

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

BRUNA KASPRZAK BORGES

ENSAIOS SOBRE PREVISÃO DE SÉRIES MACROECONÔMICAS PARA O BRASIL
UTILIZANDO MODELOS VAR BAYESIANOS

PORTO ALEGRE

2018

BRUNA KASPRZAK BORGES

**ENSAIOS SOBRE PREVISÃO DE SÉRIES MACROECONÔMICAS PARA O BRASIL
UTILIZANDO MODELOS VAR BAYESIANOS**

Tese submetida ao Programa de Pós Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal

Porto Alegre

2018

CIP - Catalogação na Publicação

Kasprzak Borges, Bruna

Ensaio sobre previsão de séries macroeconômicas para o Brasil utilizando modelos VAR bayesianos / Bruna Kasprzak Borges. -- 2018.

72 f.

Orientador: Marcelo Savino Portugal.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre, BR-RS, 2018.

1. Previsão macroeconômica. 2. Vetor autoregressivo. 3. Métodos bayesianos. I. Savino Portugal, Marcelo, orient. II. Título.

Bruna Kasprzak Borges

**Ensaio sobre previsão de séries macroeconômicas para o
Brasil utilizando modelos VAR bayesianos**

Tese submetida ao Programa de Pós Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Aprovada em: Porto Alegre, 11 de Abril de 2018.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal
Orientador

Prof. Dr. Cristiano Machado Costa
PPG Contábeis-Unisinos

Prof. Dr. Igor Alexandre Clemente de Moraes
PPGE-Unisinos

Prof. Dr. João Frois Caldeira
PPGE-UFRGS

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Luiz e Valéria, e a minha irmã, Marina, por estarem sempre presentes e por acreditarem no meu potencial. Ao meu orientador, professor Marcelo Portugal, pelos valiosos ensinamentos, por estar sempre disponível a me ajudar e, além disso, pelo apoio e compreensão ao longo desses anos. Aos professores do PPGE, pelos conhecimentos transmitidos. Aos meus queridos amigos que sempre acreditaram na conclusão desta etapa. À Valeska e William pela amizade que resiste ao tempo. À Helena pela presença e apoio. À Mariana Bartels pela ajuda imprescindível e pela demonstração ímpar de parceria. À FEE, pelo apoio à realização desta tese. Aos meus amigos e colegas da FEE e, em especial, ao pessoal do Centro de Informações Estatísticas e Sociais (CIES) pela convivência diária e pelo apoio para a solução das minhas dúvidas econométricas e computacionais.

RESUMO

A análise macroeconômica baseada nos modelos VAR tornou-se bastante popular após o trabalho de Sims (1980). A facilidade de implementação e, particularmente, a utilidade para previsão conquistaram amplo reconhecimento na macroeconomia aplicada. Nos últimos anos, o reconhecimento da importância do caráter dinâmico na modelagem econométrica tem despertado o interesse em estender o modelo VAR em diferentes contextos. O primeiro deles propõe o modelo VAR com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica - TVP-VAR (PRIMICERI, 2005). Apesar da popularidade dos modelos VAR, a literatura recente tem sugerido que há vantagens ao considerar a especificação mais geral do modelo de vetores autorregressivos e médias móveis (VARMA) na estimação e previsão empírica (CHAN; EISENSTAT, 2017). Um fato inerente ao estudo de séries temporais econômicas é a diferença na frequência de amostragem dos dados. Variáveis macroeconômicas importantes, como o PIB, somente são encontradas em frequência trimestral, enquanto outras variáveis como inflação e taxa de juros são divulgadas mensalmente ou até mesmo em frequência mais elevada. A ideia de agregar séries temporais em diferentes frequências foi originalmente proposta por Ghysels, Santa-Clara e Valkanov (2004) com os modelos de regressão MIDAS (*Mixed Data Sampling*). Novos desdobramentos da literatura voltaram-se então para modelos MF-VAR (*mixed-frequency VAR*), isto é, com dados mistos (SCHORFHEIDE; SONG, 2015). Considerando estes aspectos, a presente tese será composta por dois ensaios acadêmicos sobre a implementação empírica do modelo VAR em diferentes contextos de previsão macroeconômica para o Brasil. São utilizados métodos bayesianos para a estimação e previsão dos modelos VAR em análise. No primeiro ensaio o objetivo foi realizar dois exercícios empíricos distintos de previsão macroeconômica para a economia brasileira. No primeiro exercício, procuramos analisar se a inclusão da volatilidade estocástica melhora a performance de previsão em *real-time* de variáveis-chave para a economia brasileira no Regime de Metas de Inflação: Produto Interno Bruto (PIB), taxa de inflação e taxa de juros com a aplicação do modelo TVP-VAR com volatilidade estocástica seguindo a linha de aplicação de D'Agostino, Gambetti e Giannone (2013). De forma geral, os resultados encontrados apontaram a importância de incluir a mudança estrutural e, especialmente, a possibilidade de choques exógenos ao modelo, sendo importante para a previsão. Além disso, a previsão em tempo real com o modelo TVP-VAR(SV) incorpora o caráter da variação no tempo da economia. O segundo exercício empírico teve como objetivo realizar uma aplicação empírica com enfoque na previsão do PIB e da taxa de inflação no Brasil com o intuito de verificar se a utilização da especificação VARMA, especialmente o modelo com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica, proposta por Chan e Eisenstat (2017). Os resultados da aplicação empírica para o Brasil indicaram que somente adicionar o componente de médias móveis não melhora a performance de previsão das variáveis. Contudo, adicionar volatilidade estocástica ao modelo melhora consideravelmente o desempenho da previsão. A especificação VAR com volatilidade estocástica apresenta o melhor desempenho entre os modelos. Os resultados indicaram que a inclusão da volatilidade

estocástica (volatilidade dos choques exógenos) fornece ganhos expressivos na previsão para o caso brasileiro. Por sua vez, o segundo ensaio desta tese aborda a previsão empírica de curto prazo de séries macroeconômicas para o Brasil com o uso de dados em frequência mista, isto é, séries mensais e trimestrais utilizando o modelo MF-VAR descrito em Schorfheide e Song (2015). Procuramos estudar se a inclusão de dados mensais divulgados intra-trimestre aumentam a precisão da previsão do VAR. Os resultados para PIB, taxa de desemprego, inflação e taxa de juros indicam que o uso de informações mensais leva a uma diminuição considerável da raiz do erro quadrático médio de previsão (RMSE) no curto prazo. Consistente com a literatura, se o objetivo é gerar previsões para um dois trimestres a frente, o modelo MF-VAR torna-se bastante atraente em relação ao QF-VAR.

Palavras-chaves: Previsão macroeconômica. Vetor autoregressivo. Métodos bayesianos.

ABSTRACT

Since the seminal work of Sims (1980), vector autoregression (VAR) has become the widely approach in empirical macroeconomics. Bayesian methods have been used to cope with the high dimensionality of the parameter space. The importance of modeling structural changes in the economy both in the parameters and shock volatilities has become more relevant in the literature. Since the paper of (PRIMICERI, 2005), the time-varying coefficients vector autoregression with stochastic volatility model (TVP-VAR) have show forecasting potential (D'AGOSTINO; GAMBETTI; GIANNONE, 2013). Recently, a number of authors have proposed developments to make vector autoregressive moving averagem models (VARMA) acessible (CHAN; EISENSTAT, 2017). Vector autoregressions (VAR) are typically estimated either exclusively based on quarterly or monthly data. New developments focused on mixed-frequency VAR models (SCHORFHEIDE; SONG, 2015). This thesis consists of two academic essays. The purpose of the first essay was an empirical exercise in two different contexts. The first had focus on real-time forecasting exercise to Brazil using TVP-VAR with stochastic volatility and others competing models to predict the inflation rate, Gross Domestic Product (GDP) and interest rate, following the work by D'Agostino, Gambetti e Giannone (2013). The results indicated a satisfactory overall performance of the TVP-VAR with stochastic volatility compared to models with constant parameters and models with restricted versions of parameter variation. Especially, the results showed that a constant coefficients VAR allowing for stochastic volatility improves the forecasting, but receives similar results to the general model with time-varying parameters. The results indicated that including the structural change and, especially, the possibility of exogenous shocks to the model, improved the results for a real-time forecasting exercise using Brazilian data in the recent period. The purpose of the second essay was an empirical forecasting exercise to Brazil using VARMA and others competing models to predict the inflation rate and Gross Domestic Product (GDP) following Chan e Eisenstat (2017). We used a Bayesian approach and other VAR and VARMA and the variants with stochastic volatility and time-varying parameters. The forecast performance indicated that adding a moving average component do not improve the results compared to VAR. In addition, adding stochastic volatility substantially improved the forecast performance. The results indicated that including the possibility of exogenous shocks to the model improved forecasting using Brazilian data. The aim of the third essay was an empirical macroeconomic forecasting exercise to Brazil using mixed-fequency VAR model (MF-VAR) proposed by Schorfheide e Song (2015). We evaluated forecasts from the mixed-frequency VAR and compared them to quarterly-frquency VAR (QF-VAR) with two different versions. We found that the switch from a QF-VAR to a MF-VAR improved the forecasting performance for one and two quarters ahead. Overall, the improvements were most pronounced for short-horizont forecasts.

Key-words: Macroeconomic forecasting. Vector autoregression. Bayesian methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	–	<i>Parâmetros estimados com o modelo TVP-VAR(SV)</i>	32
Figura 2	–	<i>Volatilidade estocástica estimada com o modelo TVP-VAR(SV)</i>	33
Figura 3	–	<i>Log scores para os modelos TVP-VAR-SV e VAR simples.</i>	34
Figura 4	–	<i>Previsão 2 trimestres a frente para a taxa de inflação, PIB e taxa de juros.</i>	37

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Precisão das previsões utilizando a previsão pontual: MSFE	35
Tabela 2	–	Precisão das previsões utilizando a densidade preditiva: Log-Scores . . .	36
Tabela 3	–	Logaritmo da verossimilhança preditiva relativo ao <i>benchmark</i> da densidade preditiva 1 passo a frente	41
Tabela 4	–	Logaritmo da verossimilhança preditiva relativo ao <i>benchmark</i> para a densidade preditiva 2 passos a frente	42
Tabela 5	–	Logaritmo da verossimilhança preditiva relativo ao <i>benchmark</i> para a densidade preditiva 3 passos a frente	42
Tabela 6	–	Hiperparâmetros	59
Tabela 7	–	MSFE do MF-VAR <i>versus</i> QF-VAR (<i>priori</i> informativa)	60
Tabela 8	–	MSFE do MF-VAR <i>versus</i> QF-VAR (OLS)	61
Tabela 9	–	Hiperparâmetros	67
Tabela 10	–	Hiperparâmetros	67
Tabela 11	–	RMSFE relativo do MF-VAR <i>versus</i> QF-VAR (<i>priori</i> informativa)	68
Tabela 12	–	RMSFE relativo do MF-VAR <i>versus</i> QF-VAR (OLS)	68

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PREVISÃO MACROECONÔMICA PARA O BRASIL: UMA APLICAÇÃO DO MODELO VAR COM COEFICIENTES VARIANDO NO TEMPO E VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA E DO MODELO VARMA	13
2.1	INTRODUÇÃO	14
2.2	METODOLOGIA	17
2.2.1	TVP-VAR com volatilidade estocástica	18
2.2.2	VARMA	22
2.2.3	Aplicações empíricas	30
2.2.4	Considerações finais	43
2.3	Referências	44
2.4	APÊNDICE A - DETALHES DA IMPLEMENTAÇÃO DO AMOSTRADOR DE GIBBS	49
3	PREVISÃO MACROECONÔMICA PARA O BRASIL UTILIZANDO O MODELO VAR COM DADOS MISTOS	50
3.1	Introdução	50
3.2	Modelo de Vetores Autoregressivos com dados mistos (MF-VAR)	53
3.2.1	Estimação Bayesiana	54
3.2.2	Função de verossimilhança marginal e seleção de hiperparâmetros	56
3.3	Aplicação empírica	57
3.3.1	Variáveis macroeconômicas	57
3.3.2	Seleção dos hiperparâmetros	59
3.3.3	Resultados empíricos	59
3.4	Considerações finais	62
3.5	Referências	62
3.6	APÊNDICE A - HIPERPARÂMETROS SELECIONADOS	67
3.7	APÊNDICE B - RMSFE	68
4	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS	71

1 INTRODUÇÃO

A análise macroeconômica baseada nos modelos VAR tornou-se bastante popular após o trabalho de Sims (1980). A facilidade de implementação e, particularmente, a utilidade para previsão conquistaram amplo reconhecimento na macroeconomia aplicada. Nos últimos anos, o reconhecimento da importância do caráter dinâmico na modelagem econométrica tem despertado o interesse em estender o modelo VAR com coeficientes constantes para o VAR com coeficientes variando no tempo - TVP-VAR (COGLEY; SARGENT, 2001). Os resultados aplicados vêm demonstrando a importância de definir estruturas de modelagem e de previsão que incorporem a variação do tempo. Além disso, a partir dos trabalhos seminais de Cogley e Sargent (2001) e Primiceri (2005), a inclusão da volatilidade estocástica aos modelos com parâmetros variando no tempo têm demonstrado relevante sucesso empírico, tornando-se um *benchmark* no estudo macroeconômico. A popularidade desse modelo tem crescido com as indicações de que apresenta melhor performance de previsão comparativamente aos modelos com coeficientes constantes (D'AGOSTINO; GAMBETTI; GIANNONE, 2013; CLARK; RAVAZZOLO, 2015; CHAN, 2016).

Apesar da popularidade dos modelos VAR, há evidências de vantagens ao considerar a especificação mais geral do modelo de vetores autorregressivos e médias móveis (VARMA) na estimação e previsão empírica (CHAN; EISENSTAT, 2017). O VARMA tornou-se impopular na prática em decorrência dos problemas de estimação e a complexidade da identificação do modelo (KASCHA, 2012). Apesar disso, nos últimos anos vários trabalhos concentraram-se em tornar o VARMA acessível demonstrando vantagens com sua especificação (LÜTKEPOHL; POSKITT, 1996; ATHANASOPOULOS; VAHID, 2008; ATHANASOPOULOS; POSKITT; VAHID, 2012; KASCHA, 2012; DUFOUR; STEVANOVIĆ, 2013; KASCHA; TRENKLER, 2015; POSKITT, 2016).

Um fato inerente ao estudo de séries temporais econômicas é a diferença na frequência de amostragem dos dados. Variáveis macroeconômicas importantes, como o PIB, somente são encontradas em frequência trimestral, enquanto outras variáveis como inflação e taxa de juros são divulgadas mensalmente ou até mesmo em frequência mais elevada. Em aplicações empíricas, os modelos econométricos são geralmente estimados exclusivamente com base em observações mensais ou trimestrais. Nesse caso, considerando que todas as variáveis no modelo precisam estar amostradas na mesma periodicidade, dados mensais, frequentemente, devem ser convertidos em dados trimestrais Clements e Galvão (2008). Contudo, esse processo de agregação temporal descarta uma quantidade relevante de informações e pode gerar subespecificação do modelo. A ideia de agregar séries temporais em diferentes frequências foi originalmente proposta por Ghysels, Santa-Clara e Valkanov (2004) com os modelos de regressão *Mixed Data Sampling* (MIDAS). Inicialmente voltada para séries financeiras, a abordagem MIDAS passou, também, a

utilizar variáveis macroeconômicas para a previsão. Novos desdobramentos da literatura voltaram-se então para modelos *mixed-frequency VAR* (MF-VAR), isto é, com dados mistos (KUZIN; MARCELLINO; SCHUMACHER, 2011; GHYSELS, 2012; FORONI; MARCELLINO, 2014; SCHORFHEIDE; SONG, 2015; MIKOSCH; NEUWIRTH, 2015).

Considerando estes aspectos, a presente tese será composta por dois ensaios acadêmicos sobre a implementação empírica do modelo VAR em diferentes contextos de previsão macroeconômica para o Brasil. São utilizados métodos bayesianos para a estimação e previsão dos modelos VAR em análise. O primeiro ensaio tem como foco empírico dois exercícios de previsão macroeconômica para o Brasil. No primeiro exercício é realizada a previsão em tempo real para a taxa de inflação, Produto Interno Bruto (PIB) e taxa de juros no Brasil utilizando o modelo VAR com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica - TVP-VAR(SV). O objetivo é analisar se a inclusão da volatilidade estocástica melhora a performance de previsão em *real-time* de variáveis-chave para a economia brasileira no Regime de Metas de Inflação. Os resultados indicam uma performance geral satisfatória do modelo TVP-VAR(SV) comparativamente a modelos com parâmetros constantes e modelos com versões restritas de variação dos parâmetros. No segundo exercício é realizada a previsão para a taxa de inflação e a taxa de crescimento real do PIB utilizando o modelo VARMA e, além disso, são implementadas especificações alternativas com o intuito de comparar a performance de previsão entre os modelos. Os resultados da aplicação empírica para o Brasil indicaram que somente adicionar o componente de médias móveis não melhora a performance de previsão das variáveis. Contudo, adicionar volatilidade estocástica ao VARMA melhora consideravelmente o desempenho da previsão. A especificação VAR com volatilidade estocástica apresenta o melhor desempenho entre os modelos. De forma geral, os resultados indicam que a inclusão da volatilidade estocástica fornece ganhos expressivos na previsão para o caso brasileiro.

Por sua vez, o segundo ensaio desta tese aborda a previsão empírica de curto prazo de séries macroeconômicas para o Brasil com o uso de dados em frequência mista, isto é, séries mensais e trimestrais utilizando o modelo MF-VAR descrito em Schorfheide e Song (2015). Procuramos estudar se a inclusão de dados mensais divulgados intratrimestre aumentam a precisão da previsão do VAR. De forma geral, os resultados indicam que a especificação do VAR com observações em diferentes frequências - mensais e trimestrais - é interessante para a previsão das principais variáveis macroeconômicas brasileiras. O resultado principal indica que incluir informação mensal melhora a performance de previsão de curto prazo, especialmente com o foco em $h = 1$ e $h = 2$ passos a frente.

Assim, a aplicação do modelo VAR com especificações distintas mostra-se atrativa ao contexto da economia brasileira. O foco na previsão de variáveis macroeconômicas importantes, em diferentes contextos, pode contribuir para a ampliação do entendimento sobre o comportamento dinâmico de séries temporais no Brasil.

2 PREVISÃO MACROECONÔMICA PARA O BRASIL: UMA APLICAÇÃO DO MODELO VAR COM COEFICIENTES VARIANDO NO TEMPO E VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA E DO MODELO VARMA

Resumo: Este artigo tem como foco dois exercícios empíricos de previsão macroeconômica para o Brasil. No primeiro, é realizada a previsão em tempo real para a taxa de inflação, Produto Interno Bruto (PIB) e taxa de juros no Brasil utilizando o modelo VAR com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica - TVP-VAR(SV). No segundo, é realizada a previsão para a taxa de inflação e a taxa de crescimento real do PIB utilizando o modelo VARMA. Os resultados indicam uma performance geral satisfatória do modelo TVP-VAR(SV) comparativamente a modelos com parâmetros constantes e modelos com versões restritas de variação dos parâmetros. Particularmente, os resultados indicam que incorporar a volatilidade estocástica melhora a previsão do modelo, tornando as diferenças menos expressivas em relação ao modelo TVP-VAR(SV). Os resultados indicam que incorporar a mudança estrutural e, especialmente, a possibilidade de choques exógenos ao modelo, melhora os resultados para a previsão em tempo real para a economia brasileira no período recente. Para o exercício de previsão utilizando o modelo VARMA, os resultados da aplicação empírica para o Brasil indicaram que somente adicionar o componente de médias móveis não melhora a performance de previsão das variáveis. Contudo, adicionar volatilidade estocástica ao VARMA melhora consideravelmente o desempenho da previsão. A especificação VAR com volatilidade estocástica apresenta o melhor desempenho entre os modelos. De forma geral, os resultados indicam que a inclusão da volatilidade estocástica fornece ganhos expressivos na previsão para o caso brasileiro.

Palavras-chaves: Previsão macroeconômica. Vetor autoregressivo. Vetor autoregressivo e médias móveis. Coeficientes variando no tempo. Volatilidade estocástica. Métodos bayesianos.

Classificação JEL: E37, E57, C32, C53, C11.

Abstract: The aim of this paper is an two empirical macroeconomic forecasting exercises to Brazil. In the first, the real-time forecasting exercise is realized to Brazil using TVP-VAR with stochastic volatility and others competing models to predict the inflation rate, Gross Domestic Product (GDP) and interest rate. The results indicate a satisfactory overall performance of the TVP-VAR with stochastic volatility compared to models with constant parameters and models with restricted versions of parameter variation. Especially, the results show that a constant coefficients VAR allowing for stochastic volatility improves the forecasting, but receives similar results to the general model with time-varying parameters. The results indicate that including the structural change and, especially, the possibility of exogenous shocks to the model, improves the results for a real-time forecasting exercise using Brazilian data in the recent period. In the second, the empirical forecasting exercise to Brazil is applied using VARMA and others competing models to predict the inflation rate and Gross Domestic Product (GDP) following (CHAN; EISENSTAT, 2017). We use a Bayesian approach and other VAR and VARMA and the variants with stochastic volatility and time-varying parameters. The forecast performance indicate that adding a moving average component do not improve the results relative to VAR. In addition, adding stochastic volatility substantially improves the forecast performance. The results indicate that including the possibility of exogenous shocks to the model improves forecasting using Brazilian data in the recent period.

Keywords: Macroeconomic forecasting. Time varying vector autoregression. Vector autoregressive moving average. Stochastic volatility. Bayesian methods.

JEL Classification: E37, E57, C32, C53, C11.

2.1 INTRODUÇÃO

A análise macroeconômica baseada nos modelos VAR tornou-se bastante popular após o trabalho de Sims (1980). A facilidade de implementação e, particularmente, a utilidade para previsão conquistaram amplo reconhecimento na macroeconomia aplicada. Nos últimos anos, o reconhecimento da importância do caráter dinâmico na modelagem econométrica tem despertado o interesse em estender o modelo VAR com coeficientes constantes para o VAR com coeficientes variando no tempo - TVP-VAR (COGLEY; SARGENT, 2001). Os resultados aplicados vêm demonstrando a importância de definir estruturas de modelagem e de previsão que incorporem a variação do tempo. Além disso, a partir dos trabalhos seminais de Cogley e Sargent (2001) e Primiceri (2005), a inclusão da volatilidade estocástica aos modelos com parâmetros variando no tempo têm demonstrado relevante sucesso empírico, tornando-se um benchmark no estudo macroeconômico. A popularidade desse modelo tem crescido com as indicações de que apresenta melhor performance de previsão comparativamente aos modelos com coeficientes constantes (D'AGOSTINO; GAMBETTI; GIANNONE, 2013; CLARK; RAVAZZOLO, 2015; CHAN, 2016).

A importância de permitir que os coeficientes do modelo variem no tempo adquiriu especial importância após o período chamado de Grande Moderação, relativa estabilidade macroeconômica na maioria dos países desenvolvidos entre o começo dos anos 1980 e meados dos anos 2000. Para Cogley e Sargent (2001), por exemplo, o regime de política monetária é visto como um fator importante de explicação desse período e estaria relacionado a mudanças dos coeficientes do modelo VAR. Uma outra hipótese, como destacada em Sims e Zha (2006), enfatiza que a volatilidade dos choques exógenos mudou ao longo do tempo e isso seria preponderante na explicação da Grande Moderação. Recentemente, em um exercício de comparação entre modelos usando variáveis macroeconômicas *standard*, Chan (2016) encontram evidências de que os maiores ganhos do modelo são provenientes da inclusão da volatilidade estocástica ao invés da variação dos coeficientes do VAR. Isso sugere que a variação no tempo da variância dos choques exógenos é empiricamente mais importante do que mudanças no regime de política monetária. Nessa linha, a abordagem desenvolvida por Carriero, Clark e Marcellino (2016) envolve VARs de grande dimensão com coeficientes constantes e várias especificações para a volatilidade estocástica.

