Felipe Fujita [et al.], São Paulo. 1ª ed. Edições SM. 2009. (Coleção ser protagonista).

Responda:

1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

2) Para saber a pontuação total de cada uma das equipes no campeonato, como você faria? Escreva o procedimento adotado:

II) Situação-problema II:

Um empresário oferece mensalmente alimentos para dois orfanatos, conforme a tabela abaixo.

Orfanato	Arroz (kg)	Feijão (Kg)	Carne (kg)	Batata (kg)
A	25	20	30	32
B	28	24	35	38

O empresário faz a cotação de preços em dois supermercados. A cotação atual encontra-se abaixo.

Produto (kg)	Supermercado X	Supermercado Y
Arroz	3,50	3,50
Feijão	7,50	8,00
Carne	20,00	25,00
Batata	4,50	4,00

Fonte: Matemática Fundamental: uma nova abordagem. Volume unico/ José Ruy Giovanni, José Ruy Giovanni Jr, José Roberto Bonjorno. São Paulo. 2ª ed. FTD. 2011.

Responda:

1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

2) Para saber o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo estabelecimento como você faria? Escreva o procedimento adotado.

III) Situação-problema III:

Uma editora pretende publicar uma coleção de livros de História do Brasil e História Geral em duas versões: Volumes 1,2,3 e único. A primeira tabela mostra a quantidade de cada volume a ser lançada.

Quantidade de exemplares (em milhares de unidades)

Volume	História do Brasil	História Geral
1	200	250
2	220	230
3	260	240
Único	300	310

A segunda tabela mostra o preço de custo e o preço de venda de cada um dos exemplares.

Preço por exemplar (em reais)

Tema	Custo(R$)	Venda (R$)
História do Brasil	32,00	40,00
História Geral	33,00	43,00

Fonte: Matemática, 2ª série: ensino médio/ Felipe Fujita [et al.], São Paulo. 1ª ed. Edições SM. 2009. (Coleção ser protagonista).

Responda:

1) Do ponto de vista matemático, ou seja, desconsiderando as informações marginais, qual a ordem (tamanho) de cada matriz apresentada acima?

2) Quais os valores totais de custo e venda para cada volume dos dois temas escolhidos?

3) Supondo que todos os livros lançados do volume 1 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?

4) Supondo que todos os livros lançados do volume 2 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?

5) Supondo que todos os livros lançados do volume 3 fossem vendidos para os dois temas, qual é o lucro obtido pela editora?

2. Discussão: Permitir que algumas duplas externalizem as respostas para que o grupo de sala de aula possa discutir e observar as diferenças, se houver.

3. Conclusão: Anotar algumas observações quanto às tabelas respostas e verificar como podemos multiplicar uma matriz por outra matriz, questionando se existe uma condição para que a soma/subtração aconteça.

4. Avaliação: Diagnóstico analítico, pela professora, sobre as evidências que envolvem a multiplicação de matriz por matriz, que percebeu ou não, ao longo das tarefas e no grupo.

5. Número de horas-aula destinadas para a atividade: 04 h/a

Apêndice C – Questionário final

PPG EM CIÊNCIAS: QUÍMICA DA VIDA E DA SAÚDE

Aluna: Marjunia Édita Zimmer Klein, aluna do Doutorado (2015/1)

Questões para o questionário final

Objetivo: Identificar as percepções do aluno devido à mudança de metodologia no ensino e na aprendizagem de matrizes.

Data: ______/______/______

Turma: ___________________

1. Você observou que alteramos a metodologia de ensino nas aulas de Matemática durante este terceiro trimestre. Você considera que esta alteração na metodologia auxiliou na sua aprendizagem em Matemática?

1.1. Se você marcou sim, você consegue exemplificar?

2. Você consegue dar significado ao conteúdo desenvolvido em aula, por exemplo, aplicando-o em alguma situação do cotidiano?

Apêndice AA - VII ENAS – Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa – Comunicação oral intitulada “A Teoria da Aprendizagem Significativa e o ensino de Matrizes”

A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E O ENSINO DE MATRIZES

MARJÚNIA ÉDITA ZIMMER KLEIN

Doutoranda do Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências: Química da Vida e da Saúde

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS/ marjunia.klein@gmail.com

JOSÉ CLÁUDIO DEL PINO

Professor do Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências: Química da Vida e da Saúde

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS/ delpinojc@yahoo.com.br

Resumo: Este trabalho de pesquisa tem como fundamentação teórica a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (TAS) e seus objetivos são: propor, aplicar e buscar evidências de uma aprendizagem significativa em relação aos conceitos envolvidos no campo conceitual da adição e subtração de Matrizes. Segundo Ausubel, a aprendizagem significativa tem chance de acontecer quando há uma interação não arbitrária e substantiva entre os novos conhecimentos (ideias, proposições, informações, conceitos, símbolos) e os conhecimentos prévios (subsunçores), contribuindo para a diferenciação, (re)elaboração e estabilidade dos mesmos. Moreira (2005) complementa, ao chamar a atenção para o fato de que é por meio da aprendizagem significativa crítica que o aluno vai ser capaz de lidar com as mudanças, manejar a informação, usufruir da tecnologia e ser o protagonista de sua aprendizagem. Sendo assim, foram elaboradas e aplicadas as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), nas quais, os alunos, individualmente ou em pequenos grupos, poderiam explicitar, discutir e (re)constuir seus conhecimentos em relação ao tema da adição e subtração de matrizes. Os resultados confirmaram a importância de elaborar atividades potencialmente significativas que permitam ao aluno explicitar suas ideias, interagir com os colegas e com o professor, evoluindo assim, progressivamente, num determinado campo conceitual.

Palavras-chave: Matemática. Matriz. Conhecimentos Prévios. Aprendizagem Significativa. Metodologia.

Abstract: This research paper is theoretically founded on Ausubel's Theory of Meaningful Learning (TML) with the following objectives: propose, apply and seek for evidence of meaningful learning related to the concepts involved in the conceptual field of Matrix addition and subtraction. According to Ausubel, meaningful learning is likely to happen when there is an non-arbitrary, substantive interaction between new pieces of knowledge (ideas, propositions, information, concepts, symbols) and previous knowledge (subsumers) that contributes to their differentiation, (re)elaboration and stability. Moreira (2005) complements further by calling attention to the fact that it is through critical meaningful learning that students will be capable of dealing with changes, manage information, make use of technology and be protagonists of their learning. Thus, Potentially Meaningful Teaching Units

(PMTU) were elaborated and applied, where students, either individually or in small groups, could explicit, discuss and (re)construct all their knowledge regarding the matrix addition and subtraction topic. The results confirm how important it is to elaborate potentially meaningful activities that allow students to explicit their ideas, interact with colleagues and with the teacher, to then progressively evolve within a certain conceptual field.

Keywords: Mathematics. Matrix. Previous Knowledge. Meaningful Learning. Methodology.

1 – Introdução

Os resultados, nada animadores, em relação ao ensino e a aprendizagem de conteúdos de Matemática divulgados, tanto em nível Nacional, por meio do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) e Internacional, por meio do PISA (Programme for International Student Assessment), reforçam a preocupação com as dificuldades conceituais e procedimentais que os alunos apresentam neste componente curricular.

Acreditamos ser a sala de aula o local mais apropriado para realizarmos possíveis mudanças nessa situação. Assim sendo, elencamos o conteúdo de matrizes, mais especificamente, a adição e a subtração de Matrizes, e a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel como elementos motivadores para iniciar essa mudança.

Temos como objetivo, propor e avaliar uma metodologia de ensino baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (TAS), elaborando Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) no ensino e na aprendizagem da adição e subtração de Matrizes, investigando como estas atividades podem contribuir para a construção significativa dos conceitos envolvidos neste conteúdo de Matemática.

Entende-se que a Matemática deve proporcionar ao educando o desenvolvimento de competências e habilidades que permitam identificar, formular e resolver problemas, utilizando um rigor lógico-científico na análise da situação-problema, bem como a correlação com outros campos do saber.

Acreditamos que o diferencial da pesquisa é o investimento sobre as concepções que os alunos já têm (subsunçores) e a sua utilização pelo professor para planejar e mediar as atividades subsequentes. As Unidades de Ensino Potencialmente Significativas foram previamente elaboradas e contemplaram os aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais, favorecendo ao aluno o papel de protagonista ao construir e evoluir no seu conhecimento.

2 – Marco Teórico e Revisão da Literatura

Ausubel (1980) considera que a finalidade do ensino é a aprendizagem pelo aluno e que ambas, ensino e aprendizagem coexistem. Considera que é útil prestarmos atenção à relação recíproca que o ensino e a aprendizagem têm, ou seja a relação que inclui os objetivos do ensino, os efeitos do ensino e a avaliação do ensino.

> ... é útil voltar-nos para aqueles aspectos do ensino e aprendizagem que têm uma relação dupla. Esta relação recíproca inclui os objetivos, os efeitos e a avaliação de ensino. Desta forma, embora seja verdadeiro que ensino é logicamente diferente da aprendizagem e pode ser analisado independentemente daquilo que os alunos aprendem, qual seria a vantagem prática desta análise em separada? A facilitação da aprendizagem é a própria finalidade do ensino. O ato de ensinar não se encerra em si mesmo, pois a finalidade do ensino é a aprendizagem por aparte do aluno; muito embora o insucesso na aprendizagem dos alunos não indique necessariamente a competência do professor, o produto da aprendizagem é ainda a única medida possível para se avaliar o mérito do ensino. (AUSUBEL, 1980. p. 12).

