

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Equações de Evolução na Cromodinâmica Quântica

Bruna Mezzari Carlos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para a
obtenção do grau de Bacharel no Curso de Física
Orientadora: Profa. Dra. Maria Beatriz Gay Ducati

Porto Alegre-RS

Dezembro de 2018

Agradecimentos

À minha orientadora Maria Beatriz, que me permitiu conhecer melhor minhas habilidades e capacidade de aprendizado.

À minha mãe, Valdina, minha irmã Camila e meus 'segundos pais' Vanilda e Jacques. Por serem minha família. Por me dotarem de ensinamentos valiosos, que levarei comigo sempre, e de muito, muito amor.

À família da física: Pai, Lore, Isadora, Tuttur, Zottis, Loves e Tesche. Por serem minha rota de escape diária, e deixarem (bem) mais leves esses quatro anos de idas e vindas ao Vale.

Ao Lore, duplamente, por também ter me ajudado de todas as formas possíveis com as minhas dificuldades. Por ter me apresentado a um mundo novo, onde tenho vivido mais feliz nesses últimos dois anos.

A todos os meus professores do curso de bacharelado. Em especial ao Magno, pela ajuda entusiástica com os artigos do Kovchegov, e ao Pedro Grande e Gustavo por me fazerem lembrar os motivos pelos quais escolhi Física, em momentos difíceis do curso.

Aos meus professores do Santa Inês, por todo o carinho e cuidado. Em especial ao Fabrizio, que me ensinou a gostar de física e é o responsável por tudo isso.

Here be Dragons

Resumo

Equações de evolução determinam o comportamento das distribuições partônicas com a mudança das variáveis x de Bjorken, que se relaciona com o inverso da energia do centro de massa ao quadrado s , e o Q^2 , virtualidade ou momentum transferido. Essas distribuições aparecem nas funções de estrutura, importantes no cálculo de seção de choque. Apresentamos o modelo partônico simplificado e uma revisão de diversas equações de evolução já propostas: as equações lineares DGLAP e BFKL, e as equações não lineares com correções de sombreamento GLR, AGL e a BK. Analisamos com maior profundidade o método da transformada de Mellin e o das curvas características para a solução das equações diferenciais de DGLAP e AGL, respectivamente. Objetivando ressaltar as diferenças e características fundamentais entre cada uma, notamos a falta de uma unificação bem como de uma solução completa das equações não lineares, impossibilitando a definição de distribuições partônicas e funções de estrutura em todo o espectro de x e Q^2 .

Abstract

Evolution equations determine the behavior of partonic distributions changing the variables x of Bjorken, related with the reverse of the energy squared s , and Q^2 , the virtuality or transferred momentum. These distributions appear in the structure functions, very relevant for the cross section calculations. We present in this work the simplified partonic model and a review of some relevant evolution equations: the linear equations DGLAP and BFKL, and the non linear equations with shadowing corrections GLR, AGL and BK. We have analyzed in more detail the method of Mellin transform and the method of characteristics curves for the solution of the differential equations appearing in DGLAP and AGL, respectively. With the aim to emphasize the fundamental characteristics of each equation, we have noticed the absence of a unification as well as a complete solution for the non linear evolution equations, which prevents one to have partonic distributions and structure functions defined all over the spectrum of x and Q^2 .

Sumário

1	Introdução	8
I	QCD em Pequeno x	9
2	Variáveis Cinemáticas	9
2.1	Variáveis de Mandelstam	9
2.2	Formalismo do Cone de Luz	10
2.3	Variáveis de Altas Energias	10
3	Introdução à Cromodinâmica Quântica	12
4	Modelo de Pártons	13
II	Equações Lineares	17
5	DGLAP	17
5.1	Quebra de Escalamento e as equações DGLAP	17
5.2	Solução geral das equações DGLAP	19
5.2.1	Aproximação de Duplo Logaritmo (DLA)	20
6	BFKL	23
6.1	A Equação BFKL e o Pomeron	23
6.2	Solução Geral da Equação BFKL	24
6.2.1	Aproximação de Duplo Logaritmo	25
6.2.2	Aproximação de Difusão	26
III	Equações Não Lineares	28
7	Correções de Sombreamento e a Equação GLR	28
7.1	Recombinação Partônica	28
7.2	A equação GLR	28
8	AGL: A Equação Generalizada	30
8.1	Aproximação Semiclássica	32
9	BK	35
9.1	Correções para a BK	37
10	Conclusão	40

1 Introdução

Equações de evolução determinam o comportamento da distribuição de pártons (quarks e glúons) dentro de um hádron em função do x de Bjorken, proporcional ao inverso do quadrado da energia, e da escala de resolução. Esse fator de resolução, denominado Q^2 , tem relação com a energia com a qual o hádron é sondado. No caso do DIS (*Deep Inelastic Scattering*), um fóton emitido por um elétron sonda um próton, e Q^2 é chamado de virtualidade do fóton (transferência de 4-momentum entre os estados inicial e final do elétron). Quando a energia (e o Q^2) das colisões aumenta, diferentes estruturas podem ser observadas, por um fóton ou outra partícula de sonda, sendo possível então analisar interações cada vez mais fundamentais. As equações existentes modelam tais estruturas para diferentes regiões de energia, e busca-se uma modelagem que seja válida no maior espectro energético possível.

O objetivo principal do trabalho é apresentar um panorama das equações de evolução gluônicas existentes para a modelagem da cromodinâmica quântica, usando seus graus de liberdade. Partindo da DGLAP (Dokshitzer–Gribov–Lipatov–Altarelli–Parisi) [1],[2],[3], uma equação linear adequada para eventos de energias medianas (comparado com as energias atuais), salientaremos as diferenças de tratamento feitas em equações lineares mais complexas, como a BFKL (Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov) [4],[5],[6]. Em regiões de alta energia (da ordem de TeV), as principais correções feitas em relação à DGLAP são as chamadas correções de sombreamento (CS ou *shadowing*), que diminuem a solução assintótica da evolução (a função DGLAP vai a infinito muito rapidamente para altas energias, e viola o teorema da unitariedade) e dão origem a termos não lineares. Estudaremos as equações não lineares GLR-MQ [7],[8], AGL[9],[10],[11] e BK[12],[13], salientando suas diferenças e aplicabilidade.

O trabalho está dividido da seguinte forma: a parte 1 contém os formalismos básicos para entender a cromodinâmica quântica em altas energias, com uma breve revisão das variáveis fundamentais relativísticas e o modelo de pártons simplificado. Na parte 2, apresentaremos duas equações lineares, a DGLAP e a BFKL, dando ênfase no método de resolução da DGLAP no limite DLA. As equações não lineares estão descritas na parte 3, juntamente com uma breve introdução sobre as correções de sombreamento. Demos ênfase novamente na solução assintótica de uma das equações, a AGL, através do método das curvas características, também utilizado para resolver as demais equações não lineares em alguns limites. No Apêndice deste trabalho deduzimos as condições de unitariedade para a amplitude de espalhamento e seções de choque.

Parte I

QCD em Pequeno x

2 Variáveis Cinemáticas

2.1 Variáveis de Mandelstam

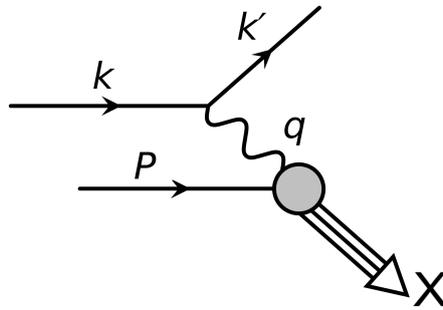


Figura 2.1: Espalhamento profundamente inelástico

Um problema de espalhamento profundamente inelástico (DIS) pode ser exemplificado pela Figura 2.1. Um lépton (elétron, por exemplo) de 4-momento k emite um fóton de momentum $q = (k - k')$, sendo k' o momentum final do lépton. Um hádron que se desloca com momentum total P interage com o fóton e um estado final X com momentum P' é produzido. O DIS é caracterizado por uma grande transferência de momentum (profundo) e pela formação de diversas partículas no estado final (inelástico), e pode ser usado para revelar a estrutura de hádrons como o próton, por exemplo.

De acordo com a notação da Figura 2.1, definimos as variáveis de Mandelstam da seguinte forma [14]

$$s \equiv (P + k)^2, \quad (2.1a)$$

$$t \equiv (k - k')^2, \quad (2.1b)$$

$$u \equiv (k - P')^2, \quad (2.1c)$$

onde a raiz quadrada de (2.1a) é a energia do centro de massa do sistema, e as variáveis relacionam-se através de

$$s + t + u = m^2 + m'^2 + M^2 + M_X^2, \quad (2.2)$$

onde m e m' são as massas do projétil inicial e espalhado, respectivamente, M é a massa do alvo e M_X a massa das partículas finais produzidas. As variáveis de Mandelstam são invariantes de Lorentz, ou seja, não dependem do referencial utilizado, e por isso são de extrema utilidade na física de colisão de partículas.

2.2 Formalismo do Cone de Luz

Nas coordenadas do cone de luz, um vetor 4-dimensional $u = (u^0, u^1, u^2, u^3)$ é definido como [15]

$$u = (u^+, u^-, \vec{u}_\perp), \quad (2.3)$$

onde

$$u^+ \equiv u^0 + u^3, \quad u^- \equiv u^0 - u^3 \quad \text{e} \quad \vec{u}_\perp \equiv (u^1, u^2). \quad (2.4)$$

Nesse formalismo, a componente u^+ faz o papel da componente temporal da notação usual relativística (u^0), e algumas propriedades são

$$u^2 = u^+ u^- - \vec{u}_\perp^2, \quad (2.5a)$$

$$u \cdot v = \frac{1}{2} u^+ v^- + \frac{1}{2} u^- v^+ - \vec{u}_\perp \cdot \vec{v}_\perp. \quad (2.5b)$$

A teoria de perturbação do cone de luz foi desenvolvida como uma alternativa à teoria de perturbação convencional. Assim como da última se deduzem as regras de Feynman da Cromodinâmica Quântica para amplitudes de espalhamento, se deduzem da primeira as regras LCPT [16](do inglês '*Light Cone Perturbation Theory*'), usadas para o mesmo fim. As regras LCPT reproduzem os resultados encontrados com as regras de Feynman, e se tornam mais práticas nos cálculos de espalhamento por haver uma separação clara entre as componentes paralelas e perpendiculares ao movimento das partículas.

2.3 Variáveis de Altas Energias

Em processos de espalhamento, buscam-se sempre variáveis invariantes frente a transformações de Lorentz, pois não irão depender do referencial escolhido. Partindo de três momenta independentes (Fig. 2.1): P^μ , representando o momentum do alvo, k^μ o momentum do projétil e k'^μ o momentum do projétil espalhado, podemos definir

$$Q^2 \equiv -q^2, \quad (2.6a)$$

$$x_{Bj} \equiv \frac{Q^2}{2P \cdot q}, \quad (2.6b)$$

$$y \equiv \frac{P \cdot q}{P \cdot p}, \quad (2.6c)$$

$$\nu \equiv \frac{P \cdot q}{M} \quad (2.6d)$$

onde x_{Bj} é o x de Bjorken. No espalhamento profundamente inelástico (DIS), as variáveis Q^2 , ν e M_X são muito maiores do que as massas das partículas envolvidas. Podemos entender a virtualidade de uma partícula como o quanto do seu momentum ao quadrado se desvia da sua massa de repouso. No caso do fóton, que não possui massa, sua virtualidade é o próprio Q^2 , que também define a escala de resolução transversa [17]

$$x_\perp \approx \frac{1}{Q}, \quad (2.7)$$

ou seja, para alto Q , o fóton resolverá distâncias cada vez menores. Podemos também reescrever (2.6b) em termos da energia do centro de massa do sistema $\gamma^* p$ (γ^* representando o fóton virtual)

$$x_{Bj} \approx \frac{Q^2}{W^2 + Q^2}, \quad (2.8)$$

sendo W a energia do centro de massa desse novo sistema, e fica evidente que pequenos valores de x_{Bj} correspondem a altos valores de energia (do centro de massa), para Q^2 fixo.

Definiremos também a rapidez Y de uma partícula com massa m , energia do centro de massa \sqrt{s} e momentum transverso \vec{p}_\perp , definida como[14]

$$\sqrt{s} \equiv \sqrt{m^2 + p_\perp^2} \cosh Y, \quad (2.9)$$

uma variável bastante utilizada por ser transformada de forma aditiva quando há uma aumento na energia (boost).

3 Introdução à Cromodinâmica Quântica

Antes de entender como a cromodinâmica quântica (QCD) modela as interações partônicas em hádrons, que são objetos que interagem via força forte, vamos apresentar algumas características fundamentais dessa teoria. A QCD é uma teoria não abeliana invariante frente a transformações de calibre no $SU(3)$, o grupo especial de transformações unitárias com determinante igual a 1. Ela explica a interação forte entre os campos fermiônicos dos quarks através do acoplamento com bósons de spin 1 denominados glúons, que possuem 8 variações. Os glúons são objetos bicolores, sendo cor a carga de troca da força forte, similar a carga elétrica na eletrodinâmica quântica, e devido a isso podem acoplar-se a si mesmo e também modificar a carga de cor dos quarks, que possuem somente uma cor. Além da cor, os quarks também possuem outro grau de liberdade, o sabor, que junto com a carga elétrica é invariante frente a interações fortes.

Uma outra propriedade interessante é de que a carga de cor não é constante, mas diminui a medida que o momento transferido Q^2 aumenta, devido ao processo de renormalização da teoria. Considerando as correções de primeira ordem no propagador do glúon no processo de renormalização [21], a constante de acoplamento da força forte α_s renormalizada, com carga de cor efetiva g_{ef}

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g_{ef}}{4\pi}, \quad (3.1)$$

pode ser dada por

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_o \ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (3.2)$$

onde β_o é definido por

$$\beta_o \equiv (11N_c - 2N_f)/12\pi \quad (3.3)$$

onde N_f é o número de sabores de quark. Para $N_f = 6$ e $N_c = 3$, $\beta_o \approx 0,56$. O fator Λ é denominado parâmetro de escala da QCD, e deve ser determinado experimentalmente. Apesar da dificuldade de medida, espera-se que Λ_c esteja no intervalo $100\text{MeV} < \Lambda_c < 500\text{MeV}$ [26].