Um outro aspecto interessante dos dados econômicos é que são revisados frequentemente. Porém, os agentes utilizam dados em *real-time* na tomada de decisão. Utilizamos o termo *vintage* para designar o conjunto de dados para uma variável divulgados em cada ponto do tempo, isto é, refere-se a última série disponível em uma data específica. O conjunto de *vintages* é chamado de base de dados em *real-time* e é construído para refletir, em cada data, exatamente os dados macroeconômicos disponíveis naquele momento (CROUSHORE; STARK, 2000; CROUSHORE; STARK, 2001). Assim, as revisões podem impactar sobre a estimação

e a previsão de variáveis macroeconômicas.¹ Levando em consideração o caráter *real-time* da tomada de decisões dos agentes, D'Agostino, Gambetti e Giannone (2013) aplicam o modelo TVP-VAR com volatilidade estocástica de Primiceri (2005) para a previsão.

No caso do Brasil, possíveis alterações na condução e na estrutura da política econômica e a exposição a choques externos e internos podem ter gerado mudanças recentes na economia comparativamente ao início dos anos 2000 e que podem se refletir em variações nos coeficientes do modelo e na volatilidade macroeconômica. Apesar da implantação do regime de Metas de Inflação no Brasil ter permitido alcançar estabilidade macroeconômica e maior previsibilidade aos agentes econômicos, flutuações do ciclo de negócios são inerentes à trajetória da economia. Nesse sentido, utilizamos uma base de dados em tempo real para o Brasil para a estimação e previsão do modelo com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica, bem como, outras especificações restringindo a variação dos parâmetros. Uma análise que considere a variação no tempo das variáveis macroeconômicas pode colaborar para atualizações de regras de política econômica mais precisas e para melhorar a performance de previsão do modelo. Adicionalmente, dados em tempo real tem especial relevância para a condução da política monetária, especialmente no regime de metas de inflação.

No trabalho de Primiceri (2005), o autor utiliza o modelo TVP-VAR com volatilidade estocástica com o intuito de estudar as mudanças na política monetária dos Estados Unidos no pós-guerra. O modelo envolve três variáveis (taxa de desemprego, inflação e taxa de juros) e os principais resultados indicam que respostas sistemáticas da taxa de juros para a inflação e para o desemprego apresentam uma tendência em direção a um comportamento mais agressivo no período recente. Após o trabalho de Primiceri (2005), outros autores analisaram a estrutura com variação no tempo na área macroeconômica. D'Agostino, Gambetti e Giannone (2013) estudam a precisão de previsões macroeconômicas considerando explicitamente a mudança estrutural através do modelo TVP-VAR com volatilidade estocástica proposto por Primiceri (2005) e, explicitamente, utilizam dados em tempo real na estimação dos modelos. Na linha de Primiceri (2005), são utilizadas três variáveis com dados *real-time* para a economia norte americana: taxa de desemprego, inflação e taxa de juros de curto prazo. Os resultados encontrados sugerem que o modelo TVP-VAR com volatilidade estocástica fornece previsões mais precisas para as variáveis quando comparadas a outros modelos benchmark. O modelo TVP-VAR foi também utilizado no trabalho de Carriero, Mumtaz e Theophilopoulou (2015) para a previsão de variáveis fiscais. Os resultados indicam que especificações VAR bayesianas (BVAR) e a adição de coeficientes variando no tempo e variação na volatilidade melhoram os resultados.

Contudo, apesar da popularidade dos modelos VAR, há evidências de vantagens ao considerar a especificação mais geral do modelo de vetores autorregressivos e médias móveis (VARMA) na estimação e previsão empírica (CHAN; EISENSTAT, 2017). O VARMA tornou-

¹ Ver, por exemplo, Orphanides (2001), Croushore e Stark (2001), Stark e Croushore (2002), Kishor e Koenig (2012), Croushore (2006), Clements e Galvão (2013b), Clements e Galvão (2013a), Carriero, Clements e Galvão (2014), entre outros.

se impopular na prática em decorrência dos problemas de estimação e a complexidade da identificação do modelo (KASCHA, 2012). O sucesso e a dominância do VAR na pesquisa macroeconômica podem ser atribuídos, também, às desvantagens do VARMA, bem como, as novas extensões que tornaram sua especificação mais flexível como coeficientes variando no tempo (KOOP; KOROBILIS, 2013), volatilidade estocástica (PRIMICERI, 2005) e controle da sobreparametrização (BAÑBURA; GIANNONE; REICHLIN, 2010; KOOP, 2013). Apesar disso, nos últimos anos vários trabalhos concentraram-se em tornar o VARMA acessível demonstrando vantagens com sua especificação (LÜTKEPOHL; POSKITT, 1996; ATHANASOPOULOS; VAHID, 2008; ATHANASOPOULOS; POSKITT; VAHID, 2012; KASCHA, 2012; DUFOUR; STEVANOVIĆ, 2013; KASCHA; TRENKLER, 2015; POSKITT, 2016).

Na revisão bibliográfica realizada neste trabalho para o caso brasileiro, encontramos trabalhos sobre previsões macroeconômicas sob diferentes enfoques. Para a previsão do PIB, Ferreira, Castelar et al. (2005) corrobora a evidência em favor de parâmetros variando no tempo ao usar modelos não lineares de índice de difusão, modelos com efeito threshold e com mudança markoviana de regime para prever o PIB, bem como, Céspedes, Chauvet e Lima (2006) destacam a importância do modelo TVP-VAR, pois permite considerar as quebras estruturais e os choques na economia brasileira. Para a previsão de inflação, Arruda, Ferreira e Castelar (2011) utilizam a curva de Phillips, Carlo e Marçal (2016) modelos estatísticos e Ferreira e Palma (2015) utilizam o método de combinação dinâmica de modelos (DMA). Mais recentemente, Caldeira, Moura e Santos (2015) comparam diferentes especificações com o modelo TVP-VAR com efeitos heterocedásticos proposto por Koop e Korobilis (2013) na previsão da inflação (IPCA), da taxa de juros (SELIC) e do indicador mensal do PIB (IBC-Br) utilizando modelos com até 20 variáveis para diversos horizontes de previsão. Os resultados indicam que a especificação TVP-VAR é a única que está sempre no conjunto de melhores modelos. Contudo, não se encontrou referências que analisem possíveis quebras estruturais e choques de volatilidade na economia brasileira utilizando dados macroeconômicos em tempo real. Assim como, não se encontrou referências sobre o impacto da inclusão do componente de médias móveis ao VAR.

Nesse cenário, o objetivo deste ensaio é realizar dois exercícios empíricos de previsão macroeconômica para o Brasil. No primeiro, procuramos analisar se a inclusão da volatilidade estocástica melhora a performance de previsão em *real-time* de variáveis-chave para a economia brasileira no Regime de Metas de Inflação: Produto Interno Bruto (PIB), taxa de inflação e taxa de juros. Essas três variáveis são comumente utilizadas em previsão (BAÑBURA; GIANNONE; REICHLIN, 2010; KOOP, 2013; CHAN, 2016). Os dados para esse conjunto de variáveis macroeconômicas trimestrais brasileiras começam em 1994/III, sendo o primeiro vintage referente a 2001/I e o último a 2016/IV. A previsão realizada neste trabalho busca refletir as condições com que o agente econômico se depara no momento da tomada de decisão e, para isso, são utilizados os dados do PIB brasileiro em *real-time*, considerando que a taxa de inflação e a taxa de juros não são revisadas. No caso do PIB, os dados vintage refletem exatamente o dado disponível em cada ponto do tempo. A incerteza associada com dados em tempo real pode ter

implicações importantes na definição de políticas apropriadas ao estado real da economia, sendo de particular importância para economias emergentes Grigoli et al. (2015). Com isso, procura-se avançar na aplicação do modelo TVP-VAR com volatilidade estocástica para o contexto da economia brasileira seguindo a linha de aplicação de D'Agostino, Gambetti e Giannone (2013). Isso nos permite levar em consideração que o processo gerador dos dados para as variáveis em análise possa ter sofrido mudanças ao longo do tempo, pois tanto o coeficiente autoregressivo quanto a variância dos erros podem variar no tempo. As previsões são realizadas para 1 e 4 trimestres a frente e a performance de previsão do TVP-VAR é comparada a outros modelos: *random-walk*, autoregressivo recursivo (REC-AR), vetor autoregressivo recursivo (REC-VAR), VAR com coeficientes que variam no tempo (TVP-VAR), VAR com coeficientes constantes que inclui volatilidade estocástica (VAR-SV). No segundo exercício empírico, o objetivo é realizar uma aplicação empírica com foco na previsão do PIB e da taxa de inflação no Brasil com o intuito de verificar se a utilização da especificação VARMA proposta por Chan e Eisenstat (2017) melhora a performance de previsão dessas variáveis. Particularmente, o foco é sobre a generalização do VARMA com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica. Para estimação são usados métodos bayesianos e, além disso, são implementadas especificações alternativas com o intuito de comparar a performance de previsão entre os modelos.

Os resultados do primeiro exercício empírico indicam que a previsão em tempo real fora da amostra para a inflação, PIB e taxa de juros no Brasil utilizando o modelo VAR com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica apresenta uma performance geral satisfatória do comparativamente aos outros modelos. Destaca-se os melhores resultados, especialmente, frente aos modelos com coeficientes constantes, quais sejam, RW, REC-AR e REC-VAR. No caso dos modelos TVP-VAR e VAR-SV, os ganhos aparecem menos perceptíveis e os resultados indicam performances satisfatórias também para esses modelos. No caso da inflação e da taxa de juros, os resultados apontam que o VAR com coeficientes constantes e volatilidade estocástica apresenta resultados acurados. Especialmente para a taxa de juros, o VAR-SV apresenta melhor desempenho em todos os horizontes de previsão comparativamente ao TVP-VAR(SV). De forma geral, os resultados indicam que quando é permitido variar os coeficientes (TVP-VAR) e a variância (VAR-SV) do modelo, melhora a previsão do modelo, mas torna-se mais difícil encontrar diferenças expressivas em relação ao modelo TVP-VAR(SV), em linha com os resultados de Chan (2016). Particularmente, a inclusão da volatilidade estocástica melhora a previsão do modelo, tornando as diferenças menos expressivas em relação ao modelo TVP-VAR(SV) indicando que incorporar a variação no tempo, mudança estrutural e choques exógenos à especificação do modelo melhora os resultados para a previsão na economia brasileira no período recente.

Os resultados para a segunda aplicação empírica para o Brasil indicam que somente adicionar o componente de médias móveis não melhora a performance de previsão das variáveis. Contudo, adicionar volatilidade estocástica ao VARMA melhora consideravelmente o desempenho da previsão. A especificação VAR com volatilidade estocástica apresenta o melhor desempenho entre os modelos. De forma geral, os resultados indicam que a inclusão da vola-

tilidade estocástica fornece ganhos expressivos na previsão para o caso brasileiro. Isso sugere que a volatilidade dos choques exógenos é empiricamente mais importante do que mudanças no regime de política monetária e que vem sendo apontando na literatura recente (SIMS; ZHA, 2006; D'AGOSTINO; GAMBETTI; GIANNONE, 2013; CLARK; RAVAZZOLO, 2015; CHAN, 2016).

O artigo está organizado como segue: na seção 2.2 são apresentadas as metodologias utilizadas em cada um dos exercícios empíricos, na seção 2.2.3.1 são descritos os dados utilizados, o exercício de previsão do TVP-VAR com volatilidade estocástica, bem como, os resultados, na seção 2.2.3.2 são descritos os dados utilizados, o exercício de previsão do VARMA e os resultados. Por fim, a última seção apresenta as considerações finais.

2.2 METODOLOGIA

Nesta seção, descrevemos os modelos utilizados nos exercício empíricos de previsão. A seção 2.2.1 apresenta o modelo VAR com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica - TVP-VAR(SV) - bem como algumas versões que restringem a variação dos coeficientes e que serão utilizados na primeira aplicação empírica deste trabalho. No modelo TVP-VAR(SV) assim como desenvolvido por Primiceri (2005), a possibilidade dos coeficientes variarem no tempo busca capturar possíveis não-linearidades ou variação no tempo na estrutura de lag do modelo. Por sua vez, a volatilidade estocástica multivariada busca capturar possíveis heterocedasticidades dos choques e não-linearidades nas relações simultâneas entre as variáveis do modelo (PRIMICERI, 2005). A aplicação empírica segue o trabalho de D'Agostino, Gambetti e Giannone (2013), o qual tem como base o modelo de Primiceri (2005).

A seção 2.2.2 apresenta a especificação do modelo de vetores autorregressivos e médias móveis - VARMA - proposta por Chan e Eisenstat (2017) que propõe uma abordagem bayesiana baseada na representação de espaço de estado e em desenvolvimentos recentes. Apresenta os aspectos de identificação no formato do Vetor de Médias Móveis (VMA) expandido e sua generalização para o VARMA, bem como para o VARMA com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica.

2.2.1 TVP-VAR com volatilidade estocástica

Nesta seção, descrevemos o modelo VAR com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica - TVP-VAR(SV) - bem como algumas versões que restringem a variação dos coeficientes e que serão utilizados na aplicação empírica realizada neste trabalho. No modelo TVP-VAR(SV) assim como desenvolvido por Primiceri (2005), a possibilidade dos coeficientes variarem no tempo busca capturar possíveis não-linearidades ou variação no tempo na estrutura de lag do modelo. Por sua vez, a volatilidade estocástica multivariada busca capturar possíveis heterocedasticidades dos choques e não-linearidades nas relações simultâneas entre as variáveis

do modelo (PRIMICERI, 2005). A aplicação empírica segue o trabalho de D'Agostino, Gambetti e Giannone (2013), o qual tem como base o modelo de Primiceri (2005).

A estimação do modelo com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica é realizada com métodos bayesianos com a utilização do algoritmo *Markov chain Monte Carlo* (MCMC) para gerar as amostras da distribuição a posteriori dos modelos. É utilizado Gibbs *Sampling* para a avaliação numérica da distribuição a posteriori dos parâmetros de interesse.

Seja y_t o vetor de variáveis, assumimos que

$$y_t = c_t + B_{1,t}y_{t-1} + \dots + B_{p,t}y_{t-p} + u_t, \quad (1)$$

onde c_t é o vetor de interceptos que variam no tempo, $B_{i,t}$ são matrizes de coeficientes que variam no tempo para $i = 1, \dots, p$ e u_t são os choques não observáveis heterocedásticos sendo $u_t \sim N(0, \Omega_t)$.

Definimos $\Sigma_t \Sigma_t = A_t \Omega_t A_t'$, onde A_t é triangular inferior, com a diagonal principal de uns e Σ_t é a matriz diagonal do vetor de elementos $\sigma_t = \text{diag}(\Sigma_t)$.

Segue que

$$y_t = c_t + B_{1,t}y_{t-1} + \dots + B_{p,t}y_{t-p} + A_t^{-1} \Sigma_t \varepsilon_t, \quad (2)$$

$$V(\varepsilon_t) = I_n.$$

Seja $B_t = [c_t, B_{1,t}, \dots, B_{p,t}]$ e $\theta_t = \text{vec}(B_t')$ podemos reescrever a equação como:

$$y_t = X_t' B_t + A_t^{-1} \Sigma_t \varepsilon_t \quad (3)$$

$$X_t' = I_n \otimes [1, y_{t-1}', \dots, y_{t-p}'], \quad (4)$$

onde \otimes denota o produto de Kronecker.

Como destaca Primiceri (2005), permitir que a matriz A_t varie no tempo é crucial para a estrutura do VAR que varia no tempo, implicando que uma inovação na i -ésima variável tem um efeito que varia no tempo sobre a j -ésima variável, especialmente quando o objetivo reside na modelagem simultânea da interação entre as variáveis. Além disso, em macroeconomia aplicada, permitir que Σ_t varie no tempo é importante e bastante útil. A modelagem ocorre na equação (3) ao invés de (1).

Seja $\alpha_{i,t}$, $i = 1, \dots, n-1$ o vetor coluna formado pelos elementos que não são zero e não são um da $(i+1)$ -ésima linha de A_t e σ_t o vetor de elementos da diagonal de Σ_t . A dinâmica dos parâmetros do modelo é descrita por:

$$B_t = B_{t-1} + v_t \quad (5)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + \zeta_t \quad (6)$$

$$\log \sigma_t = \log \sigma_{t-1} + \eta_t, \quad (7)$$

Então, o modelo completo é dado pelas equações (3), (5), (6) e (7).

As suposições sobre a distribuição de $(\varepsilon_t, v_t, \zeta_t, \eta_t)$ são dadas por:

$$V = \text{Var} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ v_t \\ \zeta_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W \end{bmatrix}, \quad (8)$$

onde I_n é uma matriz identidade n -dimensional, Q , S e W são matrizes positivas definidas. A matriz S é assumida digonal em bloco, com os blocos correspondendo aos parâmetros pertencentes as equações separadas, significando que os coeficientes das relações contemporâneas entre as variáveis são assumidas como evoluindo independentemente em cada equação.

2.2.1.1 Estimação bayesiana

Esta seção apresenta os aspectos principais da estimação do modelo VAR estrutural apresentando na seção (2.2.1). Métodos bayesianos são utilizados para avaliar a distribuição a posteriori dos parâmetros (B^T, A^T, Σ^T) e os hiperparâmetros da matriz de variâncias e covariâncias V . Métodos bayesianos são interessantes em modelos com alto número de parâmetros e não-linearidades, dividindo o problema de estimação original em versões menores e mais simples (PRIMICERI, 2005). Os parâmetros são avaliados através de MCMC, particularmente o amostrador de Gibbs. O algoritmo de estimação como em Primiceri (2005) sofreu uma correção em Negro e Primiceri (2015). A principal diferença está na ordem dos passos do algoritmo MCMC.²

O modelo é estimado com o algoritmo MCMC para gerar a distribuição a posteriori conjunta de (B^T, A^T, Σ^T, V) . Particularmente, o Gibbs sampling é realizado em quatro passos, amostrando os coeficientes que variam no tempo (B^T), relações simultâneas (A^T), volatilidades (Σ^T) e hiperparâmetros (V), condicional aos dados e aos outros parâmetros. A distribuição a posteriori condicional de B^T é obtida utilizando o algoritmo de Carter e Kohn (1994), bem como, a distribuição de A^T . Amostragem Σ^T está baseado no método de Kim, Shephard e Chib (1998). A distribuição a posteriori de V é padrão e segue o produto da distribuição Wishart inversa independente.

² A aplicação empírica deste trabalho utiliza o algoritmo (chamado de "algoritmo 2") com a correção presente em Negro e Primiceri (2015).

Seguindo Primiceri (2005), os parâmetros e hiperparâmetros são calibrados utilizando um modelo estimado com Mínimos Quadrados Ordinários baseado em uma subamostra inicial dos dados (*training sample*).

De forma resumida, as priors são definidas como³:

$$B_0 \sim \mathcal{N}(\hat{B}_{MQO}, 4 \cdot V(\hat{B}_{MQO})), \quad (9)$$

$$A_0 \sim \mathcal{N}(\hat{A}_{MQO}, 4 \cdot V(\hat{A}_{MQO})), \quad (10)$$

$$\log \sigma_0 \sim \mathcal{N}(\log \hat{\sigma}_{MQO}, I_n), \quad (11)$$

$$Q \sim \mathcal{IW}(\hat{k}_Q^2 \cdot 40 \cdot V(\hat{B}_{MQO}), 40), \quad (12)$$

$$W \sim \mathcal{IW}(\hat{k}_W^2 \cdot 4 \cdot I_n, 4), \quad (13)$$

$$S_1 \sim \mathcal{IW}(\hat{k}_S^2 \cdot 2 \cdot V(\hat{A}_{1,MQO}), 2), \quad (14)$$

$$S_2 \sim \mathcal{IW}(\hat{k}_S^2 \cdot 3 \cdot V(\hat{A}_{2,MQO}), 3), \quad (15)$$

onde \mathcal{N} denota a distribuição Normal, \mathcal{IW} denota a distribuição Wishart inversa.⁴ \hat{A}_{MQO} , $V(\hat{A}_{MQO})$, \hat{B}_{MQO} e $V(\hat{B}_{MQO})$ são obtidos através da amostra inicial estimada através de MQO. Além disso, S_1, S_2 denotam os blocos de S . Seguindo Primiceri (2005), são utilizados os seguintes valores: $k_Q = 0,01$, $k_S = 0,1$ e $k_W = 0,01$.

2.2.1.2 Previsão

Utilizando a notação habitual em modelos espaço de estado, $y^T = [y'_1 \dots y'_T]'$ empilha todos os y_t até o tempo T , o que, nesse caso, denota a amostra inteira de dados da variável dependente. Além disso, $y^{T+1, T+h} = [y'_{T+1} \dots y'_{T+h}]'$ denota o vetor de variáveis utilizadas na previsão. As previsões são, então, obtidas usando a densidade preditiva posteriori

$$p(y^{T+1, T+h} | y^T). \quad (16)$$

Seja Θ_t o vetor contendo os parâmetros de *drift* que tem o objetivo de capturar possíveis não linearidades ou variação de tempo na estrutura de lag do modelo e Φ o vetor de parâmetros constantes e $\Theta^{T+1, T+h} = [\Theta'_{T+1} \dots \Theta'_{T+h}]$ e $\Theta^T = [\Theta'_1 \dots \Theta'_T]$. A densidade preditiva posteriori pode ser escrita como:

$$p(y^{T+1, T+h} | y^T) = \int \int p(y^{T+1, T+h}, \Theta^{T+h}, \Phi | y^T) d\Theta^{T+h} d\Phi, \quad (17)$$

³ As priors são definidas de acordo com o trabalho de Primiceri (2005)

⁴ A distribuição das priors para os hiperparâmetros, Q , W e os blocos de S , são assumidas como Wishart inversa independente. As priors para os coeficientes variando no tempo, relações simultâneas e logaritmo da volatilidade - $p(B_0)$, $p(\alpha_0)$, $p(\log \sigma_0)$ - são assumidas normalmente distribuídas.

onde

$$p\left(y^{T+1,T+h}, \Theta^{T+h}, \Phi | y^T\right) = p\left(y^{T+1,T+h} | y^T, \Theta^{T+h}, \Phi\right) p\left(\Theta^{T+1,T+h} | y^T, \Theta^T, \Phi\right) p\left(\Theta^T, \Phi | y^T\right). \quad (18)$$

As distribuições de previsão fora da amostra construídas com as expressões acima são obtidas utilizando o algoritmo MCMC de Primiceri (2005).

2.2.1.3 Outros modelos de previsão

As previsões obtidas com o modelo TVP-VAR(SV) são comparadas a outros modelos de previsão. Consideramos os seguintes modelos:

1. **Random walk**;
2. **REC-AR**: modelo auto-regressivo (AR) com coeficientes fixos estimado separadamente para cada variável utilizando um esquema recursivo, isto é, utilizando todos os dados disponíveis no momento em que as previsões são realizadas. O modelo é estimado por máxima verossimilhança;
3. **REC-VAR**: modelo de vetores auto-regressivo (VAR) com coeficientes fixos estimado com um esquema recursivo, isto é, utilizando todos os dados disponíveis no momento em que as previsões são realizadas. O modelo é estimado por máxima verossimilhança;
4. **TVP-VAR**: modelo VAR com coeficientes que variam no tempo seguindo um *random walk*. Estimado com métodos bayesianos seguindo as especificações da seção (2.1) adaptadas para este modelo;
5. **VAR-SV**: modelo VAR com coeficientes constantes que inclui a estimação da volatilidade seguindo um *random walk*. Estimado com métodos bayesianos seguindo as especificações da seção (2.1) adaptadas para este modelo.

2.2.2 VARMA

Algumas complicações tornam a modelagem VARMA mais difícil (KASCHA, 2012). A representação do VARMA não é única, ou seja, há diferentes parametrizações possíveis que podem descrever o mesmo processo gerador dos dados. Em particular no contexto multivariado, isso gera problemas na identificação e na estimação do VARMA (ATHANASOPOULOS; VAHID, 2008). Considerando que os modelos VAR são fáceis de estimar e apresentam performance satisfatória, compreende-se serem amplamente utilizados, ao contrário do VARMA.

Para lidar com essas questões, Chan e Eisenstat (2017) propõem uma abordagem bayesiana baseada na representação de espaço de estado e em desenvolvimentos recentes. Os autores

utilizam a representação de espaço de estado de Metaxoglou e Smith (2007), a qual define o VARMA como um modelo de fatores latentes onde os fatores defasados entram na equação de medida corrente. Porém, diferentemente de Metaxoglou e Smith (2007) que definem *a priori* certos parâmetros e que utilizam o algoritmo EM, Chan e Eisenstat (2017) utilizam a abordagem bayesiana e desenvolvem um amostrador de Gibbs para essa representação de espaço de estado do VARMA. Para simular os fatores latentes, os autores utilizam um amostrador mais eficiente desenvolvido em Chan e Jeliaskov (2009). Com isso, Chan e Eisenstat (2017) propõem um amostrador de Gibbs eficiente para o VARMA, facilitando sua implementação prática, bem como, a generalização para especificações alternativas.

