

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**ESTABILIDADE NO TRANSPORTE DE FEIXES DE
PARTÍCULAS RELATIVÍSTICAS EM UM TUBO CONDUTOR***

Luciano Camargo Martins

Tese realizada sob a orientação do Prof. Dr. Renato Pakter, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Porto Alegre

2010

*Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC).

Estabilidade no Transporte de Feixes de Partículas Relativísticas em um Tubo Condutor

por

Luciano Camargo Martins

Tese realizada sob a orientação do Prof. Dr. Renato Pakter, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de

Doutor em Ciências

Área de Concentração: Física de Plasmas

Orientadores Prof. Dr. Renato Pakter
Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato (Co-Orientador)

Banca examinadora Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IF-USP)
Prof. Dr. Sérgio Roberto Lopes (UFPR)
Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell (IF-UFRGS)
Prof. Dr. Johnny Ferraz Dias (IF-UFRGS)

Coordenador do PPG-Fís Prof. Dr. Sérgio Ribeiro Teixeira

Porto Alegre, janeiro de 2010

Autodidata é um ignorante por conta própria.

Mário Quintana

Àqueles cujos sonhos, vidas ou obras
contribuíram pra minorar
a miséria, a fome ou a ignorância
da espécie humana.

Agradecimentos

Aos meu pais que, mesmo à distância e cada qual em seu canto com a sua visão própria do mundo, e ainda que não compreendam a razão e o objeto desses meus infundáveis estudos, quiçá os haverão de os achar, ainda assim, a “coisa mais linda do mundo”;

Às minhas filhas Ana Lúcia e Maria Clara, que dividiram comigo durante algum tempo a convivência diária nessas plagas do Sul, cada uma a seu tempo, e assim pudemos compartilhar os tempos finais da formação escolar pré-universitária de ambas, bem no tempo em que também me preparava para encerrar esse ciclo de estudos;

À Cleusa, enfermeira de alma e ofício, que me mostrou com ternura e carinho a possibilidade e urgência de amar e ser amado, bem como a fragilidade e a volatilidade das relações humanas;

Às primas Rejane e Joice pelas inúmeras oportunidades de diálogo e convivência, nem sempre pacíficos porém abertos e francos, e que muito me incentivaram sempre na trilha de livre pensador, caminho esse em que me embreitei faz muito, e da qual pretendo nunca as perder de vista. Pelo exemplo de resistência e coragem que me deram sempre, dia após dia, justamente nos tempos mais difíceis, o que creio, lhes serviu de têmpera ao aço do qual foram forjadas, e que já não se encontra sem muito se procurar. Pelas risadas, charlas e chimarrões topetudos, pela música que nos conecta os corações e mentes. Enfim, por existirem no mundo real, em carne e osso!

Ao meu primo Dilamar, vulgo *negrao*, pelas centenas de “mensagens” e arquivos anexos que me enviou, e que me ajudaram a levar a vida como a levei nesses anos;

Às minhas irmãs Luz Marina, Lia Rosa e Léa Mara, que se perderam de mim (ou eu delas) em algum momento impreciso nas voltas que o tempo dá, essa pra sempre e aquela espero ainda que não, pois muito lhe admiro e assemelho, talvez mais pela teimosia do que pelo fino trato, fidalguia e nobreza de caráter; e aquela outra, a primeira da lista, pelos bons esforços que por certo houve de prestar ao nosso pai, radicado e irremovível da minha cidade natal, Chapecó,

no oeste catarinense, mesmo que eu nunca os saiba em detalhes;

Aos novos primos Tere e Délvio, recentemente descobertos dos já quase esquecidos e inacreditáveis feitos da família, pelas mensagens de auto-ajuda e estímulo;

Aos colegas da sala M208, por suportarem heroicamente a minha presença durante esses quatro anos de estudos, embora poucos tenham levado a cabo tamanha façanha, uma vez descontado os tantos que desapareceram (da sala) no meio do caminho e sem aviso de paradeiro certo;

À Karen, pela solidariedade e coleguismo nos tempos em que cursávamos a cadeira de Mecânica Quântica I, pelo empréstimo do livro do Reiser, e pelo seu sorriso;

Ao Edgar, fiel companheiro de viagens durante os tempos de aventuras a Santa Maria, em nossas incursões quase quinzenais ao coração do Rio Grande do Sul;

Ao Antônio, pelo coleguismo acadêmico e pelos mates que tomamos e conversas que travamos, desde os embates científicos aos assuntos de baixo calão;

Ao Everton, pelas nossas discussões infinitas sobre os mais variados assuntos, donde jamais chegamos à conclusão alguma, ou ao menos sequer aprendemos algo de novo;

Ao Wilson, pela montanha de artigos que me mandou ler, ao invés de responder as minhas perguntas, e pelas nossas conversas e pataquadas de sempre;

Aos professores e orientadores dessa Universidade, pelos valorosos exemplos e contra-exemplos de vida e aprendizado que deram nesses anos aqui gastos, dia após dia, na faina de quem persiste já mais por inércia do que por ideal;

Aos colegas professores do Departamento de Física da UDESC, que muitas vezes se sobrecarregaram das aulas e projetos que deixei para trás nos anos iniciais de afastamento;

À Cíntia, nossa chefe de departamento pela atenção, paciência e presteza com que respondeu meus e-mails;

À Márcia do nosso setor pessoal, por me alertar e instruir sobre as efemérides da burocracia acadêmica;

Ao Seu Joaquim, pelo exemplo de trabalho e grandeza d'alma que generosamente nos dá a todos, sem distinção, e que por sorte pudemos compartilhar da sua presença diária nos escuros corredores desse Instituto, torcedor Colorado de alma, tanto nas vitórias como nas derrotas do nosso time;

Às moças da limpeza que, com paciência e desvelo, removeram as toneladas de lixo que fui capaz de gerar nesses anos todos, admito!

Aos catadores de papel e materiais recicláveis de Porto Alegre, e em especial aos da minha rua, sem os quais a vida na capital gaúcha seria, pra mim, inimaginável;

Ao povo brasileiro que financia e sustenta a peso de ouro essa enorme e desengonçada máquina que se tornou o Ensino Público do nosso país, da qual faço parte infinitesimal e intermitente há quase trinta anos, ora como professor, ora como aluno.

Luciano Camargo Martins

Porto Alegre-RS, 15 de janeiro de 2010.

Sumário

Resumo

Abstract

Introdução	1
1 Introdução histórica	5
1.1 Evolução Histórica e Aplicações	6
1.2 Fontes de Partículas Carregadas	11
1.3 Os aceleradores de partículas	15
1.4 Tipos de aceleradores	16
1.4.1 Tubos de Raios Catódicos (CRT)	16
1.4.2 Aceleradores lineares	17
1.4.3 Aceleradores circulares ou cíclicos	18
1.5 Descrição estatística de um feixe de partículas	20
1.6 Emitância de um feixe de partículas	22
2 A dinâmica de feixes	24
2.1 O feixe estudado	25

2.2	O envelope do feixe	30
2.3	Condição de estabilidade	32
3	Simulações numéricas	36
3.1	Cálculo da força	36
3.2	Cálculo do potencial elétrico	40
3.3	Cálculo da energia do feixe	40
3.4	Distribuição <i>waterbag</i>	41
3.5	Resultados numéricos	47
4	Conclusões	52
	Apêndices	54
A.1	O método das imagens	54
A.2	Tempo de difusão magnética: τ_m	58
A.3	O programa de simulação do feixe	59
A.3.1	Listagem do programa FEIXE2D_MINIMAL.FOR	60
A.3.2	Listagem do <i>script</i> ANIM.GNU	63
A.3.3	Listagem do <i>script</i> LOOP.GNU	63
A.4	Tabela de valores do raio crítico r^* , da Eq. (2.20)	64
	Referências Bibliográficas	65
	Artigo Publicado	70

Resumo

Estudamos a estabilidade de um feixe relativístico contínuo e intenso de partículas carregadas que se propaga no interior de um tubo condutor cilíndrico. As equações de movimento para o centróide e o envelope de um feixe, cujo eixo de propagação está levemente desalinhado com relação ao eixo do tubo condutor, são obtidas e utilizadas na determinação das condições de equilíbrio e estabilidade para o transporte do feixe. Nosso estudo mostra que, dependendo dos parâmetros principais que definem o sistema, a propagação do feixe ao longo do eixo de simetria do tubo pode se tornar instável devido à presença da parede condutora, o que define um limite fundamental na fração de área efetiva que um feixe em equilíbrio pode ocupar dentro do tubo.

Abstract

We study the stability of a continuous and intense relativistic beam of charged particles that propagates inside a cylindrical conducting pipe. The equations of motion for the centroid and the envelope of a beam, whose axis of propagation is slightly misaligned with the axis of the transport channel, are obtained and used in determining the conditions of equilibrium and stability for the transport of the beam. Our study shows that, depending on main parameters that define the system, the transport of the beam along the axis of symmetry of the pipe may become unstable due to the presence of the conducting wall. This defines a fundamental limit on the fraction of the effective area that an stable beam can occupy inside the pipe.

Introdução

A dinâmica de partículas carregadas e a teoria dos feixes de partículas carregadas combinam aspectos da mecânica clássica, da teoria eletromagnética, da óptica geométrica, da relatividade especial, da mecânica estatística e da física de plasmas.

A física de feixes estuda a dinâmica de um conjunto grande de partículas carregadas e lançadas com velocidades quase paralelas, numa direção bem definida, dentro de uma região do espaço onde existem campos elétricos e magnéticos aplicados externamente, e também os campos elétricos e magnéticos coletivos gerados pela própria distribuição de partículas, isto se a densidade for alta o suficiente para que a interação mútua entre partículas se torne significativa. Neste trabalho vamos considerar esses *autocampos* que se originam nas cargas e correntes definidas pela própria distribuição das partículas do feixe, ou seja, os efeitos de sua *carga espacial*. Este é o caso que se observa quando o *comprimento de Debye* do sistema é muito menor do que o raio efetivo do feixe, e que vamos abordar nesse trabalho.

Os campos elétricos e magnéticos externos aplicados a um feixe podem ser estáticos ou dependentes do tempo e até da energia cinética das partículas, o que ocorre no caso relativístico, onde o efeito do crescimento da massa com a velocidade não pode ser desprezado. Em geral, as partículas serão tratadas como cargas pontuais. Efeitos quânticos podem ser de importância em algumas aplicações, por exemplo, ao determinar a resolução do microscópio eletrônico, mas eles são ignorados nesse trabalho. Não será considerado também o fenômeno da radiação eletromagnética emitida pela aceleração de partículas carregadas, e a perda de energia associada a esse fenômeno será considerada desprezível, embora seja sabido que a radiação *síncrotron* limita

a energia cinética máxima que pode ser obtida em aceleradores circulares, especialmente para os elétrons e pósitrons. O mesmo efeito também pode ser utilizado em anéis de amortecimento para refrigerar esses feixes de *léptons* [60]. Por outro lado, consideramos o efeito das *colisões* que ocorrem entre as partículas do feixe, causadas essencialmente pelas forças eletromagnéticas do tipo partícula-partícula, e que desempenha um papel importante na relaxação do feixe como um todo, e conseqüentemente, na formação da distribuição de longo tempo das partículas do feixe, processo esse que em geral está associado com o crescimento da sua *emitância*.

Quando os auto-campos são levados em conta, um feixe de partículas carregadas se comporta como um plasma não neutro, ou seja, uma classe especial de plasma com uma velocidade de deriva muito maior do que a velocidade térmica e que não possui, em geral, a neutralidade de carga de um plasma regular composto por íons com cargas positivas e negativas. Um feixe é um fluxo bem definido, contínuo ou em grupos pulsados, de partículas que se movem ao longo de um caminho reto ou curvo, geralmente definido como a direção *longitudinal*, e que é limitado na direção *transversal* por algum sistema focalizador ou por auto-focalização devido à presença de partículas com carga oposta. As componentes transversais da velocidade e o espalhamento das velocidades longitudinais são geralmente pequenos se comparados com a velocidade média longitudinal do feixe: essa é a chamada *aproximação paraxial*. Exemplos disso são os feixes obtidos em aceleradores lineares, microscópios eletrônicos, tubos de raios catódicos (CRT), ou mesmo os feixes curvos dos aceleradores circulares, como *bétatrons*, *cíclotrons* e *síncrotrons* [60].

A maioria dos aceleradores de partículas empregam rádio-frequência (RF), para acelerar as partículas. O feixe, nestes casos, consiste em pulsos de partículas (*bunches*) com um comprimento que é geralmente pequeno se comparado com o comprimento de onda de RF. Para impedir que o pulso se espalhe devido a sua distribuição de velocidade ou devido ao efeito da repulsão causada pela carga-espacial, um sistema focalizador externo de forças deve ser aplicado em ambas as direções transversal e longitudinal. Em aceleradores de RF, a componente axial do campo elétrico faz a focalização no sentido longitudinal, enquanto que campos magnéticos são utilizados para a focalização transversal. Neste trabalho consideramos apenas feixes cilíndricos

contínuos e longos, submetidos a um sistema linear de focalização transversal em que a força externa sobre uma partícula é proporcional ao deslocamento do eixo axial, em geral o próprio eixo do tubo de transporte do feixe. Nenhuma preocupação maior será dada aos processos de aceleração e colimação inicial dos feixes nesse trabalho, já que o interesse principal está focado na dinâmica de longo tempo do feixe já dentro do sistema de condução, dados apenas a sua condição inicial e os campos externos estáticos aplicados ao sistema.

Os estudos dos efeitos não-lineares sobre a dinâmica do feixe, devido à aplicação de forças não-lineares causadas por aberrações ópticas no sistema de focalização, é um campo altamente especializado e não será tratado no escopo desse trabalho. Não obstante, estamos especialmente interessados nos efeitos não-lineares introduzidos pelas auto-forças, que se originam pela carga espacial do feixe, e também os efeitos causados pela interação do feixe com o tubo metálico condutor usado no seu próprio transporte, já que cargas elétricas induzidas serão observadas e modificam a dinâmica do próprio feixe. Em suma, consideramos o movimento relativístico axial de um feixe longo, dentro da aproximação paraxial para a sua dinâmica transversal onde incluímos os efeitos não-lineares causados pelas auto-forças e pela proximidade do tubo condutor, e estabelecemos um novo *limite fundamental* para a energia máxima que pode ser obtida pela aceleração e transporte estável de um tal feixe, em função dos parâmetros físicos principais que definem toda essa classe de feixes. No estabelecimento desse limite fundamental está baseada a tese que apresentamos e defendemos nesse trabalho.

Desenvolvemos esse trabalho a partir dos resultados fundamentais em física de feixes publicados nos livros de Martin Reiser [60] e Davidson e Qin [9], e é claro, também nos resultados mais recentes disponíveis nos periódicos e publicações da área.

Para uma apresentação mais contextualizada do trabalho que nos propomos a desenvolver, apresentamos no Capítulo 1 uma revisão histórica resumida, que vai desde os primórdios da física de feixes até os principais feitos atuais na área, com destaque aos aceleradores de partículas e seus mecanismos básicos de funcionamento. Nas seções finais do capítulo, apresentamos as definições básicas usadas na descrição estatística de feixes, já que é dentro desse formalismo

que desenvolvemos o nosso trabalho contraposto à descrição de fluidos, já que um feixe de cargas também pode ser tratado como um *meio contínuo*, abordagem que não utilizamos nesse trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos e desenvolvemos a dinâmica da classe de feixes a que nos propomos estudar, apresentamos e discutimos a estabilidade do transporte dos feixes para velocidades relativísticas, e propomos um limite fundamental para esse tipo de transporte, como nossa tese de trabalho. Discutimos a validade geral do critério proposto e apresentamos um diagrama no qual se pode observar as regiões de estabilidade e instabilidade para o transporte dos feixes, bem como a separatriz dessas regiões, obtida analiticamente através de uma linha contínua de instabilidades no seu espaço de parâmetros.

No Capítulo 3 apresentamos os resultados numéricos obtidos por simulações auto-consistentes da dinâmica de feixes de macropartículas, onde corroboramos o critério de estabilidade obtido, através de extensivas varreduras feitas sobre todo o espaço de parâmetros da classe de feixes estudada. Nas simulações, utilizamos tanto um feixe frio, sem emitância inicial, como um feixe quente (*waterbag*) com emitância inicial não nula.

No Capítulo 4 apresentamos as conclusões finais, com destaque aos principais resultados e implicações imediatas dos resultados obtidos.

Nos Apêndices finais, revemos o *método das imagens* para a geometria cilíndrica que estamos interessados, apresentamos algumas demonstrações auxiliares na compreensão do texto principal, as listagens da parte central do programa FORTRAN77 usado nas simulações e os *scripts* utilizados nas gráficos e animações. Uma tabela de valores dos raios críticos dos feixes em função da sua velocidade axial e da sua emitância inicial é apresentada.

Capítulo 1

Introdução histórica

Em 1865, James C. Maxwell unificou as leis físicas que descrevem o comportamento dos campos elétricos, magnéticos e a Óptica, e suas interações com a matéria. As equações de Maxwell expressam como cargas elétricas produzem campos elétricos e a ausência experimental de cargas magnéticas (Leis de Gauss), como uma corrente elétrica produz campo magnético (Lei de Ampère), e como variações de campo magnético produzem campos elétricos (Lei da indução de Faraday). Analisando as simetrias e assimetrias das leis básicas do eletromagnetismo, Maxwell percebeu que era necessário uma correção na lei de Ampère: alterações no campo elétrico atuam como correntes elétricas, produzindo campos magnéticos [29]. Com isso, mostrou que as quatro equações, incluindo a correção que propôs, predizem ondas de campos magnéticos e elétricos oscilantes que viajam através do espaço vazio (vácuo) com velocidade constante que depende apenas de duas grandezas, uma elétrica e a outra magnética, demonstrando teoricamente que a luz é uma onda eletromagnética. A partir desse feito notável realizado por Maxwell, estava pronto o arcabouço teórico do eletromagnetismo clássico e, embora Maxwell não tenha vivido para ver a comprovação experimental de suas idéias, Heinrich Hertz conseguiu produzir e detectar as ondas eletromagnéticas em 1888, e os anos que se seguiram foram os mais fecundos e promissores na história da Física.

Embora não fosse ainda conhecida a natureza da carga elétrica, já que o próprio átomo ainda

era um enigma para a Física, em 1878, William Crookes teve a certeza de que os *raios catódicos* são feixes de partículas com carga negativa, emitidas de um cátodo com velocidade muito alta.

Em 1879, Joseph John Thomson demonstrou que um raio catódico era desviado pela ação de um campo elétrico, e em 1897, utilizou um tubo de raios catódicos¹ (CRT) para determinar experimentalmente a razão entre a carga-massa e/m das suas partículas constituintes, com base na observação da deflexão desses raios por meio de campos elétricos e magnéticos, experimento esse considerado o *descobrimento* do elétron. Estava construído assim o primeiro acelerador de partículas, e o estudo sistemático das propriedades e aplicações tecnológicas dos feixes de partículas estava apenas começando.

O estudo das partículas elementares constituintes do núcleo atômico se iniciou de um pequeno acelerador desenvolvido em 1927 pelos físicos ingleses J. D. Cockcroft e E. T. S. Walton na Universidade de Cambridge, Inglaterra. Estes cientistas através do dispositivo conseguiram realizar a primeira reação nuclear induzida artificialmente ganhando assim o Prêmio Nobel de Física de 1951.

Nascia assim uma nova área de pesquisa teórica, experimental e, logo a seguir, numérico-computacional na Física, que envolve o estudo dos feixes de partículas carregadas, das máquinas que os produzem — os aceleradores de partículas, e dos princípios físicos fundamentais nos quais se baseia a sua construção.

1.1 Evolução Histórica e Aplicações

Historicamente, a primeira e mais importante área de desenvolvimento da dinâmica de partículas carregadas é o campo da Óptica Eletrônica, que deu origem à maioria dos trabalhos teóricos

¹CRT é um acrônimo para a expressão inglesa *cathode ray tube*, que em português significa “tubo de raios catódicos”, também conhecido como Cinescópio. Foi inventado por Karl Ferdinand Braun, e era a tela mais usada, até pouco tempo atrás, em monitores de microcomputadores e televisores (cinescópios de deflexão eletromagnética) e osciloscópios (cinescópios de deflexão eletrostática).

pioneiros no assunto. O nascimento da Óptica Eletrônica se deu em 1926, quando H. Busch mostrou que a ação de um campo magnético axialmente simétrico em raios de elétrons produz um efeito semelhante ao de uma lente de vidro em um raio de luz. Então, em 1931 e 1932, Davidson e Calbrick, Bruche, Johansson verificaram que o mesmo fenômeno ocorre para campos elétricos axialmente simétricos. O primeiro uso da lente magnética foi realizado por Knoll e Ruska (1931) e da lente elétrica por Bruche e colaboradores (1934).

Até 1939, a Óptica de elétrons experimenta um rápido desenvolvimento estimulado por fortes necessidades industriais, especialmente com os microscópios de elétrons, os tubos de raios catódicos e a televisão [61, 12].