Usando $N_f = 6$, temos que β_o é positivo e, para altas transferências de momentum ($Q^2 > 1 \text{ GeV}$), a constante de acoplamento $\alpha_s \rightarrow 0$, comportamento conhecido como liberdade assintótica. Nesse regime, os pártons no interior do hádron atuam como partículas quase-livres, de acordo com o limite de Bjorken, e pode ser usada teoria de perturbação.

4 Modelo de Pártons

A descrição de hádrons como um conjunto de partículas elementares pontuais, os pártons, que podem ser quarks ou glúons, surgiu após a proposta de que há uma invariância de escalamento nas funções de estrutura hadrônicas (W_1 e W_2)[18], que estão presentes no tensor de vértice hadrônico [19]

$$W_{\nu\mu} = \left(-g_{\nu\mu} + \frac{q_\nu q_\mu}{q^2} \right) W_1 + \frac{1}{M^2} \left(P_\nu - \frac{Pq}{q^2} q_\nu \right) \left(P_\mu - \frac{qP}{q^2} q_\mu \right) W_2, \quad (4.1)$$

presente na seção de choque de um espalhamento profundamente inelástico [20]

$$\frac{d\sigma}{dudt} = \frac{4\pi\alpha^2}{s^2t^2} ML_{\nu\mu} W^{\nu\mu} = \frac{4\pi\alpha^2}{s^2t^2} \frac{1}{s+u} [-(s+u)tMW_1 - us\nu W_2], \quad (4.2)$$

onde $L_{\nu\mu}$ é o tensor do vértice leptônico e α a constante de acoplamento eletromagnética.

No limite de Bjorken, quando $Q^2, \nu \rightarrow \infty$, essa invariância indica que as funções de estrutura passam a depender somente de x

$$\lim_{Q^2, \nu \rightarrow \infty} MW_1(Q^2, \nu) \Rightarrow F_1(x), \quad (4.3a)$$

$$\lim_{Q^2, \nu \rightarrow \infty} \nu W_2(Q^2, \nu) \Rightarrow F_2(x). \quad (4.3b)$$

A partir do escalamento, o modelo de pártons se fundamenta em duas hipóteses básicas:

1. Em um referencial de momentum infinito ($P \rightarrow \infty$), os hádrons interagem como um conjunto de partículas pontuais e carregadas, com momentum paralelo ao hádron e fração de momentum x , tal que $\sum_i x_i P = P$.
2. A seção de choque do espalhamento inelástico lépton-hádron é a soma das probabilidades (e não das amplitudes) das seções de choque elásticas lépton-párton.

As hipóteses acima só possuem sentido em um referencial onde o momentum do hádron seja muito maior do que a massa e o momentum transversal das partículas. Em tal sistema, a dilatação temporal relativística faz com que o párton possa ser tratado como uma partícula livre, já que o intervalo temporal entre as interações partônicas se torna muito maior do que a da interação fóton-párton. O DIS no modelo partônico está representado na Figura 4.1.

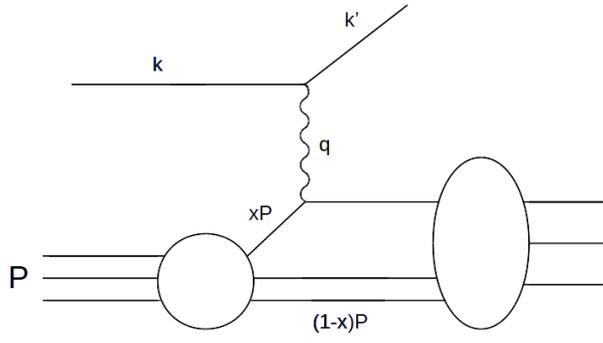


Figura 4.1: Espalhamento profundamente inelástico no modelo de pártons

Definindo $q_i(x_i)$ como a probabilidade de um párton do tipo i com momentum $x_i P$ ser encontrado no hádron, obtemos as relações

$$N_i = \int_0^1 q_i(x_i) dx_i, \quad \sum_i \int_0^1 x_i q_i(x_i) dx_i = 1, \quad (4.4)$$

onde N_i é o número de pártons do tipo i . A seção de choque para o processo descrito na Fig.4.1, em termos das variáveis de Mandelstam, fica

$$\frac{d\sigma^{\text{lepton-hadron}}}{dtdu} = \sum_i \int_0^1 q_i(x) \frac{d\sigma^{\text{lepton-parton}}}{dtdu} dx \quad (4.5)$$

A seção de choque elástica do espalhamento lépton-pártons pode ser escrita [21]

$$\frac{d\sigma}{dtdu} = \frac{2\pi\alpha^2\epsilon_i^2}{t^2} x_i \left(\frac{s^2 + u^2}{s^2} \right) \delta(t + x_i(s + u)), \quad (4.6)$$

sendo ϵ_i a carga fracionária do párton. Colocando (4.2) e (4.6) em (4.5), e usando a aproximação de momentum infinito e o limite de Bjorken, encontra-se, para um párton de spin 1/2 [22]

$$2xF_1(x) = F_2(x), \quad F_2(x) = \sum_i x\epsilon_i^2 q_i(x). \quad (4.7)$$

Para um párton de spin 0,

$$F_1(x) = 0, \quad F_2(x) = \sum_i x\epsilon_i^2 q_i(x). \quad (4.8)$$

Para determinar o spin dos pártons experimentalmente, foi introduzida uma razão R_γ

$$R_\gamma = \frac{W_2}{W_1} \left(1 + \frac{\nu^2}{Q^2} \right) - 1. \quad (4.9)$$

No limite de Bjorken, para uma partícula de spin 0, $R_\gamma \rightarrow \infty$. Para uma partícula de spin 1/2, no mesmo limite, $R_\gamma \rightarrow 0$. Segundo os resultados experimentais de [23], pártons com spin 1/2 seriam mais consistentes com o modelo. Isso indica que os pártons seriam férmions e, como o grupo unitário de simetrias usado para descrever os hádrons é o mesmo para os quarks, o SU(6), concluiu-se que se tratavam de quarks. Dessa forma, as funções $q_i(x)$ podem ser escritas como $i(x)$ ou $\bar{i}(x)$ para quarks de sabor $i = u$ (up), d (down), s (strange), b (bottom), c (charm) e t (top) ou seus antiquarks \bar{u} , \bar{d} , \bar{s} , \bar{b} , \bar{c} e \bar{t} .

Os quarks no interior do hádron são classificados de duas formas: os quarks de valência, que reproduzem os números quânticos do hádron, e os quarks de mar, que são pares virtuais de quark e antiquark produzidos através do propagador da interação forte e possuem os números

quânticos do vácuo. No caso de prótons (p) e nêutrons (n), as contribuições de quarks mais pesados são desprezíveis, e podemos modelá-los apenas em função de u , d e s . Utilizando as relações (4.7):

$$F_2^j = x \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^j(x) + \bar{u}^j(x)] + x \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^j(x) + \bar{d}^j(x)] + x \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^j(x) + \bar{s}^j(x)], \quad (4.10)$$

onde $j = p$ ou n . Como o próton e o nêutron fazem parte de um dubleto de isospin, podemos considerar $u^p(x) = d^n(x) \equiv u(x)$, bem como $d^p(x) = u^n(x) \equiv d(x)$. As funções dos quarks u e d são separadas em uma parte de mar s e outra de valência v

$$u(x) = u_s(x) + u_v(x), \quad d(x) = d_s(x) + d_v(x). \quad (4.11)$$

Enquanto que as funções para s e os antiquarks só possuem componentes de mar e, pelo fato de suas massas serem similares, podemos usar

$$u_s(x) = \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) = s(x) = \bar{s}(x) \equiv S \quad (4.12)$$

Usando as relações acima, podemos reescrever (4.10)

$$F_2^p = x \frac{1}{9} (4u_v + d_v) + \frac{4}{3} S \quad (4.13a)$$

$$F_2^n = x \frac{1}{9} (u_v + 4d_v) + \frac{4}{3} S \quad (4.13b)$$

A partir de resultados experimentais das funções de estrutura dos núcleons $F_2^{p,n}(x)$ [24][25], obteve-se que, para $x \rightarrow 0$, os quarks de mar predominam e a probabilidade de encontrá-los no núcleon cresce com o inverso de x . Ou seja, na região de altas energias há uma forte predominância dos quarks de mar.

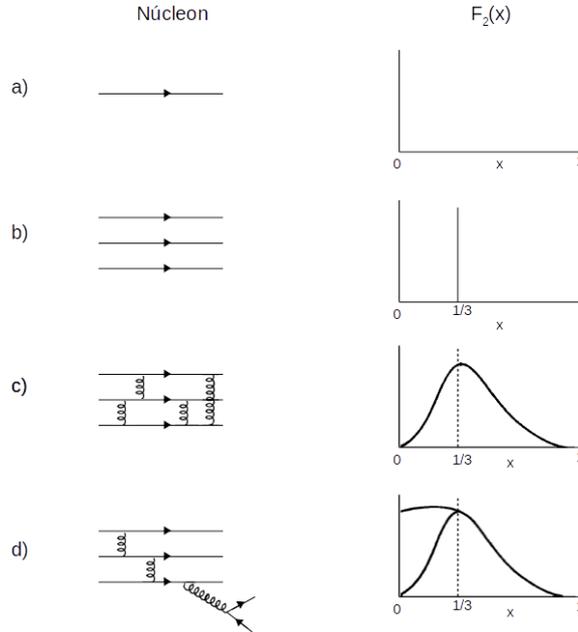


Figura 4.2: Modificações na função de estrutura com a interação partônica [21].

Na Figura 4.2, está exemplificado como a evolução dos pártons modifica as funções de estrutura F_2 (4.13) em um núcleon. Nos dois primeiros cenários da Figura 4.2 (a e b), o núcleon seria formado somente por um ou três quarks de valência, cada um com uma fração igual de momentum, e a função de estrutura apresenta somente um pico. Na medida em que ocorrem

interações entre os quarks de valência, através de glúons, o momentum se distribui Fig. 4.2c, mas a função de estrutura ainda apresenta um máximo em $x = 1/3$. No último cenário, acrescenta-se a contribuição dos quarks de mar formados através de pares quark-antiquark, carregando frações ainda menores do momentum total, e há um crescimento na função de estrutura para valores menores de x .

Parte II

Equações Lineares

5 DGLAP

5.1 Quebra de Escalamento e as equações DGLAP

A QCD perturbativa prevê a quebra de escalamento das funções de estrutura, o que também é encontrado experimentalmente[27]. Para entender como funciona essa quebra, relembremos a escala de resolução transversa, definida em (2.7). Para um fóton de momentum Q_1^2 interagindo com um quark, $q_i(x, Q_1^2)$ representa a probabilidade de que o quark tenha fração de momentum x . Se aumentarmos o momentum do fóton $Q_2^2 > Q_1^2$, a escala de resolução diminui, e o fóton é capaz de detectar mais pártons com frações de momentum $x' < x$, e teremos que $q_i(x, Q_1^2) > q_i(x, Q_2^2)$ ou $q_i(x', Q_1^2) < q_i(x', Q_2^2)$. Dessa forma, tanto as distribuições partônicas quanto as funções de estrutura passam a depender também de Q^2

$$F_2(x) \rightarrow F_2(x, Q^2) \quad (5.1)$$

Para analisar a dependência de Q^2 nas funções de estrutura, é útil separá-las em componentes simétrica e antissimétrica em relação à troca de sabor. Definimos a função não singleto de sabor

$$\Delta^{f\bar{f}}(x, Q^2) \equiv q^f(x, Q^2) - q^{\bar{f}}(x, Q^2), \quad (5.2)$$

e a função singleto de sabor

$$\Sigma(x, Q^2) \equiv \sum_f \left[q^f(x, Q^2) + q^{\bar{f}}(x, Q^2) \right], \quad (5.3)$$

onde \bar{f} representa um antiquark de sabor f . A evolução da função não singleto (5.2) leva em conta apenas a evolução dos quarks, pois a aniquilação de glúons gera distribuições iguais de quarks e antiquarks, e pode ser escrita

$$Q^2 \frac{\partial \Delta^{f\bar{f}}(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 P_{qq}(z) \Delta^{f\bar{f}}(x/z, Q^2) \frac{dz}{z}. \quad (5.4)$$

Em (5.4) são introduzidas as funções de desobramento P_{ij} [2], que representam a probabilidade de um párton j com fração de momentum x' se transformar em um párton i com fração de momentum x , sendo $z \equiv k^+/k'^+$ (Figura 5.1) na notação do cone de luz. Como a função não singleto não considera a contribuição dos quarks de mar, e portanto dos glúons, somente a função P_{qq} aparece em sua evolução. A participação gluônica é levada em conta nas funções singleto (5.3), cuja evolução pode ser escrita juntamente com a distribuição gluônica $G(x, Q^2)$

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} \Sigma(x, Q^2) \\ G(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \begin{pmatrix} P_{qq}(z) & P_{qG}(z) \\ P_{Gq}(z) & P_{GG}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma(x/z, Q^2) \\ G(x/z, Q^2) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

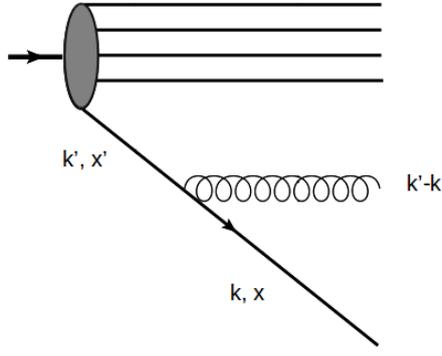


Figura 5.1: Uma das correções de mais baixa ordem contribuindo para a distribuição de quarks.