Nesta seção, são apresentados os aspectos de identificação no formato do Vetor de Médias Móveis (VMA) expandido e como recuperar os parâmetros do VMA originais a partir daqueles do VMA expandido. A metodologia é apresentada seguindo o trabalho de Chan e Eisenstat (2017). Além disso, as seções 2.2.2.1 e 2.2.2.2 assumem que os erros seguem um ruído branco fraco. A seção 2.2.2.3 apresenta a discussão sobre a recuperação dos parâmetros originais do VMA e a seção 2.4 apresenta o modelo VARMA (Vetor Autoregressivo e Médias Móveis). A estimação é apresentada na seção 3 assumindo que os erros seguem uma distribuição gaussiana.

2.2.2.1 Configuração básica

A construção da estrutura geral tem início com a especificação do modelo VMA(q):

$$\mathbf{u}_t = \Theta(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t \equiv \Theta_0\boldsymbol{\varepsilon}_t + \Theta_1\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + \Theta_q\boldsymbol{\varepsilon}_{t-q} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{WN}(0, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (19)$$

onde \mathbf{u}_t é $n \times 1$, Θ_0 é assumido não singular, mas não necessariamente igual a I_n , $\mathcal{WN}(0, \boldsymbol{\Sigma})$ denota o processo ruído branco (fraco) com covariância $\boldsymbol{\Sigma}$, isto é, $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$ satisfaz $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = 0$, $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}'_{t-s}) = \mathbf{0}$ para todo $s \geq 1$. Θ_0 é assumido não singular, mas não necessariamente igual a I_n . As autocovariâncias geradas por esse processo VMA(q) são dadas por:

$$\boldsymbol{\Gamma}_j \equiv E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}'_{t-j}) = \sum_{l=j}^q \Theta_l\boldsymbol{\Sigma}\Theta'_{l-j}, \quad j = 0, \dots, q.$$

No que segue, será útil considerar a representação VMA(1) da forma geral VMA(q), definida como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_{t-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{t-q-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_\tau} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Theta_0 & \Theta_1 & \cdots & \Theta_{q-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \Theta_1 \\ & & & \Theta_0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\Theta}_0} \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q-1} \end{pmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_\tau} + \underbrace{\begin{pmatrix} \Theta_q & & & \\ \Theta_{q-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \Theta_1 & \cdots & \Theta_{q-1} & \Theta_q \end{pmatrix}}_{\tilde{\Theta}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2q+1} \end{pmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\tau-1}}, \quad (20)$$

com $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_\tau \sim \mathcal{WN}(0, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})$ e $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{I}_q \otimes \boldsymbol{\Sigma}$. Assim, as autocovariâncias correspondentes são denotadas por:

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_0 & \boldsymbol{\Gamma}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{q-1} \\ \boldsymbol{\Gamma}'_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{\Gamma}_1 \\ \boldsymbol{\Gamma}'_{q-1} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}'_1 & \boldsymbol{\Gamma}_0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_q & & & \\ \boldsymbol{\Gamma}_{q-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \boldsymbol{\Gamma}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{q-1} & \boldsymbol{\Gamma}_q \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Escrever o modelo VMA(q) dessa forma permite analisar o caso mais simples $q = 1$, bem como, generalizar os para qualquer q através de (20)-(21).

Assumimos que o processo VMA(q) é invertível, isto é, a equação característica

$$\det \boldsymbol{\Theta}(z) \equiv \det(\boldsymbol{\Theta}_0 + \boldsymbol{\Theta}_1 z + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q z^q)$$

tem todas as raízes fora do círculo unitário. Nos referimos ao processo VMA com todas as raízes fora do círculo unitário como *fundamental* e o processo VMA com qualquer raiz estritamente dentro do círculo unitário como *não-fundamental*.

A decomposição de \mathbf{u}_t é dada por:

$$\mathbf{u}_t = \boldsymbol{\Phi}_0 \mathbf{f}_t + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_q \mathbf{f}_{t-q} + \boldsymbol{\eta}_t, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{f}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix} \sim \mathcal{WN} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix} \right), \quad (22)$$

onde \mathbf{f}_t é $n \times 1$, $\boldsymbol{\eta}_t$ é $n \times 1$, $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{\Lambda}$ são diagonais (com elementos $\omega_i^2 \geq 0$ e $\lambda_i^2 \geq 0$, respectivamente) e $\boldsymbol{\Phi}_0$ é triangular inferior com a diagonal de uns. Nos referimos a isso como *formato VMA expandido*. As autocovariâncias decorrentes dessa decomposição são:

$$\mathring{\boldsymbol{\Gamma}}_j = \sum_{l=j}^q \boldsymbol{\Theta}_l \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Theta}'_{l-j} + \mathbb{1}(j=0) \boldsymbol{\Lambda}, \quad j = 0, \dots, q, \quad (23)$$

e o mapeamento entre $(\boldsymbol{\Theta}_0, \dots, \boldsymbol{\Theta}_q, \boldsymbol{\Sigma})$ e $(\boldsymbol{\Phi}_0, \dots, \boldsymbol{\Phi}_q, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Lambda})$ é definido estabelecendo $\boldsymbol{\Gamma}_j = \mathring{\boldsymbol{\Gamma}}_j$, ou seja,

$$\sum_{l=j}^q \boldsymbol{\Theta}_l \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Theta}'_{l-j} = \sum_{l=j}^q \boldsymbol{\Phi}_l \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Phi}'_{l-j} + \mathbb{1}(j=0) \boldsymbol{\Lambda}, \quad \text{para todos } j = 0, \dots, q. \quad (24)$$

A justificativa para essa decomposição encontra-se no fato de que a soma de dois processos VMA independentes resulta em um processo VMA.

2.2.2.2 Identificação no formato VMA expandido

A identificação do formato expandido na prática considera o "problema de identificação" gerado pela expansão. Essa questão é abordada por Metaxoglou e Smith (2007) fixando os elementos de $\mathbf{\Lambda}$ em valores pré-determinados e a estimam os coeficientes restantes como parâmetros livres. Contudo, isso pode levar a má especificação ao impor, arbitrariamente, valores para a variância. No método desenvolvido por Chan e Eisenstat (2017) não é necessário impor parâmetros fixos.

Considerando o caso simples MA(1), o mapeamento entre os dois formatos a partir de (24) é dado por:

$$\begin{aligned}\sigma^2(1 + \theta^2) &= \omega^2(1 + \phi^2) + \lambda^2, \\ \sigma^2\theta &= \omega^2\phi.\end{aligned}$$

Nesse caso, temos que $\sigma^2 > 0$, $\omega^2 > 0$, $\lambda^2 > 0$ e $-1 < \theta < 1$. Conjuntamente, isso implica em

$$0 < \lambda^2 < \sigma^2(1 - |\theta|)^2. \quad (25)$$

Como θ , σ^2 são unicamente identificados a partir dos dados, λ^2 é sempre limitado dentro de um intervalo fechado: esse intervalo é maior quando $\theta = 0$ e o modelo reduz-se ao ruído branco e o intervalo encolhe em direção a zero quando $\theta \rightarrow \pm 1$.

Isso implica que sempre há (exceto para o caso extremo $\theta = \pm 1$) algum λ^2 não zero (positivo) tal que qualquer θ, σ^2 pode ser recuperado a partir de $\phi, \omega^2, \lambda^2$. Contudo, dado um valor de λ^2 , o mapeamento reverso não é bem definido. Por outro lado, somente valores de λ^2 satisfazendo (25) são admissíveis. Isso implica em:

1. Fixar arbitrariamente λ^2 em um valor particular pode levar a má especificação;
2. $\phi, \omega^2, \lambda^2$ são parcialmente identificados no formato expandido.

Esses pontos indicam que utilizar métodos bayesianos na estimação pode ser interessante neste contexto e ser realizada:

1. amostrando $\Phi_0, \dots, \Phi_q, \Omega, \Lambda$ usando o formato expandido;
2. recuperando $\Theta_0, \dots, \Theta_q, \Sigma$ *ex-post* a partir das amostras simuladas.

Nesse contexto, não estamos interessados na distribuição a posteriori de $\Phi_0, \dots, \Phi_q, \Omega, \Lambda$, nós somente a utilizamos como um meio para analisar a posteriori de quantidades tais como $\Theta_0, \dots, \Theta_q, \Sigma$ ou as previsões $\mathbf{u}_{t+1}, \dots, \mathbf{u}_{t+h}$. Amostrando diretamente de qualquer distribuição a

posteriori ($\tilde{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{y}$) e aplicando a transformação $g : \tilde{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow \boldsymbol{\theta}$ para cada amostra de $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ automaticamente produz amostras da posteriori ($\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}$). Uma abordagem em dois passos adiciona ganhos se é mais fácil amostrar de ($\tilde{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{y}$) comparativamente a ($\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}$). Caso sejam necessárias restrições para garantir que ($\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}$) seja unimodal, então essas restrições serão incorporadas na transformação g .

Como destaca Chan e Eisenstat (2017), essa abordagem tem o apelo de que a amostragem do formato expandido é computacionalmente mais simples do que a partir do VMA padrão. Além disso, o formato VMA expandido é representado como um modelo espaço de estado linear e, portanto, algoritmos MCMC eficientes já estão estabelecidos. Por sua vez, são propostas prioris para cada $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ ao invés de fixá-los em valores específicos. Nesse caso, as prioris sobre $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ correspondem a prioris das raízes do $\det\boldsymbol{\Theta}(L)$: probabilidades a priori mais baixas atribuídas a menores valores de λ_1^2 implicam maiores probabilidades de restringir as raízes fora da unidade. Já o limite superior de λ_1^2 é identificado dos dados, então a cauda da priori tem um papel menor na determinação da posteriori $\boldsymbol{\Theta}_0, \dots, \boldsymbol{\Theta}_q, \boldsymbol{\Sigma}$.

Então, a priori sobre λ_1^2 é dada por uma distribuição inversa Gama

$$\lambda_i^2 \sim \mathcal{IG}(v_{\lambda,0}, S_{\lambda,0}),$$

com $v_{\lambda,0}, S_{\lambda,0}$ configurada para valores baixos. Definir um valor pequeno $S_{\lambda,0}$ garante que os processos VMA com raízes próximas a unidade não sejam excluídos a priori. Por sua vez, estabelecendo um valor baixo para $v_{\lambda,0}$ resulta em uma distribuição com caudas pesadas que melhora a eficiência dos algoritmos MCMC baseados nessa especificação.

2.2.2.3 Recuperação dos parâmetros do VMA a partir do formato expandido

De acordo com Chan e Eisenstat (2017), para aplicações em previsão, por construção o formato VMA expandido resulta em distribuições preditivas idênticas ao formato VMA padrão. Portanto, não há necessidade de recuperar $\boldsymbol{\Theta}_0, \dots, \boldsymbol{\Theta}_q, \boldsymbol{\Sigma}$ e as previsões $\mathbf{u}_{t+1}, \dots, \mathbf{u}_{t+h}$ podem ser geradas diretamente das amostras dos parâmetros do formato expandido. No caso do interesse residir nas funções impulso-resposta, é necessário recuperar $\boldsymbol{\Theta}_0, \dots, \boldsymbol{\Theta}_q, \boldsymbol{\Sigma}$ das amostras de $\boldsymbol{\Phi}_0, \dots, \boldsymbol{\Phi}_q, \boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{\Lambda}$.

O modelo é assumido com $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ Gaussiano. Com respeito ao formato expandido, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ é um ruído branco Gaussiano se e somente se \mathbf{f}_t e $\boldsymbol{\eta}_t$ são ruídos branco Gaussianos.

Assumimos que $\boldsymbol{\Theta}_0$ é conhecido, $\boldsymbol{\Sigma}$ é irrestrito e obtivemos amostras de $\boldsymbol{\Phi}_0, \dots, \boldsymbol{\Phi}_q, \boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{\Lambda}$. Para recuperar $\boldsymbol{\Theta}_1, \dots, \boldsymbol{\Theta}_q, \boldsymbol{\Sigma}$ (dado $\boldsymbol{\Theta}_0$) usamos a representação VMA(1) correspondente, gerando o sistema de equações:

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_0 = \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_0 \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_0' + \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_1 \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_1' = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} + \hat{\boldsymbol{\Theta}}_1 \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \hat{\boldsymbol{\Theta}}_1' \quad (26)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_1 = \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_1 \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_0' = \hat{\boldsymbol{\Theta}}_1 \hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \quad (27)$$

onde $\hat{\Theta}_1 = \tilde{\Theta}_1 \tilde{\Theta}_0^{-1}$, $\tilde{\Sigma}_1 = \tilde{\Theta}_1 \tilde{\Sigma} \tilde{\Theta}_0'$, $\tilde{\Gamma}_0$ e $\tilde{\Gamma}_1$ são computados a partir de $\Phi_0, \dots, \Phi_q, \Omega$ e Λ definindo $\Gamma_j = \tilde{\Gamma}_j$ para $j = 0, \dots, q$. Multiplicando (26) por $\hat{\Theta}_1$ e substituindo (27) em (26) resulta na equação quadrática da matriz de acordo com:

$$\hat{\Theta}_1^2 \tilde{\Gamma}_1' - \hat{\Theta}_1 \tilde{\Gamma}_0 + \tilde{\Gamma}_1 = 0. \quad (28)$$

Então, o algoritmo para obter as amostras de $\Theta_1, \dots, \Theta_q, \Sigma$ (dado Θ_0) a partir de $\Phi_0, \dots, \Phi_q, \Omega$ e Λ consiste nos seguintes passos:

1. Computar $\Gamma_0, \dots, \Gamma_q$ a partir das amostras de $\Phi_0, \dots, \Phi_q, \Omega, \Lambda$.
2. Construir $\tilde{\Gamma}_0$ e $\tilde{\Gamma}_1$ de acordo com (21).
3. Computar $\hat{\Theta}_1$, a solução de (28) e os correspondentes $\hat{\Sigma} = \tilde{\Gamma}_0 - \hat{\Theta}_1 \tilde{\Gamma}_1'$. As raízes de $\Theta(L)$ são selecionados como um subproduto desse passo.
4. Recuperar $\Theta_1, \dots, \Theta_q$ a partir das primeiras n colunas de $\hat{\Theta}_1$ e Σ a partir do bloco $n \times n$ inferior direito de $\hat{\Sigma}$.

Uma vez que os parâmetros VMA ($\Theta_0, \dots, \Theta_q, \Sigma$) foram recuperados, os erros na forma reduzida ε_t na forma original podem ser computados de (19).

2.2.2.4 Extensão para o VARMA

A generalização da configuração acima para o VARMA é dada adicionando p componentes autorregressivos em \mathbf{u}_t na equação (19) para obter⁵:

$$\mathbf{y}_t = \sum_{j=1}^p A_j \mathbf{y}_{t-j} + \sum_{j=1}^p \Theta_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{WN}(0, \Sigma). \quad (29)$$

Assim como no VMA, derivamos o formato VARMA expandido reparametrizando \mathbf{u}_t tal que

$$\mathbf{y}_t = \sum_{j=1}^p A_j \mathbf{y}_{t-j} + \sum_{j=0}^q \Phi_j \mathbf{f}_{t-j} + \boldsymbol{\eta}_t, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{f}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix} \sim \mathcal{WN} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda \end{pmatrix} \right). \quad (30)$$

E estimar (30) é suficiente para estimar (29), pois podemos recuperar $\Theta_1, \dots, \Theta_q, \Sigma$ de $\Phi_0, \dots, \Phi_q, \Omega, \Lambda$.

⁵ O intercepto foi suprimido para facilitar a notação.

Como salientado anteriormente, adicionar componentes autorregressivos como no VARMA(p, q) em (29) pode gerar problemas de identificação do modelo. Uma alternativa para lidar com esse fato é reformular (29) para a forma canônica escalonada:

$$\mathbf{B}_0 \mathbf{y}_t = \sum_{j=1}^p B_j \mathbf{y}_{t-j} + \sum_{j=1}^p \Theta_j^* \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} + \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{WN}(0, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (31)$$

onde \mathbf{B}_0 é triangular inferior com a diagonal de uns, $\mathbf{B}_j = \mathbf{B}_0 \mathbf{A}_j$ e $\Theta_j^* = \mathbf{B}_0 \Theta_j$. Condição aos índices de Kronecker k_1, \dots, k_n com $0 \geq k_i \leq p$, (31) pode ser estimada impondo restrições de exclusão nos coeficientes em \mathbf{B}_0 , \mathbf{B}_j e Θ_j^* .

Então, condicionado aos índices de Kronecker, podemos impor restrições na forma escalonada também no VARMA expandido, reescrevendo (30) como

$$\mathbf{B}_0 \mathbf{y}_t = \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j \mathbf{y}_{t-j} + \sum_{j=0}^p \Phi_j \mathbf{f}_{t-j} + \boldsymbol{\eta}_t, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{f}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix} \sim \mathcal{WN} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix} \right). \quad (32)$$

Cabe ressaltar que restringir qualquer linha de Φ_j a zero irá corresponder a restrição da mesma linha de Θ_j^* a zero sob (24) e, então, podemos trabalhar diretamente com (32) e recuperar os parâmetros de (31) *ex-post*. Na prática, os índices de Kronecker são desconhecidos e Chan e Eisenstat (2017) fazem a suposição de identificação que a matriz $[\mathbf{A}_a : \Theta_q]$ tem posto completo n . O autor argumenta que essa estratégia é mais simples do que especificar a forma escalonada quando n é pequeno. Independentemente de identificar a forma única de $\mathbf{A}(L)$ e $\Theta(L)$, o formato expandido permite desenvolver algoritmos de amostragem convenientes para o VARMA.

2.2.2.5 Estimação do VARMA com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica

Nesta seção é apresentado o modelo VARMA com coeficientes variando no tempo (TVP) e volatilidade estocástica (SV), bem como, as prioris conjugadas para os parâmetros do modelo e o amostrador de Gibbs seguindo o trabalho de Chan e Eisenstat (2017). A estimação assume que os erros seguem uma distribuição gaussiana. A possibilidade dos coeficientes variarem no tempo busca capturar possíveis não-linearidades ou variação no tempo na estrutura do modelo. Por sua vez, a volatilidade estocástica busca capturar possíveis heterocedasticidades dos choques e não-linearidades nas relações entre as variáveis do modelo.

Cabe notar que a análise é condicionada nas observações iniciais $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{1-p}$ e assumindo os fatores iniciais $\mathbf{f}_{1-q} = \dots = \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}$. O VARMA é especificado com o termo de intercepto $\boldsymbol{\mu}$. O formato expandido do VARMA é condicionalmente linear e, portanto, a resolução é direta.

Como o objetivo é estender o VARMA(p, q) com volatilidade estocástica e parâmetros variando no tempo, estendemos (30) para permitir que os coeficientes do VMA Φ_0, \dots, Φ_q variem

no tempo:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Phi}_{0,t} \mathbf{f}_t + \boldsymbol{\Phi}_{1,t} \mathbf{f}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_{q,t} \mathbf{f}_{t-q} + \boldsymbol{\eta}_t, \quad (33)$$

onde $\mathbf{X}_t = \mathbf{I}_n \otimes (1, \mathbf{y}'_{t-1}, \dots, \mathbf{y}'_{t-p})$, $\boldsymbol{\beta} = \text{vec}((\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p)')$, $\boldsymbol{\eta}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Lambda})$ e $\boldsymbol{\Lambda}$ é uma matriz diagonal.

Seja $\phi_{i,t}$ o vetor de parâmetros livres na i -ésima linha de $\boldsymbol{\Phi}_{0,t}$, $\boldsymbol{\Phi}_{1,t}, \dots, \boldsymbol{\Phi}_{q,t}$. A equação de transição é dada por:

$$\phi_{i,t} = \phi_{i,t-1} + \boldsymbol{\xi}_{i,t}, \quad (34)$$

onde $\boldsymbol{\xi}_{i,t} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}_{\phi_i})$ para $i = 1, \dots, n$, $t = 2, \dots, T$ com $\boldsymbol{\Psi}_{\phi_i} = \text{diag}(\psi_{\phi,i,1}^2, \dots, \psi_{\phi,i,k_i}^2)$ e $\boldsymbol{\Psi}_{\phi}^2 = (\psi_{\phi,1,1}^2, \dots, \psi_{\phi,n,k_n}^2)'$. $\phi_{i,1} \sim \mathcal{N}(\phi_{i,0}, \boldsymbol{\Psi}_{\phi_0})$ são as condições iniciais, onde $\phi_{i,0}$ e $\boldsymbol{\Psi}_{\phi_0}$ são matrizes constantes conhecidas.

A volatilidade estocástica é inserida no modelo permitindo que a volatilidade dos fatores latentes varie no tempo $\mathbf{f}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}_t)$, onde $\boldsymbol{\Omega}_t = \text{diag}(e^{h_{1,t}}, \dots, e^{h_{n,t}})$. Então, a log-volatilidade segue um passeio aleatório dado por:

$$h_{i,t} = h_{i,t-1} + \zeta_{i,t}, \quad (35)$$

onde $\zeta_{i,t} \sim \mathcal{N}(0, \psi_{h,i}^2)$ para $i = 1, \dots, n$, $t = 2, \dots, T$. As log-volatilidades são inicializadas com $h_{i,1} \sim \mathcal{N}(h_{i,0}, V_{h_i,0})$ onde $h_{i,0}$ e $V_{h_i,0}$ são constantes conhecidas. Adotamos ainda a notação $\mathbf{h}_t = (h_{1,t}, \dots, h_{n,t})'$, $\mathbf{h} = (\mathbf{h}'_1, \dots, \mathbf{h}'_T)'$ e $\boldsymbol{\Psi}_h^2 = (\psi_{h,1}^2, \dots, \psi_{h,n}^2)'$. Como destacado por Chan e Eisenstat (2017), permitir que variem no tempo $\boldsymbol{\Phi}_{0,t}, \dots, \boldsymbol{\Phi}_{q,t}$ e $\boldsymbol{\Omega}_t$ corresponde a variação no tempo de $\boldsymbol{\Theta}_{1,t}, \dots, \boldsymbol{\Theta}_{j,t}$ e $\boldsymbol{\Sigma}_t$, e atribuir a distribuição normal a \mathbf{f}_t e $\boldsymbol{\eta}_t$ implicam que $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ tem também distribuição normal.

Empilhando as observações em (33) em t temos:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}, \quad (36)$$

onde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_T \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_T \end{pmatrix},$$

e $\boldsymbol{\Phi}$ é uma matriz triangular inferior $Tn \times Tn$ com $\boldsymbol{\Phi}_{0,1}, \dots, \boldsymbol{\Phi}_{0,T}$ no bloco diagonal principal, $\boldsymbol{\Phi}_{1,2}, \dots, \boldsymbol{\Phi}_{1,T}$ no primeiro bloco diagonal inferior, $\boldsymbol{\Phi}_{2,3}, \dots, \boldsymbol{\Phi}_{2,T}$ no segundo bloco diagonal inferior e assim por diante.

O modelo assume ainda priors independentes para $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Psi}_\phi^2$ e $\boldsymbol{\Psi}_h^2$. Então, $\boldsymbol{\beta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}_0, \mathbf{V}_\beta)$ e para $\boldsymbol{\Psi}_\phi^2$, $\boldsymbol{\Psi}_h^2$ e os elementos da diagonal de $\boldsymbol{\Lambda}_t = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$ as priors são dadas por:

$$\lambda_i^2 \sim \mathcal{IG}(v_{\lambda,0}, S_{\lambda,0}), \quad \psi_{\phi,i,j}^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2S_{\phi,0}}\right), \quad \psi_{h,i}^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2S_{h,0}}\right),$$

onde \mathcal{G} denota a distribuição Gama e \mathcal{IG} a distribuição Inversa-Gama. Os parâmetros $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ são introduzidos para facilitar a computação e, com isso, o grau de liberdade do parâmetro $v_{\lambda,0}$ é pequeno. A variância dos erros dos parâmetros que variam no tempo possui distribuição Gama pois permite maior concentração ao redor de valores pequenos e, também, a posteriori resultante dessa priori não é sensível aos valores dos hiperparâmetros.