Durante a II Guerra Mundial, a Óptica Eletrônica recebeu novos impulsos dos requisitos de guerra: tubos de raios catódicos para radares e tubos de imagem para a visão infravermelha, mas o mais importante foi o desenvolvimento de dispositivos de micro-ondas (*klystron*, *magnetron*, etc.) para a geração de ondas de alta energia eletromagnética e na faixa de frequência acima de 1 GHz. A necessidade de aperfeiçoamento desses últimos dispositivos acabou despertando o interesse no estudo dos efeitos da carga-espacial em feixes de alta intensidade [16].

Outro impulso importante que ampliou significativamente o campo da Óptica Eletrônica, considerada a dinâmica de partículas carregadas no sentido mais amplo, surgiu a partir do desenvolvimento de aceleradores de partículas de alta energia. Este desenvolvimento começou por volta de 1930 com a invenção do *acelerador linear*, do *bétatron* em 1928, do *cíclotron* em 1931 e do acelerador eletrostático em 1931-1932. A seguir, apareceram os primeiros aceleradores de alta energia existentes ainda hoje, como o *acelerador linear* de elétrons de Stanford e o *síncrotron* de prótons no Fermilab, agora operando em uma energia de cerca de 1 TeV e chamado de Tevatron. A dinâmica de feixes de aceleradores de partículas é agora um ramo importante da dinâmica de partículas carregadas. Óptica e eletrônica de íons foram estendidas e incluem agora também o estudo da focalização de feixes em aceleradores circulares. Novos tipos de sistemas focalizadores, tais como *lentes quadrupolares*, magnetos de bordas e focalização por gradiente-alternando, foram desenvolvidos e contribuíram para o desenvolvimento bem sucedido de aceleradores com

energias cada vez mais altas e de melhor desempenho. O interesse na dinâmica de partículas veio também da ciência espacial, das aplicações industriais, dos dispositivos baseados em feixes de elétrons (soldadura, microusinagem, implantação iônica, litografia por feixe de partículas carregadas), e também da fusão termonuclear.

Na década de 1965-1975 dois novos tipos de aceleradores foram desenvolvidos para a geração de feixes de elétrons com alta potência de pico e pulso de curta distância; estes são os *diodos relativísticos* e o *acelerador linear* de indução. O primeiro produz feixes intensos de elétrons relativísticos, com correntes de pico variando de kiloampères a mega-ampères, com energias que vão desde centenas de keV a mais de 10 MeV. Esse tipo de feixe de elétrons de alta intensidade é criado quando pulsos curtos de alta voltagem dos chamados geradores de Marx ou mesmo de transformadores atingem esse tipo de diodo. Os intensos campos elétricos associados à criação desse tipo de feixe causam a emissão de campo (*field emission*) a partir do cátodo e formação de plasma. A expansão do plasma leva ao fechamento do *gap* que, por sua vez, limita a duração do pulso do feixe na faixa de 10 e 100 ns. Esse tipo de gerador pulsado tem aplicações em fontes de raios-X intensos, no estudo da aceleração coletiva de íons positivos pelos campos elétricos associados a feixes intensos de elétrons e também na geração de micro-ondas de alta potência e *lasers* de elétrons livres. Mais recentemente, diodos pulsados tem sido pesquisados para a produção de feixes de íons de alta potência usados na pesquisa da fusão inercial [36].

Como o *betatron*, os aceleradores lineares (*linacs*) de indução utilizam campos elétricos produzidos pela variação temporal de um fluxo magnético. Estes campos são aplicados em uma sequência de lacunas intercaladas para acelerar feixes de partículas carregadas. As partículas carregadas atravessam as lacunas apenas durante o intervalo de tempo em que o fluxo magnético está mudando e, portanto, uma queda de tensão aparece entre as lacunas. Em contraste com os aceleradores de ressonância por radio-frequência, os *linacs* de indução podem acelerar feixes com correntes de pico muito altas, que variam tipicamente de várias centenas de ampères até vários kiloampères. O maior acelerador nesta categoria é o norte-americano ATA (*Advanced Test Accelerator*) do Laboratório Nacional Lawrence Livermore, que acelerou um feixe de

elétrons de 10 kA durante 70 ns até uma energia de 47 MeV. Originalmente desenvolvido para feixes de elétrons relativamente curtos (10 a 100 ns), os *linacs* de indução agora também estão sendo usados para gerar pulsos mais longos (microsegundos), tanto de elétrons como de íons. Um exemplo desta última categoria é o *linac* de indução de íons que está sendo desenvolvido no Laboratório Lawrence Berkeley, projetado para a aceleração de feixes intensos de íons pesados com objetivo de usá-los como ignitores — como raios laser, para inflamar as pastilhas de combustível nos futuros reatores de fusão inercial. Experiências atuais ainda utilizam energias relativamente baixas, da ordem de poucos MeV, e correntes de até 1 A. A versão industrial do sistema ignitor baseado em íons pesados, com número de massa ≥ 100 , para os reatores de fusão inercial exigirá correntes no intervalo de 20 a 30 kA, com uma energia de 5 a 10 GeV e um comprimento de pulso de 10 ns, por exemplo.

Os aceleradores lineares de rádio-frequência (RF), mais tradicionais, também estão sendo desenvolvidos para aplicações de alta potência como a fusão de íons pesados, aceleradores lineares de elétron-pósitron para a física de alta energia, e outros fins. A invenção dos aceleradores de baixa energia alimentados por rádio frequência de quadrupolo por Kapchinsky Teplyakov em 1970, revolucionou o campo dos *linacs* de RF para feixes de íons. Hoje, praticamente todos os *linacs* de RF em grandes laboratórios e indústrias em todo o mundo usam esse tipo de acelerador como um *injetor* de feixe para o acelerador principal.

Outros desenvolvimentos recentes envolvem a utilização de feixes intensos de elétrons agora como fontes de radiação eletromagnética. De particular interesse neste contexto é o *gyrotron*, uma nova fonte de micro-ondas de alta potência que opera no comprimento de onda de centímetros a milímetros, e o laser de elétrons livres (FEL), que cobre um espectro muito amplo, desde centímetros até os comprimentos das ondas visíveis. Todas estas aplicações tem desencadeado novas pesquisas em física de feixes intensos de partículas, como o transporte periódico através de sistemas de focalização, a estabilidade do feixe na presença de forças intensas de carga espacial, a interação do feixe com um fundo de plasma, e os efeitos não-lineares responsáveis pela deterioração do feixe por crescimento da emitância ou perda de partículas ou

formação de *halo* [67].

O reconhecimento de que há limites fundamentais nas correntes produzidas por feixes de partículas carregadas desempenha um papel importante na teoria de feixes e projeto de aceleradores. Historicamente, o fato de que o auto-campo magnético de um feixe relativístico com carga neutra detém a propagação do feixe quando a corrente excede um valor crítico foi descoberto por Alfvén (em 1939) no estudo da propagação de elétrons através do espaço, e mais tarde aplicadas ao laboratório de feixes por Lawson (em 1958). A corrente crítica associada a este efeito é conhecida na literatura como a *corrente de Alfvén* ou mesmo *corrente de Alfvén-Lawson*. Intimamente relacionado a esse efeito está o trabalho sobre feixes relativístico de elétrons auto-focalizados de Bennett (1934) e Budker (1956).

O limite de corrente devido à carga espacial (na ausência da neutralização da carga) em um diodo é conhecida como a *lei de Child-Langmuir* derivada dos trabalho anteriores de Child (1911) e Langmuir (1913). No entanto, o mesmo limite observado para a propagação de feixes em canais de transporte só foi estudado muito mais tarde, e a fórmula de um feixe relativístico de elétrons derivada por Bogdankevich Rukhadze em 1971 e é, provavelmente, uma das mais frequentemente citadas na literatura.

As bases para o tratamento matemático de feixes com carga espacial foram estabelecidas por Vlasov em 1945 [66], que fez uso do *teorema de Liouville*, das *equações de Maxwell*, e as equações do movimento em um modelo teórico auto-consistente no desenvolvimento de uma ferramenta atual e indispensável para a análise teórica dos feixes. Em 1959, Kapchinsky e Vladimirovsky [31] propuseram uma solução especial para a equação Vlasov, conhecido na literatura como a *distribuição K-V*, caracterizada pela propriedade de que as forças transversais geradas pela carga espacial são funções lineares das posições das partículas no feixe. Este foi um marco relevante na física de feixes, cuja importância prática para a análise e projeto de aceleradores não pode ser subestimada. A distribuição K-V ganhou um significado adicional quando Lapostolle e Sacherer em 1971 introduziram a descrição de feixes em termos de valores médios quadráticos *root mean square (RMS)* das quantidades fundamentais: largura, divergência e emitância [62, 32].

Outro marco importante no desenvolvimento da física de feixes é o trabalho pioneiro e detalhado de Laslett de 1963 [34], o *tune shift* da carga espacial para as oscilações *bétatron* observadas em aceleradores circulares, um tipo de instabilidade fundamental, uma vez que limita a intensidade máxima possível para a corrente gerada nestes máquinas. No que diz respeito à compreensão da física dos feixes com efeitos de carga espacial, os trabalhos de simulação por Chasman em 1968 [5] para aceleradores lineares, a análise dos modos de oscilação coletiva em feixes com focalização magnética uniforme feita por Gluckstern e a análise de estabilidade de Davidson e Krall em 1970 [10], constituem importantes conquistas que influenciaram os trabalhos feitos desde então.

Esta lista de marcos históricos poderia ser estendida em várias direções, dada a riqueza das limitações fundamentais e instabilidades observadas em física de feixes, talvez a mais séria sendo a *instabilidade de massa negativa* revelada pela análise teórica em 1959. De qualquer modo, nosso trabalho ficará restrito ao estudo da dinâmica transversal de feixes intensos, e nesse breve resumo histórico destacamos apenas os fatos de interesse que ocorreram no últimos 20 anos.

1.2 Fontes de Partículas Carregadas

Antes de vermos os tipo de aceleradores mais comuns, vamos fazer uma breve descrição dos diferentes tipos de fontes de partículas carregadas, seus princípios e limitações de desempenho, já que constituem um dos elementos fundamentais na obtenção de feixes de partículas. Isto é particularmente importante para os feixes intensos, onde as limitações físicas e tecnológicas da fonte podem impor limites fundamentais para a corrente do feixe e a emitância ou brilho que pode ser alcançado.

O mais simples modelo conceitual de uma fonte é o *diodo plano*. Um dos dois eletrodos emite partículas carregadas, no caso de elétrons é chamado de cátodo. Uma diferença de potencial de polaridade adequada acelera as partículas para o outro eletrodo, chamado de ânodo no caso de elétrons. Na prática, o emissor tem naturalmente um tamanho finito e, normalmente, uma

forma circular com raio r_s . O ânodo contém um buraco ou uma malha para permitir que o feixe propague para dentro do tubo de vácuo no sentido do fluxo das cargas, onde é focalizado, colimado ou acelerado, dependendo da aplicação específica. Ademais, o eletrodo em que o emissor é incorporado, bem como o ânodo pode ter um desenho especial não plano a fim de focalizar inicialmente o feixe. Em uma geometria do tipo Pierce, por exemplo, os eletrodos formam um ângulo inferior a 90 graus com respeito ao eixo do feixe para produzir uma força transversal eletrostática que equilibra exatamente a força coulombiana repulsiva devido à carga espacial do feixe.

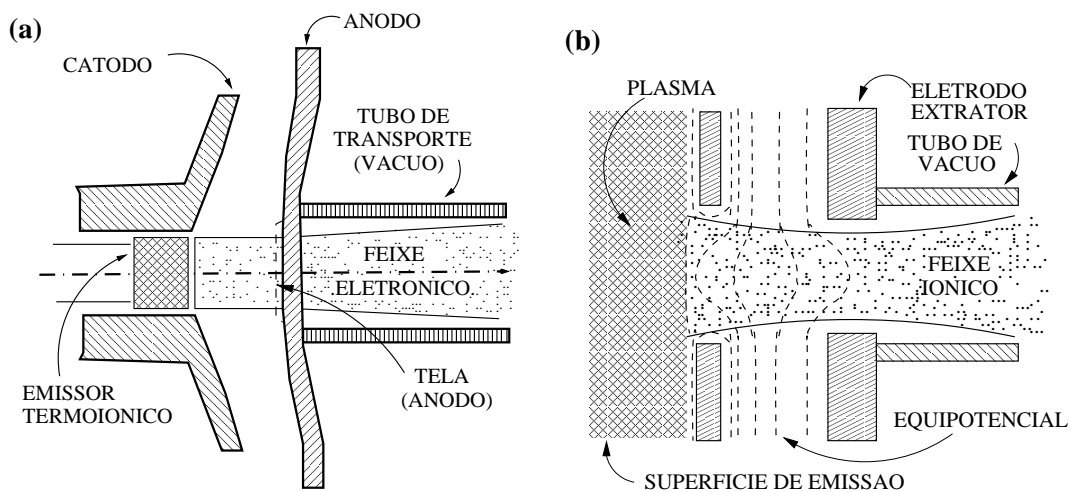


Figura 1.1: *Desenho esquemático de uma fonte de elétrons com cátodo termoiônico, com uma geometria de diodo do tipo Pierce e ânodo de tela (a). Uma fonte de íons de um plasma. As linhas equipotenciais do campo elétrico são indicadas em pontilhados. Os íons são emitidos da superfície côncava da superfície do plasma, também chamado de meniscus (b).*

Uma ilustração esquemática de um diodo típico tipo pistola de elétrons com cátodo termoiônico e eletrodos de focalização do tipo Pierce, com um ânodo de tela é mostrada na Figura 1.1(a). O raio do feixe de elétrons neste exemplo permanece praticamente constante dentro do emissor e depois aumenta devido a repulsão coulombiana da carga espacial quando o feixe entra na região sem campo elétrico, fora do ânodo. Para evitar a divergência, devido a essa repulsão causada pela carga espacial ou mesmo pela dispersão da velocidade transversal das partículas do feixe, o raio tem que ser focalizado com um campo magnético adequado ou lentes eletrostáticas. Outros tipos de fontes de elétrons empregam a *emissão de campo* ou *fotocátodos*; os cátodos podem ter a forma de um anel (para formar um feixe oco) ou uma ponta afiada. Eletrodos intermediários

adicionais (configurações tipo triodo ou tetrodo) podem ser usados para controlar os parâmetros do feixe. Os elétrons de condução em um metal seguem uma distribuição de energia do tipo Fermi-Dirac, e os elétrons emitidos por um cátodo aquecido pertencem à cauda maxwelliana da distribuição de Fermi-Dirac de onde são emitidos, e a densidade de corrente J_{th} associada é dada pela equação de Richardson-Dushman:

$$J_{th} = AT^2 e^{-W/k_B T} \quad (1.1)$$

onde T é a temperatura de cátodo, W a função trabalho do material do cátodo (normalmente poucos eV), e $k_B = 8,6175 \times 10^{-5}$ eV/K é a constante de Boltzmann. O valor teórico para a constante A é

$$A = 4\pi emk_B^2 h^3 = 1,2 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2} \quad (1.2)$$

onde $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C é a carga do elétron, $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg é a massa de repouso do elétron e $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J · s é a constante de Planck.

A fabricação de cátodos termoiônicos é uma arte altamente especializada, onde a escolha e composição dos materiais é guiada pelos requisitos de baixa função trabalho W , longa vida útil (em alta temperatura), a retificação da superfície de saída e outros fatores. O tungstênio puro tem uma função de trabalho $W = 4,5$ eV, e cátodos de tungstênio operam a uma temperatura de 2500 K ($k_B T \approx 0,2$ eV), com uma densidade de corrente de cerca de $0,5 \text{ A/cm}^2$. Densidades maiores de corrente de 10 a 20 A/cm^2 podem ser conseguidas com cátodos dispensadores (*dispenser cathodes*), que são utilizados para geração de micro-ondas de alta potência, e fazem uso de óxidos de bário ou estrôncio impregnados em uma matriz porosa de tungstênio (ou metais similares). Estes cátodos conseguem operar a uma temperatura típica de 1400 K ($k_B T \approx 0,12$ eV) e têm uma função de um trabalho eficaz de 1,6 eV.

Uma fonte típica de íons com uma configuração tipo diodo é mostrada esquematicamente na Figura 1.1(b). Os íons são extraídos do plasma gerado por uma descarga em um gás, e o feixe acelerado passa por um buraco no eletrodo de extração na direção do tubo de condução a vácuo. A área de superfície de saída de plasma não é fixa, como no caso de um cátodo. Pelo contrário,

tem uma forma côncava chamada *menisco* que depende da densidade de plasma e da força do campo elétrico acelerador na superfície do plasma. As linhas tracejadas na Figura 1.1(b) indicam as superfícies equipotenciais do campo elétrico devido à tensão V_0 aplicada, bem como da carga espacial do feixe. Observe que há uma pequena queda de potencial entre o plasma e a superfície da parede da câmara que envolve o plasma. A forma côncava do menisco e a abertura da eletrodo da fonte produzem um componente de campo elétrico transversal que resulta em um feixe convergente.

Em geral, as fontes de íons são muito mais complexas do que os canhões de elétrons. Há muitos tipos diferentes de fontes para as espécies de partículas diversas, tais como íons leves, íons pesados ou íons negativos (por exemplo, H^-). A maioria das fontes utilizam campos magnéticos para confinar o plasma. Alguns têm vários eletrodos com potenciais diferentes para melhor controlar a formação de feixes de íons e o processo de aceleração. Um problema especial com fontes de íons é que o gás na qual o plasma é formado “vaza” através da abertura da fonte em direção ao tubo de aceleração (vácuo). Perto da fonte a pressão é alta o suficiente para que se forme um plasma com densidade superior à densidade do feixe, através de colisões ionizantes entre o feixe de íons e as moléculas de gás. Isto causa a neutralização da carga, o que é vantajoso para a focalização mas também pode causar efeitos negativos, tais como a queda da alta tensão e instabilidades no feixe de plasma. Outro problema surge porque os íons com estado de carga ou massa diferentes são extraídas do plasma, juntamente com a espécie desejada. No caso de íons negativos, como a H^- por exemplo, os elétrons são acelerados também com o feixe de íons. A menos que o número de partículas de contaminação seja pequeno, é necessário nestes casos usar campos magnéticos defletores para remover as espécies indesejáveis do feixe de partículas.

A fim de ilustrar o conceito de projeto básico de fontes de partículas carregadas basta considerar as configurações diodo simples da Figura 1.1. Nesses tipos de fontes a presença da carga espacial limita a quantidade de corrente que pode ser acelerada por uma tensão elétrica V_0 dada. Para uma geometria do eletrodo planar com um intervalo de espaçamento d entre as duas chapas, a densidade de corrente limite J (no caso não-relativístico e em unidades MKS) é dada pela

fórmula

$$J = 1,67 \times 10^{-3} \left(\frac{q}{mc^2} \right)^{1/2} \frac{V_0^{3/2}}{d^2} , \quad (1.3)$$

onde q e m são a carga e a massa das partículas, respectivamente, e c é a velocidade da luz. A relação acima, obtida por Child e Langmuir, é conhecida na literatura como *lei de Child* ou como a *lei de Child-Langmuir* [60]. Aplicando este resultado para um feixe redondo e uniforme proveniente de uma área circular com raio r_s temos para a corrente do feixe

$$J = 1,67\pi \times 10^{-3} \left(\frac{q}{mc^2} \right)^{1/2} V_0^{3/2} \left(\frac{r_s}{d} \right)^2 . \quad (1.4)$$

No entanto, nas fontes reais de íons e nos canhões de elétrons com geometria cilíndrica, a corrente do feixe pode ser consideravelmente menor do que esse limite, que é baseado em um cálculo para um diodo plano ideal.

1.3 Os aceleradores de partículas

Os aceleradores de partículas são equipamentos que fornecem energia a feixes de partículas eletricamente carregadas, em geral íons ou partículas subatômicas. Os aceleradores de partículas possibilitam a concentração de alta energia em pequeno volume e em posições arbitradas e controladas de forma precisa. Exemplos comuns de aceleradores de partículas existem nas televisões e geradores de raios- X , na produção de isótopos radioativos, na radioterapia do câncer, na radiografia de alta potência para uso industrial e na polimerização de plásticos [69, 28].

Além das partículas mais básicas, elétrons, prótons e nêutrons, outras também podem ser aceleradas. Por exemplo: existe a possibilidade de se acelerar partículas compostas; ou seja, partículas alfa, que são constituídas por dois prótons e dois nêutrons [70, 49].

1.4 Tipos de aceleradores

Um acelerador de partículas é constituído basicamente de uma fonte de partículas carregadas eletricamente expostas a campos elétricos que as aceleram, e passam em seguida por um campo magnético para a deflexão, focalização e controle das suas trajetórias de movimento. Para que o transporte das partículas aceleradas seja o mais ideal possível, os aceleradores utilizam alto-vácuo na região de transporte das partículas, evitando assim a dispersão destas pelas moléculas de gases que porventura estejam em sua trajetória.

Todos os tipos de aceleradores, independentemente de seu grau de avanço tecnológico, obedecem aos mesmos princípios básicos. Devido à disposição geométrica dos campos eletromagnéticos responsáveis pela aceleração e transporte das partículas, basicamente são classificados em dois tipos: cíclicos e lineares [11].

