

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE DE VIGAS DE  
CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS**

**Maílson Scherer**

Porto Alegre  
2018

MAÍLSON SCHERER

**AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE DE VIGAS DE  
CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia.

Porto Alegre  
2018



**MAÍLSON SCHERER**

**AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE DE VIGAS DE  
CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Concentração: ESTRUTURAS, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 14 de setembro de 2018

**Prof. Inácio Benvegno Morsch**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul  
Orientador

**Prof. Mauro de Vasconcellos Real**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul  
Co-orientador

**Prof. Nilo Cesar Consoli**  
PhD. pela Concordia University, Canada  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Américo Campos Filho**  
(UFRGS)  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade  
de São Paulo

**Prof. Jorge Luis Palomino Tamayo**  
(UFRGS)  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul

**Prof. Herbert Martins Gomes**  
(UFRGS)  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul

**Prof. Charlei Marcelo Paliga**  
(UFPEL)  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul

Dedico este trabalho à minha esposa, minha família  
e ao bondoso Deus.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me abençoado e me protegido em todos os momentos de minha vida. Obrigado por ter me mantido forte nos momentos de maiores dificuldades, fazendo-me acreditar que tudo sempre tomaria o melhor caminho.

Agradeço à minha querida esposa Priscila, por dividir comigo todas as alegrias e dificuldades enfrentadas em nossas vidas, em especial por ter sido meu constante suporte durante o período do mestrado. Obrigado por me fazer acreditar em minha capacidade e me animar nos momentos em que as coisas não aconteciam da melhor forma. Você é muito especial em minha vida.

Agradeço aos meus pais e à minha irmã, por estarem sempre ao meu lado e me apoiarem em minhas escolhas. Obrigado por me incentivarem a estudar e me qualificar, estando sempre ao meu lado e me dando certeza que terei sempre em vocês um abraço caloroso, não importa quanto o tempo passe.

Agradeço ao meu orientador, Inácio Benvegnu Morsch, por ter aceitado me orientar mesmo a alguns quilômetros de distância. Muito obrigado pela sua contribuição técnica ao longo do desenvolvimento dessa dissertação. Também agradeço por ter me oferecido palavras de confiança e por sempre acreditar no meu potencial, em especial nos momentos em que as coisas não corriam como o esperado. Você é um grande professor, mas, acima de tudo, uma grande pessoa.

Agradeço ao Prof. Mauro de Vasconcellos Real, por ter contribuído na minha formação como engenheiro desde o período da graduação até a pós-graduação. Agradeço pelo seu incansável empenho em contribuir para a formação de todos os seus alunos. Sou extremamente privilegiado em ter aprendido muito com você, sendo para mim um espelho profissional e pessoal. Obrigado por me permitir utilizar a estrutura da sua sala de atendimento para o desenvolvimento do trabalho. Tenho em você um grande amigo.

Agradeço aos colegas do PPGEC por terem dividido comigo o período do mestrado. Aos colegas Felipe Quevedo, Rebeca Schmitz, Gustavo Ribeiro e Paulo Renato Barbosa, deixo um agradecimento especial por terem me auxiliado na utilização do ANSYS e no aprendizado sobre a utilização da *usermat*. Grande parte da realização desse trabalho só foi possível graças ao

auxílio de vocês. Gostaria de agradecer também ao Prof. Márcio Wrague, da FURG, com quem troquei muitas ideias durante o período de desenvolvimento da dissertação.

Agradeço de forma muito carinhosa aos colegas Sandro Troian, Marcelo de Alencar e Guilherme Fornel, com quem dividi moradia durante boa parte do período do mestrado. Muito obrigado pelas várias risadas e momentos de descontração, tornando mais leve um período em que todos enfrentamos diversas dificuldades. Quero cultivar a amizade de você para o resto da vida!

Agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro que viabilizou a realização desse curso de pós-graduação. Agradeço também à UFRGS, por ofertar um curso de alta qualidade que contribuiu substancialmente para o meu desenvolvimento técnico.

“Não vá levar tudo tão a sério  
Sentido que dá, deixa correr;  
Se souber confiar no seu critério,  
Nada a temer;  
Não vá levar tudo tão na boa,  
Brigue para obter o melhor;  
Se errar por amor, Deus perdoa,  
Seja você!”

*Djavan*

## RESUMO

SCHERER, M. **Avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado pelo Método dos Elementos Finitos**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

O método semi-probabilístico figura entre os principais procedimentos de segurança adotados por grande parte das normas de projeto estrutural, baseando-se na utilização de valores característicos para resistências e ações, os quais são ponderados através de coeficientes parciais. Garante-se, assim, uma margem de segurança às estruturas. É sabido que as propriedades dos materiais apresentam um nível de dispersão, e a geometria final das peças é influenciada pela qualidade da mão de obra empregada. Os carregamentos, por sua vez, podem apresentar grandes variações ao longo da vida útil da estrutura. Dessa forma, a análise probabilística surge como uma ferramenta que permite estabelecer um intervalo de valores possíveis para a resposta de uma estrutura, permitindo avaliar, sob o contexto da probabilidade, se o nível de segurança atingido por esta estrutura é aceitável. Neste sentido, o objetivo deste trabalho consiste em determinar o nível de segurança atingido pela norma NBR-6118:2014 no projeto de vigas de concreto armado em relação ao estado-limite último de flexão. Inicialmente, um conjunto de vigas é dimensionado de acordo com as prescrições da norma NBR-6118:2014. Em seguida, um estudo probabilístico é realizado sobre estas vigas, inserindo-se as principais aleatoriedades associadas aos materiais, geometria e carregamento. Três metodologias são empregadas para a obtenção da resistência das vigas. Nas duas primeiras metodologias, assume-se que a resistência é representada por uma distribuição teórica, ajustada a partir de dados obtidos via Método de Monte Carlo associado ao Método dos Elementos Finitos, empregando-se o *software* ANSYS. A terceira metodologia consiste na aplicação do Método da Superfície de Resposta para a representação da resistência através de um polinômio aproximador, sendo este ajustado através de resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos. Os índices de confiabilidade são obtidos através do FORM, sendo verificada a equivalência, em termos de confiabilidade, entre as metodologias empregadas. É constatada a grande influência do carregamento acidental no nível de confiabilidade atingido pelas vigas, sendo possível verificar que a resistência das vigas é fundamentalmente influenciada pelas propriedades mecânicas da armadura.

**Palavras-chave:** *Confiabilidade estrutural; Concreto armado; Elementos Finitos.*

## ABSTRACT

SCHERER, M. **Evaluation of the reliability of reinforced concrete beams by the Finite Element Method.** 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

The semi-probabilistic method appears among the main security procedures adopted by most structural design codes, based on the use of characteristic values for resistances and actions, which are weighted through partial coefficients. This ensures a safety margin for the structures. It is known that the properties of the materials have a level of scatter, and the final geometry of the parts is influenced by the quality of the workforce employed. The loads, in turn, can vary significantly over the life of the structure. In this way, the probabilistic analysis appears as a tool that allows to establish a range of possible values for the response of a structure, allowing to evaluate, under the context of probability, if the safety level reached by this structure is acceptable. In this sense, the objective of this work is to determine the safety level achieved by the NBR-6118: 2014 code for the design of reinforced concrete beams under to the ultimate limit state of flexure. First of all, a set of beams is designed according to NBR-6118: 2014 code requirements. Then, a probabilistic study is carried out on these beams, inserting the main randomness associated with the materials, geometry and loads. Three methodologies are used to obtain the resistance of the beams. In the first two methodologies, it is assumed that the resistance is represented by a theoretical distribution, adjusted from data obtained using the Monte Carlo Method associated with the Finite Element Method, using ANSYS software. The third methodology consists in the application of the Response Surface Method in order to represent the resistance through an polynomial approximation, being adjusted by results obtained by the Finite Element Method. The reliability indexes are obtained by FORM, being verified the equivalence, in terms of reliability, between the methodologies used. It is verified the great influence of the live load on the level of reliability reached by the beams, being possible to verify that the strength of the beams is fundamentally influenced by the mechanical properties of the reinforcement.

**Key-words:** *Structural reliability; Reinforced concrete; Finite Elements.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Estrutura de concreto armado utilizada no arranha-céu Burj Khalifa (CONCRETO & CONSTRUÇÕES, 2009). .....	26
Figura 1.2 - Resistência média do concreto em função de sua variabilidade (Adaptado de REAL, 2000).....	27
Figura 1.3 - Variáveis aleatórias associadas ao projeto estrutural.....	28
Figura 3.1 - Seção retangular genérica (Adaptado de ARAÚJO, 2014). .....	48
Figura 3.2 - Domínio possíveis para ruptura em flexão simples (Adaptado de ARAÚJO, 2014). .....	48
Figura 3.3 - Limitação da região útil no domínio 3, conforme NBR-6118:2014 (Adaptado de ARAÚJO, 2014). .....	50
Figura 3.4 - Distribuição de deformações e tensões em uma seção com armadura simples (Adaptado de ARAÚJO, 2014).....	51
Figura 3.5 - Distribuição de deformações e tensões em uma seção com armadura dupla (Adaptado de ARAÚJO, 2014).....	53
Figura 4.1 - Diagrama tensão-deformação do concreto em compressão uniaxial (Adaptado de CEB, 2012) .....	57
Figura 4.2 - Diagrama tensão-deformação do concreto em tração uniaxial (Adaptado de MARTINELLI, 2003).....	59
Figura 4.3 - Diagrama tensão-deformação para o aço das armaduras.....	60
Figura 4.4 - Elemento beam189 para a representação do concreto (ANSYS, 2013 <sup>a</sup> ) .....	62
Figura 4.5 - Pontos de integração e discretização da seção para o elemento beam189 (Adaptado de ANSYS, 2013 <sup>a</sup> ) .....	64
Figura 4.6 - Elemento reinf264 para a representação das armaduras (ANSYS, 2013 <sup>a</sup> ).....	65
Figura 4.7 - Associação entre os elementos reinf264 e beam189. ....	65
Figura 5.1 - Modelo de validação uniaxial do concreto sob compressão (a) e sob tração (b)..	66
Figura 5.2 - Comportamento do concreto em tração uniaxial. ....	67
Figura 5.3 - Comportamento do concreto em compressão uniaxial. ....	67
Figura 5.4 - Geometria e condições de contorno das vigas ensaiadas por Decanini e Grillo (1970).....	68
Figura 5.5 - Malha longitudinal empregada no modelo (a) e representação expandida da seção (b) das vigas ensaiadas por Decanini e Grillo (1970).....	69
Figura 5.6 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-075-1.....	70
Figura 5.7 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-075-2.....	70
Figura 5.8 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-075-3.....	71
Figura 5.9 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-100-1.....	71
Figura 5.10 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-100-2.....	71
Figura 5.11 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-100-3.....	72
Figura 5.12 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-200-1.....	72
Figura 5.13 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-200-2.....	72
Figura 5.14 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-200-3.....	73
Figura 5.15 - Distribuição de tensões na ruptura para a viga RC-075-1, em kN/cm <sup>2</sup> . ....	74

Figura 5.16 - Distribuição de tensões na ruptura para a viga RC-100-1, em kN/cm <sup>2</sup> . .....	74
Figura 5.17 - Distribuição de tensões na ruptura para a viga RC-200-1, em kN/cm <sup>2</sup> . .....	75
Figura 5.18 - Geometria e condições de contorno das vigas ensaiadas por Beber (1999). .....	76
Figura 5.19 - Malha longitudinal empregada no modelo (a) e representação expandida da seção (b) das vigas ensaiadas por Beber (1999). .....	76
Figura 5.20 - Gráfico Carga-Deslocamento para as vigas ensaiadas por Beber (1999). .....	77
Figura 6.1 - Função densidade de probabilidade de uma variável genérica X (Adaptado de HALDAR; MAHADEVAN, 2000). .....	81
Figura 6.2 - Relação entre as funções FDP e FDPA (Adaptado de HALDAR; MAHADEVAN, 2000). .....	83
Figura 6.3 - Fluxograma básico para uma análise probabilística (Adaptado de HALDAR; MAHADEVAN, 2000). .....	85
Figura 6.4 - Domínios de segurança associados à função performance (Adaptado de PALIGA, 2008). .....	86
Figura 6.5 - Distribuições de probabilidade da resistência, solicitação e margem de segurança considerando distribuição normal de probabilidade (Adaptado de NOWAK; COLLINS, 2000) .....	87
Figura 6.6 - Método da transformada inversa (Adaptado de HALDAR; MAHADEVAN, 2000) .....	92
Figura 6.7 - Relação entre índice de confiabilidade e probabilidade de falha.....	93
Figura 6.8 - Índice de confiabilidade e a transformação para o sistema normal padronizado decorrelacionado (Adaptado de PALIGA, 2008). .....	94
Figura 7.1 - Configuração estrutural da viga estudada. ....	97
Figura 7.2 - Geração aleatórias de parâmetros de entrada e obtenção de resultados pelo Método de Monte Carlo (ANSYS, 2013d). .....	99
Figura 7.3 - Geração de pontos amostrais por Amostragem Direta (a) e Amostragem Latin-Hypercube (b) (Adaptado de ANSYS, 2013b). .....	100
Figura 7.4 - Pontos de amostragem para o método Central Composite Design (ANSYS, 2013b). .....	101
Figura 7.5 - Convergência estatística da resistência da viga V-25-40-r-15.....	108
Figura 7.6 - Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-0,50-15 (400 simulações). .....	109
Figura 7.7 - Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-0,50-20 (400 simulações). .....	109
Figura 7.8 - Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-0,50-25 (400 simulações). .....	110
Figura 7.9 - Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-0,50-15 (1200 simulações). .....	110
Figura 7.10 - Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-0,50-20 (1200 simulações). .....	111
Figura 7.11 - Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-0,50-25 (1200 simulações). .....	111
Figura 7.12 - Valores aproximados (a), coeficientes do polinômio (b) e termos variáveis do polinômio (c) aproximado pelo Método da Superfície de Resposta.....	114

Figura 7.13 - Processo iterativo para determinação do ponto de projeto (Adaptado de HALDAR; MAHEDEVAN, 2000).....	115
Figura 8.1 - $\beta \times f_{ck}$ para um carregamento $p_k = 15\text{kN/m}$ e altura de seção $h = 40\text{cm}$ . ....	119
Figura 8.2 - $\beta \times f_{ck}$ para um carregamento $p_k = 15\text{kN/m}$ e altura de seção $h = 50\text{cm}$ .....	119
Figura 8.3 - $\beta \times f_{ck}$ para um carregamento $p_k = 15\text{kN/m}$ e altura de seção $h = 60\text{cm}$ . ....	119
Figura 8.4 - $\beta \times f_{ck}$ para um carregamento $p_k = 20\text{kN/m}$ e altura de seção $h = 40\text{cm}$ . ....	120
Figura 8.5 - $\beta \times f_{ck}$ para um carregamento $p_k = 20\text{kN/m}$ e altura de seção $h = 50\text{cm}$ . ....	120
Figura 8.6 - $\beta \times f_{ck}$ para um carregamento $p_k = 20\text{kN/m}$ e altura de seção $h = 60\text{cm}$ .....	121
Figura 8.7 - $\beta \times f_{ck}$ para um carregamento $p_k = 25\text{kN/m}$ e altura de seção $h = 40\text{cm}$ . ....	121
Figura 8.8 - $\beta \times f_{ck}$ para um carregamento $p_k = 25\text{kN/m}$ e altura de seção $h = 50\text{cm}$ . ....	122
Figura 8.9 - $\beta \times f_{ck}$ para um carregamento $p_k = 25\text{kN/m}$ e altura de seção $h = 60\text{cm}$ . ....	122
Figura 8.10 - $\beta \times h$ para um carregamento $p_k = 15\text{kN/m}$ e resistência característica à compressão $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	124
Figura 8.11 - $\beta \times h$ para um carregamento $p_k = 15\text{kN/m}$ e resistência característica à compressão $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	124
Figura 8.12 - $\beta \times h$ para um carregamento $p_k = 15\text{kN/m}$ e resistência característica à compressão $f_{ck} = 45\text{MPa}$ .....	124
Figura 8.13 - $\beta \times h$ para um carregamento $p_k = 20\text{kN/m}$ e resistência característica à compressão $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	125
Figura 8.14 - $\beta \times h$ para um carregamento $p_k = 20\text{kN/m}$ e resistência característica à compressão $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	125
Figura 8.15 - $\beta \times h$ para um carregamento $p_k = 20\text{kN/m}$ e resistência característica à compressão $f_{ck} = 45\text{MPa}$ .....	126
Figura 8.16 - $\beta \times h$ para um carregamento $p_k = 25\text{kN/m}$ e resistência característica à compressão $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	126
Figura 8.17 - $\beta \times h$ para um carregamento $p_k = 25\text{kN/m}$ e resistência característica à compressão $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	127
Figura 8.18 - $\beta \times h$ para um carregamento $p_k = 25\text{kN/m}$ e resistência característica à compressão $f_{ck} = 45\text{MPa}$ .....	127
Figura 9.1 - Histograma da resistência da viga V-25-40-0,50-15 obtido pelo polinômio aproximador. ....	129
Figura 9.2 - Influência do modelo tension-stiffening no comportamento não-linear das vigas de Beber (1999). ....	132
Figura 9.3 - Distribuição de deformações do concreto (a) e tensões normais atuantes na seção central (b) para a viga V1. ....	133
Figura 9.4 - Distribuição de deformações do concreto (a) e tensões normais atuantes na seção central (b) para a viga V2. ....	134
Figura 9.5 - Função densidade de probabilidade para solicitação permanente e acidental. ...	137
Figura 10.1 - Ênfase no ajuste da cauda inferior da resistência R.....	140
Figura 10.2 - Cossenos diretores da viga V-25-40-r-15 obtidos pela metodologia 1.....	140
Figura 10.3 - Qualidade de ajuste do polinômio aproximador. ....	141

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Índices de Confiabilidade alvo recomendados pelo código fib 2010.....	34
Tabela 2.2 - Índices de Confiabilidade alvos (ELU) recomendados pela JCSS.....	34
Tabela 2.3 - Índices de Confiabilidade alvos (ELS irreversíveis) recomendados pela JCSS ..	35
Tabela 2.4 - Definição das classes de consequências relacionadas à falha. ....	35
Tabela 2.5 - Valores mínimos de Índice de Confiabilidade (ELU) recomendados pelo Eurocode. ....	36
Tabela 2.6 - Valores alvos de Índice de Confiabilidade para diferentes estados-limites, considerando a classe RC2. ....	36
Tabela 2.7 - Valores alvos de Índice de Confiabilidade recomendados pela ISO-2394. ....	37
Tabela 3.1 - Fatores de redução para combinações de ações. ....	41
Tabela 3.2 - Coeficientes de ponderação para combinações últimas. ....	43
Tabela 3.3 - Valores limites para deslocamentos. ....	45
Tabela 4.1 - Propriedades mecânicas para concretos de resistência normal. ....	58
Tabela 4.2 - Propriedades mecânicas para concretos de alta resistência. ....	58
Tabela 5.1 - Propriedades das vigas ensaiadas por Decanini e Grillo (1970). ....	69
Tabela 5.2 - Relações entre cargas experimentais e numéricas para as vigas de Decanini e Grillo (1970). ....	73
Tabela 5.3 - Carga de ruptura P (kN) em função da malha empregada. ....	78
Tabela 7.1 - Número requerido de simulações no MSR (Adaptado de ANSYS, 2013d). ....	102
Tabela 7.2 - Estatísticas da resistência, em kN/m, em função do número de simulações de Monte Carlo. ....	112
Tabela 7.3 - Valores de $\beta$ em função da distribuição de probabilidade adotada e número de simulações.....	112
Tabela 8.1 - Índices de confiabilidade obtidos para as vigas analisadas. ....	117
Tabela 9.1 - Cossenos diretores para as vigas V-25-40-r-15.....	130
Tabela 9.2 - Influência do modelo tension-stiffening no momento último das vigas analisadas. ....	135

## LISTA DE SIGLAS

- ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas
- ACI – *American Concrete Institute*
- ANSYS – *Analysis Systems Incorporated*
- APDL – *Ansys Parametric Design Language*
- CEB – *Comité Euro-International du Béton*
- ELS – Estados-Limites de Serviço
- ELU – Estados-Limites Últimos
- FDP – Função Densidade de Probabilidade
- FDPA – Função Distribuição de Probabilidade Acumulada
- fib* – *Fédération Internationale du Béton*
- FORM – *First-Order Reliability Method*
- FOSM – *First-Order Second-Moment Method*
- ISO – *International Organization for Standardization*
- JCSS – *Joint Committee on Structural Safety*
- MSR – Método da Superfície de Resposta
- PDS – *Probabilistic Design System*
- PPGEC – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
- PRFC – Polímeros Reforçados com Fibras de Carbono
- VA's – Variáveis Aleatórias

## LISTA DE SÍMBOLOS

### I – LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

$X_i'$  – Variável aleatória  $i$  no espaço normal padronizado

$A_s$  – Área de aço da armadura tracionada

$E_{c1}$  – Módulo de elasticidade secante do concreto

$E_{ci}$  – Módulo de elasticidade inicial do concreto

$E_{cs}$  – Módulo de elasticidade secante do concreto

$E_s$  – Módulo de elasticidade do aço

$E_{si}$  – Módulo de elasticidade do aço da barra considerada

$F_{d,ser}$  – Valor de cálculo das ações para combinação de serviço

$F_{d,ult}$  – Valor de cálculo das ações para combinação última

$F_{gi,k}$  – Valor característico da ação permanente

$F_{gk}$  – Valor característico das ações permanentes diretas

$F_{g\epsilon k}$  – Ações indiretas permanentes

$F_{q1k}$  – Valor característico da ação variável principal direta

$F_{qj,k}$  – Valor característico da ação variável

$F_{q\epsilon k}$  – Ações indiretas variáveis

$F_R(s)$  – Função Distribuição de probabilidade acumulada da resistência

$F_X(x^*)$  – FDPA em  $x^*$  para a distribuição de probabilidade original

$F_X(x)$  – Função distribuição de probabilidade acumulada da variável  $X$

$I_c$  – Momento de inércia da seção bruta de concreto

$I_{II}$  – Momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II

$M_a$  – Momento máximo no vão para a combinação de ações considerada

$M_r$  – Momento de fissuração do elemento estrutural

$M_{sd,min}$  – Momento fletor de cálculo mínimo para cálculo da armadura mínima

$N_f$  – Número de resultados insatisfatórios obtidos via simulação

$V_{d'}$  – Coeficiente de variação da distância da armadura tracionada à borda inferior da seção

$V_{E_c}$  – Coeficiente de variação do módulo de elasticidade do concreto

$V_{f_c}$  – Coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto  
 $V_{f_{ct}}$  – Coeficiente de variação da resistência à tração do concreto  
 $V_{f_y}$  – Coeficiente de variação da tensão de escoamento da armadura  
 $V_g$  – Coeficiente de variação da parcela permanente do carregamento  
 $V_q$  – Coeficiente de variação da parcela acidental do carregamento  
 $W_0$  – Módulo resistente da seção bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada  
 $X_i$  – Variável aleatória  $i$   
 $M$  – Variável correspondente à margem de segurança  
 $N$  – Número total de simulações ou tamanho da amostra  
 $P[x_1 < X \leq x_2]$  – Probabilidade da variável  $X$  estar contida entre  $x_1$  e  $x_2$   
 $R$  – Resistência do modelo  
 $S$  – Solicitação do modelo  
 $\mathbf{G}$  – Vetor gradiente da função performance  $g(\mathbf{X})$   
 $\mathbf{X}$  – Vetor de variáveis aleatórias básicas do sistema

## II – LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

$p_f^T$  – Probabilidade de falha correta do modelo  
 $\mathbf{x}'^*_k$  – Vetor com os pontos de projeto na iteração atual  
 $\mathbf{x}'^*_{k+1}$  – Estimativa do vetor com os pontos de projeto para a próxima iteração  
 $a_0, a_i, a_{ij}$  – Coeficientes ajustados via regressão dos dados  
 $f_c$  – Resistência à compressão do concreto  
 $f_{cd}$  – Resistência de cálculo à compressão do concreto  
 $f_{ck}$  – Resistência característica à compressão do concreto  
 $f_{cm}$  – Resistência média à compressão do concreto  
 $f_{ct,m}$  – Resistência média à tração do concreto  
 $f_{ctk,inf}$  – Limite inferior da resistência característica à tração do concreto  
 $f_{ctk,sup}$  – Limite superior da resistência característica à tração do concreto.  
 $f_R(r)$  – Função Densidade de Probabilidade (FDP) da resistência  
 $f_S(s)$  – Função Densidade de Probabilidade (FDP) da solicitação

$f_X(x^*)$  – FDP em  $x^*$  para a distribuição de probabilidade original  
 $f_X(x)$  – Função densidade de probabilidade da variável  $X$   
 $f_y$  – Tensão de escoamento da armadura  
 $f_{yd}$  – Resistência de cálculo ao escoamento da armadura  
 $p_f$  – Probabilidade de falha do modelo  
 $p_k$  – Carregamento característico total  
 $w_k$  – Valor característico da abertura de fissura  
 $x_i, x_j$  – Variáveis aleatórias no MSR  
 $x_{lim}$  – Profundidade limite da linha neutra  
 $\mathbf{x}'^*$  – Vetor com os pontos de projeto no espaço normal padronizado  
 $b$  – Largura da seção transversal  
 $d$  – Altura útil da seção transversal  
 $g(\mathbf{X})$  – Função performance do sistema  
 $h$  – Altura da seção transversal  
 $k$  – Número plástico  
 $m$  – Variável normal padronizada correspondente à margem de segurança  
 $r$  – Razão de carregamento  
 $s$  – Coordenada local  
 $u, v, w$  – Deslocamentos na direção dos eixos locais  $x, y, e z$ , respectivamente  
 $x$  – Profundidade da linha neutra  
 $y$  – Superfície de resposta

### III – LETRAS GREGAS

$\varepsilon_s'$  – Deformação na armadura colaborante à compressão  
 $\mu_X^E$  – Média de uma função normal equivalente  
 $\sigma_X^2$  – Variância da variável aleatória  $X$   
 $\sigma_{sd}'$  – Tensão na armadura colaborante à compressão  
 $\sigma_X^E$  – Desvio padrão de uma função normal equivalente  
 $\alpha_E$  – Coeficiente considerável em função do tipo de agregado

$\alpha_i$  – Cosseno diretor da variável  $i$

$\beta_1$  – Índice de confiabilidade obtido pela metodologia 1

$\beta_2$  – Índice de confiabilidade obtido pela metodologia 2

$\beta_3$  – Índice de confiabilidade obtido pela metodologia 3

$\gamma_g, \gamma_q, \gamma_{eg}, \gamma_{eq}$  – Coeficiente de ponderação das ações

$\varepsilon_c$  – Deformação do concreto em compressão

$\varepsilon_{c1}$  – Deformação correspondente à máxima tensão em compressão

$\varepsilon_{cu}$  – Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura

$\varepsilon_t$  – Deformação do concreto em tração

$\varepsilon_{yd}$  – Deformação específica de cálculo de escoamento da armadura

$\eta_i$  – Coeficiente de conformação da armadura considerada

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$  – Rotações em torno dos eixos locais  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , respectivamente

$\mu_{d'}$  – Média da distância da armadura tracionada à borda inferior da seção

$\mu_{E_c}$  – Média do módulo de elasticidade do concreto

$\mu_{f_c}$  – Média da resistência à compressão do concreto

$\mu_{f_{ct}}$  – Média da resistência à tração do concreto

$\mu_{f_y}$  – Média da tensão de escoamento da armadura

$\mu_{\theta_R}$  – Média do parâmetro de incerteza do modelo resistente

$\mu_{\theta_S}$  – Média do parâmetro de incerteza do modelo solicitante

$\mu_g$  – Média da parcela permanente do carregamento

$\mu_h$  – Média da altura da seção transversal

$\mu_q$  – Média da parcela acidental do carregamento

$\mu_R, \mu_S, \mu_M$  – Média das variáveis resistência, solicitação e margem de segurança

$\mu_X$  – Média da variável aleatória  $X$

$\xi_{3-4}$  – Posição relativa da linha neutra na transição do domínio 3 para o domínio 4

$\xi_{lim}$  – Valor limite para a posição relativa da linha neutra

$\rho_{ce}$  – Coeficiente de correlação entre a resistência à compressão e o módulo de elasticidade do concreto

$\rho_{ct}$  – Coeficiente de correlação entre a resistência à compressão e a resistência à tração do concreto

$\rho_{ri}$  – Taxa de armadura passiva ou ativa aderente

$\rho_{te}$  – Coeficiente de correlação entre a resistência à tração e o módulo de elasticidade do concreto

$\sigma_{d'}$  – Desvio padrão da distância da armadura tracionada à borda inferior da seção

$\sigma_{E_c}$  – Desvio padrão do módulo de elasticidade do concreto

$\sigma_{f_c}$  – Desvio padrão da resistência à compressão do concreto

$\sigma_{f_{ct}}$  – Desvio padrão da resistência à tração do concreto

$\sigma_{f_y}$  – Desvio padrão da tensão de escoamento da armadura

$\sigma_{\theta_R}$  – Desvio padrão do parâmetro de incerteza do modelo resistente

$\sigma_{\theta_S}$  – Desvio padrão do parâmetro de incerteza do modelo solicitante

$\sigma_c$  – Tensão no concreto em compressão

$\sigma_{cd}$  – Tensão de cálculo atuante no bloco retangular de compressão do concreto;

$\sigma_g$  – Desvio padrão da parcela permanente do carregamento

$\sigma_h$  – Desvio padrão da altura da seção transversal

$\sigma_q$  – Desvio padrão da parcela acidental do carregamento

$\sigma_R, \sigma_S, \sigma_M$  – Desvio padrão das variáveis resistência, solicitação e margem de segurança

$\sigma_{si}$  – Tensão de tração no centro da armadura considerada, calculada no estágio II

$\sigma_t$  – Tensão no concreto em tração

$\phi_i$  – Diâmetro da barra que protege a região de envolvimento considerada

$\psi_{0j}, \psi_{0\epsilon}, \psi_{2j}$  – Fatores de redução na combinação de ações

$\nabla g(\mathbf{x}'_k)$  – Gradiente da função performance avaliada na iteração atual

$\beta$  – Índice de confiabilidade

$\epsilon \%$  – Tolerância percentual do erro na estimativa da probabilidade de falha

$\mu$  – Momento fletor reduzido solicitante

$\xi$  – Profundidade relativa da linha neutra

$\Phi$  – Função distribuição de probabilidade acumulada da variável normal padronizada

$\phi$  – Função densidade de probabilidade da variável normal padronizada

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>25</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	25
1.2 JUSTIFICATIVA .....	29
1.3 METODOLOGIA .....	30
1.4 OBJETIVOS .....	31
1.4.1 Objetivo principal.....	31
1.4.2 Objetivos secundários.....	31
1.5 DELINEAMENTO DO TRABALHO .....	31
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>33</b>
<b>3 PROJETO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO DE ACORDO COM A NBR-6118:2014.....</b>	<b>39</b>
3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	39
3.2 COMBINAÇÃO DAS AÇÕES .....	40
3.2.1 Combinação das ações nos ELS .....	40
3.2.2 Combinação das ações nos ELU .....	42
3.3 ESTADOS-LIMITES DE SERVIÇO.....	43
3.4 ESTADO-LIMITE ÚLTIMO: SOLICITAÇÕES NORMAIS .....	46
3.4.1 Hipóteses básicas.....	47
3.4.2 Condição de ductilidade .....	48
3.4.3 Dimensionamento.....	50
3.4.3.1 Armadura simples.....	51
3.4.3.2 Armadura dupla.....	52
3.4.3.3 Armadura longitudinal mínima .....	54
<b>4 MODELAGEM COMPUTACIONAL .....</b>	<b>55</b>
4.1 MODELO MECÂNICO DOS MATERIAIS .....	55
4.1.1 Concreto .....	55
4.1.1.1 Resistência à compressão .....	55

4.1.1.2 Resistência à tração .....	56
4.1.1.3 Módulo de elasticidade inicial e coeficiente de Poisson .....	56
4.1.1.4 Concreto em compressão .....	57
4.1.1.5 Concreto em tração.....	58
4.1.2 Aço .....	59
4.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E O SOFTWARE ANSYS ....	60
4.3 FERRAMENTA UPF E A USERMAT .....	61
4.4 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS .....	62
4.4.1 <i>Beam189</i> .....	62
4.4.2 <i>Reinf264</i> .....	64
<b>5 VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO .....</b>	<b>66</b>
5.1 TESTES UNIAXIAIS.....	66
5.2 COMPARAÇÕES COM DADOS EXPERIMENTAIS.....	68
5.2.1 Vigas de Decanini e Grillo (1970) .....	68
5.2.2 Vigas de Beber (1999).....	75
<b>6 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....</b>	<b>79</b>
6.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	79
6.2 FUNDAMENTAÇÃO PROBABILÍSTICA .....	80
6.3 FUNÇÃO PERFORMANCE .....	85
6.4 MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO .....	89
6.4.1 Generalidades .....	89
6.4.2 Probabilidade de falha .....	89
6.4.3 Geração de variáveis aleatórias .....	91
6.4.4 Índice de confiabilidade .....	92
6.5 FORM E A INTERPRETAÇÃO DE PRIMEIRA ORDEM.....	93
<b>7 CONFIABILIDADE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO.....</b>	<b>97</b>
7.1 CARACTERIZAÇÃO DAS VIGAS ESTUDADAS.....	97

7.2 ANSYS E A FERRAMENTA <i>PDS</i> .....	98
7.2.1 Método de Monte Carlo .....	99
7.2.2 Método da Superfície de Resposta .....	100
7.3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONSIDERADAS.....	102
7.3.1 Resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ) .....	103
7.3.2 Resistência à tração do concreto ( $f_{ct}$ ) .....	103
7.3.3 Módulo de elasticidade do concreto ( $E_c$ ) .....	104
7.3.4 Tensão de escoamento da armadura ( $f_y$ ) .....	104
7.3.5 Altura da seção transversal ( $h$ ) .....	105
7.3.6 Distância da armadura tracionada à borda inferior da seção ( $d'$ ) .....	105
7.3.7 Parcela permanente do carregamento ( $G$ ) .....	105
7.3.8 Parcela acidental do carregamento ( $Q$ ) .....	106
7.3.9 Parâmetros de incerteza do modelo resistente e solicitante ( $\theta_R$ e $\theta_S$ )..	107
7.4 FUNÇÃO PERFORMANCE ADOTADA .....	107
7.4.1 Metodologia 1 ( $\beta_1$ ) .....	107
7.4.2 Metodologia 2 ( $\beta_2$ ) .....	113
7.4.3 Metodologia 3 ( $\beta_3$ ) .....	113
7.5 ALGORITMO PARA OBTENÇÃO DE $\beta$ .....	114
<b>8 ESTUDO PARAMÉTRICO.....</b>	<b>117</b>
8.1 VARIAÇÃO DE $\beta$ EM FUNÇÃO DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO .....	118
8.1.1 Análise para carregamento total $p_k = 15\text{kN/m}$ .....	118
8.1.2 Análise para carregamento total $p_k = 20\text{kN/m}$ .....	120
8.1.3 Análise para carregamento total $p_k = 25\text{kN/m}$ .....	121
8.1.4 Discussão preliminar dos resultados .....	122
8.2 VARIAÇÃO DE $\beta$ EM FUNÇÃO DA ALTURA DA SEÇÃO TRANSVERSAL.....	123
8.2.1 Análise para carregamento total $p_k = 15\text{kN/m}$ .....	123
8.2.2 Análise para carregamento total $p_k = 20\text{kN/m}$ .....	125
8.2.3 Análise para carregamento total $p_k = 25\text{kN/m}$ .....	126

8.2.4 Discussão preliminar dos resultados .....	127
<b>9 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>129</b>
9.1 SOBRE AS METODOLOGIAS EMPREGADAS .....	129
9.2 SOBRE A INFLUÊNCIA DA ARMADURA TRACIONADA.....	130
9.3 SOBRE A INFLUÊNCIA DO <i>TENSION-STIFFENING</i> .....	131
9.4 SOBRE A INFLUÊNCIA DO CARREGAMENTO ACIDENTAL .....	136
9.5 SOBRE A INFLUÊNCIA DAS VARIÁVEIS DE INCERTEZA .....	137
<b>10 CONCLUSÕES .....</b>	<b>139</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>144</b>
<b>APÊNDICE A – SUBROTINA <i>USERMATBM</i> EM FORTRAN 77 .....</b>	<b>149</b>
<b>APÊNDICE B – DIMENSIONAMENTO CONFORME NBR-6118:2014</b>	<b>160</b>
<b>APÊNDICE C – <i>SCRIPT</i> EM LINGUAGEM APDL.....</b>	<b>167</b>
<b>APÊNDICE D – ALGORITMO FORM EM <i>MATLAB</i> .....</b>	<b>174</b>
<b>APÊNDICE E – ÍNDICES DE CONFIABILIDADE.....</b>	<b>179</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Os projetos de estruturas de concreto vêm, ao longo do tempo, experimentando uma série de avanços que abrangem desde os materiais empregados até os métodos de cálculo praticados por engenheiros e projetistas. No âmbito dos modelos computacionais, tem-se alcançado ao longo das últimas décadas significativos avanços na representação de estruturas de concreto, viabilizando a inclusão dos fenômenos não-lineares nas relações tensão-deformação, além da consideração de deformações diferidas por fluência e retração. Esses avanços estão particularmente relacionados com a introdução do Método dos Elementos Finitos na análise estrutural, permitindo representar numericamente o comportamento real das estruturas com um bom grau de precisão (REAL, 2000).

Em relação às prescrições normativas, a NBR-8681:2003 (ABNT, 2003), a qual apresenta requisitos de segurança e ações sobre estruturas civis, define como estados-limites aqueles a partir dos quais a estrutura apresenta comportamento inadequado às finalidades de construção. Geralmente são diferenciados entre estados-limites últimos (ELU), os quais estão relacionados à ruína, e estados-limites de serviço (ELS), que se referem às condições nas quais se torna impróprio o uso da estrutura, em termos de conforto e durabilidade. Para Araújo (2014), o bom desempenho da estrutura será resultado de uma correta determinação da sua geometria, quantidade e disposição das armaduras.

De acordo com a ISO-2394 (1998) alguns aspectos são importantes no sentido de atingir um desempenho adequado da estrutura em relação aos estados-limites consideráveis, destacando-se:

- a. Avaliação da influência do ambiente no qual a estrutura se insere;
- b. Correta caracterização das ações;
- c. Considerações acerca da durabilidade;
- d. A precisão dos modelos de cálculo empregados;
- e. Controle qualidade com vistas à prevenção de erros de projeto e execução.

Dentre os diversos sistemas construtivos disponíveis na construção civil, o concreto armado figura como um dos principais e mais utilizados, sendo empregado por exemplo, na construção de edifícios (Figura 1.1), rodovias, pontes, usinas hidrelétricas/nucleares, obras de saneamento, entre outros (REVISTA CONCRETO & CONSTRUÇÕES, 2009). Isso se deve, em especial, pelas grandes vantagens apresentadas por esse sistema, dentre as quais pode se citar as técnicas de execução já bem estabelecidas; a boa durabilidade obtida pelas peças, quando bem executadas; a boa resistência ao fogo, quando comparado às peças de madeira e aço; e a sua trabalhabilidade, permitindo que este se adapte a várias formas com facilidade (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2004).



Figura 1.1 - Estrutura de concreto armado utilizada no arranha-céu Burj Khalifa (CONCRETO & CONSTRUÇÕES, 2009).

O bom desempenho mecânico desse sistema se deve ao comportamento conjunto exercido pelos seus dois principais componentes: o concreto e o aço. Ainda que o concreto apresente uma boa resistência à compressão, sua resistência à tração é substancialmente inferior, cerca de 1/10 da resistência à compressão. Esse problema é contornado dispondo-se barras de aço ao longo da peça, as quais, em função da aderência, resistem aos esforços de tração (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2004).

Em se tratando de composição, o chamado concreto simples é formado essencialmente a partir da mistura de agregados, cimento e água, e sua resistência final é influenciada, dentre outros fatores, pela relação água-cimento empregada, os tipos de agregados e o grau de adensamento.

É sabido que as principais propriedades mecânicas do concreto são afetadas por fenômenos de natureza aleatória, os quais podem ser atribuídos à falta de homogeneidade da mistura, ao comportamento da micro-estrutura, à variabilidade dos materiais que o constituem e pelas condições de cura. Essas características refletem em uma dispersão nas resistências à compressão obtidas para conjuntos de corpos de provas moldados a partir de um mesmo lote (FUSCO, 2008). Para a resistência à compressão do concreto, na etapa de projeto, trabalha-se com um valor representativo chamado valor característico. Estatisticamente, este valor apresenta uma baixa probabilidade de ser ultrapassado no sentido desfavorável (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2004). Dessa forma, a partir de uma resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ) especificada em projeto e de uma variabilidade de produção conhecida, pode-se determinar o valor médio a ser atingido pela resistência do concreto, garantindo-se estatisticamente um intervalo de confiança para a sua resistência à compressão. Observa-se, portanto, a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ) é uma variável aleatória. Em função disso, um concreto com menor variabilidade demandará uma resistência média menor, visto ser mais confiável que um concreto de maior variabilidade, situação esta ilustrada na Figura 1.2.

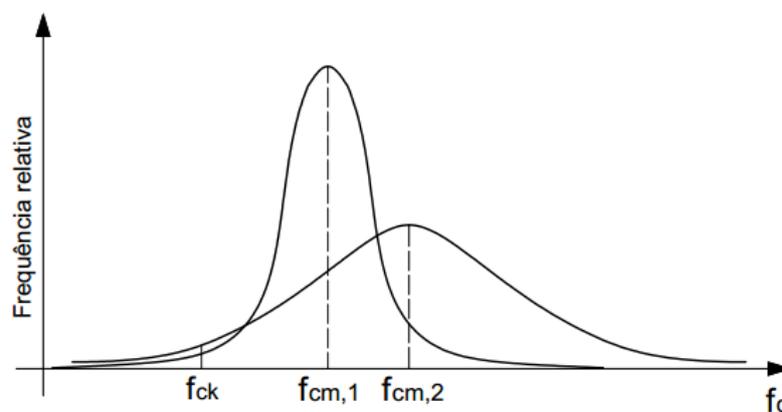


Figura 1.2 - Resistência média do concreto em função de sua variabilidade (Adaptado de REAL, 2000)

Na realidade, assim como no exemplo do concreto, sabe-se que a maioria das grandezas envolvidas na etapa de projeto corresponde a um conjunto de variáveis aleatórias, as quais possuem determinada distribuição de probabilidade, apresentando valores médios e um certo valor de dispersão. Isso resulta em uma estrutura cuja resposta também se revela de forma aleatória (Figura 1.3).

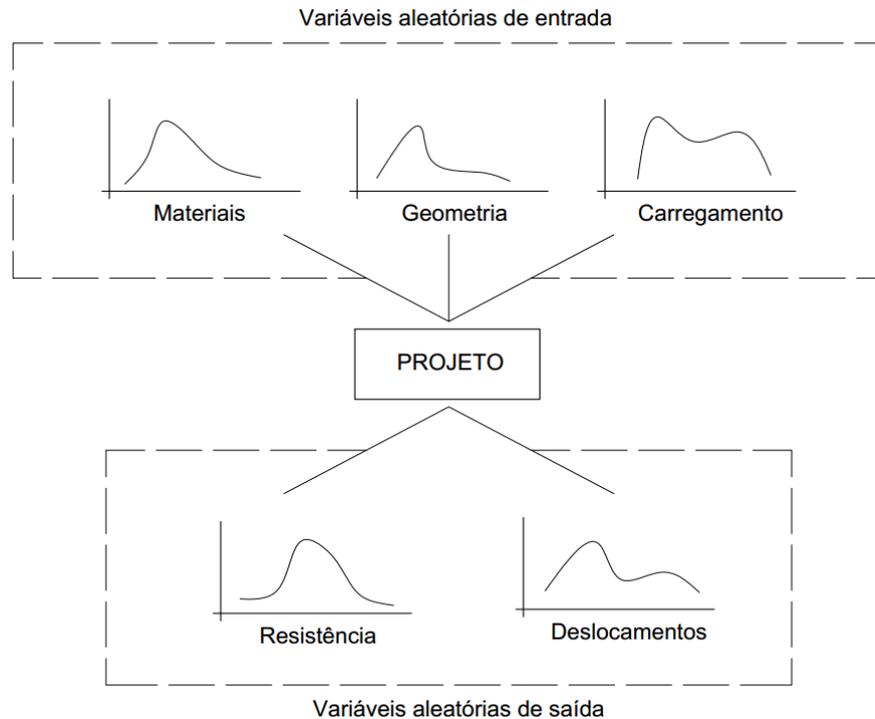


Figura 1.3 - Variáveis aleatórias associadas ao projeto estrutural.

A análise de vigas concreto armado, neste contexto, revela uma série de complexidades, haja vista a própria complexidade no comportamento dos materiais, bem como as diversas incertezas nos parâmetros de projeto. Estas incertezas pairam sobre as propriedades dos materiais utilizados, sobre as cargas máximas atuantes ao longo da vida útil da estrutura e, inclusive, sobre a geometria da peça, podendo esta sofrer desvios durante a construção, impedindo a determinação das dimensões finais com exatidão (REAL, 2000).

Uma forma racional de se considerar dadas incertezas é tratar o problema em um formato probabilístico. O reconhecimento destas incertezas leva a assumir a possibilidade de falha da estrutura em sua vida útil, sendo a falha, nesse contexto, entendida como uma não conformidade em termos de segurança ou serviço (AGRAWAL; BHATTACHARYA, 2010). Uma estrutura, portanto, nunca será completamente segura. O que se visa, em termos de projeto, é a concepção de uma estrutura que concilie segurança e economia. A vantagem do uso de análises probabilísticas e da teoria da confiabilidade é que estas permitem, para um dado custo, conceber uma estrutura mais confiável, ou para uma dada confiabilidade, conceber uma estrutura mais econômica (NOWAK; COLLINS, 2000).

A norma NBR-6118:2014 utiliza-se de um método semi-probabilístico para o projeto de estruturas de concreto armado e protendido, majorando cargas e minorando resistências através

de coeficientes de ponderação parciais. Tais coeficientes de ponderação são aplicados sobre valores característicos de resistências, provenientes de ensaios, e sobre os carregamentos estimados, enquanto a geometria e dimensão das peças são valores nominais especificados em projeto. O atual método foi empregado em substituição ao antigo método determinístico das tensões admissíveis, permitindo a concepção de estruturas mais econômicas e seguras (REAL, 2000).

Para Beck e Souza Jr. (2010), o atual formato semi-probabilístico adotado pela NBR-8681:2003, e que se reflete no campo de aplicação da NBR-6118:2014, é fortemente baseado em normas internacionais as quais já utilizam a teoria da confiabilidade na calibração de seus coeficientes de ponderação. Para os autores, no entanto, os coeficientes empregados nas normas brasileiras carregam ainda adaptações baseadas em critérios subjetivos e na experiência de engenheiros e projetistas. Santos et al (2014), os quais denominam a NBR-8681:2003 como a norma “mãe” em termos de diretrizes de projetos de estruturas civis no Brasil, concluem que, até o momento, pouca informação se tem com relação a quão seguras são as estruturas projetadas utilizando as normas nacionais.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Acredita-se que seja importante para os engenheiros ter ciência do quão seguro são os procedimentos normativos os quais regem diariamente as decisões na elaboração de projetos estruturais. Embora permita estimar de forma aceitável o comportamento da estrutura, a adoção de valores característicos para as propriedades dos materiais e carregamentos, e valores nominais para a geometria, não permite avaliar o efeito da variabilidade destes parâmetros na resposta global da estrutura (REAL, 2000).

A análise probabilística é reconhecida internacionalmente como a maneira mais racional de avaliar a segurança de uma estrutura, e considerando particularmente a NBR-6118:2014, a qual passou por um processo de revisão nos últimos anos, uma abordagem no âmbito da confiabilidade pode consolidar os aspectos de segurança adotados pela norma e até mesmo propiciar sugestões e melhorias para futuras revisões.

### 1.3 METODOLOGIA

A metodologia a ser empregada consiste na aplicação de método de simulação numérica, mais especificamente o método dos elementos finitos utilizando o *software* ANSYS, para a obtenção da capacidade resistente das vigas analisadas, as quais são dimensionadas conforme critérios da norma NBR-6118:2014. O ANSYS, em sua plataforma APDL (*Ansys Parametric Design Language*), especialmente, vem sendo amplamente utilizado no meio acadêmico por permitir grande intervenção por parte dos usuários durante as análises. A representação dos modelos constitutivos dos materiais é feita através de subrotinas em linguagem Fortran 77, conforme implementado inicialmente por Lazzari (2015) e utilizados em trabalhos recentes dentro do PPGEC/UFRGS, tal como Schmitz (2017), Quevedo (2017), Silva (2017) e Barbosa (2017). A validação do modelo numérico empregado é feita lançando-se mão de resultados experimentais, confrontando as cargas de rupturas obtidas por alguns pesquisadores com as cargas de ruptura obtidas pelo modelo numérico.

As estatísticas e distribuições da resistência das vigas analisadas são obtidas por intermédio dos métodos de Monte Carlo e Superfície de Resposta, disponíveis no ANSYS através da ferramenta *Probabilistic Design System* (PDS). Para tal, são consideradas as principais variáveis aleatórias associadas às propriedades dos materiais e geometria, as quais são representadas por distribuições de probabilidade cujo modelo matemático seja conhecido.

O estudo de confiabilidade é realizado através do FORM (*First-Order Reliability Method*), cujos algoritmos são programados em linguagem *Matlab*. A função performance do modelo, que corresponde à margem de segurança em relação ao estado-limite último de flexão, é composta pela resistência, obtida via modelo numérico, e pelas ações que compõe a combinação em cada um dos casos estudados. Os índices de confiabilidade obtidos são comparados a um índice de confiabilidade alvo, avaliando o nível de segurança atingido por vigas dimensionadas de acordo com a norma brasileira NBR-6118:2014. Por fim, um estudo paramétrico apresenta a influência dos principais parâmetros de projeto na variação dos índices de confiabilidade.

## 1.4 OBJETIVOS

### 1.4.1 Objetivo principal

O trabalho proposto tem como objetivo principal a determinação dos índices de confiabilidade obtidos para um conjunto de vigas de concreto armado dimensionadas conforme recomendações e critérios de projeto da NBR-6118:2014: Projeto de Estruturas de Concreto (ABNT, 2014), avaliando parâmetros determinantes na resposta da estrutura e os níveis de segurança obtidos.

### 1.4.2 Objetivos secundários

Espera-se ainda, ao fim deste trabalho, atingir os seguintes objetivos secundários:

- a) Maior entendimento sobre os critérios da NBR-6118:2014 para projeto de estruturas de concreto armado, bem como o desenvolvimento de algoritmos/planilhas de dimensionamento;
- b) Estudo acerca dos modelos mecânicos adotados na representação dos materiais, os quais são considerados no modelo numérico empregado;
- c) Estudo da ferramenta ANSYS e do Método dos Elementos Finitos na análise de estruturas de concreto, particularmente associado à subrotinas externas na representação de modelos constitutivos através da ferramenta UPF (*User Programmable Features*), mais especificamente em relação à subrotina *Usermat*;
- d) Prática na aplicação de teorias de confiabilidade na análise de estruturas e avaliação do nível de segurança atingido pelas normas nacionais.

## 1.5 DELINEAMENTO DO TRABALHO

O presente trabalho está dividido em 10 capítulos, sendo neste **primeiro capítulo** feita uma contextualização do problema a ser estudado, bem como da metodologia a ser utilizada e os objetivos que se esperam alcançar ao final da pesquisa.

O **segundo capítulo** constitui uma revisão bibliográfica acerca da confiabilidade em estruturas de concreto, apresentando inicialmente recomendações de normas nacionais e internacionais no que tange o nível de segurança estrutural, seguido da apresentação de alguns trabalhos já realizados por outros pesquisadores na avaliação de segurança de estruturas de concreto através de métodos probabilísticos. As diretrizes de projeto de vigas de concreto armado de acordo com a NBR-6118:2014 são apresentadas no **terceiro capítulo**, onde se contempla o método semi-probabilístico adotado pela norma brasileira no sentido de garantir o nível de segurança das estruturas.

O **quarto capítulo** destina-se à apresentação dos modelos constitutivos que serão utilizados na representação dos materiais (concreto e aço), bem como a aplicação destes por intermédio do Método dos Elementos Finitos, particularmente associado ao *software* ANSYS através da ferramenta de customização *Usermat*. A validação do modelo empregado é feita no **quinto capítulo**, onde os resultados obtidos via modelo numérico são confrontados com alguns oriundos de ensaios experimentais.

No **sexto capítulo** são abordados os fundamentos da análise probabilística para a avaliação de confiabilidade, em especial a confiabilidade de modelos estruturais em relação ao estado-limite último, por intermédio do qual pode-se avaliar o nível de segurança de estruturas através de sua probabilidade de falha ou através do chamado índice de confiabilidade. O **sétimo capítulo**, por sua vez, apresenta a configuração estrutural das vigas de concreto armado estudadas neste trabalho, bem como as variáveis aleatórias consideradas na avaliação da confiabilidade em relação ao estado-limite último de flexão.

O **oitavo capítulo** destina-se a apresentar os índices de confiabilidade obtidos para o conjunto de 81 vigas estudadas nesta pesquisa. Um estudo paramétrico é apresentado com vistas a verificar a influência da variação de alguns parâmetros de projeto nos índices de confiabilidade alcançados. Já no **nono capítulo** são discutidos os resultados obtidos, bem como avaliadas e comparadas as diferentes metodologias utilizadas neste trabalho.