O amostrador de Gibbs utilizado na estimação possui os seguintes passos:

1. $p(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{f} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\Psi}_\phi^2, \boldsymbol{\Psi}_h^2, \boldsymbol{\Lambda}) = p(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\Lambda}) p(\mathbf{f} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\Lambda})$;
2. $p(\boldsymbol{\phi} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{f}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\Psi}_\phi^2, \boldsymbol{\Psi}_h^2, \boldsymbol{\Lambda})$;
3. $p(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\Psi}_\phi^2, \boldsymbol{\Psi}_h^2, \boldsymbol{\Lambda})$;
4. $p(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Psi}_\phi^2, \boldsymbol{\Psi}_h^2 | \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{f}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\phi}) = p(\boldsymbol{\Lambda} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\phi}) p(\boldsymbol{\Psi}_h^2 | \mathbf{h}) p(\boldsymbol{\Psi}_\phi^2 | \boldsymbol{\phi})$.

Na estimação, o algoritmo do amostrador é baseado em tratar (36) como um modelo fatorial latente. Os parâmetros iniciais do modelo são iniciados usando valores consistentes com o VAR com coeficientes constantes. Especificamente, seja $\hat{\mathbf{b}}$ e $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{s}_{ij})$ as estimativas de mínimos quadrados dos coeficientes do VAR e a matriz de covariância do VAR(p). Então, o amostrador de Gibbs é inicializado definindo $\boldsymbol{\beta} = \hat{\mathbf{b}}$, $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$, $h_{i,1} = \dots = h_{i,T} = \log \hat{s}_{ii}$ para $i = 1, \dots, n$ e $\mathbf{f} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, O_h)$, onde $O_h = \text{diag}(e^{h_{1,1}}, \dots, e^{h_{n,1}}, \dots, e^{h_{1,T}}, \dots, e^{h_{n,T}})$. Por sua vez, $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Psi}_\phi^2$ e $\boldsymbol{\Psi}_h^2$ são inicializados através da implementação do passo 4 do amostrador de Gibbs. Para mais detalhes sobre o amostrador de Gibbs ver Apêndice ??.

2.2.3 Aplicações empíricas

Esta seção apresenta os dois exercícios de previsão macroeconômica a partir da metodologia descrita na seção 2.2 para o caso brasileiro. O primeiro exercício empírico, descrito na seção 2.2.3.1, procura analisar se a inclusão da volatilidade estocástica melhora a performance de previsão em *real-time* de variáveis-chave para a economia brasileira no Regime de Metas de Inflação: Produto Interno Bruto (PIB), taxa de inflação e taxa de juros utilizando a especificação TVP-VAR descrita em 2.2.1. São apresentados os dados utilizados, bem como, os resultados empíricos.

No segundo exercício empírico, descrito na seção 2.2.3.2, é realizado um exercício empírico de previsão recursiva para o VARMA e outros modelos alternativos envolvendo a taxa

de inflação e a taxa de crescimento real do PIB no Brasil. A previsão é realizada para modelos VARMA e VAR e suas variações envolvendo volatilidade estocástica e parâmetros variando no tempo como descritos na seção 2.2.2. A avaliação da performance das previsões é realizada através da verossimilhança preditiva. São apresentados, ainda, os dados utilizados, bem como os resultados empíricos.

2.2.3.1 Exercício de previsão I: previsão macroeconômica em tempo real para o Brasil: uma aplicação do modelo VAR com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica

O exercício de previsão realizado neste trabalho é baseado na densidade preditiva utilizando a mesma informação disponível para o agente econômico no momento em que a previsão é realizada. A previsão é realizada para 4 trimestres fora da janela de estimação. A previsão tem início com o vintage 2001/I que engloba os dados para o período 1994/III-2001/I. A previsão ocorre para 2001/II a 2002/I e os resultados são salvos. Então, seguimos para o próximo trimestre e usamos os dados referente ao vintage 2001/II, reestimamos o modelo e salvamos as previsões para 2001/III a 2002/II. Esse procedimento é, então, repetido para todos os vintages contidos nos dados.⁶ As previsões são comparadas com os dados vintages observados *ex-post*. Seguindo D'Agostino, Gambetti e Giannone (2013), as previsões são comparadas com os dados divulgados 2 trimestres depois.

A avaliação da performance das previsões é realizada através de duas medidas: uma baseada na previsão pontual e outra envolvendo toda a densidade preditiva. O Erro Quadrático Médio de Previsão (MSFE) usa a previsão pontual e é a medida mais comum de comparação de previsão. Por sua vez, *log-predictive score* avalia a performance de previsão da densidade preditiva inteira.

2.2.3.1.1 Dados

A aplicação empírica deste trabalho é realizada para 3 variáveis que estão diretamente relacionadas à condução do regime de Metas de Inflação no Brasil: Produto Interno Bruto (PIB), taxa de inflação (IPCA) e taxa de juros (SELIC). As estimações são realizadas com dados em tempo real. Para esse conjunto de variáveis, apenas o PIB sofre revisões ao longo do tempo e, por isso, torna-se necessário organizar um conjunto de dados do PIB do Brasil em tempo real. Seguindo Cusinato, Minella e Júnior (2013), utilizamos as publicações do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), digitamos e organizamos um conjunto de dados de PIB em tempo real para o Brasil. Os dados são trimestrais e com ajuste sazonal, tendo início em 1994/III. O primeiro vintage do conjunto de dados é referente a 2001/III e o último a 2016/IV. Cabe ressaltar

⁶ Todos os vintages começam na mesma data, neste caso, 1994/II. Contudo, cada vintage tem um comprimento diferente, por exemplo, o primeiro vintage engloba o período 1994/III-2001/I, enquanto o último abrange 1994/III-2016/IV.

que todos os vintages têm início em 1994/III, porém, o tamanho de cada série varia. Por exemplo, o primeiro vintage abrange o período 1994/III a 2001/I, enquanto o último vintage disponível abrange 1994/III a 2016/IV. Quando os dados não têm início em 1994/III, a série é retropolada com a variação percentual da série, mantendo a mesma taxa de crescimento do vintage anterior. A partir desses dados, obtemos uma base de dados em tempo real para o PIB brasileiro composta por 64 séries de dados vintage trimestrais que mostra mais detalhadamente as revisões dos dados ao longo do tempo. As variáveis são tratadas como estacionárias.⁷

Seguindo Primiceri (2005), ordenamos o VAR com a taxa de juros por último, de forma que seja interpretada como política "não-sistemática" e que capture tanto erros de política, quanto movimentos da taxa de juros que são respostas a outras variáveis além da inflação e PIB (CHAN, 2016).

Os modelos são estimados com 2 lags. As simulações são baseadas em 50.000 iterações do amostrador de Gibbs, descartando as primeiras 5.000 iterações. Os primeiros 20 trimestres da amostra de dados são utilizados para calibrar a distribuição a priori.

2.2.3.1.2 *Resultados*

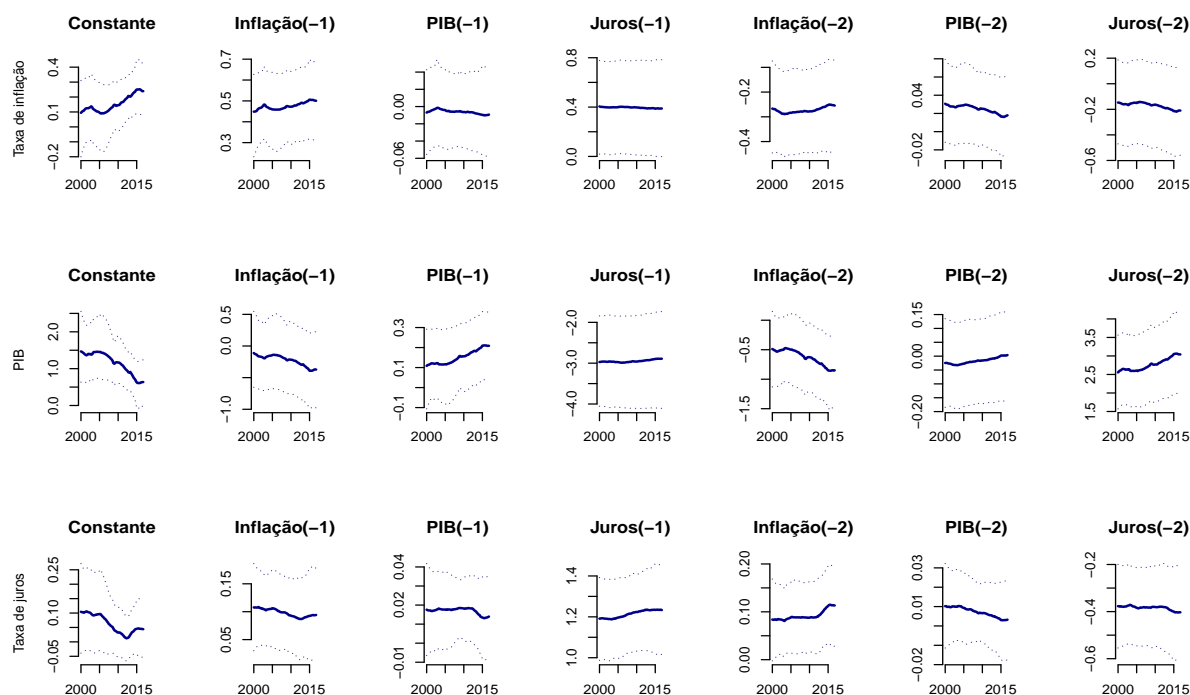
Nesta seção apresentamos os resultados do exercício empírico de estimação e de previsão para o caso brasileiro.

A figura 1 mostra a evolução dos parâmetros ao longo do tempo estimados com o modelo TVP-VAR. Isso nos permite visualizar a possibilidade dos coeficientes variarem no tempo. A linha sólida representa a média a posteriori dos coeficientes e as linhas pontilhadas são o intervalo de confiança de 68%. De acordo com a 1, alguns parâmetros exibem flutuações mais expressivas ao longo do tempo.

Uma explicação plausível pode ser atribuída a mudanças mais recentes na transmissão da política monetária comparativamente ao início do regime de Metas de Inflação, o que pode se manifestar em mudanças nos coeficientes do VAR.

⁷ Caso necessário, as variáveis são transformadas para estacionárias através da log diferenciação.

Figura 1 – Parâmetros estimados com o modelo TVP-VAR(SV)

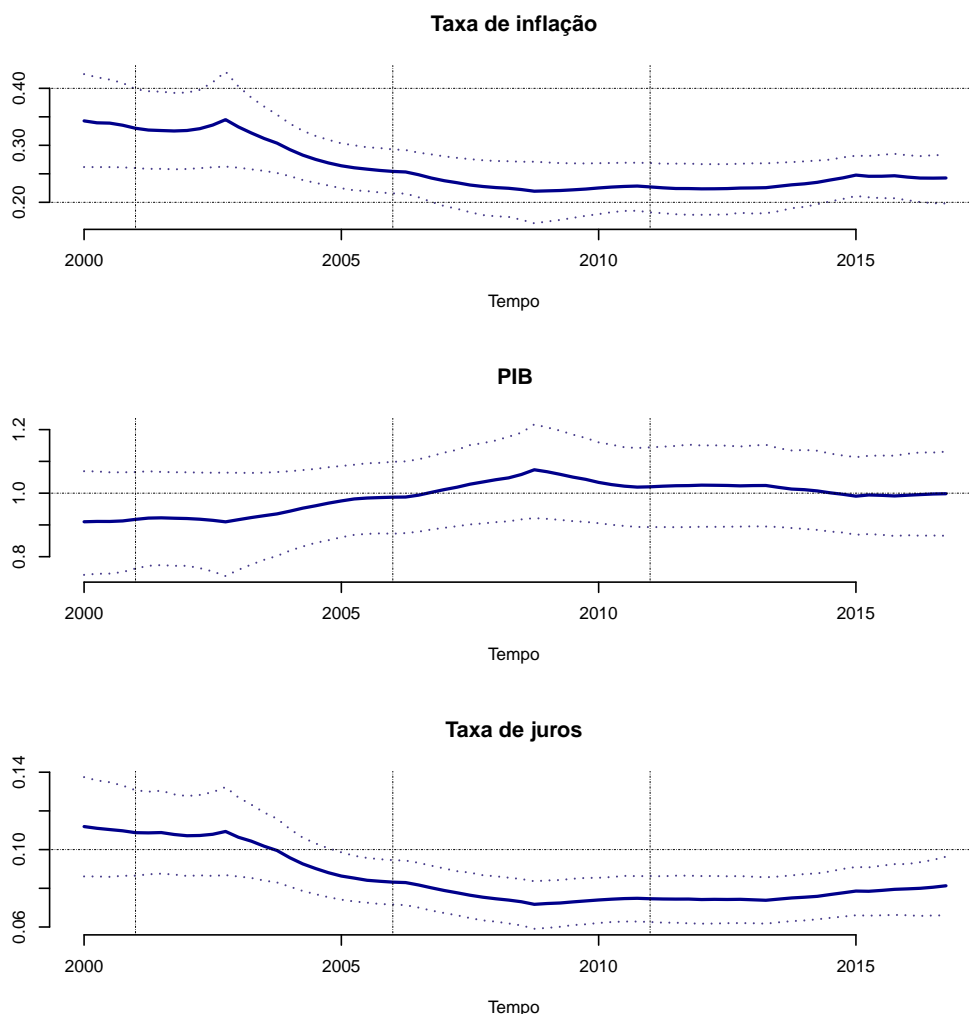


Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nota: Cada linha refere-se a uma equação. Cada coluna apresenta o coeficiente associado ao regressor indicado na figura. As linhas sólidas são a média a posteriori e as linhas pontilhadas representam o intervalo de confiança de 84%.

Evidências adicionais sobre a importância da modelagem da variação do tempo são encontradas na figura 2, que apresenta o desvio padrão dos resíduos. Podemos ver que volatilidade das inovações das variáveis centrais no regime de Metas de Inflação - taxa de inflação e taxa de juros - tornou-se mais estável ao longo da trajetória, sendo mais elevada no início dos anos 2000 e gradualmente declinando ao com o passar do tempo. Entre os anos 2000 e 2003, o patamar mais elevado da volatilidade está ligado ao processo de consolidação da estabilidade macroeconômica ainda em andamento, bem como, choques inesperados associados à crise energética e ao processo eleitoral de 2002, à crise argentina e o aumento do preço do petróleo. Tais fatores contribuíram para aumentar a percepção de risco dos agentes. Após esse período, a volatilidade da taxa de inflação e da taxa de juros começa a se reduzir consideravelmente, mantendo-se relativamente no mesmo patamar. Em 2015, a volatilidade mostra algum sinal de crescimento o que se mostra coerente com a atual crise econômica brasileira. Quanto ao PIB, nota-se que entre 2005 e 2010 há um aumento da volatilidade o que pode ser associado ao *boom* das commodities. O pico da volatilidade ocorre em meados de 2008, ligado à crise financeira internacional.

Figura 2 – Volatilidade estocástica estimada com o modelo TVP-VAR(SV)



Fonte: Elaborado pela autora (2018).

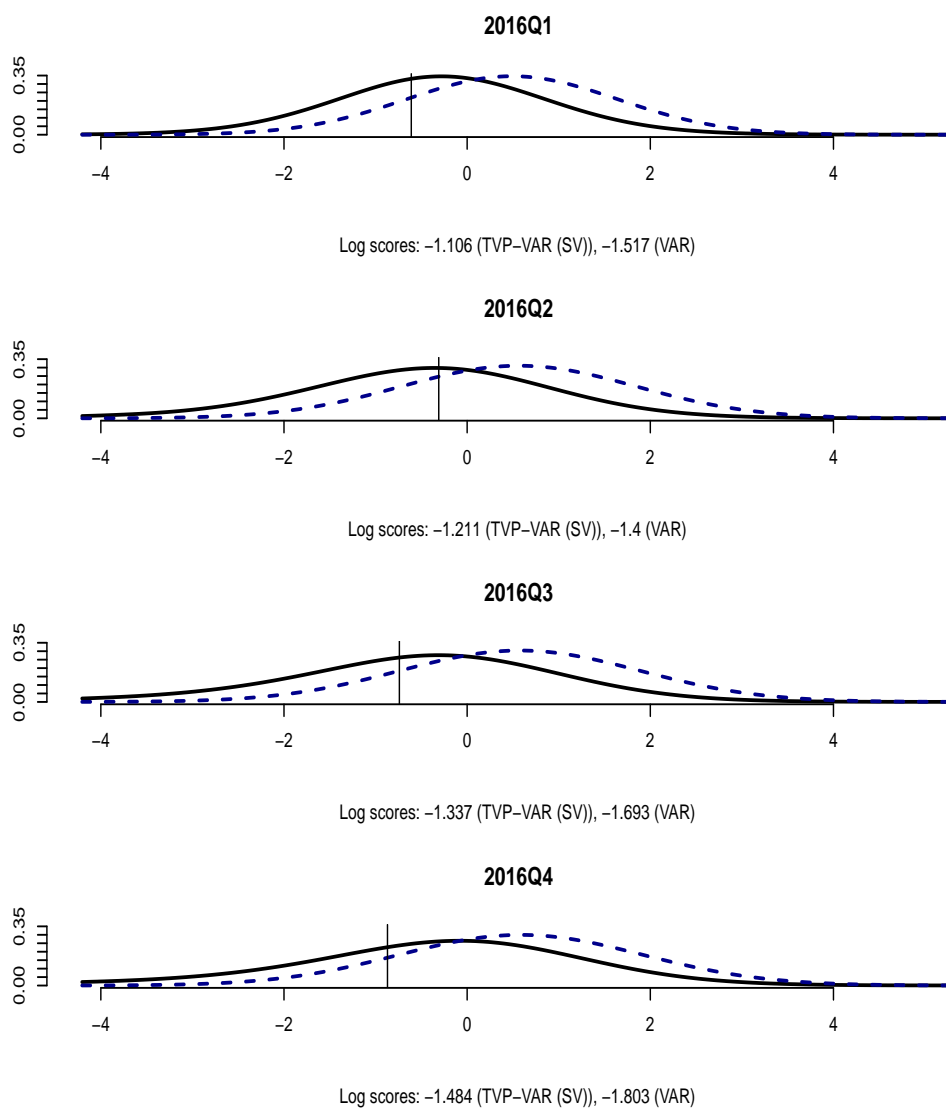
Nota: As linhas sólidas são a média a posteriori do desvio padrão dos resíduos da equação de cada uma das variáveis indicadas e as linhas pontilhadas representam o intervalo de confiança de 84%.

Concentrando ainda a análise sobre o último vintage disponível, realizamos a previsão fora da amostra para n períodos. Nesse caso, estimamos o modelo utilizando todos os dados com exceção dos n últimos trimestres. A estimação é realizada para o modelo TVP-VAR(SV) e, também, para o VAR simples (estimado via MQO) como comparação. As previsões são, então, computadas para $n = 4$ períodos fora da amostra.

A figura 3 mostra o *log score*, que é uma medida da performance da distribuição da previsão, para os dois modelos. Podemos perceber que a distribuição da previsão do modelo TVP-VAR(SV) é mais concentrada, isto é, tem menor variância comparativamente ao modelo VAR simples com parâmetros constantes. No modelo VAR simples a variância é uma média sobre a amostra completa, enquanto no TVP-VAR(SV) a variância pode não ser constante ao

longo do tempo.

Figura 3 – Log scores para os modelos TVP-VAR-SV e VAR simples.



Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nota: A linha sólida representa o modelo TVP-VAR (SV) e a linha tracejada o modelo VAR simples.

2.2.3.1.3 Resultados: aplicação para o exercício de previsão em tempo real

A implementação do exercício de previsão em tempo real segue como descrito na seção ???. As previsões são comparadas com os dados vintages realizados *ex-post*. As previsões são avaliadas através da previsão pontual com foco sobre o Erro Quadrático Médio de Previsão (MSFE) e através da densidade preditiva com base no *log-predictive scores*.

a) Precisão das previsões: previsão pontual

A tabela 1 apresenta os resultados da previsão em tempo real avaliadas com base no Erro Quadrático Médio de Previsão (MSFE) para as 3 variáveis em análise. Os resultados da tabela 1 referem-se ao MSFE relativo, isto é, a razão entre o MSFE do modelo analisado e o MSFE do modelo benchmark (*randon walk*). Quando esse resultado é menor do que um, a previsão do modelo em questão é, em média, mais precisa do que a previsão do benchmark (D'AGOSTINO; GAMBETTI; GIANNONE, 2013). A previsão é realizada para o intervalo entre 1 e 4 trimestres.

De forma geral, o modelo com parâmetros variando no tempo e volatilidade estocástica - Primiceri (2005) - apresenta resultados satisfatórios comparativamente aos modelos com inovações homocedásticas. Os dados brasileiros favorecem a inclusão da volatilidade estocástica que parece gerar mais ganhos do que a variação dos coeficientes do VAR. Em linha com os resultados de Chan (2016) para a Austrália, o VAR com coeficientes constantes e volatilidade estocástica apresenta performance semelhante ao modelo de Primiceri (2005). Especialmente para a taxa de inflação e a taxa de juros, a variação da variância dos choques exógenos mostra-se empiricamente importante, considerando a performance do modelo VAR-SV comparativamente aos demais. Por sua vez, para o PIB as mudanças na política monetária parecem exercer um efeito importante juntamente aos choques de volatilidade.

Tabela 1 – Precisão das previsões utilizando a previsão pontual: MSFE

h	Variável	RW	REC-AR	REC-VAR	TVP-VAR (SV)	TVP-VAR	VAR-SV
1	PIB	1,52	0,82	0,83	0,688	0,668	0,749
1	Inflação	0,11	1,01	1,15	1,052	1,071	1,070
1	Taxa de juros	0,01	0,99	1,49	0,506	0,552	0,567
2	PIB	2,19	0,67	0,64	0,525	0,528	0,569
2	Inflação	0,23	0,85	0,74	0,747	0,796	0,704
2	Taxa de juros	0,03	1,26	1,46	0,586	0,667	0,583
3	PIB	2,27	0,63	0,62	0,574	0,574	0,621
3	Inflação	0,21	0,85	0,73	0,886	0,799	0,753
3	Taxa de Juros	0,05	1,55	1,39	0,873	0,825	0,827
4	PIB	2,71	0,53	0,54	0,536	0,521	0,566
4	Inflação	0,17	0,97	0,82	1,027	0,855	0,857
4	Taxa de juros	0,07	1,84	1,38	1,078	1,128	1,078

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nota: A tabela apresenta os resultados relativos à precisão das previsões utilizando a previsão pontual. Para o modelo *randon walk*(RW) a tabela apresenta o MSFE (*mean square forecast error*). Para os outros modelos é apresentado o RMSFE (*relative mean square forecast error*), isto é, a razão entre o MSFE de um modelo em particular e o MSFE do benchmark (modelo RW).

b) Precisão das previsões: densidade preditiva

A tabela 2 apresenta o *log predictive* obtido utilizando as densidades de previsão em tempo real. Os resultados referem-se ao *score* relativo entre o modelo TVP-VAR(SV) e o *log score* do modelo indicado, de forma que um número positivo indica que o TVP-VAR(SV) é superior, isto é, que apresenta previsões de densidade mais precisas.

Os resultados encontram-se em linha com os obtidos através do MSFE, apontando uma performance geral satisfatória do modelo TVP-VAR(SV) comparativamente aos outros modelos.

Destaca-se os melhores resultados, especialmente, frente aos modelo RW, REC-AR e REC-VAR. No caso dos modelos TVP-VAR e VAR-SV, os ganhos aparecem menos perceptíveis. Para a previsão do PIB, os resultados apontam ganhos do modelo TVP-VAR(SV) comparativamente as especificações com coeficientes constantes. Contudo, para a previsão 1 trimestre a frente, o modelo VAR com coeficientes variando no tempo apresentou melhor performance. No caso da inflação e da taxa de juros, os resultados apontam que o VAR com coeficientes constantes e volatilidade estocástica apresenta performance satisfatória. Especialmente para a taxa de juros, o VAR-SV apresenta melhor desempenho em todos os horizontes de previsão comparativamente ao TVP-VAR(SV). Nesse caso, a importância de choques exógenos parece exercer um papel de destaque na trajetória da variável. Assim como na análise da previsão pontual, o modelo de Primiceri (2005) parece acrescentar ganhos substanciais na previsão do PIB quando comparado aos modelos constantes, mas quando é permitido variar os coeficientes (TVP-VAR) e a variância (VAR-SV) do modelo, os resultados mostram-se mais sutis.