1.4.1 Tubos de Raios Catódicos (CRT)

O exemplo mais simples e comum de acelerador de partículas, com todas as características citadas acima, são os tubos de raios catódicos de aparelhos de televisão. Estes dispositivos dispõem, numa de suas extremidades, de um cátodo onde os elétrons ganham energia pelo aquecimento, e escapam da superfície do metal. Ao se destacar do cátodo aquecido pelo filamento (Efeito Édison ou também chamado termoiônico) estas partículas ficam expostas a um campo elétrico estabelecido pela aplicação de diferença de potencial entre aquele cátodo e o outro extremo, ou ânodo, nas proximidades da tela. Uma vez emitidos, os elétrons são acelerados por um campo elétrico e colimados na forma de um feixe. A diferença de potencial aplicada à grade de controle determina a corrente eletrônica, quanto mais fluxo, mais brilho, quanto menos fluxo, menos brilho, ou seja, controla o bombardeio de elétrons na tela. A diferença de potencial do primeiro ânodo é cerca de 250 V, proporcionando assim uma primeira aceleração do feixe eletrônico. A alta tensão está presente no segundo ânodo, que com cerca de 24 kV, acelera os elétrons ainda mais, porém, estes passam em alta velocidade e ainda não são capturados devido

à geometria tubular do eletrodo. Após passarem pelos ânodos, os elétrons são então desviados de suas trajetórias por bobinas de deflexão horizontal e vertical (bobinas que geram campo magnético) cuja função é executar a varredura para atingir a tela e produzir a luminescência (o brilho ou luminescência, que tem cor predefinida conforme o ponto da tela), que ocorre devido à excitação e emissão de fótons pelos átomos do material fosforescente depositados sob a tela. Logo antes de colidir na tela, cada elétron do feixe possui uma energia em torno de 24 keV, o que corresponde a uma velocidade final de aproximadamente 30% da velocidade da luz [19, 68].

1.4.2 Aceleradores lineares

Os aceleradores lineares produzem feixes de íons acelerados sobre uma trajetória reta, onde a energia final obtida é proporcional à soma das diferenças de potencial geradas a partir dos mecanismos de aceleração. Estes aceleradores são desenvolvidos de duas formas ou sistemas. O primeiro sistema é o que utiliza a montagem de componentes que geram um campo elétrico longitudinal capaz de acelerar e fornecer assim energia cinética para as partículas. De todos os sistemas de aceleração de partículas, este é o mais antigo, porém só foi possível seu desenvolvimento integral a partir de meados da Segunda Guerra Mundial, esta espera ocorreu porque a teoria avançou mais rápido que a prática, e a tecnologia necessitou se desenvolver para a produção do equipamento. Não existia naquela época a técnica de conformação de ondas pelo uso da radiofrequência em guias de onda. Tão logo ocorreu o desenvolvimento de dispositivos para tal durante a guerra foi possível a produção de reações nucleares.

O segundo sistema de aceleração linear utiliza o método de ondas eletromagnéticas estacionárias, estas acabam por acelerar partículas carregadas. Esse sistema é usado geralmente como injetor (pré-acelerador) de partículas para aceleradores cíclicos de grande energia que possuem dispositivos para detectar e corrigir as distorções ocasionadas pelos efeitos relativísticos.

1.4.3 Aceleradores circulares ou cíclicos

Além dos aceleradores lineares existem os aceleradores cíclicos. Estes são construídos para promover a trajetória curvada das partículas pela ação dos campos magnéticos em espiral ou circular. Este tipo de acelerador força a partícula a passar diversas vezes pelos sistemas de aceleração. A energia final das partículas depende da diferença de potencial elétrico aplicada e do número de voltas que estas dão no dispositivo. Os tipos de aceleradores cíclicos mais utilizados são o *cíclotron* e o *síncrotron*.

O cíclotron

O cíclotron possui dois eletrodos ocios e semicirculares, em forma de “D”, montados numa câmara de vácuo entre os pólos de um eletromagneto. Os prótons ou outros íons de massa maior são injetados no interior dos eletrodos e no espaço entre os “D”, onde é aplicada uma diferença de potencial alternada na frequência da circulação das partículas — a frequência cíclotron, produzindo assim incrementos de velocidade cada vez que estas passam de um eletrodo para o outro. O que ocorre com as partículas neste momento, é uma trajetória em forma hipóide ou de semicírculos cujos raios são crescentes havendo então uma perda do foco do feixe. É necessário então um sistema de “focalização” que limite o movimento das partículas sobre uma trajetória pré determinada, evitando assim a perda de carga por espiralamento [58].

Por causa do efeito relativístico de aumento de massa nas partículas a medida que suas velocidades crescem, observa-se o surgimento de uma diferença entre a frequência de oscilação do potencial acelerador e a frequência de circulação da partícula num segmento da sua trajetória. Este efeito gera um erro inflacionário, que aumenta a cada volta, limitando assim a energia máxima da partícula.

Para resolver este problema do erro exponencial, ou inflacionário, é necessário variar a frequência aplicada aos eletrodos em forma de “D”, assim pode-se alterar a focalização iônica através da variação dos campos magnéticos sobre as partículas. Para tal, foi desenvolvido um equipamento

chamado *sincrocíclotron* cuja construção foi possível porque existem órbitas estáveis onde a frequência de revolução é igual à frequência da diferença de potencial aplicada aos eletrodos. Neste sistema, quando é diminuída a frequência de oscilação, as partículas têm uma afinidade à sua órbita tendendo então em permanecer nesta, pois absorvem energia dos campos elétricos dos eletrodos. Ao se manter a estabilidade de sincronismo, as partículas acabam ganhando energia e tendem a se movimentar em órbitas cujos raios são crescentes até a órbita máxima permitida pelo projeto do eletromagneto. O sincrocíclotron praticamente não tem limites no número de revoluções necessárias para a obtenção de uma dada energia [20, 59].

O síncrotron

O desenvolvimento dos *síncrotrons* foi necessário para melhorar as soluções de aceleração de partículas cujas trajetórias são de raios fixos. Estes, da mesma forma que os cíclotrons, aceleram as partículas eletricamente e as confinam em campos magnéticos. A diferença é que o *síncrotron* utiliza o princípio da estabilidade de fase, mantendo desta forma o sincronismo entre campo elétrico aplicado e a frequência de revolução da partícula [50].



Figura 1.2: Fotografia panorâmica do acelerador circular do Laboratório Nacional de Luz síncrotron (LNLS), situado em Campinas-SP, o maior acelerador de partículas da América Latina.

O funcionamento do *síncrotron* se dá através de um campo magnético que causa a deflexão da

partícula para uma órbita circular, e cuja intensidade do campo é modulada de forma cíclica, mantendo assim órbitas cujo raio é bastante estável e constante, apesar do ganho de energia e massa pelas partículas aceleradas. Uma vez que se usa o campo magnético para manter a órbita ao invés de acelerá-la, as linhas de campo magnético só são necessárias na região anular que é definida pela órbita [33].

Os *síncrotrons* de prótons são os aceleradores de partículas que atingem a maior energia chegando a 800 GeV, enquanto o *síncrotron* de elétrons alcança no máximo 12 GeV. Partículas com essas energias típicas, adquirem velocidades muito altas, e quando defletidas por campos magnéticos irradiam energia eletromagnética em uma larga faixa de frequência do espectro de radiações, especialmente na região acima da faixa visível do espectro. Essa energia irradiada é perdida pelas partículas e precisa ser reposta pelo sistema acelerador [51, 71, 63].

No Brasil, está instalado o maior acelerador de partículas da América Latina, o acelerador circular do Laboratório Nacional de Luz *síncrotron* (LNLS), situado em Campinas, estado de São Paulo, que possui energia nominal de operação de 1,37 GeV e circunferência de 93,2 m. O uso da luz *síncrotron* produzida no acelerador permite o estudo de átomos e moléculas para diversos íons, desde o desenvolvimento de novos materiais até o aperfeiçoamento de materiais biológicos, com promissoras aplicações na área da saúde [38]. Ver Figura 1.2.

1.5 Descrição estatística de um feixe de partículas

Um feixe de partículas carregadas pode ser convenientemente representado por meio de uma função de distribuição f da carga em um espaço de fases hexadimensional $x \times p_x \times y \times p_y \times z \times p_z$.

Devido à repulsão coulombiana entre as partículas do feixe, surgem forças desfocalizadoras dentro do feixe, que dependem da própria distribuição espacial da carga, e por isso são chamadas de *autoforças* ou *forças de carga espacial*, que no idioma inglês são denominadas por *space-charge forces*. Um feixe de partículas carregadas, que depende de forças externas de interação

com campos elétricos e magnéticos aplicados sobre o feixe, e também das autoforças, pode ser descrito como sendo um conjunto de pontos de um espaço de fases hexadimensional, na forma geral

$$f = f(x, p_x, y, p_y, z, p_z, t) \quad , \quad (1.5)$$

que pode depender, explicitamente, ainda do tempo t , no caso mais geral.

No caso em que o ângulo entre as trajetórias individuais das partículas e o eixo do canal de transporte do feixe é pequeno (aproximação paraxial), os seus movimentos podem ser projetados sobre o eixo Z longitudinal (axial) e sobre o plano transversal XY , onde usamos o espaço de fases reduzido $x \times x' \times y \times y'$ para o estudo da dinâmica do feixe, fazendo-se $x' = p_x/p_z$ e $y' = p_y/p_z$.

O movimento do centro de massa do feixe é descrito pelos primeiros momentos $\langle x \rangle$, $\langle x' \rangle$, $\langle y \rangle$ e $\langle y' \rangle$ da distribuição de partículas $f(x, x', y, y')$, que são definidos estatisticamente por:

$$\langle x \rangle = \iiint\!\!\!\int x f(x, x', y, y') dx dx' dy dy' \quad (1.6)$$

sendo que a função f é normalizada, ou seja, a sua integral sobre todo o espaço de fases é unitária. De forma similar, define-se os outros três momentos $\langle x' \rangle$, $\langle y \rangle$ e $\langle y' \rangle$.

Outra informação importante sobre o feixe está contida nos segundos momentos $\langle x^2 \rangle$, $\langle xx' \rangle$, $\langle xy \rangle$, $\langle xy' \rangle$, $\langle x'^2 \rangle$, $\langle x'y \rangle$, $\langle x'y' \rangle$, $\langle y^2 \rangle$, $\langle yy' \rangle$ e $\langle y'^2 \rangle$ da distribuição de partículas, que são definidos estatisticamente de maneira similar por:

$$\langle x^2 \rangle = \iiint\!\!\!\int x^2 f(x, x', y, y') dx dx' dy dy' \quad (1.7)$$

$$\langle xx' \rangle = \iiint\!\!\!\int xx' f(x, x', y, y') dx dx' dy dy' \quad (1.8)$$

e assim por diante para os outras médias similares. O valor raiz quadrático médio, do inglês *root-mean-square* (ou *rms*) de quantidades como essas é definido por:

$$x_{rms} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} \quad . \quad (1.9)$$

1.6 Emitância de um feixe de partículas

A qualidade de um feixe pode ser quantitativamente descrita pela sua *emitância* ϵ , quantidade estatística que está diretamente relacionada com a área da projeção bidimensional do volume do hiperelipsóide ocupado pelas partículas do feixe no espaço de fases hexadimensional sobre os planos $x \times p_x$, $y \times p_y$ e $z \times p_z$ (área = $\pi\epsilon$), e define-se assim, respectivamente uma emitância para cada plano, a saber: ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z . As primeiras duas são as emitâncias transversais, normalmente medidas em $\text{mm} \cdot \text{mrad}$, uma vez que x' e y' são usados em vez de p_x e p_y ; a última, a chamada emitância longitudinal (ou axial), é definida apenas para feixes pulsados (*bunched beams*), que não serão estudados nesse trabalho, é normalmente medida na unidade $\text{ns} \cdot \text{keV}$ ou $\text{deg} \cdot \text{keV}$ [27].

Na maioria dos casos, uma elipse pode ser usada como contorno aproximado da emitância de um feixe, de forma que a área dessa elipse representa a emitância completa ϵ_{full} do feixe naquele plano, e o seu tamanho é de fato determinado pelas partículas mais externas existentes na distribuição de cargas do feixe [64].

Se forem considerados os efeitos das componentes não lineares das forças externas e das auto-forças que atuam sobre as partículas do feixe, o caso mais realístico e geral, então a projeção do espaço de fases pode assumir uma forma complexa [34]. Isto ocorre quando algumas partículas se desviam muito do centro do feixe (o chamado núcleo ou, em inglês, *core*) formando um “halo” rarefeito em torno do centro do feixe. Neste caso, a emitância pode ser definida como sendo $1/\pi$ vezes a área delimitada por um contorno de mesma densidade (*isodensity surface*, em inglês) que contenha a maior parte das partículas, por exemplo, 95% ou 99% das partículas [18, 52]. Em outros casos, mais simples e prático, pode-se considerar a área da menor elipse que inclui a maior parte das partículas, por exemplo, 95% ou 99% do total de partículas, indicando-se essas emitâncias como $\epsilon_{full,95\%}$ e $\epsilon_{full,99\%}$, respectivamente, que podem ser muito menores do que a emitância total ϵ_{full} , quando ocorre a presença do halo.

A quantidade estatística mais utilizada para caracterizar a distribuição de cargas de um feixe,

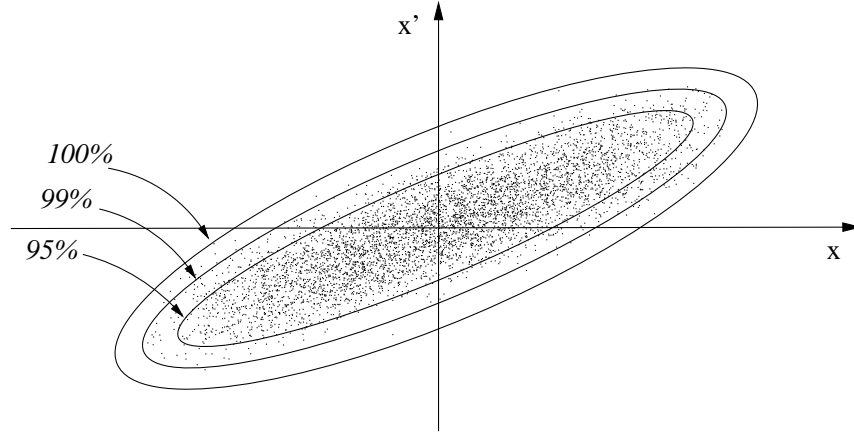


Figura 1.3: *Elipses de emitância completa sobre o plano $x \times x'$. São mostradas as menores elipses que incluem 100%, 99% e 95% das partículas de um feixe típico.*

e também para a comparação de um feixe com outro, é a emitância RMS, definida por Sacherer [62, 32] a partir dos segundos momentos da função de distribuição f . Os valores RMS das emitâncias horizontal e vertical são estatisticamente definidas pelas relações:

$$\epsilon_{x,rms} = (\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2)^{1/2} \quad (1.10)$$

$$\epsilon_{y,rms} = (\langle y^2 \rangle \langle y'^2 \rangle - \langle yy' \rangle^2)^{1/2} \quad (1.11)$$

Por exemplo, se considerarmos um feixe frio, ou seja, com $x' = y' = 0$ para todas as suas partículas, as projeções do seu espaço de fases sobre os planos $x \times x'$ e $y \times y'$ serão inicialmente linhas retas, e ambas as emitâncias $\epsilon_{x,rms}$ e $\epsilon_{y,rms}$ serão nulas. Esse resultado pode ser obtido diretamente das expressões acima.

Capítulo 2

A dinâmica de feixes

O conhecimento básico das propriedades de equilíbrio e estabilidade no transporte de feixes intensos de partículas carregadas focalizados magneticamente é fundamental para o projeto e desenvolvimento de aceleradores de alta energia e dispositivos eletrônicos a vácuo. Tais dispositivos são necessários em várias áreas da pesquisa básica, tais como desenvolvimento de novos biomateriais [38, 63], comunicação, medicina, fusão de íons pesados, por exemplo [6, 40].

Neste sentido, um assunto de interesse recente é a investigação da dinâmica de feixes que apresentam um pequeno desalinhamento axial com relação ao eixo de simetria de um campo magnético focalizador do tipo solenoidal [24, 47, 13, 25]. Pequenos desvios na direção de injeção do feixe e o campo focalizador podem dar origem a um movimento fora de eixo que é potencialmente perigoso para o sistema de transporte do feixe, no caso do surgimento de instabilidades ou caos [44, 35], pois essa assimetria pode levar a colisões entre as partículas carregadas e a parede condutora do tubo que envolve o feixe, causando perda de intensidade, erosão, contaminação e ativação das paredes [30], e sobrecarga em fontes de microondas de alta potência [1].

Para o caso particular de feixes não-relativísticos e com seção reta circular foi mostrado que, apesar da ocorrência de uma órbita instável na dinâmica do centróide com pequeno desvio

axial [24], esta órbita sozinha não pode ser responsável pelo deslocamento do feixe em direção à parede interna do tubo condutor [13]. Também é sabido que não existe nenhum acoplamento entre as oscilações do centróide do feixe em torno do eixo de simetria do tubo e a dinâmica das partículas do feixe, não havendo portanto transferência de energia entre o movimento coletivo do feixe, representado pelo seu centróide, e o movimento individual das partículas, responsável pela termalização e degradação da qualidade global do feixe.

Estes resultados indicam que o transporte de feixes levemente fora de eixo não determina nenhuma limitação severa ao transporte desse tipo de feixes. Porém, se considerarmos feixes se propagando com velocidades relativísticas, esse cenário pode mudar significativamente [4].

Para feixes relativísticos, a força de repulsão eletrostática entre as partículas carregadas que constituem o feixe é parcialmente bloqueada pela força magnética atrativa devido as correntes geradas pelas próprias partículas do feixe [3, 2].

Contudo esse bloqueio de força não ocorre para a interação entre as partículas e suas cargas imagens virtuais, *produzidas* pela presença da parede condutora do tubo, porque o condutor é completamente *permeável* ao campo magnético gerado pela corrente do feixe. Como consequência imediata desse fato, o efeito líquido devido à presença do tubo condutor é amplificado para feixes relativísticos. Isto ocorre não apenas para feixes contínuos *ideais*, mas mais geralmente, sempre que a duração do pulso do feixe é longa quando comparada com o tempo de difusão magnética $\tau_m \sim \mu\sigma d^2/c^2$ (em unidades Gaussianas), onde μ , σ , e d são, respectivamente, a permeabilidade magnética, a condutividade elétrica e a espessura da parede condutora, e c é a velocidade da luz no vácuo [60, 57]. Uma discussão mais detalhada e a demonstração dessa constante de tempo é feita no Apêndice A.2.

2.1 O feixe estudado

Nesta seção investigamos a dinâmica seguida por um feixe relativístico cujo centróide foi deslocado do eixo do tubo condutor, por um pequeno desvio lateral inicial.

Em particular, mostramos que dependendo do feixe e dos parâmetros que definem o canal de focalização do sistema, basicamente formado pelo tubo condutor e o campo magnético solenoidal externo, o eixo de simetria do feixe pode se tornar instável devido à presença da parede condutora do tubo confinador [41].

Neste caso, qualquer desalinhamento ou pequena assimetria na injeção do feixe, condição inicial, poderá levar à perda do feixe, devido à sua colisão com a parede condutora.

Mostramos que essa instabilidade impõe uma limitação fundamental sobre a área efetiva que um feixe em equilíbrio pode ocupar sobre a seção reta do interior do tubo condutor.

Consideramos um feixe muito longo, quase contínuo, se propagando com uma velocidade axial constante $\beta_b c$ ao longo da parte interna de um tubo condutor cilíndrico circular aterrado, de raio interno r_w . O feixe é focalizado por um campo magnético solenoidal de magnitude B_z , gerado externamente. Tanto o campo quanto o tubo cilíndrico condutor são ambos alinhados sobre o eixo Z , conforme mostra a Figura 2.1.

Para descrever o movimento uniforme do feixe ao longo do eixo Z , definimos uma coordenada longitudinal $s = \beta_b c t$ que faz o papel do tempo físico para o sistema, e investigamos a evolução transversal do feixe como uma função de s .