Por fim, o **décimo capítulo** destina-se a discutir os aspectos considerados relevantes nesta pesquisa, desde as metodologias às limitações dos índices de confiabilidade obtidos, sintetizando os resultados e tecendo as considerações finais.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Paralelamente aos avanços obtidos na representação numérica das estruturas de concreto armado, observa-se que diversas normas de projetos e pesquisadores se ocuparam no estudo das aleatoriedades das estruturas e de que forma estas podem afetar na resposta esperada da mesma, sugerindo uma importância no uso da teoria da confiabilidade para a obtenção dos níveis de segurança.

As normas brasileiras, as quais regem as diretrizes de projetos de estruturas civis, embora utilizem uma abordagem semi-probabilística, pouco falam sobre índices de confiabilidade alvo e calibração dos coeficientes de ponderação parciais através de teorias probabilísticas. O *American Concrete Institute* (ACI, 2011), ainda que existam vários estudos de confiabilidade em torno dos critérios adotados pela norma ACI-318, não cita, de forma explícita, os índices de confiabilidade alvos utilizados na calibração de seus coeficientes de segurança nem sugestões de índices de confiabilidade alvo.

O código modelo *fib* 2010 (CEB, 2012), tido como um guia no que tange estruturas de concreto armado e protendido, sendo referência para outros diversos códigos, apresenta de forma mais clara sua abordagem em segurança através da adoção de índices de confiabilidade alvo esperados para os projetos, em termos de estados-limites últimos e estados-limites de serviço. A escolha do índice de confiabilidade alvo considera possíveis consequências da falha em termos de risco a vida, perdas econômicas e inconveniência social. A norma traz como recomendações os seguintes índices de confiabilidade para estados-limites últimos e de serviço, apresentados na Tabela 2.1. Os valores são aplicáveis para estruturas dúcteis, nas quais a situação de colapso é precedida por algum tipo de alerta em termos de comportamento estrutural.

Tabela 2.1 - Índices de Confiabilidade alvo recomendados pelo código *fib* 2010.

Estado-Limite		Índice $\beta$ alvo	Período de Referência
Serviço	Irreversível	1,5	50 anos
		3,0	1 ano
Último	Baixas consequências	3,1	50 anos
		4,1	1 ano
	Médias consequências	3,8	50 anos
		4,7	1 ano
	Altas consequências	4,3	50 anos
		5,1	1 ano

Fonte: Adaptado da tabela 3.3-5, *fib* 2010 (CEB, 2012)

Os valores dos coeficientes de ponderação adotados pelo código *fib* 2010 são calibrados considerando um período representativo de 50 anos. Para tal, são adotados os valores de  $\beta$  igual à 3,8 e 1,5, para os estados-limites último e estados-limites de serviço, respectivamente.

O *JCSS Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001) busca reunir de forma consistente os principais aspectos sobre os quais é necessário ter conhecimento para o projeto e análise de estruturas sob o ponto de vista probabilístico. A palavra “probabilidade”, no sentido da análise de estruturas, refere-se a uma estimativa (a melhor) em torno de uma série de incertezas associadas ao projeto (JCSS, 2001). Os valores de índices de confiabilidade alvo variam em relação ao estado-limite considerado, bem como em relação às consequências da falha. A Tabela 2.2 traz os valores recomendados de índices de confiabilidade alvo pelo JCSS para os estados-limites últimos, enquanto a Tabela 2.3 apresenta os valores para os estados-limites de serviço. Nos dois casos é considerado um período de referência de um ano.

Tabela 2.2 - Índices de Confiabilidade alvos (ELU) recomendados pela JCSS.

Custo relativo da medida segurança	Consequências da falha		
	Baixas	Moderadas	Altas
Alto	$\beta = 3,1$	$\beta = 3,3$	$\beta = 3,7$
Médio	$\beta = 3,7$	$\beta = 4,2$	$\beta = 4,4$
Baixo	$\beta = 4,2$	$\beta = 4,4$	$\beta = 4,7$

Fonte: Adaptado da tabela 1, JCSS (JCSS, 2001).

Tabela 2.3 - Índices de Confiabilidade alvos (ELS irreversíveis) recomendados pela JCSS

<b>Custo relativo da medida segurança</b>	<b>Índice alvo</b>
Alto	$\beta = 1,3$
Médio	$\beta = 1,7$
Baixo	$\beta = 2,3$

Fonte: Adaptado da tabela 2, JCSS (JCSS, 2001).

O JCSS ainda apresenta as diretrizes para a consideração da variabilidade das ações e resistências, em termos de valores médios e desvio padrão, além de coeficientes de correlação para variáveis correlacionadas.

O Eurocode EN 1990 (EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, 2002) especifica os principais requisitos para segurança, desempenho e durabilidade estrutural, propondo coeficientes parciais que visam garantir um nível aceitável de confiabilidade. A norma europeia adota critérios de confiabilidade para análises do estado-limite último e estado-limite de serviço. A Tabela 2.4 apresenta as classes de consequências consideradas, estando estas associadas às consequências da falha e ao uso da estrutura.

Tabela 2.4 - Definição das classes de consequências relacionadas à falha.

<b>Classe de Consequência</b>	<b>Descrição</b>	<b>Exemplos de estruturas consideráveis</b>
CC3	Altas consequências para perdas de vidas humanas ou grande impacto econômico, social e ambiental.	Arquibancadas, prédios com acesso ao público (Ex: Teatros).
CC2	Médias consequências para perdas de vidas humanas ou considerável impacto econômico, social e ambiental.	Prédios residenciais e comerciais.
CC1	Baixas consequências para perdas de vida humanas ou pequeno impacto econômico, social e ambiental.	Edificações com baixa ocupação humana (Ex: Depósitos).

Fonte: Adaptado da tabela B1, Eurocode EN 1990 (EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, 2002)

Associado a cada classe de consequências, são dispostos diferentes índices de confiabilidade para períodos representativos de um ano e cinquenta anos, conforme apresentado na Tabela 2.5, para os estados-limites últimos. De acordo com a norma, a adoção dos coeficientes de ponderação parciais dispostos pela mesma conduz à valores de índice de confiabilidade superiores a  $\beta = 3,8$ , considerando o período representativo de 50 anos.

Tabela 2.5 - Valores mínimos de Índice de Confiabilidade (ELU) recomendados pelo Eurocode.

Classe de Confiabilidade	Valores mínimos de $\beta$	
	Período de referência	
	1 ano	50 anos
RC3	5,2	4,3
RC2	4,7	3,8
RC1	4,2	3,3

Fonte: Adaptado da tabela B2, Eurocode EN 1990 (EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, 2002)

Alternativamente, o Eurocode ainda apresenta os índices de confiabilidade alvo relativos ao estado-limite último e estado-limite de serviço, considerando a classe de confiabilidade RC2, dispostos na Tabela 2.6

Tabela 2.6 - Valores alvos de Índice de Confiabilidade para diferentes estados-limites, considerando a classe RC2.

Estado-Limite	Valores mínimos de $\beta$	
	Período de referência	
	1 ano	50 anos
Último	4,7	3,8
Serviço	2,9	1,5

Fonte: Adaptado da tabela C2, Eurocode EN 1990 (EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, 2002).

No sentido de complementar requisitos normativos dos diversos países, a *International Organization for Standardization*, através da ISO-2394 (ISO, 1998), apresenta indicações relacionadas à segurança e desempenho de estruturas em geral, tal como edifícios, pontes e estruturas industriais. Além de aspectos relacionados à preservação da vida e às perdas econômicas, o grau de confiabilidade de uma estrutura deverá ser tanto maior quanto sua tendência de falha sem aviso prévio (ISO, 1998). A Tabela 2.7 traz os valores recomendados de índice de confiabilidade alvo aplicáveis ao período de vida útil da estrutura.

Tabela 2.7 - Valores alvos de Índice de Confiabilidade recomendados pela ISO-2394.

Custo relativo da medida segurança	Consequência da falha			
	Muito baixas	Baixas	Moderadas	Altas
Alto	0,0	1,5	2,3	3,1
Moderado	1,3	2,3	3,1	3,8
Baixo	2,3	3,1	3,8	4,3

Fonte: Adaptado da tabela E.2, ISO-2394 (ISO, 1998).

Além das disposições normativas em relação ao nível de confiabilidade estrutural esperado, diversos pesquisadores direcionaram-se ao longo dos últimos anos ao estudo da confiabilidade estrutural, desenvolvendo pesquisas no sentido de determinar de que forma as principais aleatoriedades podem refletir no nível de segurança atingido pelas estruturas, em especial a segurança associada aos procedimentos normativos.

Real (2000) apresentou um estudo probabilístico em vigas e pilares de concreto armado projetados de acordo com a norma NBR-6118:1980, avaliando o nível de segurança atingido em relação aos estados-limites últimos e de serviço. O Método dos Elementos Finitos foi empregado para a análise não-linear da capacidade resistente dos modelos, sendo as análises probabilísticas feitas através do Método de Monte Carlo. Foram realizados estudos paramétricos para avaliar a influência das propriedades geométricas e dos materiais no comportamento das estruturas.

Uma pesquisa sobre técnicas de avaliação de confiabilidade de estruturas de concreto armado foi desenvolvida por Gomes (2001). Nessa pesquisa o autor comparou métodos clássicos de avaliação de confiabilidade, tal como o FORM, o Método de Monte Carlo, o Método da Superfície de Resposta e o Método das Redes Neurais Artificiais. Um enfoque especial foi dado à inclusão dos efeitos da variabilidade espacial das propriedades dos materiais e carregamentos, sendo as análises realizadas por intermédio do Método dos Elementos Finitos.

Um estudo de confiabilidade de vigas recuperadas com PRFC foi realizado por Paliga (2008). Para tal, o autor considerou que as vigas, dimensionadas de acordo com os critérios da NBR-6118:2003, sofreram uma degradação, expressa na forma de redução da área de aço longitudinal. O sistema de reforço para essas vigas foi estabelecido de acordo com o Bulletin 14, da *fib*, e a confiabilidade das vigas reforçadas foi comparada com a confiabilidade das vigas originais degradadas e não-degradadas.

Um estudo sobre a confiabilidade de estruturas dimensionadas de acordo com as normas brasileiras foi realizado por Santos et al (2014). Foram consideradas no estudo vigas de concreto armado, vigas de aço e vigas mistas, dimensionadas conforme prescrições das normas NBR-6118 e NBR-8800. Foram consideradas como variáveis aleatórias as principais propriedades mecânicas dos materiais e a geometria dos modelos, estando o estudo paramétrico voltado para a influência da relação entre os carregamentos permanente e acidental que compõe a ação atuante na estrutura.

Mais recentemente, Minasi (2016) realizou um estudo de confiabilidade em vigas de concreto armado em estruturas portuárias. O estudo considerou os carregamentos pesados esperados em ambientes portuários, além de contemplar uma redução na área de aço longitudinal para representar os efeitos da corrosão em ambiente agressivo. As vigas em questão foram dimensionadas conforme a NBR-6118:2014. Os índices de confiabilidade foram obtidos através do método de primeira ordem FORM, e o estudo paramétrico considerou variações na resistência característica à compressão do concreto, nos carregamentos permanentes e acidentais e na taxa de armadura à flexão.

Em relação à última atualização da norma brasileira de projeto de estruturas de concreto, a NBR-6118:2014, pode-se citar os recentes trabalhos desenvolvidos por Silva (2017) e Barbosa (2017) neste programa de pós-graduação. Ambos trabalhos foram realizados empregado o Método dos Elementos Finitos associado ao ANSYS, por intermédio do qual foram obtidas as principais estatísticas de resistência e solicitação. Silva (2017) voltou-se ao estudo da confiabilidade da ligação laje-pilar internos sob punção. Para tal, foram dimensionadas um conjunto de lajes lisas de acordo com os critérios da NBR-6118:2014, com e sem armadura de cisalhamento. No estudo paramétrico, foi avaliada a influência da variação da resistência do concreto, altura da laje e carregamento atuante.

Um conjunto de análises probabilísticas foi realizada por Barbosa (2017) para a avaliação da confiabilidade de pilares projetados de acordo com a NBR-6118:2014. No estudo em questão, foram considerados pilares submetidos à flexo-compressão simples e composta, sendo avaliados os índices de confiabilidade obtidos através dos dois procedimentos de dimensionamento apresentados pela norma nacional: o método da rigidez aproximada e o método da curvatura aproximada. O estudo paramétrico, além de avaliar a influência da resistência do concreto, voltou-se à influência do índice de esbeltez dos pilares e das excentricidades do carregamento.

## 3 PROJETO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO DE ACORDO COM A NBR-6118:2014

### 3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Dentro do contexto da sociedade, o engenheiro estrutural surge como o profissional capacitado para conceber uma estrutura que atenda tanto os critérios de segurança como a viabilidade econômica. De acordo com Araújo (2014), as estruturas de concreto armado devem atender os seguintes requisitos:

- a) **Segurança:** a estrutura deve suportar as ações impostas durante sua vida útil, dentro de um nível de segurança pré-estabelecido;
- b) **Bom desempenho em serviço:** nas condições previstas de utilização, a estrutura deve apresentar pequenos deslocamentos e baixa abertura de fissuras, garantindo boa aparência e proteção das armaduras;
- c) **Durabilidade:** a estrutura deve se manter em boas condições de conservação sob o ambiente em que está inserida, não sendo necessários reparos de alto custo ao longo de sua vida útil.

Em função da amplitude e complexidade inerente às etapas de concepção e projeto de uma estrutura em concreto armado, as normas surgem como uma das principais ferramentas que norteiam a atuação do engenheiro, estabelecendo os requisitos básicos a serem considerados e reduzindo a aplicação de critérios subjetivos no dimensionamento e verificação estrutural. Como consequência disso, o emprego das normas garante um nível de rastreabilidade nos procedimentos de projeto, aspecto esse imprescindível em todas as áreas da engenharia.

No Brasil, o projeto de estruturas de concreto armado e pretendido tem suas diretrizes estabelecidas na **NBR-6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto: Procedimento**. Esta última revisão surge após 11 anos, substituindo a versão anterior, a NBR-6118:2003. Dentre as principais mudanças em relação às versões anteriores, está a inclusão de concretos com resistência característica superior a 50MPa, refletindo na alteração e atualização de diversos parâmetros de cálculo empregados no projeto de vigas de concreto armado.

De forma sucinta, o projeto de uma estrutura de concreto armado deve satisfazer os Estados-Limites Últimos (ELU) e os Estados-Limites de Serviço (ELS). O primeiro está associado ao colapso estrutural, determinante na paralisação do uso da estrutura. O segundo está relacionado à durabilidade da estrutura, à aparência, ao conforto e à boa utilização funcional da mesma (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2004). As combinações consideráveis, bem como os estados-limites a serem atendidos no projeto de vigas de concreto armado são objetos dos itens seguintes. Muito embora a análise de confiabilidade realizada neste trabalho seja em relação ao estado-limite último de flexão, são apresentados também os critérios de projeto para os estados-limites de serviço, tendo em vista a necessidade de verificação em relação aos mesmos. Dessa forma, garante-se que as vigas analisadas em relação ao ELU atendam os ELS e, portanto, sejam aplicáveis, dentro das prescrições normativas, em estruturas reais.

## 3.2 COMBINAÇÃO DAS AÇÕES

A combinação das ações deve considerar todas as ações de probabilidade não desprezível de atuarem simultaneamente, visando determinar os efeitos mais desfavoráveis para a estrutura, tanto em relação aos estados-limites de serviços quanto aos estados-limites últimos (ABNT, 2014).

### 3.2.1 Combinação das ações nos ELS

No âmbito da análise das peças de concreto armado em serviço, as combinações de ações são classificadas em função do tempo de permanência de uma dada solicitação sobre a estrutura. Ainda que diversas ações atuem durante toda vida útil da estrutura, nem sempre estas ocorrerão simultaneamente, de forma que a NBR-6118:2014 estabelece os fatores de redução apresentados na Tabela 3.1 para a combinação das ações.

Tabela 3.1 - Fatores de redução para combinações de ações.

Ações		$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
Cargas acidentais de edifícios	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas	0,5	0,4	0,3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas	0,7	0,6	0,4
	Bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens.	0,8	0,7	0,6
Vento	Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0,0
Temperatura	Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3

Fonte: Adaptado da tabela 11.2, NBR-6118 (ABNT, 2014).

a) Combinação quase permanentes de serviço

Corresponde à combinação de ações que atuarão durante grande parte da vida útil da estrutura, dada pela expressão (3.1). Todas as ações variáveis são consideradas com seus valores quase permanentes.

$$F_{d,ser} = \sum F_{gi,k} + \sum \psi_{2j} F_{qj,k} \quad (3.1)$$

Sendo:

$F_{d,ser}$  – Valor de cálculo das ações para combinação de serviço;

$F_{gi,k}$  – Valor característico da ação permanente;

$F_{qj,k}$  – Valor característico da ação variável;

$\psi_{2j}$  – Fator de redução na combinação de ações.

b) Combinações frequentes de serviço

Combinação das ações que se repetem diversas vezes durante a vida útil da estrutura, sendo a ação variável principal tomada em seu valor frequente e as demais em seus valores quase permanentes, conforme expressão (3.2).

$$F_{d,ser} = \sum F_{gi,k} + \psi_1 F_{q1k} + \sum \psi_{2j} F_{qj,k} \quad (3.2)$$

Sendo:

$F_{q1k}$  – Valor característico da ação variável principal direta.

c) Combinações raras de serviço

Correspondem às ações que se repetem apenas algumas vezes ao longo da vida útil da estrutura, sendo a variável principal tomada em seu valor característico e as demais em seus valores frequentes, de acordo com (3.3).

$$F_{d,ser} = \sum F_{gi,k} + F_{q1k} + \sum \psi_{1j} F_{qj,k} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Combinação das ações nos ELU

Em relação aos estados-limites últimos, as combinações de ações são classificadas como normais, especiais (ou de construção) e excepcionais, as quais consideram a probabilidade de ocorrência de uma dada ação e o tempo de atuação desta sobre a estrutura. De forma geral, tem-se um particular interesse na combinação normal, que corresponde ao carregamento de uso previsto para a estrutura, admitindo que sua duração corresponda ao período de vida útil da mesma e estando relacionada à capacidade portante do elemento estrutural (ARAÚJO, 2014). O estado-limite último das solicitações normais é composto pelas ações permanentes ditas diretas (peso próprio, alvenaria, revestimentos) e indiretas (efeitos de temperatura, retração, recalques de apoio, protensão), além do carregamento acidental que porventura atue sobre a estrutura. A expressão geral desta combinação é dada por (3.4).

$$F_{d,ult} = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{\varepsilon g} F_{g\varepsilon k} + \gamma_q (F_{q1k} + \sum \psi_{0j} F_{qj,k}) + \gamma_{\varepsilon q} \psi_{0\varepsilon} F_{q\varepsilon k} \quad (3.4)$$

Sendo:

$F_{d,ult}$  – Valor de cálculo das ações para combinação última;

$\gamma_g, \gamma_q, \gamma_{\varepsilon g}, \gamma_{\varepsilon q}$  – Coeficiente de ponderação das ações;

$F_{gk}$  – Valor característico das ações permanentes diretas;

$F_{g\varepsilon k}$  – Ações indiretas permanentes;

$F_{q\varepsilon k}$  – Ações indiretas variáveis;

$\psi_{0j}, \psi_{0\varepsilon}$  – Fatores de redução na combinação de ações.

Os valores a serem adotados para as combinações de ações em relação ao estado-limite último são apresentados na Tabela 3.2, enquanto os fatores de redução podem ser obtidos a partir da Tabela 3.1.

Tabela 3.2 - Coeficientes de ponderação para combinações últimas.

Combinação de ações	Ações							
	Permanentes (g)		Variáveis (q)		Protensão (p)		Recalques de apoio e retração	
	D	F	G	T	D	F	D	F
Normais	1,4	1,0	1,4	1,2	1,2	0,9	1,2	0,0
Especiais ou de construção	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	0,9	1,2	0,0
Excepcionais	1,2	1,0	1,0	0,0	1,2	0,9	0,0	0,0
D: Desfavorável F: Favorável G: Cargas variáveis em geral T: Temperatura								

Fonte: Adaptado da tabela 11.1, NBR-6118 (ABNT, 2014).

### 3.3 ESTADOS-LIMITES DE SERVIÇO

Os estados-limites de serviço estão ligados à capacidade da estrutura de apresentar um bom desempenho em termos de durabilidade, aparência e conforto ao usuário, de acordo com a finalidade para qual foi concebida. De acordo com Araújo (2014), a violação dos estados-limites de serviço prejudica a utilização da estrutura, seja por apresentar deformações excessivas ou um grau de abertura de fissuras que prejudique a durabilidade das armaduras. No projeto de vigas de concreto armado, a NBR-6118:2014 contempla os seguintes estados-limites de serviço:

a) Estado-limite de formação de fissuras (ELS-F)

Estado em que se inicia a abertura de fissuras, sendo atingido quando a tensão de tração máxima na seção transversal se igualar à resistência à tração em flexão. Na avaliação da formação de fissuras, a resistência do concreto à tração em flexão,  $f_{ct,f}$ , apresentada na expressão (3.6), é tomada considerando o limite inferior da resistência característica à tração,  $f_{ctk,inf}$ , conforme (3.5).

$$f_{ctk,inf} = 0,7f_{ct,m} ; f_{ct,m} = 0,3f_{ck}^{2/3} \quad (3.5)$$

$$f_{ct,f} = \alpha f_{ctk,inf} \quad (3.6)$$

Sendo:

$f_{ct,m}$  – Resistência média à tração do concreto;

$f_{ck}$  – Resistência característica à compressão do concreto;

$f_{ctk,inf}$  – Limite inferior da resistência característica à tração do concreto;

$\alpha$  – Fator que correlaciona a resistência à tração na flexão com a resistência a tração direta (1,5 para seções retangulares; 1,3 para seção I ou T invertido; 1,2 para seção T).

b) Estado-limite de abertura de fissuras (ELS-W)

Corresponde às situações em que a abertura das fissuras atinge um valor limite pré-estabelecido. Ainda que seja difícil determinar com exatidão a abertura das fissuras, a norma NBR 6118:2014 sugere expressões que permitem estimar o valor da abertura das fissuras através de (3.7) e (3.8), devendo-se considerar o menor dos valores obtidos entre as duas expressões. O valor limite para a abertura da fissura será função da Classe de Agressividade Ambiental (CAA) na qual a estrutura estará inserida.

$$w_k = \frac{\phi_i \sigma_{si} 3\sigma_{si}}{12,5\eta_i E_{si} f_{ct,m}} \quad (3.7)$$

$$w_k = \frac{\phi_i \sigma_{si}}{12,5\eta_i E_{si}} \left( \frac{4}{\rho_{ri}} + 45 \right) \quad (3.8)$$

Sendo:

$w_k$  – Valor característico da abertura de fissura;

$\sigma_{si}$  – Tensão de tração no centro da armadura considerada, calculada no estágio II;

$\phi_i$  – Diâmetro da barra que protege a região de envolvimento considerada;

$E_{si}$  – Módulo de elasticidade do aço da barra considerada;

$\rho_{ri}$  – Taxa de armadura passiva ou ativa aderente;

$\eta_i$  – Coeficiente de conformação da armadura considerada.

## c) Estado-limite de deformações excessivas (ELS-DEF)

Atinge-se este estado-limite quando os deslocamentos da estrutura superam os valores limites apresentados na Tabela 3.3, tornando-se imprópria a utilização da mesma em relação ao fim para o qual foi concebida.

Tabela 3.3 - Valores limites para deslocamentos.

Tipo de efeito	Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento limite
Aceitabilidade sensorial	Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total	$\ell/250$
	Outro	Vibrações sentidas no piso	Devido a cargas acidentais	$\ell/350$
Efeitos estruturais em serviço	Superfícies que devem drenar água	Coberturas e Varandas	Total	$\ell/250^a$
	Pavimentos que devem permanecer planos	Ginásios e pistas de boliche	Total	$\ell/350 + \text{contraflecha}^b$
			Ocorrido após a construção do piso	$\ell/600$
Elementos que suportam equipamentos sensíveis	Laboratórios	Ocorrido após o nivelamento do equipamento	De acordo com recomendação do fabricante do equipamento	
Efeitos em elementos estruturais	Afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas	Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados, incorporando-os ao modelo estrutural adotado.		
a	As superfícies devem ser suficientemente inclinadas ou o deslocamento previsto compensado por contraflechas, de modo a não se ter acúmulo de água.			
b	Os deslocamentos podem ser parcialmente compensados pela especificação de contraflechas. Entretanto, a atuação isolada da contraflecha não pode ocasionar um desvio do plano maior que $\ell/350$			

Fonte: Adaptado da tabela 11.1, NBR-6118 (ABNT, 2014).

Já sob cargas de serviço, o concreto inicia o processo de fissuração nas seções mais solicitadas, reduzindo de forma significativa a rigidez da estrutura. Neste caso, a obtenção dos deslocamentos imediatos presume a consideração de uma rigidez equivalente considerando o estado de fissuração da peça. De acordo com a NBR-6118:2014, esta rigidez pode ser aproximada pela equação (3.9). Desde que não seja ultrapassado o limite de formação de fissuras, é suficiente considerar  $(EI)_{eq} = E_{cs}I_c$ .

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (3.9)$$

Sendo:

$I_c$  – Momento de inércia da seção bruta de concreto;

$I_{II}$  – Momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II;

$M_a$  – Momento máximo no vão para a combinação de ações considerada;

$M_r$  – Momento de fissuração do elemento estrutural;

$E_{cs}$  – Módulo de elasticidade secante do concreto.

Por conta do comportamento reológico do concreto, deve-se prever uma parcela adicional decorrente dos efeitos diferidos devidos à fluência e retração. Essa parcela adicional é obtida pela multiplicação da flecha imediata por um fator  $\alpha_f$ , dado por (3.10).

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50\rho'} \quad (3.10)$$

Sendo  $\rho'$  a taxa de armadura colaborante à compressão. O fator  $\Delta\xi$  depende do intervalo de tempo compreendido entre a data na qual mede-se a flecha final e a data correspondente ao carregamento da estrutura. Neste trabalho considera-se um valor de  $\Delta\xi = 1,32$ . A flecha final  $\delta_f$  é obtida pela expressão (3.11), devendo-se respeitar, para o caso de vigas biapoiadas, o valor limite de  $\delta_{lim} = L/250$ .

$$\delta_{\infty} = \delta_0(1 + \alpha_f) \quad (3.11)$$

Sendo:

$\delta_{\infty}$  – Flecha final da estrutura;

$\delta_0$  – Flecha imediata considerando rigidez equivalente  $(EI)_{eq}$ ;

### 3.4 ESTADO-LIMITE ÚLTIMO: SOLICITAÇÕES NORMAIS

Conforme a NBR-6118:2014, a verificação da segurança em estruturas de concreto em relação ao esgotamento de sua capacidade portante é feita em relação as solicitações normais e tangenciais. Uma vez que o estudo de confiabilidade proposto neste trabalho é feito em relação ao estado-limite último de flexão simples, apresentam-se aqui apenas as prescrições normativas em relação ao estado-limite último de solicitações normais.

### 3.4.1 Hipóteses básicas

Na análise de esforços resistentes de vigas submetidas a solicitações normais, de acordo com o item 17.2.2 da NBR-6118:2014, adotam-se as seguintes hipóteses básicas.

- a) As seções se mantêm planas após a deformação;
- b) A deformação das barras passivas aderentes ou o acréscimo de deformação das barras ativas aderentes é a mesma do concreto em seu entorno;
- c) Despreza-se totalmente a resistência do concreto à tração;
- d) O diagrama parábola retângulo do concreto em compressão, dado no item 8.2.10.1 da NBR-6118:2014, pode ser substituído por um bloco retangular de tensões até uma profundidade  $y = \lambda x$ , onde  $x$  corresponde à altura da linha neutra. Neste caso, a tensão constante será  $\alpha_c f_{cd}$  para os casos em que a largura da seção não diminua em direção à borda comprimida, ou  $0,90\alpha_c f_{cd}$  caso contrário;
- e) A tensão nas armaduras é obtida através dos modelos constitutivos apresentados pela NBR-6118:2014, sendo adotado um modelo elastoplástico perfeito para as armaduras passivas.

É admitido, de acordo com a NBR-6118:2014, que os valores de  $\lambda$  e  $\alpha_c$  sejam função da classe de concreto empregado. O parâmetro  $\lambda$ , que delimita a região da linha neutra na consideração do diagrama retangular simplificado é obtido pelas expressões (3.12) e (3.13).

$$\lambda = 0,8; \quad f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (3.12)$$

$$\lambda = 0,8 - \left( \frac{f_{ck} - 50}{400} \right); \quad f_{ck} > 50 \text{ MPa} \quad (3.13)$$

O parâmetro  $\alpha_c$ , por sua vez, é obtido por intermédio das expressões (3.14) e (3.15).

$$\alpha_c = 0,85 \quad f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (3.14)$$

$$\alpha_c = 0,85[1,0 - (f_{ck} - 50)/200] \quad f_{ck} > 50 \text{ MPa} \quad (3.15)$$

### 3.4.2 Condição de ductilidade

Considera-se, genericamente, a seção transversal retangular apresentada na Figura 3.1, onde são apresentadas as principais propriedades geométricas e disposição de armaduras.

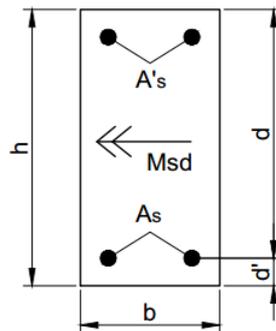


Figura 3.1 - Seção retangular genérica (Adaptado de ARAÚJO, 2014).

O equilíbrio da seção transversal ao momento de cálculo  $M_{Sd}$  é garantido pelo binário formado pelas forças resultantes de compressão no concreto e tração no aço. Dessa forma, a ruína de uma seção transversal sob flexão normal simples fica caracterizada pelo esmagamento do concreto comprimido ou pela deformação excessiva da armadura tracionada, enquadrando-se nos domínios apresentados na Figura 3.2.

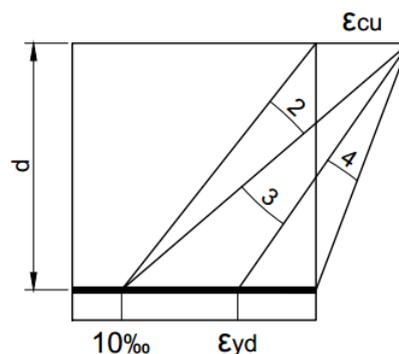


Figura 3.2 - Domínio possíveis para ruptura em flexão simples (Adaptado de ARAÚJO, 2014).

O domínio 2 caracteriza a chamada ruptura convencional, na qual há uma deformação excessiva da armadura tracionada, estando o concreto abaixo de seu patamar de esmagamento. Esse comportamento é esperado nas vigas chamadas **subarmadas**. No domínio 3, o escoamento da armadura tracionada é acompanhado do esmagamento do concreto, sendo tais peças

denominadas **normalmente armadas**. A ruptura no domínio 4, por sua vez, ocorre exclusivamente pelo esmagamento do concreto em peças **superarmadas**, estando a armadura tracionada abaixo de seu patamar de escoamento. Além de resultar em uma armadura antieconômica, uma vez que não se aproveita toda a capacidade resistente do aço, o dimensionamento considerando a ruptura no domínio 4 conduz a uma estrutura cuja ruptura se manifesta de forma frágil, sem aviso prévio (ARAÚJO, 2014).

No sentido de garantir um comportamento dúctil às vigas, a NBR-6118:2014 fixa os valores limites para a posição da linha neutra de forma que a ruína desses elementos se estabeleça nos domínios 2 ou 3. Os valores limites para a posição relativa da linha neutra  $\xi_{lim}$  são apresentados no item 14.6.4.3 da NBR-6118:2014, de acordo com a classe do concreto empregado, conforme (3.16) e (3.17).

$$\xi_{lim} \leq 0,45; \quad f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (3.16)$$

$$\xi_{lim} \leq 0,35; \quad 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \quad (3.17)$$

Sendo:

$\xi_{lim}$  – Valor limite para a posição relativa da linha neutra,  $\xi_{lim} = x_{lim}/d$ ;

$x_{lim}$  – Profundidade limite da linha neutra;

$d$  – Altura útil da seção transversal.

Observa-se que os valores limites apresentados resultam significativamente inferiores à posição relativa da linha neutra na transição do domínio 3 para o domínio 4, expressa por (3.18) e obtida a partir das propriedades mecânicas do concreto, apresentadas no item 8.2 da NBR-6118:2014.

$$\xi_{3-4} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{yd}} \quad (3.18)$$

Sendo:

$\xi_{3-4}$  – Posição relativa da linha neutra na transição do domínio 3 para o domínio 4;

$\epsilon_{cu}$  – Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura;

$\epsilon_{yd}$  – Deformação específica de cálculo de escoamento da armadura.

Para os aços CA-50 e concretos do grupo I, por exemplo,  $\xi_{3-4}$  é aproximadamente 0,63. Com isso, os valores limites fixados pela NBR-6118:2014 delimitam a utilização de apenas uma parcela do domínio 3, conforme ilustrado na Figura 3.3.

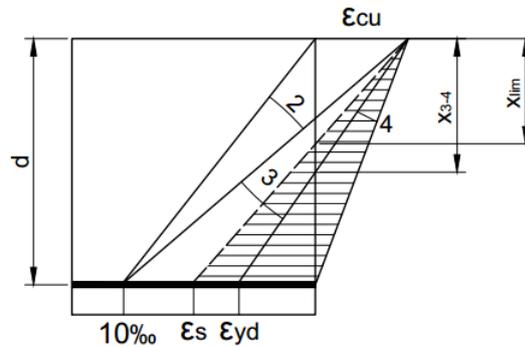


Figura 3.3 - Limitação da região útil no domínio 3, conforme NBR-6118:2014 (Adaptado de ARAÚJO, 2014).

Essa condição resulta em deformações na armadura que ultrapassam significativamente a deformação correspondente ao início do escoamento, garantindo que a ruptura seja precedida de um nível intenso de fissuração, viabilizando a adoção de medidas de segurança, se necessário.

### 3.4.3 Dimensionamento

A etapa de dimensionamento de vigas de concreto armado consiste, para uma dada geometria e condição de carregamento previstas em uma etapa de projeto, determinar a quantidade e disposição de armadura para atender a condição de segurança  $M_{Rd} \geq M_{Sd}$ , sendo  $M_{Rd}$  e  $M_{Sd}$  os valores de cálculo do momento resistente e solicitante, respectivamente.

O comportamento de uma seção transversal de concreto sob flexão é caracterizado pelos três estádios de deformação: Os estádios I e II correspondem a cargas baixas, em regime de serviço, enquanto o estágio III corresponde ao regime de ruptura, onde o concreto em compressão atinge deformações próximas a  $\epsilon_{cu}$  e as tensões de tração abaixo da linha neutra sejam superiores a resistência à tração (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2004). Para limitar as imposições da posição da linha neutra, apresentadas no item 3.4.1, o dimensionamento conduzirá a um arranjo de armadura simples ou dupla.

### 3.4.3.1 Armadura simples

Assumindo as hipóteses apresentadas em 3.4.1, a distribuição de esforços em uma seção transversal de concreto com armadura simples, sob flexão e no regime de ruptura pode ser representada através da Figura 3.4

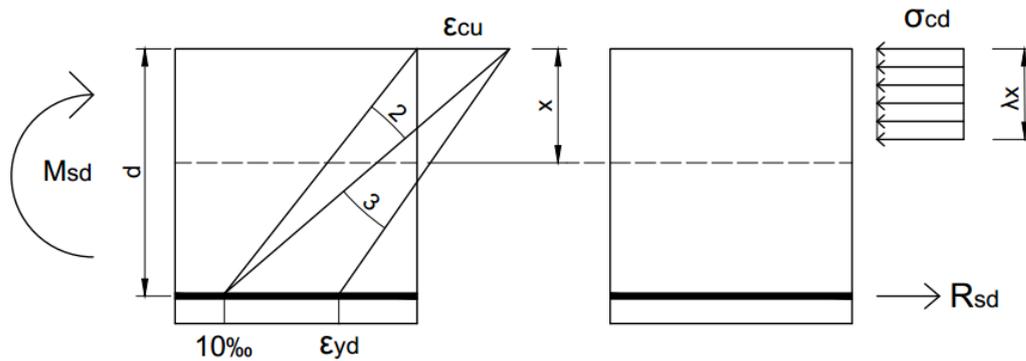


Figura 3.4 - Distribuição de deformações e tensões em uma seção com armadura simples (Adaptado de ARAÚJO, 2014).

Na situação apresentada pela figura acima, a condição de equilíbrio é dada por  $\sum F = 0$  e  $\sum M = M_{sd}$ . Expandindo as expressões de equilíbrio da seção em termos das forças resultantes no concreto e aço, obtém-se as expressões (3.19) e (3.20).

$$\lambda b x \sigma_{cd} - A_s f_{yd} = 0; \sigma_{cd} = \alpha_c f_{cd} \quad (3.19)$$

$$M_{sd} - \lambda b x \left( d - \frac{\lambda}{2} x \right) \sigma_{cd} = 0 \quad (3.20)$$

Sendo:

$b$  – Largura da seção transversal;

$x$  – Profundidade da linha neutra;

$\sigma_{cd}$  – Tensão de cálculo atuante no bloco retangular de compressão do concreto;

$A_s$  – Área de aço tracionada;

$f_{yd}$  – Resistência de cálculo ao escoamento da armadura;

$f_{cd}$  – Resistência de cálculo à compressão do concreto.

Resolvendo a expressão quadrática (3.20) para  $x$ , a solução contida dentro da seção transversal é dada por (3.21). Por conveniência, trabalhe-se com as variáveis adimensionais dada em (3.22).

$$x = \frac{d}{\lambda} \left( 1 - \sqrt{1 - 2 \frac{M_{sd}}{bd^2 \sigma_{cd}}} \right) \quad (3.21)$$

$$\xi = \frac{1}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - 2\mu}); \quad \mu = \frac{M_{sd}}{bd^2 \sigma_{cd}} \quad (3.22)$$

Sendo:

$\xi$  – Profundidade relativa da linha neutra;

$\mu$  – Momento fletor reduzido solicitante.

A condição de ductilidade prescrita pela NBR-6118:2018 é verificada se o valor calculado  $\xi$  resultar inferior ao valor limite  $\xi_{lim}$ . Nessa situação, garante-se a ruptura no domínio 2 ou 3, sendo a área de aço tracionada obtida por intermédio da expressão (3.23).

$$A_s = \lambda \xi b d \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}} \quad (3.23)$$

### 3.4.3.2 Armadura dupla

Nas situações em que a combinação das solicitações, propriedades mecânicas e geometria não permitirem garantir a condição  $\xi \leq \xi_{lim}$ , emprega-se uma armadura colaborante à compressão no sentido de assegurar que a ruptura ocorra de forma dúctil. Dessa forma, o equilíbrio da seção se dá de acordo com a distribuição de esforços apresentados na Figura 3.5.

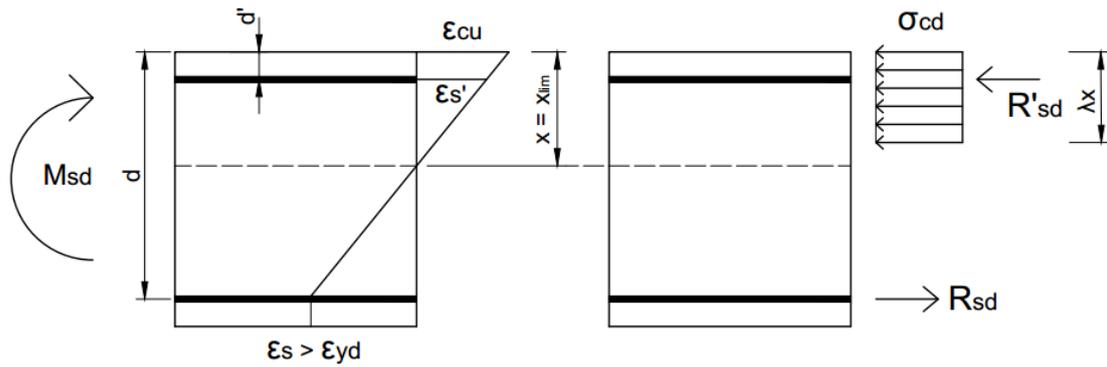


Figura 3.5 - Distribuição de deformações e tensões em uma seção com armadura dupla (Adaptado de ARAÚJO, 2014).

Observa-se que uma variável adicional  $A_s'$  é adicionada ao problema, tornando-o indeterminado em função das incógnitas  $A_s$ ,  $A_s'$  e  $\xi$  (Duas equações de equilíbrio e três incógnitas). Uma alternativa é fixar  $\xi = \xi_{lim}$ , obtendo-se as áreas de aço tracionada e comprimida por equilíbrio, conforme a distribuição de tensões da Figura 3.5. A deformação e tensão na armadura colaborante à compressão,  $\varepsilon_s'$ , é dada pela expressão (3.24), enquanto a tensão na armadura colaborante à compressão,  $\sigma_{sd}'$ , dada pelas expressões (3.25) e (3.26).

$$\varepsilon_s' = \varepsilon_{cu} \left( \frac{\xi_{lim} - d/d'}{\xi_{lim}} \right) \quad (3.24)$$

$$\sigma_{sd}' = E_s \varepsilon_s' \quad \sigma_{sd}' < f_{yd} \quad (3.25)$$

$$\sigma_{sd}' = f_{yd} \quad \sigma_{sd}' \geq f_{yd} \quad (3.26)$$

Sendo  $E_s$  o módulo de elasticidade da armadura comprimida. Nessa condição, por equilíbrio da seção transversal, as áreas de aço tracionada e comprimida,  $A_s$  e  $A_s'$ , são obtidas pelas expressões (3.27) e (3.28), respectivamente.

$$A_s = \left( \lambda \xi_{lim} + \frac{\mu - \mu_{lim}}{1 - d/d'} \right) b d \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}} \quad (3.27)$$

$$A_s' = \left( \frac{\mu - \mu_{lim}}{1 - d/d'} \right) b d \frac{\sigma_{cd}}{\sigma_{sd}'} \quad (3.28)$$

### 3.4.3.3 Armadura longitudinal mínima

A armadura longitudinal tracionada, obtida através do dimensionamento ao estado-limite último das solicitações normais, deve respeitar a taxa mínima necessária para a absorção do momento de fissuração da peça, evitando que a mesma apresente uma ruptura brusca na passagem do estágio I para o estágio II (ARAÚJO, 2014). A armadura mínima tracionada, conforme item 17.3.5.2.1 da NBR-6118:2014, é obtida através do dimensionamento para o momento fletor de cálculo mínimo, dado por (3.29), devendo ainda ser respeitada a taxa geométrica mínima de 0,15%.

$$M_{sd,min} = 0,8W_0f_{ctk,sup} \quad (3.29)$$

Sendo:

$M_{sd,min}$  – Momento fletor de cálculo mínimo para cálculo da armadura mínima;

$W_0$  – Módulo resistente da seção bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada;

$f_{ctk,sup}$  – Limite superior da resistência característica à tração do concreto.

## 4 MODELAGEM COMPUTACIONAL

### 4.1 MODELO MECÂNICO DOS MATERIAIS

A adequada análise de um modelo estrutural presume o conhecimento da relação entre as tensões e deformações associados aos materiais que o compõe, sendo esta relação normalmente denominada “modelo mecânico” ou “modelo constitutivo”. Neste item são abordados os modelos mecânicos empregados na representação numérica do concreto e do aço.

#### 4.1.1 Concreto

Em função de sua composição, o comportamento do concreto tende a ser complexo, apresentando também respostas completamente distintas quando tracionado ou comprimido (CERVERA et al, 1988). Foram empregadas neste trabalho as relações constitutivas, propriedades mecânicas e prescrições apresentadas no código modelo *fib* 2010 (CEB, 2012), sendo aplicáveis para concretos com resistência característica à compressão de até 120 MPa. Foram igualmente utilizados critérios e adaptações oriundos de demais pesquisas e da literatura técnica sobre o tema.

##### 4.1.1.1 Resistência à compressão

A resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ) do concreto é tomada como a resistência obtida aos 28 dias e corresponde ao valor cuja probabilidade de ser ultrapassado no sentido desfavorável é de 5%. Este valor é obtido por intermédio de ensaios experimentais em corpos de prova cilíndricos e usualmente empregado na fase de projeto, sendo utilizado na determinação de diversos parâmetros relacionados ao comportamento mecânico do concreto.

Para as análises numéricas, tem-se um geral interesse na resistência média à compressão do concreto, sendo esta obtida a partir da resistência característica através da expressão (4.1).

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f \quad (4.1)$$

Sendo:

$f_{cm}$  – Resistência média à compressão do concreto, em MPa;

$f_{ck}$  – Resistência característica à compressão do concreto, em MPa;  
 $\Delta f$  – 8 MPa.

#### 4.1.1.2 Resistência à tração

De acordo com o código modelo *fib* 2010 (CEB, 2012), não se dispondo de resultados experimentais que permitam definir a resistência à tração do concreto, pode-se lançar mão das expressões (4.2) e (4.3) para a obtenção desta a partir da resistência característica à compressão do concreto. A expressão (4.2) é aplicável para concretos com  $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$ , enquanto a expressão (4.3) aplica-se para concretos de  $f_{ck} > 50\text{MPa}$ .

$$f_{ct,m} = 0,30f_{ck}^{2/3} \quad (4.2)$$

$$f_{ct,m} = 2,12\ln[1,0 + 0,1(f_{ck} + \Delta f)] \quad (4.3)$$

Sendo:

$f_{ct,m}$  – Resistência média à tração do concreto, em MPa;

#### 4.1.1.3 Módulo de elasticidade inicial e coeficiente de Poisson

O módulo de elasticidade inicial é tomado como o módulo tangente à origem no diagrama tensão-deformação do concreto para uma idade de 28 dias, sendo este obtido através da expressão (4.4).

$$E_{ci} = E_{c0}\alpha_E \left( \frac{f_{ck} + \Delta f}{10} \right)^{1/3} \quad (4.4)$$

Sendo:

$E_{ci}$  – Módulo de elasticidade inicial do concreto, em MPa.

$E_{c0}$  – 21500 MPa;

$\alpha_E$  – Coeficiente considerável em função do tipo de agregado, de acordo com *fib* 2010 (CEB, 2012).

Em relação ao coeficiente de Poisson do concreto ( $\nu_c$ ), este pode variar entre 0,14 e 0,26, podendo ser tomado com o valor de 0,20 com suficiente precisão na representação do comportamento mecânico do concreto (CEB, 2012).

#### 4.1.1.4 Concreto em compressão

O modelo constitutivo adotado para representação do concreto sob a ação de cargas de curta duração, em compressão, é o modelo elastoplástico apresentado no código *fib* 2010 (CEB, 2012), no qual a curva tensão-deformação uniaxial do material é representada pela Figura 4.1.

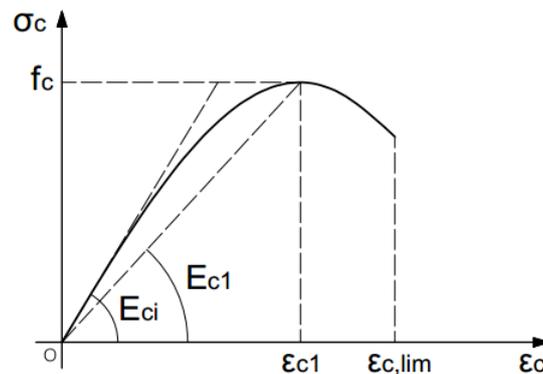


Figura 4.1 - Diagrama tensão-deformação do concreto em compressão uniaxial (Adaptado de CEB, 2012)

O pico em tensão corresponde à resistência à compressão  $f_c$  (resistência média, em geral, ou resistência obtida via simulação, como no caso deste trabalho), precedido por um trecho pós-pico com amolecimento, ocorrendo a ruptura ao se atingir a deformação limite em compressão. As expressões (4.5) à (4.7) caracterizam a curva tensão-deformação apresentada na Figura 4.1.

$$\sigma_c = -f_c \left( \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right) \quad |\epsilon_c| < |\epsilon_{c,lim}| \quad (4.5)$$

$$\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \quad (4.6)$$

$$k = \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \quad (4.7)$$

Sendo:

$\sigma_c$  – Tensão no concreto em compressão;

$f_c$  – Resistência à compressão do concreto;

$\epsilon_c$  – Deformação do concreto em compressão;

$\epsilon_{c1}$  – Deformação correspondente à máxima tensão em compressão;

$\epsilon_{c,lim}$  – Deformação limite do concreto em compressão;

$E_{c1}$  – Módulo de elasticidade secante do concreto;

k – Número plástico.

As principais propriedades mecânicas do concreto a serem consideradas estão dispostas nas Tabela 4.1 e Tabela 4.2 para concretos de resistência normal ( $f_{ck} \leq 50$ ) e alta resistência ( $f_{ck} > 50$ ), respectivamente. Os dados são apresentados em função da classe do concreto, definida pela resistência característica à compressão.

Tabela 4.1 - Propriedades mecânicas para concretos de resistência normal.

Classe do Concreto	C12	C16	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50
$E_{ci}$ [GPa]	27,1	28,8	30,3	32,0	33,6	35,0	36,3	37,5	38,6
$E_{c1}$ [GPa]	11,1	12,2	13,3	14,9	16,5	18,2	20,0	21,6	23,2
$\varepsilon_{c1}$ [‰]	-1,9	-2,0	-2,1	-2,2	-2,3	-2,3	-2,4	-2,5	-2,6
$\varepsilon_{c,lim}$ [‰]	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,4
k	2,44	2,36	2,28	2,15	2,04	1,92	1,82	1,74	1,66

Fonte: Adaptado da tabela 5.1-8, *fib* 2010 (CEB, 2012).

Tabela 4.2 - Propriedades mecânicas para concretos de alta resistência.

Classe do Concreto	C55	C60	C70	C80	C90	C100	C110	C120
$E_{ci}$ [GPa]	39,7	40,7	42,6	44,4	46,0	47,5	48,9	50,3
$E_{c1}$ [GPa]	24,7	26,2	28,9	31,4	33,8	36,0	39,3	42,7
$\varepsilon_{c1}$ [‰]	-2,6	-2,7	-2,7	-2,8	-2,9	-3,0	-3,0	-3,0
$\varepsilon_{c,lim}$ [‰]	-3,4	-3,3	-3,2	-3,1	-3,0	-3,0	-3,0	-3,0
k	1,61	1,55	1,47	1,41	1,36	1,32	1,24	1,18

Fonte: Adaptado da tabela 5.1-8, *fib* 2010 (CEB, 2012).

#### 4.1.1.5 Concreto em tração

O concreto, uma vez que possui resistência à tração muito inferior à sua resistência à compressão, apresenta formação de fissuras mesmo à um nível baixo de tensões. De acordo com Cervera et al (1988), a representação do concreto sob tração compreende a introdução de um critério de fissuração e uma lei de amolecimento. Neste trabalho, o concreto não fissurado, cujas tensões não ultrapassem a resistência à tração  $f_{ct}$ , é representado por um modelo elástico-linear (MARTINELLI, 2003), sendo a relação constitutiva dada por (4.8).

$$\sigma_t = E_{ci}\varepsilon_t \quad \sigma_t \leq f_{ct} \quad (4.8)$$

Sendo:

$\sigma_t$  – Tensão no concreto em tração;

$\varepsilon_t$  – Deformação do concreto em tração.

Após fissurado, o concreto entre fissuras, em função dos mecanismos de aderência às barras de armadura, continua a colaborar na resistência até um dado nível de deformação. Esse comportamento, denominado *tension-stiffening* (enrijecimento à tração), é modelado através de um ramo descendente no diagrama tensão-deformação, o qual representa uma redução gradual da resistência em função do nível de abertura das fissuras, conforme ilustrado na Figura 4.2. Esse modelo de representação é conhecido como modelo de fissuras distribuídas e tem por vantagem permitir a adoção de um modelo de armadura incorporada, no qual se admite uma completa aderência entre as barras de armadura e o concreto (CERVERA et al, 1988).

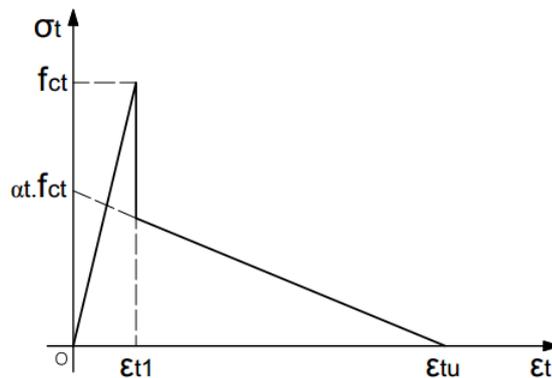


Figura 4.2 - Diagrama tensão-deformação do concreto em tração uniaxial (Adaptado de MARTINELLI, 2003).

Adotou-se neste trabalho a expressão utilizada por Martinelli (2003) para a representação do diagrama tensão-deformação do concreto fissurado, dada por (4.9), sendo utilizados os valores de  $\alpha_t$  e  $\varepsilon_{tu}$  igual a 0,6 e 0,001, respectivamente.

$$\sigma_t = \alpha_t f_{ct} \left( 1,0 - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_{tu}} \right) \quad (4.9)$$

#### 4.1.2 Aço

Para representação mecânica do aço das armaduras é empregado um modelo elastoplástico perfeito, conforme apresentado na Figura 4.3. O material possui o mesmo comportamento sob

tração e compressão, apresentando um módulo de elasticidade  $E_s$  até atingir a tensão de escoamento  $f_y$ , a partir da qual apresenta um módulo tangente nulo. A ruptura é caracterizada por deformação excessiva, no valor de 10‰ (ARAÚJO, 2014).