Tabela 2 – Precisão das previsões utilizando a densidade preditiva: Log-Scores

Horizonte	Variável	RW	REC-AR	REC-VAR	TVP-VAR	VAR-SV
1	PIB	0,29	0,30	0,19	-0,01	0,04
1	Inflação	0,14	0,36	0,25	0,02	0,01
1	Taxa de juros	0,76	1,09	0,87	0,00	-0,03
2	PIB	0,29	0,24	0,18	0,01	0,04
2	Inflação	0,19	0,42	0,19	0,03	0,03
2	Taxa de juros	0,32	1,05	0,77	0,01	-0,04
3	PIB	0,27	0,22	0,15	0,01	0,05
3	Inflação	0,20	0,56	0,24	0,03	0,00
3	Taxa de Juros	0,09	1,00	0,63	0,02	-0,03
4	PIB	0,34	0,21	0,15	0,01	0,05
4	Inflação	0,14	0,65	0,27	0,04	-0,01
4	Taxa de juros	-0,02	0,98	0,52	0,02	-0,04

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nota: A tabela apresenta os resultados relativos à precisão das previsões utilizando a densidade preditiva. Para cada modelo são reportados a média da diferença entre o *log score* do TVP-VAR(SV) e o *log score* do referido modelo.

A figura 4 mostra a previsão 2 trimestres a frente da taxa de inflação, PIB e taxa de juros. A área sombreada mostra o intervalo de confiança de 84%, a linha sólida preta representa as séries verdadeiras e a linha sólida azul a média dos valores previstos pelo modelo TVP-VAR(SV). O modelo parece capturar de forma adequada os movimentos das séries e as flutuações. Especialmente para a taxa de juros, o modelo captura as flutuações de maneira bastante acurada. No caso do PIB, os resultados encontram-se dentro do intervalo na maioria dos períodos, exceto a expressiva retração causada pela crise financeira internacional em 2008 e 2009. O resultado para a taxa de inflação também mostra-se satisfatório no geral, capturando as subidas e descidas na série.

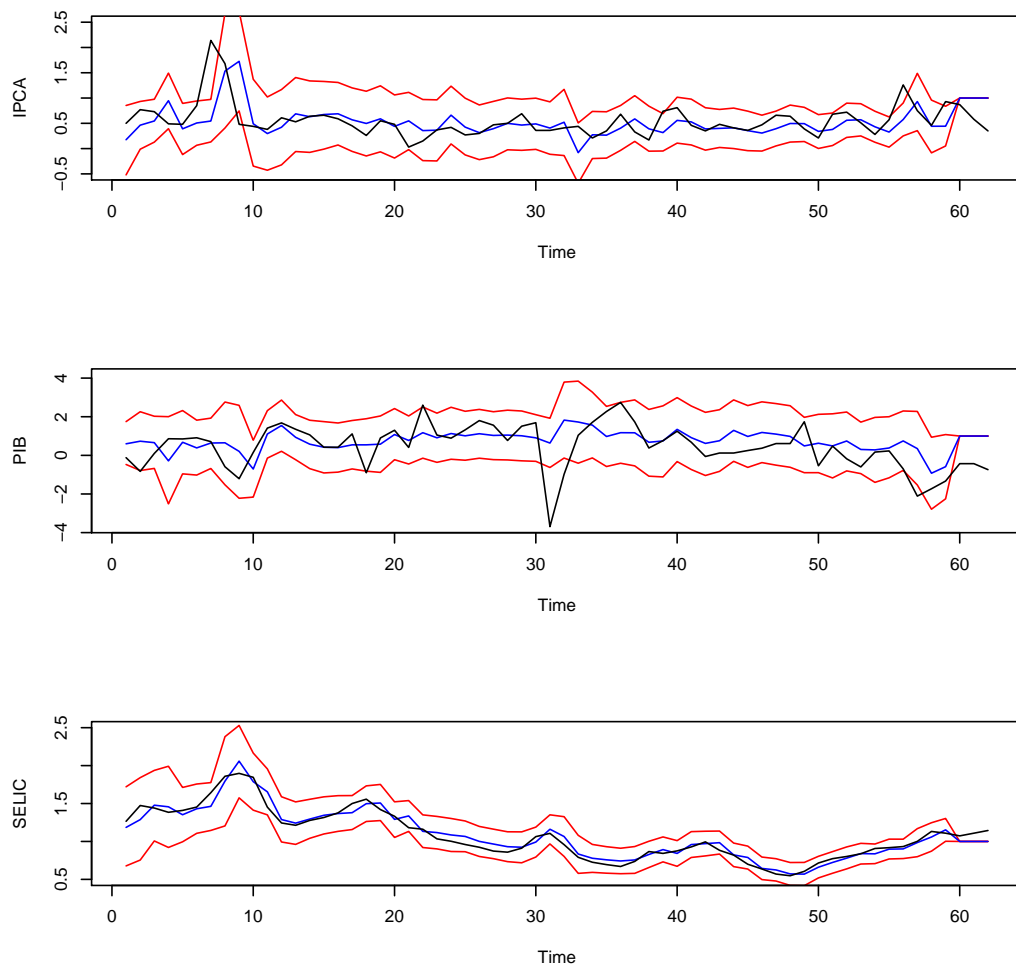


Figura 4 – *Previsão 2 trimestres a frente para a taxa de inflação, PIB e taxa de juros.*

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nota: As linhas vermelhas representam o intervalo de confiança de 84%, a linha sólida (preta) representa as séries verdadeiras e a linha sólida azul a média dos valores previstos pelo modelo TVP-VAR(SV).

2.2.3.2 Exercício de previsão II: previsão macroeconômica no Brasil utilizando o modelo VARMA com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica

Esta seção apresenta a aplicação empírica da abordagem descrita nas seções 2 e 3 para o caso brasileiro. O objetivo é realizar um exercício empírico de previsão recursiva para o VARMA e outros modelos alternativos envolvendo a taxa de inflação e a taxa de crescimento real do PIB no Brasil. A previsão é realizada para modelos VARMA e VAR e suas variações envolvendo volatilidade estocástica e parâmetros variando no tempo. A avaliação da performance das previsões é realizada através da verossimilhança preditiva.

Os dados consistem no índice mensal da taxa de inflação e do índice do PIB para o Brasil entre 1996/II e 2017/II. Para a série do PIB trimestral w_{1t} , transformamos a série para $y_{1t} = \log(w_{1t}/w_{1,t-1})$. Para obter a taxa trimestral de inflação fizemos o logaritmo da razão do índice de inflação no último mês do trimestre em relação ao último mês do trimestre anterior.

2.2.3.2.1 Especificações

O exercício de previsão é realizado para as especificações VARMA e VAR padrão, bem como, suas extensões com volatilidade estocástica e coeficientes variando no tempo. Particularmente para o VARMA são considerados 4 especificações: VARMA($p,1$), duas versões diferentes para a volatilidade e os coeficientes variando no tempo, mas mantendo constantes os coeficientes do VAR e, por fim, a versão com volatilidade estocástica e coeficientes variando no tempo.

O VARMA($p,1$) é especificado como em (30). Na versão com volatilidade variando no tempo, identificada como VARMA($p,1$)-SV1, os fatores latentes (\mathbf{f}) possuem o componente de volatilidade estocástica: $\mathbf{f}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega}_t)$, onde $\mathbf{\Omega}_t = \text{diag}(e^{h_{1,t}}, \dots, e^{h_{n,t}})$ e cada um dos seus elementos segue um passeio aleatório dado por (35). Na segunda versão, denotada por VARMA($p,1$)-SV2, também é permitido que as matrizes $\mathbf{\Phi}_0, \dots, \mathbf{\Phi}_q$ variem no tempo como em (33). Além disso, na versão denotada por TVP-VARMA($p,1$)-SV2, os coeficientes do VAR $\boldsymbol{\beta} = \text{vec}((\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p)')$ em (33) variam no tempo seguindo um passeio aleatório:

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{\beta}_{t-1} + \mathbf{u}_t, \quad \sim \mathbf{u}_t = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}_\beta),$$

onde $\boldsymbol{\Psi}_\beta = \text{diag}(\psi_{\beta,1}^2, \dots, \psi_{\beta,k}^2)$. Ainda são incluídas as versões *standard* VAR(p), VAR(p)-SV e TVP-VAR(p)-SV.

São assumidas as seguintes prioris independentes: $\boldsymbol{\beta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}_0, \mathbf{V}_\beta)$, $\boldsymbol{\phi}_i \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\phi}_{0i}, \mathbf{V}_{\phi_i})$, $\omega_i^2 \sim \mathcal{IG}(v_{\omega 0}, S_{\omega 0})$, $\lambda_i^2 \sim \mathcal{IG}(v_{\lambda 0}, S_{\lambda 0})$, $i = 1, \dots, n$.

A literatura sugere que prioris que fazem o encolhimento melhoram a performance de previsão dos modelos. Nesse sentido, seguimos Chan e Eisenstat (2017) para a definição das prioris. Então, definimos $\boldsymbol{\beta} = 0$ e a covariância \mathbf{V}_β como sendo diagonal, onde as variâncias dos interceptos são 100 e as variâncias associadas aos coeficientes do VAR são 1. Isso promove

um encolhimento nos coeficientes do VAR, mas não nos interceptos. Para a priori ϕ_j , definimos $\phi_{0i} = 0$ e \mathbf{V}_{ϕ_i} como a matriz identidade. Os graus de liberdade e os hiperparâmetros para ω_i^2 são relativamente pequenos, implicando em grandes variâncias a priori ($\nu_{\omega 0} = 3$ e $S_{\omega 0} = 2$). Por fim, para cada λ_i^2 são atribuídas prioris não informativas ($\nu_{\lambda 0} = 0$ e $S_{\lambda 0} = 0, 1$).

Para o VARMA-SV, definimos os hiperparâmetros para as prioris dos erros como $\psi_{\phi,i,j}^2 \sim \mathcal{G}(0, 5, 1/2S_{\phi,0})$ e $\psi_{h,i}^2 \sim \mathcal{G}(0, 5, 1/2S_{h,0})$, onde $S_{\phi,0} = 0,001$ e $S_{h,0} = 0,01$, implicando em $\mathbb{E}\psi_{\phi,i,j}^2 = 0,001$ e $\mathbb{E}\psi_{h,i}^2 = 0,01$. Para os modelos com coeficientes VAR variando no tempo, $\psi_{\beta,i}^2 \sim \mathcal{G}(0, 5, 1/2S_{\beta,0})$, sendo $S_{\beta,0} = 0,001$, implicando em $\mathbb{E}\psi_{\beta,i}^2 = 0,001$.

2.2.3.2.2 Resultados

Nesta seção apresentamos os resultados do exercício empírico de previsão do VARMA e dos modelos alternativos para o caso brasileiro. Métodos MCMC são utilizados para a obtenção da densidade preditiva conjunta $p(\mathbf{y}_{t+k}|\mathbf{y}_{1:t})$. As densidades de previsão são obtidas utilizando-se um esquema recursivo de previsão fora da amostra. A cada t -ésima iteração são utilizados os dados até o tempo $t - \mathbf{y}_{1:t}$ - para gerar a densidade preditiva conjunta $p(\mathbf{y}_{t+k}|\mathbf{y}_{1:t})$ para k passos a frente. Esse processo é repetido até o tempo $T - k$. Ao final das iterações, obtemos as densidades preditivas de 2012/II até o final da amostra.

Para os modelos VAR e VARMA, a densidade condicional e os parâmetros do modelo, $p(\mathbf{y}_{t+k}|\mathbf{y}_{1:t}, \boldsymbol{\theta})$, são Gaussianos com média e covariância conhecidos. A densidade preditiva é, então, obtida, com a média de $p(\mathbf{y}_{t+k}|\mathbf{y}_{1:t}, \boldsymbol{\theta})$ nas amostras MCMC de $\boldsymbol{\theta}$. Para os modelos VARMA com volatilidade estocástica, a cada iteração do MCMC são simuladas as log-volatilidades para $t + 1$ a $t + k$ a partir da equação de transição. Assim, \mathbf{y}_{t+k} tem densidade gaussiana e obtém-se a média das iterações do MCMC para obter a densidade preditiva conjunta $p(\mathbf{y}_{t+k}|\mathbf{y}_{1:t})$.

A avaliação da densidade preditiva conjunta, seguindo Chan e Eisenstat (2017), é realizada através da verossimilhança preditiva $p(\mathbf{y}_{t+k} = \mathbf{y}_{t+k}^\circ|\mathbf{y}_{1:t})$, ou seja, densidade preditiva conjunta de $p(\mathbf{y}_{t+k}$ avaliada nos valores observados \mathbf{y}_{t+k}° . Se \mathbf{y}_{t+k}° é improvável em relação à previsão da densidade, então o valor da verossimilhança preditiva será pequeno e vice-versa. A densidade preditiva conjunta é analisada utilizando a soma do logaritmo da verossimilhança preditiva:

$$\sum_{t=t_0}^{T-k} \log p(\mathbf{y}_{t+k} = \mathbf{y}_{t+k}^\circ|\mathbf{y}_{1:t}).$$

Para avaliar as séries individualmente, a performance de previsão da i -ésima série de \mathbf{y}_{t+k} é realizada através da densidade marginal $p(y_{i,t+k} = y_{i,t+k}^\circ|\mathbf{y}_{1:t})$.

Para cada amostra de estimação foram geradas 20.000 amostras a partir da distribuição a posterior dos parâmetros do VAR usando o algoritmo MCMC descrito na seção (3). São

descartadas as primeiras 5.000 amostras e utilizadas as restantes para calcular as densidades preditivas.

As tabelas 3, 4 e 5 apresentam a performance dos modelos alternativos para as densidades preditivas conjuntas e marginais para, respectivamente, 1, 2 e 3 passos a frente. Assim como em Chan e Eisenstat (2017), os valores são apresentados em relação ao *benchmark* que é dado pelo passeio aleatório.⁸ Valores positivos indicam que o modelo apresenta melhor performance de previsão comparativamente ao *benchmark* e vice-versa.

Os resultados da tabela 1 indicam que somente adicionar o componente de médias móveis não melhora a performance de previsão das variáveis. Contudo, adicionar volatilidade estocástica ao VARMA melhora consideravelmente o desempenho da previsão. Quando comparamos as duas especificações para o modelo VARMA-SV em relação ao VARMA, podemos perceber que a previsão apresenta um grande incremento de performance com a inclusão da volatilidade estocástica. Na mesma linha dos resultados de Chan e Eisenstat (2017), adicionar coeficientes VAR variando no tempo piora de forma sutil a performance de previsão do VARMA($p,1$)-SV2.

A performance insatisfatória do VARMA contrasta com os resultados obtidos por Chan e Eisenstat (2017) para a economia norte-americana. Os autores encontram evidências favoráveis à adição do componente de médias móveis ao VAR. Uma possível explicação a esse fato pode ser atribuída aos choques internos e externos recorrentes aos quais está submetida a economia brasileira. Apesar da estabilidade macroeconômica proporcionada pelo Plano Real, o Brasil ainda apresenta fragilidade quando ocorrem choques tanto internacionais, quanto aqueles advindos da economia e da política nacional, a exemplo da crise internacional de 2008 e da atual recessão econômica causada, principalmente, por fatores internos.

Analisando o logaritmo das verossimilhanças preditivas das séries individuais, encontramos evidências que sugerem que adicionar volatilidade estocástica melhora a previsão tanto da inflação quanto do PIB. Os ganhos mostram que incluir a volatilidade estocástica são semelhantes para ambas as variáveis.

⁸ O passeio aleatório é dado por: $\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$, onde $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Tabela 3 – Logaritmo da verossimilhança preditiva relativo ao *benchmark* da densidade preditiva 1 passo a frente

	Inflação	PIB	Densidade conjunta
VAR(1)	-0,2	-0,1	-0,3
VARMA(1,1)	-8,1	-8,7	-16,5
VAR(2)	-0,3	-0,3	-0,6
VAR(2)-SV	30,8	27,1	58,2
VARMA(2,1)	-8,2	-8,8	-16,8
VARMA(2,1)-SV1	13,2	12,8	25,9
VARMA(2,1)-SV2	13,2	12,7	25,8
TVP-VARMA(2,1)-SV2	12,7	12,3	24,9
VAR(3)	-0,5	-0,4	-0,9
VAR(3)-SV	31,1	27,1	58,5
VARMA(3,1)	-8,4	-8,9	-17,0
VARMA(3,1)-SV1	13	12,6	25,6
VARMA(3,1)-SV2	13	12,5	25,5
TVP-VARMA(3,1)-SV2	12,3	11,9	24,1

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nota: Os valores são apresentados em relação ao *benchmark* dado pelo modelo passeio aleatório.

Os resultados das tabelas 4 e 5 indicam que para os horizontes mais longos, 2 e 3 passos a frente, também indicam a importância da volatilidade estocástica. Tanto a especificação VAR(p)-SV e VARMA($p,1$)-SV apresentam performance substancialmente melhor comparativamente a suas contrapartes sem volatilidade estocástica.

De forma geral, a especificação VAR(p)-SV apresenta o melhor desempenho entre os modelos. Isso sugere que a volatilidade dos choques exógenos é empiricamente mais importante para o caso brasileiro do que mudanças no regime de política monetária o que vem sendo apontando na literatura recente (SIMS; ZHA, 2006; D'AGOSTINO; GAMBETTI; GIANNONE, 2013; CLARK; RAVAZZOLO, 2015; CHAN, 2016).

Tabela 4 – Logaritmo da verossimilhança preditiva relativo ao *benchmark* para a densidade preditiva 2 passos a frente

	Inflação	PIB	Densidade conjunta
VAR(1)	1,4	1,3	3,3
VARMA(1,1)	-7,2	-7,6	-14
VAR(2)	1,3	1,2	3,1
VAR(2)-SV	34,6	31,2	65,8
VARMA(2,1)	-7,3	-7,8	-14,2
VARMA(2,1)-SV1	15,8	15,4	31,5
VARMA(2,1)-SV2	15,8	15,3	31,4
TVP-VARMA(2,1)-SV2	14,1	13,8	28,5
VAR(3)	1,2	1,1	2,8
VAR(3)-SV	34,6	30,9	66
VARMA(3,1)	-7,3	-7,8	-14,3
VARMA(3,1)-SV1	15,6	15,1	31,1
VARMA(3,1)-SV2	15,6	15,1	31
TVP-VARMA(3,1)-SV2	13,6	13,3	27,4

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nota: Os valores são apresentados em relação ao *benchmark* dado pelo modelo passeio aleatório.

Tabela 5 – Logaritmo da verossimilhança preditiva relativo ao *benchmark* para a densidade preditiva 3 passos a frente

	Inflação	PIB	Densidade conjunta
VAR(1)	4,4	4,3	9,2
VARMA(1,1)	-4,2	-4,6	-8
VAR(2)	1,8	1,7	4,3
VAR(2)-SV	37,9	34,2	72,5
VARMA(2,1)	-7	-7,3	-13,3
VARMA(2,1)-SV1	16,9	16,5	33,8
VARMA(2,1)-SV2	16,9	16,4	33,7
TVP-VARMA(2,1)-SV2	13,5	13,3	28
VAR(3)	1,6	1,5	3,9
VAR(3)-SV	37,7	34	72,1
VARMA(3,1)	-7,2	-7,5	-13,7
VARMA(3,1)-SV1	16,7	16,2	33,4
VARMA(3,1)-SV2	16,7	16,2	33,3
TVP-VARMA(3,1)-SV2	12,7	12,6	26,5

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nota: Os valores são apresentados em relação ao *benchmark* dado pelo modelo passeio aleatório.

2.2.4 Considerações finais

Neste ensaio realizamos dois exercícios empíricos de previsão macroeconômica para o Brasil com diferentes focos. No primeiro, procuramos analisar se a inclusão da volatilidade estocástica melhora a performance de previsão em *real-time* de variáveis-chave para a economia brasileira no Regime de Metas de Inflação: Produto Interno Bruto (PIB), taxa de inflação e taxa de juros. Realizamos a previsão fora da amostra para essas variáveis utilizando o modelo VAR com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica, comparando a performance de previsão com outros modelos que restringem a variação dos coeficientes. Os resultados indicam que o modelo TVP-VAR(SV) apresenta uma performance geral satisfatória do comparativamente aos outros modelos. Destacam-se os melhores resultados, especialmente, frente aos modelos com coeficientes constantes, quais sejam, RW, REC-AR e REC-VAR. No caso dos modelos TVP-VAR e VAR-SV, os ganhos aparecem menos perceptíveis e os resultados indicam performances satisfatórias também para esses modelos. No caso da inflação e da taxa de juros, os resultados apontam que o VAR com coeficientes constantes e volatilidade estocástica apresenta resultados acurados. Especialmente para a taxa de juros, o VAR-SV apresenta melhor desempenho em todos os horizontes de previsão comparativamente ao TVP-VAR(SV). Nesse caso, a importância de choques exógenos parece exercer um papel de destaque na trajetória da variável. Além disso, a previsão em tempo real com o modelo TVP-VAR(SV) incorpora o caráter da variação no tempo da economia, como salienta D'Agostino, Gambetti e Giannone (2013). De forma geral, os resultados indicam que quando é permitido variar os coeficientes (TVP-VAR) e a variância (VAR-SV) do modelo, melhora a previsão do modelo, mas torna-se mais difícil encontrar diferenças expressivas em relação ao modelo TVP-VAR(SV), em linha com os resultados de Chan (2016).

No segundo exercício de previsão, a partir de evidências recentes para a economia norte-americana que sugerem que as previsões macroeconômicas do modelo VAR com o componente de médias móveis - VARMA - têm melhor performance em relação ao VAR (ATHANASOPOULOS; VAHID, 2008; ATHANASOPOULOS; POSKITT; VAHID, 2012; KASCHA; TRENKLER, 2015), procuramos verificar se para o caso do Brasil a especificação VARMA melhora a previsão especificamente da inflação e do PIB. Adicionalmente, foram testadas versões alternativas de VAR e VARMA incorporando volatilidade estocástica e coeficientes variando no tempo. Os resultados da aplicação empírica para o Brasil indicam que somente adicionar o componente de médias móveis não melhora a performance de previsão das variáveis. Contudo, adicionar volatilidade estocástica ao VARMA melhora consideravelmente o desempenho da previsão. A especificação VAR com volatilidade estocástica apresenta o melhor desempenho entre os modelos. De forma geral, os resultados indicam que a inclusão da volatilidade estocástica fornece ganhos expressivos na previsão para o caso brasileiro. Isso sugere que a volatilidade dos choques exógenos é empiricamente mais importante do que mudanças no regime de política monetária, o que vem sendo apontando na literatura recente (SIMS; ZHA, 2006; D'AGOSTINO; GAMBETTI; GIANNONE, 2013; CLARK; RAVAZZOLO, 2015; CHAN, 2016).

De forma geral, os resultados encontrados nos dois exercícios de previsão indicam a importância de incluir a possibilidade de choques exógenos ao modelo, sendo importante para a previsão, em linha com os trabalhos seminais de Cogley e Sargent (2001) e Primiceri (2005) que apontaram a inclusão da volatilidade estocástica aos modelos com parâmetros variando no tempo obtendo relevante sucesso empírico, tornando-se um benchmark no estudo macroeconômico. A popularidade dos modelos que incorporam a volatilidade estocástica tem crescido com as indicações de que apresentam melhor performance de previsão (D'AGOSTINO; GAMBETTI; GIANNONE, 2013; CLARK; RAVAZZOLO, 2015; CHAN, 2016). Em uma economia sujeita a choques internos e externos como a brasileira, incorporar a possibilidade da volatilidade variar no tempo na estimação e previsão macroeconômica adquire ainda maior apelo prático para os agentes econômicos e *policymakers*. Esses resultados indicam que pesquisas futuras podem avançar na análise da previsão entre modelos alternativos com diferentes especificações para a volatilidade variando no tempo. Os resultados indicam que pesquisas futuras podem avançar na análise da previsão entre modelos alternativos com diferentes especificações para a volatilidade. Além disso, a literatura recente tem trazido novos desenvolvimentos e técnicas de comparação entre modelos que podem ser aprofundadas para o caso brasileiro.

