UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

Regularidade das Soluções de Navier-Stokes

Henrique Borrin de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para a obtenção do grau de Bacharel no Curso de Física
Orientador: Prof. Dr. Diego Marcon Farias

Porto Alegre-RS

Dezembro de 2018

Agradecimentos

Agradeço os colegas Arthur Nonnig, Isabel Flöther e Gustavo Zottis pela ajuda durante a redação deste trabalho e aos ex-colegas Wilson Amadeus, Eduardo Issler e Nikolas Tesche e aos amigos de longa data Derik Wechter, Guilherme Folli, Cassiano Brigido e Eduardo Nonnenmacher pelos momentos de descontração depois de compromissos extenuantes.

Agradeço em especial a meus pais Celita Borrin e Jorge Valdemar Batista de Souza e a minha namorada Bruna Mezzari Carlos pelo incentivo em seguir a carreira acadêmica e pelo apoio nas dificuldades do curso e nas ansiedades da vida acadêmica, além do professor orientador Diego Marcon pela oportunidade cedida de começar a minha vida científica.

Resumo

Nesse trabalho serão abordados os principais resultados que cercam as Equações de Navier-Stokes incompressíveis, como a regularidade, existência local temporal e unicidade de soluções fortes, existência global temporal de soluções fracas de Leray-Hopf e regularidade de soluções fracas a partir de hipóteses adicionais às usuais. Além disso, examinar-se-á o conjunto de pontos do espaço-tempo o qual as soluções de velocidade são localmente essencialmente ilimitadas, concluindo as possibilidades de distribuição destes pontos no espaço-tempo. Discutir-se-á também as implicações físicas dos resultados, como tempo maximal de soluções fortes e não unicidade de soluções fracas.

Abstract

In this work we cover the main results concerning the Incompressible Navier-Stokes Equations such as regularity, local in time existence and uniqueness of strong solutions, global in time existence of Leray-Hopf's weak solutions and regularity of weak solutions, the latter with additional hypothesis that are stronger than the usual ones. We also study the set of points in space-time such that the velocity solutions are locally essentially unbounded, and we present the possible distributions of such points in space-time. We discuss the physical implications of those results, such as maximal time of strong solutions and non-uniqueness of weak solutions.

Sumário

1 Introdução

As equações de Navier-Stokes incompressíveis descrevem a evolução da velocidade e pressão de um fluido newtoniano com densidade constante. Apesar das idealizações feitas para a modelagem, o problema vem se mostrando um grande desafio para a comunidade matemática. De forma simplista, temos a "competição" entre a equação de transporte não-linear $\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = 0$ e a equação de difusão $\partial_t \vec{u} + \Delta \vec{u} = 0$. Enquanto a primeira é uma análoga tridimensional à equação de Burger, que tem tempo maximal de solução (conhecida como onda de choque), a segunda possui soluções "bem comportadas" em todo o domínio de solução. A expectativa física é que a equação da difusão "vença" e tenhamos soluções bem comportadas em todo espaço-tempo, com premiação para quem conseguir prová-lo [9].

Apesar das equações datarem do século XIX, a teoria permanece fundamentalmente incompleta. A ideia de solução forte foi introduzida por Leray [15] muito antes de ela estar bem estabelecida na teoria de equações diferenciais parciais. Obteve-se neste trabalho a unicidade e regularidade de soluções, com garantia de existência para um tempo finito com dependência na condição inicial (ver Seção 6.2, Teorema B). Além disso, Leray construiu a ideia de soluções fracas (chamadas por ele de soluções turbulentas) e obteve a existência global das soluções (ver Seção 7.1, Teorema C). Posteriormente, Hopf generalizou a construção para domínios limitados [13].

Ainda que o trabalho de Leray tenha sido pioneiro no estudo matemático da mecânica de fluidos, não se obteve regularidade nem unicidade de soluções fracas. Esse problema foi parcialmente resolvido por Serrin [21], que adicionou a hipótese $\vec{u} \in L^{s'}(0, T; L^s(\Omega'))$, com $3/s + 2/s' < 1$ para mostrar que as soluções fracas tem regularidade espacial em conjuntos limitados (ver Seção 7.2, Teorema D).

O trio Caffarelli-Kohn-Niremberg [2] inspirou-se no resultado de Serrin e estudou o conjunto $S := \{(\vec{r}, t) : \vec{u}(\vec{r}, t) \notin L^\infty(Q_r)\}$, Q_r cilindros parabólicos (ver Seção 8.1), isto é, pontos no espaço-tempo onde a velocidade não é essencialmente limitada. Mostra-se que S tem dimensão de Hausdorff menor ou igual a 1 e, portanto, a solução $\vec{u}$ é regular espacialmente em S^c. Posteriormente, Vasseur [23] demonstrou o mesmo resultado usando o método introduzido por De Giorgi [4] para equações elípticas (ver Seção 8.3, Teorema E).

2 Derivação das Equações de Navier-Stokes

2.1 Equações de Continuidade

De maneira genérica, uma equação de continuidade é aquela que preserva alguma quantidade (geralmente física) Φ em um volume de controle Ω. Denotemos por S o criadouro e/ou sorvedouro dessa quantidade física, isto é, temos criação ou destruição da quantidade física dentro da região (ex: um "ralo" dentro da região, agindo como sorvedouro de massa), convencionando que quando $S > 0$, temos sorvedouro. Temos que

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega} \Phi \, dV = -\oiint_{\partial\Omega} \Phi \, \vec{u} \cdot \hat{n} \, dS - \iiint_{\Omega} S \, dV, \tag{2.1}$$

ou seja, a taxa de variação da quantidade Φ em Ω é o quanto flui para fora de Ω à velocidade $\vec{u}$ e o quanto é sorvido por S (ou criado, caso $S < 0$). Usando o Teorema da Divergência e o fato de que a equação acima é válida para qualquer volume Ω, temos que

$$\Phi_t + \nabla \cdot (\Phi \, \vec{u}) + S = 0. \tag{2.2}$$

podemos obter a mesma relação para o caso que a quantidade preservada seja um vetor, isto é, $\vec{\Phi}$ satisfaz

$$\vec{\Phi}_t + \nabla \cdot (\vec{\Phi} \otimes \vec{u}) + \vec{S} = 0, \tag{2.3}$$

onde o sorvedouro $\vec{S}$ é vetorial.

2.1.1 Conservação de Massa

Para a conservação de massa, usaremos que $\vec{S} = 0$, isto é, não há massa sendo criada nem destruída, e tomaremos $\Phi = \rho$, ρ densidade de massa. Usando (2.2) temos, portanto, que

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \tag{2.4}$$

A equação acima é conhecida como equação da continuidade. Existem formas análogas para quantidades como densidade de carga, por exemplo.

2.1.2 Conservação de Momentum

Para a conservação de momentum, usaremos $\vec{\Phi} = \rho \vec{u}$, $\rho \vec{u}$ densidade de momentum. Por (2.3), temos que

$$\partial_t(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \, \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{S} = 0. \tag{2.5}$$

Usando que

$$\nabla \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\nabla \cdot \vec{a}) \, \vec{b} + (\vec{a} \cdot \nabla) \, \vec{b}$$

e a equação da continuidade (2.4), temos que

$$(\rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{u})) \, \vec{u} + \rho(\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) = \vec{S} \implies$$

$$\rho\,\vec{u}_t + \rho\,(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \vec{S} \tag{2.6}$$

As equações

$$\begin{aligned} \partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0; \\ \rho\,\partial_t\vec{u} + \rho\,(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \vec{S} \end{aligned} \tag{2.7}$$

ainda são muito genéricas devido a não sabermos a forma de $\vec{S}$.

Faremos a hipótese de que $\vec{S}$ pode ser escrito na forma $\vec{S} = \vec{f_n} + \vec{f_t} + \vec{f}_{ext}$, onde $\vec{f}$ indica densidade de força e os subíndices são de força normal, tangencial e externa, respectivamente.

A força normal pode ser computada a partir da pressão, visto que

$$\vec{f_n} = -\frac{1}{|\Omega|}\oiint_{\partial\Omega} P\,\hat{n}\,dS,$$

onde $|\Omega|$ denota o volume total do volume teste Ω, ou seja, a força normal é a média espacial da pressão e tem sentido oposto à normal, assumindo $P > 0$. Usando o Teorema da Divergência, temos que

$$\vec{f_n}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{|\Omega|}\oiint_{\partial\Omega} P\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,dS = \vec{v}\cdot\left(-\frac{1}{|\Omega|}\iiint_{\Omega}\nabla P\,dV\right),$$

onde $\vec{v}$ é um vetor constante não nulo. Usando que a equação acima vale para qualquer volume teste e para qualquer vetor constante $\vec{v}$, temos que, no limite de volume tendendo a zero,

$$\vec{f_n} = -\nabla P. \tag{2.8}$$

Em fluido ideal, as forças tangenciais são nulas, isto é, não há cisalhamento entre as linhas de fluxo do fluido. Assim, temos que as equações abaixo modelam a evolução de fluidos ideais:

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0; \\ \rho\,\vec{u}_t + \rho\,(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla P = \vec{f}_{ext}; \\ \vec{u}(\vec{r},0) = \vec{u}_0; \\ \Xi(P,\rho,\vec{u}) = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $\vec{u}_0$ é a velocidade inicial e Ξ é uma função de estado. Estas equações são conhecidas como equações de Euler.

2.2 Fluidos Newtonianos

Caso estejamos tratando de fluidos reais, podemos assumir que a força tangecial pode ser escrita na forma

$$\vec{f_t} = \nabla\cdot\mathbb{T},$$

onde $\mathbb{T}$ é o tensor de estresse. Newton assumiu que o tensor de estresse tem a relação

$$\mathbb{T} \propto \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}. \tag{2.10}$$

Fluidos que obedecem (2.10) são conhecidos como fluidos newtonianos. Para construir $\mathbb{T}$, foram feitas as seguintes hipóteses (originalmente por Stokes):

1. A dependência de $\mathbb{T}$ por $\nabla\vec{u}$ é linear;

2. O fluido é isotrópico, isto é, não há direção preferencial de fluxo;

3. Para fluidos em repouso, $\nabla\cdot\mathbb{T} \equiv 0$, concordando com resultados de hidrostática.

Separamos então o tensor $\mathbb{T}$ na forma $\mathbb{T} = \mathbb{A}_s + \mathbb{A}_d$, onde $\mathbb{A}_s$ e $\mathbb{A}_d$ são matrizes simétricas de traço nulo e diagonais, respectivamente. A maneira natural de construir o tensor é escrever $\mathbb{A}_s = \mu((\nabla\vec{u})^T + \nabla\vec{u})$ e $\mathbb{A}_d = \lambda(\nabla\cdot\vec{u})\,\mathbb{I}$, onde $\mathbb{I}$ é a matriz identidade e μ e λ são os primeiro e segundo coeficientes de viscosidade, respectivamente (em geral, μ é conhecida somente como viscosidade). Temos, portanto, as equações de Navier-Stokes:

$$\begin{gathered}\rho_t + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0;\\ \rho\,\vec{u}_t + \rho\,(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla P + \nabla\cdot[\mu((\nabla\vec{u})^T + \nabla\vec{u})] + \nabla\cdot[\lambda(\nabla\cdot\vec{u})\,\mathbb{I}] = \vec{f}_{ext};\\ \vec{u}(\vec{r},0) = \vec{u}_0.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Note que se $\mu = \lambda = 0$, ou seja, que o fluido não tenha força de arraste (fluido ideal), então as equações de Navier-Stokes recaem nas equações de Euler.

Note também que se ρ e μ forem constantes não nulas (fluido homogêneo), então a equação da continuidade torna-se

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0, \tag{2.12}$$

enquanto a equação de momentum torna-se

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla P - \nu\Delta\vec{u} = \frac{1}{\rho}\vec{f}_{ext}, \tag{2.13}$$

onde $\nu \coloneqq \mu/\rho$ é definida como viscosidade cinemática. O conjunto das equações (2.12), (2.13), juntamente com condição inicial $\vec{u}(\vec{r},0) = \vec{u_0}$ são conhecidas como equações de Navier-Stokes incompressíveis.

Ao longo do trabalho, não usaremos a formulação acima das equações de Navier-Stokes incompressíveis (a partir de agora somente equações de Navier-Stokes), mas definindo $\vec{f'}_{ext} \coloneqq \frac{1}{\rho}\vec{f}_{ext}$ e $P' \coloneqq \frac{1}{\rho}P$ (abandonaremos o indicador $'$ posteriormente) e mapeando

$$(\vec{r},t) \mapsto (\nu^{-1}\vec{r}, \nu^{-1}t)$$

e, com isso, temos as equações de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{u} = 0;\\ &\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla P - \Delta\vec{u} = \vec{f}_{ext};\\ &\vec{u}(\vec{r},0) = \vec{u}_0.\end{aligned} \tag{2.14}$$

As equações de Navier-Stokes possuem uma escala típica: Se $\vec{u}$, P são soluções das equações de Navier-Stokes, então $\vec{u}_k(\vec{r},t) = \lambda^k\vec{u}(\lambda^k\vec{r},\lambda^{2k}t)$, $P_k(\vec{r},t) = \lambda^{2k}P(\lambda^k\vec{r},\lambda^{2k}t)$ também são soluções. Isto sugere que basta resolver o problema em regiões “pequenas"para termos as soluções na região de real interesse.

Observação 1. Note que sempre é possível adicionar uma função $C(t)$ à pressão e ainda sim satisfazer as equações de Navier-Stokes. Em geral assume-se $C(t) = 0$, pois se $C(t) \neq 0$, então existiria pressão variando no tempo, ainda que o campo de velocidades seja nulo, o que não é fisicamente plausível. Haveria ainda a possibilidade da pressão ser uma constante não nula C, mas bastaria mudar a pressão de referência do sistema para assumirmos $C = 0$. Da mesma forma, para a equação de Stokes, poderíamos sempre somar um vetor constante à velocidade, mas basta mudar a velocidade de referência para torná-la nula. Então ao longo do trabalho assumir-se-á por simplicidade que estas funções e constantes são nulas.

3 Definições e Desigualdades

3.1 Definições Preliminares

Definição 2. Diremos que uma função $\vec{v}$ é de divergência nula fracamente se

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{v}\cdot\nabla g\,dV = 0 \tag{3.1}$$

para todo $g \in C_0^\infty$. A definição é motivada pelo Teorema da Divergência, pois funções diferenciáveis com divergência nula satisfazem (3.1). Além disso, se temos que $\vec{v}$ satisfaz (3.1) e é de classe C^1, temos que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

Definição 3. Define os seguintes espaços de funções:

(i) $C^k(\Omega)$: o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $0 \leq k \leq \infty$, com o caso $k = 0$ sendo o espaço das funções contínuas e $k = \infty$ sendo o espaço das funções suaves;

(ii) $C^{k,\alpha}(\Omega)$: o espaço de funções k vezes continuamente diferenciáveis em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq k \leq \infty$ **e** para toda função $f(\vec{r}) \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, temos que existe constante $C > 0$ tal que

$$|\nabla^i f(\vec{r}) - \nabla^i f(\vec{r'})| < C|\vec{r} - \vec{r'}|^\alpha$$

para todo $0 \leq |i| \leq k$.

(iii) $L^p(\Omega)$: o espaço das funções tais que $\iiint_\Omega |f|^p \, dV < \infty$, $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, com o caso $p = \infty$ sendo espaço de funções limitadas em quase todo ponto;

(iv) $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(I)$: o espaço das funções $C^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap C^0(I)$, I é intervalo e para toda função $\vec{f}(\vec{r}, t) \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(I)$, temos que $\|f(t)\|_{C^{0,1/2}} \leq C(t)$, onde $\|\bullet\|_{C^{0,1/2}}$ é a seminorma Hölder, que é definida por

$$\|f\|_{C^{0,1/2}} := \frac{|f(\vec{r}) - f(\vec{r'})|}{|\vec{r} - \vec{r'}|^{1/2}}.$$

Definição 4. Define o operador molificador $J_\varepsilon v := \eta_\varepsilon * v$, onde $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-3}\eta(\vec{r}/\varepsilon)$, e η é definida como

$$\eta(\vec{r}) = \begin{cases} C \exp\left(\dfrac{1}{|\vec{r}|^2 - 1}\right) & \text{se } |\vec{r}| < 1; \\ 0 & \text{se } |\vec{r}| > 1, \end{cases}$$

onde C é uma constante tal que $\iiint_{\mathbb{R}^3} \eta \, dV = 1$. Os molificadores tem como papel fundamental regularizar as funções e aproximá-las em espaços L^p e pontualmente (para quase todo ponto)[6, Teorema 6 em Apêndice C.4].

Definição 5. Denotaremos por $(-\Delta)^{-1}$, $(\partial_t - \Delta)^{-1}$ os operadores que quando aplicados a funções $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, obtemos

$$(-\Delta)^{-1} f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\vec{r'})}{|\vec{r'} - \vec{r}|} \, dV' = \Phi_P * f;$$

$$(\partial_t - \Delta)^{-1} f(\vec{r}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-|\vec{r'} - \vec{r}|^2/4t} f(\vec{r'}, t) \, dV' = \Phi_H * f,$$

onde Φ_P, Φ_H são os núcleos de Poisson e do calor, respectivamente. A notação é natural para usarmos as igualdades exponenciais, isto é, $(-\Delta)(-\Delta)^{-1} f = f$ (e o análogo para $(\partial_t - \Delta)$). Usaremos constantemente as estimativas $\|\Phi_H(\vec{r}, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-3/4}$, $\|\nabla^m \Phi_H(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-m/2}$ [19]. Além disso, utilizaremos frequentemente a transformada de Fourier de $\widehat{\nabla^2 \Phi_P}$. Calculando, obtemos

$$\widehat{\nabla^2 \Phi_P} = (2\pi i)^2 (\vec{\xi} \otimes \vec{\xi}) \widehat{\Phi_P} = -\pi (\vec{\xi} \otimes \vec{\xi}) \widehat{|\vec{r}|^{-1}}. \tag{3.2}$$

Note que

$$\widehat{|\vec{\xi}|^{-2}} = \iiint e^{-2\pi i \xi r \cos\theta} |\vec{\xi}|^{-2} |\vec{\xi}|^2 \sin\theta \, d\xi \, d\theta \, d\phi = -\pi |\vec{r}|^{-1}$$

$$\implies \widehat{|\vec{r}|^{-1}} = -\frac{1}{\pi}|\vec{\xi}|^{-2}.$$

Concluímos que

$$\widehat{\nabla^2\Phi_P} = \frac{\vec{\xi}\otimes\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2} \tag{3.3}$$

3.2 Desigualdades

Listamos abaixo desigualdades e resultados clássicos envolvendo Teoria de Integração, com suas demonstrações podendo ser encontradas em [6, Apêndices B.2, E.3 e Seção 5.6.2] .

1. **Desigualdade de Hölder.**

   Se $\vec{u} \in L^p(\Omega)$, $\vec{v} \in L^q(\Omega)$ em algum domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, com $1/p + 1/q = 1$, $1 \le p, q \le \infty$, então
   $$\iiint_\Omega |\vec{u}\cdot\vec{v}|\, dV \le \|\vec{u}\|_{L^p(\Omega)}\|\vec{v}\|_{L^q(\Omega)}. \tag{3.4}$$
   O caso especial $p = q = 2$ é conhecido como Desigualdade de Cauchy-Schwartz.

2. **Desigualdade de Young.** Se $1 < p, q < \infty$, com $1/p+1/q = 1$, então para todo $a, b > 0$, temos
   $$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{3.5}$$

3. **Desigualdade de Young para Convoluções.**

   Se $\vec{u} \in L^p(\Omega)$, $\vec{v} \in L^q(\Omega)$ e $\vec{u} * \vec{v} \in L^r(\Omega)$ em algum domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, com $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, $1 \le p, q, r \le \infty$, então
   $$\|\vec{u} * \vec{v}\|_{L^r(\Omega)} \le \|\vec{u}\|_{L^p(\Omega)}\|\vec{v}\|_{L^q(\Omega)}. \tag{3.6}$$

4. **Desigualdade de Morrey.**

   Se $3 < p \le \infty$, então existe uma constante $C_p > 0$ tal que
   $$\|\vec{u}\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^3)} \le C_p\|\vec{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}, \tag{3.7}$$
   onde $\gamma := 1 - 3/p$

5. **Desigualdade de Poincaré.**

   Se $\vec{u} \in W_0^{1,p}$ em algum domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ para $1 \le p \le \infty$, então existe uma constante $C_p > 0$ tal que
   $$\|\vec{u}\|_{L^p(\Omega)} \le C_p\|\nabla\vec{u}\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.8}$$

6. **Desigualdade de Minkowski.**

   Se $\vec{u}, \vec{v} \in L^p(\Omega)$ para algum domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, para $1 \le p \le \infty$, então
   $$\|\vec{u} + \vec{v}\|_{L^p(\Omega)} \le \|\vec{u}\|_{L^p(\Omega)} + \|\vec{v}\|_{L^p(\Omega)} \tag{3.9}$$

7. **Desigualdade de Gronwall.**

   Se η uma função não-negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$ que satisfaz
   $$\eta'(t) \le \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$
   em quase todo $t \in [0, T]$, onde $\phi, \psi \in L^1_{loc}([0, T])$, então, para todo $0 \le t \le T$,
   $$\eta(t) \le e^{\int_0^t \phi(s)\, ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds\right]. \tag{3.10}$$

8. **Lema de Fatou.**

   Se f_k é uma sequência de funções não negativa e integráveis, então

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \liminf_{k\to\infty} f_k\, dV \leq \liminf_{k\to\infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} f_k\, dV. \tag{3.11}$$

9. **Desigualdade de Tchebichev.**

   Para todo $0 < p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$, $t > 0$, temos

$$\iiint_{\Omega} \chi_{\{|f|\geq t\}}\, dV \leq t^{-p}\|f\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{3.12}$$

4 Equações de Stokes

Nessa seção, estudaremos as equações linearizadas de Navier-Stokes (conhecidas como equações de Stokes), ou seja, onde não temos o termo convectivo "$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$". As equações de Stokes são

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{u} = 0;\\ &\vec{u}_t + \nabla P - \Delta\vec{u} = \vec{f}_{ext};\\ &\vec{u}(\vec{r},0) = \vec{u}_0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Temos que essas equações são um bom modelo para fluxo laminar (ver Observação 18). Como (4.1) é linear, estudaremos os casos de força externa e condição inicial nula separadamente e faremos a sobreposição dos resultados. A condição inicial $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, com divergência fraca nula deve ser entendida no sentido do limite em L^2, isto é, $\lim\limits_{t\to 0^+} \|\vec{u}(t) - \vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0$

Para o caso de força externa nula, sabemos que a solução é $\vec{u} = (\partial_t - \Delta)^{-1}\vec{u}_0$, $P = 0$ [6, Capítulos 2 e 3]; o caso de condição inicial nula é não-trivial: deve-se usar o núcleo de Oseen $\mathbb{T}$ [17, Capítulo 2], que é definido por

$$\mathbb{T}(\vec{r},t) := (\partial_t - \Delta)^{-1}\left(\nabla^2\,\Phi_P\,(\vec{r})\delta(t) + \delta(\vec{r})\delta(t)\mathbb{I}\right) = \Phi_H\mathbb{I} + \nabla^2 F, \tag{4.2}$$

onde F é dada por

$$F := (-\Delta)^{-1}\Phi_H = \frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}}|\vec{r}|}\int_0^{|\vec{r}|} e^{-\xi^2/4t}\, d\xi, \tag{4.3}$$

lembrando que Φ_H, Φ_P são núcleos das equações do calor e de Poisson, respectivamente.