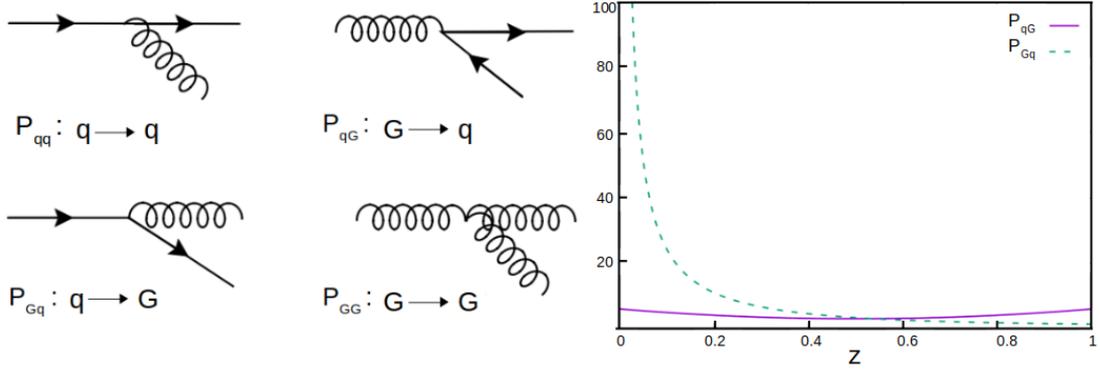


Figura 5.2: Representação em diagrama das funções de desdobramento (5.6)[2] (lado esquerdo) e gráfico das funções de desdobramento P_{Gq} e P_{qG} para $N_f = 6$ e $N_c = 3$ em função de z (lado direito).

As funções de desdobramento em (5.4) e (5.5) são:

$$P_{qq}(z) = C_F \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right], \quad (5.6a)$$

$$P_{Gq}(z) = C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}, \quad (5.6b)$$

$$P_{qG}(z) = N_f [z^2 + (1-z)^2], \quad (5.6c)$$

$$P_{GG}(z) = 2N_c \left[\frac{z}{(1+z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right] + \frac{11N_c - 2N_f}{6} \delta(1-z), \quad (5.6d)$$

onde

$$C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \quad (5.7)$$

é o operador de Casimir na representação fundamental de $SU(N_c)$ [28] ($N_c = 3$ é o número de cores da cromodinâmica quântica), construído a partir dos geradores do grupo de simetria t^a

$$\sum_{a=1}^{N_c^2-1} t^a t^a = C_F. \quad (5.8)$$

Em (5.6), a notação $(1-z)_+$ é definida por [31]

$$\int_x^1 \frac{1}{(1-z)_+} f(z) dz \equiv \int_x^1 \frac{1}{1-z} [f(z) - f(1)] + f(1) \ln(1-x) dz. \quad (5.9)$$

Na Figura 5.2 mostramos os diagramas associados a cada função de desdobramento e o comportamento de duas delas (P_{qq} e P_{GG} não possuem significado sem integração) em função de z . Quando $z = 0$, o momentum do glúon ($k' - k$) da Figura 5.1 é máximo, e também temos um máximo (uma divergência) em P_{Gq} , o que significa que a chance de encontrar um glúon na função de onda do quark é máxima. Também notamos que P_{qG} não varia muito entre o máximo e o mínimo ($z = 1$) do momentum gluônico.

As distribuições (5.4) e (5.5) são conhecidas como as equações de evolução Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP). A versão de eletrodinâmica quântica foi obtida por Gribov e Lipatov [1], enquanto que a versão para a QCD foi obtida independentemente por Altarelli e Parisi [2] e Dokshitzer [3]. Nas próximas seções, introduziremos métodos para resolver as equações. A evolução DGLAP prevê, para um dado x , a 'quantidade' de partículas portando fração x do momentum do hádron em função de Q^2 . A emissão de glúons, como na Figura 5.1, é o primeiro tipo de correção ao modelo de pártons livre, e também pode ser representada na forma de uma cascata (ou escada) gluônica (Figura 7.1b), nas quais os glúons possuem seus momenta ordenados.

5.2 Solução geral das equações DGLAP

Mostraremos como resolver as equações DGLAP pelo método da transformada de Mellin, como originalmente proposto em [29]. Definimos o momento $f_\omega(Q^2)$ da função de distribuição $f(x, Q^2)$ através da transformada de Mellin

$$f_\omega(Q^2) \equiv \int_0^1 f(x, Q^2) x^\omega dx, \quad (5.10)$$

e a sua inversa,

$$f(x, Q^2) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f_\omega(Q^2) x^{-\omega-1} \frac{d\omega}{2\pi i}, \quad (5.11)$$

onde o parâmetro a é ajustado tal que o caminho da integração esteja à direita de todas as singularidades de f_ω .

Então, a solução das equações DGLAP (5.4) e (5.5) no espaço de momentum fica

$$Q^2 \frac{\partial \Delta_\omega^{f\bar{f}}(Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \gamma_{qq}(\omega) \Delta_\omega^{f\bar{f}}(Q^2) \quad (5.12)$$

e

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} \Sigma_\omega(Q^2) \\ G_\omega(Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_{qq}(\omega) & \gamma_{qG}(\omega) \\ \gamma_{Gq}(\omega) & \gamma_{GG}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_\omega(Q^2) \\ G_\omega(Q^2) \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Em (5.12) e (5.13), $\gamma_{ij}(\omega)$ são as chamadas dimensões anômalas, definidas por

$$\gamma_{ij}(\omega) \equiv \int_0^1 P_{ij}(z) z^\omega dz. \quad (5.14)$$

Para obter as dimensões anômalas de DGLAP, basta substituir as equações (5.6) em (5.14). As soluções de (5.12) e (5.13) são obtidas trivialmente, dadas as condições iniciais $\Delta^{f\bar{f}}(x, Q_o^2)$, $\Sigma(x, Q_o^2)$ e $G(x, Q_o^2)$:

$$\Delta_\omega^{f\bar{f}}(Q^2) = \exp \left[\int_{Q_o^2}^{Q^2} \frac{\alpha_s(Q'^2)}{2\pi} \gamma_{qq}(\omega) \frac{dQ'^2}{Q'^2} \right] \Delta_\omega^{f\bar{f}}(Q_o^2), \quad (5.15)$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_\omega(Q^2) \\ G_\omega(Q^2) \end{pmatrix} = \exp \left[\int_{Q_o^2}^{Q^2} \frac{\alpha_s(Q'^2)}{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_{qq}(\omega) & \gamma_{qG}(\omega) \\ \gamma_{Gq}(\omega) & \gamma_{GG}(\omega) \end{pmatrix} \frac{dQ'^2}{Q'^2} \right] \begin{pmatrix} \Sigma_\omega(Q_o^2) \\ G_\omega(Q_o^2) \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

5.2.1 Aproximação de Duplo Logaritmo (DLA)

A aproximação de duplo logaritmo é feita no regime $Q^2 \gg Q_o^2$, sendo Q_o^2 a escala inicial da evolução, e podemos aproximar

$$\alpha_s \ln \frac{1}{x} \ln \frac{Q^2}{Q_o^2} \approx 1. \quad (5.17)$$

Para uma alta transferência de momentum, os termos relevantes nas integrais das Eqs. (5.4) e (5.5) serão para z pequeno, e as únicas funções relevantes em (5.6) são

$$P_{Gq}(z) \Big|_{z \ll 1} \approx \frac{2C_F}{z}, \quad P_{GG}(z) \Big|_{z \ll 1} \approx \frac{2N_c}{z}. \quad (5.18)$$

Usando a aproximação da equação (5.18), chegamos em uma distribuição de glúons para Q^2 grande

$$Q^2 \frac{\partial x G(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2) N_c}{\pi} \int_x^1 x' G(x', Q^2) \frac{dx'}{x'}, \quad (5.19)$$

onde redefinimos $z = x/x'$.

Para resolver (5.19), usa-se novamente o método da transformada de Mellin apresentado no início da seção 5.2, e se obtém

$$x G(x, Q^2) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp \left\{ \omega \ln \frac{1}{x} + \int_{Q_o^2}^{Q^2} \frac{\alpha_s(Q'^2) N_c}{\pi \omega} \frac{dQ'^2}{Q'^2} \right\} G_\omega(Q_o^2) \frac{d\omega}{2\pi i}, \quad (5.20)$$

onde $G_\omega(Q_o^2)$ é a condição inicial. Usando a expressão para a constante de acoplamento dependente de Q^2 (3.2), a integral em Q^2 de (5.20) fica

$$\frac{N_c}{\pi \omega \beta_o} \int_{Q_o^2}^{Q^2} \frac{1}{\ln(Q'^2/\Lambda_{QCD}^2)} \frac{dQ'^2}{Q'^2} = \frac{N_c}{\pi \omega \beta_o} \ln \left[\frac{\ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}{\ln(Q_o^2/\Lambda_{QCD}^2)} \right]. \quad (5.21)$$

Para resolver (5.20), já integrada em Q^2 , podemos definir as seguintes funções (para abreviação da notação)

$$P(\omega, x, Q^2) \equiv \omega \ln \frac{1}{x} + \frac{N_c}{\pi \beta_o \omega} \rho(Q^2), \quad (5.22)$$

com

$$\rho(Q^2) \equiv \ln \left[\frac{\ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}{\ln(Q_o^2/\Lambda_{QCD}^2)} \right] = \ln \frac{\alpha_s(Q_o^2)}{\alpha_s(Q^2)}. \quad (5.23)$$

Desta forma, e também usando $P(\omega, x, Q^2) = P(\omega)$ apenas por redução de notação, (5.20) pode ser reescrita

$$x G(x, Q^2) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{P(\omega)} G_\omega(Q_o^2) \frac{d\omega}{2\pi i}. \quad (5.24)$$

Como a solução dependerá fortemente das condições iniciais ($G_\omega(Q_o^2)$), elas precisam ser conhecidas exatamente. Porém, para x muito pequeno podem ser feitas aproximações, e usaremos, nesse caso, a aproximação do ponto de sela. A aproximação consiste em encontrar um ω (ω_{sp}) tal que a primeira derivada do expoente de (5.24) se anule, e então expandir o expoente em torno de ω_{sp} . Temos

$$\frac{dP(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_{sp}} = \ln \frac{1}{x} - \frac{N_c}{\pi \beta_o \omega_{sp}^2} \rho(Q^2) = 0, \quad (5.25)$$

$$\Rightarrow \omega_{sp} = \pm \sqrt{\frac{N_c}{\pi \beta_o} \frac{\rho(Q^2)}{\ln(1/x)}}, \quad (5.26)$$

onde usaremos ω_{sp} positiva. Expandindo $P(\omega)$ em série de Taylor

$$P(\omega) = P(\omega_{sp}) + (\omega - \omega_{sp})P'(\omega_{sp}) + (\omega - \omega_{sp})^2P''(\omega_{sp}) + (\omega - \omega_{sp})^3P'''(\omega_{sp}) + \dots \quad (5.27)$$

onde o número de linhas (P' , P'' , \dots) denota a ordem da derivada em ω .

Usaremos a aproximação até o termo quadrático da expansão

$$P(\omega) \approx P(\omega_{sp}) + (\omega - \omega_{sp})P'(\omega_{sp}) + (\omega - \omega_{sp})^2P''(\omega_{sp}) = P(\omega_{sp}) + (\omega - \omega_{sp})^2P''(\omega_{sp}), \quad (5.28)$$

e depois mostraremos que o termo cúbico é desprezível nos limites considerados. Assumindo que $G_\omega(Q_o^2)$ varia lentamente com ω , podemos tirá-la da integral (5.24) aproximando $G_\omega(Q_o^2) \approx G_{\omega_{sp}}(Q_o^2)$. Fazendo $a = \omega_{sp}$ e definindo uma nova variável de integração $\omega - \omega_{sp} \equiv iw$, (5.24) pode ser reescrita

$$xG(x, Q^2) \approx e^{P(\omega_{sp})} G_{\omega_{sp}}(Q_o^2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-P''(\omega_{sp})w^2/2} \frac{dw}{2\pi}. \quad (5.29)$$

Integrando em w e substituindo

$$P''(\omega) = \frac{2N_c}{\pi\beta_o\omega^3} \ln \left[\frac{\ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}{\ln(Q_o^2/\Lambda_{QCD}^2)} \right], \quad (5.30)$$

obtemos a função de distribuição gluônica na aproximação do ponto de sela

$$xG(x, Q^2) \approx \frac{G_{\omega_{sp}}(Q_o^2)}{\sqrt{4\pi}} \left\{ \frac{N_c}{\pi\beta_o} \ln \frac{\ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}{\ln(Q_o^2/\Lambda_{QCD}^2)} \right\}^{1/4} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{-3/4} e^{2\sqrt{\frac{N_c}{\pi\beta_o} \ln \frac{\ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}{\ln(Q_o^2/\Lambda_{QCD}^2)} \ln \frac{1}{x}}}. \quad (5.31)$$

Analisando a largura típica da integral (5.29)

$$\omega - \omega_{sp} \sim [P''(\omega_{sp})]^{-1/2}, \quad (5.32)$$

o termo cúbico na expansão de $P(\omega)$ em série de Taylor pode ser escrito

$$P'''(\omega_{sp})(\omega - \omega_{sp})^3 \sim P'''(\omega_{sp})[P''(\omega_{sp})]^{-3/2}. \quad (5.33)$$

Derivando (5.30) novamente em relação a ω e substituindo na parte direita de (5.33), o termo cúbico

$$P'''(\omega_{sp})(\omega - \omega_{sp})^3 \sim [\rho(Q^2)]^{-1/4} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{-1/4} \quad (5.34)$$

é desprezível na região de x pequeno e Q^2 alto, como queríamos demonstrar.