Para uma seção reta do feixe, a distribuição das partículas é descrita por uma função densidade $n_b(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ com simetria axial em relação ao seu centróide que está localizado em $\mathbf{r}_0(s) = \langle \mathbf{r} \rangle$, onde \mathbf{r} é o vetor de posição de cada partícula sobre a seção transversal do feixe, medido a partir do centro do tubo condutor e $\langle \rangle$ significa a média sobre a distribuição. Uma vez que estamos interessados na estabilidade do movimento do centróide do feixe, consideramos inicialmente que

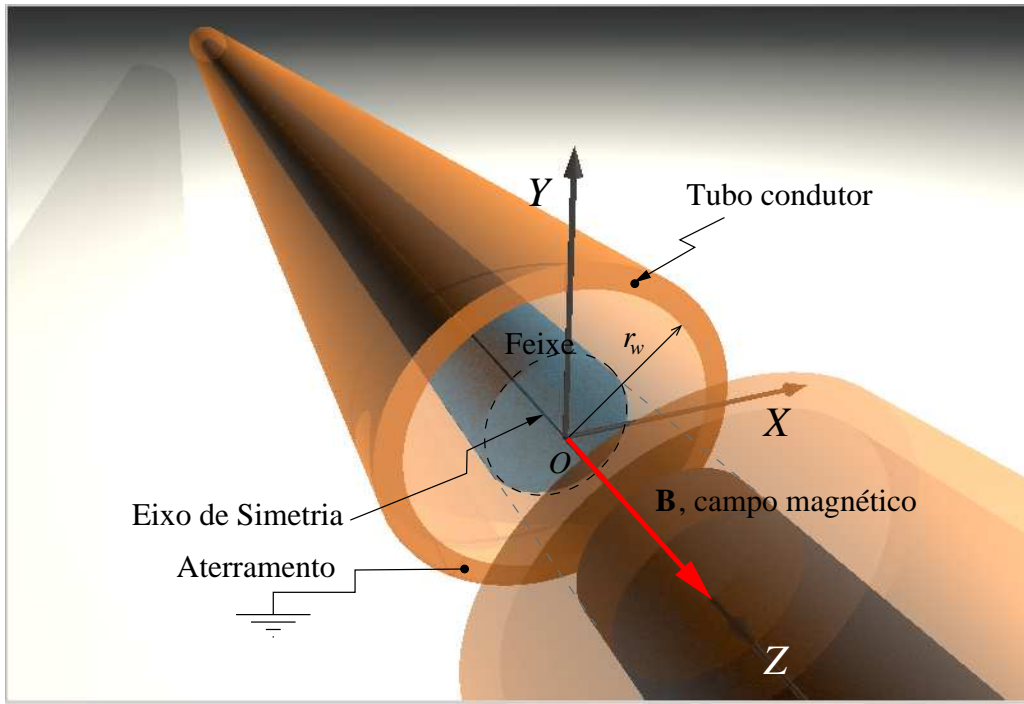


Figura 2.1: O desenho esquemático simplificado do feixe estudado, em corte, mostrando o interior do canal focalizador com suas partes principais identificadas: o referencial do laboratório, o tubo condutor, o campo magnético solenoidal na direção do eixo Z, e o feixe de partículas carregadas ou íons.

o feixe está levemente fora de centro, ou seja, o eixo de simetria do feixe possui um pequeno desvio lateral em relação ao eixo Z, que é o eixo de simetria do sistema tubo condutor. Ver Figura 2.2.

Observado a partir do referencial de Larmor do sistema [9], a equação de movimento para uma partícula do feixe pode ser escrita como

$$\mathbf{r}'' = -\sigma_0^2 \mathbf{r} + \nabla\psi^{dir} + \nabla\psi^{img} , \quad (2.1)$$

onde a linha “'” indica derivação com relação à coordenada s , e ∇ opera sobre as coordenadas transversais apenas. O primeiro termo do lado direito da Eq. (2.1) representa a força magnética que focaliza o feixe, e $\sigma_0 = qB_z/2\gamma_b\beta_b mc^2$ é o avanço de fase para um deslocamento unitário da coordenada s , o que define a *intensidade do campo focalizador*; q , m e $\gamma_b = (1 - \beta_b^2)^{-1/2}$ são, respectivamente, a carga, a massa e o fator relativístico das partículas do feixe. O segundo termo corresponde à força de interação direta com as outras partículas do feixe, e não inclui nenhum efeito da parede. Este termo leva em conta apenas os termos de autointeração elétrica

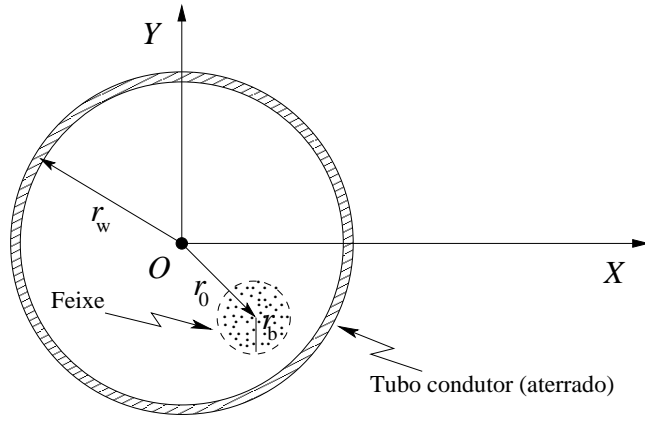


Figura 2.2: Vista da seção reta (corte transversal) do tubo condutor de raio r_w transportando um feixe de partículas com raio r_b , cujo centróide está deslocado de uma distância r_0 do eixo do tubo.

e magnética entre as partículas do feixe. O autopotencial ψ^{dir} é determinado pela equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi^{dir} = -\frac{2\pi K}{N_b} n_b(\mathbf{r}, s) \quad (2.2)$$

na ausência da parede do tubo, onde $K = 2q^2 N_b / \gamma_b^3 \beta_b^2 m c^2$ é a *perveância* do feixe, quantidade essa que mede a autointeração sofrida pela distribuição espacial da carga do feixe, e a constante $N_b = \int n_b d\mathbf{r}$ é o número de partículas por unidade de comprimento axial, ou seja, ao longo da direção principal do feixe.

Finalmente, o terceiro termo da equação é devido às cargas imagem *geradas* pela presença do tubo condutor que envolve o feixe. Uma vez resolvida a Eq. (2.2) e encontrado ψ^{dir} , o potencial ψ^{img} pode em geral ser determinado pelo *técnica da inversão* [56]. Contudo, na configuração do feixe analisada nesse estudo podemos obter ψ^{img} observando o fato de que as equipotenciais externas de uma distribuição de cargas com simetria axial (cilíndrica) são idênticas às equipotenciais de uma linha de cargas colocadas sobre o eixo de simetria, com mesma carga. Essa propriedade pode ser verificada diretamente a partir da lei de Gauss para o campo elétrico e considerações de simetria [21, 9].

Sendo assim, do ponto de vista do tubo condutor, o feixe se comporta como se fosse uma linha de cargas localizada em \mathbf{r}_0 , cuja carga imagem está localizada do lado de fora do tubo, em

$\mathbf{r}^{img} = (r_w/r_0)^2 \mathbf{r}_0$. O potencial-imagem então é dado por¹

$$\psi^{img}(\mathbf{r}, s) = \gamma_b^2 K \log \left| \mathbf{r} - \frac{r_w^2}{r_0^2} \mathbf{r}_0(s) \right|. \quad (2.3)$$

Note-se que a Eq. (2.3) é independente da forma específica da função de distribuição n_b , e é válida para qualquer valor de \mathbf{r}_0 , desde que a distribuição de carga seja axialmente simétrica em relação ao seu centróide. O fator γ_b^2 aparece na Eq. (2.3) precisamente porque o tubo condutor, uma vez aterrado, confina o autocampo elétrico gerado pelas cargas à região interna do tubo, o que não acontece com o autocampo magnético, que será detectado mesmo fora do tubo, ou seja, para a região $r > r_w$. No interior do tubo, para a interação direta, ocorre uma atenuação da força elétrica repulsiva causada pelo movimento de correntes paralelas que dá origem a uma força atrativa entre linhas de corrente. Como não existem correntes-imagem sobre o tubo condutor, o mesmo efeito não ocorre para a interação entre cargas e suas cargas-imagem, favorecendo então a desfocalização do feixe, uma vez que $\gamma_b^2 > 1$.

Multiplicando a Eq. (2.1) por n_b e integrando sobre a seção reta do feixe, obtemos uma equação de movimento para a evolução do seu centróide [8, 17]. Uma vez que estamos interessados na estabilidade do feixe sobre o eixo de simetria axial do sistema focalizador $r = 0$, consideramos apenas os termos lineares em \mathbf{r}_0 , e obtemos a equação

$$\mathbf{r}_0'' = \left(-\sigma_0^2 + \frac{\gamma_b^2 K}{r_w^2} \right) \mathbf{r}_0. \quad (2.4)$$

É importante a observação de que o valor médio da autointeração direta $\langle \nabla \psi^{dir} \rangle$ é exatamente nulo devido à conservação do momento linear das partículas do feixe, conforme mostrado na Ref. [47]. Como consequência direta desse fato, a dinâmica do centróide é independente da forma funcional específica de n_b , desde que preserve a simetria axial em relação ao seu centróide \mathbf{r}_0 . Da Eq. (2.4) é claro que sempre que

$$K > \frac{\sigma_0^2 r_w^2}{\gamma_b^2} \quad (2.5)$$

¹Veja-se Apêndice A.1 para a demonstração e discussão das propriedades do potencial elétrico do feixe dentro do tubo condutor.

o feixe se tornará *instável*, com o seu centróide se afastando indefinidamente do eixo de simetria do sistema focalizador [45, 54].

Na Ref. [60] uma condição análoga de estabilidade é obtida para a trajetória de uma única partícula localizada sob o centróide do feixe. Conforme a discussão apresentada nessa referência, a Eq. (2.4) é mais restritiva porque mostra que o feixe como um todo deverá se afastar do eixo de simetria do tubo condutor quando a condição de instabilidade for satisfeita. Em todo caso, como será mostrado a seguir, dependendo dos parâmetros que definem o feixe, esta condição pode nunca ser alcançada. Faz-se necessário ainda uma investigação sobre a medida do tamanho transversal do feixe de modo a determinar a relevância e aplicabilidade dessa instabilidade [65, 14].

Uma análise mais detalhada da dinâmica não-linear do centróide revela que o início da instabilidade é devido a uma bifurcação da solução de equilíbrio $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ causada por uma *colisão* com um *ponto fixo instável* já presente no caso não-relativístico [24, 13, 55]. Na Ref. [60] uma condição de estabilidade semelhante foi derivada para a trajetória de uma única partícula localizada na posição centróide. A este respeito, a Eq. 2.14 é mais rigorosa porque mostra que o feixe como um todo vai divergir do eixo do tubo de transporte quando a condição de instabilidade é satisfeita. Em qualquer caso, como será mostrado, dependendo dos parâmetros do feixe esta condição pode não ser alcançada. Precisamos ainda investigar também o tamanho transversal do feixe, a fim de determinar a relevância da instabilidade do seu centróide, o que faremos na seção seguinte.

2.2 O envelope do feixe

Tomando-se a média de Eq. (2.1) sobre a distribuição de partículas do feixe, obtemos uma equação para a evolução da sua centróide, que nesse caso será reescrita na forma:

$$\mathbf{r}'' = -\sigma_0^2 \mathbf{r} + \langle \nabla \psi^{dir} \rangle + \langle \nabla \psi^{img} \rangle . \quad (2.6)$$

Conforme os resultados apresentados na Ref. [47], por causa da conservação do *momentum* a média de auto-interação $\langle \nabla \psi^{dir} \rangle$ se anula exatamente. Quanto à contribuição da interação com a carga induzida no condutor, calculamos a seguir explicitamente o termo $\langle \nabla \psi^{img} \rangle$.

O valor médio do termo de força devido à presença de cargas imagens é

$$\langle \nabla \psi^{img} \rangle = \frac{1}{N_b} \int (\nabla \psi^{img}) n_b(\mathbf{r}) d\mathbf{r} . \quad (2.7)$$

Por simplicidade e sem perda de generalidade, supomos que o deslocamento do centróide do feixe está sobre o eixo X , ou seja, $\mathbf{r}_0 = r_0 \hat{\mathbf{x}}$. Sendo assim, a carga imagem que descreve o efeito do condutor está também sobre esse mesmo eixo, na posição $\mathbf{r}^{img} = r^{img} \hat{\mathbf{x}}$, com $r^{img} \equiv r_w^2/r_0$. Então, podemos escrever a Eq. (2.7) em coordenadas cartesianas como

$$\langle \nabla \psi^{img} \rangle = \frac{\gamma_b^2 K}{N_b} \iint \frac{(x - r^{img}) \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}}}{(x - r^{img})^2 + y^2} n_b(x, y) dx dy , \quad (2.8)$$

com o auxílio da Eq. (2.3). Uma vez que assumimos que a distribuição de partículas do feixe é axialmente simétrica com relação ao seu centróide, é conveniente o uso de um sistema de coordenadas polares (ρ, ϕ) , com centro em \mathbf{r}_0 , definido por

$$x = r_0 + \rho \cos \phi , \quad (2.9)$$

$$y = \rho \sin \phi . \quad (2.10)$$

Pela simetria assumida, neste sistema de coordenadas a densidade do feixe é função da coordenada ρ apenas, ou seja, devemos ter que $n_b(\mathbf{r}) = n_b(\rho)$, e então podemos escrever

$$\langle \nabla \psi^{img} \rangle = \frac{\gamma_b^2 K}{N_b} \int n_b(\rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{(\rho \cos \phi - a) \hat{\mathbf{x}} + \rho \sin \phi \hat{\mathbf{y}}}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \phi} d\phi , \quad (2.11)$$

onde $a = r^{img} - r_0$ é a distância entre a carga imagem e o centróide do feixe. Fazendo a integração sobre ϕ obtemos diretamente

$$\langle \nabla \psi^{img} \rangle = -\frac{2\pi \gamma_b^2 K}{a N_b} \int n_b(\rho) \rho d\rho \hat{\mathbf{x}} \quad (2.12)$$

e como sabemos que $2\pi \int n_b(\rho) \rho d\rho = \int n_b(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, podemos simplificar a equação acima e escrever

$$\langle \nabla \psi^{img} \rangle = -\frac{\gamma_b^2 K}{a} \hat{\mathbf{x}}. \quad (2.13)$$

A Eq. (2.12) mostra que a interação entre o centróide do feixe e sua carga imagem é equivalente à força atrativa entre duas linhas infinitas paralelas de cargas de sinais contrários, uniformemente distribuídas ao longo dos seus comprimentos, separadas por uma distância a . Usando $r^{img} = r_w^2/r_0$ e $r_0 \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{r}_0$, podemos finalmente escrever

$$\langle \nabla \psi^{img} \rangle = -\left(\frac{\gamma_b^2 K}{r_w^2 - r_0^2} \right) \mathbf{r}_0. \quad (2.14)$$

O tamanho transversal efetivo do feixe pode ser medido a partir do *envelope* do feixe, definido como $r_b = [2\langle r^2 \rangle]^{1/2}$. Tomando a segunda derivada de r_b com relação à coordenada s e usando Eq. (2.1) obtemos uma equação para a evolução do envelope

$$r_b'' = -\sigma_0^2 r_b + \frac{\epsilon^2}{r_b^3} + \frac{2}{r_b} \langle \mathbf{r} \cdot \nabla \psi \rangle, \quad (2.15)$$

onde $\epsilon \equiv 2[\langle r^2 \rangle \langle r'^2 \rangle - \langle r r' \rangle^2]^{1/2}$ é a *emitância* do feixe e $\psi \equiv \psi^{dir} + \psi^{img}$. Em princípio é necessário que seja especificada a função de distribuição de carga transversal n_b a fim de se computar a contribuição da carga espacial $\langle \mathbf{r} \cdot \nabla \psi \rangle$ na Eq. (2.15). Contudo, com o uso da equação de Poisson (2.2) é possível a eliminação dessa dependência explícita de $n_b(\mathbf{r}, s)$ e se pode escrever [9] então

$$\langle \mathbf{r} \cdot \nabla \psi \rangle = -\frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} \left[\left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right]_{r=r_w} d\theta, \quad (2.16)$$

onde θ é a variável angular em coordenadas polares e a integração deve ser feita sobre a superfície interna do condutor, conforme indicado. Tendo em conta novamente o fato de que fora do feixe ele se comporta como uma linha de cargas e usando ψ^{img} dado na Eq. (2.3), podemos calcular explicitamente a integral e obter

$$\langle \mathbf{r} \cdot \nabla \psi \rangle = \frac{K}{2} \left(1 + \frac{2\gamma_b^2 r_0^2}{r_w^2 - r_0^2} \right). \quad (2.17)$$

A partir desse resultado, temos que o efeito global do tubo condutor sobre o feixe cujo centróide foi deslocado do seu eixo de simetria axial é o de aumentar a força efetiva devido à distribuição espacial de cargas, induzindo um possível aumento no tamanho transversal do feixe [22, 53, 23].

2.3 Condição de estabilidade

A Eq. (2.17) mostra que a dependência de $\langle \mathbf{r} \cdot \nabla \psi \rangle$ do centróide é, na mais baixa ordem de aproximação considerada, proporcional a $(r_0/r_w)^2$. Como estamos interessados na estabilidade de feixes cujo centróide se encontra levemente desviado do eixo axial do tubo condutor esta dependência pode ser desprezada, e finalmente a Eq. (2.15) pode ser escrita como

$$r_b'' = -\sigma_0^2 r_b + \frac{\epsilon^2}{r_b^3} + \frac{K}{r_b}, \quad (2.18)$$

cuja forma é aquela obtida para um feixe circular. Isto mostra que a consideração inicial imposta sobre a simetria axial de $n_b(\mathbf{r}, s)$ é apropriada.

De fato, o desacoplamento observado entre as dinâmicas do centróide e do envelope do feixe é corroborado pelos resultados obtidos nas simulações numéricas autoconsistentes que mostram que, mesmo no caso de feixes apresentando oscilações de centróide de grande amplitude, o envelope é notadamente insensível a esse tipo de movimento [13]. Da Eq. (2.18) podemos determinar um estado de equilíbrio no qual o envelope do feixe permanece constante à medida que o feixe se propaga ao longo do tubo — o chamado *feixe casado*. A observância da condição de feixe casado é interessante para o transporte de feixes em dispositivos reais, uma vez que previne o crescimento da emitância, a formação de *halo* e conseqüentemente a perda de partículas do feixe [6, 9, 13].

Fazendo-se $r_b'' = 0$ na Eq. (2.18), que é a condição para se obter um feixe casado, isolamos a perveância e obtemos

$$K = (\sigma_0^2 r_b^4 - \epsilon^2)/r_b^2 . \quad (2.19)$$

Agora, lembrando que o centróide do feixe se torna instável quando $\gamma_b^2 K > \sigma_0^2 r_w^2$, podemos definir um *raio crítico* para o envelope como

$$r_b^* = \frac{r_w}{2^{1/2}} \left[\frac{1}{\gamma_b^2} + \left(\frac{1}{\gamma_b^4} + \frac{4\epsilon^2}{\sigma_0^2 r_w^4} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (2.20)$$

acima do qual um feixe em equilíbrio perde a sua estabilidade, e começa a se afastar indefinidamente do eixo de simetria do tubo condutor. É importante observar que uma vez que os efeitos de cargas imagens introduzidos por ψ^{img} na Eq. (2.3) são independentes da forma específica de n_b e, conseqüentemente, do tamanho transversal do feixe, pode parecer contraditório o fato de que a presença da parede condutora possa impor um raio crítico de envelope para o transporte do feixe. Contudo, a condição de “casamento” para o feixe expressa na Eq. (2.19) impõe vínculos entre os parâmetros do sistema, que podem ser imediatamente usados para transformar a perveância crítica da Eq. (2.5) no critério acima de estabilidade para o envelope do feixe.

A Fig. 2.3, mostra o raio normalizado do envelope r_b^*/r_w como função do parâmetro β_b para dois valores distintos de emitância: um feixe completamente frio (*fully space-charge dominated beam*) com $\epsilon = 0$ (curva sólida) e um feixe com emitância finita $\epsilon = 0.3 \sigma_0 r_w^2$ (curva tracejada). A região abaixo de cada curva corresponde à propagação estável do feixe para cada valor dado de emitância, enquanto que para valores de envelopes acima da curva, indica a propagação instável de feixes com centróides fora do eixo de simetria axial do tubo condutor.