Observação 6. Não confundir a matriz Hessiana ∇^2 com o operador Laplaciano Δ.

Usando o núcleo de Oseen, temos que a solução é $\vec{u}(\vec{r},t) = \mathbb{T}{**}\vec{f}_{ext}$, $P(\vec{r},t) = -(-\Delta)^{-1}\nabla\cdot\vec{f}_{ext}$, onde denotamos $**$ a convolução espaço-temporal entre 0 e T.

Observação 7. Note que F é suave no espaço e satisfaz para todo $|m| \geq 0$ [19, Apêndice A.3]

$$|\nabla^m F(\vec{r},t)| \leq \frac{C_m}{(|\vec{r}|^2 + t)^{(m+1)/2}}, \tag{4.4}$$

onde m é um multiíndice, isto é, $m = (m_1, m_2, m_3)$, com $|m| = m_1 + m_2 + m_3$ e está indicando quantas derivadas estão sendo tomadas por coordenada, ou, seja, $\nabla^m f = \dfrac{\partial^{|m|} f}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3}}$. Temos, portanto, que $\mathbb{T}$ é suave, com

$$|\nabla^m \mathbb{T}(\vec{r},t)| \leq \frac{C_m}{(|\vec{r}|^2 + t)^{(m+3)/2}} \tag{4.5}$$

para todo $|m| \geq 0$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$. Calculando explicitamente as integrais, temos que $\|\mathbb{T}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-\frac{3}{4}}$ e $\|\nabla\mathbb{T}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-\frac{1}{2}}$. Além disso, pelo teorema da convergência dominada, temos que $\mathbb{T} \in C((0,\infty); L^2)$ e $\nabla\mathbb{T} \in C((0,\infty); L^1)$ e que [19, Lema 1.6]

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\nabla\mathbb{T}(\vec{r} - \vec{r''}, t)| - \nabla\mathbb{T}(\vec{r''} - \vec{r'}, t)| \, dV'' \leq C|\vec{r} - \vec{r'}|^{1/2} t^{-3/4}. \tag{4.6}$$

Então temos que as soluções de (4.1) são

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{r}, t) &= (\partial_t - \Delta)^{-1}\vec{u}_0 + \mathbb{T} ** \vec{f}_{ext}; \\ P(\vec{r}, t) &= -(-\Delta)^{-1}\nabla \cdot \vec{f}_{ext}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.1 Densidade de Força Externa Genérica

Nessa seção, demostraremos que (4.7) de fato são soluções das Equações de Stokes sob hipótese de regularidade de $\vec{f}_{ext}$, baseado na demonstração de [19, Capítulo 2].

Teorema 8 (Soluções clássicas). *Suponha que* $\vec{f}_{ext} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$ *e fixado* $t \in [0, T)$, $\operatorname{supp} \vec{f}_{ext} \subset B_R(0)$. *Então* (4.7) *são soluções de* (4.1), *com* $\vec{u} \in C([0, T); L^2)$.

Demonstração. Note que pela construção das soluções, podemos separar nos casos de condição inicial não nula e força externa não nula. Para o caso de condição inicial não nula, temos que $\|\Phi_H(t) * \vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ e como $\Phi_H(\vec{r}, t) \overset{t\to 0}{\rightharpoonup} \delta(\vec{r})$, $\|\Phi_H(t) * \vec{u}_0 - \vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \overset{t\to 0}{\to} 0$, basta provar, portanto, o caso de força externa não nula.

Para isto, notando que $\mathbb{T} \in L^1_{loc}([0, T); L^2)$, temos que $\vec{u} \in C([0, T); L^2)$, com $\|\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$ se $t \to 0$. Além disso, usando que $\mathbb{T} \in C([0,\infty); L^2)$, temos que $\nabla\vec{u}$, $\Delta\vec{u}$ e $\partial_t\vec{u}$, pelo teorema da convergência dominada, são contínuas e pertencem a $C((0, T); L^2)$. Pelo Teorema de Plancherel e por (3.3), ∇P também goza das propriedades anteriores, já que

$$\|\nabla P(t) - \nabla P(t')\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \| - \nabla(-\Delta)^{-1}\nabla \cdot (\vec{f}_{ext}(t) - \vec{f}_{ext}(t'))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\vec{\xi} \otimes \vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2} \left(\widehat{\vec{f}}_{ext}(t) - \widehat{\vec{f}}_{ext}(t') \right) \right|^2 dV \leq \|\vec{f}_{ext}(t) - \vec{f}_{ext}(t')\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Note que $\vec{u}$, P satisfazem a equação de Stokes se e somente se

$$(\partial_t + 4\pi^2|\vec{\xi}|^2)\widehat{\vec{u}} + 2\pi i\vec{\xi}\widehat{P} = \widehat{\vec{f}}_{ext}, \tag{4.8}$$

$$\vec{\xi} \cdot \widehat{\vec{u}} = 0, \tag{4.9}$$

onde $\widehat{(\bullet)}$ denota a transformada de Fourier. Como $\Delta P = \nabla \cdot \vec{f}_{ext}$, temos que $-4\pi^2|\vec{\xi}|^2\widehat{P} = 2\pi i\vec{\xi} \cdot \widehat{\vec{f}}_{ext}$ e, portanto,

$$2\pi i\vec{\xi}\widehat{P} = 2\pi i \frac{2\pi i}{-4\pi^2|\vec{\xi}|^2}(\vec{\xi} \otimes \vec{\xi})\widehat{\vec{f}}_{ext} = \frac{\vec{\xi} \otimes \vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2}\widehat{\vec{f}}_{ext}.$$

Aplicando a equação acima em (4.8), obtemos

$$(\partial_t + 4\pi^2|\vec{\xi}|^2)\widehat{\vec{u}} = \left(\mathbb{I} - \frac{\vec{\xi} \otimes \vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2} \right) \widehat{\vec{f}}_{ext}. \tag{4.10}$$

Para verificarmos que a solução satisfaz a equação de Stokes no espaço de Fourier, note que $-\Delta F = \Phi_H$ e, portanto, utilizando que $\widehat{\Phi}_H = e^{-4\pi^2 t|\vec{\xi}|^2}$, temos

$$\widehat{\nabla^2 F} = -\frac{\vec{\xi} \otimes \vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2} e^{-4\pi^2 t|\vec{\xi}|^2}. \tag{4.11}$$

Aplicando o operador $(\partial_t + 4\pi^2|\vec{\xi}|^2)$ no campo de velocidades no espaço de Fourier, concluímos que

$$(\partial_t + 4\pi^2|\vec{\xi}|^2)\widehat{\vec{u}} = (\partial_t + 4\pi^2|\vec{\xi}|^2)\int_0^t \left(\mathbb{I} - \frac{\vec{\xi}\otimes\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2}\right)\widehat{\vec{f}}_{ext}(\xi,s)e^{-4\pi^2(t-s)|\vec{\xi}|^2}\,ds = \left(\mathbb{I} - \frac{\vec{\xi}\otimes\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2}\right)\widehat{\vec{f}}_{ext}. \tag{4.12}$$

□

Lema 9. *Se $\vec{f}_{ext} \in C([0,T);L^2)$, então as soluções (4.7) satisfazem*

(i) $\vec{u} \in C((0,T);L^\infty)$, *com*

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\int_0^t \frac{\|\vec{f}_{ext}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{\frac{3}{4}}}\,ds + C\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}t^{-3/4}; \tag{4.13}$$

(ii) $\nabla\vec{u} \in C((0,T);L^2)$, *com*

$$\|\nabla\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\int_0^t \frac{\|\vec{f}_{ext}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\,ds + C\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}t^{-1/2}; \tag{4.14}$$

(iii) $\vec{u} \in C([0,T);L^2)$, *com*

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \int_0^t \|\vec{f}_{ext}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,ds + \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{4.15}$$

$$\frac{1}{2}\|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{2}\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla\vec{u}(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,ds - \int_0^t \|\vec{u}\cdot\vec{f}_{ext}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\,ds. \tag{4.16}$$

Observação 10. Por (4.16), temos que a energia cinética inicial é distribuída em energia cinética em um tempo $t > 0$, dissipação de energia pela viscosidade e em "ganho" de energia pela força externa (as aspas devem-se a assumirmos que a força é positiva na interpretação, enquanto a equação mantém-se válida independente do sinal de $\vec{f}_{ext}$). Note que caso a viscosidade dinâmica $\mu = 0$ e $\vec{f}_{ext} = 0$, temos conservação de energia; caso a força seja sempre perpendicular a velocidade, então não há variação de energia por forças externas, embora haja indução de velocidades por ela.

Observação 11. Note que se assumirmos $\nabla^i\vec{f}_{ext} \in C([0,T);L^2)$ para todo $0 \leq |i| \leq m$, então $\nabla^{m+1}\vec{u} \in C((0,T);L^2)$, com

$$\|\nabla^{m+1}\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\int_0^t \frac{\|\nabla^m\vec{f}_{ext}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\,ds + C\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}t^{-(m+1)/2}. \tag{4.17}$$

Demonstração. A prova de (i) e (ii) são aplicações da Desigualdade de Young para convoluções (3.6) e das estimativas para os núcleos de Oseen e do calor. Para provarmos (iii), consideraremos dois casos:

Caso 1. $\vec{f}_{ext} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T))$ e fixado $t \in [0,T)$, $\operatorname{supp}\vec{f}_{ext}(t) \subset B_R(0)$. Então, pelo teorema anterior, temos que $\vec{u} \in C([0,T);L^2)$. Escolhendo $\vec{r'} \in B_R(0)$ e $|\vec{r}| > 2R$, temos que $|\vec{r}|/2 < |\vec{r}| - R < |\vec{r} - \vec{r'}| < |\vec{r}| + R$. Usando Cauchy-Schwarz (3.4), temos que

$$|\vec{u}(\vec{r},t)| \leq \frac{C}{(|\vec{r}|^2+t)^{3/2}} **|\vec{f}_{ext}| \leq \frac{C|B_R(0)|^{1/2}t}{|\vec{r}|^3}\max_{0\leq s\leq t}\|\vec{f}_{ext}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C|\vec{r}|^{-3}.$$

Similarmente, temos $|\vec{u}(\vec{r},t)| \leq C|\vec{r}|^{-5}$ e $|\nabla P(\vec{r},t)| \leq C|\vec{r}|^{-3}$, o que implica que em $[0,T']$, $T' < T$, esses módulos convirjam uniformemente a zero quando $|\vec{r}| \to \infty$. Note que pelas equações de Stokes, temos que $|\partial_t \vec{u}(\vec{r},t)| \leq C|\vec{r}|^{-3}$. Usando que todas as derivadas do campo de velocidades pertencem a $C((0,T);L^2)$, podemos integrar a equação de Stokes multiplicada pela velocidade em $\mathbb{R}^3 \times (\delta,t)$, $\delta > 0$, obtendo

$$\frac{1}{2}\int_\delta^t \frac{d}{dt}\|\vec{u}(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,ds - \int_\delta^t \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u}\cdot\Delta\vec{u}\,dV\,ds + \int_\delta^t \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u}\cdot\nabla P\,dV\,ds = \int_\delta^t \|\vec{u}\cdot\vec{f}_{ext}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\,ds$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{2}\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \frac{1}{2}\|\vec{u}(\delta)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_\delta^t \|\nabla\vec{u}(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,ds + \int_\delta^t \|\vec{u}\cdot\vec{f}_{ext}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\,ds,$$

onde foi usado que $\vec{u}$ tem divergente nulo (para o termo de pressão se anular), o Teorema Fundamental do Cálculo (para o termo de energia cinética) e integração por partes (para o termo de energia de dissipação). Usando o fato de que podemos tomar o limite $\delta \to 0^+$ a partir do Teorema da Convergência Dominada, obtemos (4.16). Além disso, temos por (4.16) e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (3.4) que

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 2\|\vec{u}\cdot\vec{f}_{ext}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq 2\|\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{f}_{ext}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{f}_{ext}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.18}$$

Ao integrarmos no tempo a equação acima, temos (4.15).

Caso 2. $\vec{f}_{ext} \in C(\mathbb{R}^3\times[0,T);L^2)$. Considera $T' < T$ e usa a densidade das funções suaves para obter uma sequência $\{\vec{f}_R\} \subset C(\mathbb{R}^3\times[0,T');L^2)$ tal que $\vec{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R})$ e supp $\vec{f}(t) \subset B_R(0)$ para todo t, com $\vec{f}_R \to \vec{f}_{ext}$ quando $R \to \infty$. Então podemos escolher $\vec{u}_{R_1}$, $\vec{u}_{R_2}$ e aplicar (4.15) para a diferença dessas funções para termos que $\vec{u}_R$ é uma sequência de Cauchy em $C((0,T'];L^2)$ e, portanto, $\vec{u}_R \to \vec{u'}$ em $C([0,T');L^2)$. Aplicando (4.13) para $\vec{u}_R - \vec{u}$, temos que $\|\vec{u}_R - \vec{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \to 0$ quando $R \to \infty$. Como temos que convergência em L^2 implica em convergência de subsequência em quase todo ponto, temos que $\vec{u} = \vec{u'}$. Como $\vec{u} \in C(\mathbb{R}^3 \times [0,T'];L^2)$, temos (4.15) para $\vec{u}_R$, bastando aplicar $R \to \infty$ para obtermos (4.15).

Usando (4.14) para $\vec{u}_R - \vec{u}$, temos que $\nabla\vec{u}_R \to \nabla\vec{u}$ em $C([\delta,T'];L^2)$, $\delta > 0$ se $R \to \infty$. Então podemos integrar a equação de Stokes com $\vec{u}_R$ multiplicada pela velocidade $\vec{u_R}$ em $\mathbb{R}^3 \times (\delta,t)$, tomarmos os limites $R \to \infty$, $\delta \to 0^+$ e obtemos (4.16). □

4.2 Densidade de Força Externa da Forma $-(\vec{g}\cdot\nabla)\vec{g}$

Consideraremos agora forças externas da forma $\vec{f}_{ext} = -(\vec{g}\cdot\nabla)\vec{g}$, com $\vec{g} \in C((0,T),L^\infty)$ com divergência fraca nula, $\|\vec{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \infty$ se $t \to 0^+$. Consideraremos também a forma fraca das soluções de Stokes, isto é, procurar soluções no sentido distribucional, já que a forma proposta de $\vec{f}_{ext}$ não está bem definida pela regularidade de $\vec{g}$. O objetivo de tomarmos a força externa desta forma é tomarmos $\vec{g} = \vec{u}$ para estudarmos as Equações de Navier-Stokes, notando que as hipóteses a serem feitas para $\vec{g}$ também serão aplicadas à $\vec{u}$ (ver Definição 19 em 5.1).

Definição 12. Diremos que $\vec{u}$, P são soluções distribucionais das equações de Stokes se $\vec{u}$ tiver divergência fraca nula e

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_0\cdot\vec{\phi}(0)\,dV + \int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}\cdot(\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) + P\,\nabla\cdot\vec{\phi})\,dV\,dt = -\int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{g}\cdot(\vec{g}\cdot\nabla)\vec{\phi}\,dV\,dt \tag{4.19}$$

para toda função $\vec{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\times[0,T);\mathbb{R}^3)$.

Também modificaremos as soluções das equações de Stokes para a forma específica da força externa, obtendo

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{r},t) &= (\partial_t - \Delta)^{-1}\vec{u}_0 - \nabla\cdot[\mathbb{T} * *(\vec{g}\otimes\vec{g})]; \\ P(\vec{r},t) &= \nabla\cdot\nabla\cdot(-\Delta)^{-1}(\vec{g}\otimes\vec{g}). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Lema 13. *Para $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, as funções definidas em (4.20) satisfazem:*

(i) Se $\vec{u}_0$ é limitada, então $\vec{u} \in C((0,T); L^\infty)$, com

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \int_0^t \frac{\|\vec{g}(s)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{1/2}}\, ds + \|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.21}$$

Além disso, $\vec{u} \in C([0,T); L^\infty)$ se $\vec{u}_0 \in L^\infty$ é uniformemente contínua;

(ii) $\vec{u} \in \mathcal{H}^{1/2}((0,T))$, com a constante $C_0(t)$ (ver Definição 3 em 3.1) satisfazendo

$$C_0(t) \leq C \int_0^t \frac{\|\vec{g}(s)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{3/4}}\, ds + C\frac{\|\vec{u_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{t}; \tag{4.22}$$

(iii) Se $\vec{g} \in C([0,T); L^2)$, então P, $\vec{u} \in C([0,T); L^2)$, com

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C \int_0^t \frac{\|\vec{g}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|\vec{g}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{1/2}}\, ds + \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}; \tag{4.23}$$

Além disso, se $\vec{g}_n \to \vec{g}$ em $C([0,T']; L^2)$, $T' < T$, e $\max\limits_{0\leq t\leq T'} \|\vec{g}_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \max\limits_{0\leq t\leq T'} \|\vec{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$, então $\vec{u}_n \to \vec{u}$, $P_n \to P$, ambas em $C([0,T']; L^2)$;

(iv) Se $\vec{g} \in \mathcal{H}^{1/2}((0,T))$, com constante $C_0(t) < \infty$ se $t \to 0^+$, então $\nabla\vec{u} \in C((0,T); L^\infty)$, com

$$\|\nabla\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \int_0^t \frac{\|\vec{g}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} C_0(s)}{(t-s)^{3/4}}\, ds + C\frac{\|\vec{u_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{t^{5/4}}. \tag{4.24}$$

Observação 14. Note que se assumirmos $\nabla^i\vec{g} \in C((0,T); L^\infty)$ para todo $0 \leq |i| \leq m$, com $\|\nabla^i\vec{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \infty$ quando $t \to 0^+$, então $\nabla^m\vec{u} \in \mathcal{H}^{1/2}((0,T))$, com a constante $C_m(t)$ (ver Observação 7 em Seção 4) satisfazendo

$$C_m(t) \leq C \sum_{\alpha+\beta=m} \int_0^t \frac{\|\nabla^\alpha\vec{g}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|\nabla^\beta\vec{g}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{3/4}}\, ds + C\frac{\|\vec{u_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{t^{(m+2)/2}}. \tag{4.25}$$

Observação 15. Note que que se assumirmos $\nabla^i\vec{g} \in \mathcal{H}^{1/2}((0,T)) \cap C((0,T); L^\infty)$, com $0 \leq |i| \leq m-1$, com constante $C_i(t), \|\nabla^i\vec{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \infty$ se $t \to 0^+$, então $\nabla^m\vec{u} \in C((0,T); L^\infty)$, com

$$\|\nabla^m\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C_m \sum_{\alpha+\beta=m-1} \int_0^t \frac{\|\nabla^\alpha\vec{g}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} C_\beta(s)}{(t-s)^{3/4}}\, ds + C\frac{\|\vec{u_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{t^{(2m+3)/4}}. \tag{4.26}$$

Demonstração. Para (i), bastar notar que como $\|\vec{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \infty$, o produto tensorial também pertence a esse espaço, concluindo a desigualdade a partir da inequação de Young para convoluções (3.6) e $\|\nabla\Phi_H\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-1/2}$ que $\|\nabla\cdot[\mathbb{T}**(\vec{g}\otimes\vec{g})]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{g}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|\nabla\Phi_H\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\vec{g}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}t^{-1/2}$;

Para (ii), usando as inequações de Morrey (3.7), Poincaré (3.8) e de Young para convoluções (3.6), temos que $\|\Phi_H * \vec{u}_0\|_{C^{0,1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\Phi_H * \vec{u}_0\|_{W^{1,6}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\nabla\Phi_H\|_{L^{3/2}(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = C\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}t^{-1}$, notando que $\|\nabla\Phi_H\|_{L^{3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-1}$. Usando que (4.6), concluímos que

$$|\vec{u}(\vec{r},t) - \vec{u}(\vec{r'},t)| \leq |(\nabla\mathbb{T}(\vec{r},t) - \nabla\mathbb{T}(\vec{r'}t)) **(\vec{g}\otimes\vec{g})| + |(\Phi_H(\vec{r},t) - \Phi_H(\vec{r'},t)) * \vec{u_0}|$$

$$\leq C\left[\int_0^t \frac{\|\vec{g}(s)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{3/4}}\, ds + \frac{\|\vec{u_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{t}\right] |\vec{r} - \vec{r'}|^{1/2};$$

Para (iii), basta usar as desigualdades de Hölder (3.4) e de Young para convoluções (3.6) para concluir a desigualdade. Para o limite da velocidade, basta notar que $\max_{0\leq t\leq T'}\|\vec{g}_n - \vec{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq 2\max_{0\leq t\leq T'}\|\vec{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ e $\max_{0\leq t\leq T'}\|\vec{g}_n - \vec{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$; para o limite da pressão, note que, pelo Teorema de Plancherel e por (3.3),

$$\|\nabla\cdot\nabla\cdot(-\Delta)^{-1}(\vec{g}\otimes\vec{g})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \left\|\frac{\vec{\xi}\otimes\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2} : \widehat{(\vec{g}\otimes\vec{g})}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\widehat{(\vec{g}\otimes\vec{g})}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|(\vec{g}\otimes\vec{g})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \tag{4.27}$$

e, portanto, $\|P - P_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \|(\vec{g}\otimes\vec{g}) - (\vec{g}_n\otimes\vec{g}_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$;

Para (iv), usando que $\|\nabla\Phi_H(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-5/4}$ (ver Definição 3 em Seção 3.1), $\nabla(\partial_t - \Delta)^{-1}\vec{u}_0 \in C((0,T);L^\infty)$ [6, Teorema 2, Seção 2.3], $\vec{g}$ tem divergência nula fracamente e que $|\nabla^2\mathbb{T}| \leq C(|\vec{r}|^2+t)^{-5/2}$, temos que

$$|\nabla\vec{u}| = |-(\nabla^2\mathbb{T} **\vec{g}\otimes\vec{g}) + \nabla\Phi_H * \vec{u}_0| \leq C\int_0^t \frac{\|\vec{g}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}C_0(s)}{(t-s)^{3/4}}\,ds + C\frac{\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{t^{5/4}}.$$

Para a continuidade de $\nabla\vec{u}$, fixa M majorante de $\|\vec{g}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$, $C_0(t)$ para $t\in[0,T']$, $T'<T$. Fixa $\epsilon>0$ e escolhe $\eta>0$ tal que para $t\leq 2\eta$

$$\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/4}}\,ds \leq \frac{\epsilon}{M^2}.$$

Por hipótese, temos que $\vec{g}\otimes\vec{g}$ é uniformemente contínua e, portanto, podemos tomar $\delta\in[0,\eta/2]$ tal que $\|\vec{g}(s)\otimes\vec{g}(s) - \vec{g}(t)\otimes\vec{g}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq (\epsilon\eta)/T'$, onde $s,t\in[\delta/2,T']$ e $|t-s|<\delta$. Tomando agora $t_1,t_2\in[0,T']$ tais que $t_1<t_2$, $|t_1-t_2|<\delta$, temos que

$$|\nabla\vec{u}(t_1) - \nabla\vec{u}(t_2)| \leq |\Phi_H(t_1)*\vec{u}_0 - \Phi_H(t_2)*\vec{u}_0| + \left|\int_0^{t_2-t_1}\nabla^2\mathbb{T}(t_2-s)*\vec{g}(s)\otimes\vec{g}(s)\,ds\right| +$$

$$+\left|\int_{t_2-t_1}^{t_2}\nabla^2\mathbb{T}(t_2-s)*[\vec{g}(s)\otimes\vec{g}(s) - \vec{g}(s-(t_2-t_1))\otimes\vec{g}(s-(t_2-t_1)]\,ds\right|.$$

O primeiro valor absoluto é devido a continuidade de Φ_H; o segundo pode ser calculado a partir da divergência fraca nula de $\vec{g}$, levando a

$$\left|\int_0^{t_2-t_1}\nabla^2\mathbb{T}(t_2-s)*\vec{g}(s)\otimes\vec{g}(s)\,ds\right| \leq M^2\int_0^{t_2-t_1}\frac{C}{(t_2-s)^{3/4}}\,ds \leq C\epsilon.$$

Se $t_2<2\eta$, concluímos que

$$\left|\int_{t_2-t_1}^{t_2}\nabla^2\mathbb{T}(t_2-s)*[\vec{g}(s)\otimes\vec{g}(s) - \vec{g}(s-(t_2-t_1))\otimes\vec{g}(s-(t_2-t_1)]\,ds\right| \leq 2C\epsilon$$

. Caso $t_2\geq 2\eta$, usando que "$\int_{t_2-t_1}^{t_2} = \int_{t_2-t_1}^{\eta} + \int_{\eta}^{t_2-\eta} + \int_{t_2-\eta}^{t_2}$", podemos estimar por partes: como a primeira e a terceira integrais tem intervalo de integração menor que 2η, podemos usar a estimativa anterior e termos que estas integrais são menores ou iguais a $2C\epsilon$; para a segunda integral, usando as desigualdades de Minkowisky (3.9), Young para convoluções (3.6), $\|\nabla\mathbb{T}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-1}$ e notando que s, $s-(t_2-t_1)\in[\eta/2,T']$ para todo s no intervalo de integração, temos que esta integral é menor ou igual a $C\epsilon$ e, portanto,

$$|\nabla\vec{u}(t_1) - \nabla\vec{u}(t_2)| \leq 5C\epsilon;$$

As observações seguem das mesmas argumentações acima aplicadas às derivadas de $\vec{g}$. □

O Teorema abaixo nos dará a unicidade das soluções de Stokes (ver Observação 17 desta seção):

Teorema 16. *Se $\vec{u} \in C([0,T;L^2)$ com divergência fraca nula, $P \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0,T))$ e*

$$\int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot (\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) + P\,\nabla \cdot \vec{\phi})\, dV\, dt = 0 \tag{4.28}$$

para todo $\vec{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T);\mathbb{R}^3)$, então $\vec{u} \equiv 0$, $P \equiv 0$.