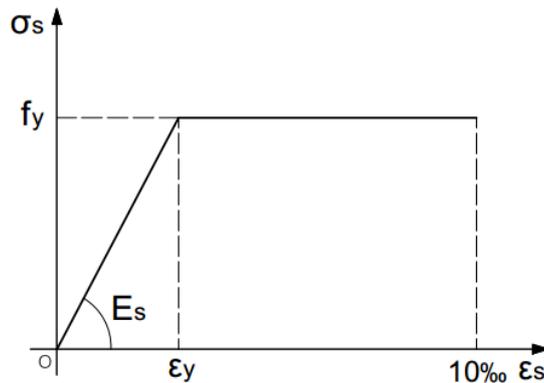


Figura 4.3 - Diagrama tensão-deformação para o aço das armaduras.

## 4.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E O SOFTWARE ANSYS

Dentre os softwares comerciais de elementos finitos disponíveis no mercado, o ANSYS vem sendo amplamente utilizado no meio acadêmico e de pesquisa, dado seu vasto número de recursos, boa documentação, disponibilidade de licença estudantil e, em especial, pela forma em que o usuário pode intervir durante as análises, tendo um maior controle sobre os resultados obtidos nas simulações numéricas. O programa dispõe de duas plataformas principais, sendo estas a plataforma *Workbench* e a plataforma APDL (*ANSYS Parametric Design Language*). A primeira é caracterizada por apresentar uma interface mais amigável e de uso intuitivo, enquanto a segunda permite que se utilizem modelos paramétricos durante a modelagem através de *scripts* desenvolvidos em linguagem APDL (semelhante à linguagem Fortran), permitindo, dessa forma, um facilitado controle da entrada de dados, geração da malha e análise dos dados, desde o pré ao pós-processamento.

No presente trabalho é utilizada a plataforma APDL associada à ferramenta UPF (*User Programmable Features*), através da qual pode-se lançar mão de subrotinas externas na representação dos modelos mecânicos dos materiais apresentados no item 4.1.

### 4.3 FERRAMENTA UPF E A USERMAT

A ferramenta UPF corresponde a um conjunto de recursos nos quais o usuário pode intervir na análise numérica através de subrotinas externas que são integradas ao programa principal durante o processo de solução dos problemas em elementos finitos. Estas ferramentas permitem, dentre outras possibilidades, a criação de um novo elemento ou a adaptação/implementação de um novo modelo constitutivo para os materiais empregados nas análises.

Neste trabalho, em especial, utiliza-se a subrotina *Usermat* para a implementação dos modelos constitutivos apresentados no capítulo 4 na representação do comportamento mecânico do concreto. A subrotina programada pelo usuário é “chamada” pelo programa principal durante o processo iterativo. A *Usermat* possui internamente um conjunto de quatro subrotinas, que estão associadas ao tipo de elemento utilizado na análise, seja para elemento sólido (*Usermat3D*), elemento de estado plano (*Usermatps*), elementos de viga (*Usermatbm*) ou elementos de treliça (*Usermat1D*). Dessa forma, a subrotina principal *Usermat* verifica o tipo de elemento adotado na análise e redireciona o processo de solução para a subrotina relacionada ao elemento, atualizando as tensões de acordo com o modelo constitutivo programado em linguagem Fortran 77 (ANSYS, 2013<sup>c</sup>).

Por se tratar de um estudo acerca de um elemento linear/reticulado, mais especificamente vigas, a representação do modelo mecânico do concreto neste trabalho se dá através da *Usermatbm*. O código utilizado neste trabalho foi baseado no desenvolvido por Barbosa (2017), para o estudo de confiabilidade de pilares de concreto armado, sendo alterado apenas o modelo constitutivo para o concreto não-fissurado. O código original foi reescrito, tendo como principal alteração a eliminação dos blocos de variáveis *common* e a respectiva substituição pelas variáveis de estado do ANSYS (*Ustatev's*). Essa alteração, além de tornar o código menos poluído visualmente, evita possíveis problemas no emprego de soluções paralelizadas. Outra grande vantagem da utilização das variáveis de estado é que estas são atualizadas apenas ao final do processo iterativo, evitando que quaisquer resíduos numéricos ou variáveis intermediárias do processo de solução sejam armazenadas de forma indevida.

O Apêndice A apresenta a listagem da *Usermatbm* utilizada neste trabalho. Maiores detalhes sobre a forma de compilação e associação ao programa principal ANSYS podem ser obtidos no trabalho de Quevedo (2017).

## 4.4 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS

### 4.4.1 *Beam189*

O elemento *beam189* é um elemento para a análise linear ou não-linear de estruturas reticuladas, como pilares e vigas esbeltas ou moderadamente esbeltas, envolvendo grandes deslocamentos e diversos modelos mecânicos de materiais, tais como elasticidade, plasticidade e fluência. Sendo baseado na teoria de vigas de Timoshenko, são consideradas as deformações por corte, permanecendo as seções planas após a deformação (ANSYS, 2013<sup>a</sup>). Este elemento é utilizado neste trabalho para a representação do concreto.

Trata-se de um elemento unidimensional contido no espaço tridimensional, o qual possui três nós ao longo de seu comprimento (formulação quadrática), e havendo seis graus de liberdade por nó, relativos as translações e rotações em torno dos eixos locais  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A Figura 4.4 apresenta a geometria, nós e o sistema de coordenadas local para o elemento em questão.

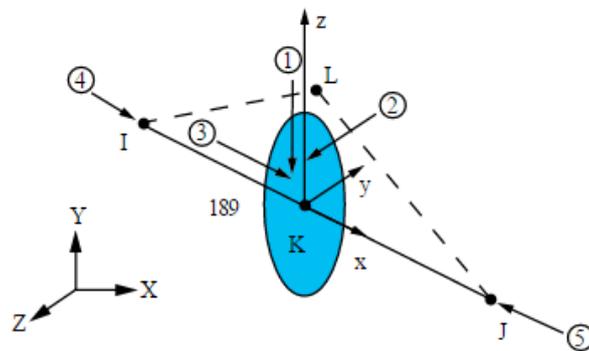


Figura 4.4 - Elemento *beam189* para a representação do concreto (ANSYS, 2013<sup>a</sup>)

O nó L surge como um nó adicional a ser considerado ou não pelo usuário, o qual permite orientar a posição da seção transversal em relação ao eixo do elemento, atribuindo desta forma a rigidez correta para a análise. Os números circunscritos na figura correspondem às direções de referência para a aplicação de cargas sobre o elemento. As expressões (4.10) à (4.15) correspondem às funções de interpolação para deslocamentos e rotações deste elemento (ANSYS, 2013<sup>b</sup>).

$$u = \frac{1}{2} [u_l(-s + s^2) + u_j(s + s^2)] + u_k(1 - s^2) \quad (4.10)$$

$$v = \frac{1}{2} [v_l(-s + s^2) + v_j(s + s^2)] + v_k(1 - s^2) \quad (4.11)$$

$$w = \frac{1}{2} [w_l(-s + s^2) + w_j(s + s^2)] + w_k(1 - s^2) \quad (4.12)$$

$$\theta_x = \frac{1}{2} [\theta_{xl}(-s + s^2) + \theta_{xj}(s + s^2)] + \theta_{xk}(1 - s^2) \quad (4.13)$$

$$\theta_y = \frac{1}{2} [\theta_{yl}(-s + s^2) + \theta_{yj}(s + s^2)] + \theta_{yk}(1 - s^2) \quad (4.14)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2} [\theta_{zl}(-s + s^2) + \theta_{zj}(s + s^2)] + \theta_{zk}(1 - s^2) \quad (4.15)$$

Sendo:

$u, v, w$  – Deslocamentos na direção dos eixos locais  $x, y, e z$ , respectivamente;

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$  – Rotações em torno dos eixos locais  $x, y, e z$ , respectivamente;

$s$  – Coordenada local.

O ANSYS apresenta para cada um de seus elementos diversas KEYOPTS (opções chave), que são opções que permitem caracterizar o comportamento do elemento. Estas opções apresentam valores padrões aplicados, os quais devem ser verificados se são condizentes com a análise a ser realizada.

Nesse sentido, este elemento possibilita a consideração de um grau de liberdade adicional, relativo ao empenamento, o qual por *default* não é considerado (idem neste trabalho), sendo necessário atribuí-lo na KEYOPT(1) do elemento. Em relação as propriedades inerciais da seção transversal, estas podem ser alteradas na KEYOPT(2), o qual por padrão altera a área da seção transversal em função do alongamento axial, no sentido de preservar o volume da peça. As demais opções, de forma geral, estão relacionadas aos dados de saída que o usuário desejar obter, tais como tensões, deformações e esforços generalizados.

As propriedades gerais e dimensões da seção transversal são definidas através dos comandos SECTYPE e SECDATA, que definem o tipo de seção, sua forma e dimensões, além do refinamento da malha relativa à seção transversal, discretizada através do número de células ao longo da base e da altura da seção. O elemento conta com dois pontos de integração ao longo do seu comprimento, nos quais se avaliam tensões e deformações na seção transversal, e quatro pontos de integração por célula, conforme apresentado na Figura 4.5. Não sendo especificada uma malha à seção transversal, o padrão é a divisão em duas células ao longo cada direção.

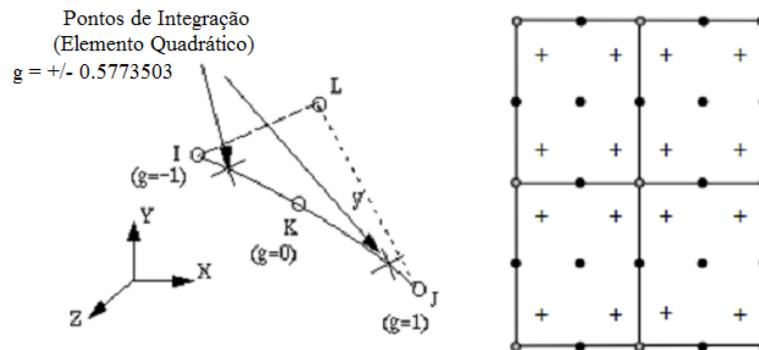


Figura 4.5 - Pontos de integração e discretização da seção para o elemento *beam189* (Adaptado de ANSYS, 2013<sup>a</sup>)

Em função da sua formulação, apresentada por Ibrahimbegovic (1995), os efeitos oriundos da flexão no elemento *beam189* são tratados de forma desacoplada em relação ao cisalhamento. Dessa forma, o comportamento axial do modelo é prescrito pelos modelos constitutivos associados ao concreto e apresentados no item 4.1, enquanto que os efeitos das tensões de corte são avaliados através de um modelo elástico linear. Uma abordagem semelhante foi empregada nos trabalhos de Coelho (2011), Magalhães et al (2016) e Stramandinoli e La Rovere (2017). Uma notória vantagem da utilização deste elemento é sua compatibilidade com o elemento *reinf264*, o qual é adotado como armadura incorporada, podendo ser associado ao modelo de fissuras distribuídas.

#### 4.4.2 *Reinf264*

O elemento *reinf264* é utilizado para a representação das armaduras passivas das vigas. Trata-se de um elemento que presume a existência de um elemento base, tal como o *beam189* descrito anteriormente. As coordenadas nodais, graus de liberdade e conectividade do elemento *reinf264* são idênticas ao do elemento base. A Figura 4.6 apresenta o sistema de coordenadas local do elemento bem como a geometria quando associado ao elemento *beam189*.



Figura 4.6 - Elemento *reinf264* para a representação das armaduras (ANSYS, 2013<sup>a</sup>)

Sua formulação permite a representação de fibras de reforços atuantes em direções arbitrárias e resistindo exclusivamente a esforços axiais. Estas fibras são associadas ao elemento base admitindo-se completa aderência com o mesmo, sendo inseridas através de posições relativas na seção transversal. Esse elemento é aplicável em análises de problemas envolvendo elasticidade, plasticidade, fluência e grandes deformações (ANSYS, 2013<sup>a</sup>).

Dentro desse contexto, a inserção das barras de armadura no modelo se dá pelos comandos SECDATA, o qual define a área do reforço, material correspondente e a localização em relação à seção a ser reforçada; SECN, comando que seleciona os elementos do material base que se deseja reforçar, cuja malha já deve estar definida; e por fim o comando EREINF, inserindo as armaduras na seção especificada. A Figura 4.7 apresenta o elemento *reinf264* associado ao elemento base *beam189*.

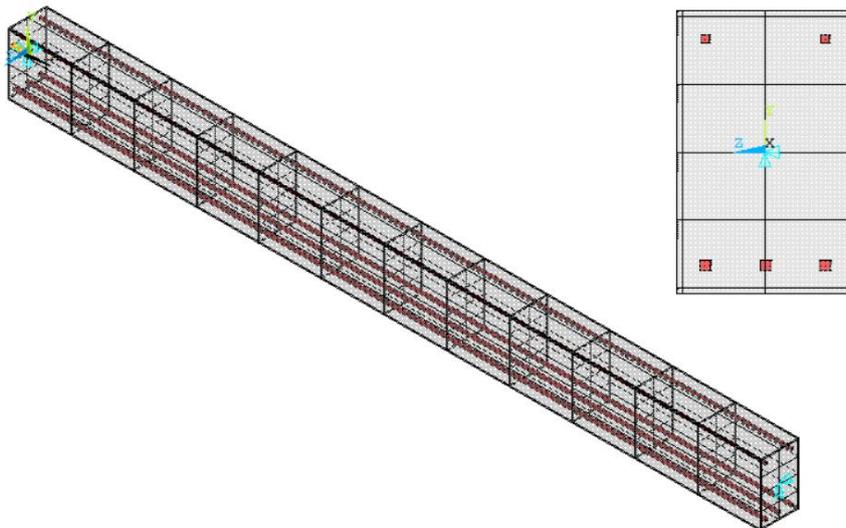


Figura 4.7 - Associação entre os elementos *reinf264* e *beam189*.

## 5 VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

### 5.1 TESTES UNIAXIAIS

Com o intuito de validar o modelo constitutivo empregado neste trabalho, lança-se mão de um simples teste uniaxial, verificando a concordância entre o modelo analítico proposto para o concreto e os resultados obtidos via simulação numérica. O teste consiste na aplicação de cargas centradas sobre um bloco, modelado com um elemento *beam189*. O bloco é engastado em uma das extremidades, sendo a carga *P* aplicada na outra extremidade, conforme ilustrado na Figura 5.1. A seção transversal do bloco possui dimensões de 10x10cm, e, por conveniência, adotou-se um comprimento de 1cm. Foram testados os comportamentos em compressão (Figura 5.1a) e em tração (Figura 5.1b). Na Figura 5.1 é também apresentada a seção transversal na forma expandida, representando a discretização da mesma em quatro células.

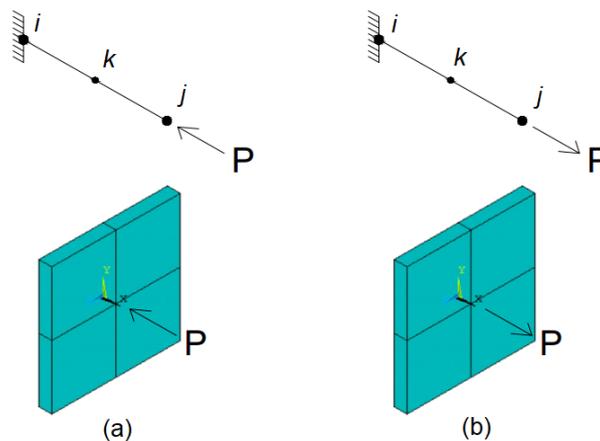


Figura 5.1 - Modelo de validação uniaxial do concreto sob compressão (a) e sob tração (b).

Nestes testes, considerou-se um concreto de resistência característica à compressão de 3,0kN/cm<sup>2</sup> (30MPa), sendo a carga *P* aplicada até a ruptura, em ambos os casos. As propriedades mecânicas médias foram obtidas pelas expressões apresentadas no capítulo 4. Dessa forma, sob compressão, o modelo possui uma resistência  $f_c = 3,8\text{kN/cm}^2$  e uma deformação limite  $\varepsilon_{c,\text{lim}} = 3,5\%$ . Em tração, a resistência do modelo é  $f_{ct} = 0,29\text{kN/cm}^2$  e a deformação última é  $\varepsilon_{tu} = 1,0\%$ . Os diagramas tensão-deformação obtidos em tração e compressão são apresentados na Figura 5.2 e Figura 5.3, respectivamente.

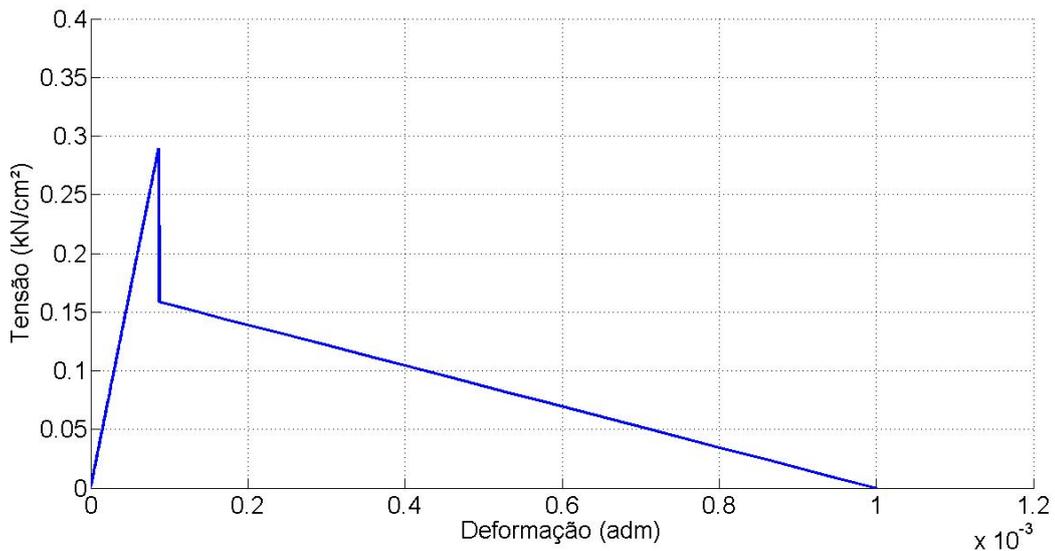


Figura 5.2 - Comportamento do concreto em tração uniaxial.

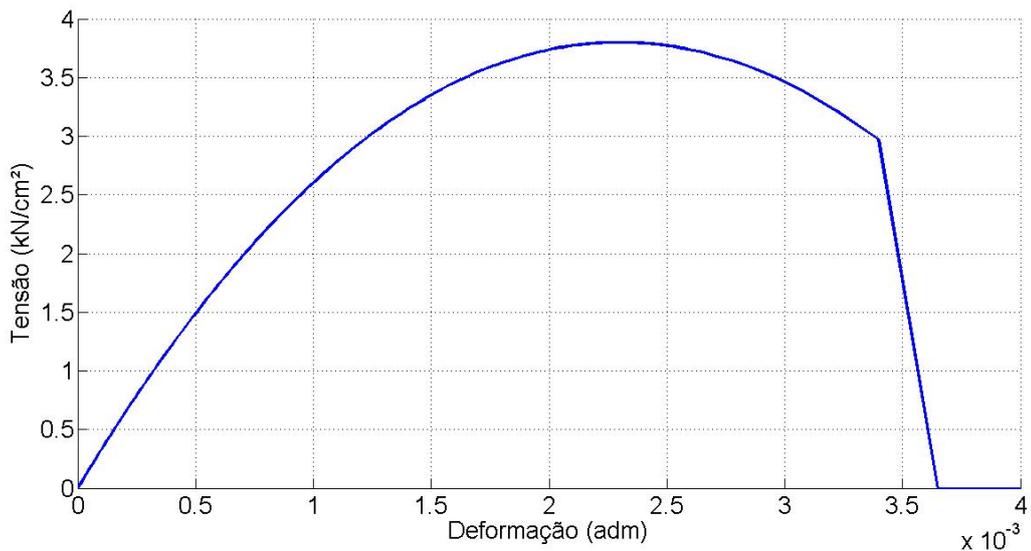


Figura 5.3 - Comportamento do concreto em compressão uniaxial.

É observado que o modelo numérico representa de forma adequada os modelos analíticos utilizados, estando condizente o comportamento esperado em tração e o comportamento não-linear em compressão. As tensões máximas, em ambos os casos, condizem com aquelas esperadas analiticamente. No que se refere a relação tensão-deformação apresentada na Figura 5.2, ressalta-se que o comportamento *tension-stiffening* é empregado para representar a resistência do concreto entre fissuras, justificada pelos mecanismos de aderência entre o aço e o concreto (MARTINELLI, 2003). Logo, a aplicabilidade deste modelo e de seus parâmetros não seria válida para a análise de peças de concreto simples sob tração, sendo o teste apresentado neste capítulo justificado apenas para fins de validação do algoritmo programado.

## 5.2 COMPARAÇÕES COM DADOS EXPERIMENTAIS

Neste item são realizadas comparações dos resultados obtidos via modelo numérico com resultados experimentais apresentados por diferentes pesquisadores em relação à carga última de vigas de concreto armado.

### 5.2.1 Vigas de Decanini e Grillo (1970)

Decanini e Grillo (1970) ensaiaram um conjunto de vigas armadas com aços de alta aderência, no sentido de obter dados experimentais sobre o comportamento em fissuração, deslocamentos e ruptura de vigas de concreto armado. A Figura 5.4 ilustra as dimensões das vigas e as condições de contorno do ensaio. A seção transversal nominal das vigas era de 15x24cm. As cargas foram aplicadas com um dispositivo hidráulico, gradativamente, até a ruptura das vigas.

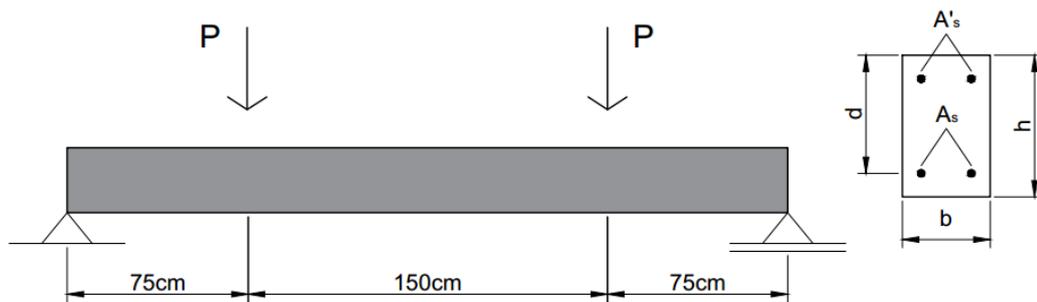


Figura 5.4 - Geometria e condições de contorno das vigas ensaiadas por Decanini e Grillo (1970).

Foram ensaiadas três séries de vigas, correspondentes às taxas nominais de armadura de 0,75%, 1,00% e 2,00%, denominadas, respectivamente, por RC-75, RC-100 e RC-200. Para cada uma das séries ensaiaram-se três vigas, perfazendo um total de nove vigas, cujas principais propriedades mecânicas, avaliadas pelos pesquisadores após a confecção destas, são apresentadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Propriedades das vigas ensaiadas por Decanini e Grillo (1970).

Viga	b (cm)	h (cm)	d (cm)	f <sub>cm</sub> (kN/cm <sup>2</sup> )	f <sub>y</sub> (kN/cm <sup>2</sup> )	A <sub>s</sub> (cm <sup>2</sup> )	A' <sub>s</sub> (cm <sup>2</sup> )
RC-075-1	15,3	24,6	22,1	3,11	54,9	2,35 (3Φ10mm)	1,00 (2Φ8mm)
RC-075-2	14,9	24,7	21,9	2,82	53,8		
RC-075-3	14,6	24,8	22,1	2,96	54,8		
RC-100-1	15,0	23,9	21,7	3,22	43,8	3,39 (3Φ12mm)	1,00 (2Φ8mm)
RC-100-2	14,6	23,9	21,7	3,40	42,7		
RC-100-3	15,0	23,9	21,7	2,74	42,5		
RC-200-1	15,0	24,0	21,2	2,64	48,4	6,28 (2Φ20mm)	
RC-200-2	14,8	24,0	21,0	2,96	47,1		
RC-200-3	15,2	23,7	20,9	2,40	48,7		

Fonte: Decanini e Grillo (1970).

A malha de elementos finitos empregada na análise é apresentada na Figura 5.5. Foram utilizados seis elementos ao longo do comprimento de meia viga (Figura 5.5a), considerando-se simetria no modelo, enquanto a seção transversal foi dividida em quatro células ao longo da base e seis células ao longo da altura<sup>1</sup>, conforme ilustrado na representação expandida da viga (Figura 5.5b).

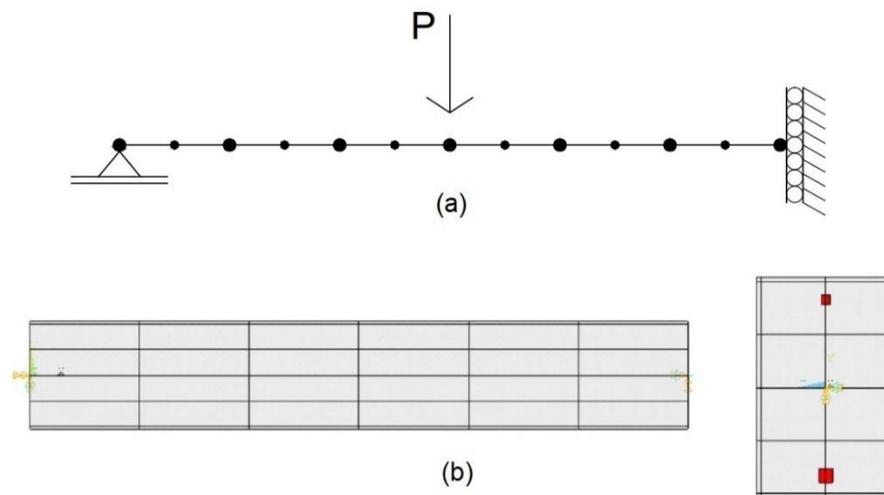


Figura 5.5 - Malha longitudinal empregada no modelo (a) e representação expandida da seção (b) das vigas ensaiadas por Decanini e Grillo (1970).

<sup>1</sup>Na especificação da malha relativa à seção transversal, o ANSYS, por *default*, refina a discretização concentrando células menores próximas aos bordos da seção transversal. De acordo com o manual teórico do *software* (ANSYS, 2013<sup>6</sup>), tal discretização visa melhorar os resultados em análises envolvendo plasticidade. Esse refinamento local é observado em discretizações a partir de três células na direção considerada, conforme visualizado na Figura 5.5.

As Figuras 5.6 a 5.14 apresentam os gráficos carga-deslocamento para as vigas ensaiadas, sendo os deslocamentos medidos no centro do vão. Pode-se verificar que o modelo numérico representa de forma satisfatória o comportamento não-linear das vigas durante o carregamento.

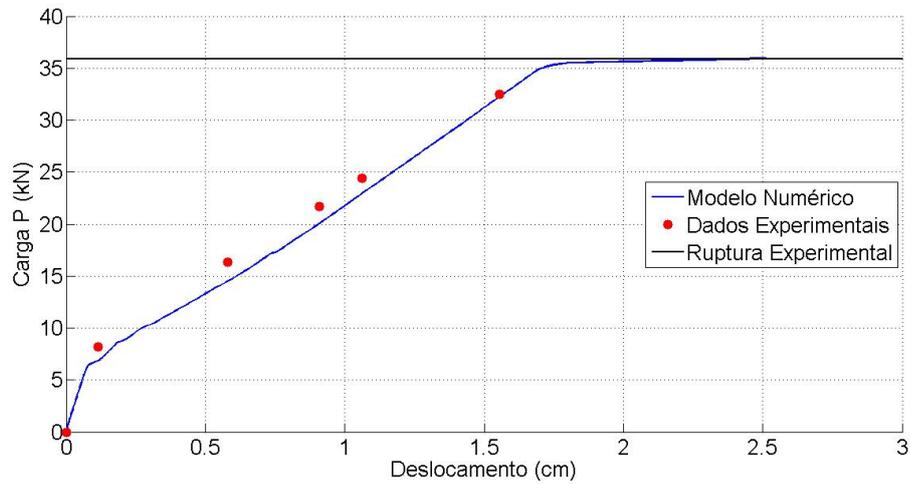


Figura 5.6 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-075-1

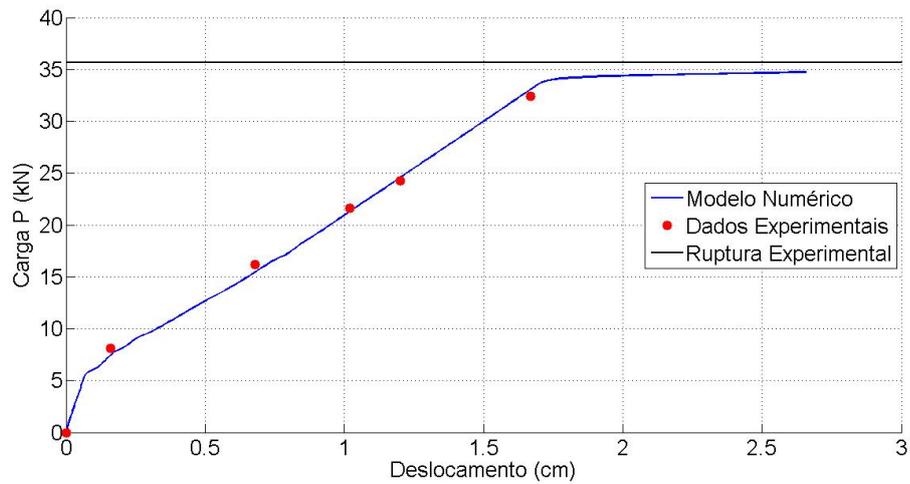


Figura 5.7 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-075-2.

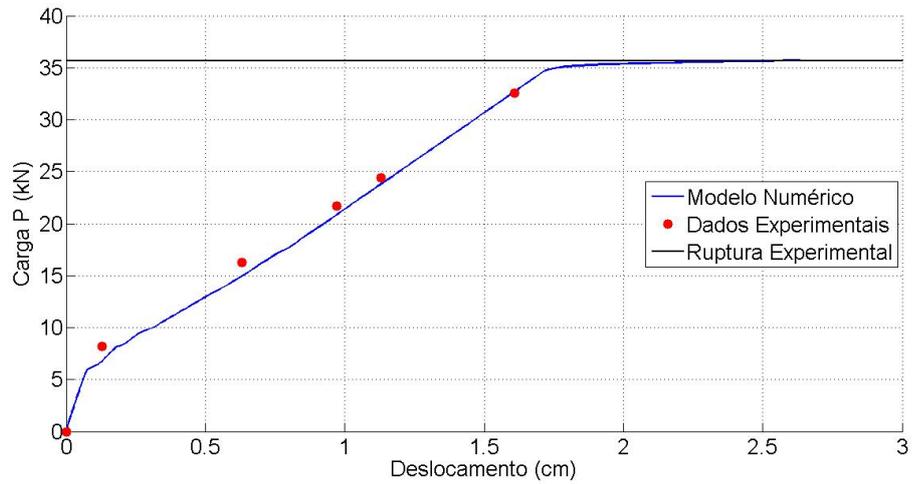


Figura 5.8 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-075-3.

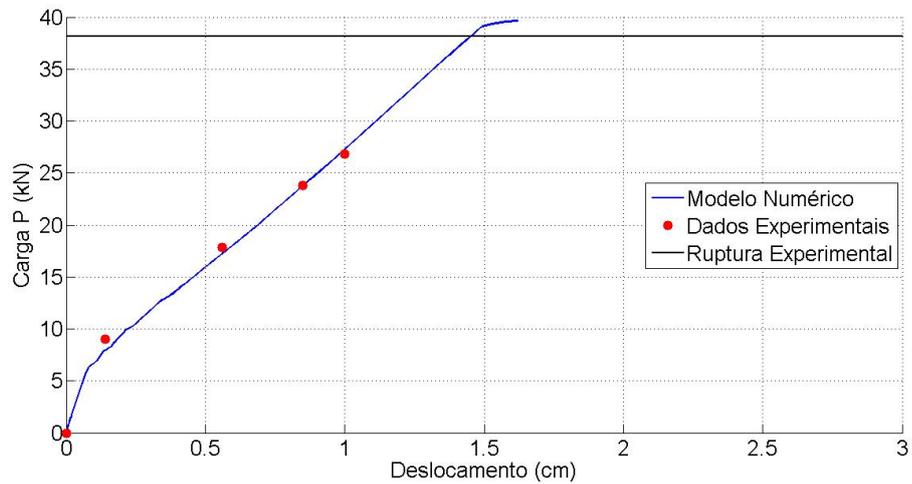


Figura 5.9 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-100-1.

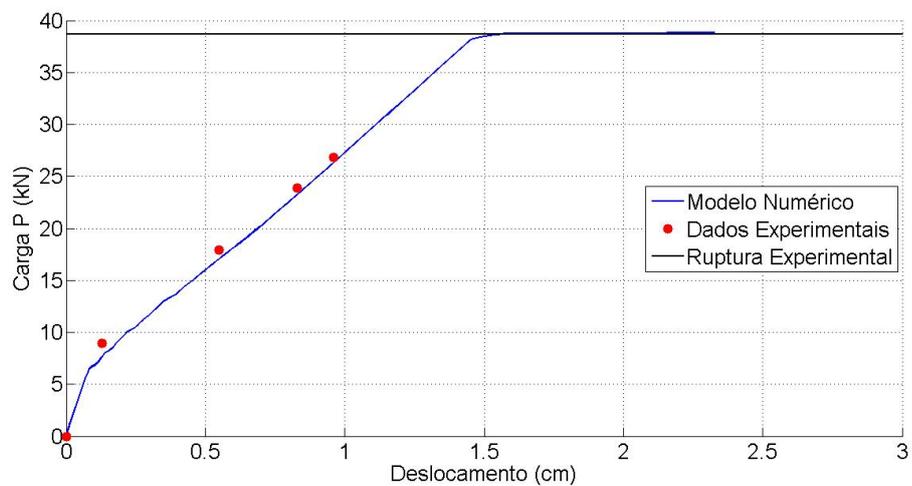


Figura 5.10 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-100-2.

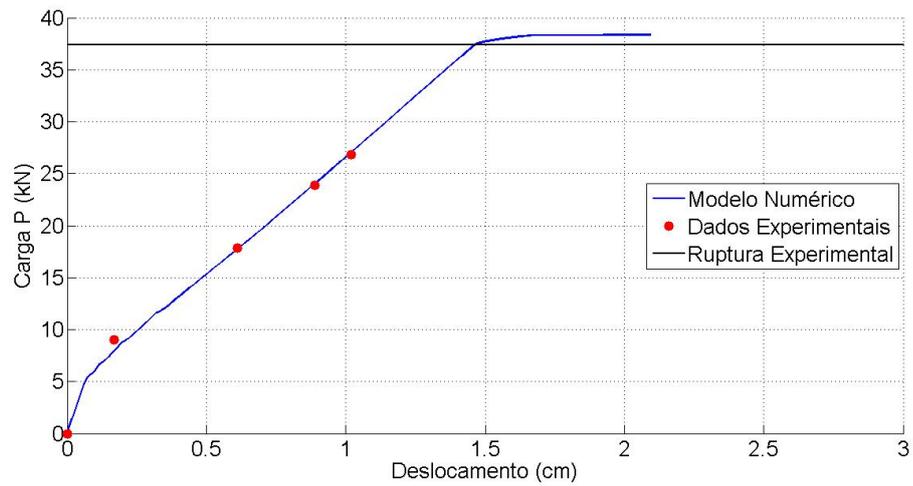


Figura 5.11 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-100-3.

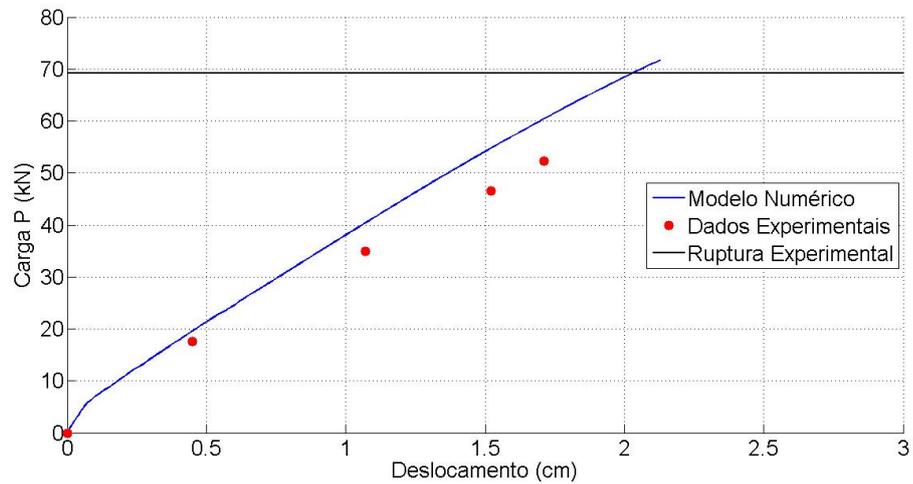


Figura 5.12 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-200-1.

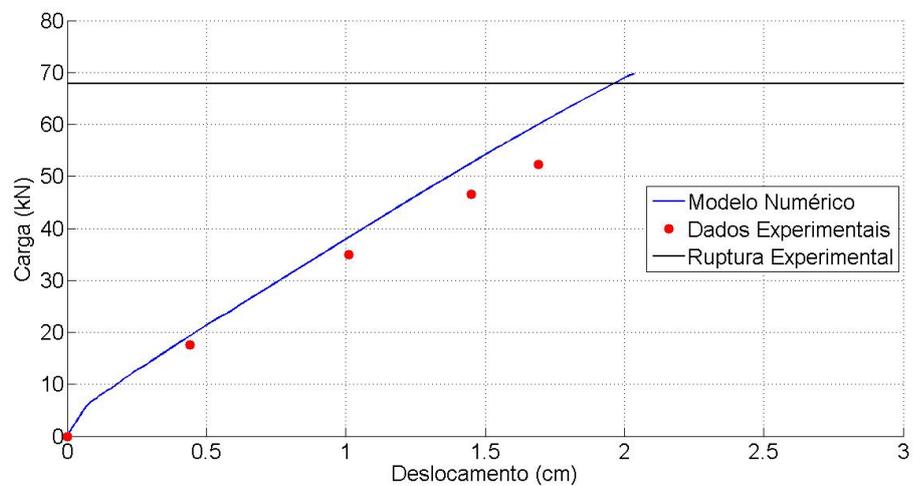


Figura 5.13 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-200-2.

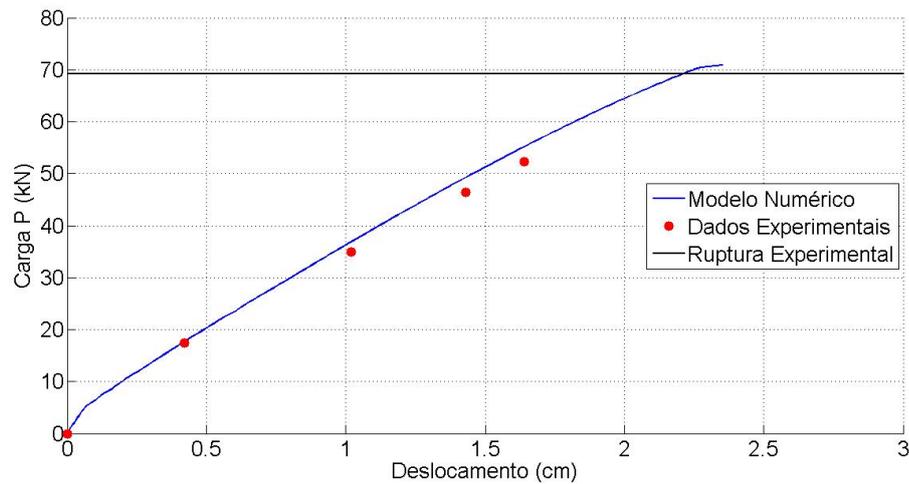


Figura 5.14 - Gráfico Carga-Deslocamento da viga RC-200-3.

As cargas de ruptura obtidas experimental e numericamente são dispostas na Tabela 5.2, de onde se conclui que o modelo numérico empregado obtém valores muito próximos àqueles obtidos pelos pesquisadores no ensaio experimental.

Tabela 5.2 - Relações entre cargas experimentais e numéricas para as vigas de Decanini e Grillo (1970).

Viga	Carga última numérica - Pn (kN)	Carga última experimental - Pe (kN)	Pe/Pn
RC-075-1	35,93	35,85	1,00
RC-075-2	34,75	35,67	1,03
RC-075-3	35,72	35,67	1,00
RC-100-1	39,66	38,16	0,96
RC-100-2	38,81	38,67	1,00
RC-100-3	38,35	37,41	0,98
RC-200-1	71,68	69,16	0,96
RC-200-2	69,72	67,84	0,97
RC-200-3	70,88	69,16	0,98

As Figuras 5.15 a 5.17 apresentam a distribuição de tensões normais no concreto e aço para as primeiras vigas de cada série, imediatamente antes do fim da convergência e, portanto, da ruptura do modelo. É observado que para as vigas RC-75-1 e RC-100-1, a ruptura é acompanhada do escoamento da armadura tracionada, estando o concreto abaixo do patamar de esmagamento. A viga RC-200-1, por sua vez, além do escoamento da armadura, apresenta esmagamento no concreto, sendo este observado nos três elementos mais próximos ao centro do vão.

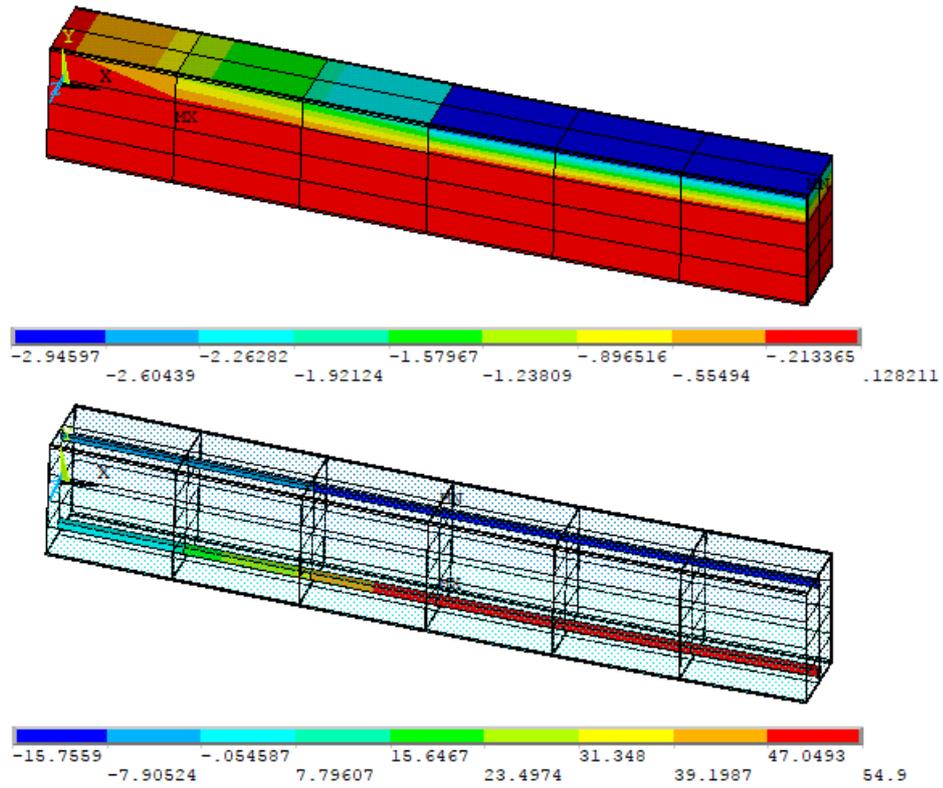


Figura 5.15 - Distribuição de tensões na ruptura para a viga RC-075-1, em kN/cm<sup>2</sup>.

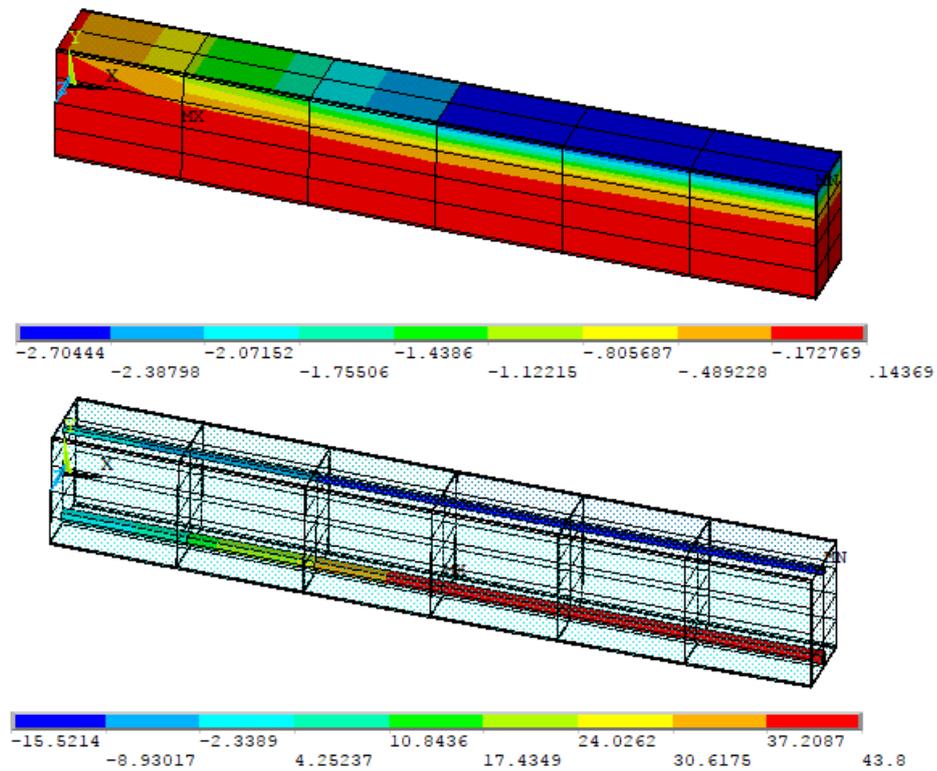


Figura 5.16 - Distribuição de tensões na ruptura para a viga RC-100-1, em kN/cm<sup>2</sup>.

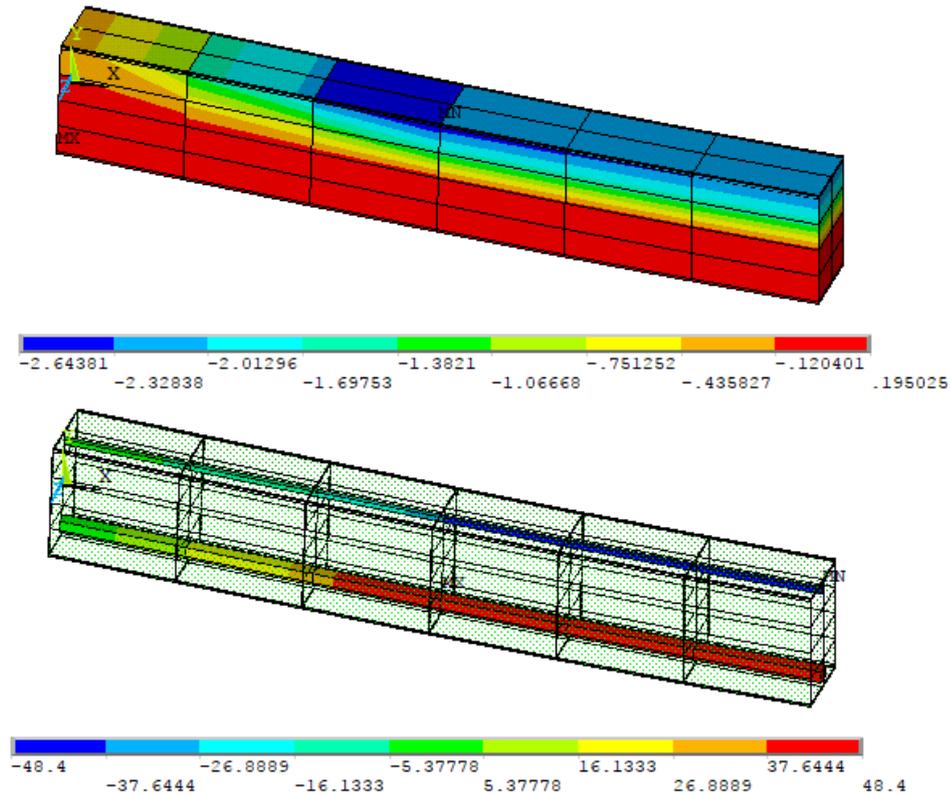


Figura 5.17 - Distribuição de tensões na ruptura para a viga RC-200-1, em kN/cm<sup>2</sup>.

### 5.2.2 Vigas de Beber (1999)

Beber (1999) realizou ensaios em vigas de concreto armado reforçadas com PRFC, com a finalidade de avaliar o ganho de rigidez dos modelos empregando-se esta técnica de reforço. Dentre o conjunto de dez vigas ensaiadas, foram ensaiadas duas vigas testemunho idênticas de concreto armado, biapoiadas, com um vão nominal de 2,35m e seção transversal nominal 12x25cm. As vigas, denominadas VT1 e VT2, foram solicitadas em seus terços médios, sendo gradativamente carregadas até a ruptura. A Figura 5.18 apresenta as condições de contorno e características das vigas ensaiadas.

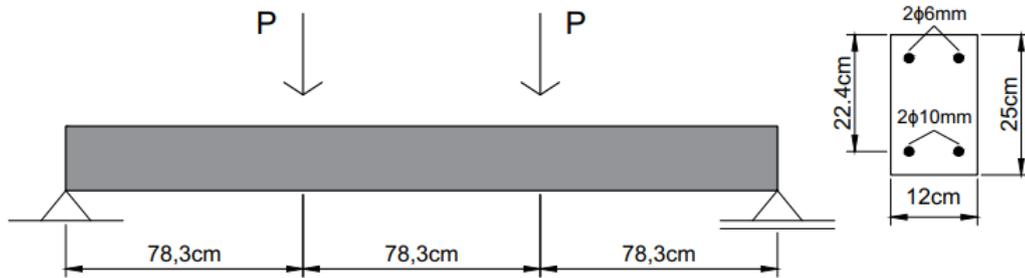


Figura 5.18 - Geometria e condições de contorno das vigas ensaiadas por Beber (1999).

Na data da ruptura dos modelos, foram ensaiados corpos de prova para a obtenção das propriedades mecânicas dos materiais utilizados. A resistência à compressão média, resistência à tração média e módulo de elasticidade obtidos para o concreto foram  $3,36\text{kN/cm}^2$ ,  $0,29\text{kN/cm}^2$  e  $3219,6\text{kN/cm}^2$ , respectivamente. A armadura tracionada era formada por barras de aço CA-50, com tensão de escoamento de  $56,5\text{kN/cm}^2$ , enquanto a armadura comprimida era constituída por barras de CA-60, com tensão de escoamento de  $73,8\text{kN/cm}^2$ . O módulo de elasticidade para o aço foi tomado como  $21438\text{kN/cm}^2$ .

O modelo numérico foi elaborado considerando a simetria da viga, conforme ilustrado na Figura 5.19. O comprimento de meia viga foi modelado empregando seis elementos (Figura 5.19a), enquanto a seção transversal foi discretizada com quatro células ao longo da base e seis células ao longo da altura (Figura 5.19b).

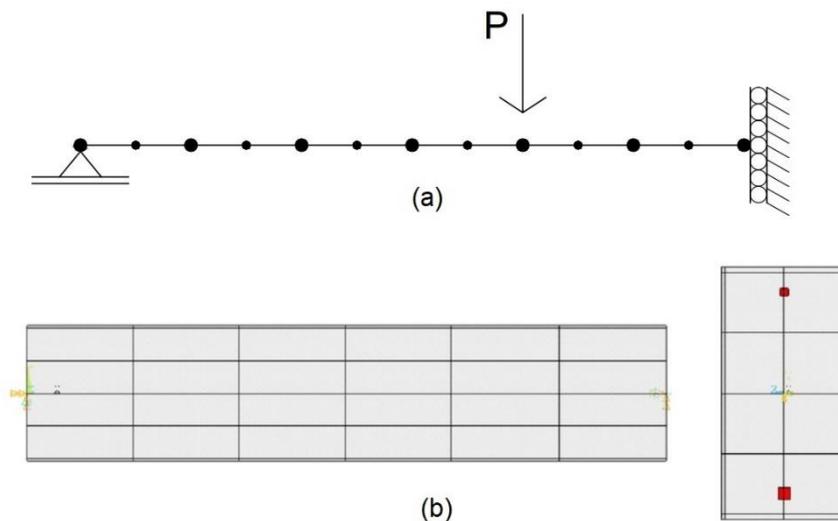


Figura 5.19 - Malha longitudinal empregada no modelo (a) e representação expandida da seção (b) das vigas ensaiadas por Beber (1999).

Os gráficos carga-deslocamento obtidos experimentalmente pelos pesquisadores, bem como os resultados obtidos pelo modelo numérico proposto neste trabalho são apresentados na Figura 5.20, sendo perceptível uma boa concordância do modelo numérico em relação aos resultados experimentais.