Considerando o que foi dito, acredita-se que a busca por uma teoria de aprendizagem adequada pode nos auxiliar, oferecer indicações e orientar as ações pedagógicas de forma que o ensino efetivamente aconteça. Não se quer ter a pretensão de afirmar que uma teoria de aprendizagem é suficiente para a melhoria do ensino, temos consciência de que vários fatores podem intervir, mas considera-se ser uma direção, um rumo, um caminho para que o ensino, efetivamente, aconteça.

Ausubel destaca que os novos conceitos (imagens, símbolos, conceitos ou proposições) precisam poder se relacionar com os conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aluno de maneira que contribuam para esclarecer, melhorar ou até rever aquilo que já está estabelecido, só assim haverá a possibilidade de uma aprendizagem com significado. E, que para que isto aconteça, deve haver uma disposição do aluno e um material que seja potencialmente significativo:

> A aprendizagem significativa pressupõe que o aluno manifeste uma disposição para relacionar, de forma não arbitrária e substantiva, o novo material à estrutura cognitiva – e que o material aprendido seja potencialmente significativo – principalmente incorporável à sua estrutura de conhecimento.... (AUSUBEL, 1980, p.34).

Fica claro, que além do aluno, o professor tem uma tarefa fundamental no desenrolar das atividades. Quer seja ao elaborar este material e orientar o aluno na realização das atividades ou ao observar a realização das atividades, fazendo anotações e, se necessário, intervindo de modo a reorientar os alunos quanto às suas possíveis dúvidas.

O material, então, a ser elaborado, pelo professor, numa metodologia de aprendizagem significativa, deve respeitar no mínimo duas condições, segundo Ausubel:

- a natureza do conteúdo a ser aprendido deve ter significado lógico, considera-se que vai partir de ideias mais simples até às mais complexas, além de estabelecer relações entre elas e poder relacionar-se de forma não arbitrária e substantiva às estruturas cognitivas já existentes; (a maioria dos conteúdos trabalhados na escola possui esta característica)

- a natureza da estrutura cognitiva do aluno deve permitir, por meio de conceitos subsunçores (conhecimentos prévios), uma relação não arbitrária e substantiva entre o novo conhecimento e aquele que já existe.

Moreira (2005) enfatiza que a aprendizagem, dentro de uma óptica contemporânea, não pode se preocupar apenas em adquirir novos conhecimentos, mas é importante adquiri-los criticamente.

> É através da aprendizagem significativa crítica que o aluno poderá fazer parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, não ser subjugado por ela, por seus mitos e ideologias. É através dessa aprendizagem que ele poderá lidar construtivamente com a mudança sem deixar-se dominar por ela, manejar a informação sem sentir-se impotente frente a sua grande disponibilidade e velocidade de fluxo, usufruir e desenvolver a tecnologia sem tornar-se tecnófilo. Por meio dela, poderá trabalhar com a incerteza, a relatividade, a não-causalidade, a probabilidade, a não-dicotomização das diferenças, com a ideia de que o conhecimento é construção (ou invenção) nossa, que apenas representamos o mundo e nunca o captamos diretamente. (MOREIRA, 2005, p.18)

Moreira (2005) sugere alguns princípios para facilitar a aprendizagem significativa crítica, quais sejam:

- Uma negociação de significados entre o aluno e professor, centrada na interação e incentivando a formulação de perguntas ao invés de respostas;

- O uso de uma diversidade de materiais educativos, além do livro texto, no intuito de facilitar a aprendizagem significativa;

- Considerar a aprendizagem como um processo dinâmico de interação, diferenciação e integração entre conhecimentos novos e pré-existentes, incentivando o aluno a não ser passivo durante o processo, mas argumentar, discutir e socializar seus conhecimentos;

- Aprender uma disciplina (Biologia, Matemática, História, Física, Literatura, ...) é apropriar-se de sua linguagem, com seus símbolos, signos, palavras e proposições, considerando seus significados;

- Observar que o significado está nas pessoas e não nas palavras. Assim, elas só poderão dar o significado para aquilo que está ao seu alcance ou se forem motivadas (organizadores prévios) a pensar sobre o assunto;

- Considerar o erro como parte integrante do processo de aprendizagem e a sua superação como uma evolução no conhecimento de determinado conteúdo. O conhecimento não é algo permanente, está em constante modificação e reestruturação e aprendemos corrigindo nossos erros;

- Desaprender para reestruturar algum conhecimento prévio que possa estar impedindo a aprendizagem ou porque, devido ao ambiente que está em constante transformação, há a necessidade de rever conceitos e estratégias para poder sobreviver;

- Perceber que as perguntas movem a curiosidade e o conhecimento humano, por vezes, utiliza metáforas para respondê-las. Incentivar os alunos a perguntar ao invés de responder;

- Evitar a utilização apenas do quadro como forma de transmissão de conhecimento, mas diversificar as estratégias;

A aprendizagem significativa crítica deve permitir que o aluno se torne autônomo e participe criticamente da sociedade em constante transformação, sentindo-se parte integrante da mesma e colaborando com os seus avanços.

> Por uma questão de sobrevivência, é preciso mudar o foco da aprendizagem e do ensino que busca facilitá-la. Meu argumento, parafraseando Postman e Weingartner (1969) é que este foco deveria estar na aprendizagem significativa subversiva, ou crítica como me parece melhor, aquela que permitirá ao sujeito fazer parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, estar fora dela, manejar a informação, criticamente, sem sentir-se imponente frente a ela; usufruir a tecnologia sem idolatrá-la; mudar sem ser dominado pela mudança; viver em uma economia de mercado sem deixar que este resolva sua vida; aceitar a globalização sem aceitar suas perversidades; conviver com a incerteza, a relatividade, a causalidade múltipla, a

> construção metafórica do conhecimento, a probabilidade das coisas, a não dicotomização das diferenças, a recursividade das representações mentais; rejeitar as verdades fixas, as certezas, as definições absolutas, as entidades isoladas. (MOREIRA, 2005, p. 39)

Moreira (2005) cita ainda as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), como uma proposta didática para alterar, pelo menos dentro do possível, o modelo de narrativa que costumamos ter em sala de aula e que já sabemos que não está produzindo aprendizagens.

As Unidades de Ensino Potencialmente Significativas são sequências didáticas de ensino, teoricamente fundamentadas, voltadas para a aprendizagem significativa, elaboradas pelo professor, com tópicos específicos de conhecimentos a serem desenvolvidos. Seu objetivo é auxiliar a aprendizagem significativa por meio de atividades que permitam a explicitação de conhecimentos dos alunos para posterior análise e discussão.

A construção das UEPS envolve:

- título: de acordo com o conteúdo/tópico a ser estudado;
- objetivo: definir os objetivos a serem alcançados nesta UEPS;
- filosofia: só há ensino se há aprendizagem e esta deve ser significativ;
- marco teórico: a teoria da aprendizagem significativa e seus claboradores;
- princípios:
    - Não esquecer que o conhecimento prévio é a variável que mais influencia a aprendizagem significativa;
    - Pensar, sentir e agir estão integrados no ser que aprende, quando a aprendizagem é significativa;
    - O aluno dever estar interressado em aprender;
    - Organizadores prévios podem e devem ser uitlizados, sempre que necessário;
    - São as situações-problema que dão sentido ao conhecimento (Vergnaud) e elas são criadas para despertar a curiosidade do aluno;
    - As situações- problema podem funcionar como organizadores prévios;
    - As situações-problema devem ser propostas em um nível crescente de complexidade;
    - Diante de uma nova situação é importante criar um modelo mental, na memória de trabalho, análogo estruturalmente a esta situação (Johnson-Laird);
    - Não esquecer de levar em conta, na organização do ensino, a diferenciação progressiva, a reconciliação integrativa e a consolidação (Ausubel);

- Ao longo da aprendizagem, progressivamente, buscar evidências de que ela é significativa;
- O professor é organizador e mediador de situações-problema (Vergnaud e Gowin);
- Considerar a linguagem e a interação social durante o processo de aprendizagem;
- Existe uma relação triádica professor, aluno e materiais educativos (Gowin);
- Esta relação poderá ser quádrica na medida em que o computador não for utilizado apenas como material educativo;
- A aprendizagem deve ser significativa e crítica (Moreira);
- A aprendizagem significativa crítica estimula a formulação de perguntas ao invés da memorização e o abandono das aulas narrativas em prol de aulas com materiais e estragtégias diversificadas;

➢ aspectos sequenciais:
  - definir os assuntos a serem abordados e identificar objetivos a serem alcançados;
  - criar momentos introdutórios (discussão, mapa conceitual, questionário, filme, história, texto, ...) de aprendizagem que permitam que o aluno externalize ou registre o seu conhecimento prévio sobre o assunto;
  - considerar o conhecimento prévio demonstrado na atividade anterior e elaborar situações de aprendizagem que permitam que o aluno perceba uma relação entre os seus conhecimentos prévios e os novos conhecimentos;
  - respeitando a diferenciação progressiva, propor outras atividades, relacionadas ao assunto, mas que continuem permitindo ao aluno explicitar seus conhecimentos;
  - retomar os aspectos mais gerais daquilo que se vai ensinar e a partir deles, resignificar os novos conhecimentos, evoluindo progressivamente para características mais específicas do conteúdo por meio novas situações de aprendizagem;
  - concluir as situações de aprendizagem, definindo, anotando e retomando as características mais importantes e relevantes, integrando e buscando a reconciliação integrativa. Propor novas situações de aprendizagens em níveis de maior complexidade em relação às situações anteriores. É importante que se considerem também atividades que permitam a discussão em pequenos grupos e posterior discussão que envolva todos os alunos, sempre com a mediação do professor;
  - A avaliação deve acontecer durante o processo de aprendizagem. Por meio de registros que possam dar evidências de uma aprendizagem de real significado.