2.3 REFERÊNCIAS

- ALVES, S.; FASOLO, A. *Not Just Another Mixed Frequency Paper*. [S.l.], 2015.
- ARRUDA, E. F.; FERREIRA, R. T.; CASTELAR, I. Modelos lineares e não lineares da curva de phillips para previsão da taxa de inflação no brasil. *Revista Brasileira de Economia*, SciELO Brasil, v. 65, n. 3, p. 237–252, 2011.
- ATHANASOPOULOS, G.; POSKITT, D.; VAHID, F. Two canonical varma forms: Scalar component models vis-à-vis the echelon form. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, v. 31, n. 1, p. 60–83, 2012.
- ATHANASOPOULOS, G.; VAHID, F. Varma versus var for macroeconomic forecasting. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 26, n. 2, p. 237–252, 2008.
- BAI, J.; GHYSELS, E.; WRIGHT, J. H. State space models and midas regressions. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, v. 32, n. 7, p. 779–813, 2013.
- BAÑBURA, M.; GIANNONE, D.; REICHLIN, L. Large bayesian vector auto regressions. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 25, n. 1, p. 71–92, 2010.
- CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; SANTOS, A. A. Previsões macroeconômicas baseadas em modelos tvp-var: evidências para o brasil. *Revista Brasileira de Economia*, SciELO Brasil, v. 69, n. 4, p. 407–428, 2015.
- CARLO, T. C.; MARÇAL, E. F. Forecasting brazilian inflation by its aggregate and disaggregated data: a test of predictive power by forecast horizon. *Applied Economics*, Taylor & Francis, v. 48, n. 50, p. 4846–4860, 2016.

- CARRIERO, A.; CLARK, T. E.; MARCELLINO, M. Common drifting volatility in large bayesian vars. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 34, n. 3, p. 375–390, 2016.
- CARRIERO, A.; CLEMENTS, M. P.; GALVÃO, A. B. *Forecasting with Bayesian multivariate vintage-based VARs*. [S.l.], 2014.
- CARRIERO, A.; MUMTAZ, H.; THEOPHILOPOULOU, A. Macroeconomic information, structural change, and the prediction of fiscal aggregates. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 31, n. 2, p. 325–348, 2015.
- CARTER, C. K.; KOHN, R. On gibbs sampling for state space models. *Biometrika*, Biometrika Trust, v. 81, n. 3, p. 541–553, 1994.
- CÉSPEDES, B. J.; CHAUVET, M.; LIMA, E. C. Forecasting brazilian output and its turning points in the presence of breaks: a comparison of linear and nonlinear models. *Estudos Econômicos (São Paulo)*, SciELO Brasil, v. 36, n. 1, p. 5–46, 2006.
- CHAN, J. C. Specification tests for time-varying parameter models with stochastic volatility. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, p. 1–17, 2016.
- CHAN, J. C.; EISENSTAT, E. Efficient estimation of bayesian varmas with time-varying coefficients. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 32, n. 7, p. 1277–1297, 2017.
- CHAN, J. C.; JELIAZKOV, I. Efficient simulation and integrated likelihood estimation in state space models. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, Inderscience Publishers, v. 1, n. 1-2, p. 101–120, 2009.
- CHIU, C. W. J. et al. *Estimating VAR's sampled at mixed or irregular spaced frequencies: a Bayesian approach*. [S.l.], 2012.
- CLARK, T. E.; RAVAZZOLO, F. Macroeconomic forecasting performance under alternative specifications of time-varying volatility. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 30, n. 4, p. 551–575, 2015.
- CLEMENTS, M. P.; GALVÃO, A. B. Macroeconomic forecasting with mixed-frequency data: Forecasting output growth in the united states. *Journal of Business & Economic Statistics*, v. 26, n. 4, p. 546–554, 2008.
- CLEMENTS, M. P.; GALVÃO, A. B. Forecasting with vector autoregressive models of data vintages: Us output growth and inflation. *International Journal of Forecasting*, v. 29, n. 4, p. 698–714, 2013.
- CLEMENTS, M. P.; GALVÃO, A. B. Real-time forecasting of inflation and output growth with autoregressive models in the presence of data revisions. *Journal of Applied Econometrics*, v. 28, n. 3, p. 458–477, 2013.
- COGLEY, T.; SARGENT, T. J. Evolving post-world war ii us inflation dynamics. *NBER macroeconomics annual*, MIT Press, v. 16, p. 331–373, 2001.
- CROUSHORE, D. Forecasting with real-time macroeconomic data. *Handbook of economic forecasting*, Elsevier, v. 1, p. 961–982, 2006.

- CROUSHORE, D.; STARK, T. A real-time data set for macroeconomists. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 105, n. 1, p. 111–130, 2001.
- CROUSHORE, D. D.; STARK, T. A funny thing happened on the way to the data bank: a real-time data set for macroeconomists. *Business Review-Federal Reserve Bank of Philadelphia*, v. 5, p. 15, 2000.
- CUSINATO, R. T.; MINELLA, A.; JÚNIOR, S. da S. P. Output gap in brazil: a real-time data analysis. *Empirical economics*, Springer, v. 44, n. 3, p. 1113–1127, 2013.
- D'AGOSTINO, A.; GAMBETTI, L.; GIANNONE, D. Macroeconomic forecasting and structural change. *Journal of Applied Econometrics*, v. 28, n. 1, p. 82–101, 2013.
- DOAN, T.; LITTERMAN, R.; SIMS, C. Forecasting and conditional projection using realistic prior distributions. *Econometric reviews*, Taylor & Francis, v. 3, n. 1, p. 1–100, 1984.
- DUFOUR, J.-M.; STEVANOVIC, D. Factor-augmented varma models with macroeconomic applications. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 31, n. 4, p. 491–506, 2013.
- FERREIRA, D.; PALMA, A. A. Forecasting inflation with the phillips curve: A dynamic model averaging approach for brazil. *Revista Brasileira de Economia*, SciELO Brasil, v. 69, n. 4, p. 451–465, 2015.
- FERREIRA, R. T.; CASTELAR, L. I. de M. et al. Forecasting quarterly brazilian gdp growth rate with linear and nonlinear diffusion index models. *Revista EconomiA*, v. 6, n. 3, p. 261–292, 2005.
- FORONI, C.; MARCELLINO, M. A comparison of mixed frequency approaches for nowcasting euro area macroeconomic aggregates. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 30, n. 3, p. 554–568, 2014.
- FRANCIS, N.; GHYSELS, E.; OWYANG, M. T. *The Low-Frequency Impact of Daily Monetary Policy Shocks*. [S.l.], 2011.
- GEWEKE, J. Using simulation methods for bayesian econometric models: inference, development, and communication. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, v. 18, n. 1, p. 1–73, 1999.
- GHYSELS, E. *Macroeconomics and the Reality of Mixed Frequency Data*. [S.l.], 2012.
- GHYSELS, E.; SANTA-CLARA, P.; VALKANOV, R. *The MIDAS Touch: Mixed Data Sampling Regression Models*. [S.l.], 2004.
- GIANNONE, D.; LENZA, M.; PRIMICERI, G. E. Prior selection for vector autoregressions. *Review of Economics and Statistics*, MIT Press, v. 97, n. 2, p. 436–451, 2015.
- GRIGOLI, F. et al. *Output Gap Uncertainty and Real-Time Monetary Policy*. [S.l.], 2015.
- JUNIOR, M. V. W.; PEREIRA, P. L. V. Modeling and forecasting of realized volatility: Evidence from brazil. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 31, n. 2, p. 315–337, 2011.
- KASCHA, C. A comparison of estimation methods for vector autoregressive moving-average models. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, v. 31, n. 3, p. 297–324, 2012.

- KASCHA, C.; TRENKLER, C. Simple identification and specification of cointegrated varma models. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 30, n. 4, p. 675–702, 2015.
- KIM, S.; SHEPHARD, N.; CHIB, S. Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with arch models. *The review of economic studies*, Wiley-Blackwell, v. 65, n. 3, p. 361–393, 1998.
- KISHOR, N. K.; KOENIG, E. F. Var estimation and forecasting when data are subject to revision. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 30, n. 2, p. 181–190, 2012.
- KOOP, G.; KOROBILIS, D. Large time-varying parameter vars. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 177, n. 2, p. 185–198, 2013.
- KOOP, G. M. Forecasting with medium and large bayesian vars. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 28, n. 2, p. 177–203, 2013.
- KUZIN, V.; MARCELLINO, M.; SCHUMACHER, C. Midas vs. mixed-frequency var: Nowcasting gdp in the euro area. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 27, n. 2, p. 529–542, 2011.
- LITTERMAN, R. B. *Techniques for forecasting with Vector Autoregressions*. Tese (PhD Thesis) — University of Minnesota, Minnesota, 1980.
- LITTERMAN, R. B. Forecasting with bayesian vector autoregressions. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis Group, v. 4, n. 1, p. 25–38, 1986.
- LÜTKEPOHL, H.; POSKITT, D. S. Specification of echelon-form varma models. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 14, n. 1, p. 69–79, 1996.
- METAXOGLU, K.; SMITH, A. Maximum likelihood estimation of varma models using a state-space em algorithm. *Journal of Time Series Analysis*, Wiley Online Library, v. 28, n. 5, p. 666–685, 2007.
- MIKOSCH, H.; NEUWIRTH, S. *Real-time forecasting with a MIDAS VAR*. [S.l.], 2015.
- NEGRO, M. D.; PRIMICERI, G. E. Time varying structural vector autoregressions and monetary policy: A corrigendum. *The Review of Economic Studies*, Oxford University Press, v. 82, n. 4, p. 1342–1345, 2015.
- NEGRO, M. D.; SCHORFHEIDE, F. Bayesian macroeconometrics. *The Oxford handbook of Bayesian econometrics*, Oxford University Press New York, v. 293, p. 389, 2011.
- ORPHANIDES, A. Monetary policy rules based on real-time data. *American Economic Review*, v. 91, n. 4, p. 964–985, 2001.
- POSKITT, D. Vector autoregressive moving average identification for macroeconomic modeling: A new methodology. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 192, n. 2, p. 468–484, 2016.
- PRIMICERI, G. E. Time varying structural vector autoregressions and monetary policy. *The Review of Economic Studies*, v. 72, n. 3, p. 821–852, 2005.
- SANTOS, D. G. dos; ZIEGELMANN, F. A. Multi-period volatility predictions: A comparative study using midas regressions. In: *34^o Meeting of the Brazilian Econometric Society*. [S.l.: s.n.], 2012.

SCHORFHEIDE, F.; SONG, D. Real-time forecasting with a mixed-frequency var. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 33, n. 3, p. 366–380, 2015.

SIMS, C. A. Macroeconomics and reality. *Econometrica*, v. 48, n. 1, p. 1–48, 1980.

SIMS, C. A.; ZHA, T. Bayesian methods for dynamic multivariate models. *International Economic Review*, JSTOR, v. 39, n. 4, p. 949–68, 1998.

SIMS, C. A.; ZHA, T. Were there regime switches in us monetary policy? *The American Economic Review*, American Economic Association, v. 96, n. 1, p. 54–81, 2006.

STARK, T.; CROUSHORE, D. Forecasting with a real-time data set for macroeconomists. *Journal of Macroeconomics*, Elsevier, v. 24, n. 4, p. 507–531, 2002.

ZUANAZZI, P. T.; ZIEGELMANN, F. A. Previsões para o crescimento do pib trimestral brasileiro com séries financeiras e econômicas mensais: uma aplicação de midas. *Economia Aplicada*, v. 18, n. 2, p. 295–318, 2014.

2.4 APÊNDICE A - DETALHES DA IMPLEMENTAÇÃO DO AMOSTRADOR DE GIBBS

Seguindo Chan e Eisenstat (2017), apresentamos de forma mais detalhada o passo 1 do algoritmo acima, dado que os passos 2 a 4 são padrão na literatura. A amostragem de $\boldsymbol{\beta}$ e \mathbf{f} é realizada conjuntamente, primeiro amostrando $\boldsymbol{\beta}$ em função de \mathbf{f} , seguido de \mathbf{f} em função de $\boldsymbol{\beta}$.

A densidade conjunta marginal de \mathbf{y} em relação a \mathbf{f} é dada por:

$$(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\Lambda}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{S}_y),$$

onde $\mathbf{S}_y = \mathbf{I}_T \otimes \boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{O}_h\boldsymbol{\Phi}'$. Usando resultados de regressão linear padrão temos:

$$(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\Lambda}) \sim \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{D}_\beta),$$

onde

$$\mathbf{D}_\beta = (\mathbf{V}_\beta^{-1} + \mathbf{X}'\mathbf{S}_y^{-1}\mathbf{X})^{-1}, \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{D}_\beta(\mathbf{V}_\beta^{-1}\boldsymbol{\beta}_0 + \mathbf{X}'\mathbf{S}_y^{-1}\mathbf{y})$$

$\boldsymbol{\Lambda}$ e \mathbf{O}_h são matrizes diagonais, $\boldsymbol{\Phi}$ é uma matriz triangular inferior e a matriz de covariância \mathbf{S}_y é uma matriz banda. Por sua vez, $\mathbf{X}'\mathbf{S}_y^{-1}\mathbf{y}$ é obtido resolvendo o sistema $\mathbf{S}_y\mathbf{z} = \mathbf{y}$ para \mathbf{z} . A solução é $\mathbf{z} = \mathbf{S}_y^{-1}\mathbf{y}$ e, então obtemos $\mathbf{X}'\mathbf{z} = \mathbf{X}'\mathbf{S}_y^{-1}\mathbf{y}$. A solução para $\mathbf{X}'\mathbf{S}_y^{-1}\mathbf{X}$ é obtida da mesma forma.

Os fatores latentes \mathbf{f} são amostrados conjuntamente. A amostragem de \mathbf{f} é realizada através do amostrador baseado na precisão desenvolvido em Chan e Jeliazkov (2009). Isso evita o uso de filtro de Kalman e a alta dimensão associada a cada vetor de estados. Para isso, sendo $\mathbf{f} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{O}_h)$ e usando (36) e os resultados da regressão linear padrão temos que:

$$(\mathbf{f}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\Lambda}) \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{K}_f^{-1}),$$

onde

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{O}_h^{-1} + \boldsymbol{\Phi}'(\mathbf{I}_T \otimes \boldsymbol{\Lambda}^{-1})\boldsymbol{\Phi}, \quad \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{K}_f^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\mathbf{I}_T \otimes \boldsymbol{\Lambda}^{-1})(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Primeiro obtemos $\hat{\mathbf{f}}$ resolvendo

$$\mathbf{K}_f\mathbf{z} = \boldsymbol{\Phi}'(\mathbf{I}_T \otimes \boldsymbol{\Lambda}^{-1})(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

em relação a \mathbf{z} . Então, depois obtemos a decomposição de Cholesky de \mathbf{K}_f tal que $\mathbf{C}_f\mathbf{C}_f' = \mathbf{K}_f$ e resolvemos $\mathbf{C}_f'\mathbf{z} = \mathbf{u}$ para \mathbf{z} , onde $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_{Tn})$. Por fim, $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}} + \mathbf{z}$, a qual segue a distribuição desejada.

3 PREVISÃO MACROECONÔMICA PARA O BRASIL UTILIZANDO O MODELO VAR COM DADOS MISTOS

Resumo: Este trabalho tem como foco a previsão de curto prazo de variáveis macroeconômicas do Brasil aplicando o modelo *mixed-frequency VAR* (MF-VAR) que utiliza dados observados em frequências mistas - mensais e trimestrais. Procuramos estudar se a inclusão de dados mensais aumentam a precisão da previsão do VAR comparativamente ao modelo QF-VAR (*quarterly-frequency VAR*) estimado em duas versões distintas. Os resultados apontam que a utilização das observações mensais dentro do trimestre aumentam os ganhos das previsões de curto prazo, tanto das séries trimestrais como das séries mensais, especialmente para um e dois trimestres a frente.

Palavras-chaves: Previsão macroeconômica. Vetor autoregressivo. Dados em frequência mista. Métodos bayesianos
Classificação JEL: E37, C32, C53, C11.

Abstract: The aim of this paper is an empirical forecasting exercise to Brazil using mixed-frequency VAR (MF-VAR) to macroeconomic data. We evaluate forecasts from the mixed-frequency VAR and compare them to quarterly-frequency VAR (QF-VAR) with two different versions. We find that the switch from a QF-VAR to a MF-VAR improves the forecasting performance for one and two quarters ahead. Overall, the improvements are most pronounced for short-horizon forecasts.

Keywords: Macroeconomic forecasting. Vector autoregression. Mixed-frequency. Bayesian methods.
JEL Classification: E37, C32, C53, C11.

3.1 INTRODUÇÃO

Um fato inerente ao estudo de séries temporais econômicas é a diferença na frequência de amostragem dos dados. Variáveis macroeconômicas importantes, como o PIB, somente são encontradas em frequência trimestral, enquanto outras variáveis como inflação e taxa de juros são divulgadas mensalmente ou até mesmo em frequência mais elevada. Em aplicações empíricas, os modelos econométricos são geralmente estimados exclusivamente com base em observações mensais ou trimestrais. Nesse caso, considerando que todas as variáveis no modelo precisam estar amostradas na mesma periodicidade, dados mensais, frequentemente, devem ser convertidos em dados trimestrais Clements e Galvão (2008). Contudo, esse processo de agregação temporal descarta uma quantidade relevante de informações e pode gerar subespecificação do modelo. A ideia de agregar séries temporais em diferentes frequências foi originalmente proposta por Ghysels, Santa-Clara e Valkanov (2004) com os modelos de regressão MIDAS (*Mixed Data Sampling*). Inicialmente voltada para séries financeiras, a abordagem MIDAS passou, também, a utilizar variáveis macroeconômicas para a previsão. Novos desdobramentos da literatura voltaram-se então para modelos MF-VAR (*mixed-frequency VAR*), isto é, com dados mistos (ver, por exemplo, (KUZIN; MARCELLINO; SCHUMACHER, 2011; GHYSELS, 2012; FORONI; MARCELLINO, 2014; SCHORFHEIDE; SONG, 2015; MIKOSCH; NEUWIRTH, 2015)).

Nesse contexto, este trabalho tem como foco a previsão empírica de curto prazo de séries macroeconômicas para o Brasil com o uso de dados em frequência mista, isto é, séries mensais e trimestrais utilizando o modelo MF-VAR descrito em Schorfheide e Song (2015). Procuramos estudar se a inclusão de dados mensais divulgados intratrimestre aumentam a precisão da previsão do VAR. A escolha das variáveis macroeconômicas segue a importância na construção empírica de previsões, sendo variáveis trimestrais como o Produto Interno Bruto (PIB) e mensais como taxa de desemprego, taxa de inflação, produção industrial e taxa de juros selecionadas para a aplicação ao caso brasileiro. A literatura aponta que o uso de dados em frequências mistas pode diminuir o viés da agregação temporal e incorporar novas informações à estimação do modelo. Com o intuito de comparação, o modelo VAR na qual todas as séries são agregadas em frequência trimestral - QF-VAR (*quarterly frequency-VAR*) - será implementado também com foco sobre previsão e estimado em duas versões diferentes.

No caso do Brasil, a revisão bibliográfica realizada neste trabalho indica que apenas Alves e Fasolo (2015) utilizam uma abordagem MF-VAR. Os autores desenvolvem um novo algoritmo e o aplicam para dados simulados e empíricos brasileiros. Os resultados indicam que o MF-VAR desenvolvido pelos autores e o VAR bayesiano apresentam performance satisfatória em termos de *nowcasting*, mas não são melhores comparativamente a um sistema univariado com variáveis trimestrais para os outros horizontes de previsão. Por sua vez, a especificação MIDAS foi utilizada por Zuanazzi e Ziegelmann (2014) para previsão macroeconômica e por Junior e Pereira (2011) e Santos e Ziegelmann (2012) para a previsão de volatilidade realizada.

Os modelos VAR com dados mistos (MF-VAR) tem o intuito de capturar a dinâmica conjunta entre séries, ao mesmo tempo em que evitam a agregação temporal entre as variáveis. De forma geral, podemos separar os modelos MF-VAR em duas categorias. A primeira utiliza uma abordagem de espaço de estado assumindo cada série de menor frequência como uma série de alta frequência parcialmente latente. A estimação é dada através de filtro de Kalman (KUZIN; MARCELLINO; SCHUMACHER, 2011; BAI; GHYSELS; WRIGHT, 2013; FORONI; MARCELLINO, 2014) ou métodos bayesianos (CHIU et al., 2012; SCHORFHEIDE; SONG, 2015). A segunda categoria utiliza uma abordagem "stacking", onde as variáveis com a mesma frequência são empilhadas em um vetor (FRANCIS; GHYSELS; OWYANG, 2011; GHYSELS, 2012; FORONI; MARCELLINO, 2014; MIKOSCH; NEUWIRTH, 2015). Assim, considera-se que os modelos espaço de estado são *parameter-driven*, enquanto os modelos da segunda abordagem VAR são *observation-driven*.

Modelos espaço de estado envolvem variáveis latentes e, por isso, a necessidade de filtros para lidar com os estados não observáveis, sendo considerados modelos *parameter-driven*. Nessa classe de modelos, o trabalho de Kuzin, Marcellino e Schumacher (2011) tem como foco *nowcasting* e previsões dos modelos MIDAS e MF-VAR para o PIB da Zona do Euro. O MF-VAR é estimado com filtro de Kalman permitindo a maximização da verossimilhança associada ao modelo espaço de estado subjacente. Os autores não encontram resultados indicando um dos

modelos como superior em termos preditivos. A performance depende do horizonte de previsão e das variáveis incluídas. (BAI; GHYSELS; WRIGHT, 2013) examinam a relação entre o modelo MIDAS e a abordagem de espaço de estado, comparando-os em termos de previsão. Foroni e Marcellino (2014) comparam a performance de previsão (*nowcasting*) dos *bridge models*, MF-VAR e MIDAS para o PIB trimestral da Zona do Euro utilizando um conjunto amplo de indicadores mensais. O resultado encontrado pelos autores sugere uma melhor performance do modelo MIDAS, especialmente no curto prazo.

Uma primeira abordagem da estimação bayesiana do MF-VAR pode ser encontrada em (CHIU et al., 2012).¹ Os autores desenvolvem uma alternativa baseada no amostrador de Gibbs para o VAR com dados mistos e em frequência irregular. O foco é a estimação dos parâmetros e funções impulso-resposta. A aplicação empírica confirma o resultado das simulações que indicam ganhos de precisão nas estimativas dos parâmetros comparativamente aos modelos que realizam agregação temporal entre as séries. Na mesma linha de estimação bayesiana do MF-VAR, Schorfheide e Song (2015) tem como objetivo analisar os possíveis ganhos de performance de previsão em *real-time* com a incorporação de dados mensais no VAR. A inferência bayesiana é conduzida através do amostrador de Gibbs conjuntamente a especificação de uma *priori* Minnesota para lidar com a dimensionalidade do VAR. Os autores selecionam um conjunto de 11 variáveis em *real-time* da economia dos Estados Unidos, entre as quais 3 variáveis trimestrais e 8 variáveis mensais. Os resultados indicam que a incorporação de variáveis mensais fornece ganhos de performance expressivos no curto prazo.

Na classe dos modelos *stacking approach* encontram-se aqueles considerados *observation-driven*, isto é, formulados exclusivamente em termos dos dados observáveis e que não envolvem processos latentes. Ghysels (2012) generaliza o modelo MIDAS para o contexto multivariado do VAR. O autor tem como foco as funções impulso resposta baseadas nos dados observáveis (frequências mistas) ao invés de choques gerados por algum processo latente.

Nesse cenário, o principal objetivo deste artigo é comparar as previsões de curto prazo do MF-VAR com o QF-VAR e analisar sua performance de previsão usando um conjunto de variáveis macroeconômicas para o Brasil. A aplicação empírica do MF-VAR segue a especificação de Schorfheide e Song (2015) e os resultados apontam que a utilização das observações mensais dentro do trimestre aumentam a precisão das previsões de curto prazo. Os resultados para PIB, taxa de desemprego, inflação e taxa de juros indicam que o uso de informações mensais leva a uma diminuição considerável da raiz do erro quadrático médio de previsão (RMSE) no curto prazo. No caso das previsões do PIB, a previsão $h = 1$ tem uma redução de 6,87% do RMSE comparativamente ao mesmo horizonte de previsão do QF-VAR. Para as séries mensais da taxa de desemprego, taxa de inflação e taxa de juros, a redução do RMSE gerada pelo MF-VAR para

¹ A abordagem bayesiana para estimar VAR foi originalmente proposta por Litterman (1980) como solução para o problema de sobreparametrização. Nesse caso, a solução evita que sejam impostas restrições sobre os parâmetros, tal como coeficientes iguais a zero, permitindo sua variação. Assim, a distribuição *a priori* é atualizada por novas informações através da função de verossimilhança, formando a distribuição *a posteriori*.

essas séries mensais é mais pronunciada do que para o PIB, a qual é observada em frequência trimestral, em linha com (SCHORFHEIDE; SONG, 2015). Para o horizonte $h = 1$, o MF-VAR é capaz de aumentar a precisão das previsões em 32,49% para a taxa de desemprego e 6,80% para a taxa de juros e 1,05% para a taxa de inflação. O uso de informações mensais no modelo de previsão das séries trimestrais mostra-se relevante também para a previsão da série da produção industrial e no caso da previsão $h = 1$, o RMSE do MF-VAR é 13,32% menor em relação ao QF-VAR.