Fica claro a partir da Fig. 2.3 que para feixes de emitância mais altas a curva de r_b^*/r_w tende a subir, diminuindo o tamanho da região de instabilidade correspondente nesse espaço de parâmetros. De fato, a inspeção direta da Eq. (2.20) revela que feixes relativamente tênues com $\epsilon > \sigma_0 r_w^2$ não ficam sujeitos a esse tipo de instabilidade, independentemente do valor de β_b . Uma aparente inconsistência pode surgir aqui, já que para o feixe com emitância inicial maior do que zero (feixe quente) a região de estabilidade parece aumentar, e não diminuir, como se poderia esperar, já que para um feixe quente a dispersão inicial de velocidades e posições é maior do que no caso frio, conforme está ilustrado na Fig. 3.4. Para elucidar essa aparente

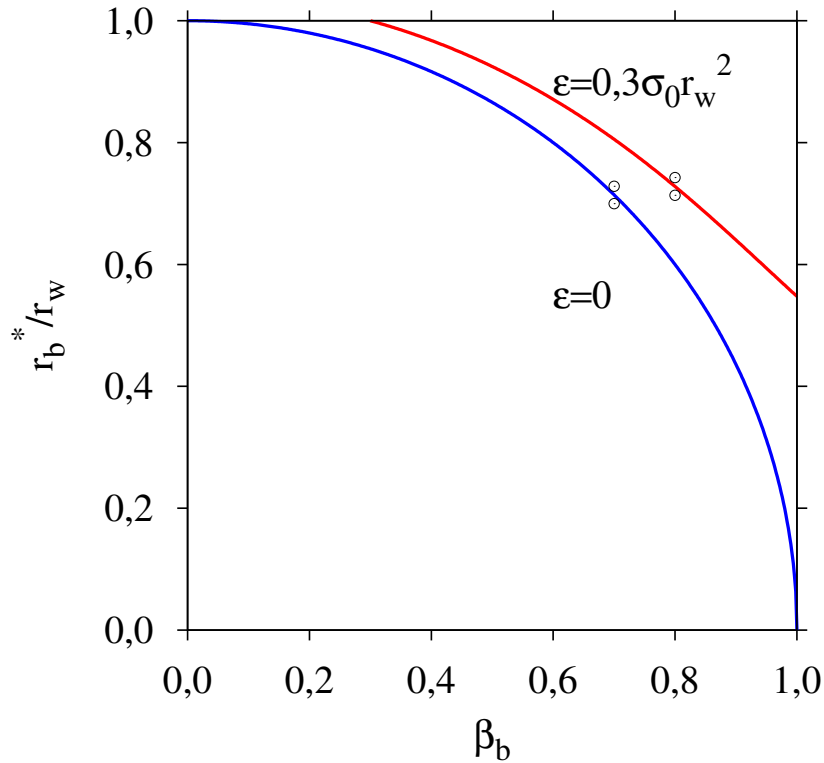


Figura 2.3: Raio normalizado crítico para o envelope do feixe relativístico em função de β_b para $\epsilon = 0$ (linha azul) e $\epsilon = 0,3\sigma_0 r_w^2$ (linha vermelha). Os quatro pontos marcados sobre o gráfico serão utilizados para teste em simulações numéricas discutidas no Cap. 3, e foram escolhidos logo acima e abaixo das curvas mostradas, para $\beta_b = 0,7$ e $\beta_b = 0,8$, respectivamente.

inconsistência, temos que inspecionar melhor a Eq. 2.19, a fim de compararmos a estabilidade para dois feixes com mesmo raio de envelope r_b e mesma perveância K , lembrando que a perveância é proporcional à carga total do feixe, por unidade de comprimento axial. Segundo a Eq. 2.19, se aumentarmos a emitância ϵ de 0 para $0.3\sigma_0 r_w^2$, por exemplo, mantendo-se fixa a perveância K , teremos que aumentar a constante de focalização σ_0 , ou seja, teremos de aumentar o campo magnético focalizador externo aplicado ao feixe. Com esse aumento do campo externo necessário para confinar um feixe de mesma carga e raio casado, porém com emitância maior do que zero, acabamos por aumentar a estabilidade do feixe quente, e o raio crítico r_b^* nesse caso se torna maior para o feixe quente. Da Eq. 2.5 podemos concluir que a razão crítica de ocupação do feixe dentro do tubo r_b^*/r_w aumenta com a emitância ϵ , desde que sejam mantido constante o produto $K\gamma_b^2 > \sigma_0^2 r_w^2$, já que a constante de focalização σ_0 deve ser maior para um feixe de maior emitância.

A Fig. 2.3 também mostra que para feixes não-relativísticos com $\beta_b \rightarrow 0$, o transporte é sempre estável, o que está de acordo com a análise anterior que mostrou que esse tipo de instabilidade é irrelevante para esse tipo de feixe [13]. Contudo, à medida em que β_b cresce, a região de instabilidade é atingida para certos valores de r_b , o que impõe severas limitações sobre a fração máxima da área interna do tubo condutor que poderá ser ocupada pelo feixe. Em particular, à medida que se vai em direção de feixes cada vez mais intensos e relativísticos fazendo-se $\epsilon \rightarrow 0$ e $\beta_b \rightarrow 1$, a instabilidade está virtualmente sempre presente, independentemente do tamanho transversal do feixe.

Capítulo 3

Simulações numéricas

3.1 Cálculo da força

Do ponto de vista físico macroscópico, as partículas constituintes do feixe (ou íons) podem ser consideradas pontuais, ou seja, sem dimensão espacial. No modelo computacional usado para as simulações numéricas auto-consistentes do feixe porém, introduzimos um tamanho finito r_P para o raio das linhas de carga ou “partículas”, chamadas então de macropartículas, considerando que r_P seja macroscopicamente pequeno, porém microscopicamente grande, de modo que r_P seja ainda muito maior do que o raio dos íons constituintes do feixe de cargas considerado. Nas simulações feitas nesse trabalho, utilizamos um valor de r_P da ordem de 1% do valor de r_w , valor que consideramos pequeno o suficiente para que os resultados obtidos sejam independentes do valor de r_P . Com a introdução dessa dimensão r_P conseguimos *suavizar* a força de repulsão eletrostática entre as linhas de carga (macropartículas) nas curtas distâncias, já que originalmente a intensidade dessa força depende do inverso da distância r entre elas, isto é, $F(r) = 1/r$.

Nessa região de curtas distâncias $0 \leq r \leq 2r_P$, definimos uma nova forma funcional $\tilde{F}(r)$ para a força *suavizada*, impondo a continuidade das funções $F(r)$ e $\tilde{F}(r)$ e das suas derivadas no

ponto $r = 2r_P$, e fazendo também a força $\tilde{F}(r)$ se anular na origem ($r = 0$). Usamos uma forma parabólica simples $\tilde{F}(r) = ar^2 + br + c$ para modelar a força suavizada e obtemos os parâmetros de ajuste $\{a = -1/4r_P^3, b=3/4r_P^2, c = 0\}$, que nos permite escrever

$$\tilde{F}(r) = \begin{cases} r(3r_P - r)/4r_P^3 & , 0 \leq r < 2r_P \\ 1/r & , r \geq 2r_P \end{cases} \quad (3.1)$$

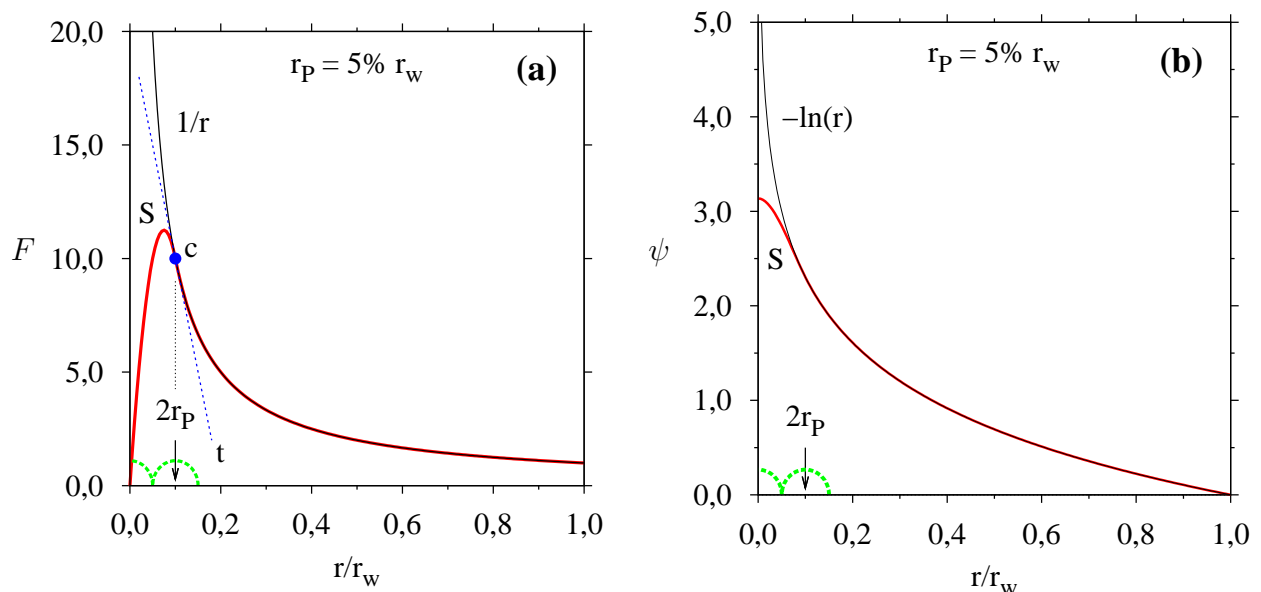


Figura 3.1: A força $\tilde{F}(r)$ suavizada (S – linha vermelha), comparada com a força exata $F(r) = 1/r$ (linha preta), em função da taxa de ocupação do feixe dentro do tubo condutor r/r_w . A continuidade da força e da sua derivada (t) é mantida no ponto c de transição das funções exata e suavizada (a). O potencial eletrostático ψ (linha vermelha), correspondente à força suavizada, onde definimos $\psi|_{r=r_w} = 0$ (b). Em ambos os gráficos usamos $r_P = 5\% r_w$, para ilustração das funções.

Do ponto de vista computacional, a força suavizada é preferível para a integração numérica, pois evita o crescimento indefinido da força próximo à origem $r = 0$, o que tornaria o processo de integração extremamente lento no caso de aproximação de duas partículas apenas, já que a precisão numérica global é a fim de controlar tanto o erro absoluto como o relativo nas posições e velocidades de todas as partículas da simulação. Se apenas uma das forças tiver uma intensidade muito grande, e puder crescer indefinidamente como no modelo exato onde $F(r) = 1/r$, o passo de tempo h para a integração numérica será muito pequeno, e tendendo a zero, o que ocasiona a lentidão na simulação da dinâmica do feixe.

Na Fig. 3.1 mostramos o gráfico comparado da força exata $F(r)$ e da força suavizada $\tilde{F}(r)$ próximo à origem $r = 0$. Veja-se a Figura 3.1(a). Nas simulações iniciais, utilizamos um valor numérico para o raio das macropartículas da ordem de 5% do raio do tubo condutor, ou seja, $r_P = 5\% r_w$. Para essa escolha de r_P observamos a presença de um pequeno efeito colateral sobre a visualização das macropartículas do feixe, no espaço real XY , onde identificamos a formação de pequenos aglomerados (*clusters*) de macropartículas que logo a seguir desaparecem, num processo aleatório no espaço e no tempo, sobre toda a seção transversal do feixe. Através de testes numéricos observamos que para valores de $r_P \leq 2\% r_w$ esse efeito desaparece, e os resultados finais das simulações foram feitos então todos com $r_P = 2\% r_w$, e nenhuma outra dependência relevante desse parâmetro foi observada para os resultados finais obtidos e discutidos a seguir.

Para a dinâmica transversal do feixe usamos duas coordenadas para a localização de cada partícula, e escrevemos o vetor de posição da i -ésima partícula na forma $\mathbf{r}_i = x_i \hat{\mathbf{x}} + y_i \hat{\mathbf{y}}$, da forma usual, e para o cálculo da força elétrica resultante sobre essa i -ésima partícula temos que computar e somar vetorialmente todas as contribuições das interações desta com todas as outras partículas, ou seja,

$$\mathbf{F}_i^{dir} = \sum_{j \neq i, j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{dir} = \sum_{j \neq i, j=1}^N \frac{\mathbf{u}_{ij}}{r_{ij}} \quad (3.2)$$

onde r_{ij} é a distância entre as partículas e \mathbf{u}_{ij} um vetor unitário na direção da linha que une as posições das cargas, no sentido da posição da partícula j para a partícula i , já que a força é repulsiva entre cargas de mesmo sinal.

Explicitamente escrevemos esse somatório de forças na forma

$$\mathbf{F}_i^{dir} = \sum_{j \neq i, j=1}^N \frac{(x_j - x_i) \hat{\mathbf{x}} + (y_j - y_i) \hat{\mathbf{y}}}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \quad (3.3)$$

onde usamos a base *cartesiana* usual de vetores ortonormais $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}\}$.

O cálculo desse somatório é feito para todas as N partículas do feixe, e é justamente a parte mais demorada da simulação, cujo custo computacional é do tipo $\mathcal{O}(N^2)$. Mesmo usando-se a

propriedade de simetria

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (3.4)$$

que permite a redução do cálculo à metade, ainda temos um custo da ordem $\mathcal{O}(N^2/2)$, que ainda assim cresce muito rapidamente com N . Esse crescimento quadrático com N do número de termos a somar no cálculo da força direta acaba impondo um limite prático no número de partículas N a ser utilizado, dependendo do *hardware* disponível para a computação numérica. Note-se que todos os somatórios de forças deverão ser recalculados a cada passo de tempo infinitesimal usado pelo integrador para o cálculo das novas posições e velocidades de todas as partículas do feixe.

De forma similar, temos que calcular as forças entre as partículas do feixe e as cargas-imagem induzidas pela presença do tubo condutor, pelos somatórios de forças agora do tipo atrativa sobre as partículas do feixe, com

$$\mathbf{F}_i^{img} = \sum_{j \neq i, j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{img} = \sum_{j \neq i, j=1}^N \frac{\mathbf{u}_{ij}^{img}}{r_{ij}^{img}} \quad (3.5)$$

feito agora sobre todos os pares formados pela i -ésima carga e a j -ésima carga-imagem, lembrando que a posição da j -ésima carga-imagem é dada por

$$\mathbf{r}_j^{img} = r_w^2 \left[\frac{x_j \hat{\mathbf{x}} + y_j \hat{\mathbf{y}}}{x_j^2 + y_j^2} \right] \equiv x_j^{img} \hat{\mathbf{x}} + y_j^{img} \hat{\mathbf{y}} \quad (3.6)$$

onde r_w é o raio interno do tubo condutor. Finalmente, achados os vetores de posição das cargas-imagem, o somatório acima da Eq. 3.5 é calculado de forma análoga ao somatório de forças da Eq. 3.3, pelo somatório

$$\mathbf{F}_i^{img} = - \sum_{j \neq i, j=1}^N \frac{(x_j^{img} - x_i) \hat{\mathbf{x}} + (y_j^{img} - y_i) \hat{\mathbf{y}}}{(x_j^{img} - x_i)^2 + (y_j^{img} - y_i)^2} . \quad (3.7)$$

A força total final sobre cada partícula i pode ser escrita então como

$$\mathbf{F}_i^{tot} = \sigma_0 \mathbf{r}_i + \frac{K}{N} (\mathbf{F}_i + \gamma^2 \mathbf{F}'_i) \quad (3.8)$$

onde $K = r_b^2 - \epsilon^2/r_b^2$. O primeiro termo do lado direito da equação acima representa a força magnética solenoidal de interação da carga com o campo magnético externo do sistema focalizador, e os somatórios são as força de interação direta e com as cargas-imagem, respectivamente.

3.2 Cálculo do potencial elétrico

Para essa nova força suavizada proposta na Eq. 3.1, temos que achar o potencial elétrico $V(r)$ correspondente, que será utilizado no cálculo da energia elétrica total do feixe, como uma das parcelas de sua energia total, uma das constantes de movimento fundamentais do sistema, já que é um sistema conservativo.

Com essa suavização da força para as curtas distância de interação entre as macropartículas usadas na simulação, temos que alterar também o potencial elétrico, que será obtido diretamente da nova força definida acima, na (Eq. (3.1)). Assumimos que o potencial nulo será obtido sobre o tubo condutor, ou seja, para $r = r_w$, e como usual $\tilde{F}(r) \equiv -\partial\tilde{\psi}(r)/\partial r$, donde obtemos o potencial suavizado

$$\tilde{\psi}(r) = \begin{cases} \frac{1}{12}(r/r_P)^3 - \frac{3}{8}(r/r_P)^2 + \frac{5}{6} - \ln(2r_P) & , 0 \leq r < 2r_P \\ -\ln(r) & , r \geq 2r_P \end{cases} \quad (3.9)$$

que será utilizado no cálculo da energia elétrica transversal do feixe. Veja-se a Figura 3.1 para a ilustração qualitativa das funções $\tilde{F}(r)$ e $\tilde{\psi}(r)$.

3.3 Cálculo da energia do feixe

Consideramos as contribuições da energia cinética T , da energia magnética V_m de interação do feixe com o campo magnético solenoidal, da energia elétrica direta V^{dir} entre as partículas do feixe também da contribuição V^{img} da energia elétrica de interação entre as cargas com suas cargas-imagens para escrever a energia total média por partícula E do feixe como

$$E = T + V_m + V^{dir} + V^{img} \quad (3.10)$$

onde cada termo de energia é dado por

$$T = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (3.11)$$

$$V_m = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (x^2 + y^2) \quad (3.12)$$

$$V^{dir} = \frac{K}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \psi(r_{ij}) \quad (3.13)$$

$$V^{img} = -\frac{\gamma^2 K}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi(r_{ij}^{img}) \quad (3.14)$$

$$(3.15)$$

onde o sinal negativo no último somatório indica o caráter atrativo da força entre as partículas do feixe e suas cargas-imagem. Essa definição de energia média por partícula é bastante útil, pois não irá depender de número total de partículas N do feixe, desde que N seja suficientemente grande, e em geral, basta que $N \geq 1000$.

3.4 Distribuição *waterbag*

Para a simulação da dinâmica de um feixe de partículas é fundamental a definição de uma função de distribuição inicial para as posições e velocidades de todas as partículas do feixe. Normalmente descrita por uma função contínua $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t = 0)$, uma função densidade de probabilidade definida sobre todo o espaço de fases $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, é utilizada para modelar um feixe como um fluido de cargas, e cuja descrição teórica é feita pela equação de Vlasov-Maxwell [60]. Para fins de simulação numérico-computacional de um tal feixe, utilizamos essa mesma função para gerar uma amostra suficientemente grande com N macropartículas, discretizando-se assim o fluido de cargas associado ao feixe em um conjunto finito de partículas, cuja dinâmica pode ser simulada computacionalmente. Ou seja, definimos uma função discreta através de funções delta de Dirac

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^N \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)] \quad (3.16)$$

para localizar as partículas nas coordenadas $(\mathbf{r}_i(t), \mathbf{v}_i(t))$, para $i = 1, 2, 3, \dots, N$, e em qualquer instante de tempo t .

O tempo físico contínuo t também será discretizado numa sequência de valores discretos, tomados a intervalos Δt infinitesimais, a fim de simular e acompanhar a cada um desses pequenos intervalos como se dá a evolução do feixe através do tempo, o que é feito pela inspeção do seu espaço de fases e como ele evolui através do conjunto de pontos que nele representam as partículas do feixe. Esperamos que esse conjunto de partículas e sua dinâmica correspondente representem cada vez melhor o feixe ideal original, a medida que N se torne cada vez maior e os intervalos de tempo Δt cada vez menores, tornando a simulação exata no limite $N \rightarrow \infty$ e $\Delta t \rightarrow 0$. Assumimos que a média dos pontos assim definidos sobre o espaço de fases corresponda à distribuição contínua original, ou seja

$$\langle N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (3.17)$$

nesse limite.

A distribuição auto-consistente mais simples obtida como uma solução da equação de Vlasov-Maxwell é a distribuição de Kapchinskij e Vladimirkij [31, 26], a chamada “distribuição K-V”.

Em simulações um pouco mais realistas, utilizamos uma distribuição inicial onde as energias iniciais das partículas podem assumir valores dentro de um intervalo contínuo, desde zero até um valor máximo E_f , de modo que o feixe é inicializado termicamente, já que possui uma distribuição de velocidades que se assemelha à de um feixe real — a chamada distribuição *waterbag* [9].

Dizemos que um feixe de partículas é do tipo *waterbag*, quando a sua função de distribuição $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ é tal que a distribuição de energia sobre a seção transversal do feixe H_\perp é uniforme e definida num intervalo finito, que vai desde zero até um valor máximo de corte T . Matematicamente essa propriedade é expressa pela função

$$f(H_\perp) = A \Theta \left(\frac{H_\perp}{T} \right) \quad (3.18)$$

onde $\Theta(x) = H(x) - H(x - 1)$ pode ser escrita com o uso da função H de Heavyside. Veja-se a Figura 3.2 para visualização comparada dessas funções.

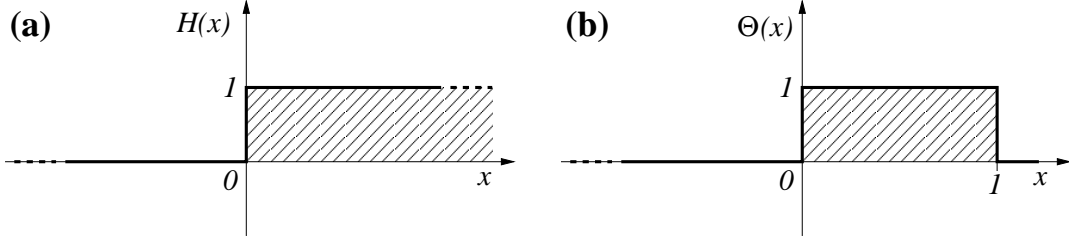


Figura 3.2: A função $H(r)$ de Heavyside (a) e a função $\Theta(r)$ que define uma distribuição uniforme não nula apenas no intervalo $[0, r_b]$ (b).

Para uma partícula do feixe, podemos escrever a função hamiltoniana transversal, no referencial de Larmor, como

$$H_{\perp} = \frac{p_{\perp}^2}{2} + \frac{r^2}{2} + \psi^{auto} \quad (3.19)$$

onde p_{\perp} e r são os módulos de seu momento linear transversal e da sua posição \mathbf{r} , respectivamente, e ψ^{auto} é o potencial de interação auto-consistente, que inclui as interações da partícula com os campos externos e as auto-interações com o próprio feixe e as cargas induzidas no tubo condutor.