Será importante considerar os aspectos individuais para a resolução de situações de aprendizagem, considerando o nível de interpretação e resolução conceitual e procedimental da mesma, bem como permitir avaliações colaborativas observando os mesmos itens. A avaliação permitirá também a validação das situações de aprendizagem. É importante considerar que a mediação do professor pode acontecer a qualquer momento do processo como forma de esclarecer possíveis dúvidas;

- A UEPS atingirá êxito se os alunos apresentarem evidências de uma aprendizagem de real significado, interpretando, resolvendo e aplicando os conhecimentos adquiridos de forma que demonstrem terem atingido um domínio desse consteúdo.

➢ Aspectos transversais:

- Considerar atividades diferenciadas durante o processo e incentivar o questionamento em lugar das respostas prontas;
- Propor que os alunos formulem situações de aprendizagem em relação ao conteúdo em questão;
- Permitir momentos individuais e em grupo durante as situações de aprendizagem.

Ao se pesquisar, em repositórios digitais e em revistas (muitas delas eletrônicas) em busca de artigos sobre Aprendizagem Significativa e Matrizes não se encontraram trabalhos relacionando ambos os temas. Também arriscamos dizer que a Aprendizagem Significativa e o componente curricular de Matemática encontram-se em fase de enamoramento, pois há poucos trabalhos nessa área.

3 – Metodologia

No intuito de investigar como uma metodologia baseada na TAS de Ausubel poderia contribuir para a construção de uma aprendizagem significativa no campo conceitual das matrizes, optou-se por utilizar uma metodologia qualitativa. Sendo assim, julgou-se ser a análise textual discursiva a opção mais apropriada para a pesquisa. Segundo Moraes e Galiazzi:

> O processo da Análise Textual Discursiva tem fundamentos na fenomenologia e na hermenêutica. Valoriza os sujeitos em seus modos de expressão dos fenômenos. Centra sua procura em redes coletivas de significados construídos subjetivamente, os quais o pesquisador se desfia a compreender, descrever e interpretar. São processos hermenêuticos. (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.169).

As atividades foram programadas e realizadas em duas turmas da segunda série do ensino médio de uma escola da rede particular de Novo Hamburgo, nas quais leciono a disciplina de Matemática. Foram 51 alunos envolvidos na pesquisa, uma turma A, com 28 alunos, sendo 14 meninos e 14 meninas, com cinco períodos de Matemática por semana e a outra turma B, com 23 alunos, sendo 09 meninos e 14 meninas, com quatro períodos de Matemática por semana.

Foram planejadas oito UEPS, mas devido a limitação do texto vamos relatar apenas a UEPS 03, relativa à adição e subtração de matrizes.

4 – Apresentação e Discussão dos Dados

A UEPS 03 teve como objetivo chegar à definição do conceito de adição e subtração de matrizes partindo-se de conhecimentos prévios. A atividade envolveu duas tabelas para o problema gerador que continha informações sobre a situação de notas de um aluno em Matemática, Química e Física em dois trimestres letivos (primeiro e segundo) e, por meio de perguntas a respeito das mesmas, os alunos foram convidados a realizarem registros individuais com posterior discussão em duplas/trios e compartilhamentos das respostas.

A seguir, apresentam-se as tabelas com a análise das respostas dadas pelos alunos para cada uma das perguntas.

Quadro 1. Respostas dos alunos da turma A para a primeira pergunta

1) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Matemática até o momento, como você faria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Somar a nota de Matemática da primeira matriz (a_{11}) com a nota da segunda matriz (b_{11}). 5,0 +6,5=11,5	27	96%
Olhar a primeira coluna	01	4%
TOTAL	28	100%

Quadro 2. Respostas dos alunos da turma A para o complemento da primeira pergunta

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Faria 6,5 menos 5,0, ou seja, a diferença entre eles, que daria 1,5.	28	100%
TOTAL	28	100%

Assim como os alunos da turma B.

Quadro 3. Respostas dos alunos da turma B para a primeira pergunta

1) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Matemática até o momento, como você faria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Somaria quem está na primeira linha primeira coluna, 5,0, da primeira matriz com quem está na primeira linha, primeira coluna 6,5, da segunda matriz	21	88%
Juntar os dois e dividir por dois. 5,0 +6,5 =11,5:2=5,75	3	12%
TOTAL	24	100%

Quadro 4. Respostas dos alunos da turma B para o complemento da primeira pergunta

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Faria a segunda nota menos a primeira e daria 1,5	24	100%
TOTAL	24	100%

Quadro 5. Respostas dos alunos da turma A para a segunda pergunta

2) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Química até o momento, como você faria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Somar a_{12} com b_{12} $\rightarrow$ 6,0 + 7,5 = 13,5	15	54%
Somaria as médias dos dois trimestres	11	39%
Olhar a segunda coluna	02	7%
TOTAL	28	100%

Quadro 6. Respostas dos alunos da turma A para o complemento da segunda pergunta

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Diminuir as duas médias	20	71%
Subtração$b_{12} - a_{11} = 1{,}5$	08	29%
TOTAL	28	100%

Quadro 7. Respostas dos alunos da turma B para a segunda pergunta

2) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Química até o momento, como você faria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Somaria quem está na primeira linha, segunda coluna com quem está na segunda linha, segunda coluna e vai dar 13,5	21	88%
Somar as duas e ver quanto falta para 21	01	4%
Juntar e dividir por dois, 13,5:2=6,75	02	8%
TOTAL	24	100%

Quadro 8. Respostas dos alunos da turma A para o complemento da segunda pergunta

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Subtrair o maior do menor e vai dar 1,5	24	100%
TOTAL	24	100%

Quadro 9. Respostas dos alunos da turma A para a terceira pergunta

3) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Física até o momento, como você faria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Somaria as duas médias	17	61%
Somar os elementos $a_{13} + b_{13} = 12{,}5$	07	25%
Olhar a terceira coluna	02	7%
Segunda linha e quarta coluna, soma as duas = 12,5	02	7%
TOTAL	28	100%

Quadro 10. Respostas dos alunos da turma A para o complemento da terceira pergunta

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Fazer a diferença entre as médias, resultando 1,5	20	71%
Diminuir b_{13} de a_{13} resultando 1,5	08	29%
TOTAL	28	100%

Quadro 11. Respostas dos alunos da turma B para a terceira pergunta

3) Para verificar qual a pontuação desse aluno na disciplina de Física até o momento, como você faria?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Ver quem está na primeira linha, terceira coluna e somar com quem está na segunda linha, terceira linha, dando 12,5	23	96%
Olharia a terceira coluna na primeira linha dos dois trimestres, somaria as notas e dividiria por 2.	01	4%
TOTAL	24	100%

Quadro 12. Respostas dos alunos da turma B para o complemento da terceira pergunta

E se quisesse saber qual o aumento da pontuação atingida pelo aluno nessa disciplina?		
Resposta	Número de alunos	Percentual
Faria a subtração das duas notas	24	100%
TOTAL	24	100%

É importante referenciar que a notação matricial já havia sido trabalhada, talvez por isso a identificação por linhas e colunas, bem como a localização de elementos na matriz por um determinado sub-índice era utilizada pelos alunos, já havia um significado para essa notação. Porém, a definição da adição e da subtração de matrizes, até esse momento da UEPS, não tinha acontecido. Talvez por isso, há registros diferenciados e os alunos sentem-se à vontade para fazê-los.

Permitir que o aluno explicite (de forma oral ou de forma escrita) o seu conhecimento é parte integrante de uma aprendizagem de real significado.

A definição da adição e da subtração de matrizes ainda precisava ser ratificada. Precisávamos (re)agrupar as informações utilizando os conhecimentos anteriores e a última tarefa dessa UEPS tinha essa pretensão, verificando a capacidade de síntese dos alunos. Veja como eles efetuaram os registros.