Demonstração. Define

$$\vec{v}(\vec{r},t) := \int_0^t \eta_\epsilon * \vec{u}(\vec{r},s)\, ds$$

e

$$Q(\vec{r},t) := \int_0^t \eta_\epsilon * P(\vec{r},s)\, ds.$$

Note que $\vec{v}$, Q satisfazem (4.28) ao trocarmos $\vec{u}$ por $\vec{v}$ e P por Q se e somente se

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(\vec{r'}) \iiint_{\mathbb{R}^3} \int_0^T \int_0^t \vec{u}(\vec{r},s) \cdot (\vec{\phi}_t(\vec{r}+\vec{r'},t) + \Delta\vec{\phi}(\vec{r}+\vec{r'},t)) +$$

$$+ P(\vec{r},s)\nabla \cdot \vec{\phi}(\vec{r}+\vec{r'},t)\, ds\, dt\, dV\, dV' = 0$$

Escolhe

$$\vec{\Psi}(\vec{r},t) := -\int_t^{T'} \vec{\phi}(\vec{r}+\vec{r'},s)\, ds,$$

onde $T' < T$ e ϕ se anula para $t > T'$. Então temos (4.28) trocando $\vec{\phi}$ por $\vec{\Psi}$, pois $\vec{\Psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T);\mathbb{R}^3)$. Usando integração por partes e o Teorema de Fubini, temos, portanto, que

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \int_0^T \left(\int_0^t \vec{u}(\vec{r},s) \cdot (\vec{\phi}_t(\vec{r}+\vec{r'},t) + \Delta\vec{\phi}(\vec{r}+\vec{r'},t)) + P(\vec{r},s)\nabla \cdot \vec{\phi}(\vec{r}+\vec{r'},t)\, ds \right) dt\, dV = 0,$$

concluindo que, de fato, $\vec{v}$, Q satisfazem (4.28).

Escolhe $\vec{\phi} := \nabla\psi$ e, portanto,

$$\int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} P\,\Delta\psi\, dV\, dt = -\int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla(\psi_t + \Delta\psi) \cdot \vec{u}\, dV\, dt = 0,$$

pela divergência fraca nula de $\vec{u}$. Analogamente,

$$\int_0^T Q\Delta\psi\, dV\, dt = 0 \iff$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \eta_\epsilon(\vec{r'}) \int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} \int_0^t P(\vec{r},s)\Delta\psi(\vec{r}+\vec{r'},t)\, ds\, dV\, dt\, dV' = 0$$

Definindo

$$\Psi(\vec{r},t) := -\int_t^{T'} \psi(\vec{r}+\vec{r'},s)\, ds,$$

trocando ψ por Ψ, usando novamente integração por partes e o Teorema de Fubini, temos que

$$\int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} \int_0^t P(\vec{r},s)\Delta\psi(\vec{r}+\vec{r'},t)\, ds\, dV\, dt = 0.$$

Substituindo $\vec{u}$ por $\vec{v}$, P por Q e $\vec{\phi}$ por $\Delta\vec{\phi}$ em (4.28), temos que

$$\int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} \Delta(\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) \cdot \vec{u}\, dV\, dt = \int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) \cdot \Delta\vec{u}\, dV\, dt = 0.$$

Usando a unicidade das soluções fracas da equação do calor (Lema A.2 de [19]), temos que $\Delta\vec{v} \equiv 0$ em todo ponto. Pelo Teorema de Liouville [6, Teorema 8 da Seção 2.2] e por $\vec{v} \in C([0,T); L^2)$, temos que $\vec{v} \equiv 0$. Diferenciando em t, temos que $\eta_\epsilon * \vec{u} \equiv 0$. Pela convergência em quase todo ponto do molificador, temos que $\vec{u} \equiv 0$ em quase todo ponto. Usando argumento similar, podemos mostrar que $P \equiv 0$ usando a unicidade das soluções fracas da equação de Laplace. □

Observação 17. O fato de termos soluções nulas caso $\vec{u_0} = \vec{f}_{ext} = 0$ implica unicidade de soluções, pois caso tenhamos $\vec{u}, P$, $\vec{v}, Q$ soluções de (4.1) no sentido distribucional com as mesmas condições iniciais e forças externas, então basta considerar $\vec{w} := \vec{u} - \vec{v}$, $S := P - Q$ e aplicarmos o teorema anterior para descobrirmos que $0 = \vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, $0 = S = P - Q$. Podemos concluir o principal teorema envolvendo as equações de Stokes:

Teorema A (Existência e Unicidade das Soluções das Equações de Stokes). *As soluções distribuicionais de* (4.1)*, com*

$$\vec{f}_{ext} = -(\vec{g} \cdot \nabla)\vec{g}, \quad \textit{onde} \quad \vec{g} \in C([0,T), L^2) \cap C((0,T), L^\infty)$$

com divergência fraca nula, $\|\vec{g}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \infty$ *se* $t \to 0^+$ *são dadas por* (4.20) *e são únicas nas classes* $\vec{u} \in C([0,T), L^2)$*,* $P \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0,T))$*.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, temos unicidade. Pelo Lema 13 (iii), $\|\vec{u}(t) - \vec{u_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$ se $t \to 0$.

Toma $T' \in (0,T)$ e toma sequência $\vec{g}_n \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T); \mathbb{R}^3)$ tal que $\operatorname{supp} \vec{g}_n \subset B_{R_n}(0)$ para algum $R_n > 0$ tal que $\|\vec{g}_n - \vec{g}\|_{C([0,T');L^2)} \to 0$ se $n \to \infty$ e $\max\limits_{0 \le t \le T'} \|\vec{g}_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \le \max\limits_{0 \le t \le T'} \|\vec{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$. Considera $\vec{u}_n$, P_n satisfazendo (4.20) trocando $\vec{g}$ por $\vec{g}_n$. Então temos que $\vec{u}_n$ tem divergência fraca nula e

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u_0} \cdot \vec{\phi}(0)\, dV + \int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_n \cdot (\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) + P_n\, \nabla \cdot \vec{\phi})\, dV\, dt = \int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{g}_n \cdot (\vec{g}_n \cdot \nabla)\vec{\phi}\, dV\, dt \quad (4.29)$$

para toda função $\vec{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T); \mathbb{R}^3)$, com $\vec{\phi}$ nula se $t > T'$. Pelo Lema 13 (iii), temos $\|\vec{u}_n - \vec{u}\|_{C([0,T');L^2)} \to 0$, $\|P_n - P\|_{C([0,T');L^2)} \to 0$ se $n \to \infty$. Então basta tomar o limite em n para obtermos que, de fato, $\vec{u}$, P definidas em (4.20) satisfazem (4.1) no sentido distribucional. □

Observação 18. Usando a definição de número de Reynolds, que mede o "grau de importância" entre a não-linearidade e o termo de viscosidade, isto é,

$$Re := \frac{\|(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{\|\nu\Delta\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}},$$

temos que (4.20) são as soluções exatas para as equações de Navier-Stokes para $Re = 0$, o que as tornam boas aproximações para os casos de fluxo laminar ($Re \ll 1$).

5 Soluções Fortes das Equações de Navier-Stokes

5.1 Equações de Navier-Stokes sem condição inicial

Pelo Teorema A, temos a intuição de substituirmos $\vec{g}$ por $\vec{u}$ para obtermos as Equações de Navier-Stokes e é natural esperarmos que se impusermos as mesmas condições que tínhamos em $\vec{g}$, isto é, $\vec{u} \in C([0,T), L^2) \cap C((0,T), L^\infty)$, consigamos garantir as mesmas propriedades anteriores. Estudaremos primeiro o caso onde não há condição inicial:

Definição 19. O par $\vec{u}$, P é dito solução forte das equações de Navier-Stokes em $(0,T)$ se $P \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$, $\vec{u} \in C((0,T), L^2) \cap C((0,T), L^\infty)$ com divergência fraca nula tais que

$$\int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot (\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) + P\,\nabla \cdot \vec{\phi})\, dV\, dt = -\int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\phi}\, dV\, dt \tag{5.1}$$

para toda função $\vec{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0,T); \mathbb{R}^3)$.

Proposição 20. *Se $\vec{u}$, P são soluções fortes em $(0,T)$, então*

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(t_1) \cdot \phi(t_1) - \vec{u}(t_2) \cdot \phi(t_2)\, dV \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot (\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) + P\,\nabla \cdot \vec{\phi})\, dV\, dt = \\ -\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\phi}\, dV\, dt.\end{aligned} \tag{5.2}$$

para toda função $\vec{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T); \mathbb{R}^3)$ e $t_1, t_2 \in (0,T)$, com $t_1 < t_2$.

Demonstração. Define $\vec{\phi}_h(\vec{r}, s) := \vec{\phi}(\vec{r}, s)\theta_h(s)$, onde $\theta_h(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$ é uma função decrescente normalizada no espaço tal que $\theta_h(s) = 1$ se $s \le t_2$ e $\theta_h(s) = 0$ se $s \ge t_2 + h$ (θ_h pode ser pensado como uma "função de Heaviside suave"). Usando $\vec{\phi}_h(\vec{r}, s)$ no lugar de $\phi(\vec{r}, s)$ em (5.1), temos que

$$\begin{aligned}\int_0^{t_2+h} \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot (\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) + P\,\nabla \cdot \vec{\phi})\theta_h\, dV\, dt + \int_{t_2}^{t_2+h} \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot \vec{\phi})\theta_h'\, dV\, dt = \\ -\int_0^{t_2+h} \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\phi})\theta_h\, dV\, dt\end{aligned} \tag{5.3}$$

Como $\vec{u}, \vec{\phi} \in C((0,T); L^2)$, então a função $s \mapsto \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(s) \cdot \vec{\phi}(s)\, ds$ é contínua. Note que $\theta_h'(s) \to -\delta(t_2)$ se $h \to 0^+$ no sentido distribucional. Então tomando $h \to 0^+$, temos que

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot \vec{\phi})\theta_h'\, dV\, dt \to -\iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}(t_2) \cdot \vec{\phi}(t_2))\, dV\, dt.$$

Refazendo o mesmo processo para t_1 e tomando o limite $h \to 0^+$ juntamente com o Teorema da Convergência Dominada, obtemos (5.2). □

Pela proposição acima e pelos teoremas de unicidade e existência de solução distribucional das equações de Stokes, temos que

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{r}, t_2) &= \Phi_H(t_2 - t_1) * \vec{u}(t_1) - \nabla \cdot [\mathbb{T} ** (\vec{u} \otimes \vec{u})]; \\ P(\vec{r}, t_2) &= \nabla \cdot \nabla \cdot (-\Delta)^{-1}(\vec{u}(t_2) \otimes \vec{u}(t_2)).\end{aligned} \tag{5.4}$$

são representações de soluções de (5.1) para todo $t_1, t_2 \in (0,T)$, com $t_1 < t_2$, onde $f ** g := \int_{t_1}^{t_2} g(t_2 - t_1 - s) * f(s)\, ds$ (note que a diferença está nos limites de integração temporais, ver Observação 6).

Teorema 21. *Se $\vec{u}$ é solução forte de Navier-Stokes em $(0,T)$, então*

$$\nabla^m \vec{u} \in C((0,T); L^2) \cap C((0,T); L^\infty) \tag{5.5}$$

para todo $m \ge 0$.

Demonstração. Primeiro provemos que, para todo $|m| \geq 0$,

$$\nabla^m \vec{u} \in C((0,T); L^\infty) \cap \mathcal{H}^{1/2}((0,T)).$$

Prosseguimos por indução. A base indutiva segue da definição de solução forte e do Lema 13 (*ii*) com $\vec{u}_0 \equiv 0$; o passo indutivo segue do Lema 13 (*iv*) e das observações 14 e 15.

Provemos que, para todo $|m| \geq 0$,

$$\nabla^m \vec{u} \in C((0,T); L^2), \nabla^m[(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] \in C((0,T); L^2).$$

A base indutiva segue da definição de solução forte e do fato de que

$$\begin{aligned} \|(\vec{u}(t) \cdot \nabla)\vec{u}(t) - (\vec{u}(s) \cdot \nabla)\vec{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \vec{u}(t) - \nabla \vec{u}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \\ + \|\nabla \vec{u}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\vec{u}(t) - \vec{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

onde somou-se $(\vec{u}(t) \cdot \nabla)\vec{u}(s) - (\vec{u}(t) \cdot \nabla)\vec{u}(s)$ e foi usada a desigualdade de Hölder (3.4); o passo indutivo segue da Observação 10 e usa-se processo similar a (5.6) para as derivadas de $\vec{u}$. □

Como corolários, temos que as soluções fortes de Navier-Stokes (sem condição inicial) são suaves (Corolário 22) e satisfazem a equação de energia (Corolário 24). A suavidade das soluções fortes permitem, em particular, aproximarmos as soluções por séries de Taylor, o que é uma ferramenta essencial para problemas perturbativos; a equação de energia permite verificarmos matematicamente a conservação de energia, já que ela não foi utilizada como hipótese na derivação das Equações de Navier-Stokes (ver Seção 2).

Corolário 22 (Suavidade das soluções fortes). *Se $\vec{u}$, P são soluções fortes das equações de Navier-Stokes em $(0,T)$, então elas são suaves, isto é, para todo $m, k \geq 0$,*

$$\partial_t^k \nabla^m \vec{u}, \partial_t^k \nabla^m P \in C((0,T); L^2) \cap C((0,T); L^\infty). \tag{5.7}$$

Em particular, $\vec{u}, P \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$ e, portanto, são soluções clássicas das equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$. Antes de demonstrar o corolário, provemos o seguinte fato:

Afirmação. *Se $f(\vec{r}) \in H^1$, então*

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\vec{r})|^2}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} \, dV \leq 4\|\nabla f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{5.8}$$

Demonstração. Note que basta provar para o caso $\vec{r'} = 0$. Supondo momentaneamente que $f \in C_0^\infty$. Então

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\vec{r})|^2}{|\vec{r}|^2} \, dV = -\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2} \cdot \nabla(f(\vec{r}))^2 \, dV = -2 \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2} \cdot \nabla f(\vec{r}) f(\vec{r}) \, dV \leq \\ 2\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{f^2(\vec{r})}{|\vec{r}|^2} \, dV \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\|\nabla f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{f^2(\vec{r})}{|\vec{r}|^2} \, dV, \end{aligned} \tag{5.9}$$

onde no penúltimo e último passos foram utlizadas as inequações de Cauchy-Schwarz (3.4) e Young (3.5), respectivamente. Para $f \in H^1$, usando a densidade de funções $f_n \in C_0^\infty$ convergentes para $f \in H^1$ e o lema de Fatou (3.11), temos que

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{f^2(\vec{r})}{|\vec{r}|^2} \, dV \leq \liminf_n \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n^2(\vec{r})}{|\vec{r}|^2} \, dV \leq 4 \lim_n \|\nabla f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 4\|\nabla f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

□

Observação 23. Note que o resultado também é válido para funções **vetoriais** $\vec{f}$.

Demonstração(Corolário 22). Usando o fato de que $\nabla \cdot \nabla \cdot (-\Delta)^{-1}$ é limitado para funções L^2 (como visto em (4.27)), podemos garantir que $\nabla^m P \in C((0,T);L^2)$ para todo $m \geq 0$, já que

$$\begin{aligned}\|\nabla^m(P(t)-P(s))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\nabla^m(\vec{u}(t)\otimes\vec{u}(t)-\vec{u}(s)\otimes\vec{u}(s))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \\ 2\|\nabla^m\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla^m(\vec{u}(t)-\vec{u}(s))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Usando a afirmação acima juntamente com a desigualdade de Cauchy-Schwarz (3.4), temos que

$$\begin{aligned}|P(t)-P(s)| &\leq \Phi_P * \{|\nabla\cdot(\vec{u}(t)\cdot\nabla)(\vec{u}(t)-\vec{u}(s))| + |\nabla\cdot(\vec{u}(s)\cdot\nabla)(\vec{u}(t)-\vec{u}(s))|\} \\ &\leq C\|\nabla\vec{u}(t)-\nabla\vec{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left\{\left(\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{|\nabla\vec{u}(\vec{r'},t)|^2}{|\vec{r}-\vec{r'}|^2}\,dV'\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{|\nabla\vec{u}(\vec{r'},s)|^2}{|\vec{r}-\vec{r'}|^2}\,dV'\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \\ &\leq C\|\nabla\vec{u}(t)-\nabla\vec{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}(\|\nabla^2\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|\nabla^2\vec{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}).\end{aligned}$$

e, portanto, $P \in C((0,T);L^\infty)$. Fazendo cálculos semelhantes aos de cima, temos que $\nabla^m P \in C((0,T);L^\infty)$ para todo $m \geq 0$. Então por (5.1), temos que, para todo $m \geq 0$, $\nabla^m \vec{u}_t \in C((0,T);L^\infty) \cap C((0,T);L^\infty)$.

A regularidade das derivadas de ordem mais alta no tempo de pode ser demonstrada por indução: as bases indutivas para $\vec{u}$, p estão demonstradas acima (casos particulares de $m=0$). Para o passo indutivo, note que a regularidade de $\partial_t^k\vec{u}$ é garantida a partir de $\vec{u}$, $\partial_t\vec{u}$, ..., $\partial_t^{k-1}\vec{u}$ e $\partial_t^{k-1}P$, além de tomarmos a $(k-1)$-ésima derivada fraca temporal de (5.1) (são necessárias as derivadas de todas as ordem de $\vec{u}$ devido a não-linearidade); a regularidade de $\partial_t^k P$ é obtida através de tomarmos a k-ésima derivada de (5.4). □

Corolário 24 (Equação de energia para soluções fortes). *Se $\vec{u}$, p são soluções fortes das equações de Navier-Stokes, então*

$$\frac{1}{2}\|\vec{u}(t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{2}\|\vec{u}(t_2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_1}^{t_2}\|\nabla\vec{u}(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,ds. \tag{5.11}$$

Demonstração. Temos, em particular, que $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} \in C((0,T);L^2)$. Podemos então aplicar (4.16) e obtermos

$$\frac{1}{2}\|\vec{u}(t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{2}\|\vec{u}(t_2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_1}^{t_2}\|\nabla\vec{u}(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,ds + \int_{t_1}^{t_2}\|\vec{u}(s)\cdot(\vec{u}(s)\cdot\nabla)\vec{u}(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\,ds.$$

O resultado é facilmente demonstrado se notarmos que

$$\|\vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = -\|\,|\vec{u}|^2\,\nabla\cdot\vec{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} - \|\vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = -\|\vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

□

Lema 25 (Comparação entre duas soluções fortes). *Suponha os pares $\{\vec{u},P\}$, $\{\vec{v},Q\}$ soluções fortes das Equações de Navier-Stokes em $(0,T)$. Então, para $t_1 < t_2$ em $(0,T)$,*

$$\|\vec{w}(t_2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{w}(t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} e^{\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\|\vec{u}(s)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\,ds}, \tag{5.12}$$

onde $\vec{w} := \vec{u}-\vec{v}$.

Observação 26. Note que se as soluções coincidem em t_1, então elas coincidem nos tempos posteriores. Além disso, temos que caso as soluções não coincidam em t_1, então elas estarão "bem mais afastas" (em norma L_2) em t_2, já que o afastamento cresce exponencialmente.