Para a obtenção da densidade radial de partícula $n_b(r)$ para um feixe com simetria axial, temos que integrar a função $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f(r, \theta, p_r, p_{\theta})$ sobre os momentos p_r e p_{θ} e, por simetria, também sobre a coordenada angular θ

$$n_b(r) = A \int d\theta \iint dp_r dp_{\theta} \Theta\left(\frac{H_{\perp}}{T}\right) \quad (3.20)$$

e identificando o potencial $V(r) \equiv \frac{r^2}{2} + \psi^{auto}$ e reescrevendo as diferenciais dos momentos como $dp_r dp_{\theta} \equiv d\theta_p d(p_{\perp}^2/2)$ temos

$$n_b(r) = 2\pi A \int_0^{\infty} dx \Theta\left(\frac{x + V(r)}{T}\right) \quad (3.21)$$

e pelo resultado geral da integral da função $\Theta(x)$

$$\int_0^{\infty} dx \Theta\left(\frac{x + a}{b}\right) = b - a \quad (3.22)$$

e frente a uma troca de variáveis obtemos finalmente a densidade de partículas

$$n_b(r) = \begin{cases} \hat{n} \left(1 - \frac{V(r)}{T}\right) & , \quad V(r) < T \\ 0 & , \quad V(r) \geq T \end{cases} \quad (3.23)$$

onde definimos $\hat{n} = 2\pi AT$, que será determinado pela normalização do feixe.

Sabendo-se a densidade $n_b(r)$ de partículas, que é a própria densidade de carga por unidade de comprimento axial do feixe, podemos escrever a equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi^{auto} = -\frac{2\pi K}{N} n_b(r) \quad (3.24)$$

e, na forma explícita para o potencial $V(r)$ obtido acima, obtemos

$$\nabla^2 \psi^{auto} = -\frac{4\pi^2 AK}{N} \begin{cases} T \left(1 - \frac{V(r)}{T}\right) & , \quad V(r) < T \\ 0 & , \quad V(r) \geq T \end{cases} \quad (3.25)$$

cujas soluções singular e da sua parte homogênea pode ser feita pelo método de Bessel, donde obtemos o potencial auto-consistente

$$V(r) = I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) + T - I_0\left(\frac{r_{max}}{\lambda}\right) \quad (3.26)$$

onde I_0 é a função de Bessel modificada de primeira espécie, de ordem zero, $\lambda^2 = NT/2K\pi\hat{n}$, e r_{max} é o valor máximo da coordenada radial para as partículas do feixe. Como o valor máximo do potencial auto-consistente $V(r) = r^2/2 + \psi^{auto}$ será limitado pela energia total T . Observamos que tanto $V(r)$ como $n_b(r)$ podem ser escritos como funções dos parâmetros a determinar λ e r_{max} .

Finalmente escrevemos a função de distribuição radial de partículas

$$n_b(r) = \hat{n} \left\{ \frac{I_0(r_{max}/\lambda) - I_0(r/\lambda)}{I_0(r_{max}/\lambda) - 1} \right\} \quad (3.27)$$

para a distribuição *waterbag*.

A partir da equação acima (3.27) podemos gerar uma distribuição *waterbag* através de um método numérico simples. Determinamos os valores de λ e r_{max} , dados os valores da emitância

ϵ e do raio casado r_b do feixe que queremos estudar. Para isso, achamos a perveância inicial do feixe, que é dada por $K = r_b^2 - \epsilon^2/r_b^2$.

Como o raio casado do feixe é o dobro do próprio raio r.m.s., temos:

$$r_b^2 = 2r_{rms}^2 = 4\pi \int_0^{r_{max}} n_b(r) r^2 dr \quad (3.28)$$

que realizada a integral nos dá

$$r_b^2 = 2 \left[\frac{\{r_{max} (r_{max}^2 I_0(r_{max}/\lambda) - 4\lambda (2\lambda I_2(r_{max}/\lambda) + r_{max} I_3(r_{max}/\lambda)))\}}{2r_{max} I_0(r_{max}/\lambda) - 4\lambda I_1(r_{max}/\lambda)} \right] \quad (3.29)$$

e para a perveância temos

$$K = \frac{r_{max} \{r_{max} I_0(r_{max}/\lambda) - 2\lambda I_1(r_{max}/\lambda)\}}{2\lambda^2} \quad (3.30)$$

A solução numérica simultânea desses duas últimas equações implícitas permite a obtenção dos parâmetros r_{max} e λ , dados os parâmetros fundamentais do feixe, que são a emitância ϵ e o raio casado r_b .

Como podemos escrever $v_{max} = \sqrt{2T}$, e queremos encontrar pontos no espaço de fases do sistema que satisfaçam a função definida na Eq. (3.18), utilizamos o seguinte método numérico para a geração de uma distribuição *waterbag*. Pontos (r, v) aleatórios e com distribuição uniforme sobre o retângulo $[0, r_{max}] \times [-v_{max}, +v_{max}]$ são gerados numericamente e selecionamos quando satisfazem a desigualdade

$$\frac{1}{2} v^2 + V(r, r_{max}, \lambda) \leq T \quad (3.31)$$

ou seja, apenas os pontos internos da elipse definida pela equação acima são utilizados para a distribuição desejada. Esse procedimento é executado até que se tenha o número de partículas N desejado, e o conjunto de coordenadas (r, v) assim obtido será projetado sobre os planos $X - Y$, e $v_x - v_y$ a fim de gerar a condição inicial para a simulação do feixe. Nesta projeção utilizamos ainda dois ângulos $\theta_{1,2}$ aleatórios uniformemente obtidos no intervalo $[0, 2\pi)$, para

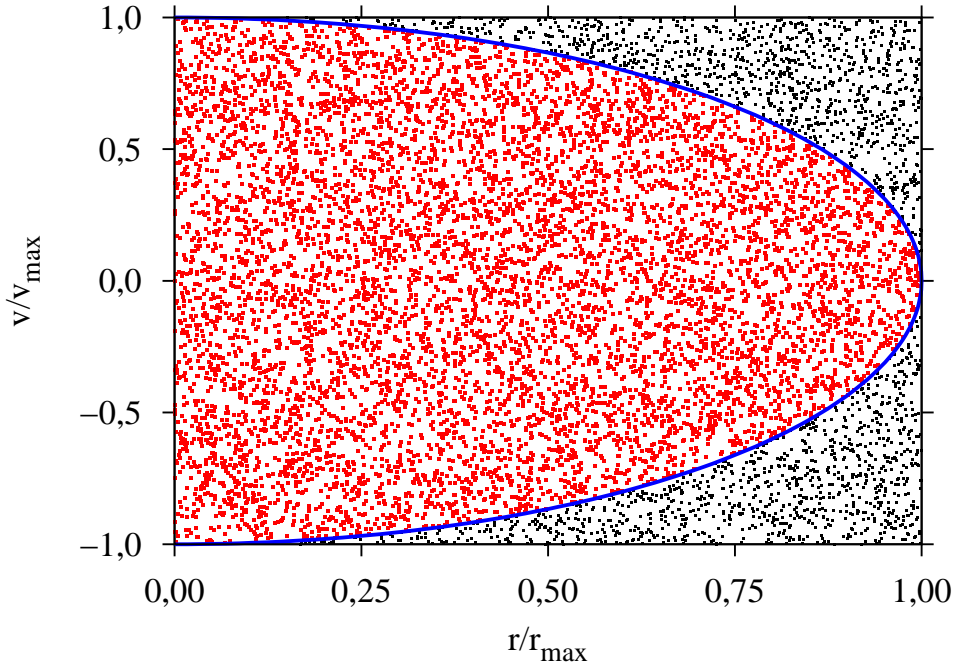


Figura 3.3: Uma distribuição randômica com densidade uniforme de pontos sobre o quadrado unitário é usada para a obtenção de pontos uniformemente distribuídos com energia limitada até um valor máximo T , selecionando-se apenas os pontos internos (em vermelho) da elipse mostrada (em azul) obtemos uma distribuição *waterbag*. Os pontos externos (em preto) são descartados.

escrever

$$(x, y) = (r \cos \theta_1, r \sin \theta_1) \quad (3.32)$$

$$(v_x, v_y) = (v \sin \theta_2, v \cos \theta_2) \quad (3.33)$$

para cada uma das N partículas do feixe. A Figura 3.3 ilustra o procedimento numérico descrito para a obtenção de uma distribuição *waterbag*. Na figura, as variáveis graficadas estão na forma reduzida $r/r_{max} \times v/v_{max}$, de forma que a figura é universal, ou seja, representa o processo de escolha dos pontos (r, v) para qualquer escolha dos parâmetros fundamentais do feixe (a emitância ϵ e o raio casado r_b).

Para ilustração da distribuição *waterbag*, a Fig. 3.4 mostra dois exemplos dessa distribuição com $N = 5000$ partículas. No lado esquerdo da figura, o lado (a), as partículas são inicializadas em repouso, por isso chamamos essa distribuição de “fria”, um caso particular da distribuição. No lado (b), o caso “quente”, mostramos também 2% dos vetores de velocidade,

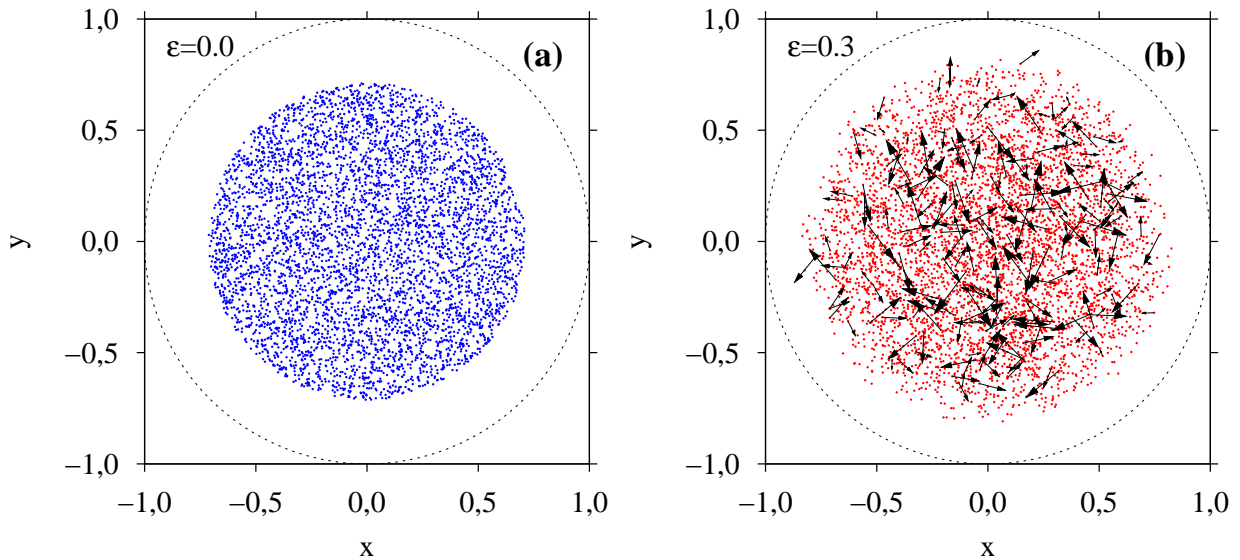


Figura 3.4: Exemplo da distribuição inicial “fria” e sem emitância (a) e a distribuição *waterbag* “quente” com emitância $\epsilon = 0.3$, onde 2% dos vetores de velocidades iniciais é mostrado para ilustração (b).

em escala arbitrária, para ilustrar visualmente a distribuição inicial das velocidades (*velocity spread*). Ambas as distribuições iniciais foram usadas nas simulações numéricas apresentadas na seção 3.5.

3.5 Resultados numéricos

Para o teste numérico da região de instabilidade obtida sobre o espaço de parâmetros do feixe realizamos várias simulações numéricas autoconsistentes. Nestas simulações, consideramos um feixe formado por $N = 5000$ macropartículas que foram lançadas com uma distribuição inicial do tipo *waterbag* [9], que possui um tipo bem definido de envelope e emitância, e cuja evolução foi feita de acordo com a equação de força (2.1). Os autocampos são calculados usando o método da função de Green [13]. O centróide da distribuição de partículas está inicialmente sobre o eixo de simetria do tubo condutor, mas devido ao número finito de partículas utilizado e as pequenas flutuações de densidade inerentes ao método usado, um pequeno valor inicial surge para r_0 , o que ocasiona uma leve assimetria inicial ao sistema, permitindo assim o surgimento

de qualquer instabilidade dinâmica.

Resultados mostrando a evolução do centróide obtidos nas simulações são mostrados na Fig. 3.5 para $\epsilon = 0$ (caso a) e $\epsilon = 0.3\sigma_0 r_w^2$ (caso b). A linha sólida (tracejada) corresponde ao caso de feixes com envelope levemente abaixo (acima) do valor do envelope crítico, neste caso $r_b = 0.98 r_b^*$ ($r_b = 1.02 r_b^*$). Os pontos usados nessas simulações de teste são os mesmo quatro pontos destacados na Fig. 2.3.

A Fig. 3.6 mostra a evolução temporal das emitâncias destes mesmos feixes, também obtidas por simulação autoconsistente. Neste gráfico, podemos observar que para os casos estáveis, a emitância permanece quase constante, ou oscila muito pouco em torno de um valor médio. Para os casos de feixes instáveis, observamos um crescimento brusco da emitância logo antes da colisão com a parede interna do tubo.

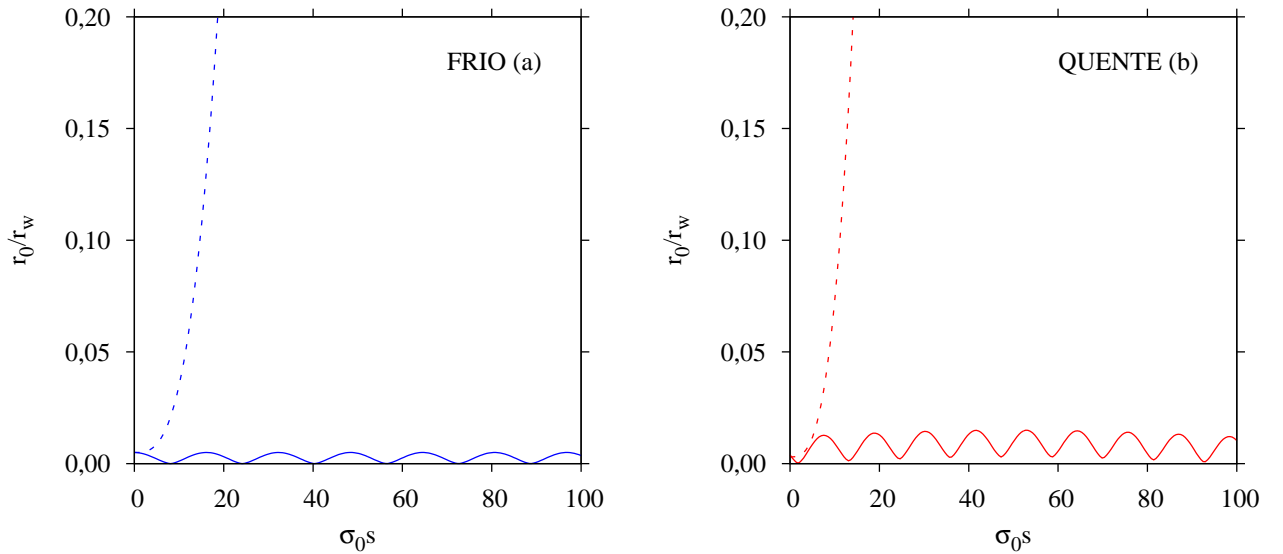


Figura 3.5: *Evolução do centróide de feixes obtidas em simulações numéricas autoconsistentes para feixes com envelopes iniciais ligeiramente abaixo $r_b = 0,98 r_b^*$ (curva sólida) e acima $r_b = 1,02 r_b^*$ (curva tracejada) do envelope crítico definido na Eq. (2.20). Em (a), $\epsilon = 0$ e $\beta_b = 0,7$, e em (b), $\epsilon = 0,3\sigma_0 r_w^2$ e $\beta_b = 0,8$.*

Para os feixes com $r_b < r_b^*$, o movimento do centróide é estável e sem nenhum crescimento em sua amplitude. Estas simulações numéricas foram feitas para uma distância axial considerada suficientemente *longa*, até $s = 1000$, e a estabilidade do feixe foi sempre preservada, e não

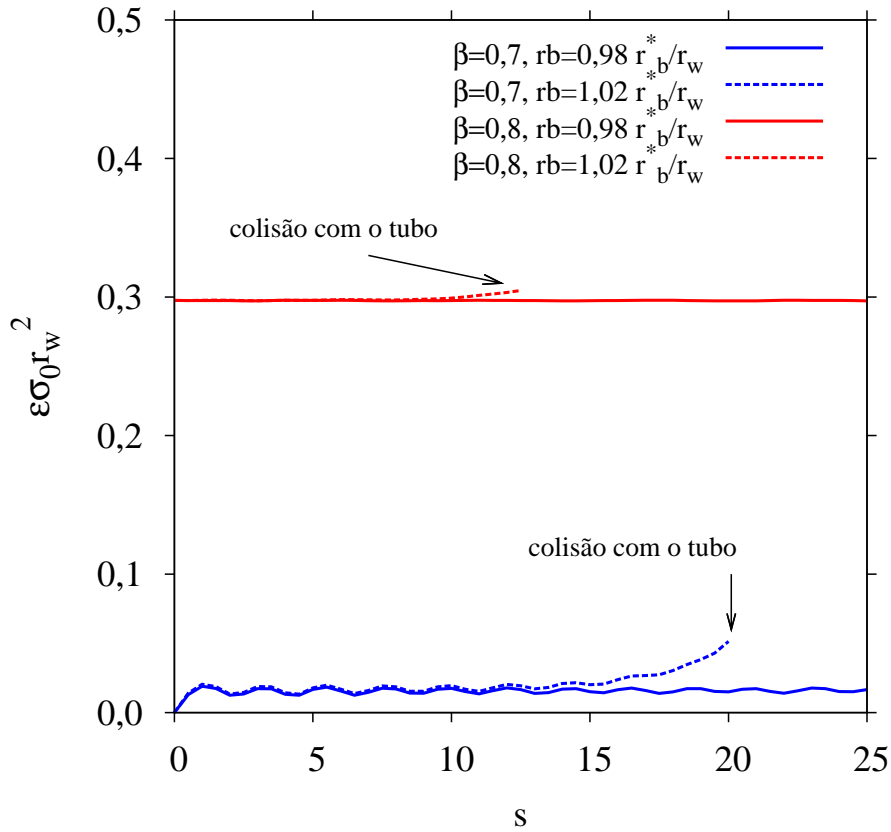


Figura 3.6: Evolução das emitâncias para os mesmos feixes mostrados na Fig. 3.5.

observamos perda de partículas nestes casos.

Por outro lado, de acordo com os resultados teóricos discutidos anteriormente, para os feixes com envelope acima do seu valor crítico, r_0 cresce rapidamente e o feixe atinge a parede do tubo condutor. Isto leva a perda completa do feixe, confirmando o limite fundamental sobre o tamanho transversal do feixe imposto pela condição de instabilidade.

Para um teste massivo da condição de estabilidade sobre o espaço de parâmetros $\beta \times r_b/r_w$, estudamos a dinâmica de dois tipos de feixes com 5.000 partículas cada, um inicializado com distribuição uniforme de partículas “frias” com emitância inicial $\epsilon = 0$ e outro inicializado com distribuição de partículas “quentes” do tipo *waterbag* com emitância inicial $\epsilon = 0,3\sigma_0 r_w^2$. Em ambos os casos fizemos simulações autoconsistentes, sobre uma malha de 1000×1000 pontos sobre o espaço de parâmetros $\beta \times r_b/r_w$, discretizando e recobrando todo o quadrado unitário,

e integramos numericamente as equações de movimento de todas as partículas do feixe, até o tempo máximo $s = 100$, considerado suficiente para o teste pretendido. O integrador usado foi o DLSODE [39], com tolerância relativa e absoluta de erros numéricos fixadas em 10^{-7} . Os resultados obtidos concordam em todos os pontos testados, para ambos os feixes, com o critério de estabilidade teórico proposto. A Fig. 3.7 mostra os resultados para ambos os feixes testados. A escala de cores indica o tempo s em que o feixe perde a estabilidade, caso ocorra (regiões azul e preto). Na região amarela, o feixe é estável. As curvas teóricas são mostradas em linhas pontilhadas, obtidas da condição de estabilidade teórica, para cada caso de emitância inicial.