Quadro 13. Respostas dos alunos da turma A para a quarta tarefa

Escreva na forma de uma matriz a primeira tabela e a segunda tabela e procure escrever uma conclusão que explique como podemos somar e diminuir matrizes.		
Resposta	Número de alunos	Percentual
$A = (5{,}0 \quad 6{,}0 \quad 5{,}5)_{1x3}$ e $B = (6{,}5 \quad 7{,}5 \quad 7{,}0)_{1x3}$ $A + B = (11{,}5 \quad 13{,}5 \quad 12{,}5)_{1x3}$ e $B - A = (1{,}5 \quad 1{,}5 \quad 1{,}5)_{1x3}$ Somar e subtrair os valores das mesmas linhas e colunas de diferentes matrizes	19	68%
$A = (5{,}0 \quad 6{,}0 \quad 5{,}5)_{1x3}$ e $B = (6{,}5 \quad 7{,}5 \quad 7{,}0)_{1x3}$ $A + B = (11{,}5 \quad 13{,}5 \quad 12{,}5)_{1x3}$ e $B - A = (1{,}5 \quad 1{,}5 \quad 1{,}5)_{1x3}$	9	32%
TOTAL	28	100%

Quadro 14. Respostas dos alunos da turma B para a quarta tarefa da UEPS 03

Escreva na forma de uma matriz a primeira tabela e a segunda tabela e procure escrever uma conclusão que explique como podemos somar e diminuir matrizes.		
Resposta	Número de alunos	Percentual
$A = (5{,}0 \quad 6{,}0 \quad 5{,}5)_{1x3}$ e $B = (6{,}5 \quad 7{,}5 \quad 7{,}0)_{1x3}$ $A + B = (11{,}5 \quad 13{,}5 \quad 12{,}5)_{1x3}$ e $B - A = (1{,}5 \quad 1{,}5 \quad 1{,}5)_{1x3}$ Somar e subtrair os valores das mesmas linhas e colunas de diferentes matrizes	12	50%

Como forma de concluir a atividade foi realizado um apanhado das informações registradas pelos alunos no quadro e, em conjunto, evidenciamos que a soma ou a subtração de matrizes acontece termo a termo, respeitando a posição do termo dentro da matriz e, por conseguinte, é necessário, que elas tenham a mesma ordem. Fato, que neste contexto de ensino, foi natural e não precisou ser dito pelo professor, partiu dos alunos esta observação.

Depois dessa atividade realizamos exercícios do livro texto e questões envolvendo processos seletivos (ENEM -Exame Nacional do Ensino Médio e vestibulares) e avaliações individuais onde obtivemos resultados muito positivos que corroboram com os dados até aqui apresentados, mas que devido a limitação do texto, nesse momento, não podem ser compartilhados.

5 – Considerações Finais

Pelo que já foi exposto e por todo o envolvimento dos alunos e da professora pesquisadora é possível afirmar que uma metodologia baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa e que utiliza um material potencialmente significativo tem condições de produzir sensíveis mudanças no processo de ensino e de aprendizagem de matrizes, fazendo do aluno um indivíduo que participa do processo, explicita, discute e socializa as suas ideias.

6 – Referências

AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph, D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional.** Rio de Janeiro: Interamericana Ltda. 1980. 625p.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise Textual Discursiva.** Ijuí. Unijuí. 2007. 224p.

MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem Significativa Crítica.** Porto Alegre. 2005. 47p.

.

Apêndice AB - Publicação de um capítulo no livro “Relatos de Experiência do Projeto PARFOR na UNISINOS, intitulado “A Matemática das contas de cabeça: É possível compreender ? “

A MATEMÁTICA DAS CONTAS DE CABEÇA: É POSSÍVEL COMPREENDER?

Marjunia Édita Zimmer Klein[9]
José Cláudio Del Pino[10]

Resumo: No presente artigo, relatamos alguns fatos que consideramos relevantes da história da Educação Matemática no Brasil e compartilhamos os resultados de uma tarefa, intitulada, “A Matemática das contas de cabeça”, que é solicitada aos acadêmicos da Atividade Acadêmica Matemática e Currículo I do curso PARFOR (Plano Nacional de Formação de Professores) da Universidade de Vale do Rio dos Sinos – UNISINOS, no intuito de provocar reflexões sobre o fazer pedagógico nesse componente curricular. A atividade inclui um questionário, que é aplicado aos entrevistados, e, por meio dele, os acadêmicos procuram identificar os conhecimentos matemáticos de pessoas que tiveram a sua escolaridade interrompida, porém, mesmo assim, aprenderam e utilizam a Matemática como ferramenta no seu cotidiano. As análises das entrevistas demonstraram que os entrevistados nos ensinam a resolver as contas propostas no questionário de maneira diferente daquela costumeiramente trabalhada na Escola e que muitos deles resolvem-nas apenas “de cabeça”, sem utilizar o lápis e o papel.
Palavras-chave: Educação. Conhecimento. Formação.

A Educação Matemática: um breve resumo

Para compreender melhor a evolução da Matemática como ciência e qual a sua importância dentro do contexto escolar, sugerimos uma volta às nossas origens.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. (PCNs, 1998, p. 42)

[9] Professora da Universidade do Vale do Rio dos Sinos e Doutoranda do Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências: Química da Vida e da Saúde Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS - marjunia.klein@gmail.com

[10] Professor do Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências: Química da Vida e da Saúde Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS - delpinojc@yahoo.com.br

Quando começou a ocupação portuguesa no Brasil, já estávamos no início da Idade Moderna, em nível mundial, e alguns sinais eram visíveis: no campo socioeconômico, o surgimento de uma nova classe social, a burguesia mercantil; no campo político, o fortalecimento do poder real; no religioso, a reforma protestante; no campo científico, o desenvolvimento de uma nova ciência, baseada então em métodos de observação e experimentação; no campo da comunicação, a invenção de Gutenberg (a máquina de imprensa) e, no campo tecnológico, a utilização da bússola, da pólvora e do papel.

No início, a ideia em relação ao descobrimento da nova terra, o Brasil, era explorar os seus produtos, mas, com o tempo, o rei de Portugal convenceu-se de que o estabelecimento de povoados por meio de colonizações é o que manteria a hegemonia de Portugal em relação a possíveis invasões.

Com a colonização, veio a agricultura, geralmente a monocultura (cana de açúcar) e junto o trabalho escravo. Ainda não havia qualquer preocupação com o ensino, sequer com o ensino de Matemática.

Quando a costa brasileira foi dividida em quinze capitanias hereditárias, esperava-se que a sua administração facilitasse o controle da administração geral que estava localizada em Lisboa. Porém, não havia recurso financeiro próprio e muito menos defesa suficiente contra os indígenas que lutavam por manter suas terras, agora invadidas.

Assim sendo, em 1548, o rei de Portugal nomeou, como primeiro governador geral, Tomé de Souza e, como sede geral das capitanias, a capitania da Bahia. Junto com Tomé de Souza, vieram também os primeiros jesuítas para o Brasil, e foi fundada a cidade de Salvador.

Com a vinda dos primeiros padres jesuítas, entre eles o padre Manuel de Nóbrega, as atividades da Companhia de Jesus, que tinham como principal valor o missionário educacional, começaram a prosperar.

Então, em 29 de março de 1549, o Padre Manoel de Nóbrega tomou providências para a criação de uma escola de primeiras letras. Em 15 de abril de 1549, foi fundada a primeira escola, na cidade da Bahia, onde se ensinava a ler e escrever.

Em 1550, com a chegada do Jesuíta Leonardo Nunes, em São Vicente, São Paulo, fundou-se a segunda escola primária, mas, assim como a primeira, a preocupação era apenas com a leitura e a escrita, não existia o ensino da Matemática.

Em 1572, foi criado o primeiro curso de Artes no colégio de Salvador, que tinha três anos de duração e onde se estudava matemática, lógica, física, metafísica e ética. Considerava-se este curso como o curso precursor das licenciaturas no país.

Em 1757, surgiu, nesse mesmo colégio, a Faculdade de Matemática de Salvador. Os conteúdos ensinados eram semelhantes aos conteúdos da Universidade de Coimbra, em Portugal.

Após desentendimentos entre a corte portuguesa e os jesuítas, tivemos um vazio no que diz respeito ao ensino. No entanto, com a vinda da família real para o Brasil em 1808, vieram junto alguns brasileiros que tinham ido estudar na Universidade de Coimbra e matemáticos portugueses. Nessa época, já havia acontecido a reforma do ensino em Portugal (1772), sendo que a ênfase era a cultura e a Matemática, graças ao Marquês de Pombal, numa mudança do rumo do ensino de Ciências (antes restrito à conservação e transmissão de conhecimentos).

Criou-se a Academia Real Militar, na corte do Rio de Janeiro, e, dentre os seus cursos, constava o curso de Matemática. Assim, pode-se dizer que nascia o primeiro curso superior de Matemática. Após a Independência do Brasil, em 1822, a Academia Real Militar passou a se chamar Academia Imperial Militar e, em seguida, Academia Militar e de Marinha. Essas últimas foram separadas e, logo em seguida, surgiu a Escola Militar.

Havia uma preocupação com a formação de profissionais que pudessem impulsionar o desenvolvimento do país, dentre eles, os engenheiros civis. Assim surgiu a separação entre o ensino militar e o ensino civil.