Demonstração. Como $\{\vec{u}, P\}$, $\{\vec{v}, Q\}$ satisfazem as equações de Navier-Stokes pontualmente, então fazendo a diferença entre as equações, temos que

$$(\partial_t - \Delta)\vec{w} + \nabla S = -(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{w} - (\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v},$$

onde $S := P - Q$ e na última igualdade foi somado $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u} - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u}$. Fazendo o produto escalar com $\vec{w}$ e integrando no espaço, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{w}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\vec{w}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = -\|\vec{w}\cdot(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{w}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} - \|\vec{w}\cdot(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)},$$

onde foi usada a condição de incompressibilidade de $\vec{w}$ para eliminarmos o termo com S. Notando que o primeiro termo do lado direito da equação é nulo, já que

$$\|\vec{w}\cdot(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{w}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = -\|\,|\vec{w}|^2\,\nabla\cdot\vec{v}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} - \|\vec{w}\cdot(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{w}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = -\|\vec{w}\cdot(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{w}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

O segundo termo pode ser estimado a partir das Desigualdades de Cauchy-Schwarz (3.4) e de Young (3.5), obtendo

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\cdot(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} &= -\|\vec{u}\cdot\vec{w}(\nabla\cdot\vec{w})\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} - \|\vec{u}\cdot(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{w}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\ \leq \|\nabla\vec{w}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{w}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\nabla\vec{w}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{4}\|\vec{w}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}(t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)},\end{aligned}$$

concluindo que

$$\frac{d}{dt}\|\vec{w}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{2}\|\vec{w}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}(t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}.$$

O resultado segue da aplicação da desigualdade de Gronwall (3.10). □

Lema 27 (Convergência de família de soluções). *Suponha* $\{\vec{u}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ *uma família de soluções fortes de Navier-Stokes tais que* $\|\vec{u}_\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \|\vec{u}_\epsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq f(t)$ *para* $t \in (0,T)$*, onde* $f(t)$ *é uma função contínua em* $(0,T)$*. Então existe sequência* $\epsilon_k \to 0^+$ *e função* $\vec{u}$ *tal que* $\vec{u}_{\epsilon_k} \to \vec{u}$, $\nabla\vec{u}_{\epsilon_k} \to \nabla\vec{u}$ *uniformemente em conjuntos compactos em* $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ *quando* $\epsilon_k \to 0^+$*. Além disso,* $\vec{u}$ *é solução forte das equações de Navier-Stokes em* $(0,T)$ *e satisfaz* $\|\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq f(t)$ *para* $t \in (0,T)$*.*

Demonstração. Define P_ϵ substituindo $\vec{u}$ por $\vec{u}_\epsilon$ em (5.4). Fixa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domínio limitado e $\delta > 0$. Pelo Corolário 22, temos que para i e m, onde $|i| \leq 3$,

$$|\partial_t^m\nabla^i\vec{u}_\epsilon|, |\partial_t^m\nabla^i P_\epsilon| \leq C_{\Omega,\delta} \text{ em } \Omega_\delta \times \left(\frac{\delta}{2}, T - \frac{\delta}{2}\right),$$

onde $\Omega_\delta := \Omega + B_\delta(0)$. Em particular, temos que $\vec{u}_\epsilon$, P_ϵ são uniformemente limitadas e equicontínuas. Então, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, temos que existe uma sequência $\{\epsilon_k\}$ tal que $\partial_t^m\nabla^i\vec{u}_{\epsilon_k}, \partial_t^m\nabla^i P_{\epsilon_k}$ convergem uniformemente em $\Omega \times (\delta, T-\delta)$ para as respectivas derivadas de funções $\vec{u}, P$ para $|i| \leq 2$. Em particular,

$$\begin{matrix}\partial_t\vec{u}_{\epsilon_k} + (\vec{u}_{\epsilon_k}\cdot\nabla)\vec{u}_{\epsilon_k} + \nabla P_{\epsilon_k} - \Delta\vec{u}_{\epsilon_k} = 0; \\ \nabla\cdot\vec{u}_{\epsilon_k} = 0\end{matrix} \quad \xrightarrow{unif.} \quad \begin{matrix}\partial_t\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla P - \Delta\vec{u} = 0; \\ \nabla\cdot\vec{u} = 0\end{matrix}$$

em $\Omega \times (\delta, T-\delta)$, onde o limite acima é termo a termo. Considerando agora Ω_n conjuntos limitados tais que $\Omega_n \nearrow \mathbb{R}^3$, uma sequência $\delta_n \to 0^+$ para obtermos $\{\epsilon_k\}$ (com renomeações de índices) tais que para $|i| \leq 2$,

$$\partial_t^m\nabla^i\vec{u}_{\epsilon_k} \xrightarrow{unif.} \partial_t^m\nabla^i\vec{u}; \quad \partial_t^m\nabla^i P_{\epsilon_k} \xrightarrow{unif.} \partial_t^m\nabla^i P$$

em conjuntos compactos em $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$. Em particular, $\vec{u}, P$ satisfazem as equações de Navier-Stokes pontualmente e, portanto, no sentido distribucional também. Note que para todo $t \in (0,T)$,

$$|\vec{u}(t)| = |\lim_k \vec{u}_{\epsilon_k}(t)| = \lim_k |\vec{u}_{\epsilon_k}(t)| \leq \lim_k \|\vec{u}_{\epsilon_k}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq f(t).$$

Então $\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq f(t)$. Similarmente, usando o Lema de Fatou (3.11), temos que

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \liminf_k \|\vec{u}_{\epsilon_k}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq f(t).$$

Demonstremos, por fim, que $\vec{u} \in C((0,T);L^2) \cap C((0,T);L^\infty)$: note que pelo Corolário 22, existe $M > 0$ tal que $\|\partial_t \vec{u}_{\epsilon_k}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \|\partial_t \vec{u}_{\epsilon_k}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq M$ para $t \in I$, onde $I \subset (0,T)$ fechado. Então, pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$\|\vec{u}_{\epsilon_k}(t) - \vec{u}_{\epsilon_k}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \|\vec{u}_{\epsilon_k}(t) - \vec{u}_{\epsilon_k}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq M|t-s|$$

para todo $s,t \in I$, $k \geq 0$. Tomando o limite em k e aplicando novamente o Lema de Fatou (3.11), temos que para todo $\eta > 0$, existe $\delta = \eta/M$ tal que $|t-s| < \delta$ implica

$$\|\vec{u}(t) - \vec{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \liminf_k \|\vec{u}_{\epsilon_k}(t) - \vec{u}_{\epsilon_k}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq M|t-s| < \eta;$$
$$\|\vec{u}(t) - \vec{u}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \liminf_k \|\vec{u}_{\epsilon_k}(t) - \vec{u}_{\epsilon_k}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq M|t-s| < \eta.$$

□

5.2 Equações de Navier Stokes com condição inicial

A seguir, estendemos a Definição 19 para o caso de termos condição inicial:

Definição 28. O par $\vec{u}$, P é dito solução forte das equações de Navier-Stokes em $[0,T)$ se $P \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0,T))$, $\vec{u} \in C([0,T), L^2) \cap C((0,T), L^\infty)$ com divergência nula fracamente em $t \in (0,T)$ e $\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \infty$ quando $t \to 0^+$, tais que

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\phi}(0)\cdot\vec{u}(0)\,dV + \int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}\cdot(\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) + P\,\nabla\cdot\vec{\phi})\,dV\,dt = -\int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\phi}\,dV\,dt \quad (5.13)$$

para toda função $\vec{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T); \mathbb{R}^3)$.

Pela Proposição 20, podemos tomar $t_1 = 0$ e $t_2 = t$, obtendo a fórmula de representação

$$\begin{aligned} &\vec{u}(\vec{r},t) = \Phi_H(t) * \vec{u}(0) - \nabla\cdot[\mathbb{T} ** (\vec{u}\otimes\vec{u})]; \\ &P(\vec{r},t) = \nabla\cdot\nabla\cdot(-\Delta)^{-1}(\vec{u}(t)\otimes\vec{u}(t)), \end{aligned} \quad (5.14)$$

além de obtermos que (5.13) é equivalente a

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\phi}(0)\cdot\vec{u}(0)\,dV - \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\phi}(t)\cdot\vec{u}(t)\,dV + \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}\cdot(\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) + P\,\nabla\cdot\vec{\phi})\,dV\,ds = \\ -\int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\phi}\,dV\,ds \end{aligned} \quad (5.15)$$

para todo $t \in (0,T)$, $\vec{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T); \mathbb{R}^3)$. Como consequência imediata, temos que se temos solução forte em $[0,T)$, então ela também é forte em $[\tau,T)$, $\tau \in (0,T)$.

O Lema abaixo versa sobre a unicidade de soluções fortes de Navier-Stokes, o que garante que não há duas soluções diferentes a serem medidas em laboratório, o que é esperado fisicamente.

Lema 29 (Unicidade e Equação de Energia para soluções fortes). *Se $\vec{u}$, P são soluções fortes das equações de Navier-Stokes em $[0,T)$, então*

$$\frac{1}{2}\|\vec{u}(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{2}\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla\vec{u}(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,ds. \tag{5.16}$$

Além disso, se $\vec{v}$, Q também são soluções fortes das equações de Navier-Stokes em $[0,T)$ e $\vec{v}(0) = \vec{u}(0)$, então $\vec{u} \equiv \vec{v}$, $P \equiv Q$ (ver Observação 1).

Demonstração. A demonstração segue da aplicação do limite $t_1 \to 0^+$ nos resultados do Corolário 24 e Lema 25 e aplicando o Teorema da Convergência Monótona. □

Demonstremos então o principal resultado para as soluções fortes das equações de Navier-Stokes:

Teorema B (Existência local de soluções fortes). *Se $\vec{u}_0 \in L^2 \cap L^\infty$, com divergência fraca nula, então existe uma solução única forte das equações de Navier-Stokes em $[0,T)$, com $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$, com $T > C/\|\vec{u}_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$.*

Demonstração. Pelo Lema 29, temos que garantida a unicidade das soluções. Para a existência, definamos

$$\begin{aligned}
&\vec{u}_{(0)}(\vec{r},t) \coloneqq \Phi_H(t) * \vec{u}_0;\\
&\vec{u}_{(n+1)}(\vec{r},t) \coloneqq \vec{u}_{(0)} - \nabla\cdot[\mathbb{T} * *(\vec{u}_{(n)} \otimes \vec{u}_{(n)})];\\
&P_{(n+1)}(\vec{r},t) \coloneqq \nabla\cdot\nabla\cdot(-\Delta)^{-1}(\vec{u}_{(n)}(t) \otimes \vec{u}_{(n)}(t)).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Pelas propriedades de Φ_H, temos que $\vec{u}_{(0)} \in C([0,\infty);L^2) \cap C((0,\infty);L^\infty)$, com majorantes $\|\vec{u}_{(0)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ e $\|\vec{u}_{(0)}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. Além disso, usando os itens (i) e (iii) do Lema 13, temos que

$$\|\vec{u}_{(n+1)}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\int_0^t \frac{\|\vec{u}_{(n)}(s)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{1/2}}\,ds + \|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)};$$

$$\|\vec{u}_{(n+1)}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\int_0^t \frac{\|\vec{u}_{(n)}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}_{(n)}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{1/2}}\,ds + \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Pelo Teorema A, temos que $\vec{u}_{(n+1)}$, $P_{(n+1)}$ são soluções distribucionais de

$$\begin{aligned}
\partial_t\vec{u}_{(n+1)} + \nabla P_{(n+1)} - \Delta\vec{u}_{(n+1)} &= -(\vec{u}_{(n)}\cdot\nabla)\vec{u}_{(n)};\\
\nabla\cdot\vec{u}_{(n+1)} &= 0;\\
\vec{u}_{(n+1)}(0) &= \vec{u}_0.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Define

$$T \coloneqq \frac{\|\vec{u}_0\|^{-2}_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{32(1+C)^4}.$$

Notando que a função constante $\phi \coloneqq (1+C)\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ satisfaz

$$\phi \geq C\int_0^t \frac{\phi^2}{(t-s)^{1/2}}\,ds + \|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \tag{5.19}$$

para todo $t \in [0,8T)$, podemos usar indução para obtermos $\|\vec{u}_{(n)}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \phi$ para $t \in [0,8T)$ e para todo $n \geq 0$. Usando os itens (i) e (iii) do Lema 13 novamente (modificando a forma $\vec{g}\cdot\nabla\vec{g}$ para $\vec{g}\cdot\nabla\vec{h}$, onde $\vec{h}$ goza das mesma propriedades de $\vec{g}$) duplamente na equação

$$\vec{u}_{(n)} \otimes \vec{u}_{(n)} - \vec{u}_{(n-1)} \otimes \vec{u}_{(n-1)} = \vec{u}_{(n)} \otimes (\vec{u}_{(n)} - \vec{u}_{(n-1)}) + \vec{u}_{(n-1)} \otimes (\vec{u}_{(n)} - \vec{u}_{(n-1)},$$

temos que

$$\|\vec{u}_{(n+1)}(t) - \vec{u}_{(n)}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq C \int_0^t \frac{\|\vec{u}_{(n)}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|\vec{u}_{(n-1)}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{1/2}} \|\vec{u}_{(n)}(s) - \vec{u}_{(n-1)}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\, ds;$$

$$\|\vec{u}_{(n+1)}(t) - \vec{u}_{(n)}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$
$$\leq C \int_0^t \frac{\|\vec{u}_{(n)}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|\vec{u}_{(n-1)}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{1/2}} \|\vec{u}_{(n)}(s) - \vec{u}_{(n-1)}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, ds.$$

Logo, para $t \in [0,T]$,

$$\|\vec{u}_{(n+1)}(t) - \vec{u}_{(n)}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 2C(1+C)\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\vec{u}_{(n)}(s) - \vec{u}_{(n-1)}(s)\|_{C([0,T];L^2)} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}}\, ds$$

$$= 4C(1+C)\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} t^{1/2} \|\vec{u}_{(n)}(s) - \vec{u}_{(n-1)}(s)\|_{C([0,T];L^2)} \leq \lambda \|\vec{u}_{(n)}(s) - \vec{u}_{(n-1)}(s)\|_{C([0,T];L^2)}$$
$$\Rightarrow \|\vec{u}_{(n+1)}(t) - \vec{u}_{(n)}(t)\|_{C([0,T];L^2)} \leq \lambda \|\vec{u}_{(n)}(s) - \vec{u}_{(n-1)}(s)\|_{C([0,T];L^2)},$$

onde $\lambda = 4C(1+C)\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} T^{1/2}$.

Note que $\lambda \in (0,1)$ e, portanto, $\{\vec{u}_{(n)}\}$ é uma sequência de Cauchy em $C([0,T];L^2)$ com limite $\vec{u}_{(n)} \to \vec{u}$ em $C([0,T];L^2)$ para algum $\vec{u} \in C([0,T];L^2)$ tal que $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ (já que $\vec{u}_{(n)} = \vec{u}_0$ para todo n) e com divergência fraca nula para todo $t \in [0,T]$ (já que $\vec{u}_{(n)}$ tem divergência fraca nula para todo n, $t \in [0,T]$).

Analogamente, temos que

$$\|\vec{u}_{(n+1)}(t) - \vec{u}_{(n)}(t)\|_{C([0,T];L^\infty)} \leq \lambda \|\vec{u}_{(n)}(s) - \vec{u}_{(n-1)}(s)\|_{C([0,T];L^\infty)}$$

e, portanto, $\vec{u}_{(n)} \to \vec{u'}$ em $C([\delta,T];L^\infty)$ para todo $\delta > 0$ (note que não temos convergência no intervalo fechado $[0,T]$ devido a não regularidade de $\vec{u}_{(n)}$ em $t=0$). Temos que ambas convergem para a mesma função $\vec{u}$ já que a convergência em L^2 garante subsequência convergente em quase todo ponto, garantindo que

$$\vec{u} \in C([0,T];L^2) \cap C((0,T];L^\infty),$$

com $\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq (1+C)\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ para todo $t \in [0,T]$.

Definindo $P(\vec{r},t) \coloneqq \nabla \cdot \nabla \cdot (-\Delta)^{-1}(\vec{u}(t) \otimes \vec{u}(t))$, temos que $P_{(n)} \to P$ em $C([0,T];L^2)$ devido a limitação do operador $\nabla \cdot \nabla \cdot (-\Delta)^{-1}$ (como visto em (4.27)).

Tomando o limite em n na equação (5.18), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u} + \nabla P - \Delta \vec{u} &= -(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}; \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0; \\ \vec{u}(0) &= \vec{u}_0 \end{aligned} \tag{5.20}$$

no sentido distribucional, isto é, $\vec{u}$ é solução forte das equações de Navier-Stokes em $[0,T)$. □

Observação 30. Note que se $\vec{u}_0$ é uniformemente contínua, então temos que $\vec{u} \in C([0,T];L^2) \cap C([0,T];L^\infty)$, conforme visto no item (i) do Lema 13.

A principal dificuldade para o problema do milênio ser solucionado é a dependência de T por $\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ [9]. É natural, portanto, investigarmos os casos em que existe um tempo maximal T_0 de existência de solução tal que ela não possa ser estendida para $t > T_0$.

Para não ser possível estendê-la, note que

$$\lim_{t \to T_0^-} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = \infty,$$

visto que se fosse finito, então poderíamos "emendar" as soluções devido a unicidade.

Intuitivamente, como temos que T é inversamente proporcional a $\|\vec{u}_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$, é esperado que caso a condição inicial seja "pequena", então há garantia de existência global no tempo.

Lema 31. *Se $\vec{u}$ é solução forte com condição inicial $\vec{u}_0 \in H^1 \cap L^\infty$ com divergência nula, então*

(i) $\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ *para* $t \leq C/\|\vec{u}_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$*;*

(ii) $\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\nabla\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} t^{-1/4}$ *para* $t \leq C/\|\nabla\vec{u}_0\|^4_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$*;*

(iii) $\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\vec{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} t^{-3/2p}$ *para* $t \leq (C(1-3/p)/\|\vec{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)})^{2p/(p-3)}$*, onde* $p > 3$*;*

(iv) Existe $\epsilon > 0$ *tal que se* $\|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \epsilon$*, então* $\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ *para todo* $t \geq 0$*.*

Demonstração. Para (i), usando a função $\phi = C\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ em (5.19), temos que ela é satisfeita para $t \in [0, C/\|\vec{u}_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}]$. Usando o item (i) do Lema 13, temos que é válida (i).

Para (ii) e (iii), usaremos o mesmo método anterior, mas agora para as funções $\phi(t) = C\|\nabla\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} t^{-1/4}$, $\phi(t) = C\|\nabla\vec{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} t^{-3/2p}$, que satisfazem as desigualdades

$$\phi(t) \geq C\int_0^t \frac{\phi^2(s)}{(t-s)^{1/2}}\,ds + C\|\nabla\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} t^{-1/4} \quad \text{para} \quad t \in \left(0, C/\|\nabla\vec{u}_0\|^4_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right);$$

$$\phi(t) \geq C\int_0^t \frac{\phi^2(s)}{(t-s)^{1/2}}\,ds + C\|\nabla\vec{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} t^{-3/2p} \quad \text{para} \quad t \in \left(0, C(1-3/p)/\|\vec{u}_0\|^{2p/(3-p)}_{L^p(\mathbb{R}^3)}\right),$$

respectivamente. Notando que podemos estender o resultado do item (i) do Lema 13 para

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\int_0^t \frac{\|\vec{u}(s)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{1/2}}\,ds + \min\left\{\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}, C\frac{\|\nabla\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{t^{1/4}}, C\frac{\|\nabla\vec{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}}{t^{3/2p}}\right\},$$

onde o segundo e terceiro termos do mínimo são obtidos através da desigualdade de Young para convoluções (3.5) para $(6/5, 6)$ e $(p, (p-1)/p)$, respectivamente, $\|\phi_H\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C/t^{-3(p-1)/2p}$ e a desigualdade de Gagliardo-Niremberg-Sobolev [6, Teorema 1, Seção 5.6.1] $\|\vec{u}_0\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq \|\nabla\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, temos que (ii), (iii) são válidas.

Para (iv), note que $\phi = C\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ satisfaz a desigualdade

$$\phi \geq C\int_0^t \min\left\{\frac{\phi^2}{(t-s)^{1/2}}, \frac{\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^2}\right\} ds + C\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \iff$$

$$\iff \|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \geq C\int_0^\infty \min\left\{\frac{\|\vec{u}_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{(s)^{1/2}}, \frac{\|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{s^2}\right\} ds,$$

e outra extensão do item (i) do Lema 13

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\int_0^t \min\left\{\frac{\|\vec{u}(s)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{1/2}}, \frac{\|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{s^2}\right\} ds,$$

onde o outro termo no mínimo foi usado que $\|\nabla\mathbb{T}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-2}$ e que $\|\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

Note que a equivalência acima é válida se, e somente se $\|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \epsilon$, e, portanto, $\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \phi = C\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ para todo $t \geq 0$. $\square$

Corolário 32 (Limitantes Inferiores para o Tempo Maximal de Existência). *Se T_0 é o tempo maximal de exitência de solução forte das equações de Navier-Stokes, então*

(i) $T_0 > C/\|\vec{u}_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$*;*

(ii) $T_0 > C/\|\nabla\vec{u}_0\|^4_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$*;*

(iii) $T_0 > (C(1-3/p)/\|\vec{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)})^{2p/(p-3)}$*, onde* $p > 3$*.*

Demonstração. È uma consequência imediata dos itens (i)-(iii) do Lema 31. $\square$

Corolário 33 (Taxa de Explosão Temporal). *Se $\vec{u}$ é solução forte das equações de Navier-Stokes em (T, T_0), onde $T_0 < \infty$ é o tempo maximal de existência, então*

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \geq C(T_0 - t)^{-1/2},$$

$$\|\nabla\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq C(T_0 - t)^{-1/4},$$

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \geq C^{(1-3/p)/2)}(T_0 - t)^{-(1-3/p)/2}.$$

Demonstração. Toma $t \in (T, T_0)$. Então, pelo Teorema B, temos que $(T_0 - t) \geq C/\|\vec{u}_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$, que mostra (i); usando os itens (ii), (iii) do Corolário 32, temos (ii), (iii). $\square$

Corolário 34 (Existência Global para Velocidade Inicial Pequena). *Existe $\epsilon > 0$ tal que se*

$$\|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \epsilon$$

ou

$$\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \epsilon$$

ou

$$C\|\vec{u}_0\|^{2(p-3)}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} < C(1 - 3/p)\epsilon^{p-3}$$

para $p > 3$, então $T_0 = \infty$, isto é, garantimos existência de solução para todo tempo.

Demonstração. A primeira afirmação é válida pelo item (iv) do Lema 31, já que $\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ é limitado, então $\vec{u}$ pode ser estendida para $t > T_0$; a segunda afirmação segue de aplicarmos o item (ii) do Lema 31 para $t_0 \coloneqq C/\|\nabla\vec{u}_0\|^4_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$, obtendo $\|\vec{u}(t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < C\|\nabla\vec{u}_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$. Usando a equação de energia (5.16), temos que

$$\|\vec{u}(t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}(t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < C\|\vec{u}_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|\nabla\vec{u}_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < C\epsilon^2,$$

o que completa a prova, usando o resultado da primeira afirmação; a terceira afirmação segue de maneira análoga, definindo $t_0 \coloneqq (C(1 - 3/p)\|\vec{u}_0\|^{2p/(p-3)}_{L^p(\mathbb{R}^3)})$. $\square$

6 Soluções Fracas das Eqs. de Navier-Stokes

6.1 Soluções de Leray-Hopf

Para estudarmos as soluções fracas, faremos primeiramente um análise das equações regularizadas de Navier-Stokes, isto é, equações onde o termo não-linear $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ é substituído pela regularização $(\eta_\epsilon * \vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$:

$$\begin{aligned} \partial_t\vec{u} + \nabla P - \Delta\vec{u} &= -[(\eta_\epsilon * \vec{u}) \cdot \nabla]\vec{u}; \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0; \\ \vec{u}(0) &= \vec{u}_0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Definição 35. As funções $\vec{u}_\epsilon$, P_ϵ são soluções fortes das equações regularizadas de Navier-Stokes em $[0, T)$ se $\vec{u}_\epsilon \in C([0, T); L^2) \cap C((0, T); L^\infty)$, $P_\epsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$, com $\|\vec{u}_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \infty$ se $t \to 0^+$ e $\vec{u}_\epsilon(t)$ com divergência fraca nula para $(0, T)$, satisfazem

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\phi}(0) \cdot \vec{u}_\epsilon(0)\, dV + \int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_\epsilon \cdot (\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) + P_\epsilon \nabla \cdot \vec{\phi})\, dV\, dt \\ = -\int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3} (\eta_\epsilon * \vec{u}_\epsilon) \cdot (\vec{u}_\epsilon \cdot \nabla)\vec{\phi}\, dV\, dt \end{aligned} \tag{6.2}$$

para toda função $\vec{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T); \mathbb{R}^3)$.