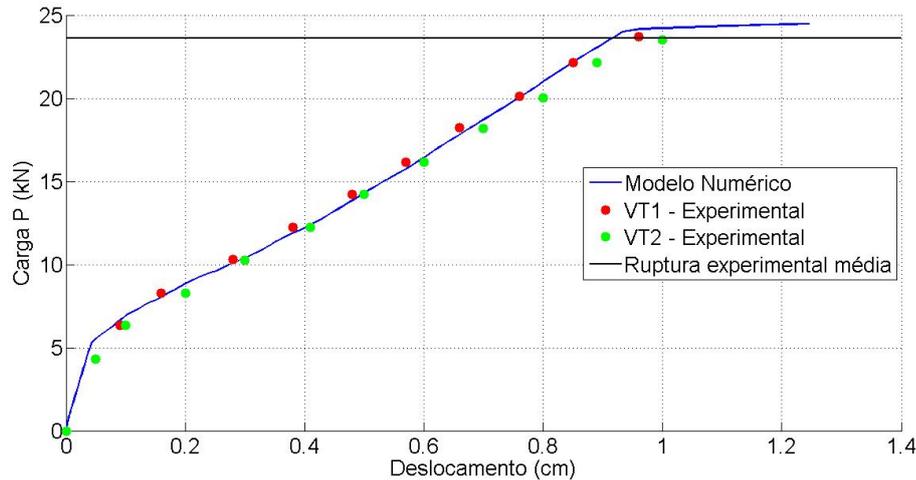


Figura 5.20 - Gráfico Carga-Deslocamento para as vigas ensaiadas por Beber (1999).

As cargas de ruptura  $P$  obtidas experimentalmente para as vigas VT1 e VT2 foram de 23,7kN e 23,5kN, respectivamente. A carga última do modelo numérico foi de aproximadamente 24,3kN. A relação entre a média das rupturas experimentais e a ruptura numérica resulta 0,97, indicando que o modelo numérico representou de forma adequada o comportamento real da estrutura. Assim como indicado no relatório experimental, a ruptura do modelo numérico se deu acompanhada do escoamento da armadura tracionada.

Visando avaliar o nível de influência da malha utilizada nos resultados obtidos, foram realizados alguns testes com diversas discretizações. Para tal, foram considerados diferentes números de elementos ao longo do comprimento da viga ( $nl$ ), bem como diferentes números de células ao longo da base ( $nb$ ) e da altura ( $nh$ ) da seção transversal. As cargas de ruptura obtidas para as discretizações testadas são apresentadas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 - Carga de ruptura P (kN) em função da malha empregada.

Discretização		<i>nh</i>		
<i>nl</i>	<i>nb</i>	4	6	8
3	2	22,91	24,27	24,17
	4	22,91	24,27	24,17
6	2	22,90	24,29	24,24
	4	22,90	24,29	24,24
9	2	22,90	24,30	24,25
	4	22,90	24,30	24,25

É observado que o refinamento ao longo da largura da seção transversal não altera os resultados obtidos, enquanto que a discretização longitudinal apresenta uma influência muito pequena para o número de elementos testados. A maior influência é observada na discretização da altura da seção transversal, o que é esperado, visto se tratar de uma estrutura solicitada em flexão simples. Verifica-se que os resultados apresentam uma certa convergência para os valores de  $nh = 6$  e  $nh = 8$ , sendo cerca de 6% a maior diferença percentual observada entre todos os resultados da Tabela 5.3.

## 6 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

### 6.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

A confiabilidade de uma estrutura pode ser entendida como a capacidade desta apresentar um desempenho satisfatório durante um intervalo específico de tempo e sob determinadas condições de utilização. Durante séculos os métodos construtivos assumiam a forma de “tentativa e erro”, e a percepção de segurança e confiabilidade baseava-se em observações passadas, de forma que estruturas bem-sucedidas se tornavam modelos para construções futuras em função de seu desempenho aceitável. Ao passo em que a técnica de engenharia se desenvolveu e as leis da natureza passaram a ser melhores compreendidas, projetos e métodos construtivos evoluíram e hoje apresentam-se de forma mais racional (NOWAK; COLLINS, 2000).

O fato é que a maior parte dos fenômenos relacionados à engenharia apresentam um dado grau de incertezas. Tomando como exemplo o ensaio axial de um conjunto de barras de aço tidas como idênticas, os valores das cargas de ruptura não serão os mesmos para todas as barras, caracterizando uma aleatoriedade em relação a resistência do material. Essa é uma realidade nos diversos materiais utilizados na construção civil, onde, de forma geral, uma série de dados experimentais tende a apresentar valores dispersos, ainda que alguns sejam mais frequentes que outros. A essa dispersão é atribuído o termo incerteza. Além disso, diversas são as incertezas relacionadas as formulações dos problemas em engenharia, os quais em geral carregam simplificações nas considerações de projeto e modelos de cálculo (HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

De acordo com Nowak e Collins (2000), como resultado das aleatoriedades associadas aos sistemas estruturais, torna-se impossível atestar qualquer estrutura como totalmente segura, havendo somente um nível de segurança e, conseqüentemente, uma probabilidade de falha finita associada a esta. Madsen e Egeland (1989) classificam os métodos de avaliação da segurança de uma estrutura em diferentes níveis, sendo estes caracterizados pelo grau de sofisticação empregado e quantidade de informações requeridas acerca do modelo.

- a) **Métodos de Nível I:** Os métodos de nível I são caracterizados por empregar valores característicos às variáveis associadas ao problema. Corresponde ao método semi-probabilístico utilizado por grande parte das normas de projeto, tal como o NBR-6118:2014, onde o nível de segurança é prescrito através da ponderação das variáveis por coeficientes parciais de segurança.
- b) **Métodos de Nível II:** Correspondem aos métodos onde as variáveis são definidas por intermédio de dois parâmetros estatísticos, sendo estes normalmente o primeiro e segundo momentos estatísticos (média e variância). A segurança, neste caso, é representada pelo índice de confiabilidade.
- c) **Métodos de Nível III:** Nestes métodos o nível de segurança é expresso diretamente através da probabilidade de falha, sendo utilizada a distribuição conjunta das variáveis aleatórias, bem como os principais parâmetros estatísticos destas.
- d) **Métodos de Nível IV:** Os métodos de nível IV, por sua vez, combinam a confiabilidade com a otimização dos custos de construção, manutenção e reparo. Busca-se, portanto, a minimização de custos ao longo da vida útil da estrutura.

A aplicação de análise probabilísticas no cotidiano de escritórios de engenharia e na elaboração de projetos correntes torna-se inviável pelo seu caráter mais complexo e por demandar um maior tempo em termos de análise e interpretação de dados estatísticos. Dessa forma, o método semi-probabilístico corresponde ao utilizado na prática de projeto, especialmente devido sua aplicação simplificada e resultados satisfatórios. De acordo com Beck e Souza Jr. (2010), diversos países se utilizam da teoria da probabilidade na calibração destes coeficientes em suas normas de projeto. Nesse sentido, uma abordagem em confiabilidade permite avaliar o nível de segurança atingido pelas normas nacionais de projeto estrutural.

## 6.2 FUNDAMENTAÇÃO PROBABILÍSTICA

O estudo de uma estrutura sob o ponto de vista probabilístico requer que as principais aleatoriedades associadas ao seu comportamento possam ser representadas por um modelo matemático. Estes modelos matemáticos são baseados nos princípios da probabilidade e estatística, sendo conveniente introduzir estes princípios através da definição de evento e espaço amostral.

Segundo Nowak e Collins (2000), um evento pode ser definido com um resultado obtido dentro de uma série de resultados possíveis, enquanto um espaço amostral corresponde a todos os resultados possíveis. Tomando, por exemplo, o ensaio de resistência das barras citadas no item 6.1, o espaço amostral corresponderia a todos resultados de resistências obtidos para o número de corpos de prova ensaiados, e os eventos seriam caracterizados pela combinação de certos resultados específicos, como por exemplo, a resistência obtida em um dado corpo de prova ser  $R \leq r$ , onde  $r$  corresponde a um valor pré-estabelecido.

Ainda que dados experimentais permitam inferir parâmetros estatísticos acerca das variáveis aleatórias, a aplicação destas variáveis no estudo de confiabilidade é feita por intermédio de funções que representam suas distribuições de probabilidade de forma contínua. Tomando uma variável aleatória genérica  $X$ , a natureza de seu comportamento aleatório é representada pela chamada função densidade de probabilidade (FDP), representada por  $f_X(x)$  e ilustrada na Figura 6.1.

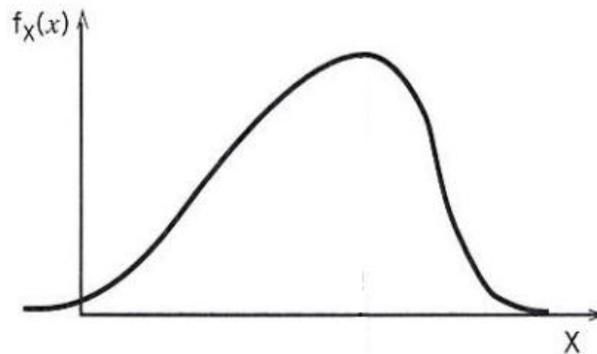


Figura 6.1 - Função densidade de probabilidade de uma variável genérica  $X$  (Adaptado de HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

Sendo a variável aleatória  $X$  contínua, a mesma apresentará uma densidade de probabilidade para qualquer valor de  $x$  definido sobre a reta dos números reais (REAL, 2000). Isso implica que a probabilidade da variável aleatória  $X$  estar contida no intervalo  $x_1 < X \leq x_2$  é definida pela equação (6.1).

$$P[x_1 < X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx \quad (6.1)$$

Sendo:

$P[x_1 < X \leq x_2]$  – Probabilidade da variável  $X$  estar contida entre  $x_1$  e  $x_2$ ;

$f_X(x)$  – Função densidade de probabilidade da variável  $X$ .

Tem-se, no estudo da confiabilidade de sistemas, um particular interesse em quantificar a probabilidade de certos eventos serem superados. Na confiabilidade estrutural, por exemplo, o interesse paira sobre determinar qual a probabilidade de um valor de solicitação específico ser superado, ou até mesmo a probabilidade de uma resistência estar aquém do valor necessário. A chamada função distribuição de probabilidade acumulada (FDPA), representada por  $F_X(x)$ , define a probabilidade de que a variável aleatória genérica  $X$  assuma um valor menor ou igual ao evento específico  $x$ , sendo expressa por (6.2).

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad (6.2)$$

Sendo  $F_X(x)$  a função distribuição de probabilidade acumulada da variável  $X$ . Como consequência das expressões (6.1) e (6.2), conclui-se que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $X$  é dada pela primeira derivada da função distribuição de probabilidade acumulada em relação à  $x$ .

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (6.3)$$

A Figura 6.2 elucida a relação entre as funções  $f_X(x)$  e  $F_X(x)$  para uma dada variável contínua.

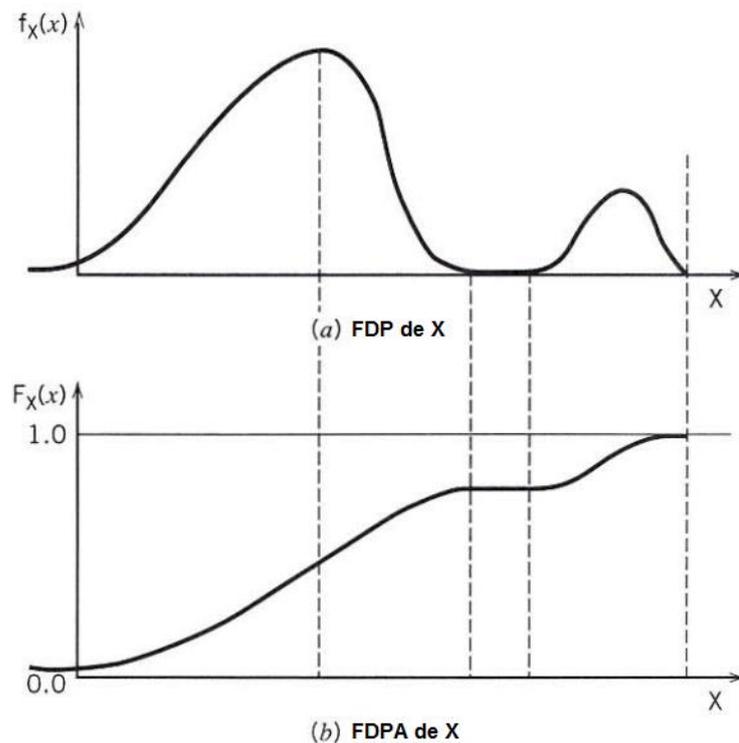


Figura 6.2 - Relação entre as funções FDP e FDPA (Adaptado de HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

De acordo com Haldar e Mahadevan (2000), algumas importantes considerações podem ser tomadas em relação as funções  $f_X(x)$  e  $F_X(x)$ .

- a) A função  $f_X(x)$  será sempre não-negativa. Seu intervalo de validade é  $(-\infty, +\infty)$ ;
- b) A função  $F_X(x)$  deve ser nula em  $-\infty$  e assumir a unidade em  $+\infty$ . Isto é,  $F_X(-\infty) = 0,0$  e  $F_X(+\infty) = 1,0$ ;
- c) A função  $F_X(x)$  será sempre maior ou igual a zero, sendo crescente em função da variável aleatória  $X$ ;
- d) A função  $F_X(x)$  será sempre contínua e derivável em relação à variável aleatória.

A maior parte das funções de distribuição de probabilidade tem seus parâmetros caracterizados pelos primeiros e segundos momentos estatísticos, correspondendo aos valores de média ( $\mu$ ) e variância ( $\sigma^2$ ). Para uma dada função densidade de probabilidade  $f_X(x)$ , estes momentos estatísticos podem ser obtidos pelas expressões (6.4) e (6.5).

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (6.4)$$

$$\sigma^2_X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad (6.5)$$

Sendo  $\mu_X$  e  $\sigma^2_X$  a média e a variância da variável aleatória  $X$ , respectivamente. O que ocorre é que na maior parte das aplicações práticas, não se conhece *a priori* o tipo de distribuição correspondente às variáveis aleatórias relacionadas ao problema. Nestas situações, a distribuição é assumida a partir de ajustes de um conjunto de dados experimentais (ensaios de corpos de prova de concreto e de aço, por exemplo), sendo os momentos estatísticos obtidos a partir das expressões (6.6) e (6.7), que correspondem a média amostral e variância amostral, respectivamente, considerando uma amostra de tamanho  $N$  (NOWAK; COLLINS, 2000).

$$\mu_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (6.6)$$

$$\sigma^2_X = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2 \quad (6.7)$$

Uma vez que as distribuições de probabilidade das variáveis básicas do problema estejam caracterizadas, o estudo do ponto de vista probabilístico e o nível de segurança alcançado pela estrutura pode ser determinado através de diferentes métodos apresentados na literatura técnica. Os principais passos associados à análise probabilística são apresentados na Figura 6.3

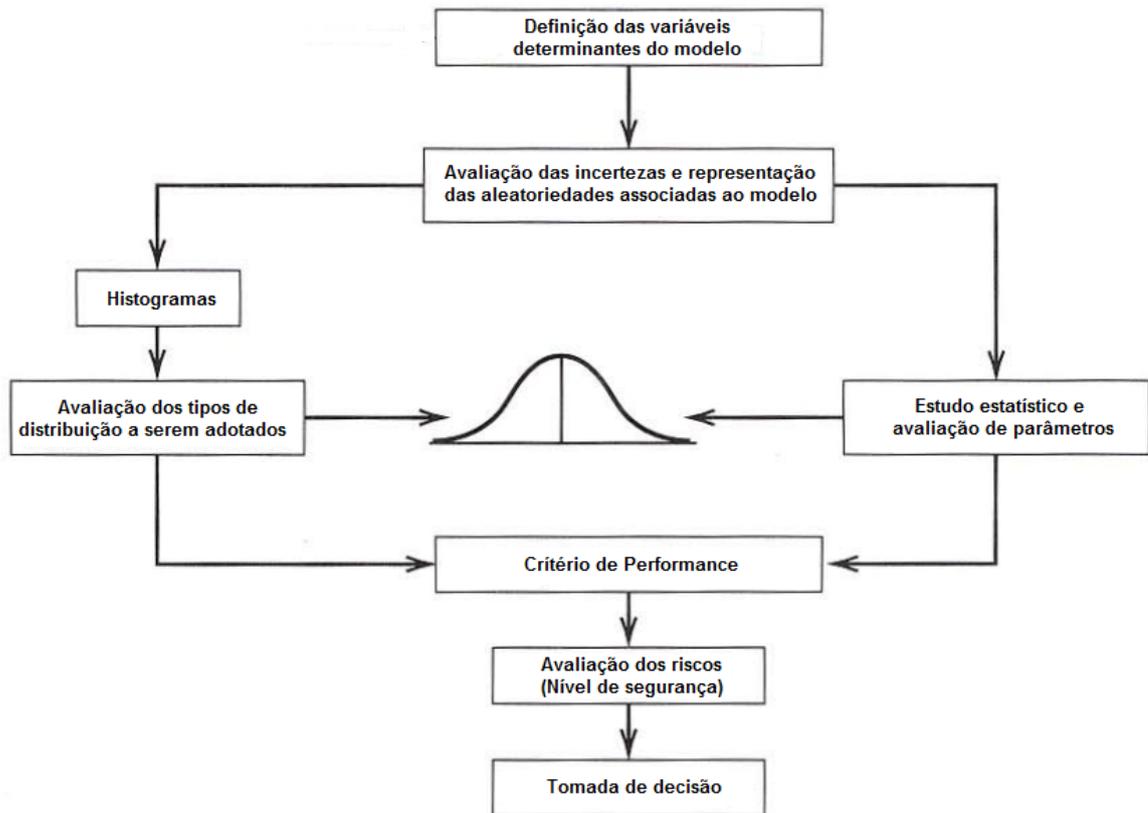


Figura 6.3 - Fluxograma básico para uma análise probabilística (Adaptado de HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

### 6.3 FUNÇÃO PERFORMANCE

Um dos aspectos iniciais a ser considerado na análise de confiabilidade consiste na determinação da função performance do modelo estrutural em estudo. Esta função contempla todas as variáveis envolvidas no problema, geralmente expressando uma relação de capacidade *versus* demanda e caracterizando o desempenho desse modelo frente ao estado-limite considerado. Genericamente, essa função pode ser representada pela expressão (6.8) (HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (6.8)$$

Sendo:

$g(\mathbf{X})$  – Função performance do sistema;

$\mathbf{X}$  – Vetor de variáveis aleatórias básicas do sistema.

Resumindo o problema em termos de resistência e solicitação de um modelo estrutural, a função performance associada ao estado-limite último é geralmente expressa pela chamada margem de segurança, dada pela diferença entre a capacidade portante da estrutura e a solicitação a esta imposta, assumindo a forma dada em (6.9).

$$g(R, S) = R - S \quad (6.9)$$

Sendo  $R$  e  $S$  a resistência e a solicitação do modelo, respectivamente. A expressão (6.9) corresponde ao desempenho da estrutura em termos de segurança, podendo este enquadrar-se em três domínios diferentes, os quais são elucidados na Figura 6.4. O domínio da segurança corresponde a valores de  $g(R, S) > 0$ , situação em que a estrutura é demandada aquém de sua resistência; A falha corresponde a valores de  $g(R, S) < 0$ , sendo a estrutura demandada além de sua resistência. O limite entre a falha e a segurança corresponde à situação  $g(R, S) = 0$ , sendo denominado estado-limite (NOWAK; COLLINS, 2000).

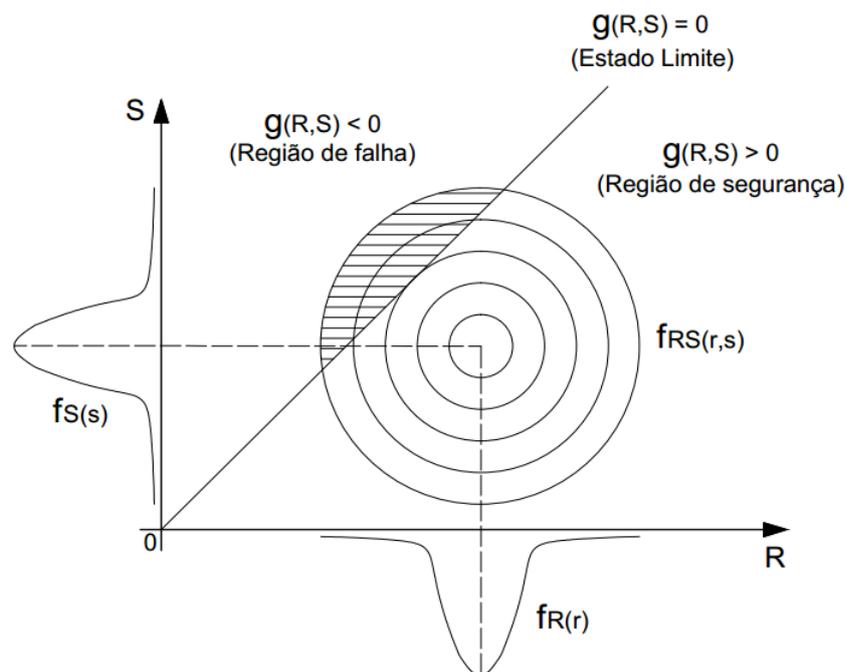


Figura 6.4 - Domínios de segurança associados à função performance (Adaptado de PALIGA, 2008).

A distribuição de probabilidade das variáveis resistência e solicitação,  $R$  e  $S$ , são representadas por suas funções densidade de probabilidade marginal  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$ , respectivamente. O volume formado pela interseção das distribuições  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  constitui a chamada distribuição conjunta  $f_{RS}(r, s)$ , a qual representa todas as combinações possíveis entre  $R$  e  $S$  (PALIGA, 2008). Nos casos em que resistência e solicitação são estatisticamente independentes e

representadas por uma distribuição normal de probabilidade, utiliza-se também a distribuição da margem de segurança,  $f_M(m)$ , conforme ilustrado na Figura 6.5.

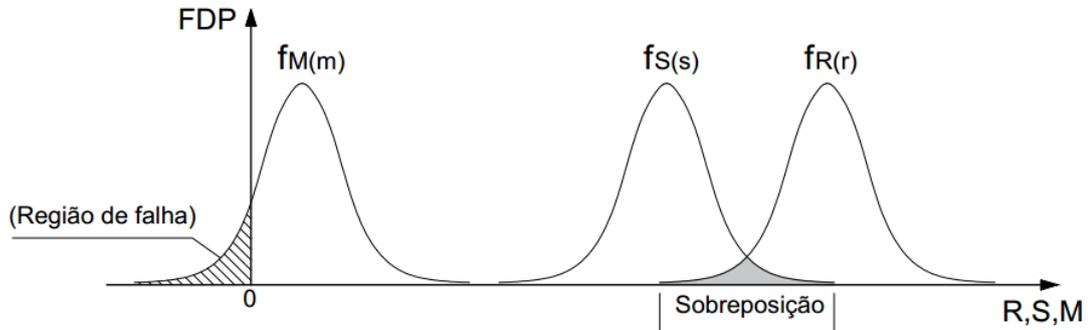


Figura 6.5 - Distribuições de probabilidade da resistência, solicitação e margem de segurança considerando distribuição normal de probabilidade (Adaptado de NOWAK; COLLINS, 2000)

A região de sobreposição representa uma medida qualitativa da probabilidade de falha do modelo. Quando representada em termos de margem de segurança, a medida quantitativa dessa probabilidade é representada pela região de falha. A função densidade de probabilidade da margem de segurança pode ser definida a partir dos momentos estatísticos da resistência e solicitação, de acordo com as expressões (6.10) e (6.11).

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S \quad (6.10)$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (6.11)$$

Sendo:

$\mu_R, \mu_S, \mu_M$  – Média das variáveis resistência, solicitação e margem de segurança;

$\sigma_R, \sigma_S, \sigma_M$  – Desvio padrão das variáveis resistência, solicitação e margem de segurança.

A partir do estabelecido pelas expressões (6.10) e (6.11), pode-se definir uma variável normal padronizada, correspondente à margem de segurança e expressa por (6.12).

$$m = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (6.12)$$

Sendo:

$m$  – Variável normal padronizada correspondente à margem de segurança;

$M$  – Variável correspondente à margem de segurança.

O início da região de falha corresponderá à situação em que a margem de segurança ( $M$ ) torna-se nula. Nesta situação, a probabilidade associada à variável padronizada ( $m$ ) corresponde à probabilidade de falha e é dada pela expressão (6.13).

$$p_f = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad (6.13)$$

Sendo:

$\Phi$  – Função distribuição de probabilidade acumulada da variável normal padronizada;

$p_f$  – Probabilidade de falha do modelo.

Conforme Haldar e Mahadevan (2000), a região de sobreposição entre as funções resistência e solicitação é dependente de três principais fatores:

- a) **Posição relativa entre as duas curvas:** A medida em que as curvas se afastam, a região de sobreposição é reduzida, resultando em uma menor probabilidade de falha.
- b) **Dispersão das curvas:** Quanto mais as curvas apresentarem-se em torno do valor médio, menor será a dispersão e, conseqüentemente, a probabilidade de falha será reduzida.
- c) **Forma das curvas:** A região de sobreposição é caracterizada pela forma das curvas, ou seja, pela função densidade de probabilidade das variáveis aleatórias.

Contudo, deve-se observar que a aplicação da expressão (6.13) para a obtenção de probabilidades de falha deve ser limitada aos casos em que resistência e solicitação sejam estatisticamente independentes e apresentem distribuição normal de probabilidade, resultando em uma margem igualmente caracterizada por uma distribuição normal. Em muitos casos práticos, entretanto, tais condições não são atendidas, induzindo uma dada imprecisão ao empregar-se (6.13).

## 6.4 MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

### 6.4.1 Generalidades

As técnicas de simulação permitem determinar a probabilidade de falha e a confiabilidade de um modelo através de um processo repetitivo no qual são introduzidas as propriedades aleatórias do modelo, gerando um conjunto de soluções sobre o qual se procede um tratamento estatístico. O Método de Monte Carlo, nesse contexto, tem sido amplamente empregado no estudo de confiabilidade de sistemas em engenharia, em especial pela sua simplicidade e por não demandar conhecimentos mais complexos em probabilidade e estatística (HALDAR; MAHADEVAN, 2000). Conforme Nowak e Collins (2000), os métodos de simulação permitem que se obtenham, via modelo numérico, resultados de fenômenos físicos sem quaisquer ensaios experimentais, baseando-se nas estatísticas básicas das variáveis aleatórias e procedendo-se um grande número de repetições. Haldar e Mahadevan (2000) descrevem os seis elementos essenciais associados o método de Monte Carlo, apresentados abaixo.

1. Definir o problema em termos das variáveis aleatórias;
2. Determinar as distribuições de probabilidade e as principais estatísticas das variáveis aleatórias envolvidas no problema;
3. Gerar um conjunto de valores para as variáveis aleatórias de acordo com suas distribuições de probabilidade;
4. Solucionar o modelo de forma determinística para o conjunto de valores das variáveis aleatórias;
5. Extrair as informações estatísticas após N simulações;
6. Determinar a eficiência do processo de simulação.

Cada análise é chamada de simulação ou tentativa, obtendo-se dessa forma um conjunto de N previsões de comportamento do sistema, sendo o número total de simulações definido através do processo de convergência da probabilidade de falha.

### 6.4.2 Probabilidade de falha

Haldar e Mahadevan (2000) apresentam duas maneiras possíveis de avaliar a confiabilidade de um sistema por intermédio do método de Monte Carlo. A primeira maneira consiste no processo de contagem de resultados insatisfatórios da função performance dentre um número total de ciclos de simulações. A probabilidade de falha, neste caso, é obtida através da expressão (6.14).

$$p_f = P[g(R, S) < 0] = \frac{N_f}{N} \quad (6.14)$$

Sendo  $N_f$  e  $N$  o número de resultados insatisfatórios e o número total de simulações, respectivamente. A obtenção da probabilidade de falha pelo método acima citado, contudo, pode torna-se computacionalmente onerosa ao passo que um grande número de simulações é requerido para a convergência estatística da probabilidade de falha. Uma estimativa do número total de simulações em função da tolerância em erro e da probabilidade de falha correta do modelo, a *priori* estimada, pode ser obtida através da expressão (6.15) (HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

$$N = \frac{1 - p_f^T}{p_f^T} \left( \frac{200}{\epsilon \%} \right)^2 \quad (6.15)$$

Sendo:

$p_f^T$  – Probabilidade de falha correta do modelo;

$\epsilon$  % – Tolerância percentual do erro na estimativa da probabilidade de falha.

A título de exemplo, considerando um erro de 10%, o número de simulações para uma probabilidade de falha da ordem de  $10^{-n}$  será da ordem de  $10^{(n+2)}$ .

Uma segunda forma de aplicação do Método de Monte Carlo consiste em utilizá-lo como ferramenta de inferência estatística da função performance, mais especificamente em relação ao modelo resistente e solicitante que compõe a função  $g(\mathbf{X})$ . Um número suficiente de simulações deverá ser realizado para que se obtenha a convergência dos momentos estatísticos. Com isso, tão logo se atinja a convergência para um dado número de simulações, as funções densidade de probabilidade  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  são determinadas através do ajuste dos dados a uma dada distribuição teórica.

Se a solicitação imposta  $S$  assumir um valor específico  $s$ , a probabilidade de falha corresponderá à probabilidade de que a resistência do modelo seja inferior a esta solicitação, ou seja,  $P(R < s)$ . Uma vez que solicitação e resistência são variáveis aleatórias contínuas, haverá uma probabilidade associada a cada valor de  $S$ , e a probabilidade de falha do modelo corresponderá à cada combinação  $S = s$  e  $R < s$ , sendo representada pela expressão (6.16) (NOWAK; COLLINS, 2000).

$$p_f = \sum P(S = s \cap R < s) = \sum P(R < S | S = s)P(S = s) \quad (6.16)$$

Sendo resistência e solicitação variáveis aleatórias independentes e levando a expressão (6.16) ao limite, a probabilidade de falha pode ser representada na forma integral de convolução dada por (6.17).

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(s) f_S(s) ds \quad (6.17)$$

Sendo:

$F_R(s)$  – Função distribuição de probabilidade acumulada da resistência;

$f_S(s)$  – Função densidade de probabilidade da solicitação.

Alternativamente, a probabilidade de falha poderia ser obtida através da integração da distribuição conjunta  $f_{RS}(r, s)$  no domínio de falha  $g(R, S) < 0$  (região hachurada na Figura 6.4), conforme expressão (6.18).

$$p_f = \int_{g(R,S)<0} f_{RS}(r, s) dr ds \quad (6.18)$$

### 6.4.3 Geração de variáveis aleatórias

A técnica de simulação é viabilizada uma vez que se disponha de um conjunto de valores para cada variável aleatória que compõe o modelo, sendo estes valores obtidos de acordo com a respectiva distribuição de probabilidade de cada variável. A técnica de transformação inversa é normalmente utilizada para a obtenção deste conjunto de dados (HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

Esta técnica consiste inicialmente na geração de  $N$  valores randômicos uniformemente distribuídos entre 0,0 e 1,0. De posse destes valores, considera-se que cada valor  $u_i$  gerado corresponda à função distribuição de probabilidade acumulada (FDPA) da variável  $X_i$ , conforme apresentado em (6.19). O valor da variável aleatória é obtido pela inversão da FDPA, conforme (6.20).

$$F_X(x_i) = u_i \quad (6.19)$$

$$x_i = F_X^{-1}(u_i) \quad (6.20)$$

A Figura 6.6 elucida graficamente o processo de obtenção de variáveis aleatórias a partir da técnica de transformação inversa.

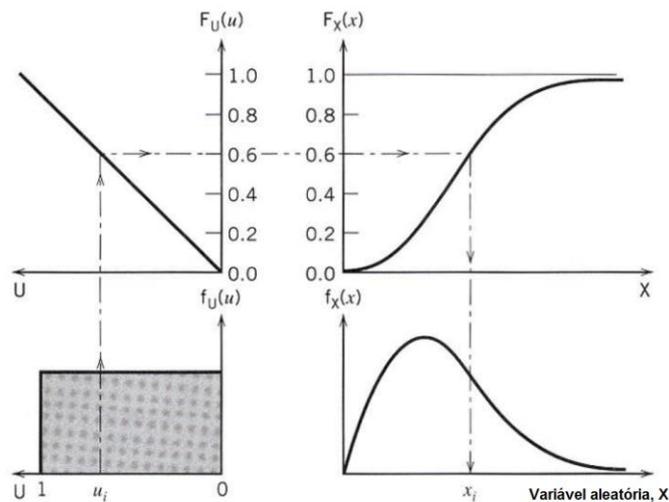


Figura 6.6 - Método da transformada inversa (Adaptado de HALDAR; MAHADEVAN, 2000)

#### 6.4.4 Índice de confiabilidade

O nível de segurança atingido por uma estrutura é normalmente expresso através do chamado índice de confiabilidade  $\beta$ . O valor do índice de confiabilidade possui associado a si uma probabilidade de falha, de forma que estes são relacionados através das expressões (6.21) e (6.22) (NOWAK; COLLINS, 2000).

$$\beta = -\Phi^{-1}(p_f) \quad (6.21)$$

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (6.22)$$

A Figura 6.7 apresenta graficamente a relação entre o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha.

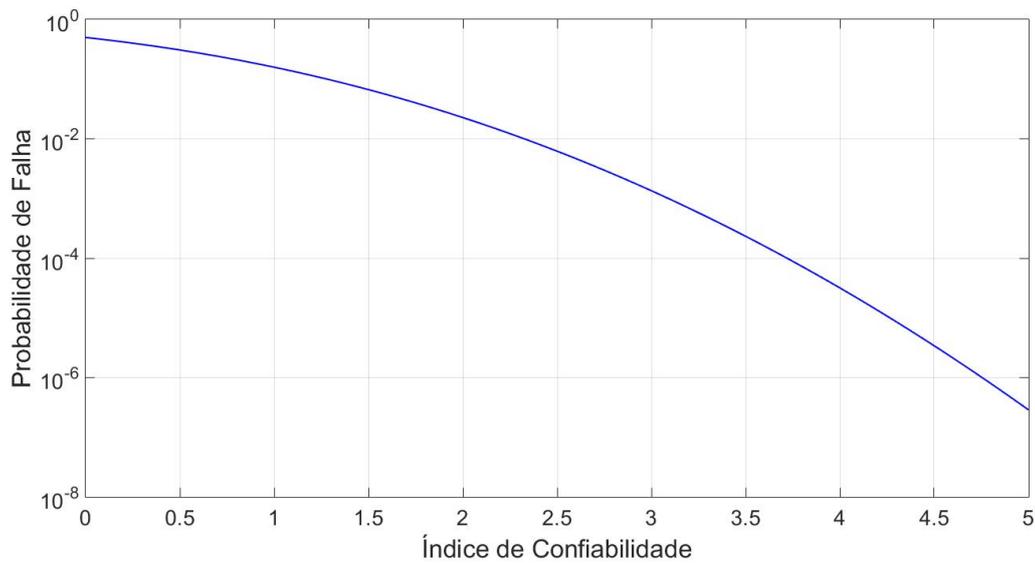


Figura 6.7 - Relação entre índice de confiabilidade e probabilidade de falha.

Deve-se observar a semelhança entre as expressões (6.22) e (6.13), de forma que quando as variáveis resistência e solicitação apresentem distribuição normal de probabilidade e forem estatisticamente independentes, o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser obtido diretamente pela expressão (6.23).

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} \quad (6.23)$$

## 6.5 FORM E A INTERPRETAÇÃO DE PRIMEIRA ORDEM

Em muitos métodos de análise de confiabilidade, o nível de segurança de um modelo é expresso diretamente pelo seu índice de confiabilidade  $\beta$ . Dentre os métodos mais utilizados está o FORM (*First-Order Reliability Method*) (HALDAR; MAHADEVAN, 2000). Para problemas cuja função performance apresenta-se não-linear, a formulação desses métodos compreende a representação da função performance através de uma expansão em Série de Taylor truncada em seu termo de primeira ordem, justificando o fato de serem chamados também de métodos de primeira ordem (NOWAK; COLLINS, 2000).

Uma vez que o tipo de distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias esteja estabelecido, a aplicação do FORM é viabilizada reescrevendo a função performance original, função do vetor de variáveis aleatórias no espaço real,  $\mathbf{X}$ , correlacionadas ou não, em termos de variáveis

aleatórias normais equivalentes, padronizadas e estatisticamente independentes, representadas vetorialmente por  $\mathbf{X}'$ . O índice de confiabilidade  $\beta$  corresponderá à menor distância entre a superfície de falha no sistema normal padronizado,  $g(\mathbf{X}') = 0$ , e a origem deste sistema, conforme ilustrado na Figura 6.8.

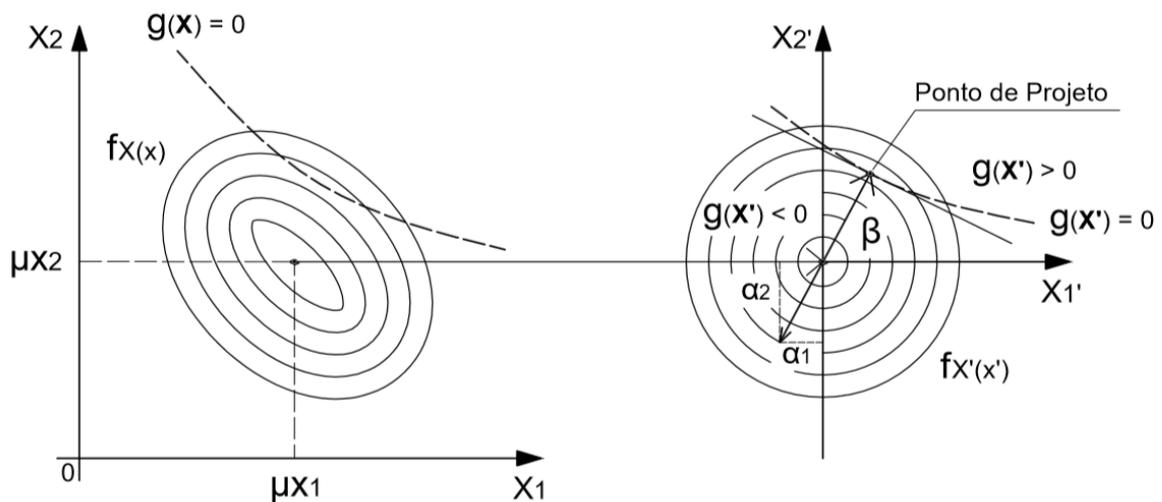


Figura 6.8 - Índice de confiabilidade e a transformação para o sistema normal padronizado decorrelacionado (Adaptado de PALIGA, 2008).

Para uma variável genérica  $X_i$  com distribuição normal de probabilidade, esta pode ser representada no sistema normal padronizado, ou sistema reduzido, conforme (6.24).

$$X_i = \mu_x + X_i' \sigma_x \quad (6.24)$$

Sendo a distância entre a origem e um dado ponto no sistema reduzido das variáveis aleatórias dada por  $D = \sqrt{\mathbf{X}'^T \mathbf{X}'}$ , a determinação do índice de confiabilidade consiste em minimizar distância  $D$  obedecendo à restrição  $g(\mathbf{X}) = 0$ . Empregando-se o método dos multiplicadores de Lagrange, obtém-se (6.25).

$$L = \sqrt{\mathbf{X}'^T \mathbf{X}'} + \lambda \cdot g(\mathbf{X}) \quad (6.25)$$

Derivando a expressão (6.25) em relação às variáveis  $X_i'$  e ao multiplicador de Lagrange  $\lambda$ , obtêm-se as expressões (6.26) e (6.27), correspondentes a um sistema de  $(n+1)$  equações e  $(n+1)$  incógnitas.

$$\frac{X'_i}{\sqrt{\mathbf{X}'^T \mathbf{X}'}} + \lambda \cdot \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial X'_i} = 0 \quad (6.26)$$

$$g(\mathbf{X}) = 0 \quad (6.27)$$

Empregando a regra da cadeia e a relação exposta em (6.24), determinam-se as componentes do vetor gradiente, dado pela expressão (6.28).

$$\frac{\partial g}{\partial X'_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial X'_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \quad (6.28)$$

Reescrevendo a expressão (6.26) em forma matricial, podem ser obtidas as relações dadas por (6.29). Substituindo (6.29) em  $D = \sqrt{\mathbf{X}'^T \mathbf{X}'}$ , obtém-se (6.30) e, por conseguinte, a expressão (6.31).

$$\mathbf{X}' = -\lambda D \cdot \frac{\partial g}{\partial X'_i} = -\lambda D \cdot \mathbf{G} \quad (6.29)$$

$$\lambda = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1/2} \quad (6.30)$$

$$\mathbf{X}' = -\frac{\mathbf{G}}{\sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}} D \quad (6.31)$$

Sendo  $\mathbf{G}$  o vetor gradiente da função performance  $g(\mathbf{X})$ . Por fim, pré-multiplicando a expressão (6.31) por  $\mathbf{G}^T$ , obtém-se (6.32).

$$D = -\frac{\mathbf{G}^T}{\sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}} \mathbf{X}' \quad (6.32)$$

Logo, satisfazendo a expressão (6.27), a expressão (6.32) corresponderá à menor distância da origem do espaço reduzido ao ponto de projeto (ou ponto provável de falha) sobre a superfície de falha, denotado  $\mathbf{x}'^*$ . O índice de confiabilidade, portanto, é obtido por (6.33).

$$\beta = -\frac{\mathbf{G}^{*T}}{\sqrt{\mathbf{G}^{*T}\mathbf{G}^*}}\mathbf{x}'^* \quad (6.33)$$

Na expressão (6.33), a notação ‘\*’ indica que o vetor das variáveis aleatórias e as derivadas parciais do gradiente são avaliadas no ponto de projeto. Como este ponto não é conhecido *a priori*, o valor de  $\beta$  é obtido por aproximações sucessivas. O cosseno diretor  $\alpha_i$  para cada variável, conforme ilustrado na Figura 6.8, é dado por (6.34), sendo o ponto de projeto  $x'^*_i$  da respectiva variável no sistema reduzido obtido por (6.35).

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)^{2*}}} \quad (6.34)$$

$$x'^*_i = -\alpha_i\beta \quad (6.35)$$

Alternativamente, uma vez determinado o vetor de pontos de projeto no espaço reduzido,  $\mathbf{x}'^*$ , o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser obtido por intermédio da expressão (6.36), que corresponde à distância do ponto de projeto à origem do sistema reduzido.

$$\beta = \sqrt{\mathbf{x}'^{*T}\mathbf{x}'^*} \quad (6.36)$$

## 7 CONFIABILIDADE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

### 7.1 CARACTERIZAÇÃO DAS VIGAS ESTUDADAS

Neste trabalho são avaliados os índices de confiabilidade obtidos para um modelo de viga biapoiada de seção retangular, ilustrada na Figura 7.1, onde também são apresentadas genericamente as armaduras tracionadas e comprimidas obtidas de acordo com os critérios de dimensionamento da NBR-6118:2014, apresentados no capítulo 3. A viga em questão possui um vão fixo de 500cm e uma largura fixa de 20cm, sendo submetida a um carregamento distribuído característico, composto por uma parcela permanente e por uma parcela acidental.

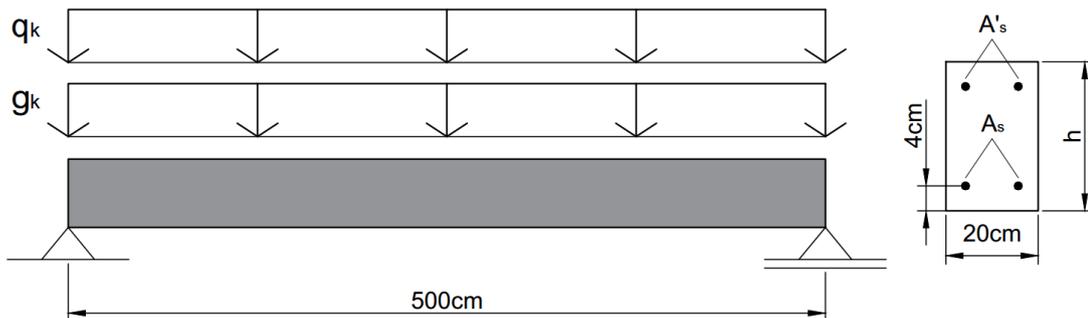


Figura 7.1 - Configuração estrutural da viga estudada.

O estudo paramétrico desenvolvido nesta pesquisa é feito com base na variação de quatro parâmetros que são bem estabelecidos em uma etapa de projeto, sendo estes a resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ); a altura da seção transversal ( $h$ ); a razão de carregamento ( $r$ ), dada por  $q_k/g_k$ ; e o carregamento característico total ( $p_k$ ), dado por  $(g_k + q_k)$ . Foram atribuídos três diferentes valores para cada um dos parâmetros estudados, os quais são apresentados a seguir:

- Resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ): consideraram-se os valores de 25, 35 e 45MPa, todos pertencentes ao Grupo I (Resistência normal), os quais são usualmente empregados no projeto de vigas de concreto armado.

- b) Altura da seção transversal ( $h$ ): foram adotados os valores de 40, 50 e 60cm, valores estes usuais em edificações correntes e que são compatíveis no que se refere aos estados-limites de serviço a serem atendidos.
- c) Razão de carregamento ( $r$ ): foram consideradas as razões de carregamento 0,50, 1,00 e 2,00. Estas razões englobam combinações de ações nas quais há preponderância de cargas permanentes ( $r = 0,50$ ) e cargas acidentais ( $r = 2,00$ ), sendo também considerada a situação em que a combinação apresenta a mesma proporção de carga permanente e acidental ( $r = 1,00$ ).
- d) Carregamento característico total ( $p_k$ ): os valores de 15, 20 e 25kN/m foram considerados, os quais são significativos em relação aos diferentes níveis de carregamento esperado em uma edificação residencial usual.

Dessa forma, combinando os diversos valores para os parâmetros apresentados, são obtidos os índices de confiabilidade para um total de 81 vigas, as quais são identificadas segundo a nomenclatura  $V - f_{ck} - h - r - p_k$ . Os resultados obtidos para o dimensionamento em relação ao estado-limite último das solicitações normais (flexão simples), bem como as verificações dos estados-limites de serviços, são apresentadas no Apêndice B.

## 7.2 ANSYS E A FERRAMENTA PDS

As análises numéricas pelo Método dos Elementos Finitos são feitas, em sua grande maioria, deterministicamente, de forma que se obtém um resultado único (Carga de ruptura, deslocamento uma seção específica, dentro outros) a partir de um conjunto bem definido de parâmetros de entrada que caracterizam o modelo. Em um estudo de confiabilidade, requer-se um número representativo de amostras que permitam caracterizar o comportamento estatístico de uma dada variável de interesse, sendo isso possível apenas gerando-se valores aleatórios a partir das distribuições de probabilidade definidas para as variáveis de entrada do modelo.

O ANSYS dispõe da chamada ferramenta *PDS (Probabilistic Design System)*, a qual permite o usuário realizar análises probabilísticas, definindo um conjunto de variáveis de entrada e suas respectivas distribuições de probabilidade teóricas. Essa ferramenta possibilita o emprego de dois métodos probabilísticos: O Método de Monte Carlo e o Método da Superfície de Resposta (ANSYS, 2013<sup>b</sup>).

### 7.2.1 Método de Monte Carlo

O Método de Monte Carlo, cuja fundamentação se apresentou no item 6.4, consiste na geração aleatória de  $N$  valores para as variáveis de entrada do modelo a partir das distribuições teóricas que foram atribuídas às mesmas. Como consequência, se obtém um conjunto de valores para os resultados através da solução do problema de forma determinística por  $N$  vezes. A Figura 7.2 elucida a saída de dados fornecida pelo ANSYS para a execução de uma análise probabilística considerando as variáveis aleatórias de entrada  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ .

TEST1									
ITER	CYCL	LOOP	ERR		X1	X2	X3		RESULT
1	1	1	0		1.619379209e+000	2.364528435e-001	1.470789050e+000		4.162928057e+000
1	1	2	0		2.237676559e-001	5.788049712e-001	1.821263115e+000		4.744249212e+000
1	1	3	0		7.931615474e+000	8.278689033e-001	2.170793522e+000		1.149997825e+001
..	..	..	..		...	...	...		...
..	..	..	..		...	...	...		...

Figura 7.2 - Geração aleatórias de parâmetros de entrada e obtenção de resultados pelo Método de Monte Carlo (ANSYS, 2013<sup>d</sup>).

A ferramenta *PDS* admite que se trabalhe com alguns de tipos de distribuição de probabilidade pré-estabelecidos, incluindo as distribuições do tipo Normal, Lognormal, Triangular, Uniforme, Exponencial, Beta, Gamma e Weibull (ANSYS, 2013<sup>b</sup>).

Em relação as técnicas de amostragem, a ferramenta *PDS* permite que o emprego das chamadas Amostragem Direta e Amostragem *Latin-Hypercube*. A Amostragem Direta consiste em uma geração aleatória sem “memória”, o que pode conduzir a geração de pontos amostrais próximos (Figura 7.3a). A Amostragem *Latin-Hypercube*, por sua vez, é em uma técnica de amostragem que consiste na estratificação do domínio de probabilidade da variável aleatória em intervalos equiprováveis. Dentro de cada intervalo equiprovável é gerada aleatoriamente apenas uma amostra, não sendo o mesmo intervalo repetido em outras simulações. Dessa forma, garante-se uma “memória” na geração dos pontos amostrais e cobre-se todo o domínio de probabilidade da variável, evitando a geração de pontos muito próximos (Figura 7.3b) e acelerando o processo de convergência estatística dos resultados (MCKAY et al, 1979).

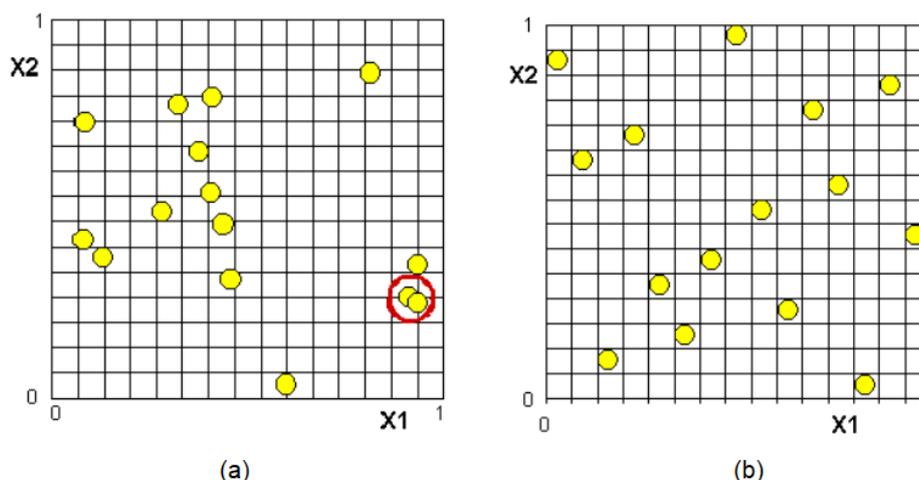


Figura 7.3 - Geração de pontos amostrais por Amostragem Direta (a) e Amostragem *Latin-Hypercube* (b) (Adaptado de ANSYS, 2013<sup>b</sup>).

### 7.2.2 Método da Superfície de Resposta

Em alguns casos, o estudo de confiabilidade é realizado por intermédio de modelos numéricos, tal como o Método dos Elementos Finitos. Como consequência, não se dispõe, nesses casos, de uma função performance  $g(\mathbf{X})$  explícita, sendo a mesma função implícita dos resultados obtidos via simulação numérica. Uma alternativa a estas situações é o emprego do Método da Superfície de Resposta (GOMES, 2001).

O Método da Superfície de Resposta tem como premissa assumir que a influência das variáveis aleatórias de entrada em uma dada variável de saída (Carga de ruptura, deslocamentos, dentre outros) pode ser representada através de uma função aproximadora, tradicionalmente polinomial (MONTGOMERY, 2012). Desta forma, baseado nos resultados obtidos para um dado número de simulações de Monte Carlo, uma função linear ou quadrática (com ou sem termos cruzados) pode ser aproximada através de regressão dos resultados discretos obtidos numericamente. A forma genérica para uma superfície de resposta é apresentada na expressão (7.1) (ANSYS, 2013<sup>d</sup>).

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i x_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i x_j \quad (7.1)$$

Onde:

$y$  – Superfície de resposta genérica;

$a_0, a_i, a_{ij}$  – Coeficientes ajustados via regressão dos dados;

$x_i, x_j$  – Variáveis aleatórias.

Neste método, cada variável aleatória é avaliada em níveis específicos de probabilidade. Como principal vantagem, o Método da Superfície de Resposta requer um número pequeno de simulações para caracterizar o polinômio aproximador. Dessa forma, uma vez determinado tal polinômio, quaisquer análises podem ser feitas sobre o mesmo, permitindo abdicar o emprego direto do modelo em Elementos Finitos, o qual, por sua natureza, é mais oneroso em termos computacionais (BECK, 1999).

Para o método da Superfície de Resposta, dispõe-se de algumas diferentes técnicas de amostragem. Neste trabalho foi empregada a técnica chamada *Central Composite Design* (MONTGOMERY, 2012). Dessa forma, cada variável aleatória é amostrada em cinco diferentes níveis de probabilidade  $p_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ). Estes pontos, em função da combinação dos valores entre as distintas variáveis aleatórias de entrada envolvidas, podem ser classificados como ponto de centro (*center point*), pontos de eixo (*axis point*) ou pontos fatoriais (*factorial points*) (ANSYS, 2013<sup>b</sup>).

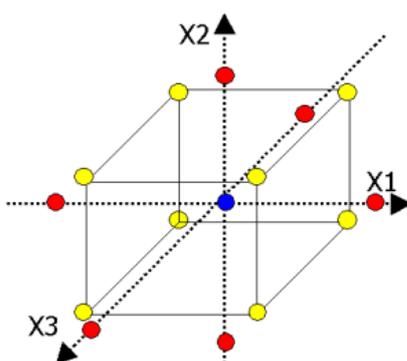


Figura 7.4 - Pontos de amostragem para o método *Central Composite Design* (ANSYS, 2013<sup>b</sup>).