Um decreto aprovou que as escolas Militar da Corte e de Aplicação do Exército e o curso de Infantaria e cavalaria da Província de São Pedro do Rio Grande do Sul passassem a se chamar de Escola Central e que haveria três cursos: de Matemática, de Ciências Físicas e de Ciência Naturais, os quais primariam pela formação de bacharéis. Após outro decreto transformou a Escola Central em Escola Politécnica, ampliando o número de cursos do ensino superior e abrindo a possibilidade de formação de doutores.

Com a Proclamação da República, em 15 de novembro de 1889, extinguiram-se os cursos da atual Escola Politécnica, e o curso de Matemática ficou restrito aos cursos de Engenharia, ou seja, eram formados engenheiros matemáticos.

O momento histórico demonstrava que a educação estava apenas atendendo a elite e havia um descontentamento com essa situação. Porém era difícil promover sensíveis mudanças, talvez ainda, pelas dificuldades de desvencilhar-se das ideias advindas de Portugal.

Convivíamos com um Brasil onde o ensino ainda continuava restrito e muitas crianças e jovens não frequentavam a escola, mas que ansiava por mudanças. Mudanças que considerassem o contexto político e social do país e suas condições de evoluir economicamente e socialmente apostando na educação.

Na década de 1930 e 1940 tivemos a “Reforma Francisco Campos” (1931) e a Lei Orgânica do Ensino Secundário de 1942, chamada de “Reforma Capanema”, no intuito de orientar, regular e avaliar os procedimentos administrativos e pedagógicos em todas as instituições de ensino do país. As mudanças foram referentes ao tempo de duração do ensino secundário, a sua organização, a seriação do currículo, a obrigatoriedade da frequência, o sistema de avaliação discente e a inspeção federal.

Concomitante com as reformas do ensino no país, havia um movimento no que se refere a reforma do ensino de Matemática, onde considera-se o professor Euclides Roxo como seu precursor. Inclusive algumas de suas ideias, já defendidas e implantadas no Colégio Pedro II, onde estudou, foi professor e diretor, foram adotadas pelas Reformas, já citadas. Uma delas faz menção a apresentação da Matemática por blocos de ensino em cada série, quais sejam, a aritmética, a álgebra, a geometria e o trabalho com medidas. Lutava por uma Matemática com maior significado e utilidade para o aluno e muitas de suas ideias, no que se refere ao ensino e a aprendizagem de Matemática, tinham a influência do professor Félix Klein, um professor da Universidade de Gottingen na Alemanha, responsável pelo primeiro movimento internacional de reformulação do ensino de Matemática. Além disso, o professor Euclides Roxo era escolanovista[11], defendia um ensino que considerasse o aluno como centro do processo e respeitasse suas características cognitivas, afetivas e psicológicas.

Em 1934, temos a fundação da Universidade de São Paulo – USP – e a sua faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, onde a Matemática retornou com curso próprio.

[11] O movimento da Escola Nova tinha como objetivo um ensino mais democrático que valorizasse os desejos dos alunos, suas curiosidades, suas necessidades, partindo de um ensino mais geral, menos compartimentalizado, para um ensino mais específico.

A partir daí, São Paulo tornou-se um polo formador e disseminador de grandes nomes na área de Matemática, bem como publicações nessa área.

Em 1952, foi criado o Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA no Rio de Janeiro.

Com o processo de industrialização crescendo a partir de 1960, o quadro educacional precisaria mudar e uma tendência tecnicista para a educação passou a dominar. Como essa tendência não surtiu muitos resultados, na década de 1970, voltou-se a preocupação para um ensino de Matemática inovador, mais voltado a esclarecer como o aluno aprende. Surgiram, com maior ênfase, cursos de formação de professores, programas de livros didáticos e pesquisas nessa área.

Em 1961, foi promulgada a primeira Lei de Diretrizes e Bases (LDB - lei que dita as diretrizes e as bases da organização do sistema educacional brasileiro). Uma segunda versão da mesma lei foi aprovada em 1971, e uma terceira, ainda vigente no Brasil, aprovada em 1996. Dentre seus ganhos, estão os valores orçamentários mínimos que devem ser gastos pela União (18%) e pelos estados (25%), o Ensino Fundamental obrigatório e gratuito, a Educação Infantil como primeira etapa da Educação Básica.

Porém, estamos num momento de transição e reflexão, e temos que considerar ainda a medida provisória nº 746, de 22 de setembro de 2016:

> Institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral, altera a Lei nº9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e a Lei nº 11.494 de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, e dá outras providências. (Medida Provisória n° 746, 22 de set. 2016).

A preocupação com o ensino e a aprendizagem de conteúdos de Matemática ganhou força e muitos temas relacionados com esse componente curricular viraram objeto de pesquisa. Encontros de âmbito regional, nacional e internacional para discutir, reavaliar e compartilhar experiências no ensino e na aprendizagem de conteúdos de Matemática, além de publicações na área, quer sejam dissertações, teses e periódicos com relatos de pesquisas, começaram a ser compartilhados de forma muito mais intensa e com maior periodicidade. A própria SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) foi criada num desses encontros. Estava-se intensificando as buscas por respostas aos problemas enfrentados pelo ensino de Matemática.

O breve relato sobre a História da Educação Matemática no Brasil, certamente não conseguiu abordar todos os fatos pertinentes a esse assunto, mas é importante ressaltar que existe um grupo que é referência na pesquisa em História da Educação Matemática no Brasil, o GHEMAT. Esse grupo foi criado em 2000, tendo como objetivo desenvolver projetos de pesquisa relacionados com a história da Educação Matemática no país, possui pesquisadores que pertencem aos diferentes estados brasileiros e desenvolvem estudos investigativos sobre o tema.

Não se poderia deixar de chamar a atenção para os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) e, mais recentemente, para a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), que orientar e esclarecer quais são os objetivos do ensino de maneira geral do ensino de Matemática. Dentre eles, temos:

> Os objetivos propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais concretizam as intenções educativas em termos de capacidades que devem ser desenvolvidas pelos alunos ao longo da escolaridade. A decisão de definir os objetivos educacionais em termos de capacidades é crucial nesta proposta, pois as capacidades, uma vez desenvolvidas, podem se expressar numa variedade de comportamentos. O professor, consciente de que condutas diversas podem estar vinculadas ao desenvolvimento de uma mesma capacidade, tem diante de si maiores possibilidades de atender à diversidade de seus alunos. Assim, os objetivos se definem em termos de capacidades de ordem cognitiva, física, afetiva, de relação interpessoal e inserção social, ética e estética, tendo em vista uma formação ampla. (Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, 1998, p. 47)

> A Base Nacional Comum de (BNCC) é referência para a formulação e implementação de Projetos Pedagógicos de currículos para a Educação Básica por estados, Distrito Federal e municípios, e para a formulação dos Projetos Pedagógicos das escolas. Avança em relação a documentos normativos anteriores ao definir direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento aos quais todas as crianças, adolescentes e jovens brasileiros devem ter acesso ao longo do seu processo de escolarização. A BNCC se fundamenta em princípios éticos, políticos e estéticos para estabelecer direitos de aprendizagem e desenvolvimento, que devem ser o mote de toda a escolarização básica. Em cada etapa de escolarização - Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio – esses Direitos subsidiam a definição dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento dos componentes curriculares. (BNCC, 2017. p. 44).

A História nos faz refletir sobre a busca constante de alternativas que melhorassem a Educação e a Educação Matemática, considerando-as como um meio para a o desenvolvimento do País. E, nesse sentido, percebendo que ainda temos muito a fazer, desafiamos os alunos do curso do PARFOR da UNISINOS/RS, na disciplina de Matemática e Currículo I, a repensarem o ensino e a aprendizagem das contas que envolvem as operações aritméticas por meio de entrevistas com pessoas que já frequentaram a escola, mas que, por algum motivo, interromperam seus estudos e não conseguiram concluir o ensino fundamental ou que não puderam frequentá-la, mas utilizam a Matemática no seu cotidiano. A seguir, esclarecemos os procedimentos e relatamos algumas dessas entrevistas.

A atividade acadêmica Matemática e Currículo I

As Instituições de Ensino, consideradas como ambientes propícios para o ensino e a aprendizagem, tem como uma de suas funções disseminar o conhecimento científico e incentivar os alunos/acadêmicos a aprimorarem os seus próprios conhecimentos. Como isso será feito, qual a metodologia a ser utilizada e quais conteúdos terão prioridade é questionável, mas o aluno/acadêmico que conclui seus estudos na Instituição de Ensino deve ser diferente do aluno/acadêmico que ingressou nessa instituição.

Dentro desse contexto, o professor torna-se elemento-chave para almejarmos o sucesso, sendo que sua formação deve ser alvo de investimento e inovação. Segundo Demo (2005), “a concepção moderna de professor o define essencialmente como orientador do processo de questionamento reconstrutivo no aluno, supondo obviamente que detenha esta mesma competência” (p. 78).