Sabemos pelos resultados anteriores que as soluções satisfazem

$$\begin{aligned} \vec{u}_\epsilon(\vec{r},t) &= \Phi_H(t) * \vec{u}_\epsilon(t_1) - \nabla \cdot [\mathbb{T} ** ((\eta_\epsilon * \vec{u}_\epsilon) \otimes \vec{u}_\epsilon)]; \\ P(\vec{r},t) &= \nabla \cdot \nabla \cdot (-\Delta)^{-1}((\eta_\epsilon * \vec{u}_\epsilon(t)) \otimes \vec{u}_\epsilon(t)), \end{aligned} \tag{6.3}$$

onde a convolução espaço-temporal é aplicada de t_1 a T, $0 \leq t_1 < t < T$.

Tomemos $\vec{u}_0 \in H^1 \cap L^\infty$ com divergência nula. Mostremos que existe solução única **global**:

Teorema 36 (Existência Global de Solução das Equações Regularizadas). *Fixado $\epsilon > 0$, existe solução forte única das equações regularizadas de Navier-Stokes no intervalo $[0,\infty)$ tal que $\vec{u}_\epsilon(0) = \vec{u}_0$, $\vec{u}_\epsilon$ é suave em $(0,\infty)$ e a equação de energia*

$$\frac{1}{2}\|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{2}\|\vec{u}_\epsilon(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla \vec{u}_\epsilon(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \tag{6.4}$$

é válida para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Pelo Teorema B e pelas propriedades dos molificadores [6, Teorema 6 de C.4]

$$\|\eta_\epsilon * \vec{v}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{v}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)};$$

$$\|\eta_\epsilon * \vec{v}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{v}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

para $\vec{v} \in L^2 \cap L^\infty$ (essas propriedades são usadas para os termos da sequência), temos que existe solução forte local $\vec{u}_\epsilon$ para (6.2) em $[0,T)$ para $T > C\|\vec{u}_0\|^{-2}_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$. Da mesma forma, pelo Corolário 22, temos que $\vec{u}_\epsilon$ é suave e pelo Lema 29, temos que $\vec{u}_\epsilon$ é única e satisfaz (6.4) em $t \in [0,T)$. Basta mostrar, portanto, que $T = \infty$. Podemos estimar $\|\vec{u}_\epsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ de forma análoga à feita no Lema 31, obtendo

$$\|\vec{u}_\epsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < C \int_0^t \frac{\|\eta\epsilon * \vec{u}_\epsilon(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\vec{u}_\epsilon(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{1/2}}\, ds + \|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

para $t \in [0,T)$. Podemos estimar o termo $\|\eta\epsilon * \vec{u}_\epsilon(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ por

$$\|\eta\epsilon * \vec{u}_\epsilon(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\epsilon^{-3/2}\|\vec{u}_\epsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\epsilon^{-3/2}\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

onde foi usada a equação de energia e que $\|\eta\epsilon * \vec{v}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\epsilon^{-3/2}\|\vec{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. Temos, portanto, que

$$\|\vec{u}_\epsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < C\epsilon^{-3/2}\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_0^t \frac{\|\vec{u}_\epsilon(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{(t-s)^{1/2}}\, ds + \|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}.$$

Escolhendo $\phi_\epsilon \in C(0,\infty)$ a solução única de

$$\phi_\epsilon = C\epsilon^{-3/2}\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_0^t \frac{\phi_\epsilon(s)}{(t-s)^{1/2}}\, ds + \|\vec{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}.$$

Concluímos que $\|\vec{u}_\epsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \phi_\epsilon(t)$ para todo $t \geq 0$ e, portanto, $\|\vec{u}_\epsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ permanece limitado para todo intervalo limitado, garantindo que $T = \infty$. □

Como estamos interessados em tomar o limite $\epsilon \to 0$ das soluções $\vec{u}_\epsilon$ (explorando o fato do limite de $\eta_\epsilon * \vec{v} \to \vec{v}$ em L^2), mostraremos que a energia cinética associada a $\vec{u}_\epsilon$ fora de uma esfera pode ser limitada independentemente de ϵ:

Lema 37 (Separação de Energia). *Fixa $\epsilon > 0$, $0 < R_1 < R_2$ e $\vec{u}_\epsilon$ solução de (6.2). Então para $t \geq 0$,*

$$\iiint_{|\vec{r}|>R_2} |\vec{u}_\epsilon(t)|^2\, dV \leq \iiint_{|\vec{r}|>R_1} |\vec{u}(0)|^2\, dV + \frac{C(\vec{u_0},t)}{R_2 - R_1}, \tag{6.5}$$

onde $C(\vec{u_0},t) := \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} t^{1/2} + C\|\vec{u}_0\|^3_{L^2(\mathbb{R}^3)} t^{1/4}$.

Demonstração. Para simplificar a notação, chamaremos por hora $\vec{u}_\epsilon$ de $\vec{u}$. Define a função

$$f(\vec{r}) := \begin{cases} 0 & \text{se } \|\vec{r}| < R_1; \\ \dfrac{|\vec{r}| - R_1}{R_2 - R_1} & \text{se } R_1 \leq |\vec{r}| \leq R_2; \\ 1 & \text{se } |\vec{r}| > R_2. \end{cases}$$

Fazendo o produto escalar de (6.1) por $-2f(\vec{r})\vec{u}(\vec{r}, t)$ e integrando no espaço-tempo:

$$\int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} -2f(\vec{r})\vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \{\partial_t \vec{u} + \nabla P - \Delta \vec{u} + [(\eta_\epsilon * \vec{u}) \cdot \nabla]\vec{u}\} \, dV \, dt' = 0$$

$$\implies \iiint_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 f \, dV + 2 \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} f|\nabla \vec{u}|^2 \, dV \, dt$$

$$= \iiint_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}_0|^2 f \, dV + \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} \{2P\nabla f \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot (\nabla f \cdot \nabla)\vec{u} + |\vec{u}|^2(\eta_\epsilon * \vec{u} \cdot \nabla)f\} \, dV \, dt'.$$

Notando que o segundo termo do lado esquerdo da equação é não negativo e que o primeiro termo pode ser limitado pela integral em $|\vec{r}| > R_2$, temos que

$$\iiint_{|\vec{r}|>R_2} |\vec{u}|^2 \, dV \leq \iiint_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}_0|^2 f \, dV + \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} \{2P\nabla f \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot (\nabla f \cdot \nabla)\vec{u} + |\vec{u}|^2(\eta_\epsilon * \vec{u} \cdot \nabla)f\} \, dV \, dt'$$

$$\leq \iiint_{|\vec{r}|>R_1} |\vec{u}_0|^2 \, dV$$

$$+ \frac{1}{R_2 - R_1} \int_0^t 2\|P\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\|\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla \vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\eta_\epsilon * \vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}\|^2_{L^4(\mathbb{R}^3)} \, dt'$$

$$\leq \iiint_{|\vec{r}|>R_1} |\vec{u}_0|^2 \, dV + \frac{\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{R_2 - R_1} \left(\int_0^t \|P\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \, dt' + \int_0^t \|\nabla \vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \, dt' + \int_0^t \|\vec{u}\|^2_{L^4(\mathbb{R}^3)} \, dt' \right),$$

onde foi utilizada repeditamente a desigualdade de Cauchy-Schwartz (3.4) e o fato de que $\nabla f \cdot \hat{e}_i = 1/(R_2 - R_1)$. Chamemos as integrais da última linha da desigualdade acima de I_1, I_2 e I_3, respectivamente. Usando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwartz e a equação de energia (6.4), temos que $I_2 \leq t^{1/2}\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}/2$. Para estimarmos I_1 e I_3, usaremos que

$$|\vec{u}|^2 = -(-\Delta)^{-1}\Delta|\vec{u}|^2 = -\nabla\Phi_P * \nabla|\vec{u}|^2$$

$$\implies \|\vec{u}\|^4_{L^4(\mathbb{R}^3)} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}(\vec{r})|^2\{-\nabla\Phi_P(\vec{r} - \vec{r'})\} \cdot \nabla|\vec{u}|^2(\vec{r'}) \, dV \, dV'$$

$$\leq C \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{|\vec{u}(\vec{r})|^2}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} \, dV \right) |\nabla \vec{u}(\vec{r'})||\vec{u}(\vec{r'})| \, dV' \leq C\|\nabla \vec{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\nabla \vec{u}(\vec{r'})||\vec{u}(\vec{r'})| \, dV'$$

$$\leq C\|\nabla \vec{u}\|^3_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

onde foi usada a (5.8) e a desigualdade de Cauchy-Schwartz. Usando (6.3), a desigualdade de Cauchy-Schwartz e $\|\eta_\epsilon * \vec{u}\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{u}\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}$, temos que

$$\|P\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\||\eta_\epsilon * \vec{u}||\vec{u}|\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\vec{u}\|^2_{L^4(\mathbb{R}^3)}.$$

Conseguimos majorar $I_1 + I_3$ usando a equação de energia (6.4) e a desigualdade de Hölder, obtendo

$$I_1 + I_3 \leq C \int_0^t \|\vec{u}(s)\|^2_{L^4(\mathbb{R}^3)} \, ds \leq C \int_0^t \|\vec{u}(s)\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla \vec{u}(s)\|^{3/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \, ds$$

$$\leq C\|\vec{u}_0\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_0^t \|\nabla \vec{u}(s)\|^{3/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \, ds$$

$$\leq C\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} t^{1/4} \left(\int_0^t \|\nabla \vec{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \, ds \right)^{3/4}$$
$$\leq C\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 t^{1/4}.$$

Concluímos, portanto, que

$$\iiint_{|\vec{r}|>R_2} |\vec{u}|^2 \, dV \leq \iiint_{|\vec{r}|>R_1} |\vec{u}_0|^2 \, dV + C\frac{1}{R_2 - R_1} \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left[\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 t^{1/4} + t^{1/2} \frac{\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{2} \right].$$

□

Estudemos agora o limite $\epsilon \to 0$ das soluções regularizadas de (6.2) para obter soluções fracas definidas em $t \in (0, \infty)$:

Definição 38. Dizemos que $\vec{u}$, P são soluções fracas das equações de Navier-Stokes se existe $S \subset (0, \infty)$ de medida zero tal que $\vec{u}$ tem divergência fraca nula para $t \in (0, \infty) \setminus S$,

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(t) \cdot \vec{\phi}(t) \, dV = \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_0 \cdot \vec{\phi}(0) \, dV + \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\partial_t \vec{\phi} + \Delta \vec{\phi}) - \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\phi} \, dV \, ds \quad (6.6)$$

para todo $t \geq 0$ e para todas funções de divergência nula $\vec{\phi}$ tais que $\partial_t^m \nabla^k \vec{\phi} \in C([0, \infty); L^2) \cap C([0, \infty); L^\infty)$ para todo $m, k \geq 0$ e

$$\frac{1}{2} \|\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \int_s^t \|\nabla \vec{u}(t')\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \, dt' \leq \frac{1}{2} \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (6.7)$$

para todo $s \in [0, \infty) \setminus S$ e todo $t \geq s$.

Soluções dessa forma são conhecidas como soluções fracas de Leray-Hopf [15, 13] (Hopf considerou soluções fracas análogas para domínios limitados), enquanto soluções fracas são definidas satisfazendo (6.6), mas não necessariamente (6.7) (além de pertencerem a $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, onde $H := \{\vec{\phi} \in L^2 | \, \vec{\phi}$ tem divergência nula fracamente$\}$ e $V := \{\vec{\phi} \in H^1 | \, \nabla \cdot \vec{\phi} = 0\}$). Chamaremos S o conjunto de tempos singulares.

Corolário 39. *Soluções fracas de Navier-Stokes satisfazem*

(i) $\vec{u} \in L^\infty(0, \infty; L^2) \cap L^2(0, \infty; H^1)$;

(ii) $\vec{u}$ *é fracamente contínua em* L^2 *temporalmente;*

(iii) para $s \notin S$, $\vec{u}(t) \to \vec{u}(s)$ *em* L^2 *se* $t \to s^+$.

Demonstração. Usando o fato de todos os termos de (6.7) serem não negativos, podemos limitar inferiormente cada um dos termos do lado esquerdo da equação, obtendo a primeira propriedade; a segunda propriedade segue de (6.6) e do análogo da Proposição 20 aplicada às soluções fracas; a terceira propriedade segue da propriedade (ii), do Lema de Fatou (3.11) e de (6.7). □

Usaremos um resultado auxiliar para demonstrar o teorema principal de Leray:

Lema 40 (Teorema de Helly). *Se* $g_n \in C([0, 1])$ *é uma função decrescente para todo* n *e* $g_n(t) \to g(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, *então* $g_n(t) \to g(t)$ *para cada ponto de continuidade de* g.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [11]. □

Teorema C (Existência Global de Solução Fraca). *Se* $\vec{u_0} \in H$, *então existe solução fraca* $\vec{u}$ *das equações de Navier-Stokes tal que* $\|\vec{u}(t) - \vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$ *quando* $t \to 0^+$.

Demonstração. Para $\epsilon > 0$ fixo, temos que existe solução $\vec{u}_\epsilon$ única de (6.2) para condição inicial $\vec{u}(0) = \eta_\epsilon * \vec{u}_0$. Além disso, temos que $\vec{u}_\epsilon$ satisfaz a inequação de energia.

$$\frac{1}{2}\|\vec{u}_\epsilon(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla\vec{u}_\epsilon(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, ds = \frac{1}{2}\|\eta_\epsilon * \vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{2}\|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Mostraremos o teorema em quatro passos:

Passo 1. Construção de sequência ϵ_n.

Multiplicando (6.2) por uma função teste $\vec{\phi}$ (com as mesmas propriedades mencionadas na Definição 38) e intengrando no espaço-tempo, obtemos

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\phi}(t)\cdot\vec{u}_\epsilon(t)\, dV = \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\phi}(0)\cdot\eta_\epsilon * \vec{u}_0\, dV + \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_\epsilon\cdot(\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi})\, dV\, ds \\ - \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} (\eta_\epsilon * \vec{u}_\epsilon)\cdot(\vec{u}_\epsilon\cdot\nabla)\vec{\phi}\, dV\, ds.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Como $\|\vec{u}_\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é limitada independentemente de ϵ, conseguimos, pelo método da diagonal, extrair subsequência tal que para todo $t \in \mathbb{Q}^+$, $\|\vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to E(t)$ se $n \to \infty$, para alguma função $E : \mathbb{Q}^+ \to [0,\infty)$ e estendemos a função por $E(t) = \liminf_{s\to t^-} E(s)$ para $t \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{Q}^+$.

Pelo Teorema 40, temos que $\|\vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to E(t)$ quando $n \to \infty$ para todo tempo t em que $E(t)$ é contínua, já que $\|\vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é uma função decrescente em t pela equação de energia. Além disso, temos que $E(t)$ é uma função decrescente. Usando o fato de que para toda função descrescente não-negativa tem no máximo um número enumerável de descontinuidades, usamos novamente o método da diagonal para redefinirmos $E(t)$ nos pontos de descontinuidade, obtendo

$$\|\vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to E(t) \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde a sequência foi reindexada.

Note que

$$E(0) = \lim_{n\to\infty} \|\eta_{\epsilon_n} * \vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Usando que para $\epsilon_n > 0$, $t \geq 0$,

$$\|\eta_{\epsilon_n} * \vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

temos que para $t_1, t_2 \in \mathbb{Q}^+$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ qualquer cubo de vértice racional,

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_\Omega \vec{u}_{\epsilon_n}\, ds\, dV, \qquad \int_{t_1}^{t_2} \iiint_\Omega \vec{u}_{\epsilon_n}\cdot\eta_{\epsilon_n} * \vec{u}_{\epsilon_n}\, ds\, dV \quad \text{convergem quando}\, n \to \infty,$$

reindexando novamente a sequência. Usando o fato de que as integrais acima são uniformemente convergentes no tempo, podemos estender a convergência para todo $t_1, t_2 \geq 0$.

Afirmação. *Com as condições e definições anteriores, temos que*

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{\epsilon_n}\cdot(\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) ds\, dV, \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\mathbb{R}^3} (\eta_\epsilon * \vec{u}_{\epsilon_n})\cdot(\vec{u}_{\epsilon_n}\cdot\nabla)\vec{\phi}\, ds\, dV \ \textit{convergem quando}\ n \to \infty.$$

Demonstração. Assume, sem perda de generalidade, que $t_1 < t_2$. Existe N natural tal que $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^3$ vetores constantes, Ω_i cubos de vértices racionais e (p_k, q_k) intervalos, com $0 \leq p_k < q_k \leq \infty$, $k = 1, \cdots, N$ fazem com que a função

$$\vec{A}_N := \sum_{i=1}^N \vec{a}_i I_{\Omega_i} I_{(p_k,q_k)},$$

onde I_A é a função característica, satisfaz

$$\|(\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) - \vec{A}_N\|_{L^\infty(t_1,t_2)L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\epsilon}{4(t_2 - t_1)\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}.$$

Temos, portanto, que

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_{\epsilon_m} - \vec{u}_{\epsilon_n}) \cdot (\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi})\, dV\, ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_{\epsilon_m} - \vec{u}_{\epsilon_n}) \cdot \vec{A}_N\, dV\, ds \right| + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\mathbb{R}^3} (|\vec{u}_{\epsilon_m}| + |\vec{u}_{\epsilon_n}|)|\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi} - \vec{A}_N|\, dV\, ds$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4(t_2 - t_1)\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}} \int_{t_1}^{t_2} (\|\vec{u}_{\epsilon_m}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)})\, ds \leq \epsilon,$$

onde foi utilizado no penúltimo e último passo a convergência nos cubos de vértice racional e inequação de energia, respectivamente. De maneira análoga, podemos escolher uma matriz $\mathbb{A}_N$ tal que

$$\|\nabla\vec{\phi} - \mathbb{A}_N\|_{L^\infty(t_1,t_2)L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\epsilon}{2(t_2 - t_1)\|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}}$$

e obter a segunda convergência da afirmação. □

Pela convergência $\eta_{\epsilon_n} * \vec{u}_0 \to \vec{u}_0$ em L^2 e a afirmação acima, temos que $\vec{u}_{\epsilon_n}$ é fracamente convergente em L^1 para todo $t \geq 0$.

Afirmação. *Nas condições anteriores, temos que $\vec{u}_{\epsilon_n}$ é fracamente convergente em L^2 para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Por contradição, supõe que existem subsequências $\vec{u}_{\epsilon_{m_k}} \to \vec{v}$, $\vec{u}_{\epsilon_{n_k}} \to \vec{w}$, onde ambos limites pertencem a L^2, mas $\vec{w} \neq \vec{v}$ (para simplificar a notação, indexou-se a subsequência somente pelo último índice). Pela convergência fraca em L^1, temos que, escolhendo a função teste como $\vec{\phi} = \eta_\delta * (\vec{w} - \vec{v})$,

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{w} - \vec{v}) \cdot \eta_\delta * (\vec{w} - \vec{v})\, dV = 0 \xrightarrow{\delta \to 0^+} \|\vec{w} - \vec{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0,$$

o que é absurdo. □

Passo 2. Construção do conjunto de singularidades S.

O campo $\vec{u}_{\epsilon_n}$ converge fracamente em L^2 para uma função $\vec{u} \in L^2$, com divergência fracamente nula e $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$. Note que pelo Lema de Fatou (3.11), temos que

$$\int_0^\infty \liminf_{\epsilon_n \to \infty} \|\nabla\vec{u}_{\epsilon_n}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \leq \liminf_{\epsilon_n \to \infty} \int_0^\infty \|\nabla\vec{u}_{\epsilon_n}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \leq \frac{1}{2}\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

o que implica que $\liminf_{\epsilon_n \to 0} \|\vec{u}_{\epsilon_n}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \infty$ para quase todo $t \geq 0$. Define

$$S := \{t > 0 \,:\, \|\nabla\vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to \infty \,\text{quando}\, n \to \infty\}.$$

Passo 3. Convergência forte de $\vec{u}_{\epsilon_n}$.

Pelo Lema de Fatou, temos que

$$\|\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \liminf_{\epsilon_n \to 0} \|\vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = E(t).$$

Então basta mostrar que

$$\limsup_{\epsilon_n \to 0} \|\vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

para obtermos convergência forte em L^2. Fixemos $t \in [0,\infty)\setminus S$. Escolhe subsequência tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla \vec{u}_{\epsilon_{n_k}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \liminf_{\epsilon_n\to 0} \|\nabla \vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Temos que essa subsequência é limitada em L^2 e, portanto,

$$\nabla \vec{u}_{\epsilon_{n_k}} \rightharpoonup \nabla \vec{u} \text{ em } L^2,$$

pela definição de derivadas fracas e reindexando os índices, e

$$\|\nabla \vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le \liminf_{\epsilon_n\to 0} \|\nabla \vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Note que as convergências fracas de $\nabla \vec{u}_{\epsilon_{n_k}}$, $\vec{u}_{\epsilon_n}$ em L^2 implicam que $\vec{u}_{\epsilon_{n_k}} \rightharpoonup \vec{u} \in H^1$.
Fixa $\delta > 0$ e escolhe $R_1(\delta)$ tal que

$$\iiint_{|\vec{r}|>R_1} |\vec{u}_0|^2 \, dV \le \frac{\delta}{2}$$

e escolhe

$$R_2(\delta,t) \coloneqq R_1 + \frac{4}{\delta} C(\vec{u}_0,t).$$

Usando o Lema 37 (e escolhendo a constante $C(\vec{u}_0,t)$ sendo igual a do lema), temos que para $\epsilon > 0$,

$$\iiint_{|\vec{r}|>R_2} |\vec{u}_\epsilon|^2 \, dV \le \delta.$$

Como temos que $\vec{u}_{\epsilon_{n_k}} \rightharpoonup \vec{u}$ em H^1, podemos tomar, em particular, o domínio compacto B_{R_2}. Usando o mergulho $H^1(B_{R_2}) \subset\subset L^2(B_{R_2})$, temos que $\vec{u}_{\epsilon_{n_k}} \to \vec{u}$ em $L^2(B_{R_2})$ (reindexando os índices, novamente). Então temos que

$$\limsup_{\epsilon_{n_k}\to 0} \|\vec{u}_{\epsilon_{n_k}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le \limsup_{\epsilon_{n_k}\to 0} \iiint_{|\vec{r}|>R_2} |\vec{u}_{\epsilon_{n_k}}|^2 \, dV + \limsup_{\epsilon_{n_k}\to 0} \iiint_{|\vec{r}|\le R_2} |\vec{u}_{\epsilon_{n_k}}|^2 \, dV \le$$

$$\delta + \iiint_{|\vec{r}|\le R_2} |\vec{u}|^2 \, dV \le \delta + \|\vec{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Toma $\delta \to 0$ e, portanto,

$$E(t) = \limsup_{\epsilon_{n_k}\to 0} \|\vec{u}_{\epsilon_{n_k}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le \|\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \Rightarrow E(t) = \|\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Passo 4. $\vec{u}$ é solução fraca.
Como já se sabe que $\vec{u}$ tem divergência nula fracamente e que

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{\epsilon_n} \cdot (\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) \to \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) \, dV,$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} (\eta_{\epsilon_n} * \vec{u}_{\epsilon_n}) \cdot (\vec{u}_{\epsilon_n} \cdot \nabla)\vec{\phi} \, dV \to \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\phi} \, dV$$

para quase todo $t > 0$. Utilizando a limitação $\|\eta_\epsilon * \vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ e o Teorema da Convergência Dominada para as integrais no tempo, temos que quando $\epsilon_n \to 0^+$,

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\phi}(t) \cdot \vec{u}_{\epsilon_n}(t) \, dV = \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\phi}(0) \cdot \eta_{\epsilon_n} * \vec{u}_0 \, dV + \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_{\epsilon_n} \cdot (\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi}) \, dV \, ds$$

$$- \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} (\eta_{\epsilon_n} * \vec{u}_{\epsilon_n}) \cdot (\vec{u}_{\epsilon_n} \cdot \nabla)\vec{\phi} \, dV \, ds \to$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\phi}(t)\cdot\vec{u}(t)\,dV = \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\phi}(0)\cdot\eta*\vec{u}_0\,dV + \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}\cdot(\vec{\phi}_t + \Delta\vec{\phi})\,dV\,ds$$
$$- \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\phi}\,dV\,ds.$$
Falta verificar, portanto, a inequação de energia e a convergência para a velocidade inicial:

Para inequação de energia, toma $s \notin S$ tal que $t > s$ e aplica as limitações $\|\nabla\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \liminf_{\epsilon_n\to 0} \|\nabla\vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, $\lim_{\epsilon_n\to 0} \|\vec{u}_{\epsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ (que valem para quase todo ponto), lema de Fatou (3.11) e a equação de energia para $\vec{u}_{\epsilon_n}$ para obtermos

$$\frac{1}{2}\|\vec{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_s^t \|\nabla\vec{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,dt' \leq \liminf_{\epsilon_n\to 0}\left(\frac{1}{2}\|\vec{u}_{\epsilon_n}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_s^t \|\nabla\vec{u}_{\epsilon_n}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,dt'\right)$$
$$\leq \liminf_{\epsilon_n\to 0}\frac{1}{2}\|\vec{u}_{\epsilon_n}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{2}\|\vec{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$
Para o caso particular de $s = 0$, bastar notar que $\lim_{\epsilon_n\to 0}\|\eta_{\epsilon_n} * \vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ e aplicar na última igualdade.