Um resultado simplificado da equação DGLAP pode ser obtido tomando o limite de x pequeno e mantendo a α_s constante, independente de Q . Usando os mesmos métodos apresentados nessa seção, podemos obter uma distribuição de glúons (5.19) da forma

$$xG(x, Q^2) \sim \exp \left(2\sqrt{\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_o^2} \ln \frac{1}{x}} \right). \quad (5.35)$$

Na Figura 5.3 apresentamos a forma do crescimento (em unidades arbitrárias) da função (5.35) em função de Q^2 para diferentes valores de x , usando $Q_o^2 = 10^3$ (1 GeV). Podemos ver que as soluções crescem cada vez mais rapidamente quando x diminui.

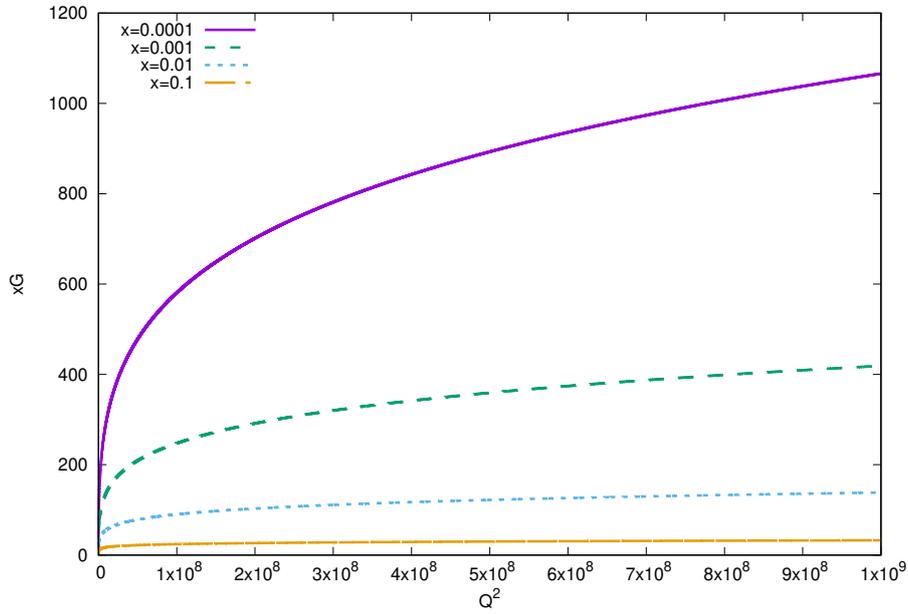


Figura 5.3: Evolução DGLAP DLA com $\alpha_s = 0.1$ e $N_c = 3$ para diferentes valores de x .

Voltando ao resultado (5.31), podemos ver que a função, para x pequeno, cresce mais rapidamente do que qualquer potência de $\ln 1/x$ devido ao termo exponencial, mas mais lentamente do que $1/x$, partindo de uma condição inicial não singular. Devido aos vínculos de unitariedade (ver Apêndice A), espera-se que as distribuições de glúons, bem como as funções de estrutura, não cresçam indefinidamente. Logo, as equações DGLAP não caracterizam propriamente a região de muito baixo x , apesar de poderem ser usadas para altos valores de Q^2 . Outras dinâmicas e correções serão apresentadas nas próximas seções.

6 BFKL

6.1 A Equação BFKL e o Pomeron

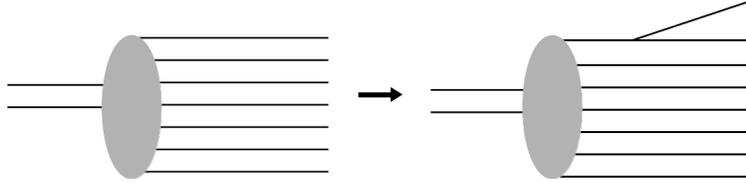


Figura 6.1: Dinâmica BFKL [17].

A primeira equação de evolução proposta para baixas energias foi a Balitskii-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) [4],[5],[6], representada pela Figura 6.1. Diferentemente da DGLAP, não se precisa assumir que $\ln Q^2 \gg 1$, apenas fixa-se um valor de Q^2 e trabalha-se no regime $x \rightarrow 0$. Por causa disso, na expansão em logaritmo dominante (LLA) o parâmetro a ser somado em séries de potência fica

$$\alpha_s \ln \frac{1}{x} \sim 1, \quad \text{com} \quad \ln Q^2 \ll \ln 1/x. \quad (6.1)$$

No lado esquerdo da Figura 6.1, um hádron é representado por N pártons e, ao sofrer um boost (aumento de energia e velocidade), um ou mais pártons têm maior probabilidade de emitir novos pártons (lado direito da figura), aumentando a densidade do hádron. A equação BFKL, então, evolui em x e pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial N(x, k_\perp^2)}{\partial \ln(1/x)} = \alpha_s K_{BFKL} \otimes N(x, k_\perp^2), \quad (6.2)$$

onde $N(x, k_\perp^2)$ é a amplitude de espalhamento, que pode ser interpretada como o número de pártons, e k_\perp é o momentum transverso do parton na escada partônica. K_{BFKL} é o núcleo (*kernel*) de uma transformada integral, definido por [4],[5]

$$\int K_{BFKL}(l, q) f(\vec{q}_\perp) d^2 q_\perp \equiv \frac{1}{\pi} \int \left[f(\vec{q}_\perp) - \frac{l_\perp^2}{2q_\perp^2} f(\vec{l}_\perp) \right] \frac{d^2 q_\perp}{(\vec{l}_\perp - \vec{q}_\perp)^2}, \quad (6.3)$$

onde l é o momentum inicial do glúon (Figura 6.2). A equação de evolução BFKL também pode ser escrita na forma integral

$$\frac{\partial G(\vec{l}_\perp, \vec{l}'_\perp, Y)}{\partial Y} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi^2} \int \left[G(\vec{q}_\perp, \vec{l}'_\perp, Y) - \frac{l_\perp^2}{2q_\perp^2} G(\vec{l}_\perp, \vec{l}'_\perp, Y) \right] \frac{d^2 q_\perp}{(\vec{l}_\perp - \vec{q}_\perp)^2}, \quad (6.4)$$

onde $Y \equiv \ln(s|\vec{x}_{1,\perp}| |\vec{x}_{2,\perp}|)$ (Figura 6.2) com condição inicial

$$G(\vec{l}_\perp, \vec{l}'_\perp, Y = 0) = \delta^2(\vec{l}_\perp - \vec{l}'_\perp). \quad (6.5)$$

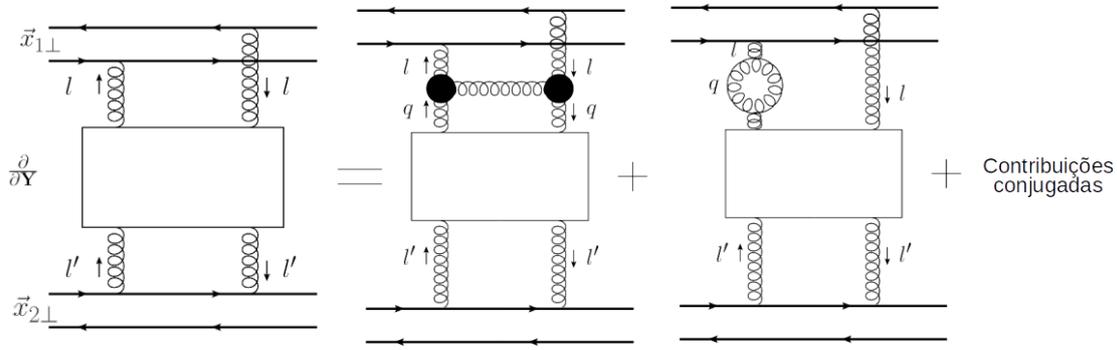


Figura 6.2: Representação diagramática da equação BFKL na forma integral [30].

A função $G(\vec{l}_\perp, \vec{l}'_\perp, Y)$ é chamada de função de Green da equação BFKL, e descreve a propagação de dois glúons no canal t , sendo representada pela caixa na Figura 6.2. A troca destes dois glúons com os números quânticos do vácuo foi estudada por Low [32] e Nussinov [33], e é a forma mais simples de representar o *Pomeron*, um único objeto que explicaria essa interação, que poderia ter dois ou mais glúons. As contribuições do Pomeron na amplitude de espalhamento e na seção de choque total do processo são, respectivamente,

$$M \sim s^{\alpha(t)} \quad \text{e} \quad \sigma_{tot} \sim s^{\alpha(0)-1}, \quad (6.6)$$

onde $\alpha(t)$ é chamada de trajetória ou momento angular do Pomeron, e é frequentemente usada na forma expandida [34]

$$\alpha(t) \approx \alpha(0) + \alpha' t. \quad (6.7)$$

No lado esquerdo da Figura 6.2 esquematizou-se a interação partônica entre dois glúons, e no lado direito estão as contribuições para tal esquema. No primeiro termo da direita, o círculo cheio é um vértice de Lipatov, que representa a soma sobre todos os diagramas de emissão de glúons. O segundo termo do lado direito simboliza todos os tipos de correções virtuais, aquelas em que o glúon emitido não está no estado final (diagramas em *loop* e cruzados).

Analisando a seção de choque da troca de Pomeron mais correções representadas na caixa da figura 6.2, pode-se definir a função distribuição de glúons não-integrada da BFKL:

$$\begin{aligned} \Phi(x, k_\perp^2) = & \frac{\alpha_s C_F}{\pi} \int d^2 x_\perp \int_0^1 dz |\Psi(\vec{x}_\perp, z)|^2 \\ & \times \int (2 - e^{-i\vec{l}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} - e^{i\vec{l}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}) G(\vec{k}_\perp, \vec{l}_\perp, \ln 1/x) \frac{d^2 l_\perp}{l_\perp^2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

A diferença entre a distribuição de glúons não integrada e a distribuição de glúons ($xG(x, Q^2)$), é de que a primeira 'conta' o número de glúons com momentum k_\perp e fração de momentum do hádron x , enquanto que a segunda conta o número de glúons com momentum menor do que Q . As duas se relacionam pela equação

$$\Phi(x, k_\perp^2) = \left. \frac{\partial xG(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} \right|_{Q^2=k_\perp^2} \quad (6.9)$$

6.2 Solução Geral da Equação BFKL

A solução geral da equação BFKL é dada pela expansão sobre as autofunções do kernel (6.3), que são do tipo[6]

$$l_\perp^{2(\gamma-1)} e^{in\phi_l}, \quad (6.10)$$

onde γ é um número complexo qualquer, análogo à dimensão anômala da DGLAP, ϕ_l é o ângulo entre \vec{l}_\perp e um eixo qualquer, e n um número inteiro. Definindo $\gamma \equiv 1/2 + i\nu$, ν real, a solução geral fica

$$G(\vec{l}_\perp, \vec{l}'_\perp, Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \chi(n, \nu) Y \right] l_\perp^{-1+2i\nu} l'^{-1-2i\nu}_\perp e^{in(\phi-\phi')} \frac{d\nu}{2\pi^2}, \quad (6.11)$$

onde [6]

$$\chi(n, \nu) = 2\psi(1) - \psi \left(\frac{1+|n|}{2} + i\nu \right) - \psi \left(\frac{1+|n|}{2} - i\nu \right), \quad (6.12)$$

é o autovalor das autofunções do operador kernel e

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1} - 1}{t-1} dt + \psi(1), \quad (6.13)$$

com $z \equiv e^{i(\phi_q - \phi_l)}$.

Devido à complexidade da equação (6.11), mostraremos como resolvê-la na aproximação de duplo logaritmo, assim como na DGLAP, e pela aproximação de difusão, nas próximas seções, segundo os métodos utilizados em [30].

6.2.1 Aproximação de Duplo Logaritmo

Para inferir algumas propriedades da função $\chi(n, \nu)$, fixemos $\nu = 0$ (para eliminar a parte imaginária). Analisando $\chi(n, 0)$:

$$\chi(n, \nu) \Big|_{\nu=0} = \int_0^1 \frac{t^{\frac{|n|-1}{2} + i\nu} + t^{\frac{|n|-1}{2} - i\nu} - 2}{1-t} dt \Big|_{\nu=0} \quad (6.14a)$$

$$\chi(n, 0) = 2 \int_0^1 \frac{t^{\frac{|n|-1}{2}} - 1}{1-t} dt. \quad (6.14b)$$

Como t varia de 0 a 1, a maior contribuição da integral em (6.14b) ocorrerá quando $n = 0$, e portanto, será mantido apenas o primeiro termo na soma sobre n em (6.11),

$$G(\vec{l}_\perp, \vec{l}'_\perp, Y) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \chi(0, \nu) Y \right] l_\perp^{-1+2i\nu} l'^{-1-2i\nu}_\perp \frac{d\nu}{2\pi^2} \quad (6.15a)$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \chi(0, \nu) Y + 2i\nu \ln \frac{l_\perp}{l'_\perp} \right] \frac{d\nu}{2\pi^2 l_\perp l'_\perp}. \quad (6.15b)$$

Na aproximação de duplo logaritmo, considera-se o caso em que $l_\perp \gg l'_\perp$, e o logaritmo em (6.15b) é grande. O ponto de sela da integral em (6.15b) é

$$\nu \approx \frac{i}{2} - i \sqrt{\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \frac{Y}{\ln(l_\perp^2/l'_\perp)}}. \quad (6.16)$$

Expandindo a exponencial em (6.15b) em torno do ponto de sela e integrando

$$G(\vec{l}_\perp, \vec{l}'_\perp, Y) \approx \frac{1}{2\pi^{3/2} l_\perp^2} \left(\frac{\alpha_s N_c Y}{\pi \ln^3(l_\perp^2/l'_\perp)} \right)^{1/4} \exp \left[2 \sqrt{\frac{\alpha_s N_c}{\pi} Y \ln(l_\perp^2/l'_\perp)} \right]. \quad (6.17)$$

Portanto, a seção de choque das interações partônicas segundo a evolução BFKL, para x pequeno, cresce da forma

$$\sigma_{BFKL}^{DLA} \sim \exp \left[2 \sqrt{\frac{\alpha_s N_c}{\pi} Y \ln(l_\perp^2/l'_\perp)} \right]. \quad (6.18)$$

Podemos notar a semelhança nas exponenciais de (6.18) e (5.35), fazendo as relações $Y \sim \ln 1/x$ e $\ln l_{\perp}^2/l'_{\perp}{}^2 \sim \ln Q^2/Q_0^2$. No lado esquerdo da Figura 6.3, mostramos a evolução em escala arbitrária da seção de choque (6.18) para diferentes valores de l_{\perp} (somente l na legenda), mantendo $l'_{\perp}{}^2 = 10^6$ (eV) e evoluindo em x . Podemos perceber que, para x muito pequeno, a evolução torna-se aproximadamente linear.