Em resumo, para o grupo das variáveis trimestrais PIB e investimento, os ganhos a partir da inclusão de variáveis mensais é menor comparativamente ao grupo de variáveis mensais não financeiras (taxa de desemprego, taxa de inflação, produção industrial e salário mensal), consistente com os resultados de Schorfheide e Song (2015). Conforme o horizonte de previsão h aumenta, os benefícios de utilizar informações mensais para a previsão, na maioria dos casos, vai diminuindo, mas mantém-se positivo para várias séries. Consistente com a literatura, se o objetivo é gerar previsões para um ou dois trimestres a frente, o modelo MF-VAR torna-se bastante atraente em relação ao QF-VAR. Se o horizonte de previsão for de médio e longo prazo, os resultados indicam que não há incrementos adicionais e o modelo QF-VAR é suficiente para a previsão.

No Brasil, este trabalho é complementar aos estudos de Zuanazzi e Ziegelmann (2014) e Alves e Fasolo (2015) os quais utilizam dados em diferentes frequências em conjunto, respectivamente, às abordagens MIDAS e MF-VAR, com foco sobre previsão macroeconômica. Apesar das diferenças de dados e metodologia, os resultados são similares aos encontrados neste trabalho e sugerem ganhos na previsão utilizando dados em frequências distintas.

O artigo está organizado como segue: na seção 3.2 é apresentada a metodologia, na seção 3.3 são descritos os dados utilizados bem como a descrição do exercício de previsão, na seção 3.3.3 são apresentados os resultados da aplicação empírica e do exercício de previsão e, por fim, a última seção apresenta as considerações finais.

3.2 MODELO DE VETORES AUTOREGRESSIVOS COM DADOS MISTOS (MF-VAR)

O objetivo desta seção é apresentar o modelo Vetores Autoregressivos com dados mistos (MF-VAR), o qual permite capturar os comovimentos entre séries de frequências mistas. Seguimos o algoritmo de Schorfheide e Song (2015) que utiliza a representação em espaço de estado e métodos bayesianos na estimação do modelo MF-VAR.

Considerando que o MF-VAR aplicado neste trabalho é baseado em um VAR com frequência mensal, as séries trimestrais possuem observações *missing* em dois meses em cada trimestre. Nesse caso, os correspondentes valores mensais são tratados como não observáveis e o modelo é reescrito em espaço de estado.

Em termos gerais, a equação de transição é dada por um VAR em frequência mensal e as

equações de medida relacionam as séries observadas às variáveis mensais no vetor de estados.

O modelo assume que a economia evolui em frequência mensal de acordo com o seguinte VAR(p):

$$x_t = \Phi_1 x_{t-1} + \dots + \Phi_p x_{t-p} + \Phi_c + u_t, \quad u \sim iidN(0, \Sigma), \quad (37)$$

o vetor $n \times 1$ de variáveis macroeconômicas x_t pode ser decomposto em $x_t = [x'_{m,t}, x'_{q,t}]$, sendo $x_{m,t}$ as variáveis em frequência mensal e $x_{q,t}$ as variáveis mensais não observáveis publicadas em frequência trimestral. Além disso, $z_t = [x'_t, \dots, x'_{t-p+1}]'$ e $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_p, \Phi_c]'$.

Reescrevendo o VAR(p) na forma VAR(1), a equação de transição é descrita por:

$$z_t = F_1(\Phi)z_{t-1} + F_c(\Phi) + v_t, \quad v_{t_m} \sim iidN(0, \Omega(\Sigma)). \quad (38)$$

Denotando $y_{m,t} = x_{m,t}$, na equação de medida quando a variável trimestral está disponível, então, esse dado observado é uma média do dado mensal não observável:

$$\tilde{y}_{q,t} = \frac{1}{3}(x_{q,t} + x_{q,t-1} + x_{q,t-2}) = \Lambda_{qz} z_t. \quad (39)$$

Considerando que $y_{q,t}$ é observada somente a cada 3 meses é necessário definir $M_{q,t}$ como a matriz identidade se t corresponde ao último mês do trimestre e zero caso contrário. Essa média de 3 meses da série mensal só é observada a cada terceiro mês. Quando observações de $y_{q,t}$ não estão disponíveis, a linha correspondente de $M_{q,t}$ é zero. Então, definimos:

$$y_{q,t} = M_{q,t} \tilde{y}_{q,t} \quad t = 1, \dots, T_b. \quad (40)$$

Seja $y_{m,t}$ o subconjunto de variáveis mensais para as quais no período t as observações são divulgadas após T e $M_{m,t}$ a matriz de seleção:

$$y_{m,t} = M_{m,t} x_{m,t} \quad t = T_b + 1, \dots, T. \quad (41)$$

Portanto, a equação de medida pode ser escrita como:

$$y_t = M_t \Lambda_z z_t \quad t = 1, \dots, T. \quad (42)$$

Então, M_t é uma sequência de matrizes que selecionam o tempo t quando as variáveis são observadas. Isso influencia a equação de medida que vai mudando ao longo do tempo dependendo se as variáveis trimestrais estão disponíveis ou não. Nota-se que a defasagem do modelo deve ser maior ou igual a 3. Esse é o mínimo *lag* permitido pela estrutura da equação de medida.

3.2.1 Estimação Bayesiana

A estimação bayesiana do MF-VAR tem início com a definição da distribuição conjunta das variáveis observáveis $Y_{1:T}$, estados latentes $Z_{0:T}$ e parâmetros (Φ, Σ) condicionado a uma pré-amostra $Y_{-p+1:0}$ para inicializar os lags. Neste caso, o amostrador de Gibbs é utilizado para a obtenção dos vetores de estado desconhecidos e implementado através do algoritmo de Carter e Kohn (1994). O amostrador de Gibbs permite gerar amostras a partir da distribuição a posteriori de $(\Phi, \Sigma) | (Z_{0:T}, Y_{-p+1:T})$ e $Z_{0:T} | (\Phi, \Sigma, Y_{-p+1:T})$. A partir dessas amostras é possível simular trajetórias futuras de y_t para caracterizar a distribuição preditiva do modelo.

3.2.1.1 Distribuição a priori

A *priori* é essencial na estimação e previsão em modelos bayesianos e neste caso é utilizada a *priori* Minnesota.² Como ressalta Schorfheide e Song (2015), a ideia central da *priori* Minnesota é centrar a distribuição de (Φ) de modo que implique em um passeio aleatório para cada um dos componentes de x_t em (37). A variância da distribuição a *priori* é controlada pelo vetor de hiperparâmetros (λ) . É utilizada uma versão atualizada da original proposta por Doan, Litterman e Sims (1984). Schorfheide e Song (2015), baseados no trabalho de Sims e Zha (1998), aplicam a distribuição da *priori* na forma da distribuição Normal multivariada Wishart-Inversa (*MNIW*). Essa é uma *priori* conjugada de modo que a *priori* *MNIW* resulta em uma posteriori que também é *MNIW*.

A *priori* é implementada com o método de estimação proposto por Litterman (1986), de forma que os dados observados são aumentados (*data augmentation*) com observações *dummy*. O uso de *data augmentation* (adição de variáveis auxiliares ao amostrador) é realizado com o intuito de facilitar a implementação do amostrador de forma que a análise é, então, realizada em um espaço expandido incluindo não somente os parâmetros do modelo, mas, também, variáveis latentes e observações perdidas.

A *priori* Minnesota é gerada por observações *dummy* (x_*, w_*) que são indexadas por 5×1 vetor de hiperparâmetros λ com elementos λ_i . Usando uma pré-amostra, seja \underline{x} e \underline{s} vetores $n \times 1$ de médias e desvio padrão. Para as séries mensais esse cálculo é direto. Para as séries trimestrais, equiparamos \underline{x}_q e \underline{s} com, respectivamente, a média e o desvio-padrão da pré-amostra dos valores trimestrais observados.

² Para Litterman (1986), a escolha da *priori* deve considerar três regularidades estatísticas de séries macroeconômicas: 1) o comportamento da tendência das séries temporais macroeconômicas; 2) valores correntes possuem mais informação que valores passados; 3) valores passados de uma dada variável contém mais informação de seu estado corrente comparativamente aos valores passados de outras variáveis.

3.2.1.2 Inferência *a posteriori*

A distribuição conjunta dos dados, variáveis latentes e parâmetros condicionada em algumas observações para inicializar os lags é dada por:

$$p(Y_{1:T}, Z_{0:T}, \Phi, \Sigma | Y_{-p+1:0}, \lambda) = p(Y_{1:T} | Z_{0:T}) p(Z_{1:T} | z_0, \Phi, \Sigma) p(z_0 | Y_{-p+1:0}) p(\Phi, \Sigma | \lambda) \quad (43)$$

A distribuição de $Y_{1:T} | Z_{1:T}$ é dada pela probabilidade de $Y_{1:T}$ que satisfaz (42). A densidade $p(Z_{1:T} | z_0, \Phi, \Sigma)$ é obtida a partir da regressão linear em (38). A densidade condicional $p(z_0 | Y_{-p+1:0})$ é definida como gaussiana. A inicialização de z_{T_-} é dada utilizando as observações atuais, sendo T_- a pré-amostra. No caso das variáveis mensais isso é direto e nas variáveis trimestrais é dado como igual aos valores trimestrais observados, assumindo que durante esses períodos os valores intra-trimestre são dados pela médias observadas durante o trimestre. Então, $p(z_{T_-})$ é uma função de probabilidade. Φ e Σ são definidos como iguais a suas respectivas médias *a priori* e é aplicado o filtro de Kalman para a pré-amostra $Y_{T_-:0}$ para o sistema descrito em (38) e (42). Por sua vez, $p(\Phi, \Sigma | \lambda)$ representa a densidade *a priori* dos parâmetros do VAR. Então, a densidade *a posteriori* condicional dos parâmetros VAR e estados latentes do MF-VAR é descrita por:

$$\begin{aligned} p(\Phi, \Sigma | z_{0:T}, Y_{-p+1:T}) &\propto p(Z_{1:T} | z_0, \Phi, \Sigma) p(\Phi, \Sigma | \lambda) \\ p(Z_{0:T} | \Phi, \Sigma, Y_{-p+1:T}) &\propto p(Y_{1:T}, Z_{1:T}) p(Z_{1:T} | z_0, \Phi, \Sigma) p(z_0 | Y_{-p+1:T}) \end{aligned} \quad (44)$$

Neste caso, o amostrador de Gibbs que itera as duas distribuições *a posteriori* condicionais em (44)

$$p(\Phi, \Sigma | z_{0:T}, Y_{-p+1:T}) \quad \text{e} \quad p(Z_{0:T} | \Phi, \Sigma, Y_{-p+1:T})$$

é implementado através do algoritmo de Carter e Kohn (1994).³ Condicionada a $Z_{0:T}$, a regressão multivariada (38) é linear e gaussiana com *priori* conjugada. Como a *priori* pertence à família MNIW, então o MCMC (*Markov chain Monte Carlo*) pode ser usado diretamente para obter a *posteriori*. Então, o MF-VAR é um modelo espaço de estado linear gaussiano e a amostragem da *posteriori* condicional de $p(Z_{0:T} | \Phi, \Sigma, Y_{-p+1:T})$, isto é, a sequência $Z_{0:T}$ condicional aos parâmetros do VAR, é implementada com um suavizador padrão. A inicialização para o passo do filtro de Kalman do suavizador é obtida da distribuição $p(z_0 | Y_{-p+1:T})$.

³ O amostrador de Gibbs segue o algoritmo eficiente de Carter e Kohn (1994) para a amostragem MCMC, onde todos os estados são atualizados conjuntamente em um passo. Esse algoritmo é mais eficiente do que os amostradores com um único estado, os quais realizam a atualização de um vetor de estados de cada vez.

3.2.2 Função de verossimilhança marginal e seleção de hiperparâmetros

Na estimação bayesiana, um dos aspectos importantes refere-se à seleção dos hiperparâmetros (λ), os quais controlam as regularidades estatísticas de séries macroeconômicas. No MF-VAR são escolhidos os hiperparâmetros que conjuntamente maximizam a densidade marginal dos dados⁴ (MDD). De acordo com Schorfheide e Song (2015), a melhor performance para o MF-VAR é atingida para valores de λ entre os extremos $\lambda = 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$. A resolução da MDD envolve integrar os estados latentes. A probabilidade *a posteriori* de λ é proporcional a MDD:

$$p(Y_{1:T}|Y_{-p+1:0}, \lambda) = \int p(y_{1:T}, Z_{0:T}, \Phi, \Sigma | Y_{-p+1:0}, \lambda) d(Z_{0:T}, \Phi, \Sigma). \quad (45)$$

Para gerar as previsões do MF-VAR, condicionamos o valor de λ_T que maximiza o logaritmo da MDD:

$$\ln p(Y_{1:T}|Y_{-p+1:0}, \lambda) = \sum_{t=1}^T \ln \int p(y_t | Y_{-p+1:t-1}, \Phi, \Sigma) p(\Phi, \Sigma | Y_{-p+1:t-1}) d(\Phi, \Sigma). \quad (46)$$

O logaritmo da densidade marginal dos dados pode ser interpretado como a soma da pontuação preditiva um passo a frente. A escolha de λ baseada na MDD tende a funcionar bem em inferência, assim como, em previsão, de acordo com Schorfheide e Song (2015). No caso da geração das previsões do MF-VAR, cada horizonte de previsão é condicionado sobre o valor $\hat{\lambda}_T$ que maximiza o logaritmo da densidade marginal dos dados.

3.2.2.1 Aproximação da densidade marginal dos dados

A resolução da MDD a partir de (45) envolve resolver a integral envolvendo estados latentes. Uma forma de estimar a MDD é utilizando o estimador média harmônica de Geweke (1999).

$$\frac{1}{p(Y_{1:T}|Y_{-p+1:0}, \lambda)} = \frac{p(W_{1:T}, w_0 | Y_{1:T}, Y_{-p+1:0})}{p(W_{1:T}, Y_{1:T}, w_0 | Y_{-p+1:0})} \quad (47)$$

onde $W_{1:T}$ engloba os valores não observáveis de $x_{q,t}$ para o primeiro e o segundo mês de cada trimestre e w_0 contém os valores correspondentes para o período de inicialização $t = -p + 1, \dots, 0$. Então, a aproximação da MDD é dada por:

$$\hat{p}(Y_{1:T}|Y_{-p+1:0}, \lambda) = c \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f_0(w_0^{(i)}) f(W_{1:T}^{(i)})}{p(Z_{1:T}^{(i)} | z_0^{(i)}, \lambda) p(z_0^{(i)} | Y_{-p+1:0}, \lambda)} \right]^{-1} \quad (48)$$

A constante c captura o termo Jacobiano associado com a mudança de variável de $(w_0, W_{1:T}, Y_{1:T})$ para $(z_0, Z_{1:T})$. A função f segue Geweke (1999) sendo uma distribuição normal

⁴ Também chamada de verossimilhança marginal.

multivariada com média $\hat{\mu}_{W_{1:T}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_{1:T}^{(i)}$ e variância $\hat{\Sigma}_{W_{1:T}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_{1:T}^{(i)} W_{1:T}^{(i)'} - \hat{\mu}_{W_{1:T}} \hat{\mu}_{W_{1:T}}'$. É definido $f_0(w_0^{(i)}) = p(z_0^{(i)} | Y_{-p+1:0}, \lambda)$ de forma que os termos se cancelem. A avaliação do denominador é obtida usando as constantes de normalização para a distribuição MNIW (ver Negro e Schorfheide (2011)).

3.3 APLICAÇÃO EMPÍRICA

Esta seção apresenta a aplicação empírica dos modelos descritos na seção 3.2 para o caso brasileiro. São apresentadas as variáveis utilizadas, bem como a escolha dos hiperparâmetros utilizados na construção das previsões do MF-VAR e do VAR baseado na agregação temporal em dados trimestrais (QF-VAR). A especificação QF-VAR é estimada de duas maneiras: i) QF-VAR(*priori* informativa), ou seja, estimado de forma semelhante ao MF-VAR e ii) VAR(OLS) estimado por Mínimos Quadrados Ordinários (OLS).⁵

3.3.1 Variáveis macroeconômicas

São consideradas 9 variáveis, sendo 3 variáveis trimestrais e 6 variáveis mensais. As variáveis trimestrais são o PIB real (PIB), consumo real do governo (GOV) e formação bruta de capital fixo real (INV). As variáveis mensais são taxa de desemprego na RMSP (UNR), taxa de juros (JUROS), taxa de inflação (INF), Pesquisa Industrial Mensal Brasil⁶(IND), IPCA núcleo médias aparadas com suavização (INFCORE) e o índice do salário real médio na indústria em São Paulo (AWI). As variáveis que entram no VAR em logaritmo são: PIB, GOV, INV, IND e AWI e as demais variáveis são divididas por 100.

Os dados abrangem o período de jan./96 a jun./17. A previsão é realizada com uma abordagem recursiva a qual considera uma sequência crescente de dados $Y_{-p+1:T}$, $T = T_{min}, \dots, T_{max}$, para reestimar os parâmetros dos modelos (MF-VAR e QF-VAR) e gerar as previsões para os períodos $T + 1, \dots, T + H$. O horizonte de previsão máximo é $H = 12$ meses. O período $t = 1$ corresponde a jul./96, T_{min} a jun./12 e T_{max} a jun./16, resultando em 49 amostras de estimação.

Observações mensais para as 3 séries em frequência trimestral são obtidas aplicando o amostrado de Gibbs para período amostral inteiro (jan./96 a jun./17).⁷ Como as previsões são avaliadas em médias trimestrais⁸, as trajetórias mensais simuladas são agregadas da mesma forma. Considerando que as variáveis trimestrais somente são observadas nessa frequência, avaliamos as previsões das médias trimestrais apesar do modelo ser resolvido na frequência mensal subjacente. Então, $h = 1, \dots, H$ é contado em trimestres ao invés de meses.

⁵ Como destacado por Giannone, Lenza e Primiceri (2015), no modelo VAR com *priori flat*, a distribuição a posteriori dos parâmetros é centrada na estimativa OLS.

⁶ Os dados anteriores a Dez./01 foram retropolados a partir da série antiga da PIM para construir uma série com início em 1996.

⁷ As 3 séries mensais inferidas são tratadas como dados na avaliação da previsão pontual.

⁸ Nesse caso, médias trimestrais referem-se a média para cada 3 meses.

As previsões são avaliadas com base na média do erro quadrático de previsão (MSFE) relativo. A comparação entre o MSFE para as previsões das médias trimestrais do MF-VAR e para as previsões do QF-VAR é realizada através do MSFE relativo:

$$\text{MSFE relativo}(i|h) = \frac{MSFE(i|h)}{MSFE_{benchmark}(i|h)} \quad (49)$$

onde i denota a variável e h refere-se ao horizonte de previsão medido em trimestres. O modelo QF-VAR(*priori* informativa) e o QF-VAR(OLS) são utilizados como *benchmarks*. Então, um número menor do que 1 implica que o modelo MF-VAR apresenta desempenho melhor do que o modelo *benchmark*.

Baseado em análises prévias, definimos o número de lags no equação de transição (mensal) do MF-VAR igual a $p(m) = 6$ e o número de lags no QF-VAR (*priori* informativa) igual a $p(q) = 2$ e QF-VAR (OLS) igual a $p(q) = 1$.

Para cada amostra de estimação foram geradas 20.000 amostras a partir da distribuição a posterior dos parâmetros do VAR usando o algoritmo MCMC descrito na seção (3.2.1). São descartadas as primeiras 4.000 amostras e utilizadas as restantes para calcular as aproximações dos momentos a posteriori.

3.3.2 Seleção dos hiperparâmetros

Como explicado na seção (3.2.2), os hiperparâmetros são determinados a partir da maximização da log-verossimilhança marginal. Como salientado por Schorfheide e Song (2015), a otimização da verossimilhança marginal ocorre em relação a 5 hiperparâmetros que controlam: o ajuste geral da *priori* (λ_1); a taxa de decaimento da variância conforme aumenta a defasagem dos coeficientes, implicando que quanto mais longa for a defasagem mais a variância se aproximará de zero (λ_2); número de observações utilizadas para obter a *priori* para a matriz de covariância dos erros (λ_3); a soma dos coeficientes dos lags de uma variável em direção a unidade (λ_4); e o parâmetro de ajuste para a co-persistência entre os coeficientes do VAR (λ_5).

A reotimização dos hiperparâmetros do MF-VAR é computacionalmente onerosa. Como espera-se que a escolha ótima dos hiperparâmetros evolua suavemente ao longo do tempo, a reotimização é realizada aproximadamente a cada 2 anos, em linha com Schorfheide e Song (2015). Os resultados da reotimização indicam alguma mudança no valor dos hiperparâmetros. Com isso, optamos por manter os mesmos valores sucessivamente em cada amostra recursiva, realizando a mudança a partir da amostra em que é realizada a reotimização, nesse caso, na amostra recursiva 1, 25 e 49. A tabela (6) mostra a estimativa dos hiperparâmetros para a última reotimização.⁹

⁹ Os valores dos hiperparâmetros do MF-VAR encontram-se no apêndice 3.6. No caso do QF-VAR (*priori* informativa), os resultados indicaram a manutenção dos mesmos valores para cada amostra recursiva.

Tabela 6 – Hiperparâmetros

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
MF-VAR	0,03	3,4	1,00	3,40	3,24
QF-VAR	0,26	3,59	1,00	2,63	1,62

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

3.3.3 Resultados empíricos

Nesta seção apresentamos os resultados do exercício empírico de previsão do MF-VAR para o caso brasileiro.

A tabela (7) apresenta a o MSFE relativo entre o modelo MF-VAR e o QF-VAR(*priori* informativa) como descrito na equação (49). De forma geral, a performance de previsão fora da amostra aponta que a utilização das observações mensais dentro do trimestre aumentam a precisão das previsões de curto prazo.

Os resultados para PIB, taxa de desemprego, inflação e taxa de juros indicam que o uso de informações mensais leva a uma diminuição considerável do MSFE relativo no curto prazo. A redução do MSFE relativo permanece até o horizonte $h = 3$. Com o aumento do horizonte de previsão para $h = 4$, o QF-VAR(*priori* informativa) alcança o MF-VAR e o diferencial do MSFE relativo entre as previsões dos modelos torna-se negligenciável. Avaliando a precisão das previsões fora da amostra através do RMSFE relativo¹⁰, no caso das previsões do PIB, a previsão um passo a frente tem uma redução de 6,87% do RMSFE relativo comparativamente à previsão do QF-VAR(*priori* informativa).

Para as séries mensais da taxa de desemprego, taxa de inflação e taxa de juros, a redução do MSFE relativo gerada pelo MF-VAR para essas séries mensais é mais pronunciada do que para o PIB, a qual é observada em frequência trimestral, em linha com Schorfheide e Song (2015). Para as variáveis divulgadas em frequência mensal, as diferenças entre as previsões do MF-VAR e do QF-VAR(*priori* informativa) tende a ser mais pronunciada do que para o PIB. Para o horizonte $h = 1$, o MF-VAR é capaz de aumentar a precisão das previsões em 32,49% para a taxa de desemprego e 6,80% para a taxa de juros e 1,05% para a taxa de inflação. Para a taxa de desemprego e a inflação os resultados os ganhos tendem a diminuir com o horizonte h de previsão, mas ainda mostram-se substanciais mesmo para $h = 4$. No caso da taxa de juros, o ganho com o uso de informações mensais tende a aumentar conforme aumenta o horizonte h de previsão.

¹⁰ A descrição do RMSFE relativo, bem como, os resultados encontram-se no Apêndice 3.7.