- a) **Center point:** No ponto de centro, todas as variáveis aleatórias são avaliadas em um dado nível de probabilidade acumulada igual a  $p_3$ ;
- b) **Axis points:** Nos pontos de eixo, uma das variáveis aleatórias é avaliada nos níveis de probabilidade acumulada  $p_1$  e  $p_5$ , enquanto as demais variáveis aleatórias são avaliadas

no ponto de centro. Dessa forma, para um número total  $N$  de variáveis aleatórias, ter-se-á um total de  $2N$  pontos de eixo.

- c) **Factorial points:** Nos pontos fatoriais, cada variável aleatória assumirá valores correspondentes as permutações dos níveis de probabilidade acumulada  $p_2$  e  $p_4$ . O número total de pontos fatoriais será  $2^{(N-f)}$ , onde o valor de  $f$  será função do número de variáveis aleatórias de entrada, conforme apresentado na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 - Número requerido de simulações no MSR (Adaptado de ANSYS, 2013<sup>d</sup>).

Número de variáveis aleatórias de entrada	Número de coeficientes da função quadrática	Número fatorial $f$	Número requerido de simulações
2	6	0	9
3	10	0	15
4	15	0	25
5	21	1	27
6	28	1	45
7	36	1	79
8	45	2	81
9	55	2	147
10	66	3	149

### 7.3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONSIDERADAS

A análise de modelos sob a ótica probabilística necessita que seja estabelecido um conjunto de variáveis aleatórias que permita refletir, do ponto de vista computacional, a variabilidade esperada em uma estrutura real. Obviamente, o número de variáveis que afetam o comportamento real de um modelo dificilmente pode ser mensurado. Logo, do ponto de vista da pesquisa, esse número deve ser limitado. Um critério razoável na seleção dessas variáveis é contemplar aquelas que sabidamente são significativas em relação ao estado-limite estudado.

Neste trabalho foram consideradas dez variáveis aleatórias (VA's) para o estudo da confiabilidade de vigas em relação ao estado-limite último de flexão, as quais são apresentadas detalhadamente nos itens subsequentes. Estas variáveis contemplam as propriedades mecânicas do concreto e aço, a geometria do modelo, as ações atuantes e também as incertezas inerentes ao modelamento da resistência e solicitação.

### 7.3.1 Resistência à compressão do concreto ( $f_c$ )

Utiliza-se, neste trabalho, uma distribuição normal de probabilidade para a representação da resistência à compressão do concreto, conforme sugerido no trabalho de Galambos et al (1982) e pela NBR-12655 (ABNT, 2015), sendo também adotada nas pesquisas de Real (2000), Agrawal e Bhattacharya (2010) e Magalhães et al (2016). Os valores de média e desvio padrão são obtidos por intermédio das expressões (7.2) e (7.3), respectivamente.

$$\mu_{f_c} = \frac{f_{ck}}{(1,0 - 1,645V_{f_c})} \quad (7.2)$$

$$\sigma_{f_c} = V_{f_c} \cdot \mu_{f_c} \quad (7.3)$$

De acordo com Mirza et al (1979, *apud* REAL, 2000), o coeficiente de variação da resistência à compressão compreende-se na faixa de 0,10 a 0,20, sendo função do controle de qualidade empregado na produção do concreto. Adota-se nesta pesquisa  $V_{f_c} = 0,10$ , valor próximo aos obtidos por Nowak e Szerszen (2003), sendo sugerido também por Szerszen et al (2005) e Gomes (2001).

### 7.3.2 Resistência à tração do concreto ( $f_{ct}$ )

Em relação à resistência do concreto à tração, o valor médio é obtido pela expressão (7.4), de acordo com o indicado pelo código modelo *fib* 2010 (CEB, 2012), para concretos de resistência normal.

$$\mu_{f_{ct}} = 0,30f_{ck}^{2/3} \quad (7.4)$$

Sendo os valores  $f_{ck}$  e  $\mu_{f_{ct}}$  expressos em MPa. Assim como nos trabalhos de Real (2000) e Coelho (2011), emprega-se uma distribuição normal de probabilidade para a representação da resistência à tração do concreto, sendo o coeficiente de variação assumido como  $V_{f_{ct}} = V_{f_c}$ . O desvio padrão da resistência à tração do concreto é dado por (7.5).

$$\sigma_{f_{ct}} = V_{f_{ct}} \cdot \mu_{f_{ct}} \quad (7.5)$$

### 7.3.3 Módulo de elasticidade do concreto ( $E_c$ )

O valor médio do módulo de elasticidade do concreto é obtido a partir do valor médio da resistência à compressão (CEB, 2012), de acordo com a expressão (7.6), sendo também empregada uma distribuição normal de probabilidade, conforme Real (2000) e Coelho (2011).

$$\mu_{E_c} = E_{c0} \alpha_E \left( \frac{\mu_{f_c}}{10} \right)^{1/3} \quad (7.6)$$

O coeficiente de variação adotado para o módulo de elasticidade é igual ao da resistência à compressão,  $V_{E_c} = V_{f_c}$ , critério esse adotado por Real (2000) e cujo valor  $V_{E_c} = 0,10$  aproxima-se daqueles utilizados por Gomes (2001) e Coelho (2011). O desvio padrão do módulo de elasticidade do concreto é, portanto, obtido através da expressão (7.7).

$$\sigma_{E_c} = V_{E_c} \cdot \mu_{E_c} \quad (7.7)$$

### 7.3.4 Tensão de escoamento da armadura ( $f_y$ )

Neste trabalho, a tensão de escoamento da armadura passiva é representada, conforme sugerido pela JCSS (2001), Nowak e Szerszen (2003) e Stucchi et al (2011), por uma distribuição normal de probabilidade, sendo sua média dada pela expressão (7.8).

$$\mu_{f_y} = \frac{f_{yk}}{(1,0 - 1,645V_{f_y})} \quad (7.8)$$

Em função de sua composição e do maior controle de qualidade empregado na produção de peças de aço, estas tendem a apresentar menores variabilidades quando comparadas ao concreto, assumindo coeficientes de variação entre 0,05 e 0,10 (REAL, 2000). Adotou-se nesta pesquisa um coeficiente de variação  $V_{f_y} = 0,05$ , valor este próximo ao apresentado pela JCSS (2001) e sugerido por Nowak e Szerszen (2003), a partir de resultados de ensaios experimentais. O desvio padrão da tensão de escoamento é, portanto, obtido por (7.9).

$$\sigma_{f_y} = V_{f_y} \cdot \mu_{f_y} \quad (7.9)$$

### 7.3.5 Altura da seção transversal (h)

A altura da seção transversal é representada como uma variável aleatória com distribuição normal de probabilidade (JCSS, 2001), sendo a média, dada em (7.10), igual ao valor nominal  $h_n$  especificado em projeto, de acordo com o sugerido por Real (2000) e Biondini et al (2004).

$$\mu_h = h_n \quad (7.10)$$

A variabilidade esperada nas dimensões da seção transversal está especialmente associada ao controle de qualidade empregado na construção dos elementos. Adotou-se neste trabalho  $\sigma_h = 0,50\text{cm}$ , considerando um bom controle de qualidade (REAL, 2000). Este valor também foi adotado por Biondini et al (2004) e apresenta-se próximo aos dispostos pela JCSS (2001) e àqueles medidos experimentalmente por Mirza e MacGregor (1982) e Udoeyo e Ugben (1995, *apud* REAL, 2000).

### 7.3.6 Distância da armadura tracionada à borda inferior da seção (d')

Baseado na JCSS (2001) e nos trabalhos de Stucchi et al (2011) e Biondini et al (2004), adota-se o valor médio da distância da armadura tracionada à borda inferior da seção transversal como o valor nominal  $d'_n$  especificado em projeto, de acordo com a expressão (7.11), sendo esta variável representada por uma distribuição normal de probabilidade (JCSS, 2001).

$$\mu_{d'} = d'_n \quad (7.11)$$

Com base no trabalho de Stucchi et al (2011), considerou-se um coeficiente de variação  $V_{d'} = 0,125$ , sendo o desvio padrão dado por (7.12). Este valor concorda com os apresentados pela JCSS (2001), Biondini et al (2004) e Magalhães et al (2016).

$$\sigma_{d'} = V_{d'} \cdot \mu_{d'} \quad (7.12)$$

### 7.3.7 Parcela permanente do carregamento (G)

O carregamento permanente atuante em uma estrutura é dado pela parcela da carga que não apresenta significativas variações temporais ao longo da vida útil da estrutura. Adota-se neste trabalho uma distribuição de probabilidade normal para o carregamento permanente, conforme

sugerido por Galambos et al (1982), Nowak e Collins (2000) e Coelho (2011), sendo o valor médio dado por (7.13).

$$\mu_g = 1,05g_k \quad (7.13)$$

Em que  $g_k$  corresponde ao valor característico do carregamento permanente. Ainda conforme os autores citados, pode-se considerar um coeficiente de variação  $V_g = 0,10$ , sendo o desvio padrão da carga permanente dado por (7.14).

$$\sigma_g = V_g \cdot \mu_g \quad (7.14)$$

### 7.3.8 Parcela acidental do carregamento (Q)

De acordo com a norma NBR-8681 (ABNT, 2003), a carga acidental caracteriza-se por apresentar consideráveis variações temporais ao longo da vida útil da estrutura. Uma distribuição de Valores Extremos Tipo I (Distribuição de Gumbel) é utilizada na representação do carregamento acidental, conforme indicado por Galambos et al (1982), Diniz e Frangopol (1997) e Agrawal e Bhattacharya (2010).

Considerando que a norma NBR-8681 (ABNT, 2003) define o valor característico do carregamento acidental como aquele que apresenta, em média, uma probabilidade de 30% de ser superado em um período de 50 anos, adotou-se a expressão (7.15) para o cálculo do valor médio da carga acidental. Essa expressão também foi empregada no trabalho de Silva (2017).

$$\mu_q = \frac{q_k}{(1,0 + 0,35V_q)} \quad (7.15)$$

Em que  $q_k$  corresponde ao valor característico da parcela acidental do carregamento. Galambos et al (1982) e Diniz e Frangopol (1997) sugerem um coeficiente de variação  $V_q = 0,25$ , sendo o desvio padrão dado por (7.16).

$$\sigma_q = V_q \cdot \mu_q \quad (7.16)$$

### 7.3.9 Parâmetros de incerteza do modelo resistente e solicitante ( $\theta_R$ e $\theta_S$ )

Em adição aos parâmetros relacionadas aos materiais, geometria e carregamento, consideram-se ainda duas variáveis aleatórias relativas às incertezas gerais do modelo resistente e solicitante, designadas  $\theta_R$  e  $\theta_S$ , respectivamente. Estas variáveis são empregadas para cobrir incertezas relacionadas às simplificações matemáticas adotadas e por quaisquer efeitos randômicos que porventura não sejam contemplados no modelo (JCSS, 2001). Neste trabalho, as variáveis  $\theta_R$  e  $\theta_S$  têm média igual à unidade ( $\mu_{\theta_R} = \mu_{\theta_S} = 1,0$ ) e um desvio padrão de 0,05 ( $\sigma_{\theta_R} = \sigma_{\theta_S} = 0,05$ ), conforme sugerido por Gomes (2001) e Santos et al (2014). Estes valores também são próximos daqueles sugeridos por Stucchi et al (2011). A distribuição de probabilidade adotada para estas variáveis é a lognormal (JCSS, 2001).

## 7.4 FUNÇÃO PERFORMANCE ADOTADA

A função performance adotada neste trabalho, que representa a margem de segurança das vigas em relação ao estado-limite último de flexão, é representada pela expressão (7.17).

$$g(\mathbf{X}) = \theta_R \mathbf{R} - \theta_S (G + Q) \quad (7.17)$$

Sendo:

$\mathbf{R}$  – Função que representa a distribuição de probabilidade da resistência do modelo;

$G, Q$  – VA's correspondentes ao carregamento permanente e acidental, respectivamente;

$\theta_R, \theta_S$  – VA's correspondentes às incertezas do modelo resistente e solicitante, respectivamente.

Dessa forma, como resultado do comportamento aleatório das variáveis que a compõe, haverá combinações em que vai se obter  $g(\mathbf{X}) < 0$ , representando a falha em relação ao estado-limite estabelecido. São empregadas, neste trabalho, três metodologias para a construção da função performance e, portanto, para a obtenção do índice de confiabilidade por intermédio da expressão geral (7.17), sendo estes detalhados a seguir. Um *script* em linguagem APDL correspondente à metodologia 1 é apresentado no Apêndice C.

### 7.4.1 Metodologia 1 ( $\beta_1$ )

A primeira metodologia consiste em assumir a função que representa o modelo resistente como uma variável aleatória  $R$ , de média  $\mu_R$  e desvio padrão  $\sigma_R$ . É realizado, portanto, um número

suficiente de simulações de Monte Carlo, via Método dos Elementos Finitos, até que se atinja a convergência estatística para os valores de  $\mu_R$  e  $\sigma_R$ . Nesta metodologia foi considerada, ainda, a correlação positiva entre as propriedades mecânicas do concreto ( $f_c$ ,  $f_{ct}$  e  $E_c$ ). Para tal, adotaram-se os coeficientes de correlação  $\rho_{ct} = 0,80$  (correlação entre  $f_c$  e  $f_{ct}$ ),  $\rho_{ce} = 0,90$  (correlação entre  $f_c$  e  $E_c$ ) e  $\rho_{te} = 0,70$  (correlação entre  $f_{ct}$  e  $E_c$ ) (REAL, 2000).

Verificou-se que um total de 400 simulações de Monte Carlo foram suficientes para se obter os valores de  $\mu_R$  e  $\sigma_R$  de cada uma das 81 vigas estudadas. A Figura 7.5 apresenta, a título de ilustração, os gráficos de convergência estatística para os valores de  $\mu_R$  e  $\sigma_R$ , em termos de carga distribuída, correspondentes à viga V-25-40-r-15.

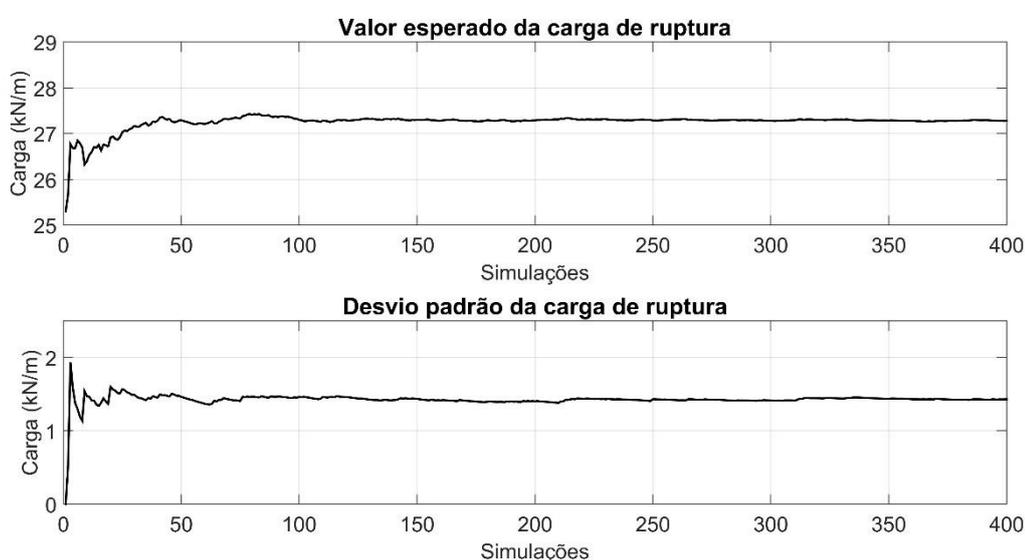


Figura 7.5 - Convergência estatística da resistência da viga V-25-40-r-15.

O conjunto de dados da resistência de cada modelo foi ajustado segundo uma distribuição de probabilidade teórica conhecida. Este procedimento já foi empregado por outros autores, citando-se os trabalhos desenvolvidos por Magalhães et al (2016), Szerszen et al (2005), Szerszen e Nowak (2003), Diniz e Frangopol (1998), Ferreira et al (2008) e Real (2000).

Utilizaram-se, inicialmente, as distribuições de probabilidade do tipo Normal, Lognormal e Weibull para o ajuste aos dados de resistência obtidos via simulação. A qualidade destes ajustes foi verificada através dos testes de aderência de Kolmogorov-Smirnov e Anderson-Darling (ANG; TANG, 2007), a um nível de significância de 5,0%. Dessa forma, com uma confiança de 95%, pode-se afirmar que os dados amostrais são representados pelas distribuições teóricas testadas (MONTGOMERY; RUNGER, 2009). As Figuras 7.6 a 7.8 apresentam os histogramas

e os gráficos de probabilidade acumulada obtidos, através de 400 simulações, para as vigas com resistência característica à compressão de 25MPa e altura de 40cm, dimensionadas para os carregamentos característicos de 15kN/m, 20kN/m e 25kN/m, respectivamente.

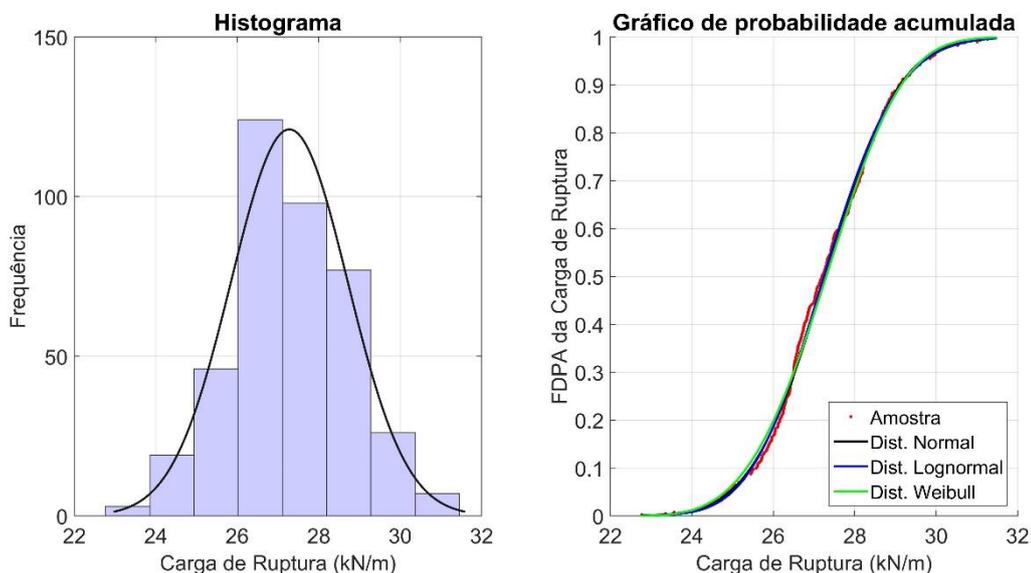


Figura 7.6 - Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-0,50-15 (400 simulações).

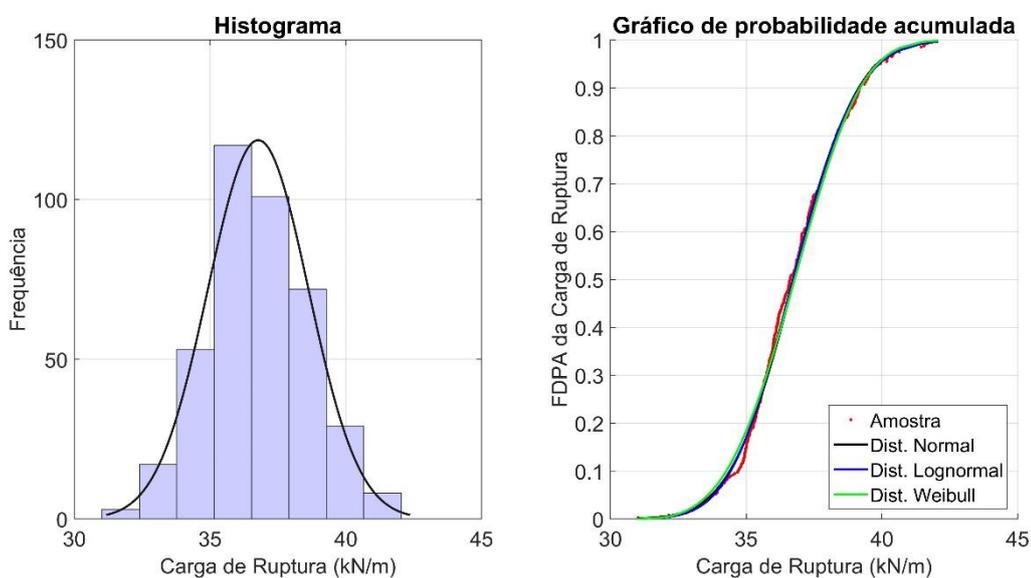


Figura 7.7 - Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-0,50-20 (400 simulações).

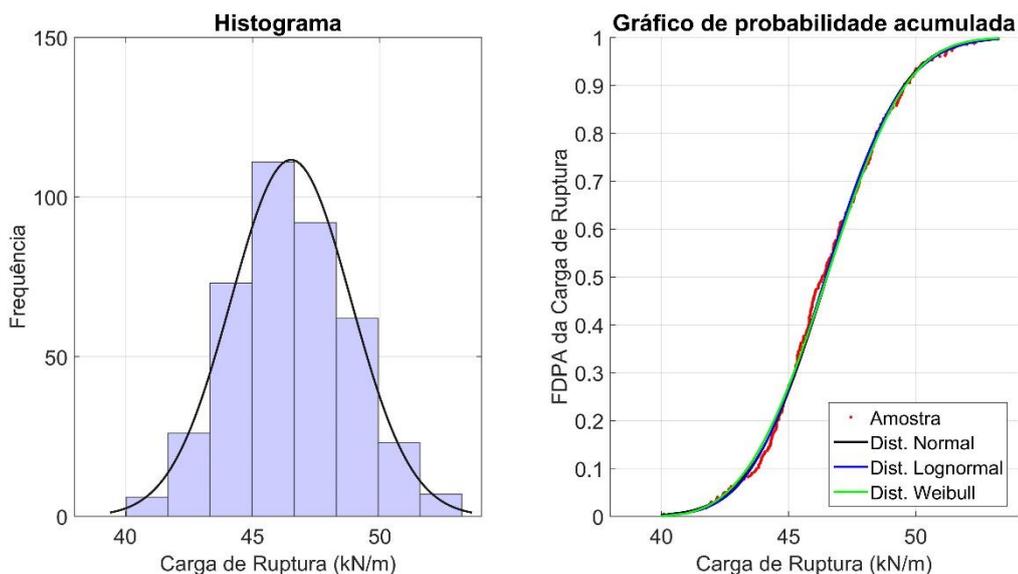


Figura 7.8 - Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-0,50-25 (400 simulações).

Observa-se que as três distribuições teóricas atribuídas conduzem a uma qualidade de ajuste muito similar. Com vistas a avaliar a interferência do número de simulações na qualidade dos ajustes e, conseqüentemente, no estudo de confiabilidade, foram realizadas, para as mesmas vigas acima citadas, um total de 1200 simulações, cujos novos gráficos de ajustes são apresentados nas Figuras 7.9 a 7.11.

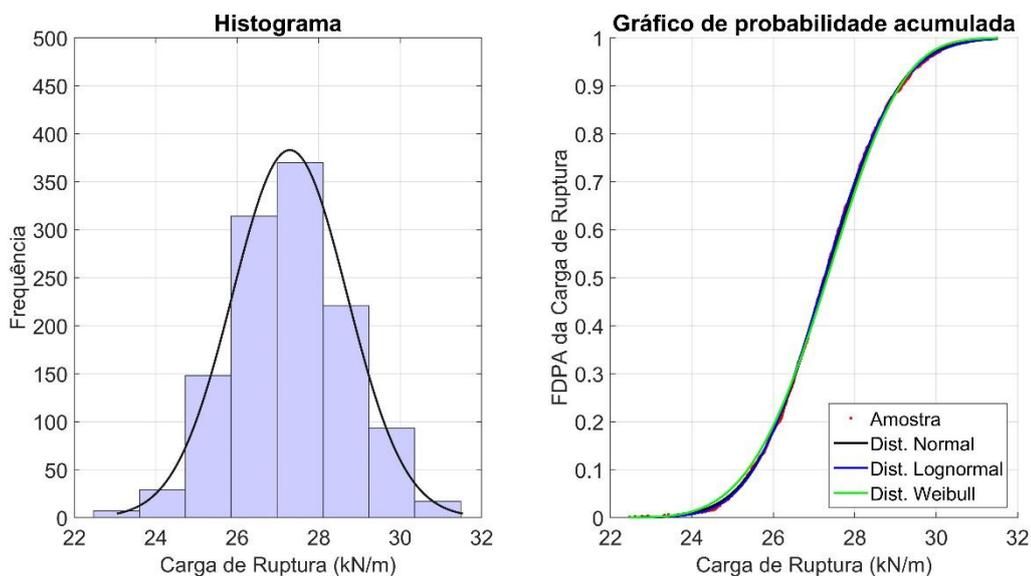


Figura 7.9 - Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-0,50-15 (1200 simulações).

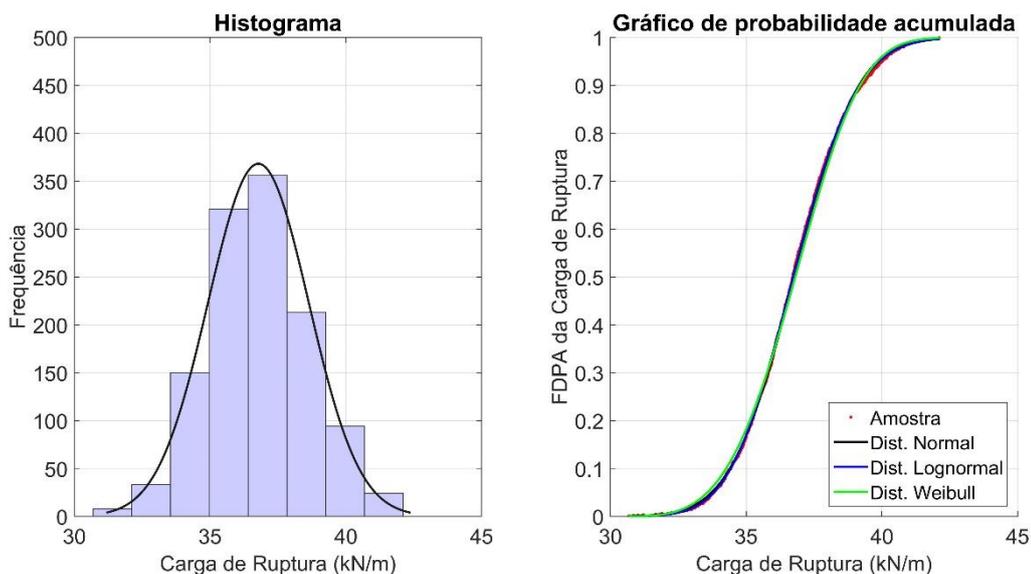


Figura 7.10 - Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-0,50-20 (1200 simulações).

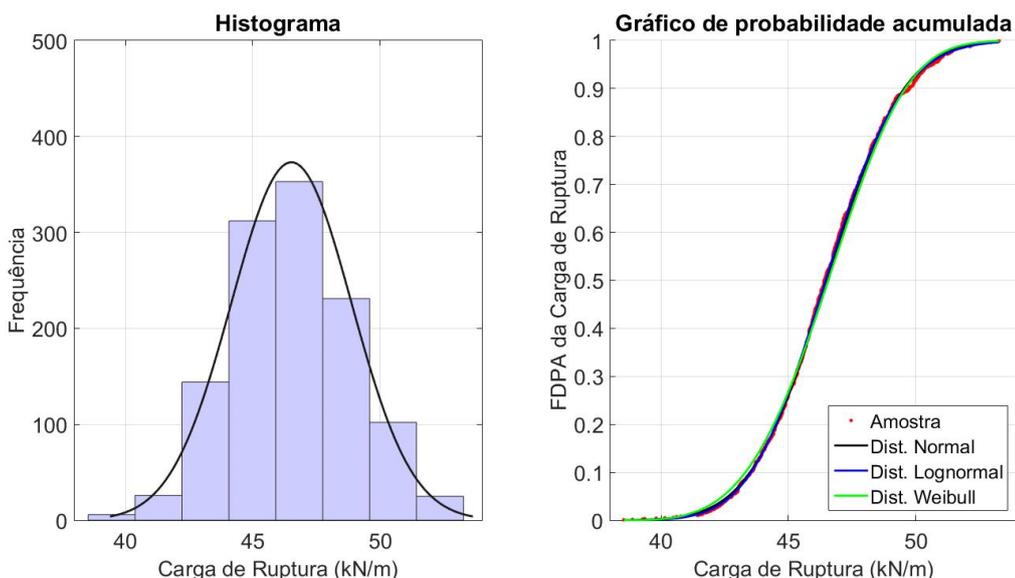


Figura 7.11 - Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-0,50-25 (1200 simulações).

É constatado que um aumento no número de simulações melhora a aderência dos dados às distribuições de probabilidade teóricas atribuídas. Este comportamento é esperado uma vez que, se tratando de um processo aleatório, um maior número de simulações conduzirá a um conjunto de dados melhor distribuído e mais representativo para a caracterização da distribuição de probabilidade (HALDAR; MAHADEVAN, 2000). A Tabela 7.2 apresenta, para as três vigas em questão, os valores de  $\mu_R$  e  $\sigma_R$  em função do número de simulações realizadas.

Tabela 7.2 - Estatísticas da resistência, em kN/m, em função do número de simulações de Monte Carlo.

Viga	400 simulações		1200 simulações	
	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
V-25-40-0,50-15	27,28	1,43	27,29	1,42
V-25-40-0,50-20	36,77	1,85	36,78	1,85
V-25-40-0,50-25	46,51	2,36	46,52	2,36

Os dados dispostos confirmam a convergência estatística dos dados para 400 simulações, sendo observadas mudanças residuais quando da realização de mais simulações. Empregando a função dada em (7.17), foram calculados os índices de confiabilidade para as mesmas três vigas, sendo estes apresentados na Tabela 7.3. Para tal, foram consideradas as três distribuições de probabilidade citadas e um total de 400 e 1200 simulações.

Tabela 7.3 - Valores de  $\beta$  em função da distribuição de probabilidade adotada e número de simulações.

Viga	Distribuição					
	Normal	Lognormal	Weibull	Normal	Lognormal	Weibull
	400 simulações			1200 simulações		
V-25-40-0,50-15	4,08	4,08	4,06	4,08	4,09	4,06
V-25-40-0,50-20	4,15	4,16	4,13	4,16	4,16	4,13
V-25-40-0,50-25	4,22	4,22	4,21	4,22	4,22	4,20

Para cada uma das distribuições atribuídas, verifica-se que o aumento do número de simulações não promove alterações apreciáveis nos índices de confiabilidade. Isso se deve ao fato de o ajuste às distribuições ser realizado fundamentalmente através dos momentos estatísticos provenientes dos dados obtidos via simulação. Logo, uma vez atingida a convergência destes, não se esperam quaisquer alterações significativas nos índices de confiabilidade avaliados, ainda que uma melhor aderência seja observada nos gráficos de probabilidade acumulada.

Em relação aos três tipos de distribuições testadas, observa-se que as diferenças nos índices de confiabilidade não são representativas. A maior discrepância foi observada para a viga V-25-

40-0,50-15, sendo da ordem de apenas 0,70%. Não havendo, portanto, indícios de resultados mais precisos em relação a qualquer uma das distribuições apresentadas, e sabendo-se ainda que todas apresentarão um erro inerente ao ajuste dos dados, optou-se por representar, nesta metodologia, a resistência dos modelos segundo uma distribuição normal de probabilidade, cujas estatísticas são obtidas através de 400 simulações de Monte Carlo.

#### 7.4.2 Metodologia 2 ( $\beta_2$ )

Na metodologia 2, a resistência é considerada como uma variável aleatória  $R$ , de média  $\mu_R$  e desvio padrão  $\sigma_R$ , obtidos através de 400 simulações de Monte Carlo. Pelo exposto em 7.4.1, adota-se uma distribuição normal de probabilidade para a resistência  $R$ .

Diferentemente da primeira metodologia, a metodologia 2 considera as propriedades mecânicas do concreto como variáveis perfeitamente correlacionadas. Dessa forma, gera-se aleatoriamente apenas a resistência à compressão ( $f_c$ ), sendo a resistência à tração ( $f_{ct}$ ) e o módulo de elasticidade ( $E_c$ ) obtidos através das relações apresentadas no capítulo 4.

#### 7.4.3 Metodologia 3 ( $\beta_3$ )

Na terceira metodologia, emprega-se o Método da Superfície de Resposta para a obtenção da resistência das vigas estudadas. Dessa forma, obtêm-se um polinômio semelhante a (7.1). São consideradas como variáveis aleatórias do modelo resistente, a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ), a tensão de escoamento da armadura ( $f_y$ ), a altura da seção transversal ( $h$ ) e a distância da armadura tracionada à borda inferior da seção ( $d'$ ). Tal qual na metodologia 2, a resistência à tração do concreto ( $f_{ct}$ ) e o módulo de elasticidade do concreto ( $E_c$ ) são obtidos pelas relações apresentadas no capítulo 4. De acordo com a Tabela 7.1, portanto, são necessárias apenas 25 simulações para se obter o polinômio aproximador.

A Figura 7.12 elucidada a saída de dados fornecidas pelo ANSYS para a caracterização do polinômio aproximador, desde a comparação dos resultados obtidos pelo modelo numérico com aqueles aproximados pelo polinômio (Figura 7.12a), bem como os coeficientes ( $a_0, a_1, a_{ij}$  - Figura 7.12b) e os termos variáveis ( $x_i, x_j$  - Figura 7.12c).

Sample	Residual Value	Sampled Value	Approximated Value
1	-3.747015e-002	2.727964e+001	2.731711e+001
2	-1.278660e-001	2.668246e+001	2.681032e+001
3	7.257377e-002	2.754569e+001	2.747312e+001
4	-2.486707e-002	2.396726e+001	2.399213e+001
5	-4.820957e-002	3.059389e+001	3.064210e+001
6	-4.379522e-002	2.627375e+001	2.631754e+001
7	6.751861e-004	2.831736e+001	2.831668e+001
8	-4.121319e-003	2.833338e+001	2.833750e+001
9	-8.088652e-003	2.628864e+001	2.629672e+001
10	9.372687e-002	2.550921e+001	2.541549e+001
11	4.511312e-003	2.575140e+001	2.574689e+001
12	2.447155e-002	2.884493e+001	2.882046e+001
13	-3.176944e-002	2.912009e+001	2.915186e+001
14	2.118903e-002	2.643625e+001	2.641506e+001
15	-7.778987e-002	2.666867e+001	2.674646e+001
16	7.780609e-003	2.982781e+001	2.982003e+001
17	6.449714e-002	3.021592e+001	3.015143e+001
18	8.125726e-002	2.455634e+001	2.447509e+001
19	-2.178220e-002	2.478470e+001	2.480648e+001
20	2.772188e-002	2.774781e+001	2.772009e+001
21	-2.308229e-002	2.802840e+001	2.805149e+001
22	1.507227e-002	2.548973e+001	2.547466e+001
23	-2.894265e-002	2.577711e+001	2.580605e+001
24	3.980486e-002	2.875946e+001	2.871966e+001
25	2.450274e-002	2.907556e+001	2.905106e+001

(a)

Term	Value of Coefficient	Stand. Dev. of Coeff.	Prob. Coef.=0
Constant	2.73171e+001	1.6109e-002	<0.0001
FCM_scaled	1.65699e-001	1.1856e-002	<0.0001
FY_scaled	1.66249e+000	1.1856e-002	<0.0001
H_scaled	4.99785e-001	1.1856e-002	<0.0001
DINF_scaled	-5.10194e-001	1.1856e-002	<0.0001
FCM_scaled * FCM_scaled	-4.38481e-002	1.1626e-002	0.0014
FY_scaled * DINF_scaled	-3.99926e-002	1.4521e-002	0.0131

(b)

FCM_scaled	=	2.59489e+000*FCM	-	7.76449e+000
FY_scaled	=	2.85034e-001*FY	-	1.55290e+001
H_scaled	=	1.55290e+000*H	-	6.21159e+001
DINF_scaled	=	1.55290e+000*DINF	-	6.21159e+000

(c)

Figura 7.12 - Valores aproximados (a), coeficientes do polinômio (b) e termos variáveis do polinômio (c) aproximado pelo Método da Superfície de Resposta.

Com isso, a função  $\mathbf{R}$  que compõe (7.17) será  $\mathbf{R} = f(f_c, f_y, h, d')$ , e a função performance  $g(\mathbf{X})$  passará a ser função de oito variáveis aleatórias, sendo quatro correspondentes à resistência e quatro correspondentes às solicitações e às variáveis de incerteza.

## 7.5 ALGORITMO PARA OBTENÇÃO DE $\beta$

Foram apresentados no capítulo 6 dois dos principais métodos para determinar o índice de confiabilidade a partir de uma função performance  $g(\mathbf{X})$ , sendo estes o Método de Monte Carlo e o FORM. Neste trabalho, o índice de confiabilidade  $\beta$  foi obtido através do FORM, o qual é aplicado sobre a função  $g(\mathbf{X})$  dada em (7.17), para cada uma das três metodologias apresentadas. Essa escolha se justifica essencialmente pelo fato do FORM fornecer com poucas iterações, além do índice de confiabilidade, parâmetros que permitem determinar a influência que cada variável aleatória exerce sobre  $\beta$ .

O algoritmo de Rackwitz e Fiessler (1978), apresentado em Haldar e Mahadevan (2000), é empregado para a obtenção do índice de confiabilidade  $\beta$ . Este consiste em linearizar a função  $g(\mathbf{X}')$  partindo de um ponto inicial  $\mathbf{x}_0'^*$ , conforme ilustrado na Figura 7.13.

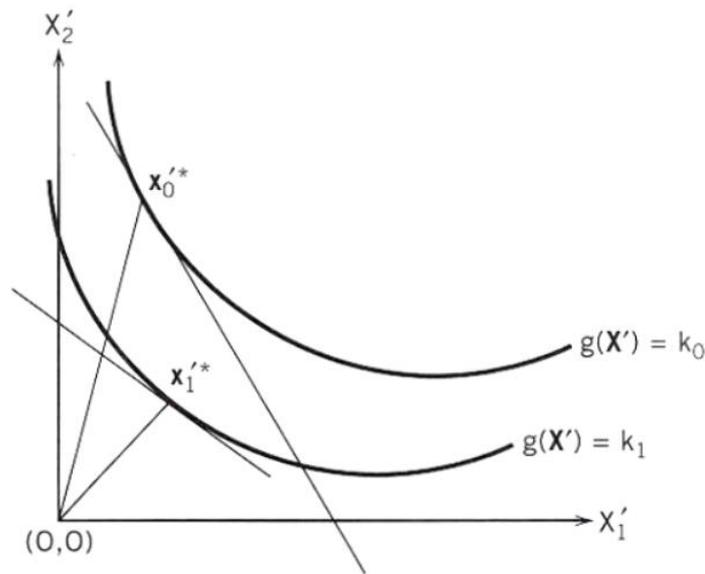


Figura 7.13 - Processo iterativo para determinação do ponto de projeto (Adaptado de HALDAR; MAHEDEVAN, 2000).

Como uma estimativa inicial para o ponto de projeto,  $\mathbf{x}'_0$ , pode-se adotar o valor médio de cada variável aleatória. Como a condição  $g(\mathbf{X}') = 0$  pode não ser satisfeita, emprega-se a fórmula recursiva dada por (7.18) para a estimativa do valor atualizado do vetor de pontos de projeto  $\mathbf{x}'^*$ .

$$\mathbf{x}'_{k+1} = \frac{1}{|\nabla g(\mathbf{x}'_k)|^2} \cdot [\nabla g(\mathbf{x}'_k)^t \cdot \mathbf{x}'_k - g(\mathbf{x}'_k)] \cdot \nabla g(\mathbf{x}'_k) \quad (7.18)$$

Sendo:

$\mathbf{x}'_{k+1}$  – Estimativa do vetor com os pontos de projeto para a próxima iteração;

$\mathbf{x}'_k$  – Vetor com os pontos de projeto na iteração atual;

$\nabla g(\mathbf{x}'_k)$  – Gradiente da função performance avaliada na iteração atual.

As componentes do vetor gradiente são obtidas através de (6.28). Para as variáveis que não apresentem uma distribuição normal de probabilidade, o emprego do método deve prever a utilização da média e desvio padrão de uma variável normal equivalente, dados pelas expressões (7.19) e (7.20), respectivamente.

$$\mu_X^E = x^* - \sigma_X^E \{\Phi^{-1}[F_X(x^*)]\} \quad (7.19)$$

$$\sigma_X^E = \frac{1}{f_X(x^*)} \phi\{\Phi^{-1}[F_X(x^*)]\} \quad (7.20)$$

Sendo:

$\mu_X^E$  – Média de uma função normal equivalente;

$\sigma_X^E$  – Desvio padrão de uma função normal equivalente;

$F_X(x^*)$  – FDPA em  $x^*$  para a distribuição de probabilidade original;

$f_X(x^*)$  – FDP em  $x^*$  para a distribuição de probabilidade original;

$\phi$  – FDP da variável normal padronizada;

A fórmula de recorrência (7.18) é aplicada até que se atinja um critério de convergência, tal como  $|\mathbf{x}_k'^* - \mathbf{x}_{k-1}'^*| \leq 0,001$ , por exemplo. De posse do vetor com os pontos de projeto no espaço padronizado, dado por  $\mathbf{x}'^*$ , o índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser obtido por intermédio de (6.36).

O algoritmo acima apresentado foi utilizado neste trabalho, sendo desenvolvido em linguagem *Matlab*. Sua listagem está apresentada no Apêndice D, e corresponde ao empregado para a obtenção do índice de confiabilidade pela metodologia 3.

## 8 ESTUDO PARAMÉTRICO

Um estudo paramétrico é apresentado aqui com vistas a avaliar a influência de alguns parâmetros nos índices de confiabilidade obtidos para o conjunto de vigas dimensionadas de acordo com os critérios da NBR-6118:2014. Dessa forma, fixando-se alguns parâmetros e variando outros de forma isolada, possibilita-se verificar o reflexo dessa variação nos 81 índices de confiabilidade obtidos neste trabalho. A Tabela 8.1 constitui um resumo dos índices de confiabilidade alcançados para todas as vigas analisadas e considerando as três metodologias empregadas. O Apêndice E dispõe de uma tabela completa, onde são também apresentadas as estatísticas da resistência e sollicitação dos modelos.

Tabela 8.1 - Índices de confiabilidade obtidos para as vigas analisadas.

Viga	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	Viga	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	Viga	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
V-25-40-0.50-15	4,08	4,07	4,09	V-35-40-0.50-15	3,98	3,98	3,99	V-45-40-0.50-15	3,93	3,92	3,93
V-25-40-0.50-20	4,15	4,14	4,15	V-35-40-0.50-20	4,03	4,03	4,04	V-45-40-0.50-20	3,96	3,95	3,96
V-25-40-0.50-25	4,22	4,21	4,24	V-35-40-0.50-25	4,12	4,11	4,15	V-45-40-0.50-25	4,00	4,00	4,01
V-25-40-1.00-15	3,51	3,51	3,52	V-35-40-1.00-15	3,43	3,43	3,44	V-45-40-1.00-15	3,39	3,39	3,40
V-25-40-1.00-20	3,57	3,56	3,57	V-35-40-1.00-20	3,48	3,47	3,48	V-45-40-1.00-20	3,42	3,41	3,42
V-25-40-1.00-25	3,62	3,62	3,63	V-35-40-1.00-25	3,54	3,54	3,56	V-45-40-1.00-25	3,45	3,45	3,46
V-25-40-2.00-15	3,10	3,10	3,11	V-35-40-2.00-15	3,03	3,04	3,04	V-45-40-2.00-15	2,99	3,00	3,00
V-25-40-2.00-20	3,15	3,15	3,15	V-35-40-2.00-20	3,07	3,07	3,07	V-45-40-2.00-20	3,02	3,02	3,02
V-25-40-2.00-25	3,20	3,20	3,21	V-35-40-2.00-25	3,13	3,13	3,15	V-45-40-2.00-25	3,05	3,05	3,06
V-25-50-0.50-15	4,00	4,00	4,00	V-35-50-0.50-15	3,99	3,98	3,99	V-45-50-0.50-15	4,02	4,01	4,02
V-25-50-0.50-20	4,03	4,04	4,05	V-35-50-0.50-20	3,96	3,95	3,97	V-45-50-0.50-20	3,93	3,93	3,94
V-25-50-0.50-25	4,10	4,10	4,11	V-35-50-0.50-25	3,99	3,99	4,00	V-45-50-0.50-25	3,93	3,93	3,94
V-25-50-1.00-15	3,45	3,44	3,45	V-35-50-1.00-15	3,44	3,44	3,44	V-45-50-1.00-15	3,46	3,45	3,46
V-25-50-1.00-20	3,47	3,48	3,48	V-35-50-1.00-20	3,41	3,41	3,42	V-45-50-1.00-20	3,39	3,39	3,39
V-25-50-1.00-25	3,52	3,52	3,53	V-35-50-1.00-25	3,44	3,44	3,45	V-45-50-1.00-25	3,39	3,39	3,39
V-25-50-2.00-15	3,05	3,04	3,05	V-35-50-2.00-15	3,04	3,03	3,03	V-45-50-2.00-15	3,05	3,05	3,05
V-25-50-2.00-20	3,07	3,07	3,08	V-35-50-2.00-20	3,02	3,01	3,02	V-45-50-2.00-20	2,99	3,00	3,00
V-25-50-2.00-25	3,11	3,11	3,12	V-35-50-2.00-25	3,04	3,04	3,04	V-45-50-2.00-25	3,00	3,00	3,00
V-25-60-0.50-15	4,09	4,10	4,13	V-35-60-0.50-15	4,06	4,08	4,09	V-45-60-0.50-15	4,07	4,06	4,06
V-25-60-0.50-20	4,01	4,00	4,01	V-35-60-0.50-20	4,03	4,03	4,04	V-45-60-0.50-20	4,06	4,06	4,07
V-25-60-0.50-25	4,00	4,00	4,00	V-35-60-0.50-25	3,96	3,96	3,97	V-45-60-0.50-25	3,98	3,97	3,98
V-25-60-1.00-15	3,51	3,53	3,54	V-35-60-1.00-15	3,49	3,49	3,50	V-45-60-1.00-15	3,49	3,48	3,47
V-25-60-1.00-20	3,45	3,45	3,45	V-35-60-1.00-20	3,46	3,46	3,47	V-45-60-1.00-20	3,48	3,49	3,49
V-25-60-1.00-25	3,44	3,44	3,45	V-35-60-1.00-25	3,42	3,41	3,41	V-45-60-1.00-25	3,42	3,42	3,42
V-25-60-2.00-15	3,09	3,11	3,12	V-35-60-2.00-15	3,07	3,07	3,08	V-45-60-2.00-15	3,08	3,06	3,06
V-25-60-2.00-20	3,05	3,05	3,05	V-35-60-2.00-20	3,06	3,06	3,06	V-45-60-2.00-20	3,08	3,08	3,09
V-25-60-2.00-25	3,04	3,04	3,05	V-35-60-2.00-25	3,02	3,02	3,02	V-45-60-2.00-25	3,03	3,02	3,02

É observado que as três metodologias alcançam resultados extremamente próximos. A maior diferença foi constatada na viga V-25-60-0,50-15, sendo, em termos percentuais, aproximadamente 0,98%. Dessa forma, ressaltando que as diferenças são irrisórias, pode-se considerar que as três metodologias conduzem a resultados equivalentes de índice de confiabilidade. Optou-se por apresentar nos gráficos paramétricos, portanto, os resultados obtidos pela metodologia 1.

Para estabelecer uma conclusão acerca do nível de segurança atingido pelas vigas aqui estudadas, se faz necessário fixar o valor alvo com os quais os índices de confiabilidade obtidos possam ser comparados. O capítulo 2 apresenta os valores alvos de acordo com algumas normas internacionais. Neste trabalho adota-se como índice de confiabilidade alvo  $\beta_{\text{alvo}} = 3,80$ , sugerido pelo código modelo *fib* 2010 (CEB, 2012) para um período de 50 anos e considerando falhas com consequências médias.

## 8.1 VARIAÇÃO DE $\beta$ EM FUNÇÃO DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO

Neste item é apresentada a variação do índice de confiabilidade  $\beta$  frente à variação da resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ). Para tal, são avaliadas, sob diferentes condições de carregamento ( $p_k$ ), diferentes combinações de alturas de seção transversal ( $h$ ) e razões de carregamento ( $r$ ). Os resultados são preliminarmente discutidos ao final do item, sendo realizada uma análise mais completa nos capítulos 9 e 10.

### 8.1.1 Análise para carregamento total $p_k = 15\text{kN/m}$

As Figuras 8.1 a 8.3 apresentam a variação do índice de confiabilidade  $\beta$  frente à variação do  $f_{ck}$  para as vigas sujeitas a um carregamento fixo de 15kN/m e com altura de seção igual a 40, 50 e 60cm, respectivamente.

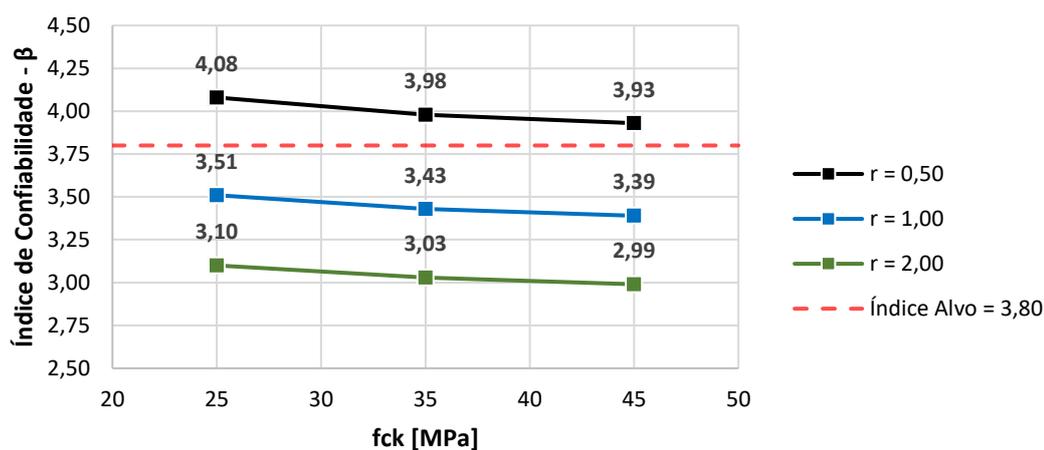


Figura 8.1 -  $\beta \times f_{ck}$  para um carregamento  $p_k = 15\text{kN/m}$  e altura de seção  $h = 40\text{cm}$ .

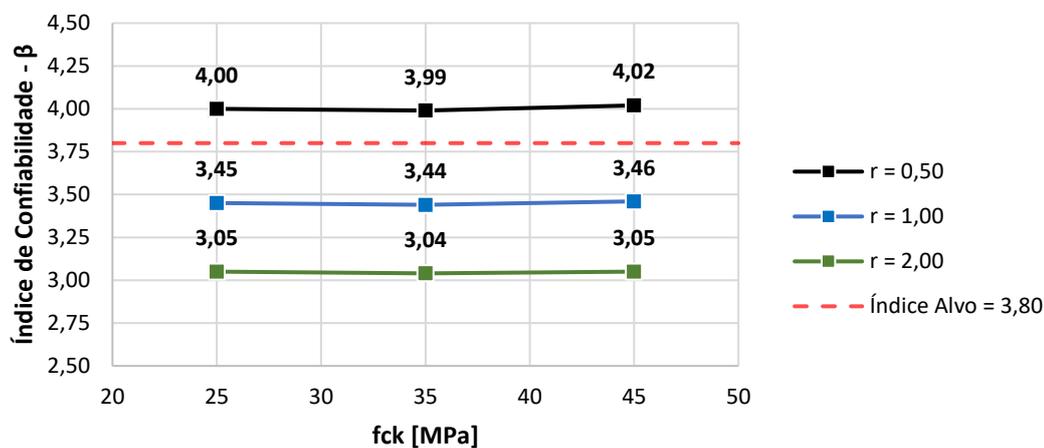


Figura 8.2 -  $\beta \times f_{ck}$  para um carregamento  $p_k = 15\text{kN/m}$  e altura de seção  $h = 50\text{cm}$ .

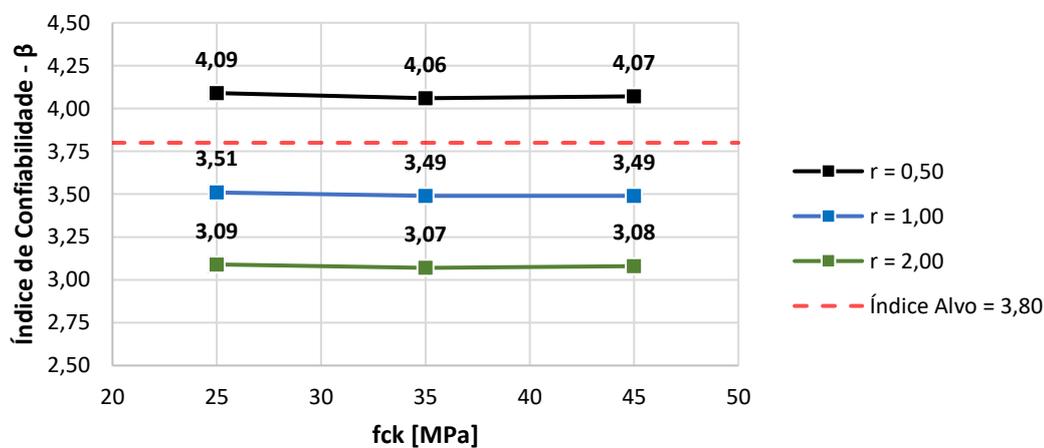


Figura 8.3 -  $\beta \times f_{ck}$  para um carregamento  $p_k = 15\text{kN/m}$  e altura de seção  $h = 60\text{cm}$ .