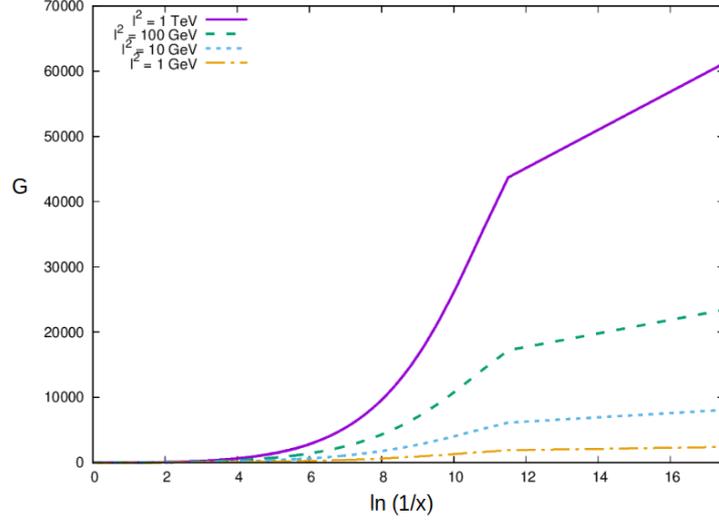


Figura 6.3: Evolução do termo dominante da solução DLA BFKL em escala arbitrária para diferentes valores de l_{\perp} .

6.2.2 Aproximação de Difusão

Essa aproximação pode ser utilizada quando $l_{\perp} \sim l'_{\perp}$. Utilizando a maior contribuição de $\chi(n, \nu)$ será para $n = 0$, podemos expandir a função em torno do ponto de sela para $\nu = 0$, e pode-se obter

$$\chi(0, \nu) \approx 4 \ln 2 - 14\zeta(3)\nu^2, \quad (6.19)$$

sendo $\zeta(z)$ a função Zeta de Riemann. Usando (6.19) em (6.15b), se obtém a aproximação de difusão para a BFKL[6]

$$G(\vec{l}_{\perp}, \vec{l}'_{\perp}, Y) \approx \frac{1}{2\pi^2 l_{\perp} l'_{\perp}} \sqrt{\frac{\pi^2}{14\zeta(3)\alpha_s N_c Y}} \exp \left[(\alpha_P - 1)Y - \frac{\pi \ln^2(l_{\perp}/l'_{\perp})}{14\zeta(3)\alpha_s N_c Y} \right], \quad (6.20)$$

onde

$$\alpha_P - 1 = \frac{4\alpha_s N_c}{\pi} \ln 2 \quad (6.21)$$

é o intercepto do Pomeron da BFKL (6.6). Quando x é pequeno, o termo dominante em (6.20) é o primeiro na exponencial, e teremos que a seção de choque das interações partônicas crescerá da forma

$$\sigma \sim e^{(\alpha_P - 1)Y} \sim \left(\frac{1}{x} \right)^{\alpha_P - 1}. \quad (6.22)$$

Quando resolvemos a equação DGLAP em DLA, observamos que a solução cresce mais lentamente do que $1/x$, e mesmo assim viola o limite de unitariedade. No caso da solução (6.18) o comportamento é semelhante, e em (6.22) o crescimento é mais rápido do que $1/x$ devido ao expoente positivo, ou seja, a solução de difusão da BFKL cresce mais rapidamente do que a DGLAP DLA, para x pequeno. Podemos ver que a condição (A.7) não é respeitada em nenhuma das soluções analisando a probabilidade da troca de um ou mais pártons, dependente do parâmetro de impacto b

$$p \sim s^{\Delta} e^{-2m_{\pi} b}, \quad (6.23)$$

onde Δ é um número positivo (número de pártons) e m_π a massa do pión (hádrón mais leve). Quando o parâmetro de impacto se aproxima do raio do disco onde a interação é importante, R , a probabilidade tende a 1, e temos que

$$R \sim \frac{\Delta}{2m_\pi} \ln s. \quad (6.24)$$

Logo, a seção de choque dos processos via interação forte deve respeitar [35]

$$\sigma_{tot} \leq \frac{\pi\Delta^2}{2m_\pi^2} \ln^2 s, \quad (6.25)$$

o que claramente não é o caso das duas soluções aproximadas para a BFKL.

Parte III

Equações Não Lineares

7 Correções de Sombreamento e a Equação GLR

7.1 Recombinação Partônica

As chamadas correções de sombreamento se referem à situação em que ocorre uma diminuição da seção de choque nuclear. Sem as CS, a seção de choque nuclear cresce linearmente com a massa A do núcleo, sendo proporcional também à seção de choque dos nucleons. Com as correções, surge um fator menor do que um no expoente de A , e o crescimento é mais lento [36]. Um dos modelos que tentam descrever esse fenômeno é o da recombinação de pártons, que trata da sobreposição de pártons dentro do nucleon em altas energias ($x \leq 0.1$).

Na recombinação partônica as hipóteses do modelo de pártons deixam de ser válidas, pois haverá sobreposição e interação entre os pártons. Considerando um nucleon de raio r_o , massa M , momentum P e velocidade V , seu comprimento longitudinal relativístico será $\Delta L \approx 2r_o/\gamma V_N = 2r_o M/P$, enquanto que um párton com fração de momentum x em seu interior terá comprimento longitudinal $\Delta l \approx 1/xP$. A sobreposição dos pártons no nucleon ocorre quando $\Delta l > \Delta L$, ou seja, quando $x < 1/2r_o M$ [37],[7]. Nesse regime, os pártons não fazem mais parte de um nucleon específico, mas do núcleo como um todo, e interagem com os demais pártons. Nessa interação, podem ocorrer processos de recombinação, o que diminui o número total de quarks e glúons.

7.2 A equação GLR

O processo de shadowing aparece como uma correção nas equações DGLAP, que são acrescidas de termos não lineares que consideram a recombinação partônica entre quarks glúons. Essas equações modificadas foram obtidas por Gribov, Levin e Ryskin (GLR) [7] e Mueller e Qiu [8]. No limite DLA (5.17), a equação modificada para a distribuição gluônica nuclear fica [8]

$$\frac{\partial^2 xG(x, Q^2)}{\partial \ln(1/x) \partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_S N_c}{\pi} xG(x, Q^2) - \frac{4\pi^3}{(N_c^2 - 1)Q^2} \frac{\alpha_s^2(Q^2) N_c^2}{\pi^2} x^2 G^{(2)}(x, Q^2), \quad (7.1)$$

onde $G^{(2)}(x, Q^2)$ é uma função de correlação que descreve a probabilidade de dois glúons se sobreporem, dada por [8]

$$\frac{x^2 G^{(2)}(x, Q^2)}{A} = \frac{9}{8} \frac{A}{\pi R_A^2} [xG(x, Q^2)]^2, \quad (7.2)$$

onde R_A é o raio nuclear ou o raio efetivo de distribuição dos glúons, se usarmos a correlação apenas para um nucleon ($A = 1$).

Normalizando xG e substituindo (7.2) em (7.1), obtem-se a equação GLR (nuclear)

$$\frac{\partial^2 xG(x, Q^2)}{\partial \ln(1/x) \partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} xG(x, Q^2) - \frac{81}{16} \frac{\alpha_s^2(Q^2)}{Q^2} \frac{A}{R_A^2} [xG(x, Q^2)]^2. \quad (7.3)$$

Para a distribuição de glúons no nucleon, a equação GLR fica

$$\frac{\partial^2 xG(x, Q^2)}{\partial \ln(1/x) \partial \ln(Q^2)} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} xG(x, Q^2) - \frac{\alpha_s^2 N_c^2}{8Q^2 R^2} [xG(x, Q^2)]^2. \quad (7.4)$$

Na Figura 7.1, mostramos dois exemplos de recombinação de pares de glúons, gerando ao final apenas um vértice gluônico.

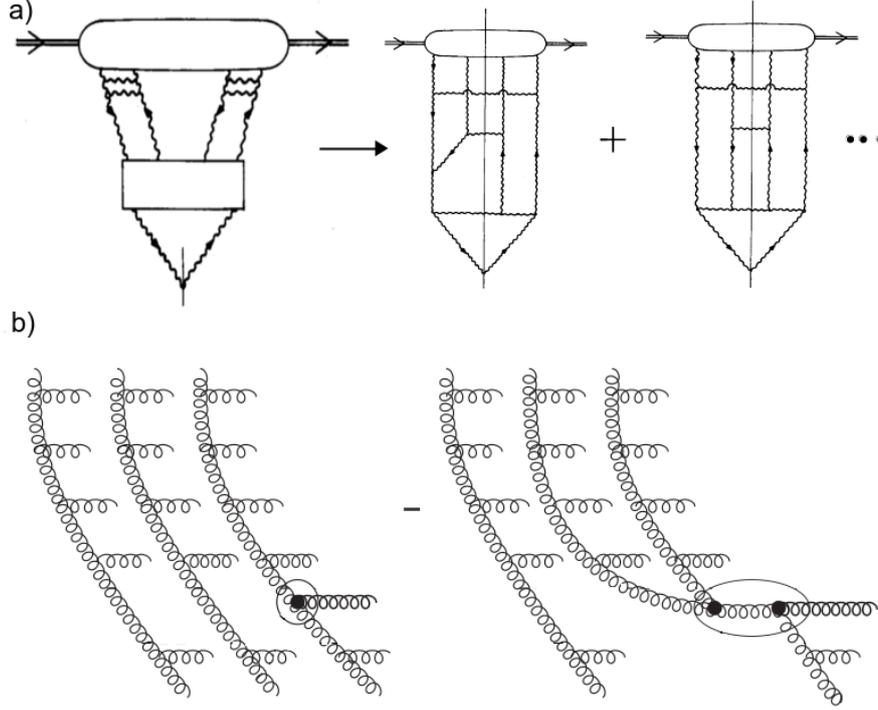


Figura 7.1: (a) Exemplo de diagramas de recombinação de cascatas gluônicas considerados na equação 7.3 [8]. (b) Representação esquemática da equação GLR-MQ, com o termo das cascatas gluônicas da DGLAP menos o termo de recombinação [7].

A equação GLR introduz o fator de escala Q_s , primeiramente proposto sendo proporcional a $1/x^\lambda$ [38] ($\lambda > 0$). A curva de Q_s separa a região de saturação, e a equação GLR está definida somente sobre essa curva ($Q^2 = Q_s^2$). A solução da equação pode ser obtida na aproximação semiclássica [7], através do método das curvas características que será apresentado na próxima seção. Por esse método, as soluções levam à redução e saturação da distribuição gluônica, mas fora da região de validade da equação GLR.

8 AGL: A Equação Generalizada

A equação Ayala-Gay Ducati-Levin (AGL) foi proposta no formalismo de Glauber[10], no qual se trata a partícula de interação virtual como um par de glúons, separados por uma distância r_\perp (Figura 8.1). O par de glúons interage através da troca de diagramas do tipo escada (Figura 7.1 e Figura 8.1), e em altas energias pode se considerar que a quantidade r_\perp se mantém constante. Partindo da condição (A.6) e dos vínculos de unitariedade de $A(s, \vec{b}_\perp) \rightarrow A(x, r_\perp, b)$, sendo b o parâmetro de impacto e σ_n^{gg} a seção de choque do par de glúons com o alvo (núcleon), a fórmula para a distribuição de glúons é dada por [10],[11]:

$$xG(x, Q^2) = \frac{4}{\pi^2} \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \int_{4/Q^2}^\infty \frac{d^2 r_\perp}{\pi r_\perp^4} \int_0^\infty 2 \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma_n^{gg}(x', r_\perp^2/4) S(b) \right] \right\} \frac{d^2 b}{\pi}. \quad (8.1)$$

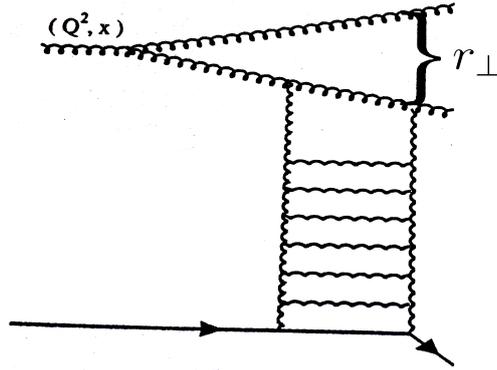


Figura 8.1: Interação no formalismo de Glauber[39].