Por isso, o processo de formação e as suas implicações para a prática docente é uma das metas da Atividade Acadêmica Matemática e Currículo I, cuja ementa (conhecimentos, habilidades e atitudes) tem como prioridade que o acadêmico:

- Aproprie-se de teorizações contemporâneas relativas ao campo da Educação Matemática, questionando as verdades estabelecidas e naturalizadas no contexto escolar no âmbito da Matemática;
- Compreenda os processos de apropriação de saberes matemáticos produzidos em espaços educativos escolares, utilizando ferramentas aritméticas e conceitos relativos ao tratamento da informação na resolução de situações-problemas, com ênfase na educação infantil, anos iniciais do Ensino Fundamental e na Educação de Jovens e Adultos;
- Analise práticas sociais vinculadas à Matemática, produzidas em espaços não–escolares;
- Estabeleça relações entre práticas associadas à Matemática escrita, à Matemática oral e ao uso de tecnologia.

Nesse contexto e considerando que todos os acadêmicos, do Curso PARFOR, já estão inseridos há, pelo menos, três anos no contexto escolar, ou seja, são professores ou vivenciaram essa profissão, propomos uma tarefa intitulada “A Matemática das contas de cabeça”. A atividade tem como objetivo analisar a Matemática oral e os cálculos utilizados na resolução de problemas, de indivíduos que tiveram a sua escolaridade interrompida por algum motivo, relacionando-os com os saberes matemáticos legitimados pela Escola. É importante ressaltar que esta atividade já vinha sendo realizada durante os semestres anteriores em que a disciplina aconteceu, continuamos valorizando a atividade por entender que ela está em sintonia com a ementa já citada e corrobora com a proposta do curso e decidimos compartilhar os resultados por considera-los muito significativos.

Antes da realização da atividade, os acadêmicos são convidados a lerem o texto “Educação Matemática e os problemas da vida real”, da pesquisadora e professora Gelsa Knijnik (1998) e após promove-se uma discussão em sala de aula, no intuito de motivá-los para a realização das entrevistas.

As instruções dadas aos acadêmicos para o cumprimento da tarefa “A Matemática das contas de cabeça” são:

1. Entrevistar duas pessoas que sejam consideradas “boas de contas de cabeça”, questionando-as em relação:

a) às lembranças do tempo de escola (caso tenha frequentado a escola), ou razões por não ter frequentado a escola;

b) ao uso da Matemática em situações do cotidiano, com exemplos;

c) à forma como aprendeu a fazer contas de cabeça. E se sabe fazer contas com lápis e papel? Como aprendeu?

d) a exemplos de contas feitas mentalmente, com registros dos procedimentos de cálculo oral utilizados pela pessoa.

2. Apresentar, pelo menos, uma situação-problema para ser resolvida pelo entrevistado e descrevê-la no relatório.

3. O relatório de pesquisa deverá conter cabeçalho, título do trabalho, dados de identificação do autor, um parágrafo introdutório, especificando o(s) objetivo(s) da entrevista, descrição de como foram selecionados os sujeitos da pesquisa e de que forma as entrevistas foram realizadas, relato das entrevistas, com descrição de cada entrevistado (com aspectos de sua vida pessoal e profissional) e descrição dos cálculos utilizados pelo entrevistado; além disso, uma reflexão pessoal sobre a

entrevista realizada, relacionando-a com os saberes matemáticos legitimados pela escola e referências.

Após os esclarecimentos sobre a tarefa, os acadêmicos têm duas semanas para realizá-la. Transcorrido esse prazo, há a entrega escrita do material coletado e uma apresentação na forma de seminário, onde os acadêmicos são convocados a apresentarem para seus colegas os resultados das entrevistas e os comentários, relacionando-as com o texto lido e já discutido no início da tarefa.

Seguem algumas das entrevistas realizadas pelos acadêmicos com comentários desta professora pesquisadora.

Relato das entrevistas realizadas pelos acadêmicos com comentários da professora pesquisadora
Entrevista 01

O entrevistado 01 (E01) é um senhor de 65 anos, aposentado, que frequentou a escola até a 2ª série do ensino fundamental e teve que parar seus estudos para trabalhar, tendo como motivo, a necessidade financeira, pois o seu pai havia falecido. A entrevista é realizada na casa do entrevistado e utiliza-se um gravador para registrar as respostas. As memórias do entrevistado sobre o início do seu período escolar dão conta de que seus pais eram analfabetos, mas sabiam realizar contas de cabeça de forma natural e que, devido a isso, teve dificuldades em utilizar as representações na forma que a escola exigia. Contudo, sua mãe foi fundamental para alicerçar seus saberes sobre as contas de cabeça, pois teria que trabalhar no comércio e tinha de saber fazer contas de maneira rápida e precisa. Ao ser indagado sobre algumas formas de resolver as contas 690 + 195 e 1565 + 848, que envolvem a adição, ele responde:

"Achei que você ia começar com algo difícil, mas estas são fácil, tá tranquilo. Penso nos números e vou arrumar eles, depois penso quanto cada um deles vale e o que acontecem quando se juntam... Faço por pedaços e depois vejo quanto ficou... Aí vou montando por pedaço, né?"(E01)

Quando o entrevistado diz que resolve por partes e é solicitado que ele explique como faz, é possível perceber que ele resolve as contas somando em primeiro lugar as centenas (6 + 1 = 7 centenas ou 700 unidades), depois ele soma as dezenas (9 + 9 = 18 dezenas, ou 180 unidades e, por último, soma as unidades, verificando que tem 885.

Algoritmo na escola[12]	Possível conta de cabeça
$\begin{array}{r} 690 \\ +195 \\ \hline 885 \end{array}$	$\begin{array}{r} 690 \\ +195 \\ \hline 700 \\ +180 \\ 5 \\ \hline 885 \end{array}$

Na realidade, ele resolve o algoritmo de forma diferente do que é ensinado na escola: começa do número que indica maior valor posicional e verifica o seu valor em

[12] Esta, comumente, é a forma de apresentação pela escola, do algoritmo para resolver a conta proposta.

unidades e faz o mesmo com as dezenas, para só depois somar tudo que possui, pois agora tudo tem o mesmo valor. Do mesmo modo, ele faz a segunda conta de adição: uma unidade de milhar corresponde a 1 000 unidades, daí temos ainda 5 centenas mais 8 centenas que ao todo dão 13 centenas, ou seja, 1 300 unidades. Então já temos 2 300 unidades que, somando com 10 dezenas (6 + 4), igual a uma centena, que são 100 unidades, já temos 2 400 unidades. Ainda há 13 unidades, então ao todo são 2 413 unidades. Ou seja, o entrevistado decompõe o número em unidades, que é o que ele chama de “resolver por partes”.

Algoritmo na escola	Possível conta de cabeça
1 565	1565
+ 848	+ 848
1 413	1 000
	1 300
	100
	13
	2 413

Vamos observar as próximas contas, envolvem o conceito de subtração. Quando solicitado para resolver as seguintes contas: 430 - 365 e 1720 – 774, ele responde: *“Antes eu demorava pra fazer estas, mas com o tempo e precisão eu fui ficando rápido. Bom como vou falar... de novo pego os números só que agora ele não vai se juntar, vou ter que tirar, alguns dá, outros não, então vejo quanto falta para terminar/completar e aí vou pegando até acabar o que preciso e quanto ficou para cada lado.” (E01)*

Se observarmos, poderemos perceber que de 65 para 400 falta 35 e para 430 falta 30, então ao todo falta 65, é fácil. Note-se que não é assim que ensinamos na escola; a conta de completar é muito comum no comércio, mas na escola sequer costuma ser lembrada.

Algoritmo na escola	Conta feita de cabeça
430	400 – 365 = 35 + 30 = 65
- 365	
065	

Na segunda conta: 774 para 1000 falta 226, (todos completam 9 e só o 6 com o 4 completa dez) e daí mais os 720, fica 946, outra conta fácil.

Algoritmo na escola	Conta feita de cabeça
1 720	1 000 – 774 = 226 + 720 = 946

- 774
946

Quando solicitado sobre duas contas que envolviam o conceito de multiplicação, ele também resolve de maneira bem rápida e sem cálculos no papel. As contas solicitadas são 345 x 9 e 23 x 12.

"Estas é que faço mais, é que compro muito produtos em quantidades quando chega o fim do mês, pro estoque, aí vem revendedor e eu tenho que fazer rápido, pra ver que produto não tem. Vejo quantas tem e vou contando várias vezes a mesma quantia." (E01)

Ao ser questionado sobre a forma de resolver a conta, ele explica:

" 300 x 9 dá 2 700, 40 x 9 dá 360 e 5 x 9 dá 45. Logo, quando somamos, temos 3 105." (E01)

Observe-se que ele volta às unidades, da mesma forma que resolveu a adição no início da entrevista. Porém, na escola, não é assim que costumamos ensinar. Será que o algoritmo que costumamos ensinar tem significado para o aluno? Com certeza, a forma como o nosso entrevistado está resolvendo as contas tem significado para ele e fazem muito sentido, tanto é que ele chega a comentar que não confia muito na tal "calculadora", prefere realizar as contas de cabeça.

Algoritmo na escola	Conta feita de cabeça
345	345
x 9	x 9
3105	2 700
	360
	45
	3 105

Na outra conta, ele procede da mesma maneira. Primeiro faz 20 x 12 , que resulta 240 e, somando com 3 x 12 = 36, teremos 276.