Tabela 7 – MSFE do MF-VAR *versus* QF-VAR (*priori* informativa)

h	UNR	JUROS	INF	IND	INFcore	AWI	PIB	INV	GOV
1	0,45	0,86	0,97	0,75	1,25	0,43	0,86	0,91	1,45
2	0,76	0,71	0,79	0,89	1,30	0,71	0,92	0,87	1,14
3	0,86	0,60	0,83	0,95	1,01	0,82	0,97	0,87	1,08
4	0,91	0,57	0,84	0,96	1,07	0,88	1,00	0,93	1,06

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nota: O MSFE para UNR, JUROS, INF, INFCORE refere-se à previsão do nível das séries. Para as variáveis restantes, o RMSFE refere-se ao logaritmo da série.

O uso de informações mensais no modelo de previsão das séries trimestrais mostra-se relevante também para a previsão da série da produção industrial. No horizonte $h = 1$, o RMSE relativo da previsão do MF-VAR é 13,32% menor em relação ao QF-VAR(*priori* informativa). Para os horizontes $h = 2, 3$ e $h = 4$ o incremento decresce, mas o diferencial mantém-se positivo. Considerando que a produção industrial é comumente utilizada como um dos indicadores antecedentes do PIB, o resultado satisfatório da previsão dessa variável pode colaborar para a definição mais precisa de estimativas para a prévia do PIB.

No caso da previsão do salário mensal, os horizontes $h = 1$ e $h = 2$ indicam ganhos expressivos na redução do MSFE relativo do MF-VAR frente ao QF-VAR(*priori* informativa). Conforme h aumenta, o MSFE relativo diminui, mas ainda assim mostra-se relevante mesmo com o aumento do horizonte de previsão. Para as variáveis INFCORE e GOV, o modelo QF-VAR(*priori* informativa) ultrapassa o MF-VAR e os diferenciais tornam-se favoráveis ao modelo que emprega as séries agregadas na frequência trimestral.

Em resumo, para os grupo das variáveis trimestrais PIB e INV, os ganhos a partir da inclusão de variáveis mensais é menor comparativamente ao grupo de variáveis mensais não financeiras (UNR, INF, IND e AWI), consistente com os resultados de Schorfheide e Song (2015). Conforme o horizonte de previsão h aumenta, os benefícios em utilizar informações mensais para a previsão, na maioria dos casos, vai diminuindo, mas mantém-se positivo para várias séries.

Tabela 8 – MSFE do MF-VAR *versus* QF-VAR (OLS)

h	UNR	JUROS	INF	IND	INFcore	AWI	PIB	INV	GOV
1	0,16	0,07	0,66	0,10	0,44	0,14	0,25	0,21	0,52
2	0,91	0,15	0,99	0,33	0,65	0,48	0,89	0,61	0,93
3	2,40	0,22	1,11	0,77	0,68	1,07	2,08	1,46	1,86
4	4,70	0,32	1,27	1,36	0,83	1,96	3,69	2,70	3,20

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nota: O MSFE para UNR, JUROS, INF, INFcore refere-se à previsão do nível das séries. Para as variáveis restantes, o MSFE refere-se ao logaritmo da série.

A tabela (8) apresenta a o MSFE relativo entre o modelo MF-VAR e o QF-VAR(OLS). De forma geral, a performance de previsão fora da amostra aponta que a utilização das observações mensais dentro do trimestre aumentam a precisão das previsões para $h = 1$ e $h = 2$ passos a frente para todas as variáveis.

Os resultados para PIB, taxa de desemprego, inflação e taxa de juros indicam a diminuição do MSFE relativo para $h = 1$ e $h = 2$. No caso do PIB, a previsão um passo a frente tem uma redução considerável de 49,7% do RMSFE relativo comparativamente à previsão do QF-VAR(OLS).

Nesse caso, para os grupo das variáveis trimestrais os ganhos a partir da inclusão de variáveis mensais foram similares ao grupo de variáveis mensais não financeiras (UNR, INF, IND e AWI), diferentemente do caso QF-VAR(*priori* informativa). Na maioria das situações, para o horizonte de previsão superior a $h = 3$, os benefícios em utilizar informações mensais para a previsão desaparece.

Em ambos os casos, se o objetivo é gerar previsões para $h = 1$ e $h = 2$ trimestres a frente, o MF-VAR indica ganhos de performance mais expressivos tanto em relação ao QF-VAR(*priori* informativa) como, também, ao QF-VAR(OLS). Para horizontes superiores a $h = 3$, o incremento diminuiu ou desaparece em relação a ambas as versões do QF-VAR.

3.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho tem como foco a previsão empírica de curto prazo de séries macroeconômicas do Brasil utilizando o modelo *mixed-frequency VAR* (MF-VAR) o qual utiliza dados que são observados em frequências mistas - mensais e trimestrais. A especificação do MF-VAR (SCHORFHEIDE; SONG, 2015) utiliza uma abordagem bayesiana com o intuito de lidar com a dimensionalidade do modelo, bem como, os hiperparâmetros são determinados pelos dados (*data-driven*) através da maximização do logaritmo da densidade marginal dos dados.

Os resultados indicam ganhos na precisão das previsões do MF-VAR comparativamente

ao modelo QF-VAR (*quarterly-frequency VAR*). No caso da versão do QF-VAR isso indica que a utilização de dados mensais melhora a previsão de curto prazo, especialmente a previsão para $h = 1$ e $h = 2$ passos a frente. Com o horizonte de previsão aproximando-se de 1 ano, o incremento entre as previsões do MF-VAR e do QF-VAR (*priori* informativa) vão diminuindo. Em relação ao QF-VAR(OLS), os ganhos do MF-VAR ocorrerem até $h = 2$ trimestres a frente, pois após esse período os ganhos desaparecem.

De forma geral, os resultados indicam que a especificação do VAR com observações em diferentes frequências - mensais e trimestrais - é interessante para a previsão das principais variáveis macroeconômicas brasileiras. O resultado principal indica que incluir informação mensal melhora a performance de previsão de curto prazo, especialmente com o foco em $h = 1$ e $h = 2$ passos a frente. Os resultados indicam que pesquisas futuras podem avançar na análise da previsão entre modelos alternativos que utilizam dados com frequência mista. Além disso, podem ser testados conjuntos diferentes de variáveis de acordo o objetivo da previsão.

3.5 REFERÊNCIAS

- ALVES, S.; FASOLO, A. *Not Just Another Mixed Frequency Paper*. [S.l.], 2015.
- ARRUDA, E. F.; FERREIRA, R. T.; CASTELAR, I. Modelos lineares e não lineares da curva de phillips para previsão da taxa de inflação no brasil. *Revista Brasileira de Economia*, SciELO Brasil, v. 65, n. 3, p. 237–252, 2011.
- ATHANASOPOULOS, G.; POSKITT, D.; VAHID, F. Two canonical varma forms: Scalar component models vis-à-vis the echelon form. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, v. 31, n. 1, p. 60–83, 2012.
- ATHANASOPOULOS, G.; VAHID, F. Varma versus var for macroeconomic forecasting. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 26, n. 2, p. 237–252, 2008.
- BAI, J.; GHYSELS, E.; WRIGHT, J. H. State space models and midas regressions. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, v. 32, n. 7, p. 779–813, 2013.
- BAÑBURA, M.; GIANNONE, D.; REICHLIN, L. Large bayesian vector auto regressions. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 25, n. 1, p. 71–92, 2010.
- CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; SANTOS, A. A. Previsões macroeconômicas baseadas em modelos tvp-var: evidências para o brasil. *Revista Brasileira de Economia*, SciELO Brasil, v. 69, n. 4, p. 407–428, 2015.
- CARLO, T. C.; MARÇAL, E. F. Forecasting brazilian inflation by its aggregate and disaggregated data: a test of predictive power by forecast horizon. *Applied Economics*, Taylor & Francis, v. 48, n. 50, p. 4846–4860, 2016.
- CARRIERO, A.; CLARK, T. E.; MARCELLINO, M. Common drifting volatility in large bayesian vars. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 34, n. 3, p. 375–390, 2016.
- CARRIERO, A.; CLEMENTS, M. P.; GALVÃO, A. B. *Forecasting with Bayesian multivariate vintage-based VARs*. [S.l.], 2014.

- CARRIERO, A.; MUMTAZ, H.; THEOPHILOPOULOU, A. Macroeconomic information, structural change, and the prediction of fiscal aggregates. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 31, n. 2, p. 325–348, 2015.
- CARTER, C. K.; KOHN, R. On gibbs sampling for state space models. *Biometrika*, Biometrika Trust, v. 81, n. 3, p. 541–553, 1994.
- CÉSPEDES, B. J.; CHAUVET, M.; LIMA, E. C. Forecasting brazilian output and its turning points in the presence of breaks: a comparison of linear and nonlinear models. *Estudos Econômicos (São Paulo)*, SciELO Brasil, v. 36, n. 1, p. 5–46, 2006.
- CHAN, J. C. Specification tests for time-varying parameter models with stochastic volatility. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, p. 1–17, 2016.
- CHAN, J. C.; EISENSTAT, E. Efficient estimation of bayesian varmas with time-varying coefficients. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 32, n. 7, p. 1277–1297, 2017.
- CHAN, J. C.; JELIAZKOV, I. Efficient simulation and integrated likelihood estimation in state space models. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, Inderscience Publishers, v. 1, n. 1-2, p. 101–120, 2009.
- CHIU, C. W. J. et al. *Estimating VAR's sampled at mixed or irregular spaced frequencies: a Bayesian approach*. [S.l.], 2012.
- CLARK, T. E.; RAVAZZOLO, F. Macroeconomic forecasting performance under alternative specifications of time-varying volatility. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 30, n. 4, p. 551–575, 2015.
- CLEMENTS, M. P.; GALVÃO, A. B. Macroeconomic forecasting with mixed-frequency data: Forecasting output growth in the united states. *Journal of Business & Economic Statistics*, v. 26, n. 4, p. 546–554, 2008.
- CLEMENTS, M. P.; GALVÃO, A. B. Forecasting with vector autoregressive models of data vintages: Us output growth and inflation. *International Journal of Forecasting*, v. 29, n. 4, p. 698–714, 2013.
- CLEMENTS, M. P.; GALVÃO, A. B. Real-time forecasting of inflation and output growth with autoregressive models in the presence of data revisions. *Journal of Applied Econometrics*, v. 28, n. 3, p. 458–477, 2013.
- COGLEY, T.; SARGENT, T. J. Evolving post-world war ii us inflation dynamics. *NBER macroeconomics annual*, MIT Press, v. 16, p. 331–373, 2001.
- CROUSHORE, D. Forecasting with real-time macroeconomic data. *Handbook of economic forecasting*, Elsevier, v. 1, p. 961–982, 2006.
- CROUSHORE, D.; STARK, T. A real-time data set for macroeconomists. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 105, n. 1, p. 111–130, 2001.
- CROUSHORE, D. D.; STARK, T. A funny thing happened on the way to the data bank: a real-time data set for macroeconomists. *Business Review-Federal Reserve Bank of Philadelphia*, v. 5, p. 15, 2000.

- CUSINATO, R. T.; MINELLA, A.; JÚNIOR, S. da S. P. Output gap in brazil: a real-time data analysis. *Empirical economics*, Springer, v. 44, n. 3, p. 1113–1127, 2013.
- D'AGOSTINO, A.; GAMBETTI, L.; GIANNONE, D. Macroeconomic forecasting and structural change. *Journal of Applied Econometrics*, v. 28, n. 1, p. 82–101, 2013.
- DOAN, T.; LITTERMAN, R.; SIMS, C. Forecasting and conditional projection using realistic prior distributions. *Econometric reviews*, Taylor & Francis, v. 3, n. 1, p. 1–100, 1984.
- DUFOUR, J.-M.; STEVANOVIĆ, D. Factor-augmented varma models with macroeconomic applications. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 31, n. 4, p. 491–506, 2013.
- FERREIRA, D.; PALMA, A. A. Forecasting inflation with the phillips curve: A dynamic model averaging approach for brazil. *Revista Brasileira de Economia*, SciELO Brasil, v. 69, n. 4, p. 451–465, 2015.
- FERREIRA, R. T.; CASTELAR, L. I. de M. et al. Forecasting quarterly brazilian gdp growth rate with linear and nonlinear diffusion index models. *Revista EconomiA*, v. 6, n. 3, p. 261–292, 2005.
- FORONI, C.; MARCELLINO, M. A comparison of mixed frequency approaches for nowcasting euro area macroeconomic aggregates. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 30, n. 3, p. 554–568, 2014.
- FRANCIS, N.; GHYSELS, E.; OWYANG, M. T. *The Low-Frequency Impact of Daily Monetary Policy Shocks*. [S.l.], 2011.
- GEWEKE, J. Using simulation methods for bayesian econometric models: inference, development, and communication. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, v. 18, n. 1, p. 1–73, 1999.
- GHYSELS, E. *Macroeconomics and the Reality of Mixed Frequency Data*. [S.l.], 2012.
- GHYSELS, E.; SANTA-CLARA, P.; VALKANOV, R. *The MIDAS Touch: Mixed Data Sampling Regression Models*. [S.l.], 2004.
- GIANNONE, D.; LENZA, M.; PRIMICERI, G. E. Prior selection for vector autoregressions. *Review of Economics and Statistics*, MIT Press, v. 97, n. 2, p. 436–451, 2015.
- GRIGOLI, F. et al. *Output Gap Uncertainty and Real-Time Monetary Policy*. [S.l.], 2015.
- JUNIOR, M. V. W.; PEREIRA, P. L. V. Modeling and forecasting of realized volatility: Evidence from brazil. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 31, n. 2, p. 315–337, 2011.
- KASCHA, C. A comparison of estimation methods for vector autoregressive moving-average models. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, v. 31, n. 3, p. 297–324, 2012.
- KASCHA, C.; TRENKLER, C. Simple identification and specification of cointegrated varma models. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 30, n. 4, p. 675–702, 2015.
- KIM, S.; SHEPHARD, N.; CHIB, S. Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with arch models. *The review of economic studies*, Wiley-Blackwell, v. 65, n. 3, p. 361–393, 1998.

- KISHOR, N. K.; KOENIG, E. F. Var estimation and forecasting when data are subject to revision. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 30, n. 2, p. 181–190, 2012.
- KOOP, G.; KOROBILIS, D. Large time-varying parameter vars. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 177, n. 2, p. 185–198, 2013.
- KOOP, G. M. Forecasting with medium and large bayesian vars. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 28, n. 2, p. 177–203, 2013.
- KUZIN, V.; MARCELLINO, M.; SCHUMACHER, C. Midas vs. mixed-frequency var: Nowcasting gdp in the euro area. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 27, n. 2, p. 529–542, 2011.
- LITTERMAN, R. B. *Techniques for forecasting with Vector Autoregressions*. Tese (PhD Thesis) — University of Minnesota, Minnesota, 1980.
- LITTERMAN, R. B. Forecasting with bayesian vector autoregressions. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis Group, v. 4, n. 1, p. 25–38, 1986.
- LÜTKEPOHL, H.; POSKITT, D. S. Specification of echelon-form varma models. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 14, n. 1, p. 69–79, 1996.
- METAXOGLU, K.; SMITH, A. Maximum likelihood estimation of varma models using a state-space em algorithm. *Journal of Time Series Analysis*, Wiley Online Library, v. 28, n. 5, p. 666–685, 2007.
- MIKOSCH, H.; NEUWIRTH, S. *Real-time forecasting with a MIDAS VAR*. [S.l.], 2015.
- NEGRO, M. D.; PRIMICERI, G. E. Time varying structural vector autoregressions and monetary policy: A corrigendum. *The Review of Economic Studies*, Oxford University Press, v. 82, n. 4, p. 1342–1345, 2015.
- NEGRO, M. D.; SCHORFHEIDE, F. Bayesian macroeconometrics. *The Oxford handbook of Bayesian econometrics*, Oxford University Press New York, v. 293, p. 389, 2011.
- ORPHANIDES, A. Monetary policy rules based on real-time data. *American Economic Review*, v. 91, n. 4, p. 964–985, 2001.
- POSKITT, D. Vector autoregressive moving average identification for macroeconomic modeling: A new methodology. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 192, n. 2, p. 468–484, 2016.
- PRIMICERI, G. E. Time varying structural vector autoregressions and monetary policy. *The Review of Economic Studies*, v. 72, n. 3, p. 821–852, 2005.
- SANTOS, D. G. dos; ZIEGELMANN, F. A. Multi-period volatility predictions: A comparative study using midas regressions. In: *34^o Meeting of the Brazilian Econometric Society*. [S.l.: s.n.], 2012.
- SCHORFHEIDE, F.; SONG, D. Real-time forecasting with a mixed-frequency var. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 33, n. 3, p. 366–380, 2015.
- SIMS, C. A. Macroeconomics and reality. *Econometrica*, v. 48, n. 1, p. 1–48, 1980.
- SIMS, C. A.; ZHA, T. Bayesian methods for dynamic multivariate models. *International Economic Review*, JSTOR, v. 39, n. 4, p. 949–68, 1998.

SIMS, C. A.; ZHA, T. Were there regime switches in us monetary policy? *The American Economic Review*, American Economic Association, v. 96, n. 1, p. 54–81, 2006.

STARK, T.; CROUSHORE, D. Forecasting with a real-time data set for macroeconomists. *Journal of Macroeconomics*, Elsevier, v. 24, n. 4, p. 507–531, 2002.

ZUANAZZI, P. T.; ZIEGELMANN, F. A. Previsões para o crescimento do pib trimestral brasileiro com séries financeiras e econômicas mensais: uma aplicação de midas. *Economia Aplicada*, v. 18, n. 2, p. 295–318, 2014.

3.6 APÊNDICE A - HIPERPARÂMETROS SELECIONADOS

Tabela 9 – Hiperparâmetros

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
MF-VAR	0,05	3,40	1,00	3,40	2,19
QF-VAR	0,26	3,59	1,00	2,63	1,62

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nota: Refere-se aos hiperparâmetros obtidos a partir da amostra recursiva 1.

Tabela 10 – Hiperparâmetros

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
MF-VAR	0,04	3,4	1,00	3,40	3,24
QF-VAR	0,26	3,59	1,00	2,63	1,62

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nota: Refere-se aos hiperparâmetros obtidos a partir da amostra recursiva 25.

3.7 APÊNDICE B - RMSFE

Essa seção apresenta a avaliação da precisão das previsões avaliadas com base na média da raiz do erro quadrático de previsão (RMSFE) relativo. A comparação entre o RMSFE para as previsões das médias trimestrais do MF-VAR e para as previsões do QF-VAR é realizada através do RMSFE relativo:

$$\text{RMSFE relativo}(i|h) = 100 \times \frac{\text{RMSFE}(i|h) - \text{RMSFE}_{\text{benchmark}}(i|h)}{\text{RMSFE}_{\text{benchmark}}(i|h)} \quad (50)$$

onde i denota a variável e h refere-se ao horizonte de previsão medido em trimestres. O modelo QF-VAR(*priori* informativa) e o QF-VAR(OLS) são utilizados como *benchmarks*.

Tabela 11 – RMSFE relativo do MF-VAR *versus* QF-VAR (*priori* informativa)

h	UNR	JUROS	INF	IND	INFcore	AWI	PIB	INV	GOV
1	-32,5	-6,8	-1,1	-13,3	12,0	-34,4	-6,9	-4,3	20,4
2	-12,5	-15,5	-10,8	-5,6	14,1	-15,2	-3,8	-6,6	7,0
3	-7,1	-22,0	-8,6	-2,3	1,0	-9,0	-1,0	-6,2	4,0
4	-4,1	-23,9	-7,9	-1,6	3,6	-5,8	0,3	-3,1	3,1

Fonte: Elaborado pela autora.

Nota: O RMSFE para UNR, JUROS, INF, INFCORE refere-se à previsão do nível das séries. Para as variáveis restantes, o RMSFE refere-se ao logaritmo da série.

Tabela 12 – RMSFE relativo do MF-VAR *versus* QF-VAR (OLS)

h	UNR	JUROS	INF	IND	INFcore	AWI	PIB	INV	GOV
1	-59,2	-73,5	-18,3	-68,0	-33,1	-62,3	-49,7	-53,3	-27,7
2	-4,6	-60,4	0,0	-42,0	-19,2	-30,3	-5,5	-21,6	-3,2
3	55,0	-52,2	5,4	-11,9	-17,0	3,7	44,3	21,1	36,6
4	117,0	-42,6	12,9	16,8	-8,4	40,0	92,2	64,5	79,0

Fonte: Elaborado pela autora.

Nota: O RMSFE para UNR, JUROS, INF, INFcore refere-se à previsão do nível das séries. Para as variáveis restantes, o RMSFE refere-se ao logaritmo da série.

4 CONCLUSÃO

Esta tese é composta por dois ensaios acadêmicos com foco sobre a previsão macroeconômica no Brasil. No primeiro ensaio realizamos dois exercícios empíricos de previsão fora da amostra para a inflação, PIB e taxa de juros no Brasil utilizando o modelo VAR com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica (D'AGOSTINO; GAMBETTI; GIANNONE, 2013), comparando a performance de previsão com outros modelos que restringem a variação dos coeficientes. O objetivo foi analisar se a inclusão da volatilidade estocástica melhora a performance de previsão em *real-time* dessas variáveis-chave para a economia brasileira no Regime de Metas de Inflação. Os resultados indicam que o modelo TVP-VAR(SV) apresenta uma performance geral satisfatória do comparativamente aos outros modelos. De forma geral, os resultados encontrados validam a importância de incluir a mudança estrutural e, especialmente, a possibilidade de choques exógenos ao modelo, sendo importante para a previsão. Além disso, a previsão em tempo real com o modelo TVP-VAR(SV) incorpora o caráter da variação no tempo da economia, como salienta D'Agostino, Gambetti e Giannone (2013).

No segundo ensaio foi realizada uma aplicação empírica com foco na previsão do PIB e da taxa de inflação no Brasil com o intuito de verificar se a utilização da especificação VARMA proposta por Chan e Eisenstat (2017) melhora a performance de previsão dessas variáveis. Particularmente, o foco é sobre a generalização do VARMA com coeficientes variando no tempo e volatilidade estocástica. Os resultados da aplicação empírica para o Brasil indicaram que somente adicionar o componente de médias móveis não melhora a performance de previsão das variáveis. Contudo, adicionar volatilidade estocástica ao VARMA melhora consideravelmente o desempenho da previsão. A especificação VAR com volatilidade estocástica apresenta o melhor desempenho entre os modelos. De forma geral, os resultados indicam que a inclusão da volatilidade estocástica fornece ganhos expressivos na previsão para o caso brasileiro. Isso sugere que a volatilidade dos choques exógenos é empiricamente mais importante do que mudanças no regime de política monetária, o que vem sendo apontado na literatura recente.

O terceiro ensaio teve como foco a previsão empírica de curto prazo de variáveis macroeconômicas do Brasil aplicando o modelo *mixed-frequency VAR* (MF-VAR) de Schorfheide e Song (2015) que utiliza dados observados em frequências mistas - mensais e trimestrais. Procuramos estudar se a inclusão de dados mensais aumentam a precisão da previsão do VAR comparativamente ao modelo QF-VAR (*quarterly-frequency VAR*). Os resultados para PIB, taxa de desemprego, inflação e taxa de juros indicam que o uso de informações mensais leva a uma diminuição considerável da raiz do erro quadrático médio de previsão (RMSE) no curto prazo. Em resumo, para o grupo das variáveis trimestrais PIB e investimento, os ganhos a partir da inclusão de variáveis mensais é menor comparativamente ao grupo de variáveis mensais não financeiras (taxa de desemprego, taxa de inflação, produção industrial e salário mensal),

consistente com os resultados de Schorfheide e Song (2015). Conforme o horizonte de previsão h aumenta, os benefícios de utilizar informações mensais para a previsão, na maioria dos casos, vai diminuindo, mas mantém-se positivo para várias séries. Consistente com a literatura, se o objetivo é gerar previsões para um ou dois trimestres a frente, o modelo MF-VAR torna-se bastante atraente em relação ao QF-VAR.

REFERÊNCIAS

CHAN, J. C.; EISENSTAT, E. Efficient estimation of bayesian varmas with time-varying coefficients. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 32, n. 7, p. 1277–1297, 2017.

D'AGOSTINO, A.; GAMBETTI, L.; GIANNONE, D. Macroeconomic forecasting and structural change. *Journal of Applied Econometrics*, v. 28, n. 1, p.82–101, 2013.

SCHORFHEIDE, F.; SONG, D. Real-time forecasting with a mixed-frequency var. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 33, n. 3, p.366–380, 2015.