Em (8.1), $S(b)$ é a função perfil, e

$$\sigma_n^{gg}(x, r_\perp^2/4) = \frac{3\pi^2 \alpha_s}{4} r_\perp^2 xG(x, 4/r_\perp^2). \quad (8.2)$$

Utilizando a parametrização gaussiana $S(b) \sim e^{-b^2/R^2}$ (R = raio da área ocupada pelos glúons) e derivando (8.1) em relação a $y \equiv \ln(1/x)$ e $\xi \equiv \ln(Q^2/Q_o^2)$ (Q_o escala inicial), se obtém a equação AGL

$$\frac{\partial^2 xG(y, \xi)}{\partial y \partial \xi} = \frac{2Q^2 R^2}{\pi^2} [C + \ln(\kappa_G(x', Q^2)) + E_1(\kappa_G(x', Q^2))], \quad (8.3)$$

$$\kappa^{DGLAP}(x, Q^2) = \frac{N_c \alpha_s \pi}{2Q^2 R^2} xG^{DGLAP}(x, Q^2). \quad (8.4)$$

Em (8.3), C é a constante de Euler e E_1 é a função exponencial integral, e κ_G determina a intensidade da correção de sombreamento. Usando (8.4) e mantendo α_s fixa, se chega em uma equação para κ_G

$$\frac{\partial^2 \kappa_G(y, \xi)}{\partial y \partial \xi} + \frac{\partial \kappa_G(y, \xi)}{\partial y} = \frac{N_c \alpha_s}{\pi} [C + \ln(\kappa_G(x', Q^2)) + E_1(\kappa_G(x', Q^2))] \equiv F(\kappa_G). \quad (8.5)$$

É possível notar que a equação (8.5) possui uma solução dependente somente de y , que definiremos por κ_a

$$\frac{d\kappa_a(y)}{dy} = F(\kappa_a) \quad (8.6)$$

A equação AGL foi obtida na região cinemática onde

$$\alpha_s \ln\left(\frac{1}{x}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{Q_o^2}\right) \approx 1 \quad (8.7)$$

com

$$\alpha_s \ln(1/x) < 1, \quad \alpha_s \ln(Q^2/Q_o^2) < 1 \quad e \quad \alpha_s \ll 1$$

Se considerarmos valores não muito grandes de κ ($\kappa < 1$), em uma região onde as correções de sombreamento não são tão importantes, o lado direito da equação (8.3) pode ser expandido até termos de segunda ordem, e se recupera a equação GLR [39]

$$\frac{\partial^2 xG(y, \xi)}{\partial y \partial \xi} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} xG(y, \xi) - \frac{\alpha_s^2 N_c^2}{8Q^2 R^2} (xG(y, \xi))^2. \quad (8.8)$$

Os diagramas de 4ª e 5ª ordem, em α_s , considerados na equação (8.3) para o espalhamento profundamente inelástico estão representados na Figura 8.2. Temos na Figura 8.2a a contribuição da evolução DGLAP mais o próximo termo de correção, e nas demais os tipos de emissão de 5ª ordem, tendo na Figura 8.2c o diagrama que considera a interação dos glúons com o alvo.

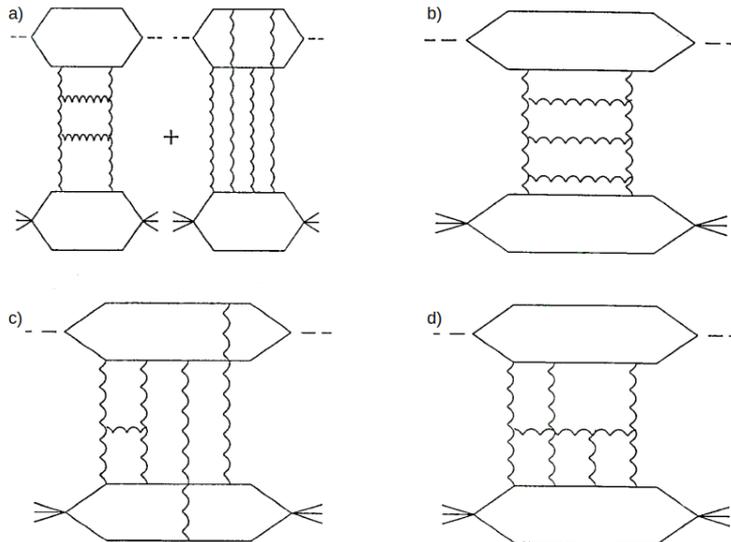


Figura 8.2: Diagramas de 4ª e 5ª ordem para o espalhamento profundamente inelástico[39].

8.1 Aproximação Semiclássica

Seguiremos agora os passos propostos em [39] para resolver (8.3) na aproximação semiclássica, considerando α_s constante. Para a aproximação semiclássica, se fazem as seguintes definições:

$$\kappa \equiv e^S, \quad \text{tal que} \quad (8.9a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} \equiv \omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial \xi} \equiv \gamma, \quad (8.9b)$$

com a condição

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial y} \ll \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial \xi} = \omega \gamma. \quad (8.10)$$

Temos

$$\frac{\partial^2 \kappa}{\partial y \partial \xi} = \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \xi} e^S + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial \xi} e^S \approx \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial \xi} e^S \quad (8.11)$$

E a equação (8.4) fica

$$\frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial y} = e^{-S} F(e^S) = \omega(\gamma + 1) \equiv \Phi(S) \quad (8.12)$$

Para resolver (8.12), usaremos o método de Lagrange e Charpit[40] com duas equações características, para equações diferenciais não lineares de primeira ordem com duas variáveis independentes. Definimos o funcional

$$F(\xi, y, S, \gamma, \omega) \equiv \omega(\gamma + 1) - \Phi(S) = 0. \quad (8.13)$$

Derivando em relação a ξ

$$\frac{dF}{d\xi} = F_\xi + F_S \frac{dS}{d\xi} + F_\gamma \frac{d\gamma}{d\xi} + F_\omega \frac{d\omega}{d\xi} \quad (8.14a)$$

$$= F_\xi + \gamma F_S + F_\gamma \frac{d\gamma}{d\xi} + F_\omega \frac{d\omega}{d\xi}, \quad (8.14b)$$

com $F_\xi \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi, y, S, \gamma, \omega)$. Notando que

$$\frac{d\omega}{d\xi} = S_{y\xi} = S_{\xi y} = \frac{d\gamma}{dy}, \quad (8.15)$$

temos

$$F_\gamma \frac{d\gamma}{d\xi} + F_\omega \frac{d\omega}{dy} = -F_\xi - \gamma F_S. \quad (8.16)$$

Definindo as curvas características sobre um parâmetro qualquer t :

$$F_\gamma \equiv \frac{d\xi}{dt} \quad \text{e} \quad F_\omega \equiv \frac{dy}{dt}, \quad (8.17)$$

obtemos

$$\frac{d\gamma}{dt} = -F_\xi - \gamma F_S. \quad (8.18)$$

Derivando (8.13) em relação a y e realizando passos similares, obtemos para ω

$$\frac{d\omega}{dt} = -F_y - \omega F_S. \quad (8.19)$$

Paras S

$$\frac{dS}{dt} = S_\xi \frac{d\xi}{dt} + S_y \frac{dy}{dt} = \gamma F_\gamma + \omega F_\omega. \quad (8.20)$$

Logo, a partir das equações (8.13),(8.17),(8.18),(8.19) e (8.20), temos

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma + 1 \quad (8.21a)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial S}\gamma, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial S}\omega \quad (8.21b)$$

$$\frac{dS}{dt} = \omega(2\gamma + 1). \quad (8.21c)$$

Usando a segunda equação de (8.21a) para eliminar a dependência em t e (8.13) para eliminar a dependência em ω , as equações (8.21) podem ser reescritas

$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{\Phi(S)}{(\gamma + 1)^2}, \quad \frac{dS}{dy} = \frac{2\gamma + 1}{(\gamma + 1)^2}\Phi(S), \quad e \quad \frac{d\gamma}{dy} = \frac{\partial\Phi}{\partial S} \frac{\gamma}{\gamma + 1}, \quad (8.22)$$

com condição inicial

$$S_o = \ln \kappa_o(y_o, \xi_o), \quad \gamma_o = \left. \frac{\partial \ln \kappa_o(y_o, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_o}, \quad (8.23)$$

onde $\alpha_s y_o \xi_o \leq 1$ (x_o suficientemente pequeno) e $\kappa_o = \frac{N_c \alpha_s \pi}{2Q^2 R^2} xG(x, Q^2)$, com o xG da fórmula de Glauber modificada, que considera a função de desdobramento P_{GG} como em (5.6d), e não no limite DLA (5.18)[39]. Para y grande, $\gamma \ll 1$ [10],[11], e podemos aproximar

$$\frac{dS}{dy} \approx \Phi(S) \quad (8.24a)$$

$$\frac{dS}{dy} \approx \frac{d\xi}{dy} \rightarrow S - S_o \approx \xi - \xi_o \quad (8.24b)$$

A equação (8.24b) pode ser reescrita em termos de κ

$$\frac{d \ln \kappa}{dy} = \frac{1}{\kappa} F(\kappa) \rightarrow \frac{d\kappa_a}{dy} = F(\kappa_a), \quad (8.25)$$

onde recuperamos a solução assintótica (8.6) dependente apenas de y . Reescrevendo (8.24a)

$$\xi - \xi_o = \ln \left(\frac{\kappa_a}{\kappa} \right) \quad (8.26)$$

Resolvendo a equação (8.6)

$$\int_{\kappa_a(y=y_o)}^{\kappa_a(y)} \frac{d\kappa'}{F(\kappa')} = y - y_o, \quad (8.27)$$

temos que, para $y \gg 1$, $F(\kappa) \rightarrow \alpha_s N_c / \pi \ln \kappa$ [10],[11] e a solução fica

$$\kappa_a(y) \sim \frac{\alpha_s N_c}{\pi} (y - y_o) \ln \left(\frac{\alpha_s N_c}{\pi} (y - y_o) \right). \quad (8.28)$$

Para y pequeno, $F(\kappa) \rightarrow \alpha_s N_c / \pi y$ [10],[11] e a solução fica

$$\kappa_a(y) = \kappa_a(y_o) e^{\frac{\alpha_s N_c}{\pi} (y - y_o)}. \quad (8.29)$$

Assim, para $y \gg y_o$ a forma de (8.26) será

$$\xi - \xi_o = \ln \left[\frac{\frac{\alpha_s N_c}{\pi} (y - y_o) \ln \left(\frac{\alpha_s N_c}{\pi} (y - y_o) \right)}{\kappa_a(y_o) e^{\frac{\alpha_s N_c}{\pi} (y - y_o)}} \right]$$

$$\Rightarrow \xi - \xi_o \sim \ln \frac{\alpha_s N_c}{\pi} (y - y_o) + \ln \ln \frac{\alpha_s N_c}{\pi} (y - y_o). \quad (8.30)$$

Na Figura 8.3 mostra-se a comparação entre as evoluções DGLAP (GRV na legenda do gráfico, presente na equação (8.4)), a da fórmula de Glauber modificada (MOD MF na legenda, que representa a condição inicial (8.23)), AGL e GLR. A equação GLR é a única que prevê saturação, e pode se prever que a solução da AGL tende ao valor assintótico para x pequeno [10],[39]

$$xG = \frac{2Q^2 R^2}{\pi^2} \ln \left(\frac{x_o}{x} \right) \ln \left[\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \ln \left(\frac{x_o}{x} \right) \right] \quad (8.31)$$

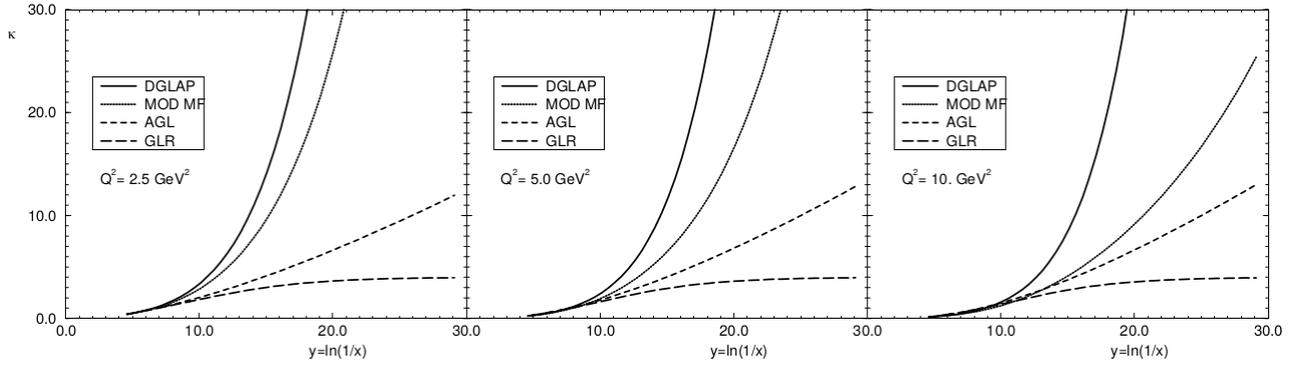


Figura 8.3: κ em função de $\ln(1/x)$ para diferentes valores de Q^2 em diferentes evoluções[10].

9 BK

À equação (6.2), que descreve a dinâmica BFKL, pode ser adicionado um termo não linear que considera a recombinação partônica, da forma

$$\frac{\partial N(x, k_{\perp}^2)}{\partial \ln(1/x)} = \alpha_S K_{BFKL} \otimes N(x, k_{\perp}^2) - \alpha_s [N(x, k_{\perp}^2)]^2, \quad (9.1)$$

onde $N(x, k_{\perp}^2)$ é novamente o número de pártons e, como se considera a recombinação de pares de pártons, o termo não linear escala com N^2 . A equação de evolução (9.1) é conhecida como Balitsky-Kovchegov (BK) [12],[13], e está representada na Figura 9.1, sendo o último termo do lado direito devido à correção de sombreamento.