Algoritmo na escola	Conta feita de cabeça
23	23
x 12	x 12
276	240 (20x12)
	36 (3 x 12)
	276

Para encerrar a entrevista a acadêmica propõe duas contas envolvendo o conceito de divisão. A questão proposta é: Como você resolveria 497 : 7 e 1457 : 3 . Ele responde:

"Para fazer estas contas, vou separando por pedaços e vou vendo quanto cabe neste pedaço. E se sobra, vejo se não dá pra fazer de novo e se fica a mesma coisa em cada pedaço, senão deixo pro final". (E01)

Quando a acadêmica o questiona ele esclarece dizendo: *"que o 7 cabe 70 vezes no 490 e não sobra nada e que também cabe 1 vez no sete que tem na unidade, logo cabe 71 vezes."(E01)*

Algoritmo na escola	Conta feita de cabeça
497 |7	490 |7 7 |7
- 49 71	490 70 - 7 1

007	000 0
- 7	
000	

Na conta abaixo, percebe-se que o entrevistado responde*:" O 3 cabe 400 vezes certo (divisão exata) no 1400 e sobra 200, que eu vou juntar com 50, daí temos 250 e o 3 cabe 80 vezes e sobra 10 que eu vou juntar com o 7, o 3 cabe 5 vezes e sobra 2, logo teremos 485 e sobra 2."(E01)*

Comparando as contas feitas pelo entrevistado e os algoritmos ensinados na maioria dos livros didáticos e na maioria das escolas, verificamos uma sensível diferença.

Algoritmo na escola	Conta feita de cabeça		
1457 |3	1 200 |3	200+50=250	240 |3
-12 485	- 1 200 400		- 240 80
25	0 000		000
- 24			
17	10 + 7 = 17	15 |3	
- 15		- 15 5	
2		00	
	Logo, 400 +80+5= 485 e sobra 2		

Em todos os momentos, o entrevistado resolve do seu "jeito", mas correto, e isso surpreende os acadêmicos, quando na ocasião da apresentação das entrevistas. Pois é um "jeito" que não costuma ser pensado ou muito menos realizado (ensinado) na escola. Como diz a Knijnik apud Chassot:

> Achando que estamos fazendo o melhor para as nossas alunas e alunos, apresentamos e organizamos todos os dados – e somente estes - dos problemas, selecionamos aquilo que é, na nossa opinião, é importante de ser selecionado. Fica a nosso encargo aquilo que, cada vez mais, num tempo marcado fortemente pelos avanços tecnológicos, pelo acesso informatizado a gigantescos bancos de dados, efetivamente é importante de ser realizado pelos alunos. Assim, os problemas escolares de Matemática são usualmente apresentados com todos os dados e somente com os dados que nós, de antemão, julgamos relevantes. Após a listagem de tais informações, formulamos uma pergunta que, para ser respondida, requer a utilização das informações que previamente selecionamos, já todas presentes no texto (KNIJNIK, APUD Chassot, 1998, p. 3)

Resumo da entrevista 02

O entrevistado 02 tem 58 anos e sua profissão é de pedreiro e pintor, estudou até a 5ª série do ensino fundamental e o que lembra da escola é que havia merenda. Na aula de Matemática, trabalhava com as quatro operações (muitos cálculos) e que ele gostava muito de Matemática.

Comentou que utiliza a Matemática na sua profissão. Então foi lhe dada a seguinte situação-problema: "Numa peça de 6,0m x 9,0m, quanto preciso de piso? E quanto pagarei pela mão de obra? "

A resposta dada foi a seguinte: *“ 6 m x 9 m= 54m² + 10% (recortes) = 59,4 m² = 60 m², com folga. Meu preço é R$ 18,00, mas pode depender do material (tipo de porcelanato). Então R$ 18,00 x 60m² = R$ 1 080,00. Tirei fora o 0 (zero) e multipliquei 18 por 6, colocando o 0 (zero) depois, no final.”(E02)*

A conta feita é semelhante à multiplicação já citada anteriormente e também acontece por etapas (partes). E, da mesma forma, normalmente, não é citada na escola.

Resumo da entrevista 03

O entrevistado 03 tem 68 anos, aposentado e estudou até a 2ª série do ensino fundamental. Quando questionado sobre suas lembranças da escola, comentou que lembrava que caminhavam entre sete a oito quilômetros para chegar até a escola, respeitava-se a professora *“o que ela falava era lei” E03)* e quando não estava na escola, estava auxiliando na roça, (cortando cana, araucária, eucaliptos, etc.). Também considera que antigamente as pessoas respeitavam-se mais do que hoje. Quando questionado sobre como aprendeu matemática e como a utilizava no seu dia a dia, ele relata que tinham que cortar cana em retângulos de seis metros de largura, em cinco ruas, que eram chamadas as fileiras da cana, por um comprimento que variava para cada trabalhador. Assim eram recompensados em dinheiro, pelo tanto que conseguissem cortar de cana. Após os dezesseis anos, mudou-se para a cidade e trabalhou em diversos lugares, mas firmou-se como pedreiro .na construção civil e trabalhava construindo casas. Isso fez com que utilizasse a Matemática no dia a dia. Exemplificou: *“ Para colocar um forro numa peça que tem 3m por 4m, é preciso calcular mais 10% como reserva e assim comprar entre 13 e 14 meros de forro. Se tiver que construir um muro de dois metros de altura por quatro metros de comprimento com tijolo “catarina” de seis furos (ele explica que utiliza normalmente esse tipo de tijolo, devido a sua regularidade de tamanho, já que os outros possuem muitas variações, dificultando os cálculos), precisaríamos de 45 tijolos por metro quadrado, com esse tijolo deitado (tijolo na horizontal). Ou seja, num espaço de um metro por um metro e se utilizarmos o tijolo em pé (na vertical), precisaríamos de 35 tijolos para preencher o mesmo espaço de um metro por um metro.” (E03)* Além disso, relata orgulho que fez trabalhos (obras) que muitos jovens hoje não seriam capazes de fazer.

Percebe-se que o cotidiano da construção civil fez com que esse entrevistado soubesse, por experiência, a quantidade necessária, de acordo com a posição do tijolo, para construir um muro, uma aprendizagem de significado e necessária para ele.

Segundo Biembengut:

> Aprender implica ter conhecimento e não apenas informação. Aprendizagem que depende do interesse da pessoa. No dia a dia recebem-se enormes quantidades de informações, de várias formas e por vários meios, captados pelos sentidos, mas que a mente descarta-as ou retêm-nas por um período de tempo na memória. Nestes termos, de acordo com o grau de interesse que se tem sobre alguma coisa, a aprendizagem – conhecimento adquirido – pode ficar armazenado numa memória de curto, médio ou longo prazo. Por assim, utilizar-se das situações cotidianas ou do meio circundante pode contribuir, por exemplo, para melhor formação dos estudantes em qualquer fase da escolaridade. (BIEMBENGUT, 2014,p. 16)

Resumo da entrevista 04

O entrevistado 04 tem 82 anos, aposentado e nunca estudou numa escola, apenas frequentou, quando já tinha 35 anos, o antigo Mobral (de Movimento Brasileiro de Alfabetização), criado pela Lei Nº 5.379, de 15 de dezembro de 1967 que legisla sobre a alfabetização funcional e a educação continuada de adolescentes e adultos. Foram 45 dias de aulas, tempo em que conseguiu aprender a ler e escrever (ainda com algumas dificuldades, pois deixa algumas letras faltando). Porém, sempre fez contas de cabeça e, quando solicitado sobre um exemplo, ele pegou a conta de água (cujo valor era de R$ 82,36) e a conta de luz (cujo valor era de R$ 46,07) e disse que se fosse pagar as duas juntas teria que pagar R$ 128,43.

Provavelmente esse entrevistado também faz a soma por valores inteiros, como já citado anteriormente. Assim como para os demais, o cálculo mental tem sua relevância. Nos PCNs lemos:

> No mundo atual saber fazer cálculos com lápis e papel é uma competência de importância relativa e que deve conviver com outras modalidades de cálculo, como o cálculo mental, as estimativas e o cálculo produzido pelas calculadoras, portanto, não se pode privar as pessoas de um conhecimento que é útil em suas vidas. (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998. p. 45)

Resumo da entrevista 05

O entrevistado 05 é uma senhora de 83 anos, aposentada, dona de casa e analfabeta. Relata que frequentou a escola pela primeira vez aos dez anos, mas que não pôde continuar estudando porque tinha de cuidar dos irmãos menores. Mais tarde, aprendeu a fazer contas porque tinha de administrar as contas da casa. Lembra que, na escola, mesmo o pouco tempo que ficou, frequentava uma sala multisseriada. Havia a chamada oral da tabuada, ábacos e a professora sempre passava as contas no quadro para que os alunos resolvessem no seu caderno. Tem dificuldades para registrar as contas no papel, utiliza a Matemática para administrar as despesas, fazer as compras no supermercado e nas suas receitas. Costuma agrupar as quantidades de 50 em 50 e, muitas vezes, utiliza os dedos para marcar resultados. Ao se apresentar a seguinte situação, resolveu. “Preciso comprar 3 kg de carne, ao custo de R$ 17,00 cada quilo. Se eu levar R$ 50,00, vai sobrar? Vai faltar? Quanto?” Ela resolveu da seguinte maneira: *“ Primeiro agrupo 3 x 15 e depois somo 6 e vai faltar R$ 1,00, mas não sei fazer a conta no papel.” (E05)*