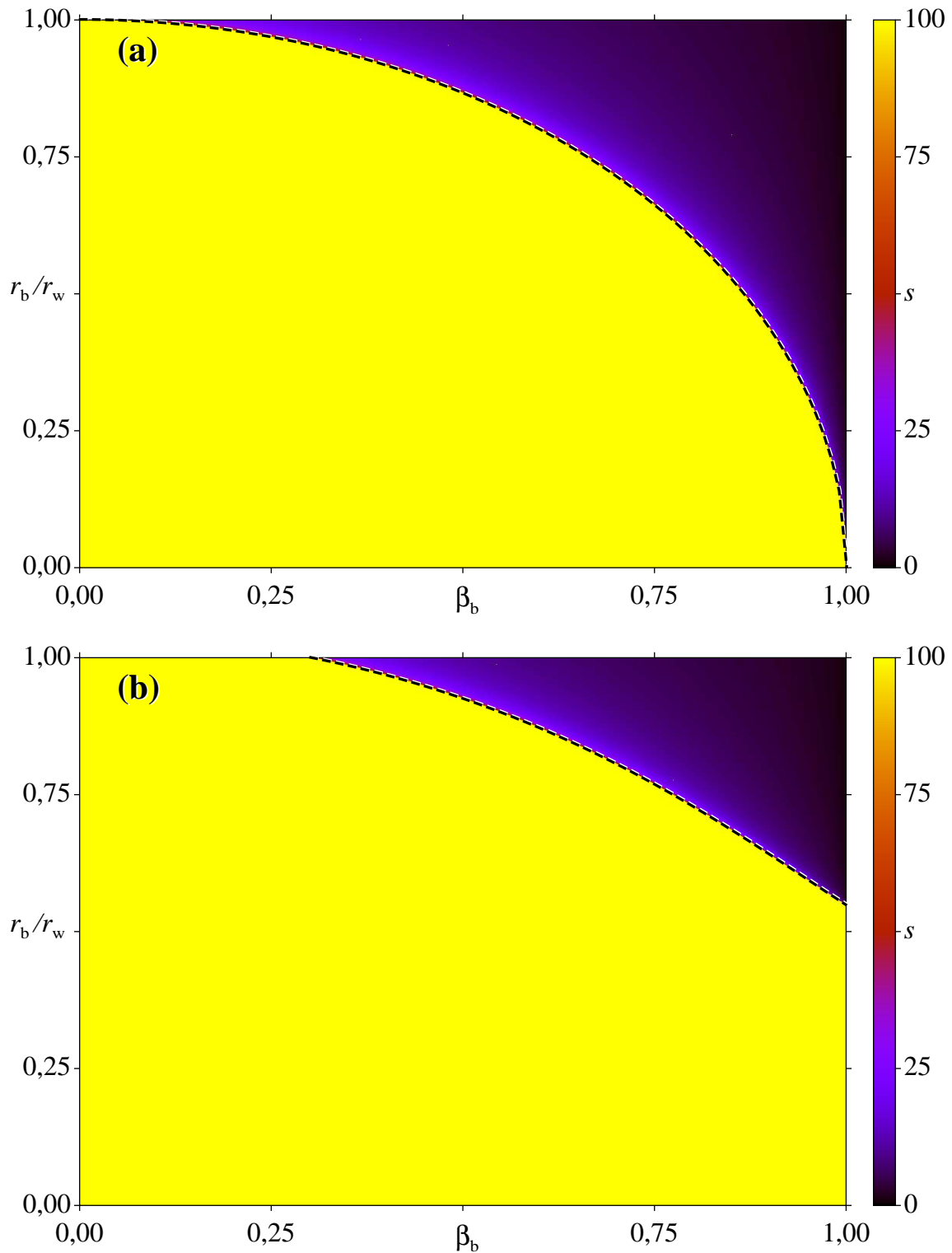


Figura 3.7: Resultados numéricos para o teste massivo da condição de estabilidade de (a) feixes com emitâncias iniciais $\epsilon = 0$ (frio) e (b) feixes quentes tipo *waterbag* com emitâncias iniciais $\epsilon = 0,3\sigma_0 r_w^2$. A escala de cores indica o tempo s em que o feixe perde a estabilidade, caso ocorra (regiões azul e preto). Na região amarela, o feixe é estável. As curvas teóricas são mostradas em linhas pontilhadas, obtidas da condição de estabilidade teórica, para cada caso de emitância inicial.

Capítulo 4

Conclusões

Investigamos a instabilidade que surge em feixes relativísticos intensos levemente deslocados com relação ao eixo de simetria, transportados no interior de um tubo condutor cilíndrico circular. Para este tipo de feixe, obtivemos as equações de movimento do centróide e do envelope e as utilizamos para a determinação de uma condição de estabilidade para seu transporte.

Mostramos que existe um *valor crítico* para o envelope casado de um feixe, acima do qual o movimento do seu centróide se torna instável. Acima desse limite, feixes injetados mesmo com assimetrias axiais infinitesimais iniciais são atraídos para a parede do tubo condutor e são destruídos em pouco tempo. Ou seja, existe uma fração limite que a seção transversal do feixe pode ocupar sobre a área interna do tubo de transporte acima da qual o feixe perde a estabilidade.

A existência de uma região de instabilidade no espaço de parâmetros do feixe em estudo impõe uma severa limitação sobre a área efetiva que pode ser ocupada pelo feixe sobre a seção reta disponível para a sua condução, dentro do tubo condutor.

Estudamos em detalhes quatro escolhas particulares dos parâmetros $\beta \times r_b/r_w$, combinando os casos de feixes inicializados sem emitância (frios) e feixes com emitância (quentes), ambos logo acima e logo abaixo da curva de instabilidade, através de simulações numéricas autoconsistentes

onde determinamos numericamente a estabilidade do feixe transportado. Nos quatro casos analisados a estabilidade observada foi a mesma prevista pelo critério teórico proposto.

Por simulações numéricas autoconsistentes de feixes com e sem emitância inicial testamos massivamente o critério de estabilidade discretizando o espaço de parâmetros $\beta \times r_b/r_w$ do sistema sobre uma malha com 10^6 pontos, simulamos a dinâmica de um feixe para cada um desses pontos, e observamos que *todos* os resultados numéricos obtidos corroboram as previsões obtidas do modelo teórico desenvolvido.

Como perspectiva natural para a continuidade desse trabalho, propomos a generalização do critério de estabilidade aqui desenvolvido, para feixes onde as restrições assumidas pela *aproximação paraxial* sejam menos restritivas, ou seja, poderemos agora considerar termos não lineares de acoplamento entre os momentos canônicos transversais P_x e P_y e axial P_z , que surgem da expansão do *hamiltoniano* original do sistema, uma vez que já não se considere mais que os momentos transversais sejam muito menores que o momento axial, caso em que teremos que levar em conta também as primeiras correções relativísticas para o movimento transversal do feixe, no limite $\beta_b \rightarrow 1$.

Apêndices

A.1 O método das imagens

Em eletrostática, existem problemas de determinação do potencial elétrico em regiões fechadas do espaço, que podem conter condutores e distribuições de carga, envolvendo condições de contorno sobre a fronteira dessa região, que nem sempre podem ser facilmente resolvidos pela busca de uma solução algébrica fechada da equação de Poisson (Eq. 2.2) associada a eles, embora esse método seja válido em geral. Para uma linha de cargas com densidade linear λ , paralela ao eixo Z , na posição \mathbf{r}_0 , a equação de Poisson pode ser escrita na forma simples

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) = -2\pi\lambda\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (\text{A.1})$$

que será utilizada nos cálculos a seguir.

Nesses casos, uma abordagem diferente pode ser utilizada, que consiste em trocar as condições de contorno originais por um conjunto de cargas externas à região de interesse (definida pelo contorno), e que produza o mesmo potencial elétrico sobre este contorno. Uma vez que a solução da equação de Poisson é *única*, para uma mesma condição de contorno e uma configuração de cargas internas a uma dada região do espaço, podemos lançar mão desse artifício, e trocar o problema original por um outro equivalente mais simples [42]. Para isso, devemos encontrar uma configuração de cargas imagens, externas à região do contorno que seja equivalente, ou seja, determine o mesmo potencial elétrico sobre todo o contorno fechado da região, o que nem sempre pode ser feito também. Esse procedimento configura o chamado *método das imagens*.

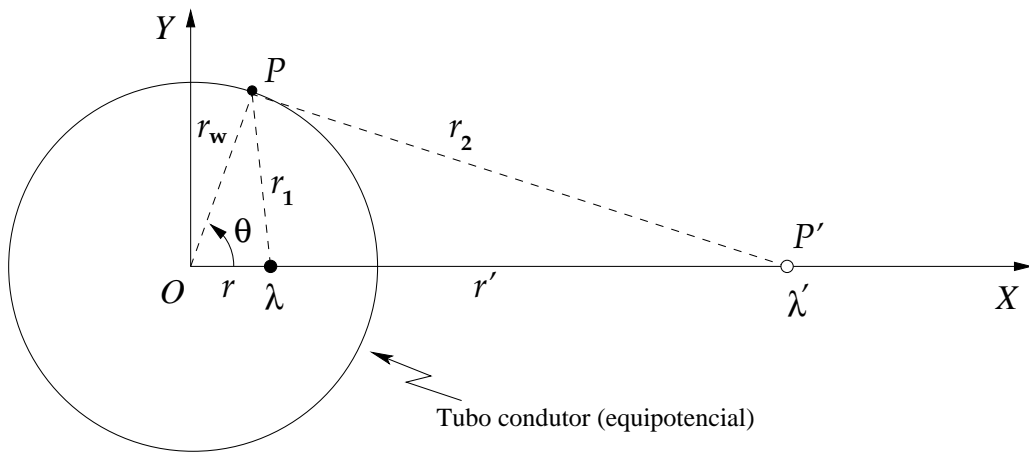


Figura A.1: Seção reta do tubo condutor de raio r_w , com uma linha de cargas λ a uma distância r do eixo Z , o eixo de simetria do sistema. A carga imagem a determinar será localizada a uma distância r' , do lado de fora do tubo, e possui uma densidade linear λ' , ambos a determinar pelo método das imagens.

Descrevemos o feixe estudado nesse trabalho por um conjunto discreto de finito de linhas de carga com densidade linear λ , as chamadas macropartículas. Essas linhas de carga estão localizadas dentro de um tubo cilíndrico condutor de raio r_w , e alinhadas paralelamente ao eixo de simetria do cilindro, o eixo Z . A Figura A.1 mostra apenas a seção reta do sistema tridimensional. Sem perda de generalidade, consideramos uma linha de cargas com densidade linear λ sobre o eixo X , a uma distância r do eixo Z , que é ortogonal ao corte mostrado na figura, e passa na origem O (já descrito na Figura 2.1).

Estamos interessados em determinar o potencial elétrico no interior do tubo, devido a presença da linha de cargas λ e das cargas induzidas no tubo. Como não estamos interessados diretamente na determinação dessas cargas induzidas no tubo, e sim no potencial sobre o seu interior, substituímos o tubo por uma linha de cargas imagens de densidade λ' , externa ao tubo, a uma distância $r' > r_w$, porém devemos impor a condição de que o potencial elétrico seja mantido constante sobre a superfície do cilindro, em qualquer ponto P , para qualquer ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$.

Pela geometria da figura, e com o auxílio da *lei dos cossenos*, podemos obter as distâncias r_1 e

r_2 da linha de carga λ e da linha de cargas imagens λ' até o ponto P , respectivamente, como

$$r_1^2 = r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos \theta \quad (\text{A.2})$$

$$r_2^2 = r'^2 + r_w^2 - 2r'r_w \cos \theta \quad (\text{A.3})$$

e sabendo-se que o potencial a uma distância r de uma linha de cargas com densidade uniforme λ pode ser escrita em geral como

$$\psi(r) = \lambda \ln r \ , \quad (\text{A.4})$$

então o potencial elétrico total no ponto P , será a soma dos potenciais gerados pelas duas linhas de carga em questão, ou seja

$$\psi_P = \lambda \ln r_1 + \lambda' \ln r_2 \ , \quad (\text{A.5})$$

e substituindo-se os valores de r_1 e r_2 , escritos acima temos

$$\psi_P = \lambda \ln(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos \theta)^{1/2} + \lambda' \ln(r'^2 + r_w^2 - 2r'r_w \cos \theta)^{1/2} \ , \quad (\text{A.6})$$

e impondo a condição de que $\psi_P(\theta)$ não pode depender do ângulo θ , ou seja

$$\left. \frac{\partial \psi_P}{\partial \theta} \right|_{r_w} = 0 \quad (\text{A.7})$$

e derivando e colocando os termos comuns em evidência, temos

$$\left. \frac{\partial \psi_P}{\partial \theta} \right|_{r_w} = \frac{\lambda r r_w \sin \theta}{r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos \theta} + \frac{\lambda' r' r_w \sin \theta}{r'^2 + r_w^2 - 2r'r_w \cos \theta} = 0 \ , \quad (\text{A.8})$$

e reduzindo a soma entre chaves a um denominador comum, temos

$$r_w \sin \theta \left(\frac{\lambda r(r'^2 + r_w^2 - 2r'r_w \cos \theta) + \lambda' r'(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos \theta)}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos \theta)(r'^2 + r_w^2 - 2r'r_w \cos \theta)} \right) = 0 \ , \quad (\text{A.9})$$

então o numerador da última expressão deve ser nulo,

$$\lambda r(r'^2 + r_w^2 - 2r'r_w \cos \theta) + \lambda' r'(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos \theta) = 0 \ , \quad (\text{A.10})$$

que multiplicando e coletando os termos com $\cos \theta$ nos dá

$$\lambda r r'^2 + \lambda r r_w^2 + \lambda' r^2 r' + \lambda' r' r_w^2 + -2r r' r_w \cos \theta (\lambda + \lambda') = 0 \quad (\text{A.11})$$

e para eliminar a dependência em θ , como impomos, devemos ter primeiro que

$$\lambda' = -\lambda \tag{A.12}$$

e segundo, voltando na Eq. (A.11), devemos anular a soma dos outros termos

$$\lambda r r'^2 + \lambda r r_w^2 - \lambda r^2 r' - \lambda r' r_w^2 = 0 \tag{A.13}$$

que nos leva à equação de segundo grau para r'

$$r r'^2 - (r^2 + r_w^2) r' + r r_w^2 = 0 \tag{A.14}$$

cujas soluções são

$$r' = \begin{cases} r \\ r_w^2/r \end{cases} \tag{A.15}$$

A primeira solução $r' = r$ representa a superposição das duas linhas de carga λ e λ' , anulando toda a carga do sistema e o potencial em todo o espaço. A solução que nos interessa aqui é a segunda, $r' = r_w^2/r$, que nos dá a posição da linha de cargas imagens a ser usada fora do tubo cilíndrico, já que $r' > r$. Observamos que, para o limite $r \rightarrow 0$ temos $r' \rightarrow \infty$, a linha de cargas imagens se afasta infinitamente do eixo Z . E quando a linha de cargas se aproxima da superfície interna do tubo ($r \rightarrow r_w$), a linha de cargas imagens também o faz, pelo lado de fora do tubo, caso limite de uma superfície plana ($r_w \rightarrow \infty$).

Por exemplo, na Figura A.2(a), para um feixe circular uniforme com 10.000 macropartículas e com raio $r_b = 0.2$ (em vermelho), pode-se observar a localização das cargas imagens correspondentes (em azul). A figura mostra apenas o primeiro quadrante da seção reta de um tubo de raio unitário ($r_w = 1$), indicado em preto, para simplificar a visualização das cargas imagens. O centro do feixe está no ponto $c(1/2, 2/5)$ e a sua carga imagem correspondente está no ponto $c_{img}(50/41, 40/41)$, ambos indicados na mesma figura. Observamos que, apesar da forma circular original do feixe ser preservada pelo conjunto de cargas imagens, o feixe formado pelas cargas imagens não é mais uniforme, e o ponto c_{img} não está mais no centro do feixe imagem. Para observar melhor a forma do feixe, e do feixe imagem correspondente, na Figura A.2(b)

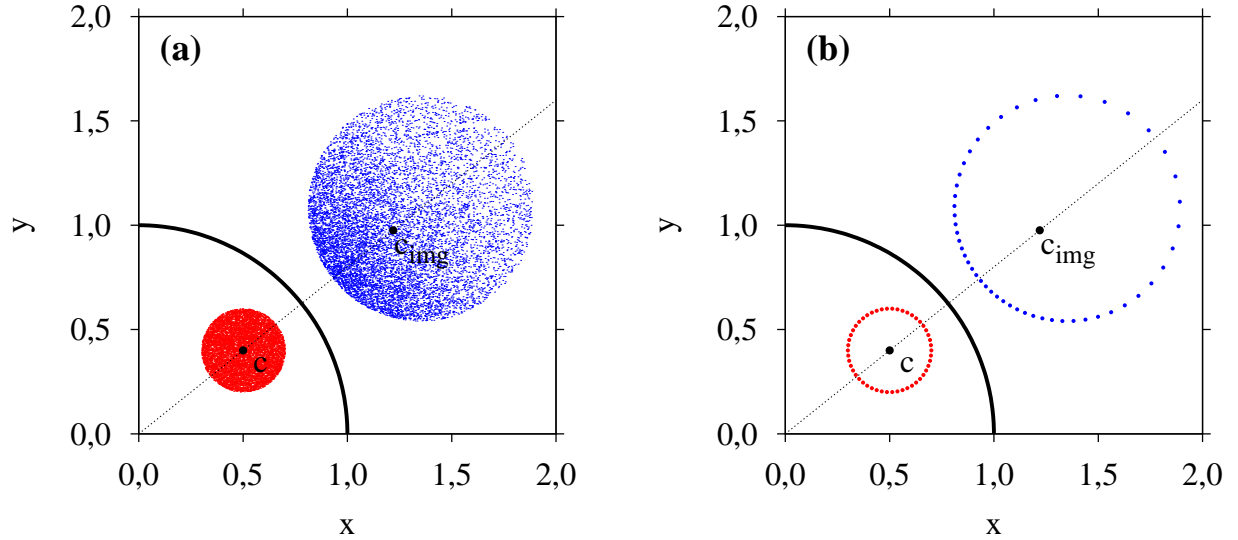


Figura A.2: (a) Um feixe uniforme de raio $r_b = 0.2$ com 10.000 partículas (em vermelho), com centro em $c = (1/2, 4/5)$, e seu feixe imagem correspondente (em azul). O ponto $c_{img} = (50/41, 40/41)$ é a imagem do ponto c . No lado (b), apenas 50 partículas equidistantes e pertencentes à borda do feixe tem suas cargas imagens apresentadas, evidenciando a preservação da borda circular, porém as cargas imagens não são mais equidistantes. Em ambas as figuras, apenas o primeiro quadrante do tubo condutor cilíndrico de raio unitário é mostrado.

mostramos apenas 50 partículas uniformemente distribuídas ao longo da borda (envelope) do feixe e suas cargas imagens correspondentes. Neste caso, observa-se claramente que as cargas imagens não estão mais equidistantes, e se aproximam mais umas das outras a medida que se aproximam do tubo condutor.

A.2 Tempo de difusão magnética: τ_m

Tomando-se o rotacional da equação de Maxwell correspondente à lei de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A.16})$$

onde o último termo é nulo, caso eletrostático, e usando a outra equação de Maxwell correspondente à lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.17})$$

e considerando-se que a densidade de corrente $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ para um meio linear e homogêneo submetido à um campo elétrico \mathbf{E} , obtemos uma equação do tipo *equação de difusão* na forma

$$c^2 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \sigma \mu \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.18})$$

de onde se pode aproximar que

$$c^2 \frac{B}{\tau_m} + \frac{\sigma \mu B}{d^2} \approx 0 \quad (\text{A.19})$$

onde d é a espessura da parede do tubo condutor, e finalmente

$$\tau_m \approx \frac{\mu \sigma d^2}{c^2} \quad (\text{A.20})$$

Utilizamos então o tempo de relaxação magnética τ_m como sendo o tempo característico que o tubo condutor precisa para se adaptar à presença do feixe, ou seja, entrar em equilíbrio magnético de forma que o campo magnético se torne novamente estacionário no seu interior ($dB/dt \rightarrow 0$).

A.3 O programa de simulação do feixe

Uma versão minimalista em linguagem FORTRAN 77 do código usado na simulação de um feixe frio estudado está listada abaixo, para fins didáticos apenas. Para valores maiores do número de partículas (N) e do tempo máximo de simulação ($TMAX$) um integrador mais rápido e preciso deve ser utilizado, ao invés do método de Euler aqui mostrado.

A cada *JUMP* passos de integração, um arquivo de dados externo *DIST.TXT* é atualizado, com o salvamento de todas as variáveis de posição e velocidade de todas as partículas do feixe, guardadas nos vetores $X()$, $VX()$, $Y()$ e $VY()$, respectivamente. Com o auxílio dos *scripts* simples listados logo após o código, pode-se gerar uma animação no formato livre GIF (CompuServe Graphics Interchange Format) e do programa gráfico GNPLOT¹, versão 4.2

¹Software livre disponível para vários sistemas operacionais na internet em <http://www.gnuplot.info/>

ou maior. Para este exemplo, o *script* ANIM.GNU deverá ser carregado ou executado pelo GNUPLOT, e a animação gerada poderá ser aberta com qualquer navegador gráfico de internet (*browser*) disponível.

Para o caso mais geral de um feixe inicializado “quente”, o laço que inicia na linha 10 do código, que define a condição inicial das partículas, deverá ser alterado, e a emitância inicial (*EMIT*) alterada para o valor desejado.