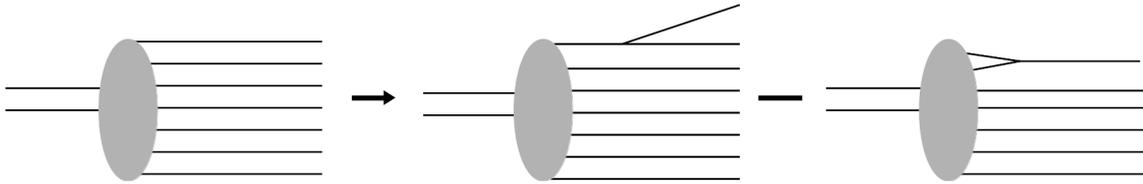


Figura 9.1: Dinâmica simplificada BK [17].

Um ponto importante da equação BK é o uso da representação de interação via dipolos, que são pares de quark-antiquark. Sendo assim, o formalismo BK não utiliza os graus de liberdade da Cromodinâmica Quântica, quarks e glúons, e sim esse novo objeto definido como dipolo.

O espalhamento profundamente inelástico, representado no modelo de pártons na Figura 4.1, pode ser esquematizado no formalismo de dipolos pela Figura 9.2, que consiste em três estágios principais[41]

1. Flutuação do fóton em um par quark-antiquark
2. Interação do dipolo com o alvo
3. Recombinação do dipolo em um méson ou fóton novamente

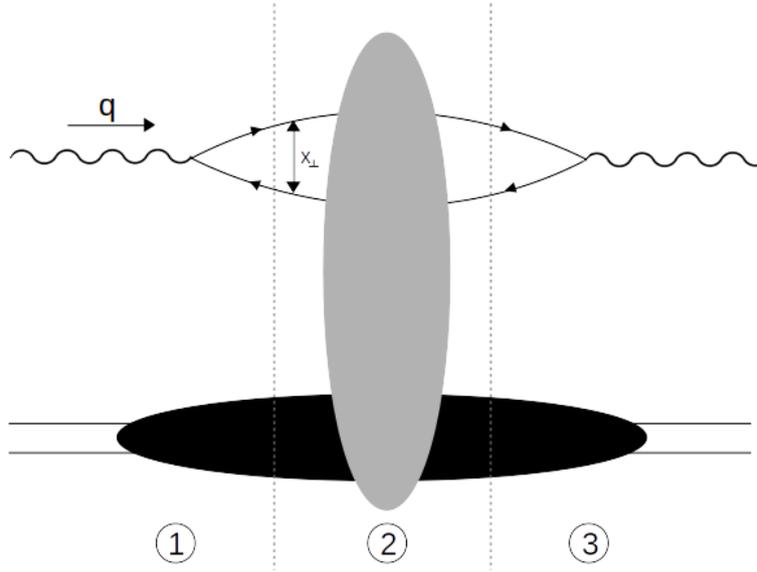


Figura 9.2: Espalhamento profundamente inelástico no modelo de dipolos.

Uma vantagem do modelo é de que, para altas energias, o tamanho transversal do dipolo x_{\perp} não é alterado durante a interação, o que facilita o cálculo da matriz de espalhamento. Além disso, usando o formalismo do cone de luz é possível fatorizar a seção de choque do processo $\gamma^* \rightarrow A$ como o produto da função de onda do dipolo pela seção de choque do processo $q\bar{q} \rightarrow A$.

No caso das interações partônicas, as partículas que produzem os dipolos são os glúons. A equação BK para a parte imaginária da amplitude de espalhamento N , sendo \vec{b}_{\perp} o parâmetro de impacto, pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(\vec{x}_{10}, \vec{b}_{\perp}, Y)}{\partial Y} = & \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int N\left(\vec{x}_{12}, \vec{b}_{\perp} + \frac{\vec{x}_{20}}{2}, Y\right) + N\left(\vec{x}_{20}, \vec{b}_{\perp} + \frac{\vec{x}_{21}}{2}, Y\right) - N(\vec{x}_{10}, \vec{b}_{\perp}, Y) \\ & - N\left(\vec{x}_{12}, \vec{b}_{\perp} + \frac{\vec{x}_{20}}{2}, Y\right) N\left(\vec{x}_{20}, \vec{b}_{\perp} + \frac{\vec{x}_{21}}{2}, Y\right) \frac{x_{10}^2}{x_{20}^2 x_{21}^2} d^2 x_2, \end{aligned} \quad (9.2)$$

onde $Y \approx \ln(sx_{\perp}^2) \approx \ln(1/x)$ pode ser pensado como a rapidez do dipolo.

Podemos entender a equação (9.2) da seguinte maneira[13] um dipolo com cor total nula, de tamanho transversal x_{10} , decai em dois dipolos de tamanhos transversos x_{12} e x_{20} . Os dois primeiros termos representam a interação de um desses dois novos dipolos com o alvo, enquanto o outro é apenas espectador. O terceiro termo representa a recombinação dos dois dipolos novamente em um dipolo de tamanho x_{10} , que interage com o alvo. O quarto termo, não linear, representa a evolução e interação dos dois dipolos com o alvo.

Na região de saturação, correspondente ao '*black disk*', quando o tamanho do dipolo é muito grande, $N \rightarrow 1$ (A.7). Nesse limite, percebemos que (9.2) gera uma solução estática, $\partial N/\partial Y = 0$, que respeita o teorema da unitariedade.

A solução aproximada fora da região de saturação pode ser obtida através do mesmo método usado para resolver a BFKL na Seção 6.2, e a solução obtida é da forma

$$N(x_{\perp}, Y)|_{x_{\perp}, Q_{s0} \ll 1} \sim \exp \left[2\sqrt{\frac{\alpha_s N_c}{2\pi} Y \ln 1/(x_{\perp} Q_{s0})} \right], \quad (9.3)$$

onde Q_{s0} é a escala de saturação inicial.

Na região de saturação também podem ser obtidas aproximações da solução, bem como resultados numéricos. Na aproximação semiclássica, utilizando o método das curvas caracterís-

ticas, pode-se mostrar que[30]

$$\tilde{N}(k_{\perp}, Y) = \left(\frac{Q_s^2(Y)}{k_{\perp}^2} \right)^{\gamma_{cr}}, \quad (9.4)$$

onde $\gamma_{cr} \approx 0.6275$ é um valor crítico que aparece nas aproximações feitas durante a solução, e $\tilde{N}(k_{\perp}, Y)$ é obtida pela transformada de Fourier de $N(x_{\perp}, Y)$

$$N(x_{\perp}, Y) = x_{\perp}^2 \int e^{\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{x}_{\perp}} \tilde{N}(k_{\perp}, Y) \frac{d^2 k}{2\pi}, \quad (9.5)$$

e $Q_s(Y)$ pode ser redefinida aproximadamente, em NLO, por [7][42]

$$Q_s(Y) = Q_{s0} \exp \left[\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \frac{\chi(0, \nu_o)}{1 + 2i\nu_o} Y \right] \approx Q_{s0} e^{2.44 \alpha_s N_c Y / \pi}. \quad (9.6)$$

Além das aproximações, podemos visualizar a solução numérica na Figura 9.4, que respeitam a condição de unitariedade de N .

9.1 Correções para a BK

A equação BK descrita na seção anterior tem validade apenas em regiões nas quais correções de próxima ordem (NLO ou *next to leading order*) são desprezíveis, e o conhecimento dessas correções permite definir melhor sua aplicabilidade. A evolução BK em LO (*leading order*) e NLO pode ser representada pelos diagramas da Figura 9.3, sendo os diagramas a e b representantes da evolução LO, e os demais, da evolução NLO.

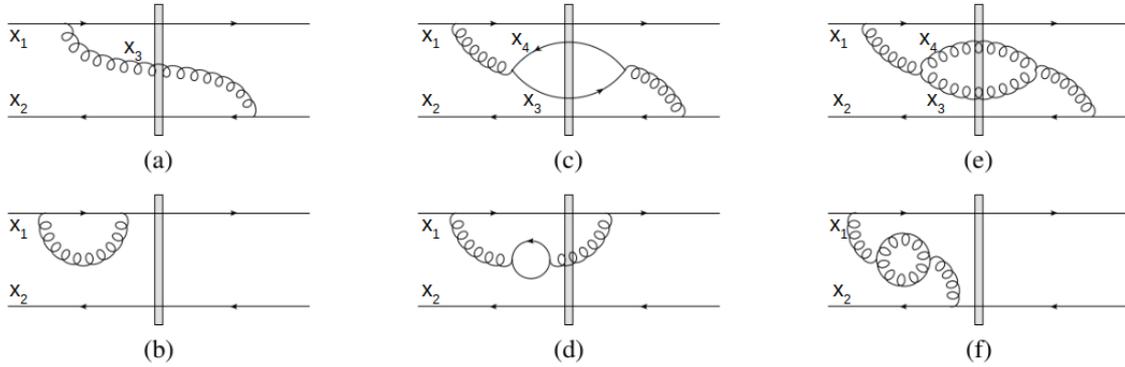


Figura 9.3: Evolução BK em LO (diagramas a e b) e NLO (demais diagramas)[43]. O retângulo vertical representa o hádron de interação.

Uma das possíveis correções é a para α_s evolutivo (não constante), na qual se adicionam pares de quark-antiquark ('bolhas' de quark) de todas as ordens no propagador do glúon (nas figuras 9.3c e 9.3d temos pares de primeira ordem). Em termos do momentum transverso dos glúons, α_s fica da forma[44]

$$\alpha_s(q_{\perp}) = \frac{\alpha_{\mu}}{1 + \alpha_{\mu} \beta_2 \ln(q_{\perp}^2 / \mu)}, \quad (9.7)$$

onde μ é uma escala arbitrária de massa, e α_{μ} a constante física de acoplamento dessa escala. O fato de μ ser arbitrário é o que permite escrever α_s também da forma proposta na equação (3.2). Escrevendo a equação BK para a matriz de espalhamento S

$$\frac{\partial S(\vec{x}_{10}, \vec{b}_{\perp}, Y)}{\partial Y} = \int K \times \left[S \left(\vec{x}_{12}, \vec{b}_{\perp} + \frac{\vec{x}_{20}}{2}, Y \right) S \left(\vec{x}_{20}, \vec{b}_{\perp} + \frac{\vec{x}_{21}}{2}, Y \right) - S(\vec{x}_{10}, \vec{b}_{\perp}, Y) \right] d^2 x_2 \quad (9.8)$$

Podemos identificar o kernel LO sendo (ver equação (9.2))

$$K_{LO} = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \frac{x_{10}^2}{x_{20}^2 x_{21}^2}. \quad (9.9)$$

Fazendo a substituição[45]

$$\alpha_\mu \rightarrow \frac{\alpha_s(q_\perp^2)\alpha_s(q_\perp'^2)}{\alpha_s(Q^2)}, \quad (9.10)$$

com q e q' os momenta do glúon antes e depois da interação, o kernel com α_s evolutivo fica[45]

$$K_{rc} = \frac{N_c}{2\pi^2} \left[\frac{\alpha_s(x_{20}^2)}{x_{20}^2} - 2 \frac{\alpha_s(x_{20}^2)\alpha_s(x_{21}^2)}{\alpha_s(R^2)} \frac{\vec{x}_{20} \cdot \vec{x}_{21}}{x_{20}^2 x_{21}^2} + \frac{\alpha_s(x_{21}^2)}{x_{21}^2} \right], \quad (9.11)$$

$$R^2 \equiv x_{20} x_{21} \left(\frac{x_{21}}{x_{20}} \right)^\Xi, \quad \Xi \equiv \frac{x_{20}^2 + x_{21}^2}{x_{20}^2 - x_{21}^2} - 2 \frac{x_{20}^2 x_{21}^2}{\vec{x}_{20} \cdot \vec{x}_{21}} \frac{1}{x_{20}^2 - x_{21}^2} \quad (9.12)$$

A solução numérica para a amplitude de espalhamento com o kernel da equação (9.11) é mostrada na Figura 9.4.

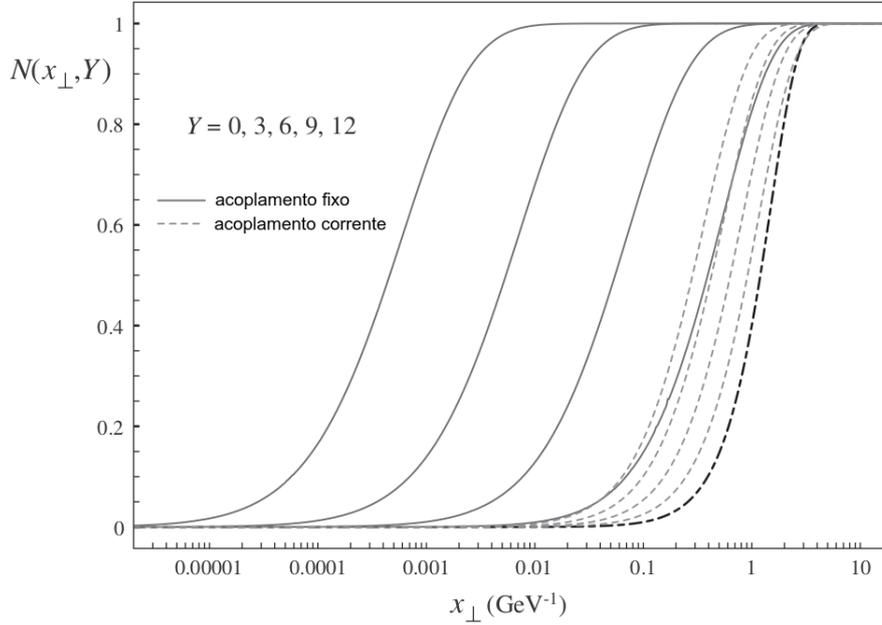


Figura 9.4: Amplitude de espalhamento para diferentes valores de rapidez Y da equação BK com α_s evolutivo, em função do tamanho transversal do dipolo x_\perp [30]. As linhas sólidas são soluções com $\alpha_s = 0.4$, as linhas tracejadas são as soluções para α_s evolutivo e a linha tracejada em destaque é a condição inicial aplicada.