Para a convergência para a velocidade inicial, temos que pela definição de solução fraca, $\vec{u} \rightharpoonup \vec{u}_0$ em L^2 se $t \to 0$; pelo lema de Fatou e inequação de energia, temos que $\|\vec{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to \|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ e, portanto,

$$\|\vec{u}-\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\vec{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\vec{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - 2\|\vec{u}\cdot\vec{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \to 0.$$

□

6.2 Regularidade das Soluções Fracas

Apesar do trabalho vanguarda de Leray [15] nas soluções fortes e fracas (chamadas por ele de soluções regulares e turbulentas, respectivamente), não se sabe se as soluções fracas são únicas ou suaves. No entanto, temos que se fortalecermos "um pouco" as hipóteses sobre $\vec{u}$, temos suavidade espacial nas soluções fracas de Leray-Hopf (na verdade, basta que a solução fraca apresente a propriedade (i) do Corolário 39).

Lema 41. *Se $\vec{\omega} = \nabla\cdot(\Phi_H ** \mathbb{G})$, com $\mathbb{G} \in L^{q'}([0,T);L^q(\Omega))$, então*

$$\|\vec{\omega}\|_{L^{r'}([0,T);L^r(\Omega))} \leq C(T,r',q',r,q)\|\mathbb{G}\|_{L^{q'}([0,T);L^q(\Omega))}, \tag{6.9}$$

com $1 \leq q \leq r$, $1 \leq q' \leq r'$ e

$$3\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right) + 2\left(\frac{1}{q'}-\frac{1}{r'}\right) < 1.$$

Demonstração. Notando que $|\nabla\Phi_H| \leq C|\vec{r}|t^{-5/2}e^{-|\vec{r}|^2/4t}$, temos que

$$\|\nabla\Phi_H\|^{p'}_{L^{p'}([0,T);L^p(\Omega))} \leq C\int_0^T t^{-5r/2}\left(\iiint_\Omega |\vec{r}|^p e^{-p|\vec{r}|^2/4t}\,dV\right)^{p'/p} dt =$$
$$C\int_0^T t^{-5p'/2+p'/2+3p'/2p}\,dt = CT^{-ap'+1},$$

onde $a := \dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)+\dfrac{1}{2}$. Escolhendo p' tal que $ap' < 1$ e expoentes q,q',r,r' tais que a desigualdade de Young para convoluções (3.6) seja válida, temos que

$$3\left(1-\frac{1}{p}\right)+1 < \frac{2}{p'} \Rightarrow 3\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right) < 2\left(-\frac{1}{q'}+\frac{1}{r'}+1\right)-1,$$

concluindo o enunciado do lema. □

Definição 42. Define a função vorticidade como

$$\vec{\omega} := \nabla \times \vec{u}$$

no sentido fraco, isto é, são funções que satisfazem

$$\iiint_\Omega \vec{\phi} \cdot \vec{\omega} \, dV = - \iiint_\Omega \nabla \times \vec{\phi} \cdot \vec{u} \, dV$$

para todo $\vec{\phi} \in C_0^\infty(\Omega)$.

Lema 43. *Supõe que $\vec{\omega}, \vec{u} \in L^1_{loc}(\Omega)$, Ω conjunto aberto. Então para todo aberto Ω' com fecho compacto contido em Ω, temos que*

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \iiint_{\Omega'} \nabla \Phi_P(\vec{r'} - \vec{r}) \times \vec{\omega}(\vec{r'}, t) \, dV' + \vec{a}(\vec{r}, t), \tag{6.10}$$

onde $\Delta \vec{a} = 0$ em Ω'.

Demonstração. Caso $\vec{u} \in C^1$, temos, pela decomposição de Helmholtz [12], que 6.10 é satisfeita, onde

$$\vec{a} := -\nabla(\vec{u} * \nabla \Phi_P).$$

Para o caso de funções $\vec{\omega}, \vec{u} \in L^1_{loc}(\Omega)$, basta tomarmos $\vec{u}_\epsilon := \eta_\epsilon * \vec{u}$, $\vec{\omega}_\epsilon := \eta_\epsilon * \vec{\omega}$ e tomarmos o limite $\epsilon \to 0$. □

De maneira formal, considere que é bem definido aplicar o operador rotacional nas equações de Navier-Stokes (em um domínio Ω). Então temos que

$$\begin{aligned} \partial_t \nabla \times \vec{u} - \Delta \nabla \times \vec{u} + \nabla \times [(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}] = 0; \\ \nabla \cdot \vec{\omega} = 0; \\ \vec{\omega}(\vec{r}, 0) = \nabla \times \vec{u}_0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Usando a identidades

$$\frac{1}{2} \nabla |\vec{u}|^2 = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \vec{u} \times \vec{\omega}$$

e

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\nabla \cdot \vec{b})\vec{a} + (\nabla \cdot \vec{a})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b},$$

temos que

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{\omega} - \Delta \vec{\omega} + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{\omega} - \vec{\omega} \otimes \vec{u}) = 0; \\ \nabla \cdot \vec{\omega} = 0; \\ \vec{\omega}(\vec{r}, 0) = \nabla \times \vec{u}_0. \end{aligned} \tag{6.12}$$

As equações (6.12) são conhecidas como equações de vorticidade. Podemos representar as equações pela forma

$$\vec{\omega} = (\partial_t - \Delta)^{-1} \nabla \cdot (\vec{\omega} \otimes \vec{u} - \vec{u} \otimes \vec{\omega}) + \vec{H} = \nabla \cdot (\Phi_H * * \mathbb{G}) + \vec{H},$$

onde $\mathbb{G} := \vec{\omega} \otimes \vec{u} - \vec{u} \otimes \vec{\omega}$ e $\vec{H}$ é a solução da equação do calor em $\Omega \times (0, T)$. Ainda que toda dedução acima seja formal, temos que a representação acima é válida:

Proposição 44 (Representação de $\vec{\omega}$). *Se $\vec{u}$ é solução fraca de Navier-Stokes em $\Omega \times (0, T)$, então a função vorticidade $\vec{\omega}$ satisfaz*

$$\vec{\omega} = \nabla \cdot (\Phi_H * * \mathbb{G}) + \vec{H} \tag{6.13}$$

em todo conjunto aberto $\Omega' \times (0, T)$, Ω' com fecho compacto contido em Ω e $\vec{H}, \mathbb{G}$ definidos como anteriormente se $\vec{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega'))$, $\vec{\omega} \in L^2(0, T; L^2(\Omega'))$.

Demonstração. Note que os passos dos cálculo formal acima são válidos se $\vec{u}, \vec{\omega} \in C^2(\Omega\times(0,T))$. Então fazendo os mesmos passos acima para as molificações $\vec{u}_\epsilon := \eta_\epsilon * \vec{u}$, $P_\epsilon = \eta_\epsilon * P$, obtemos que $\vec{\omega}_\epsilon := \nabla \cdot \vec{u}_\epsilon$ satisfaz

$$\begin{gathered}\partial_t \vec{\omega}_\epsilon - \Delta\vec{\omega}_\epsilon + \nabla\cdot(\vec{u}_\epsilon \otimes \vec{\omega}_\epsilon - \vec{\omega}_\epsilon \otimes \vec{u}_\epsilon) = 0;\\ \nabla\cdot\vec{\omega}_\epsilon = 0;\\ \vec{\omega}_\epsilon(\vec{r},0) = \nabla\times\vec{u}_0.\end{gathered}$$

Define $\vec{H}_\epsilon := \vec{\omega_\epsilon} - \nabla\cdot(\Phi_H * *\mathbb{G}_\epsilon)$, onde $\mathbb{G}_\epsilon := (\vec{\omega}_\epsilon \otimes \vec{u}_\epsilon - \vec{u}_\epsilon \otimes \vec{\omega}_\epsilon)$. Note que $(\partial_t - \nabla)\vec{H}_\epsilon = 0$ e $\vec{H}_\epsilon \in L^1(\Omega\times(0,T))$ (basta usar a desigualdade de Cauchy-Schwartz (3.4) para $\vec{u}_\epsilon \otimes \vec{\omega}_\epsilon$ e $\|\vec{u}_\epsilon \otimes \vec{\omega}_\epsilon\|_{L^1(V)} \le \|\vec{u}\otimes\vec{\omega}\|_{L^1(W)}$, $V \subset\subset W$ [6, Apêndice C.4]). Tomando $\epsilon \to 0$, concluímos a proposição. □

Observação 45. Note que a hipótese $\vec{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $\vec{\omega} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ é consequência imediata do item (i) do Corolário 39 para as soluções de Leray-Hopf.

Teorema D (Regularidade espacial de Soluções Fracas). *Seja $\vec{u}$ solução fraca de Navier-Stokes no conjunto aberto $\Omega\times(0,T)$, com*

$$\vec{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega')), \vec{\omega} \in L^2(0,T;L^2(\Omega'))$$

para todo Ω' com fecho compacto contido em Ω. Suponha ainda que

$$\vec{u} \in L^{s'}(0,T;L^s(\Omega')),$$

onde os expoentes s, s' satisfazem

$$\frac{3}{s} + \frac{2}{s'} < 1.$$

Então $\vec{u} \in C^\infty(\Omega)$ e cada derivada é limitada em subconjuntos limitados de Ω.

Demonstração. A demonstração dar-se-á em 2 passos:

Passo 1. Mostrar que $\vec{\omega} \in L^\infty(\Omega'\times(0,T))$.

Suponha momentaneamente que $\vec{\omega} \in L^{\rho'}(0,T;L^\rho(\Omega'))$, com $\rho, \rho' \ge 2$. Temos, pela desigualdade de Hölder (3.4), que

$$\iiint_{\Omega'} |\mathbb{G}|^q \, dV \le 2^q \iiint_{\Omega'} |\vec{u}|^q |\vec{\omega}|^q \, dV \le C(q)\|\vec{u}\|^q_{L^s(\Omega')}\|\vec{\omega}\|^q_{L^\rho(\Omega')},$$

onde

$$\frac{1}{s/q} + \frac{1}{\rho/q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{q}$$

. Temos, analogamente, que para

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{q'} \quad \text{e} \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{q},$$

obtemos que $\mathbb{G} \in L^{q'}((0,T);L^q(\Omega))$. Define $\delta > 0$ tal que

$$\delta := \frac{1}{6}\left(1 - \frac{3}{s} - \frac{2}{s'}\right).$$

e $r := \rho(1-\delta\rho)^{-1}$, $r' := \rho'(1-\delta\rho')^{-1}$ (caso $\delta\rho \ge 1$, define $r = \infty$ e o análogo para r'). Temos, portanto, que $1 \le q \le r$, $1 \le q' \le r'$ e que

$$3\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) + 2\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{r'}\right) = 1 - \delta < 1.$$

Pelo Lema 41 e Proposição 44, temos que $\vec{\omega} \in L^{r'}(0,T;L^r(\Omega'))$, ou seja, podemos aumentar os expoentes das classes L.

Usando como base indutiva $\vec{\omega} \in L^2(0,T;L^2(\Omega'))$, podemos aplicar um número finito de passos anteriores para mostrarmos que $\vec{\omega} \in L^{r'}(0,T;L^r(\Omega'))$, com $\rho = \rho' \geq \delta^{-1}$. Aplicando mais uma vez o passo, pela definição, temos que $\rho = \rho' = \infty$, concluindo a afirmação.

Passo 2. Mostrar que $\vec{\omega} \in C^\infty(\Omega')$.

Temos que $\vec{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega'))$ implica que $\vec{\omega} \in L^\infty(\Omega' \times (0,T))$. Além disso, temos que $\vec{a} \in L^\infty(\Omega' \times (0,T))$ (definido no Lema 43) já que, pela desigualdade de Hölder (3.4), temos que

$$|\vec{a}(\vec{r},t)| \leq \iiint_{\Omega'} |\nabla^2\Phi_P(\vec{r'}-\vec{r})\vec{u}(\vec{r'},t)|\, dV' \leq \|\vec{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega'))}\|\nabla^2\Phi_P\|_{L^2(\Omega')}.$$

Pelo Lema 43, temos que $\vec{u} \in L^\infty(\Omega' \times (0,T))$ e, portanto, $\mathbb{G} \in L^\infty(\Omega' \times (0,T))$. Para a continuação da demonstração, usaremos um teorema de regularidade de equações parabólicas:

Teorema 46. *Seja $Q_R(\vec{r}_0,t_0) := B_R(\vec{r}_0) \times (t_0 - R^2, t_0)$, $(\vec{r}_0,t_0) \in \Omega' \times (0,T)$. Seja $\vec{\omega} \in L^\infty(Q_R(\vec{r}_0,t_0))$ que satisfaz fracamente a equação*

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)\,\vec{\omega} &= \nabla\cdot\mathbb{G};\\ \vec{\omega}(\vec{r},0) &= \nabla\times\vec{u}_0.\end{aligned} \tag{6.14}$$

Então

(i) se $\mathbb{G} \in L^\infty(Q_R(\vec{r}_0,t_0))$, então para todo $\alpha \in (0,1)$, temos que $\vec{\omega} \in C^{0,\alpha}Q_{R/2}((\vec{r}_0,t_0))$;

(ii) se $\nabla^k\mathbb{G} \in C^{0,\alpha}Q_R((\vec{r}_0,t_0))$ para algum $k \geq 0$, então $\nabla^{k+1}\vec{\omega} \in C^{0,\alpha}Q_{R/2}((\vec{r}_0,t_0))$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em Lieberman [16, Capítulo 4].

Pela representação de $\vec{\omega}$ (Proposição 44) e usando o Teorema 46, temos que $\vec{\omega}$ é Hölder contínua espacialmente para qualquer expoente $\alpha \in (0,1)$ (basta cobrir Ω' por cilindros Q_R). Usaremos um teorema de regularidade de equações elípticas:

Teorema 47. *Se $\vec{u}$ é harmônica em Ω, então $\nabla^k\vec{u}$ é localmente Hölder contínua em Ω para todo expoente $\alpha \in (0,1)$, $k \geq 0$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em Gilbarg-Trudinger [10, Teorema 8.22].

Temos, portanto, que $\vec{a}$ é Hölder contínua. Pelo Lema 43, temos que $\vec{u} \in C^{0,\alpha}$ e, portanto, $\mathbb{G} \in C^{0,\alpha}$. Usando o Teorema 46, temos que $\nabla\vec{\omega}$ é Hölder contínua espacialmente. Repetindo o mesmo argumento para $\nabla^k\vec{\omega}$, temos que $\nabla^k\vec{u} \in C^{0,\alpha}$ para todo $k \geq 0$, donde conclui-se que $\vec{\omega}, \vec{u} \in C^\infty(\Omega')$. □

Observação 48. O trabalho de Kiselev e Ladyshenskaya [14] mostra a existência de solução fraca com a propriedade

$$\vec{u} \in L^\infty(0,T;L^4(\Omega')); \quad \vec{u}, \partial_{x_i}\vec{u}, \partial_t\vec{u} \in L^2(0,T;L^\infty(\Omega')).$$

Temos, portanto, que as soluções de Kiselev-Ladyshenskaya são de classe C^∞ no espaço. Não temos, entretanto, regularidade global para essas soluções. Note, contudo, que as soluções de Leray-Hopf tem a propriedade

$$\vec{u} \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega')); \quad \partial_{x_i}\vec{u} \in L^2(0,\infty;L^2(\Omega'))$$

e, portanto, não são suficientes para a aplicação do teorema. Se for provada a unicidade de soluções fracas, garantiremos regularidade espacial das soluções de Leray-Hopf.

Observação 49. Os trabalhos de Struwe [22] e Escauriaza-Seregin-Sverak [5] estenderam o resultado para os casos $s = \infty$, $s' = \infty$ & $s = 3$, além de permitir o caso de igualdade

$$\frac{3}{s} + \frac{2}{s'} = 1.$$

7 Dimensão de Hausdorff do Conjunto de Singularidades

Motivado pelo trabalho de James Serrin [21], o trio Caffarelli-Kohn-Niremberg [2] estudou o conjunto de singularidades de $\vec{u}$, isto é, os pontos onde a velocidade não é limitada no espaço-tempo, que no contexto do Teorema D, significa estudar o caso $s = s' = \infty$.

Definição 50. Diremos que $\vec{u}$, P são soluções fracas adequadas das equações de Navier-Stokes no conjunto aberto $\Omega \times (0,T) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ se $\vec{u}$, P são mensuráveis em $\Omega \times (0,T)$, além de

(i) $P \in L^{5/4}(\Omega \times (0,T))$;

(ii) para constantes E_0, E_1 limitadas,

$$\iiint_\Omega |\vec{u}(t)|^2\, dV \leq E_0 \qquad \text{para quase todo } t \in (0,T), \tag{7.1}$$

$$\int_0^T \iiint_\Omega |\nabla \vec{u}|^2\, dV\, dt \leq E_1; \tag{7.2}$$

(iii) $\vec{u}$, P satisfaz as equações de Navier-Stokes no sentido distribucional (análogo a Definição 12, substituindo $\vec{g}$ por $\vec{u}$ e o domínio por Ω);

(iv) Para toda função $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T))$, com $\phi \geq 0$, temos a chamada "desigualdade de energia generalizada":

$$\int_0^T \iiint_\Omega |\nabla \vec{u}|^2 \phi\, dV \leq \frac{1}{2}\int_0^T \iiint_\Omega [|\vec{u}|^2(\partial_t + \Delta)\phi + (|\vec{u}|^2 + 2P)\vec{u}\cdot\nabla\phi]\, dV\, dt. \tag{7.3}$$

A motivação para a Definição 50 vem do fato de que é a melhor estimativa conhecida para o caso de domínio limitado (no caso $\Omega = \mathbb{R}^3$, temos estimativas melhores). Além disso, (ii) é natural, visto que desejamos que a energia cinética seja limitada para todo tempo $0 \leq t \leq T$, bem como a energia dissipada. Por fim, a desigualdade de energia generalizada é uma versão da desigualdade de energia (6.7), fazendo a derivação formal a partir da multiplicação de $\vec{u}\phi$ na equações de Navier-Stokes e integração no espaço-tempo.

Teorema 51. *Suponha que* Ω, $\vec{u}_0$ *satisfazem*

$$\begin{gathered} \Omega = \mathbb{R}^3; \\ \vec{u}_0 \in \{\vec{u} \in L^2 |\ \vec{u} \text{ tem divergência fraca nula}\} \end{gathered} \tag{7.4}$$

ou

$$\begin{gathered} \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ limitado, aberto conexo, com } \partial\Omega \in C^\infty; \\ \vec{u}_0 \in \{\vec{u} \in L^2 |\ \vec{u} \text{ tem divergência fraca nula}\} \cap W^{2/5,5/4}. \end{gathered} \tag{7.5}$$

Então $\vec{u} \in L^\infty(0,T;L^2) \cap L^2(0,\infty;H^1)$, $\vec{u}(t) \rightharpoonup \vec{u}_0$ *em* L^2 *quando* $t \to 0$, *além de*

$$\begin{gathered} P \in L^{5/3}(\Omega \times (0,T)) \text{ se } \Omega = \mathbb{R}^3; \\ \nabla P \in L^{5/4}(\Omega \times (0,T)) \text{ se o domínio é limitado}; \\ \text{se } \phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \times [0,T]), \text{ então para } 0 < t < T, \\ \frac{1}{2}\iiint_\Omega |\vec{u}(t)|^2 \phi(\vec{r},t)\, dV + \int_0^t \iiint_\Omega |\nabla \vec{u}|^2 \phi\, dV \leq \frac{1}{2}\iiint_\Omega |\vec{u}_0|^2 \phi(\vec{r},0)\, dV + \\ \frac{1}{2}\int_0^t \iiint_\Omega [|\vec{u}|^2(\partial_t + \Delta)\phi + (|\vec{u}|^2 + 2P)\vec{u}\cdot\nabla\phi]\, dV\, dt \end{gathered} \tag{7.6}$$

Demonstração. A demonstração se encontra em Caffarelli-Kohn-Niremberg [2, Teorema A.1 em Apêndice].

Observação 52. Note que a regularidade do caso $\Omega = \mathbb{R}^3$ é o resultado do Corolário 39.

7.1 Decomposição da Pressão e Velocidade

Definição 53. Vamos denotar:

$$B_k := B\left(\tfrac{1}{2}(1+2^{-3k})\right); \qquad T_k := \tfrac{1}{2}(-1-2^{-k});$$

$$Q_k := [T_k, 1] \times B_k.$$

Usaremos repetidamente os seguintes conjuntos:

$$B_{k-1/3} := B_{1/2(1+2^{-3k+1})}; \qquad B_{k-2/3} := B_{1/2(1+2^{-3k+2})}.$$

Definimos a função

$$v_k := [|\vec{u}| - (1-2^{-k})]_+.$$

Além disso, denotamos

$$U_k := \sup_{t\in[T_k,1]} \left(\iiint_{B_k} |v_k(\vec{r},t)|^2 \, dV \right) + \iiiint_{Q_k} |d_k(\vec{r},t)|^2 \, dV \, dt,$$

onde

$$d_k^2 := \frac{(1-2^{-k})\chi_{\{|\vec{u}|\geq(1-2^{-k})\}}}{|\vec{u}|} |\nabla|\vec{u}||^2 + \frac{v_k}{|\vec{u}|}|\nabla\vec{u}|^2.$$

Observação 54. Note que v_k^2 pode ser interpretado como níveis de energia cinética, já que $v_k^2 = 0$ para $|\vec{u}| < 1-2^{-k}$ e é da ordem de $|\vec{u}|^2$ para $|\vec{u}| \gg 1-2^{-k}$.

Observação 55. Note que a partir de agora a notação $B(r)$ denota a bola de raio r, enquanto anteriormente B_r era a notação. A mudança será feita para termos espaço no subíndice para sequências de conjuntos de bolas.