### 8.1.2 Análise para carregamento total $p_k = 20\text{kN/m}$

As Figuras 8.4 a 8.6 apresentam a variação do índice de confiabilidade  $\beta$  frente à variação do  $f_{ck}$  para as vigas sujeitas a um carregamento fixo de  $20\text{kN/m}$  e com altura de seção igual a 40, 50 e 60cm, respectivamente.

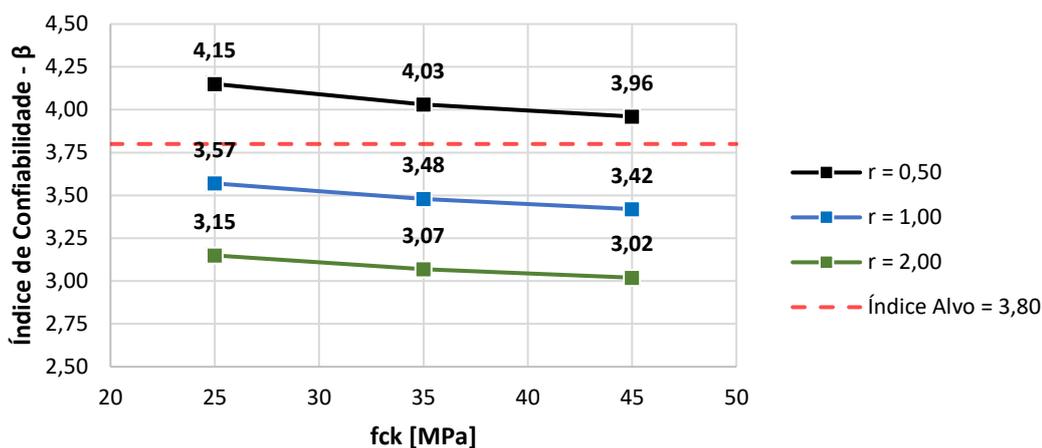


Figura 8.4 -  $\beta \times f_{ck}$  para um carregamento  $p_k = 20\text{kN/m}$  e altura de seção  $h = 40\text{cm}$ .

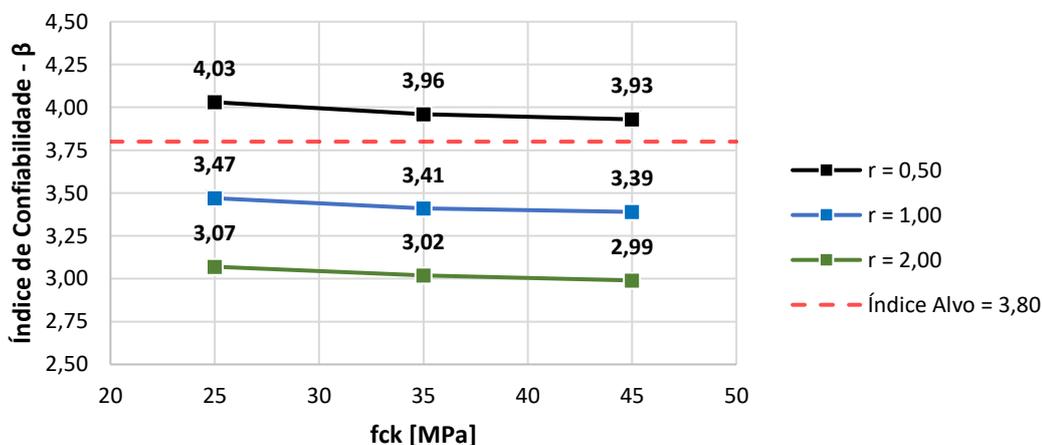


Figura 8.5 -  $\beta \times f_{ck}$  para um carregamento  $p_k = 20\text{kN/m}$  e altura de seção  $h = 50\text{cm}$ .

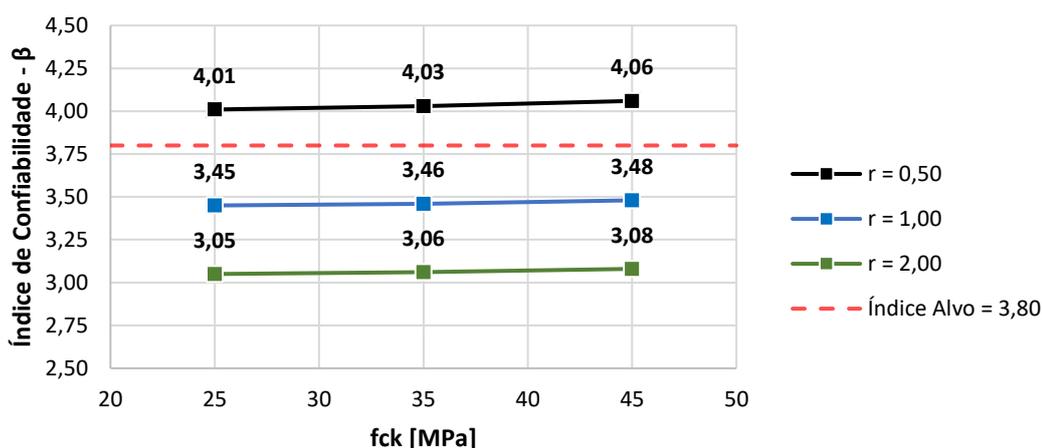


Figura 8.6 -  $\beta \times f_{ck}$  para um carregamento  $p_k = 20\text{kN/m}$  e altura de seção  $h = 60\text{cm}$

### 8.1.3 Análise para carregamento total $p_k = 25\text{kN/m}$

As Figuras 8.7 a 8.9 apresentam a variação do índice de confiabilidade  $\beta$  frente à variação do  $f_{ck}$  para as vigas sujeitas a um carregamento fixo de  $25\text{kN/m}$  e com altura de seção ( $h$ ) igual a 40, 50 e 60cm, respectivamente.

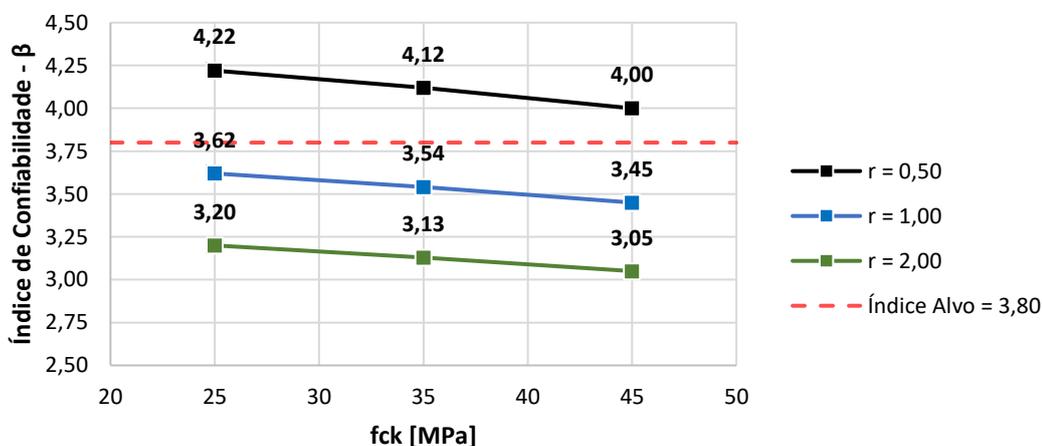


Figura 8.7 -  $\beta \times f_{ck}$  para um carregamento  $p_k = 25\text{kN/m}$  e altura de seção  $h = 40\text{cm}$ .

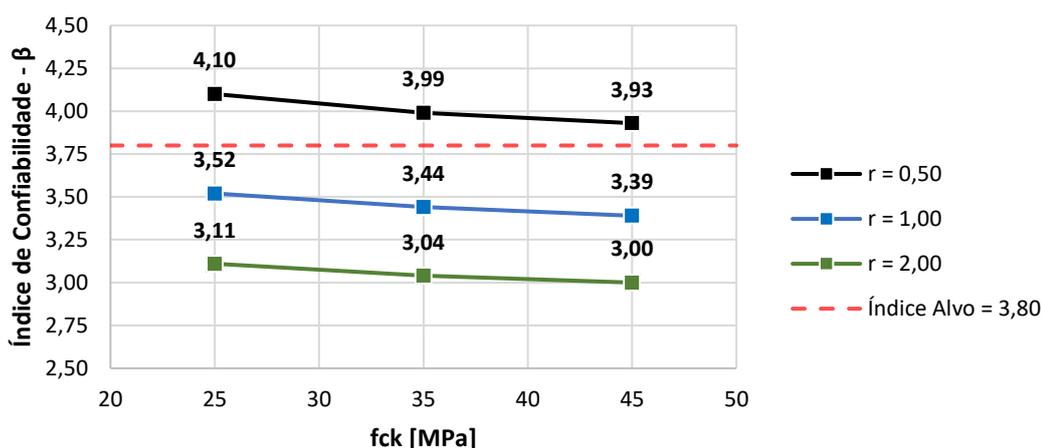


Figura 8.8 -  $\beta \times f_{ck}$  para um carregamento  $p_k = 25\text{kN/m}$  e altura de seção  $h = 50\text{cm}$ .

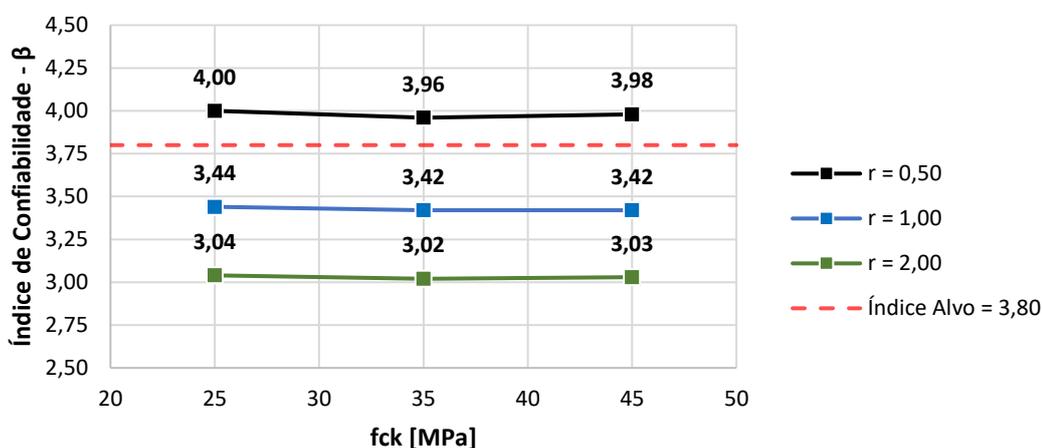


Figura 8.9 -  $\beta \times f_{ck}$  para um carregamento  $p_k = 25\text{kN/m}$  e altura de seção  $h = 60\text{cm}$ .

#### 8.1.4 Discussão preliminar dos resultados

Os resultados apresentados nas Figuras 8.1 a 8.9 sugerem uma tendência de redução do índice de confiabilidade  $\beta$  com o aumento do  $f_{ck}$  de projeto. Esses resultados são justificáveis uma vez que o aumento desse parâmetro, sob mesmas condições de geometria e carregamento, conduziu a uma redução no valor médio da resistência ( $\mu_R$ ), reduzindo também a relação  $\mu_R/\mu_S$  e aumentando a região de sobreposição das funções densidade de probabilidade da resistência ( $f_R(r)$ ) e solicitação ( $f_S(s)$ ). Como consequência, tem-se o aumento da probabilidade de falha e a redução do índice de confiabilidade. Em alguns casos, contudo, o aumento do  $f_{ck}$  conduziu a um aumento no índice de confiabilidade, como pode ser observado nas Figuras 8.2, 8.3, 8.6 e 8.9. Essas situações são verificadas em vigas com maior altura, maior  $f_{ck}$  ou, até mesmo, a combinação das duas condições. Em função dessas condições, a resistência obtida

numericamente para estas vigas foi sensivelmente aumentada pela contribuição do concreto sob tração, promovendo um aumento em  $\mu_R$  e conduzindo a um pequeno aumento na relação  $\mu_R/\mu_S$ , elevando o índice de confiabilidade em algumas situações isoladas.

Em relação à influência do carregamento total, observa-se que o aumento de  $p_k$ , para uma mesma configuração de geometria e resistência do concreto, tende a aumentar a relação  $\mu_R/\mu_S$ , sendo também aumentados os índices de confiabilidade. Nos casos em que são combinadas maiores alturas e/ou maiores valores de  $f_{ck}$ , como no caso da Figura 8.3, esse comportamento tende a ser alterado, tendo em vista que a resistência à tração do concreto contribui na capacidade resistente da peça, aumentando sensivelmente o índice de confiabilidade mesmo para os menores valores de  $p_k$ .

Ainda em relação ao carregamento, pode ser verificado em cada gráfico, de forma isolada, que o aumento da razão de carregamento ( $r$ ) tende a reduzir significativamente o índice de confiabilidade. Muito embora a média da solicitação apresente uma redução à medida em que as cargas acidentais se tornam preponderantes na combinação das ações, a variabilidade da solicitação cresce substancialmente com o aumento de  $r$ , aumentando assim a região de sobreposição e reduzindo o índice de confiabilidade.

## 8.2 VARIAÇÃO DE $\beta$ EM FUNÇÃO DA ALTURA DA SEÇÃO TRANSVERSAL

Neste item é apresentada a variação do índice de confiabilidade  $\beta$  frente à variação da altura da seção transversal ( $h$ ). Para tal, são avaliadas, sob diferentes condições de carregamento ( $p_k$ ), diferentes combinações de resistências características à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) e razões de carregamento ( $r$ ). Os resultados são preliminarmente discutidos ao final do item, sendo realizada uma análise mais completa nos capítulos 9 e 10.

### 8.2.1 Análise para carregamento total $p_k = 15\text{kN/m}$

As Figuras 8.10 a 8.12 apresentam a variação do índice de confiabilidade  $\beta$  frente à variação de  $h$  para as vigas sujeitas a um carregamento fixo de  $15\text{kN/m}$  e com resistências características à compressão ( $f_{ck}$ ) igual a 25, 35 e  $45\text{MPa}$ , respectivamente.

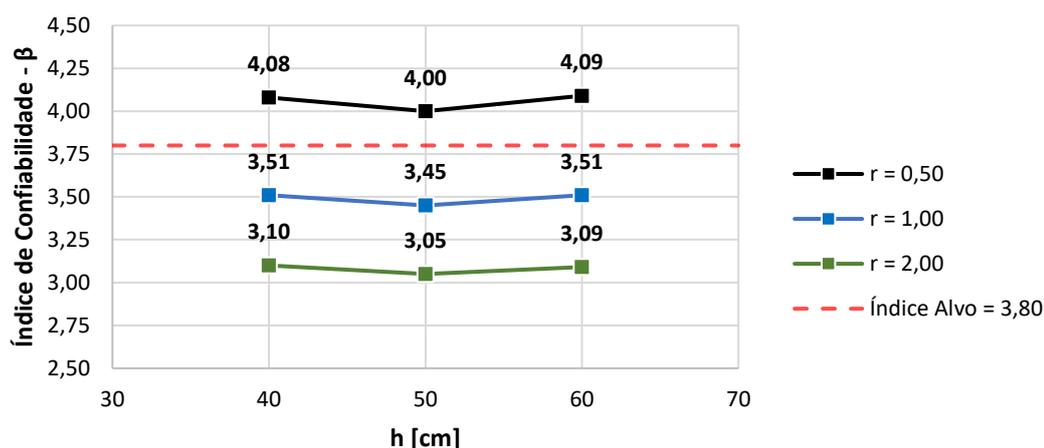


Figura 8.10 -  $\beta \times h$  para um carregamento  $p_k = 15\text{kN/m}$  e resistência característica à compressão  $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .

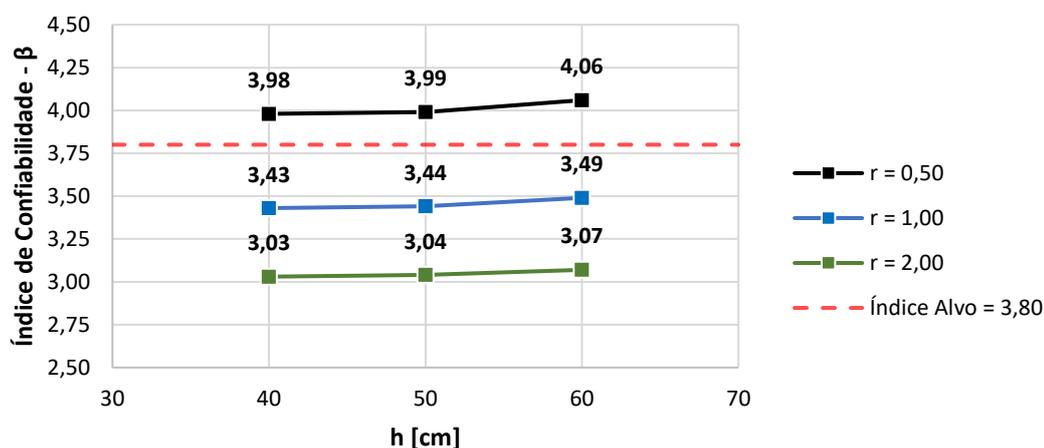


Figura 8.11 -  $\beta \times h$  para um carregamento  $p_k = 15\text{kN/m}$  e resistência característica à compressão  $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .

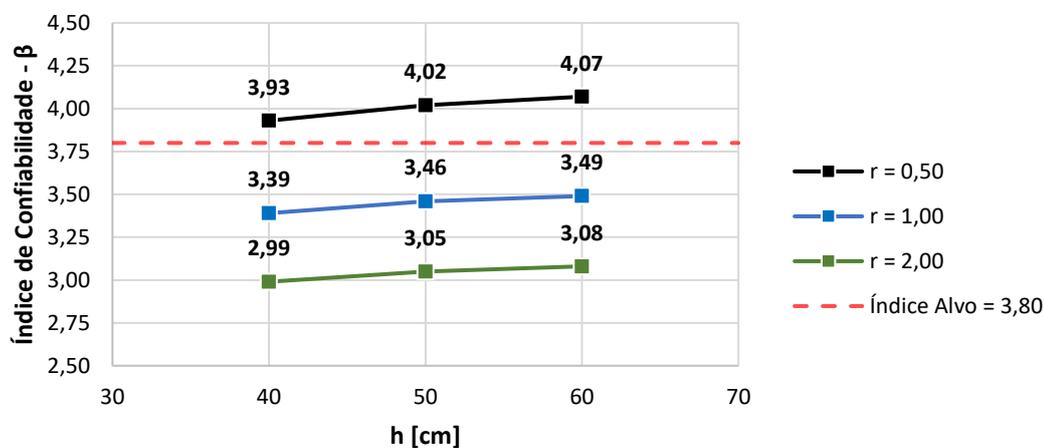


Figura 8.12 -  $\beta \times h$  para um carregamento  $p_k = 15\text{kN/m}$  e resistência característica à compressão  $f_{ck} = 45\text{MPa}$ .

## 8.2.2 Análise para carregamento total $p_k = 20\text{kN/m}$

As Figuras 8.13 a 8.15 apresentam a variação do índice de confiabilidade  $\beta$  frente à variação de  $h$  para as vigas sujeitas a um carregamento fixo de  $20\text{kN/m}$  e com resistências características à compressão ( $f_{ck}$ ) igual a 25, 35 e  $45\text{MPa}$ , respectivamente.

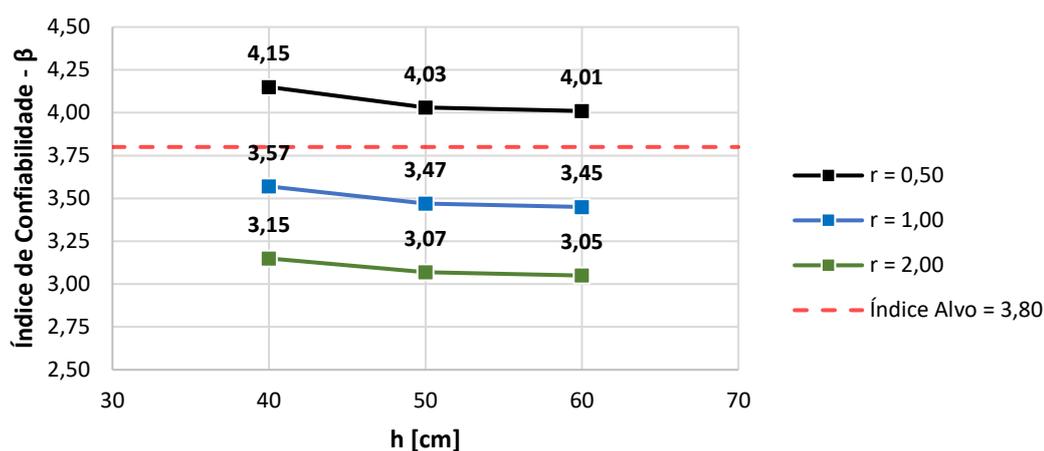


Figura 8.13 -  $\beta \times h$  para um carregamento  $p_k = 20\text{kN/m}$  e resistência característica à compressão  $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .

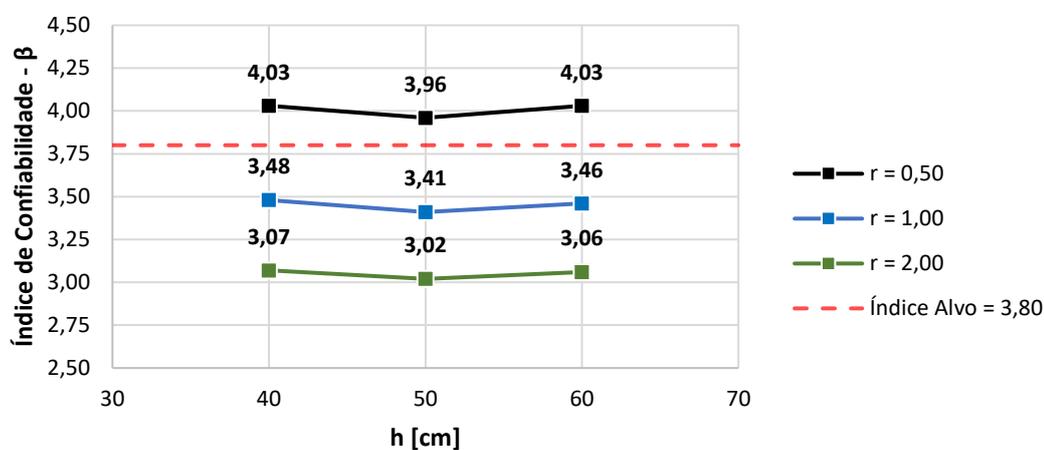


Figura 8.14 -  $\beta \times h$  para um carregamento  $p_k = 20\text{kN/m}$  e resistência característica à compressão  $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .

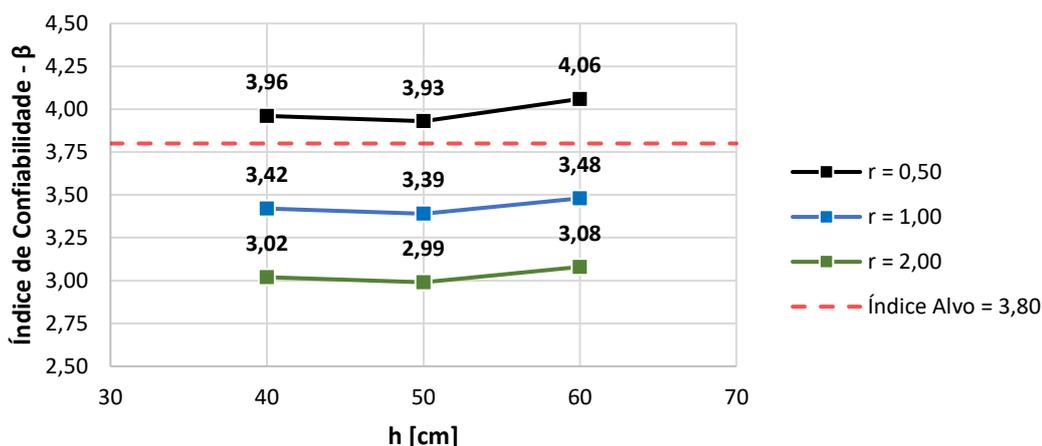


Figura 8.15 -  $\beta$  x  $h$  para um carregamento  $p_k = 20\text{kN/m}$  e resistência característica à compressão  $f_{ck} = 45\text{MPa}$ .

### 8.2.3 Análise para carregamento total $p_k = 25\text{kN/m}$

As Figuras 8.16 a 8.18 apresentam a variação do índice de confiabilidade  $\beta$  frente à variação de  $h$  para as vigas sujeitas a um carregamento fixo de  $25\text{kN/m}$  e com resistências características à compressão ( $f_{ck}$ ) igual a 25, 35 e  $45\text{MPa}$ , respectivamente.

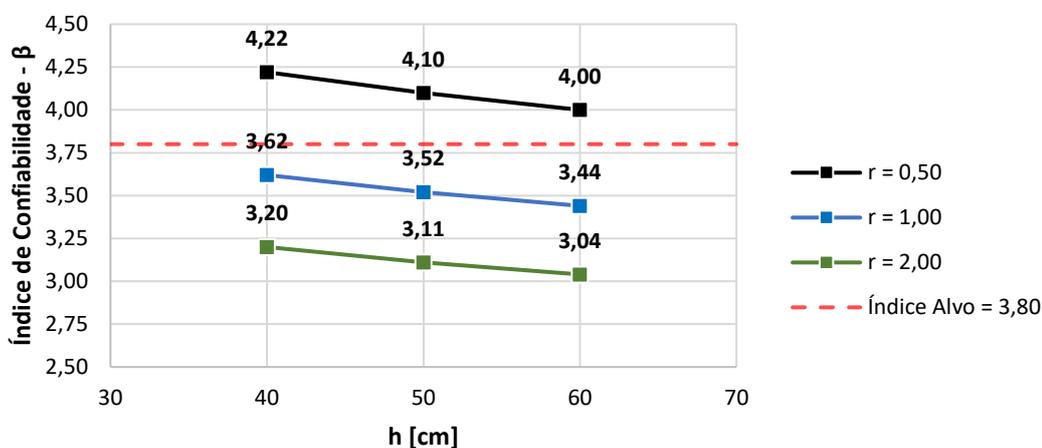


Figura 8.16 -  $\beta$  x  $h$  para um carregamento  $p_k = 25\text{kN/m}$  e resistência característica à compressão  $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .

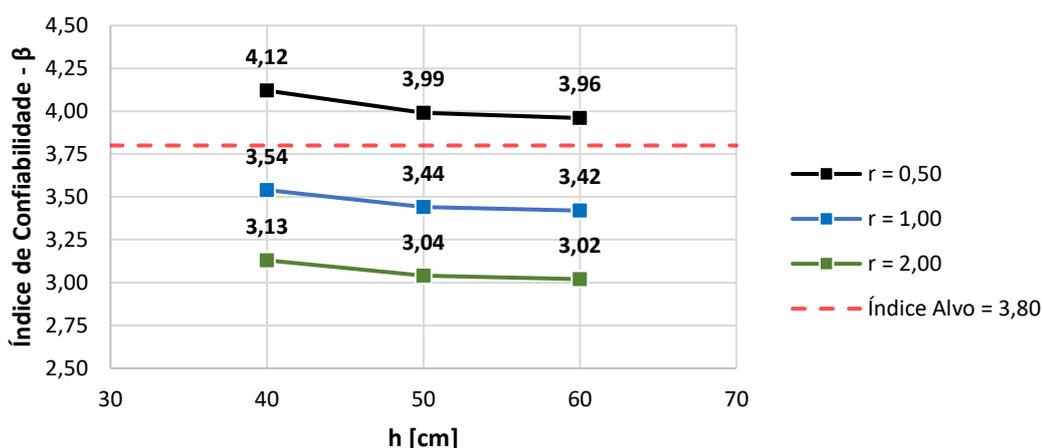


Figura 8.17 -  $\beta \times h$  para um carregamento  $p_k = 25\text{kN/m}$  e resistência característica à compressão  $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .

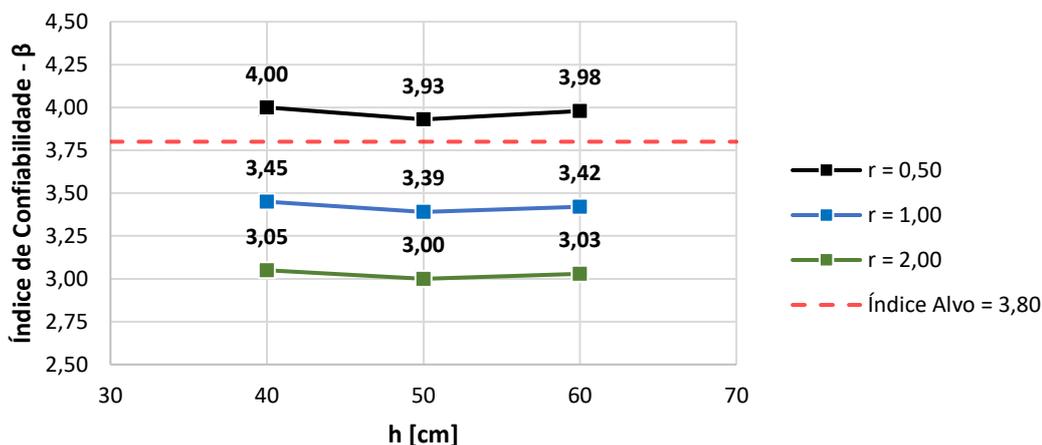


Figura 8.18 -  $\beta \times h$  para um carregamento  $p_k = 25\text{kN/m}$  e resistência característica à compressão  $f_{ck} = 45\text{MPa}$ .

## 8.2.4 Discussão preliminar dos resultados

É observada, na maioria dos casos analisados, a tendência de redução do índice de confiabilidade  $\beta$  com o aumento da altura da seção transversal ( $h$ ), sendo este comportamento mais evidente nas vigas submetidas aos maiores valores de carregamento  $p_k$ . Nestes casos, o aumento da altura conduziu a uma redução na média da resistência ( $\mu_R$ ), reduzindo, portanto, a relação  $\mu_R/\mu_S$ , tendo por consequência o aumento da probabilidade de falha destas vigas. Para as vigas submetidas aos menores valores de  $p_k$ , em especial aquelas com maiores valores de  $f_{ck}$ , a contribuição do concreto sob tração no modelo numérico promoveu um pequeno acréscimo no valor médio da resistência ( $\mu_R$ ), aumentando a relação  $\mu_R/\mu_S$  e conduzindo a um sensível

aumento nos índices de confiabilidade para estes casos. Tal situação pode ser melhor visualizada nos gráficos apresentados no item 8.2.1.

Observa-se, novamente, que a razão de carregamento ( $r$ ) é responsável pela variação mais significativa nos índices de confiabilidade, apresentando as vigas cuja razão seja  $r = 1,00$  e  $r = 2,00$ , em todas as condições geometria e carregamento, um índice de confiabilidade abaixo do índice alvo. Esse comportamento é sistemático e pode ser observado em todos os gráficos apresentados neste capítulo.

## 9 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Em relação aos índices de confiabilidade atingidos pelos modelos estudados, observa-se que 54 dos 81 índices avaliados apresentaram-se abaixo do índice alvo  $\beta_{\text{alvo}} = 3,80$ , sugerido pelo código modelo *fib* 2010 (CEB, 2012). Busca-se apresentar uma discussão sobre os resultados alcançados, destacando as situações de maior relevância.

### 9.1 SOBRE AS METODOLOGIAS EMPREGADAS

Neste trabalho os índices de confiabilidade  $\beta$  foram calculados por intermédio de três metodologias, das quais duas compreendem o ajuste das resistências obtidas via simulação segundo uma distribuição de probabilidade teórica conhecida. Em função dos testes apresentados no item 7.4 e pelo fato deste procedimento ter sido empregado em diversas outras pesquisas, adotou-se uma distribuição normal para a representação da resistência das vigas. A título de comparação, empregou-se o polinômio aproximador obtido para a viga V-25-40-r-15 pelo Método da Superfície de Resposta para a geração de uma amostra ( $N = 1E7$ ) para a resistência desta viga. Para tal, foram geradas aleatoriamente as propriedades  $f_c$ ,  $f_y$ ,  $h$  e  $d'$ , sendo o histograma da resistência desta viga apresentado na Figura 9.1.

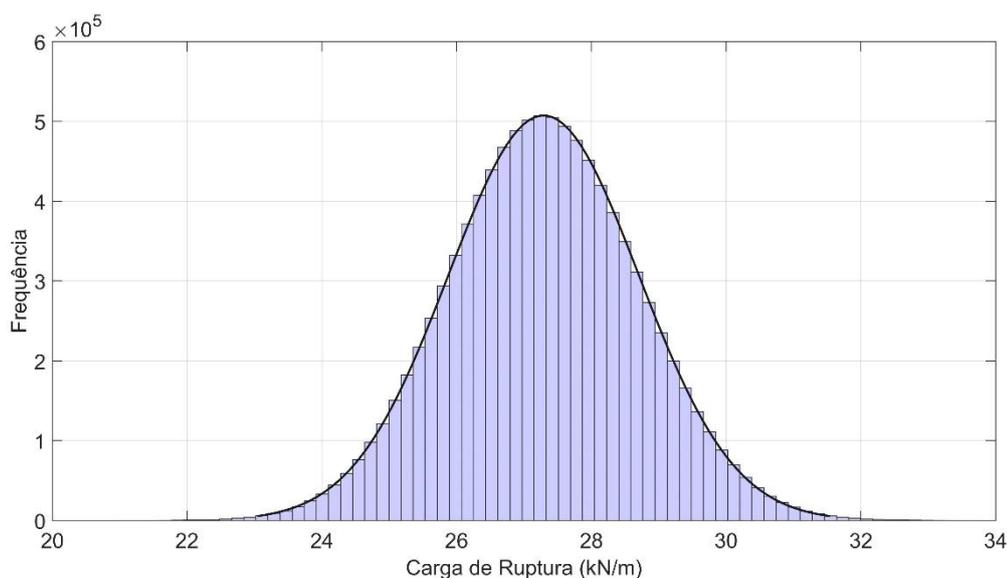


Figura 9.1 - Histograma da resistência da viga V-25-40-0,50-15 obtido pelo polinômio aproximador.

O histograma permite constatar que, a partir da geração aleatória empregando o polinômio aproximador, a forma da distribuição de probabilidade da resistência apresenta-se muito semelhante a uma distribuição normal. A média e desvio padrão obtidos pelo polinômio aproximador foram  $\mu_R = 27,29\text{kN/m}$  e  $\sigma_R = 1,41\text{kN/m}$ , respectivamente, enquanto os valores obtidos pela metodologia 1 foram  $\mu_R = 27,28\text{kN/m}$  e  $\sigma_R = 1,43\text{kN/m}$  (Apêndice E). Isso representa uma diferença na ordem de  $10^{-4}$  para a média e de 1,4% para o desvio padrão, justificando assim a excelente concordância nos índices de confiabilidade obtidos pelas três metodologias. Dessa forma, pode-se concluir que a distribuição normal parece ser adequada para a representação das resistências das vigas estudadas. Ademais, os valores de índice de confiabilidade alcançados indicam que a consideração dos coeficientes de correlação apresentados em 7.4.1 não são significativos nos resultados obtidos, sendo suficiente realizar a geração aleatória de  $f_c$  para o cálculo posterior de  $f_{ct}$  e  $E_c$ . O método da Superfície de Resposta empregado na metodologia 3 apresentou-se muito eficiente, tendo em vista o baixo número de simulações para a obtenção do polinômio aproximador.

## 9.2 SOBRE A INFLUÊNCIA DA ARMADURA TRACIONADA

Ainda no que diz respeito à resistência das vigas estudadas, são apresentados na Tabela 9.1 os cossenos diretores obtidos para as vigas V-25-40-0,50-15, V-25-40-1,00-15 e V-25-40-2,00-15, utilizando-se o método da Superfície de Resposta.

Tabela 9.1 - Cossenos diretores para as vigas V-25-40-r-15.

Variável Aleatória ( $x_i$ )	Cosseno diretor - $\alpha_{xi}$		
	V-25-40-0,50-15	V-25-40-1,00-15	V-25-40-2,00-15
$f_c$	0,03043	0,02384	0,02018
$f_y$	<b>0,28860</b>	<b>0,23014</b>	<b>0,19675</b>
$h$	0,08731	0,06949	0,05935
$d'$	-0,08272	-0,06744	-0,05832
$g$	-0,26567	-0,15310	-0,08549
$q$	<b>-0,81620</b>	<b>-0,89708</b>	<b>-0,93025</b>
$\theta_R$	0,28683	0,23334	0,20158
$\theta_S$	-0,28683	-0,23334	-0,20158

Observa-se prontamente que, dentre o conjunto de variáveis que correspondem à resistência da viga, a que apresenta o maior cosseno diretor e, portanto, a maior influência sobre o índice de

confiabilidade, é a tensão de escoamento da armadura ( $f_y$ ). A influência do cosseno diretor no índice de confiabilidade é ilustrada na Figura 6.8. Esse resultado é esperado, tendo em vista a filosofia de dimensionamento adotada pela NBR-6118:2014, a qual prescreve que a ruína das vigas se estabeleça pelo escoamento e ruptura da armadura tracionada. Esse resultado também justifica a variabilidade das resistências, sendo possível verificar que todas as vigas analisadas apresentaram um coeficiente de variação da resistência ( $V_R$ ) muito próximo ao coeficiente de variação da tensão de escoamento da armadura ( $V_{f_y}$ ), indicando que a resistência dos modelos é fundamentalmente influenciada pelas propriedades mecânicas do aço empregado.

Na etapa de projeto, a área de aço da armadura tracionada ( $A_s$ ) é determinada através de expressões não-lineares, sendo função das resistências de projeto dos materiais ( $f_{cd}$  e  $f_{yd}$ ). Dessa forma, para um mesmo carregamento característico  $p_k$ , garante-se a condição  $M_{Rd} = M_{Sd}$ . Naturalmente, os valores simulados da resistência correspondem às propriedades tidas como “reais”, obtidas probabilisticamente através da geração de valores para as propriedades mecânicas do concreto e do aço, bem como das propriedades geométricas. Como resultado das análises empregando as propriedades simuladas, foi observada uma tendência de redução da resistência média ( $\mu_R$ ) e, por consequência, nos índices de confiabilidade, ao passo que se reduz a taxa de armadura à flexão das vigas. Alternativamente, esse comportamento pode ser explicado analisando os cossenos diretores da Tabela 9.1. Em função do maior cosseno de diretor de  $f_y$  quando comparado aos cossenos diretores de  $f_c$  e  $h$ , por exemplo, é esperado que a resistência da viga seja mais influenciada pela redução na taxa de armadura, mesmo que se aumente o valor de  $f_{ck}$  e  $h$  na etapa de projeto.

### 9.3 SOBRE A INFLUÊNCIA DO *TENSION-STIFFENING*

Neste trabalho, o comportamento do concreto fissurado foi representado através de um modelo de fissuras distribuídas. Tal representação tem por principal atrativo a possibilidade de manter a malha de elementos finitos inalterada durante as análises, diferentemente do modelo de fissuras discretas, no qual fissuras individuais são representadas por descontinuidades na malha de elementos finitos (CERVERA et al, 1988). No modelo de fissuras distribuídas, ainda, o efeito local da aderência entre o concreto e a armadura é representado através do comportamento *tension-stiffening*, o qual, computacionalmente, consiste em adotar ao longo de toda a análise

uma relação tensão-deformação média para o concreto tracionado, mesmo após fissurado, conforme representado na Figura 4.2.

Sabe-se que, sob a ação de cargas de serviço, a rigidez em flexão de vigas de concreto armado é fortemente influenciada pelo modelo constitutivo do concreto tracionado. Essa rigidez é consideravelmente inferior à rigidez da seção bruta de concreto, sendo, por outro lado, notoriamente superior do que aquela calculada se desprezando a contribuição do concreto sob tração (COELHO, 2011). Para elucidar essa situação, a Figura 9.2 apresenta o diagrama carga-deslocamento obtido para as vigas ensaiadas por Beber (1999), já analisadas no capítulo 5. Na Figura 9.2, a título de ilustração, são tomadas as médias dos valores obtidos experimentalmente para as vigas VT1 e VT2. Em relação ao modelo numérico, são apresentados os resultados obtidos considerando-se e desprezando-se o comportamento *tension-stiffening*.

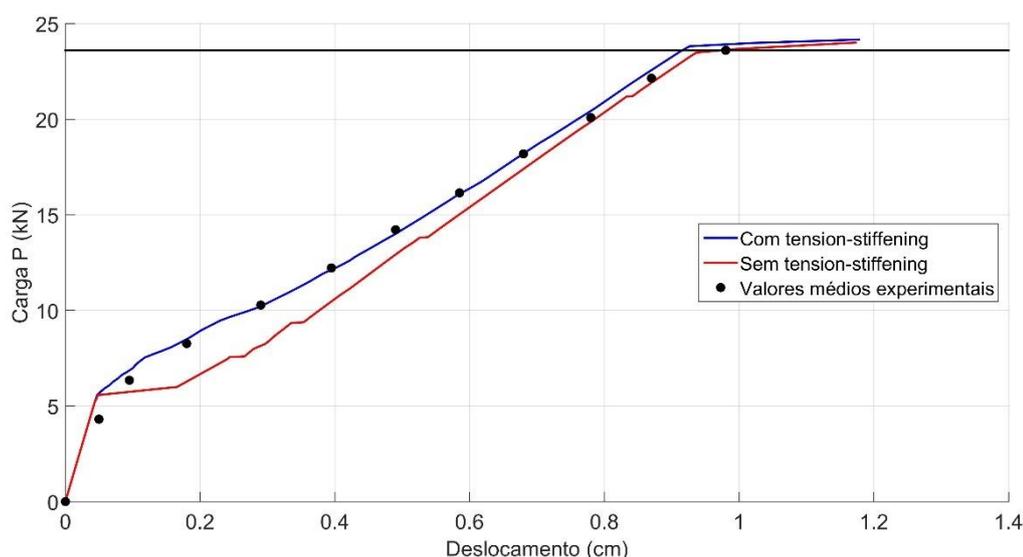


Figura 9.2 - Influência do modelo *tension-stiffening* no comportamento não-linear das vigas de Beber (1999).

Como é de se esperar, antes do início da fissuração, ambos os modelos numéricos reproduziram o mesmo comportamento, correspondendo ao regime linear. Com o início da fissuração, é observado que a desconsideração da contribuição do concreto entre fissuras conduz a um resultado que subestima significativamente a rigidez da peça, ao passo que o emprego do modelo *tension-stiffening* conduz a resultados numéricos compatíveis aos observados experimentalmente. Embora o comportamento não-linear ao longo do carregamento seja substancialmente diferente, nota-se que, para o exemplo apresentado, os dois modelos numéricos convergem para uma carga de ruptura muito próxima e compatível à experimental.

Durante as análises de confiabilidade foi verificado que, em muitos casos, a contribuição do concreto em tração refletiu em um aumento na capacidade resistente das vigas. Essa situação foi preponderante em vigas com maiores valores de  $f_{ck}$  e  $h$ , em especial aquelas submetidas à menores cargas  $p_k$ . Para representar essa influência, são apresentadas as distribuições de deformações do concreto, no regime de ruptura, em duas vigas distintas, obtidas via simulação<sup>1</sup>. Para estas mesmas vigas, apresentam-se as tensões normais atuantes na seção central, que define a ruptura da peça. A representação considera a simetria das vigas, sendo tomado o trecho à esquerda em relação ao eixo vertical que intercepta a seção central. A viga ilustrada na Figura 9.3, denominada por V1, corresponde a uma amostra simulada da configuração V-25-60-r-15, cuja área de aço é  $2,80\text{cm}^2$  e a resistência à tração obtida via simulação é  $0,29\text{kN/cm}^2$ .

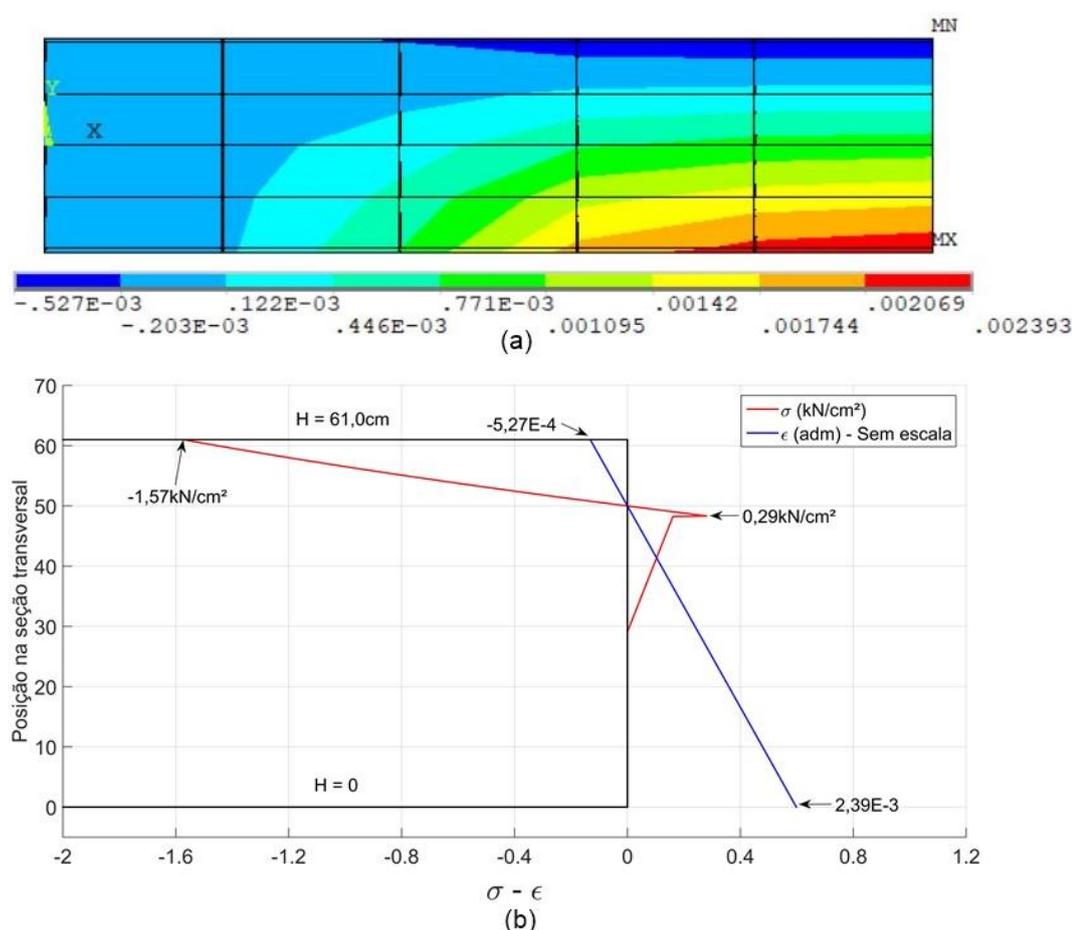


Figura 9.3 - Distribuição de deformações do concreto (a) e tensões normais atuantes na seção central (b) para a viga V1.

<sup>1</sup> As distribuições de deformações apresentadas nas Figuras 9.3 e 9.4 correspondem ao último passo de carga em que se obteve convergência no modelo numérico. As distribuições de deformações correspondentes ao instante da ruptura estariam compreendidas entre o passo de carga em questão e o posterior, no qual o modelo numérico não atingiu a convergência.

A viga representada na Figura 9.4, denominada por V2, corresponde a uma amostra simulada da configuração V-25-50-r-25, sendo a área de aço igual a  $6,04\text{cm}^2$  e a resistência à tração obtida via simulação igual a  $0,24\text{kN/cm}^2$ .

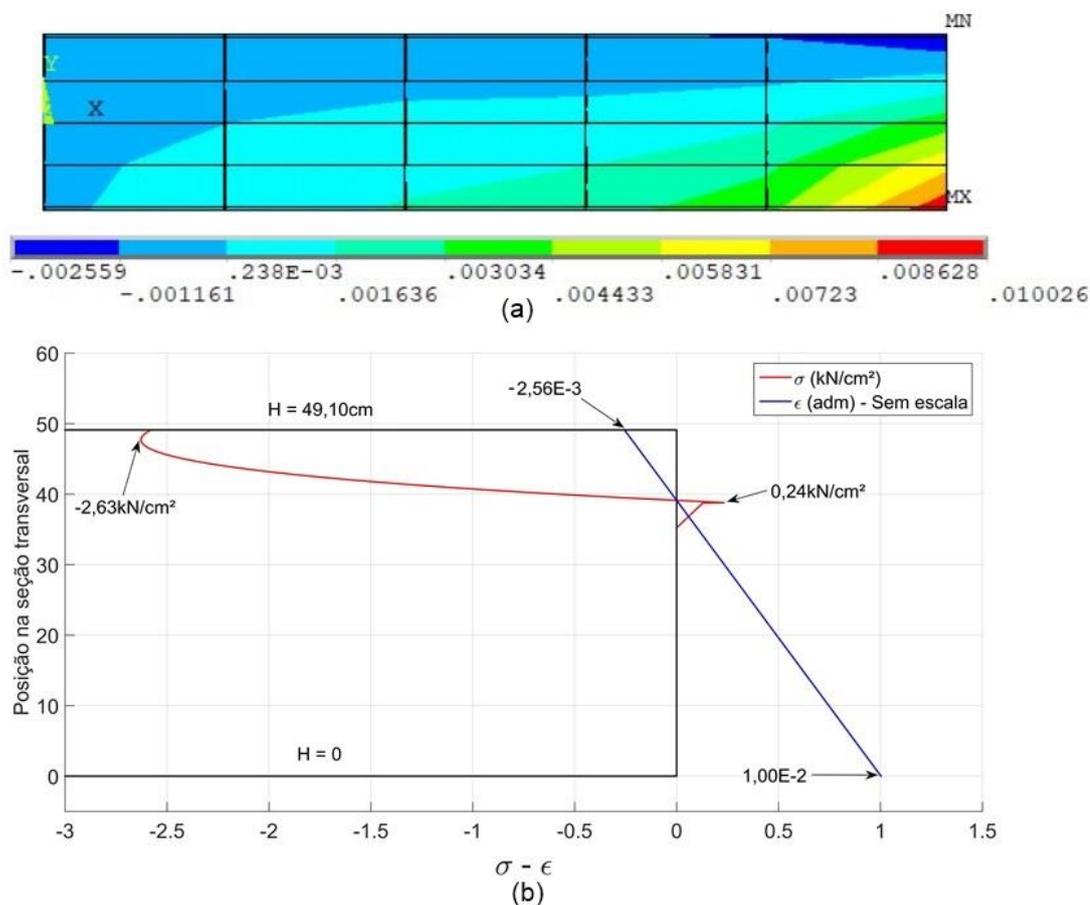


Figura 9.4 - Distribuição de deformações do concreto (a) e tensões normais atuantes na seção central (b) para a viga V2.

Na Figura 9.3, pode-se observar que, no regime de ruptura, boa parte dos pontos de integração da seção central apresentam uma dada contribuição do concreto tracionado, de forma que o trecho descendente correspondente ao *tension-stiffening* se estende até, aproximadamente, o meio da seção central. Tal comportamento em tração colabora na absorção de uma parcela da carga atuante. Na Figura 9.4, por sua vez, é observado que a parcela do concreto tracionado que contribui é significativamente menor quando comparada a da Figura 9.3. A expressão (9.1), que corresponde ao momento último analítico ( $M_{U,A}$ ) para vigas de concreto armado com armadura simples, foi utilizada durante esta pesquisa como forma de verificar e controlar a qualidade das cargas de rupturas obtidas pelo modelo numérico. Esta expressão é fundamentada nas hipóteses de dimensionamento adotadas pela NBR-6118:2014, apresentadas em 3.4.1, sendo empregada também para estudos de confiabilidade, como o desenvolvido por Santos et al (2014).

$$M_{U,A} = A_s f_y \left( d - 0,50 \frac{A_s f_y}{0,85 b f_c} \right) \quad (9.1)$$

Diante das comparações estabelecidas entre o momento último numérico ( $M_{U,N}$ ) e o momento último analítico, observou-se que a razão  $M_{U,N}/M_{U,A}$  se mostrou muito próxima à unidade ( $M_{U,N}/M_{U,A} \cong 1,00$ ) na maioria dos casos estudados, em especial naqueles cujo comportamento no regime de ruptura se assemelha ao da Figura 9.4, onde a região de contribuição do concreto sob tração no modelo numérico é menos significativa. Nos casos similares ao apresentado na Figura 9.3, onde foi constatada uma maior região de atuação do concreto tracionado, observou-se um valor médio aproximado  $M_{U,N}/M_{U,A} \cong 1,02$ , havendo configurações onde se verificou, em simulações isoladas, a relação  $M_{U,N}/M_{U,A} \cong 1,06$ .

Para avaliar uma possível influência do modelo empregado para a representação do concreto tracionado, realizou-se um teste avaliando a contribuição do comportamento *tension-stiffening* na resistência última das vigas V1 e V2, apresentadas nas Figura 9.3 e 9.4, respectivamente. O teste consistiu na comparação dos resultados obtidos pelo modelo numérico em duas situações distintas: na primeira situação, emprega-se o comportamento *tension-stiffening*, tal qual realizado nas análises de confiabilidade; na segunda situação, despreza-se o ramo descendente, correspondente ao *tension-stiffening*, no diagrama tensão-deformação do concreto fissurado, sendo a tensão imediatamente zerada após a formação da fissura. Os resultados obtidos, em termos de momento último das vigas, são dispostos na Tabela 9.2.