Percebemos, novamente, que a conta feita pela entrevistada não coincide com a conta ensinada na escola e demonstra que ela encontrou uma maneira própria para resolver o seu problema. Segundo Smole e Diniz,

> Organizar o trabalho de sala de aula incluindo problemas não-convencionais é uma forma de romper com o modelo que tantas dificuldades traz ao aluno. Centrar o trabalho nos problemas convencionais e considerar os demais tipos de problemas como curiosidades ou desafios esporádicos evidencia uma visão limitada do ensino da Matemática que atesta a aprendizagem através da resposta correta e da busca de modelos a serem seguidos. (SMOLE e DINIZ, 2001. p. 101)

Resumo da entrevista 06

O entrevistado 06 tem 48 anos, é agricultor, estudou até completar o ensino fundamental numa escola rural próximo de onde morava e hoje é agricultor e planta rosas. Quando começamos a conversar sobre a escola e suas lembranças, logo citou um professor que dizia que eles tinham que aprender a fazer contas de cabeça, pois, na vida, eles não iam ter papel e caneta na mão toda a hora que precisassem. Questionado sobre o uso da Matemática no seu cotidiano, ele prontamente citou um exemplo*: "Se ele colhesse 500 botões de rosa, ele calculava 50 dividido por 12 que dá 4, logo 40 dúzias, sobravam 20 botões, que fariam mais uma dúzia, assim, com 500 botões de rosa, ele teria 41 dúzias de rosas e sobrariam 8 botões."* (E06)

Ele relatou também que, no momento em que eles estão enrolando os botões de rosas, fazendo pacotes com 12, eles vão dispondo os mesmos sobre a mesa em grupos de 10, para facilitar a contagem depois.

A Matemática utilizada pelo entrevistado é simples e utilizada no seu cotidiano. Porém, a divisão que ele fez não é a mesma que costumamos ensinar na escola. Além disso, realiza tudo mentalmente, outra tarefa que não se costuma trabalhar na escola, o cálculo mental.

Considerações finais

Espera-se que os resumos apresentados de algumas das entrevistas realizadas ao longo do semestre, com breves comentários desta professora pesquisadora tenham provocado tanto ou maior reflexão que a observada, durante o seminário, por parte dos acadêmicos.

O seminário tem como meta compartilhar as entrevistas e oportunizar um olhar reflexivo sobre o trabalho docente, aliando teoria e prática em prol da formação pedagógica. Durante o seminário, o compartilhamento de todas as entrevistas realizadas pelos acadêmicos (o que não pôde ser abordado aqui devido a limitação do texto) surpreende, pois fica evidente que a maioria dos entrevistados não consegue resolver as contas propostas no papel, mas "de cabeça" resolvem-nas e não erram. Superando, por vezes, em agilidade, os acadêmicos que os entrevistaram. Alguns dos acadêmicos ficam surpresos com a resolução dada pelos entrevistos. Manifestam, oralmente durante as apresentações do seminário, que nunca tinham visto algo parecido na escola e queriam compreender como dá certo. Nesse momento, como professora da disciplina, procuro discutir a forma de resolução utilizada e esclarecer, elucidando o modo como o entrevistado possivelmente realizou a conta de cabeça. Alguns dos acadêmicos relatam que precisaram da calculadora para conferir o que o entrevistado realizou sem o uso do lápis e do papel. Como pode? Questionam.

A comprovação sobre a existência de outros modos de realizar as contas que envolvem as quatro operações e de que esses métodos estão corretos, mas são, na maioria das vezes, diferentes dos algoritmos ensinados na escola provocou sensíveis reflexões. Perceberam que todas as situações propostas e ou relatos, por meio de contas, justificavam a sua resolução pelo contexto e significado que continham. A discussão dessa visão fez com que os acadêmicos percebessem e começassem a considerar, como importante no processo de ensino e aprendizagem, aquilo que o aluno já sabe, havendo assim a possibilidade de o aprendizado tornar-se algo significativo para o aluno.

Após o compartilhamento das entrevistas, os acadêmicos discutiram e chegaram a cogitar que a possível causa de um dos problemas verificado em sala de aula, qual seja, a dificuldade em realizar as operações Matemáticas, possa ser o fato de que o aluno não vê, no algoritmo, o valor posicional, característica do nosso sistema numérico. Outra possível causa poderia ser o fato de que os algoritmos são formas resumidas de realizar as contas e, por serem resumidas, podem deixar dúvidas sobre as etapas realizadas. Além disso, se a conta estiver desprovida de uma situação-problema pode tornar-se, assim como o algoritmo, algo sem significado e sem sentido para os alunos.

Outro comentário que surgiu durante o seminário foi a observação de que muitas vezes os alunos questionam o professor sobre, *"como sei se é conta de vezes ou de mais?"*; *"como sei se é conta de subtração ou de dividido?"*. Talvez o surgimento dessas perguntas se deva ao fato de que os conceitos de adição, multiplicação, subtração e divisão não tenham sido devidamente contextualizados e compreendidos. Talvez os estejam realizando as contas sem um problema que as justifique e auxilie a sua compreensão.

Chegamos também a discutir a importância do uso e da exploração do material dourado[13] antes da utilização do algoritmo. O trabalho com material concreto talvez pudesse auxiliar na questão do valor posicional e assim dar significado ao algoritmo. O comentário fez com que alguns dos acadêmicos constatassem que sequer tinham ouvido falar do material dourado e muito menos o tinham utilizado em sala de aula.

Nesse relato procuramos analisar alguns dos aspectos que consideramos mais significativos das entrevistas. Alguns deles possuem semelhanças e deixam claro que, apesar de não terem tido a oportunidade de frequentar a escola ou concluí-la, aprendendo conteúdos de Matemática, ela tornou-se imprescindível na vida do indivíduo e ele encontrou uma maneira de aprendê-la e utilizá-la.

Quando é que, nós, professores, vamos começar a perceber que existem diferenças na forma de aprender, perceber que o diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos e das suas dificuldades podem encaminhar para encontrarmos alternativas e, assim, amenizarmos a distância entre o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Parar e repensar o ensino de Matemática e as suas práticas pedagógicas a partir de experiências reais de aprendizagem que se concretizaram apesar das dificuldades foi algo muito valioso para os acadêmicos do curso PARFOR e esperamos que o texto tenha causado reflexão e talvez motivando-os a pensar como a Matemática fez a diferença na sua vida.

As entrevistas deixam claro que, além da Matemática ser importante no cotidiano de cada pessoa entrevistada, ela é uma Matemática muito mais real e humana, com significados, está dentro de cada um e precisa ser denunciada, descoberta e explorada pela escola.

---

[13] O material dourado é um material didático para manuseio, formado por cubinhos (representando a unidade), barras (representando as dezenas) e placas (representando as centenas), tendo a base dez como referência, e pode auxiliar na introdução das operações matemáticas.

Referências

BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC), 2016. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 03 fev.2017.

BIEMBENGUT, Maria Salett. Modelagem Matemática no Ensino Fundamental. Blumenau. Edifurb. 2014.

BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo. Edgard Blücher. 1974.

CARRAHER, Terezinha Nunes. O Desenvolvimento Mental e o Sistema Numérico Decimal. In: CARRAHER, Terezinha Nunes (org.). Aprender Pensando: Contribuições da Psicologia Cognitiva para a Educação. Petrópolis: Vozes, 1992. p. 51-68.

DEMO, Pedro. Educar pela pesquisa. São Paulo. Editores Associados. 2005.

GRUPO DE PESQUISA DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRAISL. Disponível em: http://www2.unifesp.br/centros/ghemat//paginas/about_ghemat.htm. Acesso em: 30 de junho de 2018.

KAMII, Constance; LIVINGSTON, Sally Jones. Os efeitos nocivos dos algoritmos. In: KAMII, Constance e LIVINGSTON, Sally Jones. Desvendando a aritmética: implicações da teoria de Piaget. Campina, SP: Papirus, 1995.

KNIJNIK, Gelsa. Educação Matemática e os problemas da vida real. In: OLIVEIRA, Renato; CHASSOT, Attico. Ciência, ética e cultura na educação. São Leopoldo: Editora UNISINOS, 1998.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO (PCNEM), 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 03 fev.2017.

PILETTI, Nelson. História do Brasil. São Paulo. Ática. 2016.

REFORMA FRANCISCO CAMPOS. Disponível em http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/viewFile/5520/4015. Acesso em: 30 jun.2018.

REVISTA BRASILEIRA DE ESTUDOS PEDAGÓGICOS. Disponível em: http://rbep.inep.gov.br/index.php/rbep/article/view/955. Acesso em: 30 jun. 2018.

SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegr. Artmed. 2001.

UNISINOS. http://www.unisinos.br/aplica/ementas/index.php. Acesso em: 30 jun. de 2018