Lema 56. *Existe uma constante C tal que para todo k e todo $F \in L^\infty(T_k, 1; L^2(B_k))$ tal que $\nabla F \in L^2(Q_k)$, temos que*

$$\|F\|_{L^{10/3}(Q_k)} \leq C(\|F\|_{L^\infty(T_k,1;L^2(B_k))} + \|F\|^{2/5}_{L^\infty(T_k,1;L^2(B_k))}\|\nabla F\|^{3/5}_{L^2(Q_k)}). \tag{7.7}$$

Demonstração. Pelo mergulho $H^1(B_k) \subset L^6(B_k)$ dado pelo Teorema de Rellich-Kondrachov [6, Teorema 1 de 5.7], temos que

$$\|F\|_{L^2(T_k,1;L^6(B_k)))} \leq C(\|F\|_{L^\infty(T_k,1;L^2(B_k))} + \|\nabla F\|_{L^2(Q_k)}).$$

Note que C não depende de k, já que existe k tal que $B(1/2) \subset B_k \subset B(1)$. Pela desigualdade de Hölder (3.4), temos que

$$\|F\|_{L^{10/3}(Q_k)} \leq \|F\|^{2/5}_{L^\infty(T_k,1;L^2(B_k))}\|\nabla F\|^{3/5}_{L^2(T_k,1;L^6(B_k)))}$$

$$\leq C(\|F\|_{L^\infty(T_k,1;L^2(B_k))} + \|F\|^{2/5}_{L^\infty(T_k,1;L^2(B_k))}\|\nabla F\|^{3/5}_{L^2(Q_k)}).$$

□

Define $\phi_k(\vec{r}) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\phi_k(\vec{r}) = 1 \text{ em } B_{k-2/3}; \qquad \phi_k(\vec{r}) = 0 \text{ em } B^c_{k-1}; \qquad 0 \leq \phi_k(\vec{r}) \leq 1;$$

$$|\nabla\phi_k| \leq C\,2^{3k}; \qquad |\nabla^2\phi_k| \leq C\,2^{6k}.$$

Lema 57. *Para $p > 1$, seja $\mathbb{G} \in L^\infty(T_{k-1}, 1; L^1(B_{k-1}))$ e $P \in L^p(T_{k-1}, 1; L^1(B_{k-1}))$, com*

$$-\Delta P = \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbb{G}.$$

Então podemos decompor P por

$$P\big|_{B_{k-2/3}} = P_{k1}\big|_{B_{k-2/3}} + P_{k2}\big|_{B_{k-2/3}},$$

onde P_{k1} satisfaz

$$-\Delta P_{k1} = 0 \quad \text{em} \quad [T_{k-1}, 1] \times B_{k-2/3},$$

com a estimativa

$$\|\nabla P_{k1}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^1(B_{k-1/3}))} + \|P_{k1}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^\infty(B_{k-1/3}))}$$
$$\leq C2^{12k}\left(\|P\|_{L^p(T_{k-1},1;L^1(B_{k-1}))} + \|\mathbb{G}\|_{L^\infty(T_{k-1},1;L^1(B_{k-1}))}\right)$$

e P_{k2} satisfaz em $[T_{k-1}, 1] \times \mathbb{R}^3$

$$-\Delta P_{k2} = \nabla \cdot \nabla \cdot (\phi_k \mathbb{G}),$$

notando que é feita a extensão $\phi_k \mathbb{G} = 0$ para B_{k-1}^c.

Demonstração. Note que pelo suporte de ϕ_k, temos que $P = \phi_k P$ em $[T_{k-1}, 1] \times B_{k-2/3}$. Além disso,

$$-\Delta(\phi_k P) = -\phi_k \Delta P - 2\nabla \cdot ((\nabla \phi_k)P) + P\Delta\phi_k,$$
$$-\phi_k \Delta P = \phi_k \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbb{G} =$$
$$\nabla \cdot \nabla \cdot (\phi_k \mathbb{G}) - \nabla \cdot (\mathbb{G}\nabla\phi_k) - \nabla \cdot (\mathbb{G}^T \nabla \phi_k) + \nabla^2 \phi_k : \mathbb{G}.$$

Define

$$-\Delta P_{k2} \coloneqq \nabla \cdot \nabla \cdot (\phi_k \mathbb{G});$$
$$-\Delta P_{k1} \coloneqq -2\nabla \cdot ((\nabla\phi_k)P) + P\Delta\phi_k + \mathbb{D} : \mathbb{G} = (\operatorname{Tr} \mathbb{D})P + \mathbb{D} : \mathbb{G},$$

onde o operador diferencial $\mathbb{D}$ é definido como

$$\mathbb{D}f \coloneqq (\nabla^2\phi_k)f - \nabla((\nabla\phi_k)f) - \nabla^T((\nabla^T\phi_k)f).$$

Note que para cada componente de $\mathbb{D}f$ é nula em $B_{k-2/3}$, já que $\nabla\phi_k = 0$ nesse conjunto. Temos, portanto, que

$$-\Delta P_{k1} = 0 \quad \text{em} \quad B_{k-2/3}.$$

Além disso, para cada $\vec{r} \in B_{k-1/3}$, usando a representação

$$P_{k1} = \Phi_P * ((\operatorname{Tr} \mathbb{D})P + \mathbb{D} : \mathbb{G}),$$

temos que

$$P_{k1}(\vec{r}, t) = 2\nabla\Phi_P * (P\nabla\phi_k) + \Phi_P * (P\Delta\phi_k) + \nabla\Phi_P * (\mathbb{G}\nabla\phi_k)$$
$$+\nabla\Phi_P * (\mathbb{G}^T\nabla\phi_k) + \Phi_P * (\nabla^2\phi_k : \mathbb{G}).$$

Como a distância entre $B_{k-1/3}$ e $B_{k-2/3}^c$ é maior que 2^{-3k}, e pelas propriedades de ϕ_k, temos que para todo $\vec{r} \in B_{k-1/3}$:

$$|P_{k1}(\vec{r}, t)| \leq C2^{9k} \iiint_{B_{k-1}} |P| + |\mathbb{G}|\, dV.$$

Podemos fazer o mesmo procedimento para

$$\nabla P_{k1} = \nabla\Phi_P * ((\operatorname{Tr} \mathbb{D})P + \mathbb{D} : \mathbb{G})$$

para obtermos que para todo $\vec{r} \in B_{k-1/3}$:

$$|\nabla P_{k1}(\vec{r}, t)| \leq C 2^{12k} \iiint_{B_{k-1}} |P| + |\mathbb{G}| \, dV.$$

Tomando a norma L^p no tempo, obtemos a estimativa enunciada no Lema, notando que como $1 - T_k \leq 2$, temos

$$\|\mathbb{G}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^1(B_{k-1}))} \leq 2^{1/p} \|\mathbb{G}\|_{L^\infty(T_{k-1},1;L^1(B_{k-1}))}.$$

□

Do Lema 56, obtemos 2 corolários imediatos:

Corolário 58 (Decomposição da Pressão). *Sejam $\vec{u}$, P soluções fracas encontradas no Teorema 51 em Q_{k-1}. Então podemos decompor a pressão em $B_{k-2/3}$ por:*

$$P\big|_{B_{k-2/3}} = P_{k1}\big|_{B_{k-2/3}} + P_{k2}\big|_{B_{k-2/3}},$$

onde P_{k1} satisfaz

$$-\Delta P_{k1} = 0 \quad \text{em} \quad [T_{k-1}, 1] \times B_{k-2/3},$$

com a estimativa

$$\|\nabla P_{k1}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^1(B_{k-1/3}))} + \|P_{k1}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^\infty(B_{k-1/3}))} \leq$$

$$C 2^{12k} \left(\|P\|_{L^p(T_{k-1},1;L^1(B_{k-1}))} + \|\vec{u}\|^2_{L^\infty(T_{k-1},1;L^2(B_{k-1}))} \right)$$

e P_{k2} satisfaz em $[T_{k-1}, 1] \times \mathbb{R}^3$

$$-\Delta P_{k2} = \nabla \cdot \nabla \cdot (\phi_k \, \vec{u} \otimes \vec{u}).$$

Demonstração. Aplicando o divergente nas equações de Navier-Stokes, obtemos

$$-\Delta P = \nabla \cdot \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}).$$

Usando o Lema 56 com $\mathbb{G} \coloneqq \vec{u} \otimes \vec{u}$, obtemos o resultado. □

Corolário 59 (Decomposição da Pressão com sua Média). *Sejam $\vec{u}$, P soluções fracas encontradas no Teorema 51 em $B(1) \times [-1, 1]$. Define as médias*

$$\overline{\vec{u}}(t) = \iiint_{B(1)} \vec{u}(\vec{r}, t) \, dV;$$

$$\overline{P}(t) = \iiint_{B(1)} P(\vec{r}, t) \, dV.$$

Então podemos decompor $(P - \overline{P})\big|_{[-1/2,1/2] \times B(1/2)}$ por:

$$(P - \overline{P})\big|_{[-1/2,1/2] \times B(1/2)} = P_1\big|_{[-1/2,1/2] \times B(1/2)} + P_2\big|_{[-1/2,1/2] \times B(1/2)},$$

onde P_1 satisfaz

$$\|P_1\|_{L^p(-1/2,1/2;L^\infty(B(1/2)))} \leq C \left(\|P - \overline{P}\|_{L^p(-1,1;L^1(B(1)))} + \|\vec{u} - \overline{\vec{u}}\|^2_{L^\infty(-1,1;L^2(B(1)))} \right),$$

$$-\Delta P_1 = 0 \quad \text{em} \quad [-1/2, 1/2] \times B(1/2);$$

e P_2 satisfaz em $\mathbb{R}^3$

$$-\Delta P_2 = \nabla \cdot \nabla \cdot \left(\phi_1 (\vec{u} - \overline{\vec{u}}) \otimes (\vec{u} - \overline{\vec{u}}) \right).$$

Demonstração. Aplicando o divergente nas equações de Navier-Stokes, obtemos

$$-\Delta P = \nabla \cdot \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) = \nabla \cdot \nabla \cdot \left((\vec{u} - \overline{\vec{u}}) \otimes (\vec{u} - \overline{\vec{u}}) \right),$$

onde a última igualdade é válida devido a independência espacial das médias. Usando o Lema 9, substituindo P por $P - \overline{P}$ e tomando $\mathbb{G} := (\vec{u} - \overline{\vec{u}}) \otimes (\vec{u} - \overline{\vec{u}})$ e notando que $B_0 \equiv B(1)$ e $B(1/2) \subset B_{2/3} \subset B_{1/3}$, obtemos o resultado. □

Lema 60 (Decomposição da Velocidade). *A velocidade $\vec{u}$ pode ser decomposta por*

$$\vec{u} = \vec{u}\frac{v_k}{|\vec{u}|} + \vec{u}\left(1 - \frac{v_k}{|\vec{u}|}\right),$$

onde

$$\left| \vec{u}\left(1 - \frac{v_k}{|\vec{u}|}\right) \right| \leq 1 - 2^{-k}.$$

Além disso, temos as seguintes estimativas:

$$\frac{v_k}{|\vec{u}|}|\nabla \vec{u}| \leq d_k, \qquad \chi_{\{|\vec{u}| \geq (1-2^{-k})\}}|\nabla|\vec{u}|| \leq d_k, \qquad |\nabla v_k| \leq d_k, \qquad \left|\nabla \frac{\vec{u} v_k}{|\vec{u}|}\right| \leq 3d_k.$$

Demonstração. A função

$$1 - \frac{v_k}{|\vec{u}|} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |\vec{u}| \leq 1 - 2^{-k}; \\ \dfrac{1 - 2^{-k}}{|\vec{u}|} & \text{se} \quad |\vec{u}| \geq 1 - 2^{-k} \end{cases}$$

é Lipschitz, e, portanto,

$$\left| \vec{u}\left(1 - \frac{v_k}{|\vec{u}|}\right) \right| \leq 1 - 2^{-k}.$$

Pela definição de d_k e v_k, temos que $v_k \leq |\vec{u}|$ e, portanto,

$$d_k^2 \geq \frac{v_k}{|\vec{u}|}|\nabla \vec{u}|^2 \geq \left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}|\nabla \vec{u}|\right)^2,$$

o que mostra a primeira desigualdade. Para demonstrar a segunda desigualdade, note que

$$|\nabla|\vec{u}||^2 = \left|\nabla \vec{u} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|^2 \leq |\nabla \vec{u}|^2.$$

Usando a definição de d_k, temos que

$$d_k^2 \geq \frac{(1 - 2^{-k})\chi_{\{|\vec{u}| \geq (1-2^{-k})\}} + v_k}{|\vec{u}|}|\nabla|\vec{u}||^2.$$

Notando que

$$(1 - 2^{-k} + v_k)\chi_{\{|\vec{u}| \geq (1-2^{-k})\}} = |\vec{u}|\chi_{\{|\vec{u}| \geq (1-2^{-k})\}},$$

concluímos

$$d_k^2 \geq \chi_{\{|\vec{u}| \geq (1-2^{-k})\}}|\nabla|\vec{u}||^2.$$

A terceira desigualdade segue diretamente de

$$|\nabla v_k| = |\nabla|\vec{u}||\chi_{\{|\vec{u}| \geq (1-2^{-k})\}}$$

e da segunda desigualdade. A última desigualdade segue da estimativa dos termos do lado direito da igualdade

$$\nabla \frac{\vec{u} v_k}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \otimes \nabla v_k + v_k \nabla \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}.$$

O primeiro termo pode ser limitado por

$$\left|\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\otimes\nabla v_k\right|\leq|\nabla v_k|\leq d_k,$$

onde foi usada a segunda desigualdade; o segundo termo pode ser limitado por

$$\left|v_k\nabla\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|\leq\left|\frac{v_k}{|\vec{u}|}\nabla\vec{u}\right|+\left|\frac{v_k}{|\vec{u}|^2}\vec{u}\otimes\nabla|\vec{u}|\right|\leq d_k+\chi_{\{|\vec{u}|\geq(1-2^{-k})\}}|\nabla|\vec{u}||\leq 2d_k,$$

onde foram usadas a primeira e segunda desigualdades. □

Note que pelos Lemas 56 e 60, temos que

$$\|v_{k-1}\|_{L^{10/3}(Q_{k-1})}\leq C\left(\|v_{k-1}\|_{L^\infty(T_{k-1},1;L^2(B_{k-1}))}+\|v_{k-1}\|^{2/5}_{L^\infty(T_{k-},1;L^2(B_{k-1}))}\|d_k\|^{3/5}_{L^2(Q_{k-1}))}\right)$$

e, portanto, pela desigualdade de Young (3.5) e pela definição de U_k,

$$\|v_{k-1}\|_{L^{10/3}(Q_{k-1})}\leq C\,U_{k-1}^{1/2}. \tag{7.8}$$

7.2 Limitação Universal da Velocidade e Pressão

O objetivo da seção é limitarmos as energias cinética e dissipada e a pressão por uma constante universal Γ, isto é, uma constante independente do ponto. Para tal, demonstraremos a proposição abaixo em vários passos, obtendo uma relação direta entre U_k e U_{k-1}:

Proposição 61. *Seja $p>1$. Então existem constantes universais $C_p,\beta_p>1$ tais que para toda solução advinda do Teorema 51 em $[-1,1]\times B(1)$, se $U_0\leq 1$, então temos que para todo $k>0$*

$$U_k\leq C_p^k(1+\|P\|_{L^p(0,1;L^1(B_0))})U_{k-1}^{\beta_p}. \tag{7.9}$$

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em 5 passos:

Passo 1. Evolução de v_k^2.

Lema 62. *Sejam $\vec{u}$, P soluções advindas do Teorema 51 em $(0,\infty)\times\Omega$. Então v_k satisfaz*

$$\partial_t\frac{v_k^2}{2}+\nabla\cdot\left(\vec{u}\frac{v_k^2}{2}\right)+d_k^2-\Delta\frac{v_k^2}{2}+\nabla\cdot(\vec{u}P)+\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)\vec{u}\cdot\nabla P\leq 0 \tag{7.10}$$

no sentido distribucional.

Demonstração. Escreve v_k^2 como

$$\frac{v_k^2}{2}=\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\frac{v_k^2-|\vec{u}|^2}{2}.$$

Note que pelo Teorema 51, temos que

$$\partial_t\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\nabla\cdot\left(\vec{u}\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right)+|\nabla\vec{u}|^2-\Delta\frac{|\vec{u}|^2}{2}+\nabla\cdot(\vec{u}P)\leq 0$$

no sentido distribucional (essa desigualdade é conhecida por "desigualdade de energia generalizada"). Para o segundo termo, temos que para qualquer derivada ∂_a, seja espacial ou temporal,

$$\partial_a\left(\frac{v_k^2-|\vec{u}|^2}{2}\right)=v_k\partial_a v_k-\vec{u}\cdot\partial_a\vec{u}=\vec{u}\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)\cdot\partial_a\vec{u},$$

onde o termo em parênteses é limitado por 1. Então multiplicando as equações de Navier-Stokes por $\vec{u}\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)$, obtemos

$$\partial_t\left(\frac{v_k^2-|\vec{u}|^2}{2}\right)+\nabla\cdot\left(\vec{u}\frac{v_k^2-|\vec{u}|^2}{2}\right)+\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)\vec{u}\cdot\nabla P-\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)\vec{u}\cdot\Delta\vec{u}=0. \tag{7.11}$$

O último termo pode ser escrito como

$$\begin{aligned}-\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)\vec{u}\cdot\Delta\vec{u}&=-\nabla\cdot\left(-\nabla\vec{u}\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)\vec{u}\right)+\nabla\left(\vec{u}\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right):\nabla\vec{u}-|\nabla\vec{u}|^2\\&=-\Delta\frac{v_k^2-|\vec{u}|^2}{2}+\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)|\nabla\vec{u}|^2+[\nabla\vec{u}(\vec{u})]\cdot\nabla\frac{v_k}{|\vec{u}|}.\end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)|\nabla\vec{u}|^2+[\nabla\vec{u}(\vec{u})]\cdot\nabla\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right|&\le\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)|\nabla\vec{u}|^2+|\vec{u}|\nabla|\vec{u}|\cdot\nabla\left(1-\frac{1-2^{-k}}{|\vec{u}|}\right)\\&=\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)|\nabla\vec{u}|^2+\frac{(1-2^{-k})\chi_{\{|\vec{u}|\ge(1-2^{-k})\}}}{|\vec{u}|}|\nabla|\vec{u}||^2=d_k^2-|\nabla\vec{u}|^2.\end{aligned}$$

Somando a desigualdade de energia generalizada e (7.11), obtemos o resultado do enunciado. □

Passo 2. Limitação de U_k.

Define funções $\eta_k\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tais que

$$\eta_k(\vec{r})=1\ \text{ em }\ B_k;\qquad \eta_k(\vec{r})=0\ \text{ em }\ B^c_{k-1/3};\qquad 0\le\eta_k(\vec{r})\le 1;$$
$$|\nabla\eta_k|\le C\,2^{3k};\qquad |\nabla^2\eta_k|\le C\,2^{6k}.$$

Multiplicando (7.10) por η_k e integrando em $[\sigma,t]\times\mathbb{R}^3$ para $T_{k-1}\le\sigma\le T_k\le t\le 1$ para obtermos

$$\begin{aligned}&\iiint_{\mathbb{R}^3}\eta_k\frac{|v_k(t)|^2}{2}\,dV+\int_\sigma^t\iiint_{\mathbb{R}^3}\eta_k d_k^2(s)\,dV\,ds\le\iiint_{\mathbb{R}^3}\eta_k\frac{|v_k(\sigma)|^2}{2}\,dV+\\&\int_\sigma^t\iiint_{\mathbb{R}^3}\nabla\eta_k\cdot\vec{u}\frac{|v_k(s)|^2}{2}\,dV\,ds+\int_\sigma^t\iiint_{\mathbb{R}^3}\Delta\eta_k\frac{|v_k(s)|^2}{2}\,dV\,ds-\\&\int_\sigma^t\iiint_{\mathbb{R}^3}\eta_k\left\{\nabla\cdot(\vec{u}P)+\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)\vec{u}\cdot\nabla P\right\}\,dV\,ds.\end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima com respeito a σ entre T_{k-1} e T_k e dividindo por $T_{k-1}-T_k=2^{-k-1}$, temos que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[T_k,1]}\left(\iiint_{\mathbb{R}^3}\eta_k\frac{|v_k(t)|^2}{2}\,dV+\int_{T_k}^t\iiint_{\mathbb{R}^3}\eta_k d_k^2(s)\,dV\,ds\right)&\le 2^{k+1}\int_{T_{k-1}}^{T_k}\iiint_{\mathbb{R}^3}\eta_k\frac{|v_k(\sigma)|^2}{2}\,dV\,d\sigma\\&+\int_{T_{k-1}}^1\left|\iiint_{\mathbb{R}^3}\nabla\eta_k\cdot\vec{u}\frac{|v_k(s)|^2}{2}\,dV\right|\,ds+\int_{T_{k-1}}^1\left|\iiint_{\mathbb{R}^3}\Delta\eta_k\frac{|v_k(s)|^2}{2}\,dV\right|\,ds\\&+\int_{T_{k-1}}^1\left|\iiint_{\mathbb{R}^3}\eta_k\left\{\nabla\cdot(\vec{u}P)+\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)\vec{u}\cdot\nabla P\right\}\,dV\right|\,ds.\end{aligned}$$

Pelas limitações das derivadas de η_k, podemos limitar o primeiro e terceiro termos do lado direito da desigualdade trivialmente; para o segundo termo, basta usar a decomposição

$$\vec{u}\frac{v_k^2}{2}=\left\{\vec{u}\left(1-\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)+\vec{u}\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right\}\frac{v_k^2}{2}$$

e usar o Lema 60 para obtermos

$$\left|\vec{u}\frac{v_k^2}{2}\right| \leq \left|\vec{u}\left(1-\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)\frac{v_k^2}{2}\right| + \left|\vec{u}\frac{v_k}{|\vec{u}|}\frac{v_k^2}{2}\right| \leq \frac{v_k^2}{2}+\frac{v_k^3}{2}.$$

Como $\eta_k \equiv 1$ em B_k e pela definição de U_k, temos que

$$U_k \leq 2 \sup_{t\in[T_k,1]} \left(\iiint_{\mathbb{R}^3} \eta_k \frac{|v_k(t)|^2}{2}\, dV + \int_{T_k}^{t} \iiint_{\mathbb{R}^3} \eta_k d_k^2(s)\, dV\, ds \right).$$

Concluímos, portanto, que U_k pode ser limitado por

$$\begin{aligned} U_k \leq C2^{6k} \iiiint_{Q_{k-1}} |v_k|^2\, dV\, dt + C2^{3k} \iiiint_{Q_{k-1}} |v_k|^3\, dV\, dt + \\ 2\int_{T_{k-1}}^{1} \left| \iiint_{\mathbb{R}^3} \eta_k \left\{ \nabla\cdot(\vec{u}P) + \left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)\vec{u}\cdot\nabla P \right\} dV \right| dt \end{aligned} \tag{7.12}$$

Passo 3. Crescimento não linear de U_k.

Queremos estimar os termos do lado direito de (7.12) por potências maiores do que 1 de U_{k-1}. Usaremos o método desenvolvido por De Giorgi [4].