Tabela 9.2 - Influência do modelo *tension-stiffening* no momento último das vigas analisadas.

Viga	$M_{U,A}$ * (kNm)	$M_c$ ** Com <i>tension-stiffening</i>		$M_s$ ** Sem <i>tension-stiffening</i>	
		$M_c$ (kNm)	$M_c/M_{U,A}$	$M_s$ (kNm)	$M_s/M_{U,A}$
V1	72,6	76,7	1,06	70,9	0,98
V2	136,3	137,0	1,01	137,2	1,01

\* Momento último analítico, obtido pela expressão (9.1)

\*\* Momento último obtido numericamente

Os resultados indicam que, para os casos em que foi evidenciada a contribuição do concreto em tração, o aumento na média da resistência se deve ao comportamento *tension-stiffening* empregado. Tal situação é confirmada nos resultados da viga V1, sendo observada uma queda na resistência última da viga quando da desconsideração do mesmo, ao passo em que se aproximam os valores obtidos numérica e analiticamente. Para o caso da viga V2, onde não foi observada uma maior contribuição do concreto em tração durante as análises, os resultados não apresentaram variações significativas em relação a consideração ou não do *tension-stiffening*.

Como interpretação destes resultados, entende-se que o ganho de resistência evidenciado nos casos similares ao da viga V1 deve ser interpretado unicamente como um efeito espúrio do modelo de fissuras distribuídas, manifestado, em especial, nas vigas em que a rigidez da seção bruta de concreto for significativa em relação ao momento resistente da viga. Fisicamente, sabe-se que o modelo *tension-stiffening* é empregado para representar um comportamento médio da contribuição do concreto entre fissuras ao longo da estrutura. Prakhya e Morley (1990, *apud* COELHO, 2011) ressaltam que o trecho descendente do diagrama tensão-deformação do concreto sob tração é dependente da taxa de armadura, do diâmetro das barras de armadura, da tensão de aderência do concreto e da distribuição das barras de armadura na seção transversal. Nos modelos numéricos em que foi evidenciada uma contribuição do concreto tracionado, esta se deu nas intermediações da linha neutra, onde não dispõe de barras de armadura e não se espera, portanto, efeitos mecânicos de aderência entre aço e concreto. Em última análise, embora o modelo numérico tenha conduzido a uma resistência média sensivelmente superior nos casos citados, conclui-se que este ganho não representa o comportamento real e fisicamente esperado nestas vigas.

#### 9.4 SOBRE A INFLUÊNCIA DO CARREGAMENTO ACIDENTAL

É ainda possível concluir a partir do exposto na Tabela 9.1 que, por parte das variáveis correspondentes à solicitação, o maior cosseno diretor corresponde ao da parcela acidental do carregamento ( $q$ ). Tal variável aleatória também apresenta o maior cosseno diretor dentre todas as variáveis aleatórias consideradas, justificando o fato do parâmetro correspondente à razão de carregamento ( $r$ ) ter apresentado a maior influência nos índices de confiabilidade, conforme visto no capítulo 8. A grande influência do carregamento acidental pode ser atribuída a sua grande variabilidade e à forma da curva densidade de probabilidade dessa variável. A Figura 9.5 apresenta as funções densidade de probabilidade de uma solicitação hipotética, com valor

característico  $p_k = 15\text{kN/m}$ , quando tomada como puramente permanente ou puramente acidental, de acordo com as distribuições apresentadas no item 7.3.

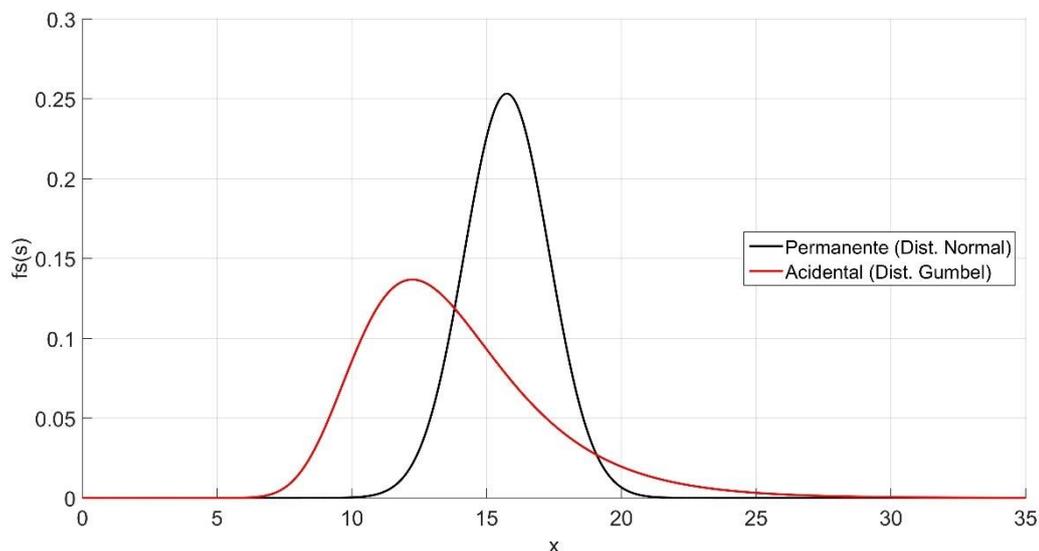


Figura 9.5 - Função densidade de probabilidade para solicitação permanente e acidental.

A partir do apresentado na Figura 9.5, verifica-se que, apesar do carregamento acidental apresentar uma média inferior à do carregamento permanente, a função densidade de probabilidade  $f_S(s)$  do carregamento acidental possui uma cauda mais prolongada à direita (Distribuição de Gumbel), apresentando um maior conteúdo de probabilidade nessa região e aumentando assim a região de sobreposição à curva densidade de probabilidade da resistência  $f_R(r)$ . Dessa forma, é aumentada a probabilidade de falha e reduzido o índice de confiabilidade. Logo, quanto maior for a razão de carregamento ( $r$ ), menores serão os índices de confiabilidade, tendo em vista a maior contribuição do carregamento acidental na combinação das ações.

## 9.5 SOBRE A INFLUÊNCIA DAS VARIÁVEIS DE INCERTEZA

Por fim, observa-se a partir do apresentado na Tabela 9.1 que as variáveis de incerteza do modelo resistente e solicitante,  $\theta_R$  e  $\theta_S$ , respectivamente, apresentam uma considerável influência nos índices de confiabilidade, dados os cossenos diretores apresentados para estas variáveis. Para os modelos estudados neste trabalho, o emprego dessas variáveis conduziu a uma redução de 5% a 10% nos índices de confiabilidade. Tendo em vista o corrente uso destas variáveis em trabalhos recentes, tal como nas pesquisas de Oliveira et al (2008), Stucchi et al

(2011), Santos et al (2014), Magalhães (2014) e Barbosa (2017), optou-se por considerá-las neste estudo de confiabilidade.

## 10 CONCLUSÕES

Este trabalho se ocupou do estudo de confiabilidade de vigas de concreto armado dimensionadas de acordo com as prescrições da norma brasileira NBR-6118:2014. O Método dos Elementos Finitos foi utilizado para a obtenção da resistência destas vigas, sendo empregados os Métodos de Monte Carlo e Superfície de Resposta para a caracterização das estatísticas e distribuição de probabilidade de cada viga frente ao conjunto de variáveis aleatórias consideradas. O modelo mecânico do concreto foi representado através da subrotina customizada *Usermat*, programada em Fortran 77, seguindo a linha de pesquisa desenvolvida recentemente por outros trabalhos dentro do PPGEC/UFGRS. O modelo numérico utilizado para a representação da resistência das vigas foi validado através de comparações com resultados experimentais apresentados por outros pesquisadores, sendo possível constatar uma boa concordância entre os resultados obtidos numericamente e experimentalmente. A confiabilidade de 81 vigas em relação ao estado-limite último de flexão e dimensionadas de acordo com a NBR-6118:2014 foi avaliada empregando o método de primeira ordem FORM, sendo, por fim, apresentado um estudo paramétrico que permitiu avaliar a influência isolada de alguns parâmetros de projeto nos índices de confiabilidade alcançados. Dos 81 índices de confiabilidade determinados neste trabalho, 54 apresentaram-se abaixo do índice alvo  $\beta_{\text{alvo}} = 3,80$ . O maior índice de confiabilidade obtido foi  $\beta = 4,22$ , enquanto o menor valor de confiabilidade foi  $\beta = 2,99$ . Esses valores foram tomados a partir da metodologia 1, sendo esta considerada como referência no estudo paramétrico apresentado no capítulo 8. O índice de confiabilidade médio alcançado no estudo foi  $\beta = 3,52$ .

Salienta-se que os índices de confiabilidade apresentados nesta pesquisa são resultados de formulações analíticas nas quais são estabelecidas aproximações, desde aquelas associadas ao comportamento mecânico dos materiais até aquelas relacionadas à atribuição de distribuições teóricas para cada variável aleatória. As metodologias empregadas também apresentam algumas limitações, em especial pela amostragem das variáveis ser realizada em todo o domínio da resistência. Nas metodologias 1 e 2 empregadas neste trabalho, a resistência  $R$  foi unidimensionalizada segundo uma distribuição teórica conhecida, ajustada a partir dos valores de  $\mu_R$  e  $\sigma_R$  obtidos via simulações de Monte Carlo. A Figura 10.1, que apresenta uma ênfase na cauda inferior de um conjunto de resistências, ilustra os diferentes ajustes obtidos empregando-se as três distribuições teóricas consideradas nesta pesquisa.

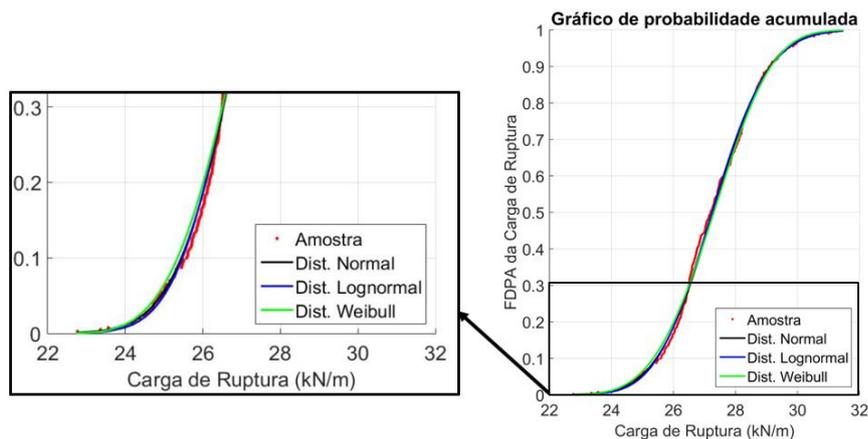


Figura 10.1 - Ênfase no ajuste da cauda inferior da resistência R.

É sabido que a qualidade na estimativa da probabilidade de falha depende do nível de precisão alcançado na representação da cauda inferior da distribuição  $f_R(r)$ . Por intermédio da Figura 10.1, é observado que as caudas das distribuições teóricas testadas apresentam algumas diferenças entre si, o que é naturalmente esperado, visto se tratarem de funções distintas. Cada uma das três distribuições teóricas apresenta, ainda, uma discrepância em relação aos dados amostrais obtidos via simulação, o que qualitativamente representaria uma fonte de erro na estimativa do índice de confiabilidade. No entanto, o que se verificou nesse estudo é que esta diferença não se apresenta significativa, conforme resultados apresentados na Tabela 7.3. Tal situação pode ser esclarecida analisando a Figura 10.2, na qual são apresentados, para a viga V-25-40-r-15, os cossenos diretores obtidos através da metodologia 1.

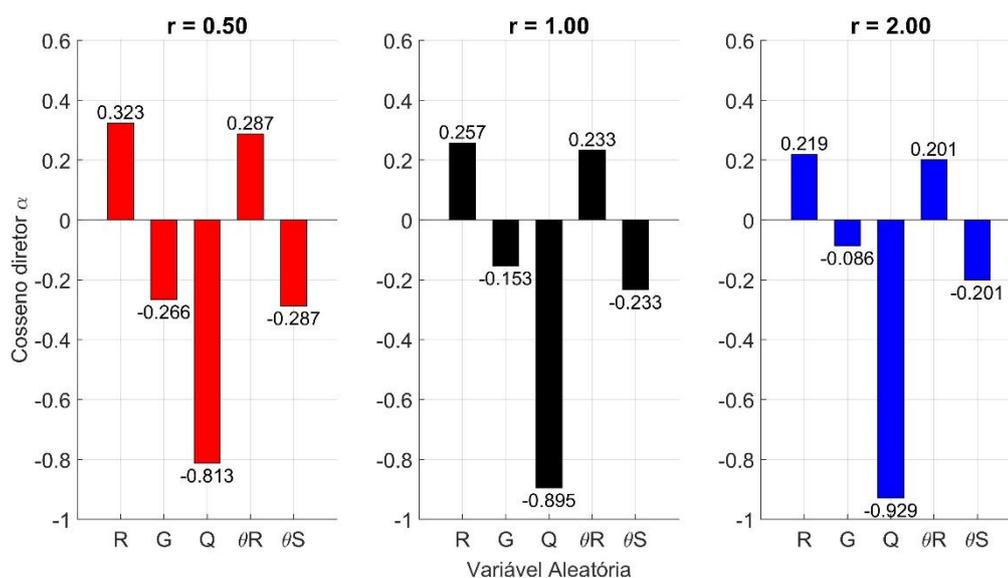


Figura 10.2 - Cossenos diretores da viga V-25-40-r-15 obtidos pela metodologia 1.

Observa-se, prontamente, que para todas as razões de carregamento  $r$ , o cosseno diretor predominante é o da variável aleatória  $Q$ , que corresponde à parcela acidental do carregamento. Isso implica uma grande influência da variável  $Q$  nos índices de confiabilidade, conforme apresentado no capítulo 9. Em relação às demais variáveis aleatórias ( $R$ ,  $G$ ,  $\theta_R$  e  $\theta_S$ ), é verificado que seus cossenos diretores possuem ordens de grandeza semelhantes entre si, indicando que estas variáveis exercem influências de mesma relevância no valor do índice de confiabilidade. Nessa condição, e considerando os resultados apresentados na Tabela 7.3, é constatado que quaisquer erros inerentes ao ajuste dos dados da resistência  $R$ , ou até mesmo as diferenças esperadas empregando-se diferentes distribuições teóricas para  $R$ , não refletem, de forma isolada, em variações significativas no índice de confiabilidade. Obviamente, tal procedimento é válido desde que seja atestada, para um dado intervalo de confiança, uma qualidade no ajuste da distribuição teórica de  $R$  aos dados obtidos via simulação, tal como o verificado neste trabalho através de testes de aderência.

No que diz respeito ao Método da Superfície de Resposta, a ferramenta PDS realiza a amostragem *Central Composite Design* centrada em torno da média das variáveis aleatórias. Naturalmente, o polinômio aproximador apresenta um ajuste de melhor qualidade nas intermediações dos pontos amostrados, apresentando resultados que podem não ser tão precisos ao passo que se extrapola essa região. Sabe-se que a precisão do índice de confiabilidade depende efetivamente da qualidade da estimativa do ponto de projeto  $\mathbf{x}^*$ . Uma vez que o ponto de projeto não é conhecido *a priori*, a obtenção de  $\mathbf{x}^*$  deve ser feita por aproximações sucessivas (LEONEL et al, 2011). Dessa forma, uma melhor precisão pode ser esperada lançando-se mão de uma amostragem adaptativa para a construção do polinômio aproximador da resistência  $R$  de forma centrada no ponto de projeto  $\mathbf{x}^*$ , conforme ilustrado na Figura 10.3.

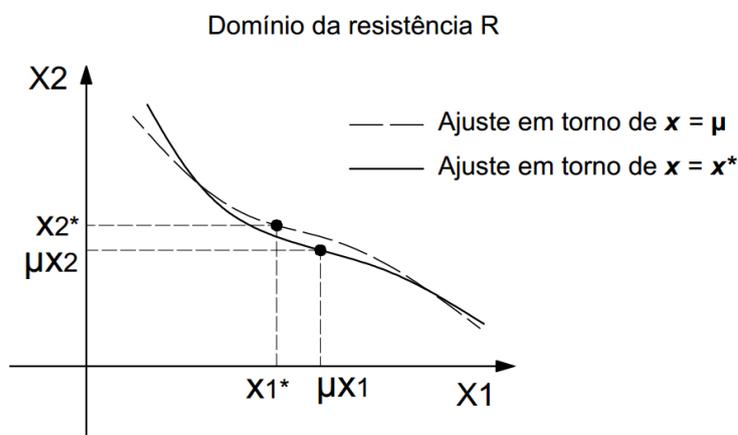


Figura 10.3 - Qualidade de ajuste do polinômio aproximador.

Tal procedimento garantiria uma um polinômio aproximador melhor caracterizado em torno de  $\mathbf{x}^*$  e conduziria a uma maior precisão na estimativa de  $\beta$ , consistindo, portanto, em uma sugestão para futuros trabalhos a serem desenvolvidos neste tema. Diante disso, é sabido que os índices de confiabilidade apresentados não são absolutos e dificilmente corresponderão exatamente aos verificados em estruturas reais. Contudo, considerando o largo emprego destas metodologias, os resultados alcançados são tecnicamente aceitos.

Em relação aos resultados obtidos, o estudo paramétrico permitiu constatar que o índice de confiabilidade das vigas tende a aumentar com o aumento do carregamento característico ( $p_k$ ); reduzir com o aumento da resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ); e reduzir com o aumento da altura da seção transversal ( $h$ ). Esses comportamentos são justificados pela variação observada na relação entre as médias da resistência e solicitação ( $\mu_R/\mu_S$ ), sendo esta explicada pela variação da taxa de armadura à flexão das vigas. Exceções a esses comportamentos foram evidenciadas nas vigas cujo concreto sob tração promoveu um acréscimo de resistência. Conforme amplamente discutido no capítulo 9, o ganho de resistência observado nestas vigas consiste em um efeito espúrio do modelo numérico, especificamente do comportamento *tension-stiffening*, e não corresponde, portanto, ao comportamento real esperado nestas vigas. Apesar das variações observadas, pode-se estabelecer que os índices de confiabilidade apresentam uma boa uniformidade em relação à variação de  $p_k$ ,  $f_{ck}$  e  $h$ .

Observou-se ainda que o coeficiente de variação da resistência ( $V_R$ ) apresenta-se muito próximo ao coeficiente de variação da tensão de escoamento da armadura ( $V_{f_y}$ ), indicando que a capacidade resistente das vigas é fundamentalmente regida pelas propriedades mecânicas do aço empregado nas armaduras.

Dentre o conjunto de quatro parâmetros variados nas vigas estudadas, a razão de carregamento ( $r$ ) foi a que apresentou a maior influência sobre os índices de confiabilidade, sendo este resultado justificado pela grande variabilidade do carregamento acidental ( $q$ ) e a assimetria na função densidade de probabilidade da distribuição de Gumbel, a qual é utilizada para representar a distribuição desta variável aleatória. Estes resultados indicam que o atual coeficiente de ponderação parcial do carregamento acidental sugerido pela NBR-6118:2014 não garante a uniformidade dos índices de confiabilidade para os casos em que os carregamentos acidentais se tornam preponderantes nas combinações de ações.

Finalmente, vale ressaltar que os resultados apresentados são válidos para as configurações de vigas analisadas nesta pesquisa, não devendo ser extrapolados para quaisquer outras situações. Para configurações geométricas, propriedades mecânicas dos materiais e condições de carregamentos diferentes, sugere-se realizar uma nova gama de pesquisas, abrangendo novas configurações e contribuindo ainda mais para a avaliação da segurança atingida pelas normas nacionais de projeto estrutural.

## REFERÊNCIAS

ACI COMMITTEE 318 – American Concrete Institute. **ACI 318-11: Building Code Requirements for Reinforced Concrete and Commentary**. Farmington Hills, 2011.

AGRAWAL, G.; BHATTACHARYA, B. Partial safety factor design of rectangular partilly prestressed concrete beam in ultimate flexural limit state. **Journal of Structural Engineering**. [s.l]. v. 37. n. 4. p. 257-267. 2010.

ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability Concepts In Engineering**. John Wiley & Sons, Inc., 2007.

ANSYS, Inc. **ANSYS Mechanical APDL Advanced Analysis Guide**. Release 15.0, 2013<sup>d</sup>.

ANSYS, Inc. **ANSYS Mechanical APDL Element Reference**. Release 15.0, 2013<sup>a</sup>.

ANSYS, Inc. **ANSYS Mechanical APDL Programmer's Reference**. Release 15.0, 2013<sup>c</sup>.

ANSYS, Inc. **ANSYS Mechanical APDL Structural Analysis Guide**. Release 15.0, 2013<sup>e</sup>.

ANSYS, Inc. **ANSYS Mechanical APDL Theory Reference**. Release 15.0, 2013<sup>b</sup>.

ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**. 4 vols. Rio Grande: Editora Dunas, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 12655**: Concreto e cimento Portland - Preparo, controle, recebimento e aceitação - Procedimento. Rio de Janeiro, 2015.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

BARBOSA, P. R. **Análise probabilística de pilares de concreto armado através do método dos elementos finitos**. 2017. 210 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – PPGE, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2017.

BEBER, A. J. **Reforço de estruturas de concreto com compósitos de fibra de carbono**. 1999. 37 f. Caderno Técnico, CPGE/UFRGS, Porto Alegre.

BECK, A. T. **Um método para análise de confiabilidade para elementos finitos**. 1999. 194 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 1999.

BECK, A. T.; SOUZA JR., A. C. A first attempt towards reliability-base calibration of brazilian structural design codes. **Revista ABCM**. [s.l]. v. 32. n. 2. p. 119-127. 2010.

BIONDINI, F.; BONTEMPI, F.; FRANGOPOL, D. M.; MALERBA, P. G. Reliability of material and geometrically non-linear reinforced and prestressed concrete structures. **Computers and Structures**, v. 82. n. 13-14. p. 1021-1031. 2004.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado segundo a NBR 6118:2003**. São Carlos: EdUFSCar, 2004.

CERVERA, M.; HINTON, E.; BONET, J.; BICANIC. Nonlinear transiente dynamic analysis of three dimensional structures - A finite element program for steel and reinforced concret materials. In: Hinton, E. (ed.). **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press. 550p. cap 7. p. 320-504. 1988.

COELHO, J. D'A. **Confiabilidade de vigas de concreto armado no estado limite de serviço**. 2011. 272 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – PPGEC, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2011.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIB Model Code 2010**. Lausanne, 2012.

DECANINI, L.; GRILLO, F. Comunicación sobre ensayos de vigas de hormigón armado con acero de alta adherencia. **Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, XIV**. Buenos Aires. v.3. p. 126-156. 1970.

DINIZ, S. M. C.; FRANGOPOL, D. M. Reliability Assessment of High-Strength Concrete Columns. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 124. n. 5. p. 529-536. 1998.

DINIZ, S. M. C.; FRANGOPOL, D. M. Reliability Bases of High-Strength Concrete Columns. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 123. n. 10. p. 1375-1381. 1997.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 0: Basis of structural design**. Brussels, 2002.

FERREIRA, L. M.; NOWAK, A. S.; EL DEBS, M. K. Desenvolvimento de equações para a limitação do peso de veículos de carga em pontes de concreto através da teoria de confiabilidade. **Revista IBRACON de estruturas e materiais**. São Paulo. v. 1. n. 4. p. 421-450. 2008.

FUSCO, P. B. **Tecnologia do concreto estrutural**. São Paulo: PINI, 2008.

GALAMBOS, T. V.; ELLINGWOOD, B.; MACGREGOR, J. G.; CORNELL, C. A. Probability based load criteria: Assessment of current design practice. **Journal of the Structural Division**, v. 108, p. 959-977. 1982.

GOMES, H. M. **Técnicas de avaliação da confiabilidade de estruturas de concreto armado**. 2001. 231 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2001.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design**. John Wiley & Sons, New York, 2000.

IBRAHIMBEGOVIC, A. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s.l.], v. 122, p. 11-26, 1995.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. General principles on reliability of structures. Vernier, 1998.

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY. **JCSS Probabilistic Model Code**. Lyngby, 2001.

LAZZARI, B. M. **Análise por elementos finitos de peças de concreto e protendido sob estados planos de tensão**. 2015. 200 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2015.

LEONEL, E. D.; BECK, A. T.; VENTURINI, W. S. On the performance of response surface and direct coupling approaches in solution of random crack propagation problems. **Structural Safety**, v. 33. n. 4. p. 261-274. 2011.

MADSEN, H. O.; EGELAND, T. Structural reliability – Models and Applications. **JSTOR**. Great Britain. v. 57. n. 3. p. 185-203. 1989.

MAGALHÃES, F. C. **A problemática dos concretos não conformes e sua influência na confiabilidade de pilares de concreto armado**. 2014. 292 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2014.

MAGALHÃES, F. C.; REAL, M. V.; SILVA FILHO, L. C. P. The problem of non-compliant concrete and its influence on the reliability of reinforced concrete columns. **Material and Structures**, v. 49. n. 4. p. 1485-1497. 2016.

MARTINELLI, M. **Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do método dos elementos finitos**. 2003. 149 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2003.

MCKAY, M.D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. **Technometrics**, v. 21. n. 2. p. 239-145. 1979.

MINASI, A. T. **Confiabilidade de vigas em estruturas portuárias no estado limite último de flexão**. 2016. 94 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica) – PPGEIO, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande. 2016.

MIRZA, S. A.; HATIZINOLAS, M.; MACGREGOR, J. G. Statistical description of strength of concrete. **Journal of Strucural Division**, v. 105. p. 1021-1037. 1979.

MIRZA, S. A.; MACGREGOR, J. G. Probabilistic study of strength of reinforced concrete members. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 9. n. 3. p. 431-448. 1982.

MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of Experiments**. John Wiley & Sons, New York, 2012.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. São Paulo: LTC, 2009.

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reliability of Structures**. McGraw-Hill Companies, Inc., 2000

NOWAK, A. S.; SZERSZEN, M. M. Calibration of Design Code for Buildings (ACI 318): Part 1 – Statistical Models for Resistance. **ACI Structural Journal**, v. 100. n. 3. p. 377-382. 2003.

OLIVEIRA, W. L. A.; BECK, A.T.; EL DEBS, A. L. H. C. Avaliação da segurança de pilares mistos preenchidos de seção circular projetados segundo a norma NBR 8800:2008. **Revista IBRACON de estruturas e materiais**. São Paulo, v. 1. n. 3. p. 212-236. 2008.

PALIGA, C. M. **Análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através do método de Monte Carlo utilizando um modelo de Elementos Finitos**. 2008. 249 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2008.

PRAKHYA, G. K. V.; MORLEY, C. T. Tension-Stiffening and Moment-Curvature Relations of Reinforced Concrete Elements. **ACI Structural Journal**, v. 87. n. 5. p. 597-605. 1990.

QUEVEDO, F. P. M. **Comportamento à longo prazo de túneis profundos revestidos com concreto: Modelo em elementos finitos**. 2017. 210 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2017.

RACKWITZ, F.; FIESSLER, B. Structural Reliability Under Combined Randon Load Sequences. **Computers and Structures**, v. 9. n. 5. p. 484-494. 1978.

REAL, M. V. **Análise Probabilística de Estruturas de Concreto Armado, Sob Estado Plano de Tensão, Através do Método dos Elementos Finitos**. 2000. 249 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2000.

REVISTA CONCRETO & CONSTRUÇÕES. **Ibracon**. São Paulo. n. 53. Jan/Mar. 2009. ISSN 1809-7197.

SANTOS, D. M.; STUCCHI, F.R.; BECK, A.T. Confiabilidade de vigas projetadas de acordo com as normas brasileiras. **Revista IBRACON de estruturas e materiais**. São Paulo, v. 7. n. 5. p. 723-743. 2014.

SCHMITZ, R. J. **Estrutura mista aço-concreto: análise de ponte composta por vigas de alma cheia**. 2017. 214 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2017.

SILVA, G. R. **Análise da confiabilidade da ligação laje-pilar interno sob punção de acordo com a NBR-6118:2014**. 2017. 174 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2017.

STRAMANDINOLI, R. S. B.; LA ROVERE, H. L. Modelo de elementos finitos para análise não linear de vigas e pórticos planos de concreto armado. **Revista IBRACON de estruturas e materiais**. São Paulo, v. 10. n. 2. p. 386-414. 2017.

STUCCHI, F. R.; SANTOS, S. H. C.; FRANCO, R. M. Evaluation of safety criteria of Brazilian Standard NBR 6118 for slender member based on reliability analyses. **Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering**. London, p. 2762-2767. 2011.

SZERSZEN, M. M.; NOWAK, A. S. Calibration of Design Code for Buildings (ACI 318): Part 2 – Reliability Analysis and Resistance Factors. **ACI Structural Journal**, v. 100. n. 3. p. 383-391. 2003.

SZERSZEN, M. M.; SZWED, A.; NOWAK, A. S. Reliability Analysis for Eccentrically Loaded Columns. **ACI Structural Journal**, v. 102. n. 5. p. 676-688. 2005.

UDOEYO, F. F.; UGBEM, P. I. Dimensional variations in reinforced-concrete members. **Journal of Structural Engineering**, v. 121. n. 12. p. 1865-1867. 1995.

## APÊNDICE A – SUBROTINA *USERMATBM* EM FORTRAN 77

Esta listagem deve substituir a subrotina original *Usermatbm* dentro da subrotina geral *Usermat* para a posterior compilação e utilização do material customizado referente ao concreto, conforme capítulo 4.

```

!/= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= !
!
! TRECHO CUSTOMIZADO POR : MAÍLSON SCHERER
!                          PPGEC UFRGS (2016/2018)
!
! DATA                   : 06/2018
! STATUS                   : Ok!
!
!/= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= /= !
!
subroutine usermatbm(
    & matId, elemId, kDomIntPt, kLayer, kSectPt,
    & ldstep, isubst, keycut,
    & nDirect, nShear, ncomp, nStatev, nProp,
    & Time, dTime, Temp, dTemp,
    & stress, ustatev, dsdePl, sedEl, sedPl, epseq,
    & Strain, dStrain, epsPl, prop, coords,
    & var0, defGrad_t, defGrad,
    & tsstif, epsZZ, cutFactor,
    & var1, var2, var3, var4, var5,
    & var6, var7)
c*****
c    *** primary function ***
c
c    user defined material constitutive model
c
c    Attention:
c    User must define material constitutive law properly
c    according to the stress state such as 3D, plane strain
c    and axisymmetry, plane stress and beam.
c
c    a 3D material constitutive model can use for
c    plane strain and axisymmetry cases.
c
c    When using shell elements, a plane stress algorithm
c    must be use.
c
c                                gal July, 1999
c
c    The following demonstrates a USERMAT subroutine for
c    a plasticity model in 3D beam(188, 189). The plasticity
c    model is the same as TB, BISO.
c    See "ANSYS user material subroutine USERMAT" for detailed
c    description of how to write a USERMAT routine.
c*****
c
c    input arguments
c    =====
c    matId      (int,sc,i)          material #
c    elemId     (int,sc,i)          element #
c    kDomIntPt  (int,sc,i)          "k"th domain integration point
c    kLayer     (int,sc,i)          "k"th layer
c    kSectPt    (int,sc,i)          "k"th Section point
c    ldstep     (int,sc,i)          load step number
c    isubst     (int,sc,i)          substep number
c    nDirect    (int,sc,in)         # of direct components
c    nShear     (int,sc,in)         # of shear components
c    ncomp      (int,sc,in)         nDirect + nShear
c    nStatev    (int,sc,l)         Number of state variables

```

```

c      nProp      (int,sc,1)          Number of material constants
c
c      Temp       (dp,sc,in)         temperature at beginning of
c                                     time increment
c      dTemp      (dp,sc,in)         temperature increment
c      Time       (dp,sc,in)         time at beginning of increment (t)
c      dTime      (dp,sc,in)         current time increment (dt)
c
c      Strain     (dp,ar(ncomp),i)    Strain at beginning of time increment
c      dStrain    (dp,ar(ncomp),i)    Strain increment
c      prop       (dp,ar(nprop),i)    Material constants defined by TB,USER
c      coords     (dp,ar(3),i)        current coordinates
c      defGrad_t  (dp,ar(3,3),i)      Deformation gradient at time t
c      defGrad    (dp,ar(3,3),i)      Deformation gradient at time t+dt
c
c      input output arguments
c      =====
c      stress     (dp,ar(nTesn),io)    stress
c      ustatev    (dp,ar(nStatev),io)  statev
c      ustatev(1) - equivalent plastic strain
c      ustatev(2) - ustatev(1+ncomp) - plastic strain vector
c      ustatev(nStatev) - von-Mises stress
c      sedEl      (dp,sc,io)           elastic work
c      sedPl      (dp,sc,io)           plastic work
c      epseq      (dp,sc,io)           equivalent plastic strain
c      tsstif     (dp,ar(2),io)        transverse shear stiffness
c      tsstif(1) - Gxz
c      tsstif(2) - Gyz
c      tsstif(1) is also used to calculate hourglass
c      stiffness, this value must be defined when low
c      order element, such as 181, 182, 185 with uniform
c      integration is used.
c      var?       (dp,sc,io)          not used, they are reserved arguments
c      for further development
c
c      output arguments
c      =====
c      keycut     (int,sc,io)          loading bisect/cut control
c      0 - no bisect/cut
c      1 - bisect/cut
c      (factor will be determined by ANSYS solution control)
c      dsdePl     (dp,ar(ncomp,ncomp),io) material jacobian matrix
c      epsZZ      (dp,sc,o)            strain epsZZ for plane stress,
c      define it when accounting for thickness change
c      in shell and plane stress states
c      cutFactor  (dp,sc,o)            time step size cut-back factor
c      define it if a smaller step size is wished
c      recommended value is 0~1
c
c      *****
c
c      ncomp      6   for 3D
c      ncomp      4   for plane strain, axisymmetric (nShear = 1)
c      ncomp      3   for plane stress (nShear = 1)
c      ncomp      3   for 3D beam (nShear = 2), beam188/189
c      ncomp      1   for 1D beam, link180
c
c      stresss and strains, plastic strain vectors
c      11, 22, 33, 12, 23, 13   for 3D
c      11, 22, 33, 12           for Plane strain and axisymmetry
c      11, 22, 12               for Plane stress
c      11, 13, 12               for 3d beam
c      11                       for 1D
c
c      material jacobian matrix
c      3D
c      dsdePl     | 1111  1122  1133  1112  1123  1113 |
c      dsdePl     | 2211  2222  2233  2212  2223  2213 |
c      dsdePl     | 3311  3322  3333  3312  3323  3313 |
c      dsdePl     | 1211  1222  1233  1212  1223  1213 |
c      dsdePl     | 2311  2322  2333  2312  2323  2313 |
c      dsdePl     | 1311  1322  1333  1312  1323  1313 |
c      plane strain, axisymmetric
c      dsdePl     | 1111  1122  1133  1112 |

```

```

c      dsdePl | 2211 2222 2233 2212 |
c      dsdePl | 3311 3322 3333 3312 |
c      dsdePl | 1211 1222 1233 1212 |
c      plane stress
c      dsdePl | 1111 1122 1112 |
c      dsdePl | 2211 2222 2212 |
c      dsdePl | 1211 1222 1212 |
c      3d beam plasticity
c      dsdePl | 1111 1113 1112 |
c      dsdePl | 1311 1313 1312 |
c      dsdePl | 1211 1213 1212 |
c      1d
c      dsdePl | 1111 |
c
c*****
#include "impcom.inc"
c
  INTEGER
  &      matId, elemId, itc, iteste,
  &      kDomIntPt, kLayer, kSectPt,
  &      ldstep, isubst, keycut,
  &      nDirect, nShear, ncomp, nStatev, nProp
  DOUBLE PRECISION
  &      Time,      dTime,      Temp,      dTemp,
  &      sedEl,      sedPl,      epeq,      epsZZ,      cutFactor
  DOUBLE PRECISION
  &      stress (ncomp ), ustatev (nStatev),
  &      dsdePl (ncomp,ncomp), sigi(ncomp),
  &      Strain (ncomp ), dStrain (ncomp ),
  &      epsPl (ncomp ), prop (nProp ),
  &      coords (3),
  &      defGrad (3,3),      defGrad_t(3,3),
  &      tsstif (2)
c
c***** User defined part *****
c
c --- parameters
c
  INTEGER      NEWTON, mcomp, melem, mgauss
  DOUBLE PRECISION HALF, ONE, TWO, SMALL, SQTWOTHIRD,
  &      ZERO, TWOTHIRD, ONEDM02, ONEDM05, sqTiny
  PARAMETER    (ZERO      = 0.d0,
  &      HALF      = 0.5d0,
  &      ONE      = 1.d0,
  &      TWO      = 2.d0,
  &      SMALL    = 1.d-08,
  &      sqTiny   = 1.d-20,
  &      ONEDM02  = 1.d-02,
  &      ONEDM05  = 1.d-05,
  &      TWOTHIRD = 2.0d0/3.0d0,
  &      SQTWOTHIRD = 0.816496580927726030d0,
  &      NEWTON   = 20,
  &      mcomp    = 3,
  &      melem    = 1000,
  &      mgauss   = 800)
c
c --- local variables
c
  sigElp (dp,ar(3 ),1)      trial stress
  dsdeEl (dp,ar(3,3),1)    elastic moduli
  pleq_t (dp,sc ,1)        equivalent plastic strain at beginnig of time increment
  pleq   (dp,sc ,1)        equivalent plastic strain at end of time increment
  dpleq  (dp,sc ,1)        incremental equivalent plastic strain
  gamma  (dp,sc ,1)        variable for solving incremental equivalent plastic strain
  dgamma (dp,sc ,1)        correction of gamma
  sigy_t (dp,sc ,1)        yield stress at beginnig of time increments
  sigy   (dp,sc ,1)        yield stress at end of time increment
  young  (dp,sc ,1)        Young's modulus
  posn   (dp,sc ,1)        Poiss's ratio
  sigy0  (dp,sc ,1)        initial yield stress
  dsigdep (dp,sc ,1)       plastic slop
  twoG   (dp,sc ,1)        two time of shear moduli
  funcf  (dp,sc ,1)        nonlinear function to be solved for gamma
  dFdep  (dp,sc ,1)        derivative of nonlinear function over gamma

```







```

!
!===== !
! 3.2 |          TENSÕES ELÁSTICAS          !
!===== !
!
SigElp = 0.0d0 ! Zera a matriz incremental
!
! ---- Tensões de corte (Elástico linear) ----
!
do i = 2,ncomp
!
    SigElp(i) = SigElp(i) + dsdeEl(i,i)*dStrain(i) ! Incremento das tensões de corte
!
enddo
!
!===== !
! 3.3 |  VERIFICAÇÃO DA RUPTURA DO PONTO DE INTEGRAÇÃO
!===== !
!
If(defatu.LT.epsclim) then ! Ruptura por esmagamento
    Ustatev(32) = 1.0d0
endif
!
If(deftra.GT.epsuct) then ! Ruptura a tração
    Ustatev(31) = 1.0d0
endif
!
If (matId.EQ.1.AND.elemId.EQ.kelem.
& and.kDomIntPt.EQ.gauss.AND.outinst.EQ.1) then
!
    open(2, file      = '_Controle_Solução.txt',
&      action      = 'write',
&      access     = 'sequential',
&      form       = 'formatted',
&      status     = 'unknown',
&      position   = 'append',
&      shared)
!
    write(2,*) '====='
    write(2,*) '---- Controle de tempo e iterações ----'
    write(2,*) 'ElemId      = ',ElemId
    write(2,*) 'kDomIntPt   = ',kDomIntPt
    write(2,*) 'time        = ',time
    write(2,*) 'loadstep    = ',ldstep
    write(2,*) 'substep     = ',isubst
    write(2,*) 'iteração    = ',iteracao
    write(2,*) '---- Controle de tensões e deformações ----'
    write(2,*) 'Strain(1)   = ',Strain(1)
    write(2,*) 'dStrain(1)  = ',dStrain(1)
    write(2,*) 'defant      = ',defant
    write(2,*) 'defatu     = ',defatu
    write(2,*) 'defeft     = ',defeft
    write(2,*) 'Stress(1)  = ',Stress(1)
    write(2,*) 'SigElp(1)  = ',SigElp(1)
    write(2,*) 'fck       = ',fck
    write(2,*) 'fc        = ',fc
    write(2,*) 'fct       = ',fct
    write(2,*) 'Ec        = ',Ec
    write(2,*) 'Ec1       = ',ec1
    write(2,*) 'epscl1   = ',epscl1
    write(2,*) 'epsclim  = ',epsclim
    write(2,*) 'kapa     = ',kapa
    write(2,*) 'alfae    = ',alfae
    write(2,*) 'Ustatev(10) = ',Ustatev(10)
    write(2,*) 'Ustatev(11) = ',Ustatev(11)
    write(2,*) 'Ustatev(12) = ',Ustatev(12)
    write(2,*) 'Ustatev(13) = ',Ustatev(13)
    write(2,*) 'Ustatev(14) = ',Ustatev(14)
    write(2,*) 'Ustatev(15) = ',Ustatev(15)
    write(2,*) 'Ustatev(16) = ',Ustatev(16)
    write(2,*) 'Ustatev(17) = ',Ustatev(17)
    write(2,*) 'Ustatev(18) = ',Ustatev(18)
    write(2,*) 'Ustatev(1)  = ',Ustatev(1)
!

```

```

write(2,*) 'Ustatev(20) = ',Ustatev(20)
write(2,*) 'Ustatev(21) = ',Ustatev(21)
write(2,*) 'Ustatev(22) = ',Ustatev(22)
write(2,*) 'Ustatev(23) = ',Ustatev(23)
write(2,*) 'Ustatev(24) = ',Ustatev(24)
!
write(2,*) 'Ustatev(30) = ',Ustatev(30)
write(2,*) 'Ustatev(31) = ',Ustatev(31)
write(2,*) 'Ustatev(32) = ',Ustatev(32)
!
write(2,*) '===== '
!
endif
!
If (matId.EQ.1.AND.elemId.EQ.kelem.
& and.kDomIntPt.EQ.gauss.AND.iteracao.EQ.1.AND.outinst.EQ.1)
& then
!
open(3, file = '_TensaoxDeformacao.txt',
& action = 'write',
& access = 'sequential',
& form = 'formatted',
& status = 'unknown',
& position = 'append',
& shared)
!
write(3,*)defatu,Stress(1),time
!
endif
!
!===== !
! 3.1 | ATUALIZAÇÃO DA TENSÃO !
!===== !
!
If(dStrain(1).LT.0.0d0) then
!
If(Stress(1).LE.0.0d0) then ! Carga em compressão
!
If(defatu.LE.Ustatev(23)) then
!
Stress(1) = carga_comp(fc,defatu,kapa,epsc1)
!
Ustatev(23) = defatu
Ustatev(24) = Stress(1)
!
elseif(defatu.GT.Ustatev(23)) then
!
SigElp(1) = dsdeEl(1,1)*dStrain(1)
Stress(1) = Stress(1) + SigElp(1)
!
endif
!
elseif(Stress(1).GT.0.0d0) then ! Descarga em tração
!
If(Ustatev(30).EQ.0) then ! Concreto não fissurado
!
SigElp(1) = dsdeEl(1,1)*dStrain(1)
Stress(1) = Stress(1) + SigElp(1)
!
else
!
SigElp(1) = dStrain(1)*(Ustatev(22)/Ustatev(21))
Stress(1) = Stress(1) + SigElp(1) ! Concreto fissurado
!
endif
!
endif
!
elseif (dStrain(1).GE.0.0d0) then
!
If(Stress(1).GE.0.0d0.AND.Ustatev(30).NE.1) then ! Carga em tração
!
SigElp(1) = dsdeEl(1,1)*dStrain(1)
Stress(1) = Stress(1) + SigElp(1)

```



```

DOUBLE PRECISION ec1
DOUBLE PRECISION epsc1
DOUBLE PRECISION epsclim
!
! Determinação das deformações do concreto em compressão
!
if (fck .LT. 1.6) then
    epsc1=-0.0019d0
    epsclim=-0.0035d0
elseif (fck .LT. 2.0) then
    epsc1=-0.0020d0
    epsclim=-0.0035d0
elseif (fck .LT. 2.5) then
    epsc1=-0.0021d0
    epsclim=-0.0035d0
elseif (fck .LT. 3.0) then
    epsc1=-0.0022d0
    epsclim=-0.0035d0
elseif (fck .LT. 3.5) then
    epsc1=-0.0023d0
    epsclim=-0.0035d0
elseif (fck .LT. 4.0) then
    epsc1=-0.0023d0
    epsclim=-0.0035d0
elseif (fck .LT. 4.5) then
    epsc1=-0.0024d0
    epsclim=-0.0035d0
elseif(fck .LT. 5.0) then
    epsc1=-0.0025d0
    epsclim=-0.0035d0
elseif(fck .LT. 5.5) then
    epsc1=-0.0026d0
    epsclim=-0.0034d0
elseif(fck .LT. 6.0) then
    epsc1=-0.0026d0
    epsclim=-0.0034d0
elseif(fck .LT. 7.0) then
    epsc1=-0.0027d0
    epsclim=-0.0033d0
elseif(fck .LT. 8.0) then
    epsc1=-0.0027d0
    epsclim=-0.0032d0
elseif(fck .LT. 9.0) then
    epsc1=-0.0028d0
    epsclim=-0.0031d0
elseif(fck .LT. 10.0) then
    epsc1=-0.0029d0
    epsclim=-0.003d0
elseif(fck .LT. 11.0) then
    epsc1=-0.003d0
    epsclim=-0.003d0
elseif(fck .LT. 12.0) then
    epsc1=-0.003d0
    epsclim=-0.003d0
else
    epsc1=-0.003d0
    epsclim=-0.003d0
endif
!
! Propriedades quando é apenas fornecido o fck
!
If (TA.EQ.2) then
    !
    Ec = 2150.d0*alfae*(fck + 0.80d0)**(1.0d0/3.0d0)
    fc = fck + 0.8d0
    !
    ec1 = -fc/epsc1
    !
    if (fck.LE.5.0) THEN
        fct = (0.10d0)*0.3d0*(fck*10.d0)**(2.0d0/3.0d0)
    else
        fct = (0.10d0)*2.12d0*log(1.d0+0.1d0*(fc*10.d0))
    endif
endif
!

```

```

endif
!
end subroutine

function carga_comp(fc,defatu,kapa,epsc1)
!
!=====!
!           Função que calcula o incremento de tensão           !
!           no concreto em compressão                           !
!=====!
!
implicit none
!
DOUBLE PRECISION fc
DOUBLE PRECISION defatu
DOUBLE PRECISION kapa
DOUBLE PRECISION epsc1
DOUBLE PRECISION carga_comp
!
DOUBLE PRECISION eta1
DOUBLE PRECISION sigc1
!
eta1 = defatu/epsc1
!
sigc1 = -(fc)*((kapa*eta1)-(eta1*eta1))/
& (1.d0+(kapa-2.d0)*eta1)
!
carga_comp = sigc1
!
end

```

## APÊNDICE B – DIMENSIONAMENTO CONFORME NBR-6118:2014

Tabela B.1 – Dimensionamento das vigas em relação ao ELU – Solicitações normais.

Viga	Parâmetros				Resistências			Solici.	Dimens. NBR 6118:2014				
	fck [MPa]	h [cm]	r (q/g)	pk [kN/m]	fcd [MPa]	σcd [MPa]	fyd [kN/cm <sup>2</sup> ]	Msd [kNm]	μ	ξ	ξ <sub>lim</sub>	As [cm <sup>2</sup> ]	As' [cm <sup>2</sup> ]
V-25-40-r-15	25	40	0,50	15	17,86	15,18	43,48	65,63	0,17	0,23	0,45	4,62	0,00
V-25-40-r-20	25	40	0,50	20	17,86	15,18	43,48	87,50	0,22	0,32	0,45	6,41	0,00
V-25-40-r-25	25	40	0,50	25	17,86	15,18	43,48	109,38	0,28	0,42	0,45	8,39	0,00
V-25-50-r-15	25	50	0,50	15	17,86	15,18	43,48	65,63	0,10	0,13	0,45	3,47	0,00
V-25-50-r-20	25	50	0,50	20	17,86	15,18	43,48	87,50	0,14	0,18	0,45	4,72	0,00
V-25-50-r-25	25	50	0,50	25	17,86	15,18	43,48	109,38	0,17	0,23	0,45	6,04	0,00
V-25-60-r-15	25	60	0,50	15	17,86	15,18	43,48	65,63	0,07	0,09	0,45	2,80	0,00
V-25-60-r-20	25	60	0,50	20	17,86	15,18	43,48	87,50	0,09	0,12	0,45	3,78	0,00
V-25-60-r-25	25	60	0,50	25	17,86	15,18	43,48	109,38	0,11	0,15	0,45	4,78	0,00
V-35-40-r-15	35	40	0,50	15	25,00	21,25	43,48	65,63	0,12	0,16	0,45	4,48	0,00
V-35-40-r-20	35	40	0,50	20	25,00	21,25	43,48	87,50	0,16	0,22	0,45	6,12	0,00
V-35-40-r-25	35	40	0,50	25	25,00	21,25	43,48	109,38	0,20	0,28	0,45	7,87	0,00
V-35-50-r-15	35	50	0,50	15	25,00	21,25	43,48	65,63	0,07	0,09	0,45	3,41	0,00
V-35-50-r-20	35	50	0,50	20	25,00	21,25	43,48	87,50	0,10	0,13	0,45	4,61	0,00
V-35-50-r-25	35	50	0,50	25	25,00	21,25	43,48	109,38	0,12	0,16	0,45	5,85	0,00
V-35-60-r-15	35	60	0,50	15	25,00	21,25	43,48	65,63	0,05	0,06	0,45	2,77	0,00
V-35-60-r-20	35	60	0,50	20	25,00	21,25	43,48	87,50	0,07	0,08	0,45	3,72	0,00
V-35-60-r-25	35	60	0,50	25	25,00	21,25	43,48	109,38	0,08	0,11	0,45	4,69	0,00
V-45-40-r-15	45	40	0,50	15	32,14	27,32	43,48	65,63	0,09	0,12	0,45	4,41	0,00
V-45-40-r-20	45	40	0,50	20	32,14	27,32	43,48	87,50	0,12	0,17	0,45	5,99	0,00
V-45-40-r-25	45	40	0,50	25	32,14	27,32	43,48	109,38	0,15	0,21	0,45	7,63	0,00
V-45-50-r-15	45	50	0,50	15	32,14	27,32	43,48	65,63	0,06	0,07	0,45	3,38	0,00
V-45-50-r-20	45	50	0,50	20	32,14	27,32	43,48	87,50	0,08	0,10	0,45	4,55	0,00
V-45-50-r-25	45	50	0,50	25	32,14	27,32	43,48	109,38	0,09	0,12	0,45	5,76	0,00
V-45-60-r-15	45	60	0,50	15	32,14	27,32	43,48	65,63	0,04	0,05	0,45	2,75	0,00
V-45-60-r-20	45	60	0,50	20	32,14	27,32	43,48	87,50	0,05	0,07	0,45	3,69	0,00
V-45-60-r-25	45	60	0,50	25	32,14	27,32	43,48	109,38	0,06	0,08	0,45	4,65	0,00

Observações:

1) Como a norma NBR-6118:2014 adota os mesmos coeficientes de ponderação para ações permanentes ( $\gamma_g$ ) e ações variáveis ( $\gamma_q$ ), conforme apresentado na Tabela 3.2 deste trabalho, a variação isolada da razão de carregamento (r) frente aos demais parâmetros fixos não influenciará no resultado do dimensionamento. Logo, existem 27 diferentes modelos resistentes no conjunto das 81 vigas analisadas.

2) Para o valor de cálculo das resistências do concreto e do aço, foram empregados os coeficientes de ponderação  $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ , respectivamente, conforme apresentado no capítulo 12 da NBR-6118:2014, para o caso de combinações normais.

Tabela B.2 – Verificação das vigas em relação ao ELS – Deformações excessivas  
(parte 1).