Uma característica importante dessa correção que pode ser notada na Figura 9.4 é a redução na taxa de crescimento da amplitude de espalhamento com o aumento da rapidez, em relação à solução com α_s constante da BK. Assim como a amplitude, a escala de saturação Q_s também tem seu crescimento reduzido com a correção.

Usando a equação NLO BK completa proposta em [46], é mostrado na referência [47] a contribuição de cada tipo de correção, analisando alguns termos do kernel da NLO BK como os da Figura 9.5. A linha de duplo logaritmo na Figura 9.5 mostra a contribuição de dois logaritmos multiplicados que comparam o tamanho dos dipolos formados a partir do dipolo inicial, que também são multiplicados por α_s . A linha sem duplo logaritmo da Figura 9.5 representa o termo que considera somente um logaritmo, agora com do produto do tamanho dos dipolos formados sobre o produto dos dipolos depois da interação. A linha cheia ($LO + NLO$) soma

todas as contribuições, e devido ao termo de duplo logaritmo, possui uma divergência negativa quando r é muito pequeno.

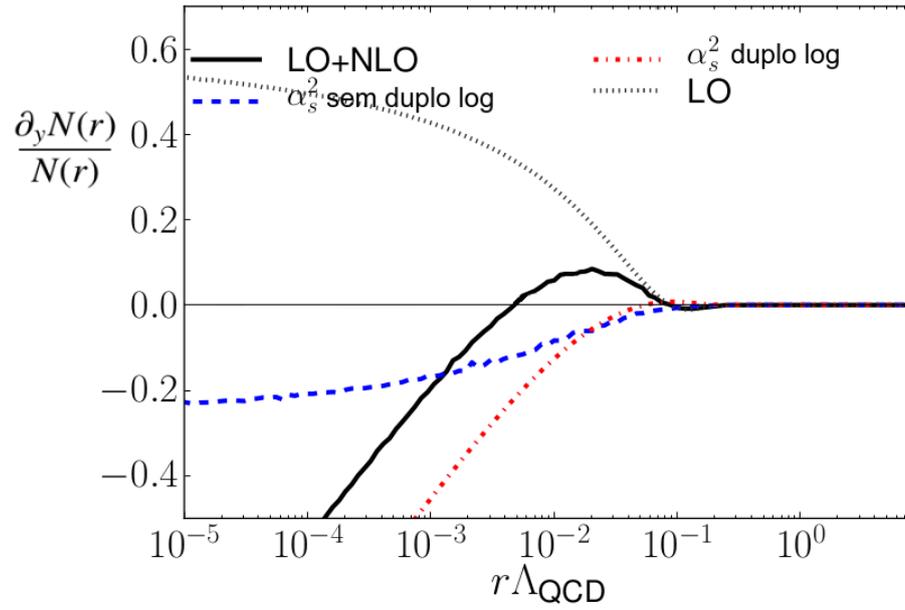


Figura 9.5: Mudança relativa da amplitude de espalhamento em um passo de rapidez[47], onde r é o tamanho do dipolo e se fixou $Q_{s0}/\Lambda_{\text{QCD}} = 19$.

10 Conclusão

O conhecimento da equação que rege a evolução partônica dentro de um hádron permite uma melhor definição de sua estrutura, bem como de suas propriedades de interação. Em aceleradores como o HERA, que tinha capacidade para colisões com energia de centro de massa (próton-lépton) da ordem de 10^2 GeV, as equações lineares DGLAP e BFKL descreviam razoavelmente bem os dados obtidos. Já se sabia, porém, que para valores maiores de energia as duas equações não eram adequadas, devido ao problema da unitariedade. Com base nisso, começaram a ser estudadas as correções de sombreamento, que tenderiam a diminuir as soluções assintóticas das equações lineares. Entre essas correções, estão a recombinação partônica e a interação com todos os pártons do alvo.

A primeira equação não linear proposta, a GLR, considera a recombinação das escadas partônicas da DGLAP. Apesar de diminuir a solução assintótica, os métodos de perturbação pelos quais foi obtida a impedem de ser válida quando a recombinação partônica é relevante, região onde ocorre a saturação. A equação AGL surgiu, então, para tentar melhorar tais resultados. Em sua solução mantendo o acoplamento fixo, se prevê uma taxa de crescimento muito menor do que a das equações lineares, mas sem ocorrer saturação.

Sem pertencerem aos graus de liberdade da QCD, os dipolos foram utilizados na equação BK para facilitar o cálculo de propriedades importantes. Neste formalismo se alcança a saturação, e estudos recentes têm apresentado refinamentos em relação à equação original. É importante ressaltar que a BK não trata de quarks e glúons, mas sim desse novo objeto, e por isso ela evolui a amplitude de espalhamento, ao invés das distribuições partônicas diretamente.

Os ajustes à equação BK e os diferentes métodos de solução da equação GLR-MQ são responsáveis pelos avanços recentes no tema. Mesmo assim, ainda não se conhece uma distribuição partônica que seja válida em todo o espectro de x e Q^2 . Um tema a ser desenvolvido é a solução da equação AGL para α_s dependente de Q^2 , que pode gerar correções ainda maiores para a solução assintótica, bem como permitir a análise da transição entre diferentes regimes.

A Analiticidade e Unitariedade

Um princípio básico no cálculo de amplitudes de espalhamento é a unitariedade da matriz de espalhamento S , $S^\dagger S = I$, sendo I a matriz unitária de mesma dimensão de S . Definindo $S = I + iT$, a condição de unitariedade para a matriz T é dada por

$$i(T^\dagger - T) = T^\dagger T. \quad (\text{A.1})$$

Podemos também escrever (A.1) em termos da amplitude de espalhamento [48]

$$M(k_1, k_2 \rightarrow k_1, k_2) - M^*(k_1, k_2 \rightarrow k_1, k_2) = i \sum_{n=2}^{\infty} \int \prod_{i=1}^n |M(k_1, k_2 \rightarrow q_1 \dots q_n)|^2 (2\pi)^4 \delta^4 \left(k_1 + k_2 - \sum_{j=1}^n q_j \right) \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2E_{q_i}}, \quad (\text{A.2})$$

onde $M(k_1, k_2 \rightarrow q_1 \dots q_n)$ é a amplitude de espalhamento para o processo $2 \rightarrow n$, com partículas iniciais de momentum k_1 e k_2 e partículas finais de momentum q_i , com $i = 1, \dots, n$; $M(k_1, k_2 \rightarrow k_1, k_2)$ é a amplitude de espalhamento frontal e E_{q_i} , a energia da partícula com momentum q_i . Definindo uma amplitude de espalhamento reescalada

$$A(k_1, k_2 \rightarrow q_1, \dots, q_n) \equiv \frac{M(k_1, k_2 \rightarrow q_1, \dots, q_n)}{2\sqrt{2E_{k_1} 2E_{k_2} 2E_{q_1} \dots 2E_{q_n}}}, \quad (\text{A.3})$$

separando o lado direito de (A.2) no termo elástico ($2 \rightarrow 2$) mais termos inelásticos e integrando a função delta, obtemos

$$2\text{Im} A(k_1, k_2 \rightarrow k_1, k_2) = \int |A(k_1, k_2 \rightarrow q_1, q_2)|^2 \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^2} + \text{termos inelásticos}, \quad (\text{A.4})$$

onde q é o vetor 4-dimensional transferência de momentum, $q = q_1 - k_1 = k_2 - q_2$.

Analisando o teorema óptico, $\sigma_{tot} = 2\text{Im} A(k_1, k_2 \rightarrow k_1, k_2)$ [48], vemos que a seção de choque será dividida em $\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel}$. Reescrevendo (A.4) no espaço de parâmetro de impacto b e parametrizando por

$$A(s, \vec{b}_\perp) = i \left[1 - S(s, \vec{b}_\perp) \right], \quad (\text{A.5})$$

e se obtém

$$\sigma_{tot} = 2 \int \text{Im} A(s, \vec{b}_\perp) d^2 b = 2 \int \left[1 - \text{Re} S(s, \vec{b}_\perp) \right] d^2 b \quad (\text{A.6})$$

Em altas energias $\sigma_{inel} \geq \sigma_{el}$, e temos que $\text{Re} S(s, \vec{b}_\perp) \geq 0$, o que implica

$$\text{Im} A(s, \vec{b}_\perp) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sigma_{tot} \leq 2\pi R^2, \quad (\text{A.7})$$

sendo R o raio da região no espaço de b onde a interação é relevante ("black disc").

Referências

- [1] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, Soviet Journal of Nuclear Physics **15**, 438 (1972).
- [2] G. Altarelli and G. Parisi, Nuclear Physics **B126**, 296 (1977).
- [3] Y. L. Dokshitzer, Sovietic Physics JETP **46**, 641 (1977).
- [4] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov and V. S. Fadin, Soviet Physics JETP **44**, 443 (1976).
- [5] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov and V. S. Fadin, Soviet Physics JETP **45**, 199 (1977).
- [6] Y. Y. Balitsky and L. V. Lipatov, Soviet Journal of Nuclear Physics **28**, 822 (1978).
- [7] L. V. Gribov, E. M. and M. G. Ryskin, Physics Reports **100**, 1 (1983).
- [8] A. H. Mueller and J. Qiu, Nuclear Physics **B268**, 427 (1986).
- [9] A.L. Ayala, M.B. Gay Ducati and E.M. Levin, Physical Letters B **388**, 188 (1996).
- [10] A. L. Ayala, M. B. Gay Ducati and E. M. Levin, Nuclear Physics B **493**, 305 (1997).
- [11] A. L. Ayala, M. B. Gay Ducati and E. M. Levin, Nuclear Physics B **511**, 355 (1998).
- [12] I. Balitsky, Nuclear Physics **B463**, 99 (1996).
- [13] Y. V. Kovchegov, Physical Review **D60**, 034008 (1999), hep-ph/9901281.
- [14] V. Barone, *High-Energy Particle Diffraction*, Springer, 2002.
- [15] H. Leutwyler and J. Stern, *Relativistic dynamics on a null plane*, Annals of Physics (NY) **112**, 94 (1978).
- [16] G. P. Lepage and S. J. Brodsky, Physical Review **D22**, 2157 (1980).
G. P. Lepage and S. J. Brodsky (edited by A. H. Mueller), *Perturbative Quantum Chromodynamics*, World Scientific, 1989.
- [17] Y. V. Kovchegov, AIP Conference Proceedings **1520**, 3 (2013).
- [18] J. D. Bjorken, Physical Review **179**, 1579 (1969).
- [19] C. A. Garcia Canal, M. B. Gay Ducati and J. A. M. Simões, *Notes on deep inelastic scattering*, Centre de Recherches Nucleaires et Université Louis Pasteur, 1980.
- [20] A. L. Ayala, *Análise dos Efeitos Nucleares em Processos Lépton-Núcleo e Hádron-Núcleo de Alta Energia a x pequeno*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1991.
- [21] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks and leptons: an introductory course in modern particle physics*, John Wiley, 1984.

- [22] C. G. Callan and D. Gross, *Physical Review Letters* **22**, 156 (1969).
- [23] J. Feltesse, Saclay preprint, DPhPE 89-20 (1989).
- [24] F. E. Close, *An introduction to quarks and partons*, Academic press, 1979.
- [25] A. Bodek, et. al., *Physics Letters* **B51**, 417 (1974).
- [26] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-VCH, 2008.
- [27] S. L. Addler and W. K. Tung, *Physical Review Letters* **22**, 978 (1969).
- [28] G. Howard, *Lie Algebras in Particle Physics* 2 ed., Perseus Books, 1999.
- [29] G. Parisi, *Physics Letters* **43B**, 207 (1973); **50B**, 367 (1974).
- [30] Y. V. Kovchegov and E. M. Levin, *Quantum Chromodynamics at High Energy*, Cambridge Monographs on Particle Physics, Vol 33, Cambridge University Press, 2012.
- [31] G. Sterman, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1993.
- [32] F. Low, *Physical Review* **D12**, 163 (1975).
- [33] S. Nussinov, *Physical Review* **D14**, 244 (1976).
- [34] J. R. Forshaw and D. A. Ross, *Quantum Chromodynamics and the Pomeron*, Cambridge Lecture Notes in Physics: **9**, Cambridge University Press, 1997.
- [35] M. Froissart, *Physical Review* **123**, 1053 (1961).
- [36] E. L. Epele, C. A. Garcia Canal and M. B. Gay Ducati, *Physics Letters* **B226**, 167 (1989).
- [37] J. Qiu, *Nuclear Physics* **B291**, 746 (1987).
- [38] J. Bartels, E. Gotsman, E. Levin, M. Lublinsky and U. Maor, *Physics Letters* **B556**, 114 (2003).
- [39] A. L. Ayala, *Formalismo de Glauber para interações partônicas*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1998.
- [40] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, vol 2: Partial Differential Equations*, Interscience Publishers, 1962.
- [41] N. N. Nikolaev, B. G. Zakharov, *Physics Letters* **B332**, 184 (1994).
- [42] A. H. Mueller and D. N. Triantafyllopoulos, *Nuclear Physics B* **640**, 331 (2002).
E. Ferreiro, E. Iancu, K. Itakura and L. McLerran, *Nuclear Physics A* **710**, 373 (2002).
- [43] E. Iancu, J. D. Madrigal, A. H. Mueller, G. Soyez and D. N. Triantafyllopoulos, *Nuclear and Particle Physics Proceedings*, 209 (2016).
- [44] D. J. Gross and F. Wilczek, *Physical Review Letters* **30**, 1343 (1973).
H. D. Politzer, *Physical Review Letters* **30**, 1346 (1973).
- [45] Y. V. Kovchegov and H. Weigert, *Nuclear Physics A* **784**, 188 (2007).
- [46] I. Balitsky, G. A. Chirilli, *Physical Review* **D77** (2008).
- [47] L. Lappi and H. Mäntisaary, *Nuclear and Particle Physics Proceedings*, 305 (2017).
- [48] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Book Publishing, 1995.