O código listado abaixo foi testado com o compilador IFORT versão 10.1 da Intel Corporation². Para outros compiladores, o gerador randômico DRAND(0) usado na inicialização das partículas pode ter outro nome, por exemplo, RAND() no compilador G77 da GNU Free Software Foundation³.

A.3.1 Listagem do programa FEIXE2D_MINIMAL.FOR

```
C
C   LUCIANO CAMARGO MARTINS, IF-UFRGS-RS, UDESC-JOINVILLE-SC
C   E-MAIL: dfi2lcm@joinville.udesc.br
C
PROGRAM FEIXE2D_MINIMAL
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z), INTEGER (I-N)
PARAMETER(N=250)
DIMENSION X(N),Y(N),VX(N),VY(N),XI(N),YI(N),AX(N),AY(N)
DIMENSION SX(N),SY(N),SX2(N),SY2(N)

EMIT=0.0D0                ! EMITÂNCIA INICIAL DO FEIXE FRIO
RB=0.7D0                  ! RAIIO DO FEIXE
BE=0.8D0                  ! FATOR RELATIVÍSTICO BETA=V/C
PERVE=RB**2-EMIT**2/RB**2 ! PERVEÂNCIA
RW2=1.D0                  ! QUADRADO DO RAIIO DO TUBO
RAD=0.02D0               ! RAIIO "EFETIVO" DAS PARTÍCULAS RP
RAD22=(RAD*2.D0)**2      ! CONSTANTES AUXILIARES
ZPAR=1.D0/DFLOAT(N)
PBZ=PERVE/(1.D0-BE**2)*ZPAR
ZPAR1=1.D0/DFLOAT(N-1)
PB1=PERVE*ZPAR1
PI2=2.D0*DACS(-1.D0)
```

²Ver na internet www.intel.com

³Endereço eletrônico na internet em www.fsf.org e www.gnu.org

```

C      INICILIZA AS macropartículaS DO FEIXE QUASE-HOMOGÊNEO DE RAI0 RB
10     DO J=1,N
        R=RB*DSQRT(DFLOAT(J)/DFLOAT(N))
        PHI=DRAND(0)*PI2           ! USE A FUNC. RAND()
        X(J)=R*DCOS(PHI)          ! GERA X ALEATÓRIO
        Y(J)=R*DSIN(PHI)         ! GERA Y ALEATÓRIO
        VX(J)=0.DO               ! VX=VY=0, PARA UM FEIXE FRIO
        VY(J)=0.DO
    ENDDO

    OPEN(1,FILE='DIST.TXT')

    T=0.DO
    H=0.001D0
    TMAX=1.D2
    JUMP=100
    NSAVED=0
    LOOP=0

    DO WHILE(T.LE.TMAX)

C      INICIALIZA AS CARGAS IMAGENS E ZERA OS SOMATÓRIOS DE FORÇAS
    DO J=1,N
        R2=X(J)**2+Y(J)**2
        ALPHA=RW2/R2
        IF(ALPHA.LT.1.DO) THEN
            WRITE(*,*) 'COLISÃO DO FEIXE COM O TUBO. ABORTANDO...'
            GOTO 666
        ENDIF
        XI(J)=ALPHA*X(J)
        YI(J)=ALPHA*Y(J)
        SX(J)=0.DO
        SY(J)=0.DO
        SX2(J)=0.DO
        SY2(J)=0.DO
    ENDDO

    DO I=1,N
        DO J=1,N
            DX=XI(J)-X(I)          !INTERAÇÃO CARGAS COM CARGAS-IMAGENS
            DY=YI(J)-Y(I)
            DEN=DX**2+DY**2
            SX2(I)=SX2(I)+DX/DEN ! PAR CARGA - IMAGEM (I,J), ATRAÇÃO
            SY2(I)=SY2(I)+DY/DEN
C      INTERAÇÃO DIRETA CARGA-CARGA
            IF(J.GT.I) THEN        ! REDUZ O SOMAT. P/ N**2/2 TERMOS
                DX=X(J)-X(I)
                DY=Y(J)-Y(I)

```

```

DEN=DX**2+DY**2
IF(DEN.GT.RAD22) THEN
  FX=DX/DEN
  FY=DY/DEN
ELSE
  ! AJUSTE SUAVE DA FORÇA NA PARA R~0
  FUN=(3.DO-DSQRT(DEN)/RAD)/RAD22
  FX=DX*FUN
  FY=DY*FUN
END IF
SX(I)=SX(I)-FX      ! PAR CARGA - CARGA (I,J), REPULSÃO
SY(I)=SY(I)-FY
SX(J)=SX(J)+FX      ! PAR SIMÉTRICO (J,I), REPULSÃO
SY(J)=SY(J)+FY
ENDIF
END DO
ENDDO

C    CÁLCULO DAS FORÇAS RESULTANTES SOBRE AS PARTÍCULAS
DO J=1,N
  AX(J)=-X(J)+PB1*SX(J)+PBZ*SX2(J) ! DVX/DT = AX = FX/M
  AY(J)=-Y(J)+PB1*SY(J)+PBZ*SY2(J) ! DVY/DT = AY = FY/M
ENDDO

C    INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PELO MÉTODO DE EULER
DO J=1,N
  X(J)=X(J)+VX(J)*H
  Y(J)=Y(J)+VY(J)*H
  VX(J)=VX(J)+AX(J)*H
  VY(J)=VY(J)+AY(J)*H
ENDDO

C    SALVA COORDENADAS E VELOCIDADES DAS PARTÍCULAS: ESPAÇO DE FASES
20  IF(MOD(LOOP,JUMP).EQ.0) THEN
  WRITE(*,FMT='(''NSAVED,LOOP,T='',2I8,F8.3)') NSAVED,LOOP,T
  WRITE(1,FMT='(''# NSAVED,LOOP,T='',2I8,F8.3)') ,NSAVED,LOOP,T
  DO J=1,N
    WRITE(1,FMT='(4F10.6)') X(J),VX(J),Y(J),VY(J)
  ENDDO
  WRITE(1,*)
  WRITE(1,*)
  NSAVED=NSAVED+1
ENDIF

  T=T+H          ! INCREMENTA O TEMPO
  LOOP=LOOP+1    ! E O CONTADOR DE "LOOPS"
ENDDO

666 CLOSE(1)
END

```

A.3.2 Listagem do *script* ANIM.GNU

Listamos abaixo os dois arquivos *scripts* necessários para a geração da animação GIF do feixe sobre o espaço XY , a partir do programa GNUPLOT. A animação será gravada com o nome ANIM.GIF .

```
# anim.gnu - script do gnuplot 4.2+
unset key             # remove a legenda
set tics out          # ajusta as divisões de escala...
set size square       # e as proporções da imagem
set format x "%3.1f"  # formata as marcações do eixo X...
set format y "%3.1f"  # e Y
set xlabel "x"        # Nomeia os eixos X...
set ylabel "y"        # e Y
bloco=0               # bloco inicial a ler do arquivo DIST.TXT
blast=100             # bloco final a ler do arquivo DIST.TXT
h=0.001               # mesmo valor usado em FEIXE2D_MINIMAL.F
jump=100              # mesmo valor usado em FEIXE2D_MINIMAL.F
set term gif animate delay 10 optimize size 480,480
set out 'ANIM.GIF'    # arquivo de saída, animação GIF
call "loop.gnu"       # chama o loop principal
```

A.3.3 Listagem do *script* LOOP.GNU

```
# loop.gnu - script do gnuplot 4.2+
t=bloco*h*jump        # calcula o tempo da simulação do feixe
st=sprintf("s = %.1f",t) # converte em um string...
set title st           # e coloca no título da figura
print "frame = ".bloco # mensagem de progresso
plot [-1:1][-1:1] 'DIST.TXT' i bloco u 1:3 w p lt 1 pt 5 ps 0.5
bloco=bloco+1         # pega o próximo bloco...
if(bloco <= blast) reread # caso não tenha terminado
```


Referências Bibliográficas

- [1] F. J. AGEE, IEEE Trans. *Evolution of pulse shortening research in narrow band, high powermicrowave sources*, Plasma Sci., vol. 26, p. 235, 1998.
- [2] C. K. ALLEN e M. REISER, *Image effects of cylindrical pipes on continuous beams*, Phys. Rev. E, vol. 54, pp. 2884–2888, 1996.
- [3] C. K. ALLEN e M. REISER, *Zero-temperature equilibrium for bunched beams in axisymmetric systems*, Particle Accel., vol. 48, pp. 193-211, 1995.
- [4] C. K. ALLEN, N. BROWN e M. REISER. *Image effects for bunched beams in axisymmetric systems*, Particle Accel., vol. 45, pp. 149-165, 1994.
- [5] C. CHASMAN, K. W. JONES, H. W. KRANER e WERNER BRANDT, *Band-gap effects in the stopping of Ge72* atoms in germanium*, Phys. Rev. Lett., vol. 21, p. 1430, 1968.
- [6] C. CHEN e R. PAKTER, *Mechanisms and control of beam halo formation in intense microwave sources and accelerators*, Phys. Plasmas, vol. 7, p. 2203, 2000.
- [7] E. D. COURANT, H. S. SNYDER: *Theory of the alternating-gradient synchrotron*, in: Annals of Physics, vol. 3, pp. 1-48, 1958.
- [8] A. CUCHETTI, M. REISER e T. WANGLER. *Topics in nonlinear dynamics: a tribute to Sir Edward Bullard*, In: Proc. of the 1991 Part. Accel. Conf. New York: J. Appl. Phys., vol. 251, p. 1919, 1991.
- [9] R. C. DAVIDSON e H. QIN, *Physics of intense charged particle beams in high energy accelerators*, ed. World Scientific, 2001.
- [10] R. C. DAVIDSON e N. A. KRALL, *Vlasov equilibria and stability of an electron gas*, Phys. Fluids, vol. 13, p. 1543, 1970.
- [11] A. DRAGT, F. NERI e G. RANGARAJAN, *General moment invariants for linear hamiltonian systems*, Phys. Rev. A, vol. 45, n. 4, p. 2572, 1992.
- [12] S. DUSHMAN, *Electron emission from metals as a function of temperature*, Phys. Rev., vol. 21, n. 6, p. 623, 1923.
- [13] K. FIUZA, F. B. RIZZATO e R. PAKTER, *Combined centroid-envelope dynamics of intense, magnetically focused charged beams surrounded by conducting walls*, Phys. Plasmas, vol. 13, p. 023101, 2006.

- [14] K. FIUZA, R. PAKTER e F. B. RIZZATO, *Image charge effects in dynamics of intense off-axis beams*, In: Proc. of the 2007 Part. Accel. Conf. Albuquerque: p. 3880, 2007.
- [15] J. S. FRASER, R. L. SHEFFIELD, E. R. GRAY e G. W. RODENZ, *High-brightness photoemitter injector for electron accelerators*, IEEE TRANS. NUCL. SCI. NS-32, p. 1791, 1985.
- [16] J. S. FRASER, R. L. SHEFFIELD, IEEE J. QUANTUM ELECTRON., *High-brightness injectors for RF-driven free-electron lasers*, vol. 23, p. 1489, 1987.
- [17] R. GLUCKSTERN, *Analytic model for halo formation in high current ion linacs*, Phys. Rev. Lett., vol. 73, n. 9, pp. 1247-1250, 1994.
- [18] J. GUCKENHEIMER e P. HOLMES, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, ed. Springer-Verlag, 1983.
- [19] F. W. GUY, P. M. LAPOSTOLLE E T.P. WANGLER, *The influence of density distribution on the stability of beams*, IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. 34, p. 1149, 1987.
- [20] I. HABER, M. REISER, D. KEHNE e H. RUDD, *Experimental, theoretical, and numerical investigations of the homogenization of density nonuniformities in the periodic transport of a space-charge dominated beam*, Phys. Rev. A, vol. 44, n. 8, p. 5194, 1991.
- [21] M. HESS e C. CHEN, *Beam confinement in periodic permanent magnet focusing klystrons*, Phys. Lett. A, vol. 295, p. 305-310, 2002.
- [22] M. HESS e C. CHEN, *Confinement criterion for a highly bunched beam*, Phys. Plasmas, vol. 7, p. 5206, 2000.
- [23] M. HESS e C. CHEN, *Space-charge limit for a infinite-size bunched beam in a circular conducting pipe*, Phys. Rev. ST: Accel. Beams, vol. 7, p. 092002, 2004.
- [24] M. HESS e C. CHEN, *Beam confinement in periodic permanent magnet focusing klystrons*, Phys. Lett. A, vol. 295, p. 305, 2002.
- [25] M. HESS, *Off-axis space-charge limit for a bunched electron beam in a coaxial conducting structure*, IEEE Trans. Plasma Sci., vol. 36, p. 729, 2008.
- [26] I. HOFMANN, *Stability of anisotropic beams with space charge*, Phys. Rev. E, vol. 57, n. 4, p. 4713, 1998.
- [27] I. HOFMANN, L. J. LASLETT, L. SMITH e I. HABER, *Stability of the Kapchinskij-Vladimirskij (K-V) distribution in long periodic transport systems*, Part. Accel., vol. 13, p. 145, 1983.
- [28] D. D. HOLM, W. P. LYSENKO e J. C. SCOVEL, *Moment invariants for the Vlasov equation*, J. Math. Phys., vol. 31, n. 7, pp. 1610-1615, 1990.
- [29] J. JACKSON, *Classical electrodynamics*, ed. John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [30] R. A. JAMESON, in: *Advanced Accelerator Concepts*, editado por J. S. Wirtele, AIP Conf. Proc., vol 279, p. 969, 1993.

- [31] I. M. KAPCHINSKIJ e V. V. VLADMIRSKIJ, *Limitations of proton beam current in a strong focusing linear accelerator associated with the beam space charge*, in: Proc. of the Int. Conf. on High Energy Accelerators, vol. 14-19, pp. 274-288, 1959.
- [32] P. M. LAPOSTOLE, *Space charge dynamics in high intensity rings*, in: IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. NS-18 (1971), p. 1101.
- [33] P. M. LAPOSTOLLE, *Possible emittance increase through filamentation due to space charge in continuous beams*, IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. NS-18, p. 1101, 1971.
- [34] L. LASLETT, *Selected works of L. Jackson Laslett*, PUB-616, ed. Lawrence Berkeley Lab, Berkeley, vol. I-II, 1987.
- [35] A. J. LICHTENBERG e M. LIEBERMAN, *Regular and stochastic motion*, ed. Springer-Verlag, 1992.
- [36] J. LINDE, *The Edward Teller medal lecture: the evolution toward indirect drive and two decades of progress toward ICF ignition and burn*, in: 11th International Workshop on Laser Interaction and Related Plasma Phenomena (1994), reeditado. em 2008.
- [37] J. LIVINGGOOD, *Principles of cyclic particle accelerators*, ed. D. Van Nostrand Company Inc., 1961.
- [38] LNLS - Laboratório Nacional de Luz Síncrotron. Disponível em:
<<http://www.lnls.br>>. Acesso: 12 maio 2009.
- [39] LSODE (ODEPACK) Disponível em:
<<http://www.netlib.org/odepack/>>. Acesso em 10 de agosto 2007.
- [40] J. LUGINSLAND, J. SIRIGIRI e J. YATER, *The twelfth special issue on high-power microwave generation*, IEEE Trans. Plasma Sci., vol. 36, 2008.
- [41] S. M. LUND e B. BUKH, *Stability properties of the transverse envelope equations describing intense ion beam transport*, Phys. Rev. ST Accel. Beams, vol. 7, p. 024801, 2004.
- [42] K. D. MACHADO, *Teoria do eletromagnetismo*, vol. 1, 3 ed., ed. Editora UEPG, 2007.
- [43] M. MARTINI e M. PROMÉ: *Computer studies of beam dynamics in a proton linear accelerator with space charge*, in: Part. Accel., vol. 2, pp. 289-299, 1971.
- [44] L. C. MARTINS e J. A. C. GALLAS, *Multistability, phase diagrams e statistical properties of the kicked rotor: a map with many coexisting attractors*, Int. Jour. of Bif. and Chaos, vol. 18, n. 6, pp. 1705-1717, 2008.
- [45] L. C. MARTINS, F. B. RIZZATO e R. PAKTER, *Off-axis stability of intense continuous relativistic beams*, Jour. Appl. Phys., vol. 106, p. 043305, 2009.
- [46] J. S. MORAES, R. PAKTER e F. B. RIZZATO, *Centroid motion in periodically focused beams*, Phys. Plasmas, vol. 12, p. 023104, 2005.
- [47] J. S. MORAES, R. PAKTER e F. B. RIZZATO, *Equilibrium and stability of off-axis periodically focused particle beams*, Phys. Rev. Lett., vol. 93, p. 244801, 2004.; *Centroid motion in periodically focused beams*, Phys. Plasmas, vol. 12, p. 023104, 2005.

- [48] C. NIELSEN e A. SESSLER, *Longitudinal Space Charge Effects in Particle Accelerators*, Rev. Sci. Instrum., vol. 30, p. 30, 1959.
- [49] F. NERI e G. RANGARAJAN, *Kinematic moment invariants for linear hamilton systems*, Phys. Rev. Lett., vol. 64, n. 10, p. 1073, 1990.
- [50] C. NOELS, *LHC – the Large Hadron Collider*. Disponível em: <http://lhc.web.cern.ch/lhc/>. Acesso: 20 junho 2009.
- [51] OAK RIDGE NATIONAL LABORATORY. *The SNS facility - neutron sciences*. Disponível em: <http://neutrons.ornl.gov/facilities/facilities.sns.shtml>. Acesso: 21 junho 2009.
- [52] R. PAKTER e C. CHEN, *Cold-fluid equilibrium for a corkscrewing elliptic beam in a variably focusing channel*, Phys. Rev. E, vol. 62, n. 2, pp. 2789-2796, 2000.
- [53] R. PAKTER e F. RIZZATO, *Nonlinear dynamics of periodically focused intense particle beams*, Phys. Rev. E, vol. 65, p. 056503, 2002.
- [54] R. PAKTER e F. RIZZATO, *Stability of periodically focused intense particle beams*, Phys. Rev. Lett., vol. 87, n. 4, p. 044801, 2001.
- [55] R. PAKTER, G. CORSO, T. S. CAETANO, D. DILLEMBURG e F. B. RIZZATO, *Bifurcations leading to stochasticity in a cyclotron-maser system*, Phys. Plasmas, vol. 1, p. 4099, 1994.
- [56] R. PAKTER, Y. LEVIN e F. B. RIZZATO, *Nonlinear field dynamics of electromagnetic pulses in plasmas*, Appl. Phys. Lett., vol. 91, p. 251503, 2007.
- [57] W. H. PRESS *et al.*, *Numerical recipes: the art of scientific programming*, Ed. Cambridge Univ. Press, 2007.
- [58] M. REISER, C. CHANG, D. KEHNE, K. LOW e T. SHEA, *Emittance growth and image formation in a nonuniform space-charged-dominated electron beam*, Phys. Rev. Lett., vol. 61, n. 26, p. 2933, 1988.
- [59] M. REISER, *Free energy and emittance growth in nonstationary charged particle beams*, J. Appl. Phys., vol. 70, n. 4, p. 1919, 1991.
- [60] M. REISER, *Theory and design of charged particle beams*, ed. Wiley-Interscience, 1994.
- [61] O. W. RICHARDSON, *The distribution of the molecules of a gas in a field of force, with applications to the theory of electrons*, Phil. Mag. 28(5), 633, 1914.
- [62] F. J. SACHERER: *RMS envelope equations with space charge*, in: IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-18, p. 1105, 1971.
- [63] G. SCHROEDER, *RHIC - Relativistic Heavy Ion Collider*. Disponível em: <http://www.bnl.gov/rhic/>. Acesso: 10 junho 2009.
- [64] W. SIMEONI JR., *Estabilidade não-linear de um feixe de partículas carregadas sujeito a um campo magnético focalizador*, 2005. Dissertação (Mestrado em Física) - UFRGS, 2005.

- [65] C. J. STRUCKMEIER e M. REISER, *Theoretical studies of envelope oscillations and instabilities of mismatched intense charge-particle beams in periodic focusing channels*. Part. Accel., vol. 14, p. 227, 1984.
- [66] A. A. VLASOV, *On the kinetic theory of an assembly of particles with collective interaction*, Journal of Physics USSR, vol. 9, n. 1, pp. 25-40, 1945.
- [67] T. P. WANGLER, *RF linear accelerators*, 2 ed., ed. Wiley-VCH, 2008.
- [68] T. P. WANGLER, K. P. CRANDALL, R. MILLS e M. REISER, *Relation between field energy and rms emittance in intense particle beams*, IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. 32, n. 5, p. 2196, 1985.
- [69] WIKIPEDIA. *Acelerador de partículas*. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Acelerador.de.partículas>>. Acesso: 24 maio 2009.
- [70] G. WILLIAMS, *FEL - free electron laser*. Disponível em: <http://www.jlab.org/FEL/>>. Acesso: 28 junho 2009.
- [71] R. R. WILSON, *The tevatron*. Disponível em: <http://lss.fnal.gov/archive/test-tm/0000/fermilab-tm-0763.pdf>>. Acesso: 25 junho 2009.