Viga	Props. da seção				Deformações					Verificação	
	Ma [kNcm]	Mr [kNcm]	I2 [cm4]	EI [kNcm2]	$\delta_0$ [cm]	$\Delta\xi$	$\alpha_f$	$\delta_\infty$ [cm]	$\delta_{lim}$ [cm]	Condição	Critério
V-25-40-0.50-15	3593,75	2051,97	35472,43	1,177E+08	0,80	1,32	1,32	1,85	2,00	Passa	Ok!
V-25-40-0.50-20	4791,67	2051,97	44229,67	1,187E+08	1,05	1,32	1,32	2,44	2,00	Não Passa	Contraflecha
V-25-40-0.50-25	5989,58	2051,97	53683,15	1,348E+08	1,16	1,32	1,32	2,68	2,00	Não Passa	Contraflecha
V-25-40-1.00-15	3046,88	2051,97	35472,43	1,382E+08	0,57	1,32	1,32	1,33	2,00	Passa	Ok!
V-25-40-1.00-20	4062,50	2051,97	44229,67	1,262E+08	0,84	1,32	1,32	1,94	2,00	Passa	Ok!
V-25-40-1.00-25	5078,13	2051,97	53683,15	1,381E+08	0,96	1,32	1,32	2,22	2,00	Não Passa	Contraflecha
V-25-40-2.00-15	2500,00	2051,97	35472,43	1,807E+08	0,36	1,32	1,32	0,84	2,00	Passa	Ok!
V-25-40-2.00-20	3333,33	2051,97	44229,67	1,420E+08	0,61	1,32	1,32	1,42	2,00	Passa	Ok!
V-25-40-2.00-25	4166,67	2051,97	53683,15	1,449E+08	0,75	1,32	1,32	1,74	2,00	Passa	Ok!
V-25-50-0.50-15	3593,75	3206,20	48057,78	3,909E+08	0,24	1,32	1,32	0,56	2,00	Passa	Ok!
V-25-50-0.50-20	4791,67	3206,20	60863,04	2,537E+08	0,49	1,32	1,32	1,14	2,00	Passa	Ok!
V-25-50-0.50-25	5989,58	3206,20	75879,38	2,323E+08	0,67	1,32	1,32	1,56	2,00	Passa	Ok!
V-25-50-1.00-15	3046,88	3206,20	48057,78	5,031E+08	0,16	1,32	1,32	0,37	2,00	Passa	Ok!
V-25-50-1.00-20	4062,50	3206,20	60863,04	3,221E+08	0,33	1,32	1,32	0,76	2,00	Passa	Ok!
V-25-50-1.00-25	5078,13	3206,20	75879,38	2,638E+08	0,50	1,32	1,32	1,16	2,00	Passa	Ok!
V-25-50-2.00-15	2500,00	3206,20	48057,78	5,031E+08	0,13	1,32	1,32	0,30	2,00	Passa	Ok!
V-25-50-2.00-20	3333,33	3206,20	60863,04	4,639E+08	0,19	1,32	1,32	0,43	2,00	Passa	Ok!
V-25-50-2.00-25	4166,67	3206,20	75879,38	3,290E+08	0,33	1,32	1,32	0,77	2,00	Passa	Ok!
V-25-60-0.50-15	3593,75	4616,94	59179,53	8,694E+08	0,11	1,32	1,32	0,25	2,00	Passa	Ok!
V-25-60-0.50-20	4791,67	4616,94	79246,69	7,979E+08	0,16	1,32	1,32	0,36	2,00	Passa	Ok!
V-25-60-0.50-25	5989,58	4616,94	93501,48	5,206E+08	0,30	1,32	1,32	0,70	2,00	Passa	Ok!
V-25-60-1.00-15	3046,88	4616,94	59179,53	8,694E+08	0,09	1,32	1,32	0,21	2,00	Passa	Ok!
V-25-60-1.00-20	4062,50	4616,94	79246,69	8,694E+08	0,12	1,32	1,32	0,28	2,00	Passa	Ok!
V-25-60-1.00-25	5078,13	4616,94	93501,48	7,095E+08	0,19	1,32	1,32	0,43	2,00	Passa	Ok!
V-25-60-2.00-15	2500,00	4616,94	59179,53	8,694E+08	0,07	1,32	1,32	0,17	2,00	Passa	Ok!
V-25-60-2.00-20	3333,33	4616,94	79246,69	8,694E+08	0,10	1,32	1,32	0,23	2,00	Passa	Ok!
V-25-60-2.00-25	4166,67	4616,94	93501,48	8,694E+08	0,12	1,32	1,32	0,29	2,00	Passa	Ok!

Tabela B.2 – Verificação das vigas em relação ao ELS – Deformações excessivas  
(parte 2).

Viga	Props. da seção				Deformações					Verificação	
	Ma [kNcm]	Mr [kNcm]	I2 [cm4]	EI [kNcm2]	$\delta_0$ [cm]	$\Delta\xi$	$\alpha_f$	$\delta_\infty$ [cm]	$\delta_{lim}$ [cm]	Condição	Critério
V-35-40-0.50-15	3593,75	2567,97	30332,85	1,711E+08	0,55	1,32	1,32	1,27	2,00	Passa	Ok!
V-35-40-0.50-20	4791,67	2567,97	36212,96	1,384E+08	0,90	1,32	1,32	2,09	2,00	Não Passa	Contraflecha
V-35-40-0.50-25	5989,58	2567,97	46430,59	1,505E+08	1,04	1,32	1,32	2,40	2,00	Não Passa	Contraflecha
V-35-40-1.00-15	3046,88	2567,97	30332,85	2,236E+08	0,35	1,32	1,32	0,82	2,00	Passa	Ok!
V-35-40-1.00-20	4062,50	2567,97	36212,96	1,588E+08	0,67	1,32	1,32	1,55	2,00	Passa	Ok!
V-35-40-1.00-25	5078,13	2567,97	46430,59	1,594E+08	0,83	1,32	1,32	1,92	2,00	Passa	Ok!
V-35-40-2.00-15	2500,00	2567,97	30332,85	3,136E+08	0,21	1,32	1,32	0,48	2,00	Passa	Ok!
V-35-40-2.00-20	3333,33	2567,97	36212,96	2,012E+08	0,43	1,32	1,32	1,00	2,00	Passa	Ok!
V-35-40-2.00-25	4166,67	2567,97	46430,59	1,780E+08	0,61	1,32	1,32	1,41	2,00	Passa	Ok!
V-35-50-0.50-15	3593,75	4012,45	40731,26	6,126E+08	0,15	1,32	1,32	0,35	2,00	Passa	Ok!
V-35-50-0.50-20	4791,67	4012,45	51819,40	4,226E+08	0,30	1,32	1,32	0,69	2,00	Passa	Ok!
V-35-50-0.50-25	5989,58	4012,45	61318,82	3,102E+08	0,50	1,32	1,32	1,17	2,00	Passa	Ok!
V-35-50-1.00-15	3046,88	4012,45	40731,26	6,126E+08	0,13	1,32	1,32	0,30	2,00	Passa	Ok!
V-35-50-1.00-20	4062,50	4012,45	51819,40	5,958E+08	0,18	1,32	1,32	0,41	2,00	Passa	Ok!
V-35-50-1.00-25	5078,13	4012,45	61318,82	3,935E+08	0,34	1,32	1,32	0,78	2,00	Passa	Ok!
V-35-50-2.00-15	2500,00	4012,45	40731,26	6,126E+08	0,11	1,32	1,32	0,25	2,00	Passa	Ok!
V-35-50-2.00-20	3333,33	4012,45	51819,40	6,126E+08	0,14	1,32	1,32	0,33	2,00	Passa	Ok!
V-35-50-2.00-25	4166,67	4012,45	61318,82	5,663E+08	0,19	1,32	1,32	0,44	2,00	Passa	Ok!
V-35-60-0.50-15	3593,75	5777,93	49854,96	1,059E+09	0,09	1,32	1,32	0,21	2,00	Passa	Ok!
V-35-60-0.50-20	4791,67	5777,93	67060,81	1,059E+09	0,12	1,32	1,32	0,27	2,00	Passa	Ok!
V-35-60-0.50-25	5989,58	5777,93	79356,18	9,741E+08	0,16	1,32	1,32	0,37	2,00	Passa	Ok!
V-35-60-1.00-15	3046,88	5777,93	49854,96	1,059E+09	0,07	1,32	1,32	0,17	2,00	Passa	Ok!
V-35-60-1.00-20	4062,50	5777,93	67060,81	1,059E+09	0,10	1,32	1,32	0,23	2,00	Passa	Ok!
V-35-60-1.00-25	5078,13	5777,93	79356,18	1,059E+09	0,12	1,32	1,32	0,29	2,00	Passa	Ok!
V-35-60-2.00-15	2500,00	5777,93	49854,96	1,059E+09	0,06	1,32	1,32	0,14	2,00	Passa	Ok!
V-35-60-2.00-20	3333,33	5777,93	67060,81	1,059E+09	0,08	1,32	1,32	0,19	2,00	Passa	Ok!
V-35-60-2.00-25	4166,67	5777,93	79356,18	1,059E+09	0,10	1,32	1,32	0,24	2,00	Passa	Ok!

Tabela B.2 – Verificação das vigas em relação ao ELS – Deformações excessivas  
(parte 3).

Viga	Props. da seção				Deformações					Verificação	
	Ma [kNcm]	Mr [kNcm]	I2 [cm4]	EI [kNcm2]	$\delta_0$ [cm]	$\Delta\xi$	$\alpha_f$	$\delta_\infty$ [cm]	$\delta_{lim}$ [cm]	Condição	Critério
V-45-40-0.50-15	3593,75	3036,36	24784,78	2,542E+08	0,37	1,32	1,32	0,85	2,00	Passa	Ok!
V-45-40-0.50-20	4791,67	3036,36	32075,32	1,750E+08	0,71	1,32	1,32	1,65	2,00	Passa	Ok!
V-45-40-0.50-25	5989,58	3036,36	39665,29	1,659E+08	0,94	1,32	1,32	2,18	2,00	Não Passa	Contraflecha
V-45-40-1.00-15	3046,88	3036,36	24784,78	3,627E+08	0,22	1,32	1,32	0,51	2,00	Passa	Ok!
V-45-40-1.00-20	4062,50	3036,36	32075,32	2,167E+08	0,49	1,32	1,32	1,13	2,00	Passa	Ok!
V-45-40-1.00-25	5078,13	3036,36	39665,29	1,851E+08	0,71	1,32	1,32	1,66	2,00	Passa	Ok!
V-45-40-2.00-15	2500,00	3036,36	24784,78	3,656E+08	0,18	1,32	1,32	0,41	2,00	Passa	Ok!
V-45-40-2.00-20	3333,33	3036,36	32075,32	3,032E+08	0,29	1,32	1,32	0,66	2,00	Passa	Ok!
V-45-40-2.00-25	4166,67	3036,36	39665,29	2,248E+08	0,48	1,32	1,32	1,12	2,00	Passa	Ok!
V-45-50-0.50-15	3593,75	4744,31	35733,46	7,141E+08	0,13	1,32	1,32	0,30	2,00	Passa	Ok!
V-45-50-0.50-20	4791,67	4744,31	45610,61	6,978E+08	0,18	1,32	1,32	0,41	2,00	Passa	Ok!
V-45-50-0.50-25	5989,58	4744,31	57349,66	4,538E+08	0,34	1,32	1,32	0,80	2,00	Passa	Ok!
V-45-50-1.00-15	3046,88	4744,31	35733,46	7,141E+08	0,11	1,32	1,32	0,26	2,00	Passa	Ok!
V-45-50-1.00-20	4062,50	4744,31	45610,61	7,141E+08	0,15	1,32	1,32	0,34	2,00	Passa	Ok!
V-45-50-1.00-25	5078,13	4744,31	57349,66	6,186E+08	0,21	1,32	1,32	0,50	2,00	Passa	Ok!
V-45-50-2.00-15	2500,00	4744,31	35733,46	7,141E+08	0,09	1,32	1,32	0,21	2,00	Passa	Ok!
V-45-50-2.00-20	3333,33	4744,31	45610,61	7,141E+08	0,12	1,32	1,32	0,28	2,00	Passa	Ok!
V-45-50-2.00-25	4166,67	4744,31	57349,66	7,141E+08	0,15	1,32	1,32	0,35	2,00	Passa	Ok!
V-45-60-0.50-15	3593,75	6831,80	44868,23	1,234E+09	0,08	1,32	1,32	0,18	2,00	Passa	Ok!
V-45-60-0.50-20	4791,67	6831,80	54384,62	1,234E+09	0,10	1,32	1,32	0,23	2,00	Passa	Ok!
V-45-60-0.50-25	5989,58	6831,80	68450,00	1,234E+09	0,13	1,32	1,32	0,29	2,00	Passa	Ok!
V-45-60-1.00-15	3046,88	6831,80	44868,23	1,234E+09	0,06	1,32	1,32	0,15	2,00	Passa	Ok!
V-45-60-1.00-20	4062,50	6831,80	54384,62	1,234E+09	0,09	1,32	1,32	0,20	2,00	Passa	Ok!
V-45-60-1.00-25	5078,13	6831,80	68450,00	1,234E+09	0,11	1,32	1,32	0,25	2,00	Passa	Ok!
V-45-60-2.00-15	2500,00	6831,80	44868,23	1,234E+09	0,05	1,32	1,32	0,12	2,00	Passa	Ok!
V-45-60-2.00-20	3333,33	6831,80	54384,62	1,234E+09	0,07	1,32	1,32	0,16	2,00	Passa	Ok!
V-45-60-2.00-25	4166,67	6831,80	68450,00	1,234E+09	0,09	1,32	1,32	0,20	2,00	Passa	Ok!

Tabela B.3 – Verificação das vigas em relação ao ELS – Abertura de fissuras  
(parte 1).

Viga	Parâmetros de cálculo							Verificação		
	$\Phi_{ref}$ [cm]	$A_{s,ref}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{s,exist}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{s'}$ [cm <sup>2</sup> ]	$f_{ctm}$ [MPa]	$I_2$ [cm <sup>4</sup> ]	$\sigma_i$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$w_k$ [mm]	$w_{k,adm}$ [mm]	Condição
V-25-40-0.50-15	1,25	1,23	4,91	0,00	2,56	35472,43	23,49	0,14	0,30	Passa
V-25-40-0.50-20	1,60	2,01	6,53	0,00	2,56	44229,67	23,85	0,18	0,30	Passa
V-25-40-0.50-25	1,60	2,01	8,49	0,00	2,56	53683,15	23,26	0,17	0,30	Passa
V-25-40-1.00-15	1,25	1,23	4,91	0,00	2,56	35472,43	20,56	0,10	0,30	Passa
V-25-40-1.00-20	1,60	2,01	6,53	0,00	2,56	44229,67	20,87	0,14	0,30	Passa
V-25-40-1.00-25	1,60	2,01	8,49	0,00	2,56	53683,15	20,35	0,13	0,30	Passa
V-25-40-2.00-15	1,25	1,23	4,91	0,00	2,56	35472,43	17,62	0,08	0,30	Passa
V-25-40-2.00-20	1,60	2,01	6,53	0,00	2,56	44229,67	17,89	0,10	0,30	Passa
V-25-40-2.00-25	1,60	2,01	8,49	0,00	2,56	53683,15	17,45	0,10	0,30	Passa
V-25-50-0.50-15	1,25	1,23	3,68	0,00	2,56	48057,78	23,99	0,14	0,30	Passa
V-25-50-0.50-20	1,25	1,23	4,91	0,00	2,56	60863,04	24,26	0,15	0,30	Passa
V-25-50-0.50-25	1,60	2,01	6,48	0,00	2,56	75879,38	23,26	0,17	0,30	Passa
V-25-50-1.00-15	1,25	1,23	3,68	0,00	2,56	48057,78	20,99	0,11	0,30	Passa
V-25-50-1.00-20	1,25	1,23	4,91	0,00	2,56	60863,04	21,23	0,11	0,30	Passa
V-25-50-1.00-25	1,60	2,01	6,48	0,00	2,56	75879,38	20,35	0,13	0,30	Passa
V-25-50-2.00-15	1,25	1,23	3,68	0,00	2,56	48057,78	17,99	0,08	0,30	Passa
V-25-50-2.00-20	1,25	1,23	4,91	0,00	2,56	60863,04	18,19	0,08	0,30	Passa
V-25-50-2.00-25	1,60	2,01	6,48	0,00	2,56	75879,38	17,45	0,10	0,30	Passa
V-25-60-0.50-15	1,00	0,79	2,86	0,00	2,56	59179,53	25,00	0,12	0,30	Passa
V-25-60-0.50-20	1,25	1,23	4,03	0,00	2,56	79246,69	23,94	0,14	0,30	Passa
V-25-60-0.50-25	1,25	1,23	4,91	0,00	2,56	93501,48	24,72	0,15	0,30	Passa
V-25-60-1.00-15	1,00	0,79	2,86	0,00	2,56	59179,53	21,88	0,09	0,30	Passa
V-25-60-1.00-20	1,25	1,23	4,03	0,00	2,56	79246,69	20,95	0,11	0,30	Passa
V-25-60-1.00-25	1,25	1,23	4,91	0,00	2,56	93501,48	21,63	0,12	0,30	Passa
V-25-60-2.00-15	1,00	0,79	2,86	0,00	2,56	59179,53	18,75	0,07	0,30	Passa
V-25-60-2.00-20	1,25	1,23	4,03	0,00	2,56	79246,69	17,96	0,08	0,30	Passa
V-25-60-2.00-25	1,25	1,23	4,91	0,00	2,56	93501,48	18,54	0,09	0,30	Passa

Observações:

1) A área de aço existente  $A_{s,exist}$  foi tomada como o arranjo prático (bitolas comerciais) mais próximo ao valor calculado, sendo utilizada para consideração do diâmetro da barra de aço na abertura de fissuras. O valor  $A_{s,exist}$  foi também tomado para a obtenção da profundidade da linha neutra no estágio II.

Tabela B.3 – Verificação das vigas em relação ao ELS – Abertura de fissuras  
(parte 2).

Viga	Parâmetros de cálculo							Verificação		
	$\Phi_{ref}$ [cm]	$A_{s,ref}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{s,exist}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{s'}$ [cm <sup>2</sup> ]	$f_{ctm}$ [MPa]	$I_2$ [cm <sup>4</sup> ]	$\sigma_i$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$w_k$ [mm]	$w_{k,adm}$ [mm]	Condição
V-35-40-0.50-15	1,25	1,23	4,91	0,00	3,21	30332,85	23,30	0,11	0,30	Passa
V-35-40-0.50-20	1,25	1,23	6,14	0,00	3,21	36212,96	25,09	0,12	0,30	Passa
V-35-40-0.50-25	1,60	2,01	8,49	0,00	3,21	46430,59	23,03	0,13	0,30	Passa
V-35-40-1.00-15	1,25	1,23	4,91	0,00	3,21	30332,85	20,38	0,08	0,30	Passa
V-35-40-1.00-20	1,25	1,23	6,14	0,00	3,21	36212,96	21,95	0,10	0,30	Passa
V-35-40-1.00-25	1,60	2,01	8,49	0,00	3,21	46430,59	20,15	0,10	0,30	Passa
V-35-40-2.00-15	1,25	1,23	4,91	0,00	3,21	30332,85	17,47	0,06	0,30	Passa
V-35-40-2.00-20	1,25	1,23	6,14	0,00	3,21	36212,96	18,82	0,07	0,30	Passa
V-35-40-2.00-25	1,60	2,01	8,49	0,00	3,21	46430,59	17,27	0,08	0,30	Passa
V-35-50-0.50-15	1,25	1,23	3,68	0,00	3,21	40731,26	23,83	0,11	0,30	Passa
V-35-50-0.50-20	1,25	1,23	4,91	0,00	3,21	51819,40	24,07	0,11	0,30	Passa
V-35-50-0.50-25	1,60	2,01	6,03	0,00	3,21	61318,82	24,69	0,15	0,30	Passa
V-35-50-1.00-15	1,25	1,23	3,68	0,00	3,21	40731,26	20,85	0,09	0,30	Passa
V-35-50-1.00-20	1,25	1,23	4,91	0,00	3,21	51819,40	21,06	0,09	0,30	Passa
V-35-50-1.00-25	1,60	2,01	6,03	0,00	3,21	61318,82	21,60	0,12	0,30	Passa
V-35-50-2.00-15	1,25	1,23	3,68	0,00	3,21	40731,26	17,87	0,06	0,30	Passa
V-35-50-2.00-20	1,25	1,23	4,91	0,00	3,21	51819,40	18,06	0,06	0,30	Passa
V-35-50-2.00-25	1,60	2,01	6,03	0,00	3,21	61318,82	18,52	0,09	0,30	Passa
V-35-60-0.50-15	1,00	0,79	2,86	0,00	3,21	49854,96	24,86	0,10	0,30	Passa
V-35-60-0.50-20	1,25	1,23	4,03	0,00	3,21	67060,81	23,79	0,11	0,30	Passa
V-35-60-0.50-25	1,25	1,23	4,91	0,00	3,21	79356,18	24,54	0,12	0,30	Passa
V-35-60-1.00-15	1,00	0,79	2,86	0,00	3,21	49854,96	21,75	0,07	0,30	Passa
V-35-60-1.00-20	1,25	1,23	4,03	0,00	3,21	67060,81	20,81	0,09	0,30	Passa
V-35-60-1.00-25	1,25	1,23	4,91	0,00	3,21	79356,18	21,48	0,09	0,30	Passa
V-35-60-2.00-15	1,00	0,79	2,86	0,00	3,21	49854,96	18,65	0,06	0,30	Passa
V-35-60-2.00-20	1,25	1,23	4,03	0,00	3,21	67060,81	17,84	0,06	0,30	Passa
V-35-60-2.00-25	1,25	1,23	4,91	0,00	3,21	79356,18	18,41	0,07	0,30	Passa

Tabela B.3 – Verificação das vigas em relação ao ELS – Abertura de fissuras  
(parte 3).

Viga	Parâmetros de cálculo							Verificação		
	$\Phi_{ref}$ [cm]	$A_{s,ref}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{s,exist}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{s'}$ [cm <sup>2</sup> ]	$f_{ctm}$ [MPa]	$I_2$ [cm <sup>4</sup> ]	$\sigma_i$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$w_k$ [mm]	$w_{k,adm}$ [mm]	Condição
V-45-40-0.50-15	1,25	1,23	4,47	0,00	3,80	24784,78	25,35	0,11	0,30	Passa
V-45-40-0.50-20	1,25	1,23	6,14	0,00	3,80	32075,32	24,92	0,10	0,30	Passa
V-45-40-0.50-25	1,60	2,01	8,04	0,00	3,80	39665,29	24,05	0,12	0,30	Passa
V-45-40-1.00-15	1,25	1,23	4,47	0,00	3,80	24784,78	22,18	0,08	0,30	Passa
V-45-40-1.00-20	1,25	1,23	6,14	0,00	3,80	32075,32	21,81	0,08	0,30	Passa
V-45-40-1.00-25	1,60	2,01	8,04	0,00	3,80	39665,29	21,05	0,09	0,30	Passa
V-45-40-2.00-15	1,25	1,23	4,47	0,00	3,80	24784,78	19,01	0,06	0,30	Passa
V-45-40-2.00-20	1,25	1,23	6,14	0,00	3,80	32075,32	18,69	0,06	0,30	Passa
V-45-40-2.00-25	1,60	2,01	8,04	0,00	3,80	39665,29	18,04	0,07	0,30	Passa
V-45-50-0.50-15	1,25	1,23	3,68	0,00	3,80	35733,46	23,71	0,09	0,30	Passa
V-45-50-0.50-20	1,25	1,23	4,91	0,00	3,80	45610,61	23,94	0,10	0,30	Passa
V-45-50-0.50-25	1,60	2,01	6,48	0,00	3,80	57349,66	22,92	0,11	0,30	Passa
V-45-50-1.00-15	1,25	1,23	3,68	0,00	3,80	35733,46	20,75	0,07	0,30	Passa
V-45-50-1.00-20	1,25	1,23	4,91	0,00	3,80	45610,61	20,95	0,07	0,30	Passa
V-45-50-1.00-25	1,60	2,01	6,48	0,00	3,80	57349,66	20,05	0,09	0,30	Passa
V-45-50-2.00-15	1,25	1,23	3,68	0,00	3,80	35733,46	17,78	0,05	0,30	Passa
V-45-50-2.00-20	1,25	1,23	4,91	0,00	3,80	45610,61	17,95	0,05	0,30	Passa
V-45-50-2.00-25	1,60	2,01	6,48	0,00	3,80	57349,66	17,19	0,06	0,30	Passa
V-45-60-0.50-15	1,25	1,23	2,96	0,00	3,80	44868,23	23,96	0,10	0,30	Passa
V-45-60-0.50-20	1,25	1,23	3,68	0,00	3,80	54384,62	25,81	0,11	0,30	Passa
V-45-60-0.50-25	1,60	2,01	4,81	0,00	3,80	68450,00	24,92	0,13	0,30	Passa
V-45-60-1.00-15	1,25	1,23	2,96	0,00	3,80	44868,23	20,96	0,07	0,30	Passa
V-45-60-1.00-20	1,25	1,23	3,68	0,00	3,80	54384,62	22,59	0,09	0,30	Passa
V-45-60-1.00-25	1,60	2,01	4,81	0,00	3,80	68450,00	21,80	0,10	0,30	Passa
V-45-60-2.00-15	1,25	1,23	2,96	0,00	3,80	44868,23	17,97	0,05	0,30	Passa
V-45-60-2.00-20	1,25	1,23	3,68	0,00	3,80	54384,62	19,36	0,06	0,30	Passa
V-45-60-2.00-25	1,60	2,01	4,81	0,00	3,80	68450,00	18,69	0,07	0,30	Passa





```

!
! ---- Cálculo dos valores médios a partir das propriedades de projeto
!
fy = fyk/(1.d0 - 1.645d0*Vfy) ! [kN/cm²] - Tensão de escoamento do aço passivo
!
!-----
!                                     CARACTERIZAÇÃO DA MALHA
!-----
!
nl = 5 ! Número de divisões no comprimento
nb = 2 ! Número de divisões na largura
nh = 6 ! Número de divisões na altura
!
!=====
!                                     E L E M E N T O S
!=====
!-----
!                                     CONCRETO
!-----
!
/PREP7
!
ET,1,189
!
KEYOPT,1,1,0 ! 6 graus de liberdade por nó (default)
KEYOPT,1,2,0 ! Seção transversão escalada em função do alongamento axial (default)
KEYOPT,1,4,1 ! Tensão de corte apenas por carga transversal
KEYOPT,1,6,1 ! Resultados generalizados apenas para os pontos de integração
KEYOPT,1,7,2 ! Tensões e deformações em todos pontos de integração
KEYOPT,1,9,3 ! Não utiliza valores extrapolados aos nós
KEYOPT,1,11,0 ! Integração automática (default)
KEYOPT,1,12,0 ! Opção utilizável para peças de seção variável (default)
KEYOPT,1,13,0 ! Hydrodynamic output - none (default)
!
!=====
!                                     M A T E R I A I S
!=====
!-----
!                                     CONCRETO (Usermat)
!-----
!
TB,USER,1,1,9 ! Definido material 1, 1 temperatura e 9 constantes por temperatura
TBTEMP,1.0
TBDATA,1,fck,fcm,Eci,fct,v,alfae
TBDATA,7,kelem,gauss,outinst
TB,STATE,1,,300, ! Vetor para armazenamento das variáveis de estado Ustatev's
!
!-----
!                                     AÇO
!-----
!
! Modelo Bilinear isotrópico
!
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,Es
MPDATA,PRXY,2,,vs
!
TB,BISO,2,1,2,

```

```

TBTEMP,0
TBDATA,,fy,Hs,,,,
!
! =====!
!           G E R A Ç Ã O   D A   G E O M E T R I A           !
! =====!
!
!-----!
!           T I P O   D E   S E Ç Ã O           !
!-----!
!
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,b,h,nb,nh,0,0,0,0,0,0,0,0
!
!-----!
!           K E Y P O I N T S           !
!-----!
!
K,1,0,0,0
K,2,L,0,0
K,3,0,L,0
!
!-----!
!           L I N H A S           !
!-----!
!
LSTR,1,2
!
! =====!
!           G E R A Ç Ã O   D A   M A L H A           !
! =====!
!
LATT,1,,1,,3,,1    ! Elemento, Material, Keypoint de orientação, Seção
!
LSEL,S,LINE,,1
LESIZE,ALL,,n1
ALLSEL
!
LMESH, ALL          ! Gera a malha
!
NUMMRG,NODE,,,LOW ! Reagrupa os nós coincidentes
NUMCMP,NODE        ! Renumerar os nós
!
! =====!
!           I N S E R Ç Ã O   D A   A R M A D U R A           !
! =====!
!
SECT,2,REINF,DISCRETE,          ! Seção de reforço (Armaduras)
!
SECDATA, 2, Asi, BEAM, 0, -((h/2)-dinf) ! Armadura inferior
!
ESEL,ALL
SECN,2
EREINF
!
/COLOR,NUM,DGRA,1 ! Beam Concreto - Cinza
/COLOR,NUM,RED,2  ! Armadura passiva - Vermelho
/PNUM,MAT,1
/NUMBER,1
!
ESEL,S,TYPE,,1    ! Seleciona elementos de concreto

```

```

/TRLCY,ELEM,0.6,ALL ! Opção para deixar os elementos 60% translucidos
ALLSEL,ALL
!
! =====!
!                               V I N C U L O S   ( A P O I O S )                               !
! =====!
!
!-----!
!                               E S T R U T U R A   B I A P O I A D A   C O M   S I M E T R I A                               !
!-----!
!
! Apoio esquerdo
!
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UY,0
D,ALL,UZ,0
D,ALL,ROTX,0
D,ALL,ROTY,0
ALLSEL,ALL
!
! Apoio direito
!
NSEL,S,LOC,X,L
D,ALL,UX,0
D,ALL,UZ,0
D,ALL,ROTX,0
D,ALL,ROTY,0
D,ALL,ROTZ,0
ALLSEL,ALL
!
/REPLOT
FINISH
/GO
/SOLU
!
! =====!
!                               O P Ç Õ E S   D E   A N Á L I S E                               !
! =====!
!
ANTYPE,0,NEW ! Análise do tipo estática
NLGEOM,ON ! Não linearidade geométrica
NROPT,FULL,,ON ! Newton Raphson completo
EQSLV,SPAR,,0, ! Solver Spars Direto
AUTOTS,ON ! Passo de carga automático
ERESX,NO ! Copia os resultados dos pontos de integração para os nós
PSCONTROL,ALL,OFF ! Desativa a paralelização
!
! =====!
!                               E T A P A S   D E   C A R R E G A M E N T O                               !
! =====!
!
SFBEAM,ALL,1,PRES,cargad,,,,,0
!
KBC,0
NSUBS,1000,2000,150
NEQIT,1000
!
CNVTOL,F,,0.01,2,0.01 ! Parâmetros de convergência para a análise não linear
CNVTOL,U,,0.01,2,0.01
CNVTOL,M,,0.01,2,0.01
!
NCNV,2,3000,,,

```

```

OUTRES,ALL,ALL
AUTOTS,ON
NLGEOM,ON
TIME,1
!
LSWRITE,1
!
!-----!
!                               SOLUÇÃO                               !
!-----!
!
LSSOLVE,1,1,1
!
!=====!
!                               P Ó S - P R O C E S S A M E N T O                               !
!=====!
!
/POST1                ! Abre a seção de pós-processamento 1
SET, LAST             ! Seleciona o último substep que convergiu
!
/POST26              ! Abre a seção de pós-processamento 2
!
NUMVAR,200
!
NSEL,S,LOC,X,L
*GET,NODEPOST,NODE,0,NUM,MIN ! Seleciona nó para plotar o deslocamento
ALLSEL
!
NSOL,2,NODEPOST,u,Y
RFORCE,3,1,F,Y
!
/AXLAB,Y, Reação de Apoio (kN) ! Legenda do eixo Y
/AXLAB,X, Deslocamento (cm)   ! Legenda do eixo X
!
PROD,2,2,,,,,-1           ! Inverte o sinal no diagrama Carga x Deslocamento
XVAR,2
PLVAR,3
!
*GET,SARRAY,VARI,2,NSETS,  ! Captura o tamanho do vetor com as reações de apoio
*GET,FRUP,VARI,3,RSET,(SARRAY-2) ! Captura o valor da reação de apoio na ruptura
PR = (FRUP)/(L/100)        ! Valor da carga distribuída que rompeu o modelo
!
FINI
*END                    ! Fecha macro de análises probabilística
!
!=====!
!                               A N Á L I S E   P R O B A B I L Í S T I C A                               !
!=====!
!
!-----!
!                               ABRE MACRO PARA ANÁLISE PROBABILÍSTICA                               !
!-----!
!
/inp,AnaliseProbViga,pdan
/PDS
pdan1,AnaliseProbViga,pdan
!
!-----!
!                               VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DE ENTRADA                               !
!-----!

```



## APÊNDICE D – ALGORITMO FORM EM *MATLAB*

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%                                                                    %%
%%                                FORM aplicado à                       %%
%%                                Superfície de Resposta (ANSYS)        %%
%%                                                                    %%
%% Programado por      : Mailson Scherer                             %%
%% Data                : 06/18                                       %%
%% Referência          : Halдар & Mahadevan (2000)                   %%
%% Status              : Ok!                                          %%
%% Viga                : V-25-40-r-15                                %%
%%                                                                    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
clear all
clc
format long
%
%=====
%                                Dados de entrada                       %
%=====
%
% ----- Resistência
%
% Concreto - fc (Normal)
%
fck = 2.5;           % Resistência característica à compressão
Vfc = 0.10;         % Coeficiente de variação de fc
ufc = fck/(1 - 1.645*Vfc); % Valor médio de fc
sfc = ufc*Vfc;      % Desvio padrão de fc
%
% Aço - fy (Normal)
%
fyk = 50;           % Tensão característica de escoamento
Vfy = 0.05;         % Coeficiente de variação de fy
ufy = fyk/(1 - 1.645*Vfy); % Valor médio de fy
sfy = ufy*Vfy;      % Desvio padrão de fy
%
% Altura - h (Normal)
%
h = 40;             % Altura nominal
uh = h;             % Valor médio de h
sh = 0.50;          % Desvio padrão de h
Vh = sh/uh;         % Coeficiente de variação de h
%
% Distância da armadura tracionada à face inferior - d (Normal)
%
d = 4;              % Distância nominal
Vd = 0.125;         % Coeficiente de variação de d
ud = d;             % Valor médio de d
sd = Vd*ud;         % Desvio padrão de d
%
% ----- Solicitação
%
pk = 15;
r = 0.50;
gk = pk/(1+r);
qk = r*gk;

```

```

%
% Permanente G (Normal)
%
uG = 1.05*gk;           % Média da carga permanente
vG = 0.10;             % Coeficiente de variação da carga permanente
sG = vG*uG;           % Desvio padrão da carga permanente
%
% Variável G (Gumbel)
%
vQ = 0.25;             % Coeficiente de variação da carga variável
uQ = qk/(1+0.35*vQ);  % Média da carga variável
sQ = vQ*uQ;           % Desvio padrão da carga variável
%
% ---- Incerteza
%
% Resistência (Lognormal)
%
uTr = 1;
sTr = 0.05;
%
% Solicitação (Lognormal)
%
uTs = 1;
sTs = 0.05;
%
%=====
%                               Estimativa do ponto inicial de projeto                               %
%=====
%
fc = ufc;
fy = ufy;
h = uh;
d = ud;
g = uG;
q = uQ;
Tr = uTr;
Ts = uTs;
%
%=====
%                               Função Estado Limite                               %
%=====
%
syms FC FY H D G Q TR TS
%
% ---- Termos do polinômio ajustado
%
% Termo constante
%
a0 = 2.73171e+001;
%
% Termos ti's
%
a1 = 1.65699e-001;      % t1 = fc
a2 = 1.66249e+000;      % t2 = fy
a3 = 4.99785e-001;      % t3 = h
a4 = -5.10194e-001;     % t4 = d
%
% Termos ti's^2
%
a5 = -4.38481e-002;     % t1^2 = fc^2
a6 = 0;                 % t2^2 = fy^2

```

```

a7 = 0;                % t3^2 = h^2
a8 = 0;                % t4^2 = d^2
%
% Termos cruzados ti x tj
%
a9 = 0;                % t1 x t2 = fc x fy
a10 = 0;               % t1 x t3 = fc x h
a11 = 0;               % t1 x t4 = fc x d
a12 = 0;               % t2 x t3 = fy x h
a13 = -3.99926e-002;   % t2 x t4 = fy x d
a14 = 0;               % t3 x t4 = h x d
%
% Termos ti's
%
t1 = 2.59489e+000*FC - 7.76449e+000;
t2 = 2.85034e-001*FY - 1.55290e+001;
t3 = 1.55290e+000*H - 6.21159e+001;
t4 = 1.55290e+000*D - 6.21159e+000;
%
gx = TR*(a0 + ...
a1.*t1      + a2.*t2      + a3.*t3      + a4.*t4      + ...
a5.*t1.*t1 + a6.*t2.*t2 + a7.*t3.*t3 + a8.*t4.*t4 + ...
a9.*t1.*t2 + a10.*t1.*t3 + a11.*t1.*t4 + a12.*t2.*t3 + ...
a13.*t2.*t4 + a14.*t3.*t4) - TS*(G + Q);
%
%=====
%                               Variáveis de controle                               %
%=====
%
erroX = 10;            % Erro em X
erroB = 10;            % Erro do índice de confiabilidade
Bo     = 10;            % Estimativa inicial do índice de confiabilidade
iter   = 0;            % Contador de iterações
%
while erroX > 0.00001 & erroB > 0.00001
%
iter = iter + 1
%
% ----- Variáveis com distribuição normal equivalente
%
% Resistência à compressão do concreto (Normal)
%
ufcN = ufc;
sfcN = sfc;
%
% Tensão de escoamento do aço (Normal)
%
ufyN = ufy;
sfyN = sfy;
%
% Altura da seção transversal (Normal)
%
uhN = uh;
shN = sh;
%
% Distância da armadura à face inferior (Normal)
%
udN = ud;
sdN = sd;

```

```

%
% Solicitação permanente (Normal)
%
uGN = uG;
sGN = sG;
%
% Solicitação acidental (Valores extremos I - Gumbel)
%
alfaQ = (pi/sqrt(6))/sQ;
gama = 0.577215665;
u = uQ - gama/alfaQ;
fdpQ = vpa(alfaQ*exp(-alfaQ*(q-u))*exp(-exp(-alfaQ*(q-u))),10);
FdpaQ = vpa(exp(-exp(-alfaQ*(q-u))),10);
fdpN = vpa(normpdf(norminv(FdpaQ,0,1),0,1),10);
sQN = vpa(fdpN/fdpQ,10);
uQN = vpa(q - sQN*norminv(FdpaQ,0,1),10);
%
% Incerteza de modelamento - Resistência (Lognormal)
%
zetaTR = sqrt(log(1+(sTr/uTr)^2));
lambdaTR = log(uTr) - 0.5*zetaTR^2;
sTrN = Tr*zetaTR;
uTrN = Tr*(1-log(Tr)+lambdaTR);
%
% Incerteza de modelamento - Solicitação (Lognormal)
%
zetaS = sqrt(log(1+(sTs/uTs)^2));
lambdaS = log(uTs) - 0.5*zetaS^2;
sTsN = Ts*zetaS;
uTsN = Ts*(1-log(Ts)+lambdaS);
%
% ----- Variáveis no espaço normalizado
%
fc_norm = (fc - ufcN) /sfcN;
fy_norm = (fy - ufyN) /sfyN;
h_norm = (h - uhN) /shN;
d_norm = (d - udN) /sdN;
g_norm = (g - uGN) /sGN;
q_norm = (q - uQN) /sQN;
Tr_norm = (Tr - uTrN) /sTrN;
Ts_norm = (Ts - uTsN) /sTsN;
%
% ----- Vetor de variáveis aleatórias normalizadas no passo atual
%
X0n = [fc_norm; fy_norm; h_norm; d_norm; g_norm; q_norm; Tr_norm; Ts_norm];
%
% ----- Derivadas da função estado limite no ponto de falha atual
%
dg_FC = subs(diff(gx,FC), [FC,FY,H,D,G,Q,TR,TS], [fc,fy,h,d,g,q,Tr,Ts]);
dg_FY = subs(diff(gx,FY), [FC,FY,H,D,G,Q,TR,TS], [fc,fy,h,d,g,q,Tr,Ts]);
dg_H = subs(diff(gx,H), [FC,FY,H,D,G,Q,TR,TS], [fc,fy,h,d,g,q,Tr,Ts]);
dg_D = subs(diff(gx,D), [FC,FY,H,D,G,Q,TR,TS], [fc,fy,h,d,g,q,Tr,Ts]);
dg_G = subs(diff(gx,G), [FC,FY,H,D,G,Q,TR,TS], [fc,fy,h,d,g,q,Tr,Ts]);
dg_Q = subs(diff(gx,Q), [FC,FY,H,D,G,Q,TR,TS], [fc,fy,h,d,g,q,Tr,Ts]);
dg_TR = subs(diff(gx,TR), [FC,FY,H,D,G,Q,TR,TS], [fc,fy,h,d,g,q,Tr,Ts]);
dg_TS = subs(diff(gx,TS), [FC,FY,H,D,G,Q,TR,TS], [fc,fy,h,d,g,q,Tr,Ts]);
%
% ----- Vetor Gradiente
%
Grad = [dg_FC*sfcN; dg_FY*sfyN; dg_H*shN; dg_D*sdN;...
        dg_G*sGN; dg_Q*sQN; dg_TR*sTrN; dg_TS*sTsN];

```

```

%
% ----- Cossenos diretores
%
c_FC = vpa(Grad(1)/norm(Grad),6);
c_FY = vpa(Grad(2)/norm(Grad),6);
c_H = vpa(Grad(3)/norm(Grad),6);
c_D = vpa(Grad(4)/norm(Grad),6);
c_G = vpa(Grad(5)/norm(Grad),6);
c_Q = vpa(Grad(6)/norm(Grad),6);
c_Tr = vpa(Grad(7)/norm(Grad),6);
c_Ts = vpa(Grad(8)/norm(Grad),6);
%
CD = [c_FC; c_FY; c_H; c_D; c_G; c_Q; c_Tr; c_Ts];
%
% ----- Atualização do vetor de variáveis aleatórias
%
Xn = vpa((1/norm(Grad)^2)*...
(Grad'*X0n-subst(gx,[FC;FY;H;D;G;Q;TR;TS],[fc;fy;h;d;g;q;Tr;Ts]))*Grad,5);
%
fc = ufcN + Xn(1)*sfcN;
fy = ufyN + Xn(2)*sfyN;
h = uhN + Xn(3)*shN;
d = udN + Xn(4)*sdN;
g = uGN + Xn(5)*sGN;
q = uQN + Xn(6)*sQN;
Tr = uTrN + Xn(7)*sTrN;
Ts = uTsN + Xn(8)*sTsN;
%
X = [fc; fy; h; d; g; q; Tr; Ts];
B = norm(Xn);
%
% ----- Verificação do erro
%
erroB = abs((B - Bo)/Bo);
erroX = abs(norm(Xn - X0n)/norm(X0n));
%
Bo = B;
%
end
%
fprintf('-----');
fprintf('\n');
fprintf('----- R E S U L T A D O S -----');
fprintf('\n');
fprintf('-----');
fprintf('\n');
fprintf('O índice de confiabilidade é:');
Beta = vpa(B,4)
%
fprintf('Os cossenos diretores são:');
Cossenos = CD
%
fprintf('As variáveis aleatórias no ponto de falha são:');
VA_Falha = X

```

## APÊNDICE E – ÍNDICES DE CONFIABILIDADE

Viga	Resistência (kN/m)			Solicitação (kN/m)			Razão	Índices de Conf.		
	$\mu_R$	$\sigma_R$	$V_R$	$\mu_s$	$\sigma_s$	$V_s$	$\mu_R / \mu_s$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
V - 25 - 40 - 0.50 - 15	27,28	1,43	0,052	15,10	1,56	0,103	1,81	4,08	4,07	4,09
V - 25 - 40 - 0.50 - 20	36,77	1,85	0,050	20,13	2,08	0,103	1,83	4,15	4,14	4,15
V - 25 - 40 - 0.50 - 25	46,51	2,36	0,051	25,16	2,59	0,103	1,85	4,22	4,21	4,24
V - 25 - 40 - 1.00 - 15	27,28	1,43	0,052	14,77	1,90	0,128	1,85	3,51	3,51	3,52
V - 25 - 40 - 1.00 - 20	36,77	1,85	0,050	19,70	2,53	0,128	1,87	3,57	3,56	3,57
V - 25 - 40 - 1.00 - 25	46,51	2,36	0,051	24,62	3,16	0,128	1,89	3,62	3,62	3,63
V - 25 - 40 - 2.00 - 15	27,28	1,43	0,052	14,45	2,36	0,163	1,89	3,10	3,10	3,11
V - 25 - 40 - 2.00 - 20	36,77	1,85	0,050	19,26	3,14	0,163	1,91	3,15	3,15	3,15
V - 25 - 40 - 2.00 - 25	46,51	2,36	0,051	24,08	3,93	0,163	1,93	3,20	3,20	3,21
V - 25 - 50 - 0.50 - 15	26,87	1,37	0,051	15,10	1,56	0,103	1,78	4,00	4,00	4,00
V - 25 - 50 - 0.50 - 20	36,04	1,84	0,051	20,13	2,08	0,103	1,79	4,03	4,04	4,05
V - 25 - 50 - 0.50 - 25	45,53	2,31	0,051	25,16	2,59	0,103	1,81	4,10	4,10	4,11
V - 25 - 50 - 1.00 - 15	26,87	1,37	0,051	14,77	1,90	0,128	1,82	3,45	3,44	3,45
V - 25 - 50 - 1.00 - 20	36,04	1,84	0,051	19,70	2,53	0,128	1,83	3,47	3,48	3,48
V - 25 - 50 - 1.00 - 25	45,53	2,31	0,051	24,62	3,16	0,128	1,85	3,52	3,52	3,53
V - 25 - 50 - 2.00 - 15	26,87	1,37	0,051	14,45	2,36	0,163	1,86	3,05	3,04	3,05
V - 25 - 50 - 2.00 - 20	36,04	1,84	0,051	19,26	3,14	0,163	1,87	3,07	3,07	3,08
V - 25 - 50 - 2.00 - 25	45,53	2,31	0,051	24,08	3,93	0,163	1,89	3,11	3,11	3,12
V - 25 - 60 - 0.50 - 15	27,09	1,24	0,046	15,10	1,56	0,103	1,79	4,09	4,10	4,13
V - 25 - 60 - 0.50 - 20	35,85	1,78	0,050	20,13	2,08	0,103	1,78	4,01	4,00	4,01
V - 25 - 60 - 0.50 - 25	44,74	2,25	0,050	25,16	2,59	0,103	1,78	4,00	4,00	4,00
V - 25 - 60 - 1.00 - 15	27,09	1,24	0,046	14,77	1,90	0,128	1,83	3,51	3,53	3,54
V - 25 - 60 - 1.00 - 20	35,85	1,78	0,050	19,70	2,53	0,128	1,82	3,45	3,45	3,45
V - 25 - 60 - 1.00 - 25	44,74	2,25	0,050	24,62	3,16	0,128	1,82	3,44	3,44	3,45
V - 25 - 60 - 2.00 - 15	27,09	1,24	0,046	14,45	2,36	0,163	1,88	3,09	3,11	3,12
V - 25 - 60 - 2.00 - 20	35,85	1,78	0,050	19,26	3,14	0,163	1,86	3,05	3,05	3,05
V - 25 - 60 - 2.00 - 25	44,74	2,25	0,050	24,08	3,93	0,163	1,86	3,04	3,04	3,05
V - 35 - 40 - 0.50 - 15	26,82	1,41	0,053	15,10	1,56	0,103	1,78	3,98	3,98	3,99
V - 35 - 40 - 0.50 - 20	36,11	1,91	0,053	20,13	2,08	0,103	1,79	4,03	4,03	4,04
V - 35 - 40 - 0.50 - 25	45,76	2,34	0,051	25,16	2,59	0,103	1,82	4,12	4,11	4,15
V - 35 - 40 - 1.00 - 15	26,82	1,41	0,053	14,77	1,90	0,128	1,82	3,43	3,43	3,44
V - 35 - 40 - 1.00 - 20	36,11	1,91	0,053	19,70	2,53	0,128	1,83	3,48	3,47	3,48
V - 35 - 40 - 1.00 - 25	45,76	2,34	0,051	24,62	3,16	0,128	1,86	3,54	3,54	3,56
V - 35 - 40 - 2.00 - 15	26,82	1,41	0,053	14,45	2,36	0,163	1,86	3,03	3,04	3,04
V - 35 - 40 - 2.00 - 20	36,11	1,91	0,053	19,26	3,14	0,163	1,87	3,07	3,07	3,07
V - 35 - 40 - 2.00 - 25	45,76	2,34	0,051	24,08	3,93	0,163	1,90	3,13	3,13	3,15
V - 35 - 50 - 0.50 - 15	26,81	1,35	0,051	15,10	1,56	0,103	1,78	3,99	3,98	3,99
V - 35 - 50 - 0.50 - 20	35,56	1,81	0,051	20,13	2,08	0,103	1,77	3,96	3,95	3,97
V - 35 - 50 - 0.50 - 25	44,70	2,29	0,051	25,16	2,59	0,103	1,78	3,99	3,99	4,00
V - 35 - 50 - 1.00 - 15	26,81	1,35	0,051	14,77	1,90	0,128	1,81	3,44	3,44	3,44
V - 35 - 50 - 1.00 - 20	35,56	1,81	0,051	19,70	2,53	0,128	1,81	3,41	3,41	3,42
V - 35 - 50 - 1.00 - 25	44,70	2,29	0,051	24,62	3,16	0,128	1,82	3,44	3,44	3,45
V - 35 - 50 - 2.00 - 15	26,81	1,35	0,051	14,45	2,36	0,163	1,86	3,04	3,03	3,03
V - 35 - 50 - 2.00 - 20	35,56	1,81	0,051	19,26	3,14	0,163	1,85	3,02	3,01	3,02
V - 35 - 50 - 2.00 - 25	44,70	2,29	0,051	24,08	3,93	0,163	1,86	3,04	3,04	3,04
V - 35 - 60 - 0.50 - 15	26,95	1,20	0,045	15,10	1,56	0,103	1,78	4,06	4,08	4,09
V - 35 - 60 - 0.50 - 20	35,88	1,74	0,048	20,13	2,08	0,103	1,78	4,03	4,03	4,04

V - 35 - 60 - 0.50 - 25	44,45	2,22	0,050	25,16	2,59	0,103	1,77	3,96	3,96	3,97
V - 35 - 60 - 1.00 - 15	26,95	1,20	0,045	14,77	1,90	0,128	1,82	3,49	3,49	3,50
V - 35 - 60 - 1.00 - 20	35,88	1,74	0,048	19,70	2,53	0,128	1,82	3,46	3,46	3,47
V - 35 - 60 - 1.00 - 25	44,45	2,22	0,050	24,62	3,16	0,128	1,81	3,42	3,41	3,41
V - 35 - 60 - 2.00 - 15	26,95	1,20	0,045	14,45	2,36	0,163	1,87	3,07	3,07	3,08
V - 35 - 60 - 2.00 - 20	35,88	1,74	0,048	19,26	3,14	0,163	1,86	3,06	3,06	3,06
V - 35 - 60 - 2.00 - 25	44,45	2,22	0,050	24,08	3,93	0,163	1,85	3,02	3,02	3,02
V - 45 - 40 - 0.50 - 15	26,60	1,40	0,053	15,10	1,56	0,103	1,76	3,93	3,92	3,93
V - 45 - 40 - 0.50 - 20	35,67	1,88	0,053	20,13	2,08	0,103	1,77	3,96	3,95	3,96
V - 45 - 40 - 0.50 - 25	44,93	2,39	0,053	25,16	2,59	0,103	1,79	4,00	4,00	4,01
V - 45 - 40 - 1.00 - 15	26,60	1,40	0,053	14,77	1,90	0,128	1,80	3,39	3,39	3,40
V - 45 - 40 - 1.00 - 20	35,67	1,88	0,053	19,70	2,53	0,128	1,81	3,42	3,41	3,42
V - 45 - 40 - 1.00 - 25	44,93	2,39	0,053	24,62	3,16	0,128	1,83	3,45	3,45	3,46
V - 45 - 40 - 2.00 - 15	26,60	1,40	0,053	14,45	2,36	0,163	1,84	2,99	3,00	3,00
V - 45 - 40 - 2.00 - 20	35,67	1,88	0,053	19,26	3,14	0,163	1,85	3,02	3,02	3,02
V - 45 - 40 - 2.00 - 25	44,93	2,39	0,053	24,08	3,93	0,163	1,87	3,05	3,05	3,06
V - 45 - 50 - 0.50 - 15	26,88	1,32	0,049	15,10	1,56	0,103	1,78	4,02	4,01	4,02
V - 45 - 50 - 0.50 - 20	35,42	1,80	0,051	20,13	2,08	0,103	1,76	3,93	3,93	3,94
V - 45 - 50 - 0.50 - 25	44,31	2,28	0,051	25,16	2,59	0,103	1,76	3,93	3,93	3,94
V - 45 - 50 - 1.00 - 15	26,88	1,32	0,049	14,77	1,90	0,128	1,82	3,46	3,45	3,46
V - 45 - 50 - 1.00 - 20	35,42	1,80	0,051	19,70	2,53	0,128	1,80	3,39	3,39	3,39
V - 45 - 50 - 1.00 - 25	44,31	2,28	0,051	24,62	3,16	0,128	1,80	3,39	3,39	3,39
V - 45 - 50 - 2.00 - 15	26,88	1,32	0,049	14,45	2,36	0,163	1,86	3,05	3,05	3,05
V - 45 - 50 - 2.00 - 20	35,42	1,80	0,051	19,26	3,14	0,163	1,84	2,99	3,00	3,00
V - 45 - 50 - 2.00 - 25	44,31	2,28	0,051	24,08	3,93	0,163	1,84	3,00	3,00	3,00
V - 45 - 60 - 0.50 - 15	26,95	1,17	0,044	15,10	1,56	0,103	1,79	4,07	4,06	4,06
V - 45 - 60 - 0.50 - 20	36,02	1,68	0,047	20,13	2,08	0,103	1,79	4,06	4,06	4,07
V - 45 - 60 - 0.50 - 25	44,53	2,21	0,050	25,16	2,59	0,103	1,77	3,98	3,97	3,98
V - 45 - 60 - 1.00 - 15	26,95	1,17	0,044	14,77	1,90	0,128	1,82	3,49	3,48	3,47
V - 45 - 60 - 1.00 - 20	36,02	1,68	0,047	19,70	2,53	0,128	1,83	3,48	3,49	3,49
V - 45 - 60 - 1.00 - 25	44,53	2,21	0,050	24,62	3,16	0,128	1,81	3,42	3,42	3,42
V - 45 - 60 - 2.00 - 15	26,95	1,17	0,044	14,45	2,36	0,163	1,87	3,08	3,06	3,06
V - 45 - 60 - 2.00 - 20	36,02	1,68	0,047	19,26	3,14	0,163	1,87	3,08	3,08	3,09
V - 45 - 60 - 2.00 - 25	44,53	2,21	0,050	24,08	3,93	0,163	1,85	3,03	3,02	3,02