Lema 63. *Existe uma constante C tal que para todo $k > 1$ e $q > 1$, temos*

$$\begin{aligned} \|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^q(Q_{k-1})} &\leq C2^{\frac{10k}{3q}} U_{k-1}^{\frac{5}{3q}}, \\ \|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^\infty(T_{k-1},1;L^q(B_{k-1}))} &\leq C2^{\frac{2k}{q}} U_{k-1}^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Demonstração. Se $v_k > 0$, então $|\vec{u}| - 1 + 2^{-k} > 0$ e

$$v_{k-1} > 2^{-k+1} - 2^{-k} = 2^{-k}.$$

Usando a desigualdade de Tchebichev (3.12) e (7.8), temos que

$$\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^q(Q_{k-1})}^q = \iiiint_{Q_{k-1}} \chi_{\{v_k>0\}}\, dV\, dt \leq \iiiint_{Q_{k-1}} \chi_{\{v_{k-1}>2^{-k}\}}\, dV\, dt \leq$$

$$2^{10k/3} \iiiint_{Q_{k-1}} |v_{k-1}|^{10/3}\, dV\, dt \leq 2^{10k/3} U_{k-1}^{5/3}.$$

A segunda desigualdade pode ser demonstrada de forma análoga:

$$\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^q(Q_{k-1})}^q \leq 2^{2k} \iiiint_{Q_{k-1}} |v_{k-1}|^2\, dV\, dt \leq 2^{2k} \sup_{s\in[T_{k-1},1]} \iiint_{B_{k-1}} |v_{k-1}|^2\, dV \leq 2^{2k} U_{k-1}.$$

□

Note que o Lema 63 permite controlarmos os 2 primeiros termos do lado direito de (7.12), já que pela desigualdade de Hölder (3.4):

$$C2^{6k} \iiiint_{Q_{k-1}} |v_k|^2\, dV\, dt + C2^{3k} \iiiint_{Q_{k-1}} |v_k|^3\, dV\, dt$$

$$\leq C2^{6k} \|v_k^2\|_{L^{5/3}(Q_{k-1})} \|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^{5/2}(Q_{k-1})} + C2^{3k} \|v_k^3\|_{L^{10/9}(Q_{k-1})} \|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^{10}(Q_{k-1})}.$$

Pela definição de v_k, temos que $v_k \leq v_{k-1}$ e pelo Lema 10, obtemos

$$\|v_k^2\|_{L^{5/3}(Q_{k-1})} \leq \|v_{k-1}\|_{L^{10/3}(Q_{k-1})}^2 \leq CU_{k-1}.$$

Analogamente, temos que

$$\|v_k^3\|_{L^{10/9}(Q_{k-1})} = \|v_k\|^3_{L^{10/3}(Q_{k-1})} \leq U_{k-1}^{3/2}.$$

Concluímos, portanto, que

$$C2^{6k} \iiiint_{Q_{k-1}} |v_k|^2 \, dV \, dt + C2^{3k} \iiiint_{Q_{k-1}} |v_k|^3 \, dV \, dt \leq C2^{6k+4k/3} U_k^{5/3}.$$

Note que o expoente de $U_{k-1} > 3/2$. Precisamos, portanto, limitar o último termo de (7.12). Como o suporte de η_k está contido em $B_{k-1/3}$, usando a decomposição da pressão do Corolário 58, temos que

$$\int_{T_{k-1}}^1 \left| \iiint_{\mathbb{R}^3} \eta_k \left\{ \nabla \cdot (\vec{u}P) + \left(\frac{v_k}{|\vec{u}|} - 1 \right) \vec{u} \cdot \nabla P \right\} dV \right| dt$$

$$\leq \int_{T_{k-1}}^1 \left| \iiint_{B_{k-1/3}} \eta_k \frac{v_k}{|\vec{u}|} \vec{u} \cdot \nabla P_{k1} \, dV \right| dt +$$

$$+ \int_{T_{k-1}}^1 \left| \iiint_{\mathbb{R}^3} \eta_k \left\{ \nabla \cdot (\vec{u}P_{k2}) + \left(\frac{v_k}{|\vec{u}|} - 1 \right) \vec{u} \cdot \nabla P_{k2} \right\} dV \right| dt =: I_{k1} + I_{k2},$$

onde foi usado que P_{k1} é limitado no espaço pelo Corolário 58, e, portanto, temos que $\nabla \cdot (\vec{u}P_{k1}) = \vec{u} \cdot \nabla P_{k1}$.

Passo 4. Limitação do termo não-local P_{k1}.

Usaremos repetidamente a desigualdade de Hölder (3.4) para limitarmos o termo não-local P_{k1}. Consideraremos 3 casos de expoentes $p > 0$.

(i) $p > 10$. Podemos limitar I_{k1} da forma

$$I_{k1} \leq C\|v_k\|_{L^{10/3}(Q_{k-1})} \|\nabla P_{k1}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^\infty(B_{k-1/3}))} \|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^q(T_{k-1},1;L^{10/7}(B_{k-1}))}$$

$$\leq C\|v_k\|_{L^{10/3}(Q_{k-1})} \|\nabla P_{k1}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^\infty(B_{k-1/3}))} \|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^q(Q_{k-1})},$$

onde $1/q = 7/10 - 1/p$. Por (7.8) e Lema 63, temos que

$$I_{k1} \leq C2^{7k/3-10k/3p} \|\nabla P_{k1}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^\infty(B_{k-1}))} U_{k-1}^{5/3(1-1/p)}.$$

Pelo Corolário 58, temos que

$$I_{k1} \leq C2^{12k+7k/3-10k/3p} U_{k-1}^{5/3(1-1/p)} \left(\|P\|_{L^p(T_{k-1},1;L^1(B_{k-1}))} + \|\vec{u}\|^2_{L^\infty(T_{k-1},1;L^2(B_{k-1}))} \right).$$

(ii) $2 \leq p \leq 10$. Podemos limitar I_{k1} da forma

$$I_{k1} \leq C\|v_k\|_{L^\infty(T_{k-1},1;L^2(B_{k-1}))} \|\nabla P_{k1}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^\infty(B_{k-1/3}))} \|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^q(T_{k-1},1;L^2(B_{k-1}))}$$

$$\leq C\|v_k\|_{L^\infty(T_{k-1},1;L^2(B_{k-1}))} \|\nabla P_{k1}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^\infty(B_{k-1/3}))} \|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^2(Q_{k-1})},$$

onde $1/q + 1/p = 1$. Pelo Lema 63, temos que

$$I_{k1} \leq C2^{5k/3} U_{k-1}^{4/3} \|\nabla P_{k1}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^\infty(B_{k-1/3}))}.$$

Basta usar o Corolário 58 para obtermos

$$I_{k1} \leq C2^{12k+5k/3} U_{k-1}^{4/3} \left(\|P\|_{L^p(T_{k-1},1;L^1(B_{k-1}))} + \|\vec{u}\|^2_{L^\infty(T_{k-1},1;L^2(B_{k-1}))} \right).$$

(iii) $p < 2$. Podemos limitar I_{k1} da forma

$$\begin{aligned} I_{k1} &\leq C\|v_k\|_{L^\infty(T_{k-1},1;L^2(B_{k-1}))}\|\nabla P_{k1}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^\infty(B_{k-1/3}))}\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^q(T_{k-1},1;L^2(B_{k-1}))} \\ &\leq C\|v_k\|_{L^\infty(T_{k-1},1;L^2(B_{k-1}))}\|\nabla P_{k1}\|_{L^p(T_{k-1},1;L^\infty(B_{k-1/3}))}\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^\infty(T_{k-1},1;L^{\frac{2p}{2-p}}(B_{k-1}))}. \end{aligned}$$

Usando o Lema 63 e o Corolário 58, temos que

$$I_{k1} \leq C2^{12k+7k/3-4k/(3p)}U_{k-1}^{5/3-2/(3p)}\left(\|P\|_{L^p(T_{k-1},1;L^1(B_{k-1}))} + \|\vec{u}\|^2_{L^\infty(T_{k-1},1;L^2(B_{k-1}))}\right).$$

Concluímos, portanto, que para todo $p > 1$, existe $\alpha > 0$ e $\beta_p > 1$ tal que

$$I_{k1} \leq C2^{k\alpha_p}U_{k-1}^{\beta_p}\left(\|P\|_{L^p(T_{k-1},1;L^1(B_{k-1}))} + \|\vec{u}\|^2_{L^\infty(T_{k-1},1;L^2(B_{k-1}))}\right).$$

Se $U_0 \leq 1$, temos que

$$I_{k1} \leq C2^{k\alpha_p}U_{k-1}^{\beta_p}\left(\|P\|_{L^p(T_{k-1},1;L^1(B_{k-1}))} + 1\right),$$

com $\beta_p > 3/2$ se $p > 10$.

Passo 5. Limitação do termo local P_{k2}.

Usaremos novamente a desigualdade de Hölder (3.4) repetidamente. Decomporemos P_{k2} em $P_{k2} \coloneqq P_{k21} + P_{k22} + P_{k23}$, onde

$$-\Delta P_{k21} \coloneqq \nabla\cdot\nabla\cdot\left\{\phi_k(\vec{u}\otimes\vec{u})\left(1-\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)^2\right\};$$

$$-\Delta P_{k22} \coloneqq \nabla\cdot\nabla\cdot\left\{2\phi_k(\vec{u}\otimes\vec{u})\frac{v_k}{|\vec{u}|}\left(1-\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)\right\};$$

$$-\Delta P_{k23} \coloneqq \nabla\cdot\nabla\cdot\left\{2\phi_k(\vec{u}\otimes\vec{u})\frac{v_k^2}{|\vec{u}|^2}\right\}.$$

Decompõe I_{k2} em $I_{k2} \coloneqq I_{k21} + I_{k22} + I_{k23}$, com

$$I_{k2j} \coloneqq \int_{T_{k-1}}^1 \left|\iiint_{\mathbb{R}^3}\eta_k\left\{\nabla\cdot(\vec{u}P_{k2j}) + \left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)\vec{u}\cdot\nabla P_{k2j}\right\}dV\right|dt.$$

Pelo Lema 10 e devido à limitação do operador $\nabla\cdot\nabla\cdot(-\Delta)^{-1}$ (como visto em (4.27)), temos que $\|P_{k21}\|_{L^q(Q_{k-1})} \leq q$ para todo $< q < \infty$. Temos que

$$\nabla\cdot(\vec{u}P_{k21}) + \left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}-1\right)\vec{u}\cdot\nabla P_{k21} = \nabla\cdot\left(\frac{v_k\vec{u}}{|\vec{u}|}P_{k21}\right) - P_{k21}\nabla\cdot\left(\frac{v_k\vec{u}}{|\vec{u}|}\right).$$

Pelo Lema 60, temos que para $q > 2$

$$\begin{aligned} I_{k21} &\leq 2^{3k}C_q\|v_k\|_{L^{10/3}(Q_{k-1})}\|P_{k21}\|_{L^{10/3}(Q_{k-1})}\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^{10q/(7q-10)}(Q_{k-1})} \\ &+C_q\|P_{k21}\|_{L^q(Q_{k-1})}\|d_k\|_{L^2(Q_{k-1})}\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^{2q/(q-2)}(Q_{k-1})} \\ &\leq C_q2^{k\alpha_q}(U_{k-1}^{5/3(1-1/q)} + U_{k-1}^{4/3-5/(3q))}). \end{aligned}$$

Note que o segundo termo não tem expoente maior do que $3/2$, o qual tem origem do termo de pressão estar na forma divergente. Para os termos P_{k22}, P_{k23}, devido a limitação do operador $\nabla\cdot\nabla\cdot(-\Delta)^{-1}$ (como visto em (4.27)), pelo Lema 60 e por (7.8), temos que

$$\begin{aligned} \|P_{k22}\|_{L^{10/3(Q_{k-1})}} &\leq C\|\vec{u}(1-v_k/|\vec{u}|)\|_{L^\infty(Q_{k-1})}\|\vec{u}v_k/|\vec{u}|\|_{L^{10/3}(Q_{k-1})} \\ &\leq C\|v_k\|_{L^{10/3}(Q_{k-1})} \leq CU_{k-1}^{1/2}; \\ \|P_{k23}\|_{L^{10/3(Q_{k-1})}} &\leq C\|\vec{u}v_k/|\vec{u}|\|^2_{L^{10/3}(Q_{k-1})} \leq C\|v_k\|^2_{L^{10/3}(Q_{k-1})} \leq CU_{k-1}. \end{aligned}$$

Como temos termos que envolvem os gradientes da pressão em I_{k2}, precisamos limitá-los:

Lema 64. *Podemos decompor* ∇P_{k22} *e* ∇P_{k23} *em* $\nabla P_{k22} \coloneqq \vec{P}_{221} + \vec{P}_{222} + \vec{P}_{223}$ *e* $\nabla P_{k23} \coloneqq \vec{P}_{231} + \vec{P}_{232}$*, onde*

$$\|\vec{P}_{221}\|_{L^{10/3}(Q_{k-1/3})} \le C2^{3k}\|v_k\|_{L^{10/3}(Q_{k-1})}; \quad \|\vec{P}_{222}\|_{L^2(Q_{k-1/3})} \le C\|d_k\|_{L^2(Q_{k-1})};$$

$$\|\vec{P}_{223}\|_{L^{5/4}(Q_{k-1/3})} \le C\|v_k\|_{L^{10/3}(Q_{k-1})}\|d_k\|_{L^2(Q_{k-1})};$$

$$\|\vec{P}_{231}\|_{L^{5/3}(Q_{k-1/3})} \le C2^{3k}\|v_k\|^2_{L^{10/3}(Q_{k-1})}; \ \|\vec{P}_{232}\|_{L^{5/4}(Q_{k-1/3})} \le C\|v_k\|_{L^{10/3}(Q_{k-1})}\|d_k\|_{L^2(Q_{k-1})}.$$

Demonstração. Temos que

$$\nabla\left\{\phi_k \vec{u}\otimes\vec{u}\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)^2\right\} = \nabla\phi_k \otimes \left\{\vec{u}\otimes\vec{u}\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)^2\right\}$$

$$+\phi_k\nabla\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right)\otimes\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right) + \phi_k\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right)\otimes\nabla\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right).$$

Pela limitação de de $\nabla\phi_k$ e pelo Lema 60, temos que

$$\left|\phi_k\nabla\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right)\otimes\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right) + \phi_k\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right)\otimes\nabla\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right)\right| \le Cd_k v_k;$$

$$\left|\nabla\phi_k \otimes \left\{\vec{u}\otimes\vec{u}\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)^2\right\}\right| \le C2^{3k}|v_k|^2.$$

Escreve $\vec{P}_{231}$ e $\vec{P}_{232}$ como soluções de

$$-\Delta\vec{P}_{231} = \nabla\cdot\nabla\cdot\left(\nabla\phi_k\otimes\left\{\vec{u}\otimes\vec{u}\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)^2\right\}\right);$$

$$-\Delta\vec{P}_{232} = \nabla\cdot\nabla\cdot\left\{\phi_k\nabla\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right)\otimes\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right) + \phi_k\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right)\otimes\nabla\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right)\right\}.$$

Note que $\nabla P_{k23} = \vec{P}_{231} + \vec{P}_{232}$ e devido a limitação do operador $\nabla\cdot\nabla\cdot(-\Delta)^{-1}$ (como visto em (4.27)), obtemos as limitações enunciadas no Lema (basta usar a desigualdade de Hölder (3.4)).

Além disso, temos que

$$\nabla\left\{\phi_k(\vec{u}\otimes\vec{u})\frac{v_k}{|\vec{u}|}\left(1-\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)\right\} = \nabla\phi_k\otimes(\vec{u}\otimes\vec{u})\frac{v_k}{|\vec{u}|}\left(1-\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right) + \phi_k\left(1-\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)\vec{u}\otimes\nabla\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right)$$

$$+\phi_k\frac{v_k}{|\vec{u}|}\nabla\vec{u}\otimes\vec{u}\left(1-\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right) - \phi_k\vec{u}\otimes\nabla\frac{v_k}{|\vec{u}|}\otimes\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}.$$

Note que pelo Lema 60

$$\left|\vec{u}\otimes\nabla\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right| \le \left|\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\otimes\nabla v_k\right| + \left|\frac{v_k}{|\vec{u}|^2}\vec{u}\otimes\nabla|\vec{u}|\right| \le |\nabla v_k| + \chi_{\{v_k>0\}}|\nabla|\vec{u}|| \le 2d_k.$$

Escreve $\vec{P}_{221}$, $\vec{P}_{222}$ e $\vec{P}_{223}$ como soluções de

$$-\Delta\vec{P}_{221} = \nabla\cdot\nabla\cdot\left(\nabla\phi_k\otimes(\vec{u}\otimes\vec{u})\frac{v_k}{|\vec{u}|}\left(1-\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)\right);$$

$$-\Delta\vec{P}_{222} = \nabla\cdot\nabla\cdot\left(\phi_k\left(1-\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)\vec{u}\otimes\nabla\left(\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right) + \phi_k\frac{v_k}{|\vec{u}|}\nabla\vec{u}\otimes\vec{u}\left(1-\frac{v_k}{|\vec{u}|}\right)\right);$$

$$-\Delta\vec{P}_{223} = \nabla\cdot\nabla\cdot\left(\phi_k\vec{u}\otimes\nabla\frac{v_k}{|\vec{u}|}\otimes\frac{v_k}{|\vec{u}|}\vec{u}\right).$$

Note que $\nabla P_{k22} \coloneqq \vec{P}_{221}+\vec{P}_{222}+\vec{P}_{223}$ e devido a limitação do operador $\nabla\cdot\nabla\cdot(-\Delta)^{-1}$ (como visto em (4.27)), obtemos as limitações enunciadas no Lema (novamente, basta usar a desigualdade de Hölder (3.4)). □

Pelo Lema anterior, podemos, portanto, limitar $I_{k22} + I_{k23}$ por

$$I_{k22} + I_{k23} \leq C2^{3k} \int_{T_{k-1}}^{1} \iiint_{B_{k-1/3}} (1 + v_k)(|P_{k22}| + |P_{k23}|)\, dV\, dt +$$

$$C \int_{T_{k-1}}^{1} \iiint_{B_{k-1/3}} (|\nabla P_{k22}| + |\nabla P_{k23}|)\, dV\, dt =: A + B,$$

onde foi usado as limitações de η_k e sua derivada e $1 + v_k \geq |\vec{u}|$. A primeira integral A pode ser limitada por

$$A \leq C2^{3k}(\|P_{k22}\|_{L^{10/3}(B_{k-1/3})}\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^{10/7}(B_{k-1})} + \|P_{k23}\|_{L^{5/3}(B_{k-1/3})}\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^{5/2}(B_{k-1})})$$

$$+C2^{3k}\|v_k\|_{L^{10/3}(B_{k-1})}(\|P_{k22}\|_{L^{10/3}(B_{k-1/3})}\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^{5/2}(B_{k-1})}$$

$$+\|P_{k23}\|_{L^{5/3}(B_{k-1/3})}\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^{10}(B_{k-1})}) \leq C2^{\alpha k}U_{k-1}^{5/3},$$

onde foi usada a desigualdade de Hölder (3.4) e o Lema 63. Usando estes mesmos resultados, temos que a integral B pode ser limitada por

$$B \leq C(\|\vec{P}_{221}\|_{L^{10/3}(B_{k-1/3})}\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^{10/7}(B_{k-1})} + \|\vec{P}_{231}\|_{L^{5/3}(B_{k-1/3})}\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^{5/2}(B_{k-1})})$$

$$+C\|\vec{P}_{222}\|_{L^{2}(B_{k-1/3})}\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^{2}(B_{k-1})}$$

$$+(\|\vec{P}_{223}\|_{L^{5/4}(B_{k-1/3})} + \|\vec{P}_{232}\|_{L^{5/4}(B_{k-1/3})})\|\chi_{\{v_k>0\}}\|_{L^{5}(B_{k-1})}) \leq C2^{\alpha k}U_{k-1}^{5/3} + CU_{k-1}^{4/3},$$

onde os 3 últimos três termos são os que contribuem com o expoente $4/3$ de U_{k-1}.

Concluímos, portanto, a demonstração da Proposição 61. □

Lema 65. *Para todo $C > 1$ e $\beta > 1$, se existe uma constante C_0 tal que para toda sequência $0 < W_0 < C_0$ e para todo k:*

$$0 \leq W_{k+1} \leq C^k W_k^{\beta},$$

temos que $W_k \to 0$ quando $k \to \infty$.

Demonstração. Define

$$R_k := C^{k/(\beta-1)}C^{1/(\beta-1)^2}W_k,$$

que, pela hipótese, nos leva a

$$0 \leq R_{k+1} \leq R_k^{\beta}.$$

Então se $W_0 \leq C_0 = C^{-1/(\beta-1)^2}$, temos que $R_0 \leq 1$ e, por indução, temos que $R_k \leq 1$ para todo k. Isso nos leva a

$$W_k \leq C^{-k/(\beta-1)}C^{-1/(\beta-1)^2}$$

e, portanto, $W_k \to 0$ quando $k \to \infty$. □

Teorema 66 (Limitação da Velocidade e Pressão). *Para todo $p > 1$, existe uma constante universal Γ tal que para todas soluções fracas encontradas no Teorema 51 em $[-1, 1] \times B(1)$ satisfazendo*

$$\|\vec{u}\|^2_{L^\infty(-1,1;L^2(B(1)))} + \|\nabla\vec{u}\|^2_{L^2(-1,1;L^2(B(1)))} + \|P\|^2_{L^p(-1,1;L^1(B(1)))} \leq \Gamma.$$

Então

$$|\vec{u}| \leq 1 \quad \text{em} \quad [-1/2, 1] \times B(1/2).$$

Demonstração. Temos que se $\Gamma \leq 1$, então $U_0 \leq 1$. Pela definição de U_k, temos que $U_k \leq U_0 \leq 1$ para todo k. Além disso, temos que $\|P\|_{L^p(0,1;L^1(B(1)))} \leq 1$. Temos pela Proposição 61 que

$$U_k \leq (2C_p)^k U_{k-1}^{\beta_p}.$$

Se considerarmos $\Gamma = \inf(1, C_0)$, temos pelo Lema 65 que $U_k \to 0$. Notando que para todo k, $-1/2 \leq t \leq 1$:

$$\iiint_{B(1/2)} [|\vec{u}| - 1]_+^2 \, dV \leq U_k \to 0,$$

temos que $|\vec{u}| \leq 1$ em quase todo ponto em $[-1/2, 1] \times B(1/2)$. □

7.3 Dimensão de Hausdorff

Definição 67. Definimos a medida de Hausdorff "parabólica" como

$$\mathcal{P}^k(\Omega) := \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^k : \Omega \subset \bigcup_i W_{r_i}, r_i < \delta \right\}. \tag{7.14}$$

A construção é feita pelo procedimento de Caratheodory [8] e difere da dimensão de Hausdorff usual por usar cilindros parabólicos, isto é, o cilindro "parabólico" W_{r_i} é definido como

$$W_{r_i}(\vec{r}, t) := B_{r_i}(\vec{r}) \times (t - r_i^2, t + r_i^2).$$

Note que $\mathcal{P}^k(\Omega) = 0$ se, e somente se para cada $\delta > 0$, temos que Ω pode ser coberto por uma família de cilindros W_{r_i} tal que $\sum r_i^k < \delta$. Essa ideia será fundamental para termos noção da distribuição de singularidades das soluções de Navier-Stokes. Note ainda que $\mathcal{H}^k(S) \leq C(k)\mathcal{P}^k(S)$, $\mathcal{H}^k$ medida de Hausdorff usual [8], já que basta increver os elementos da cobertura dentro de cilindros para notarmos a desigualdade.

Definição 68. Define S é o conjunto de singularidades das soluções de Navier Stokes advindas do Teorema 51, isto é,

$$S := \{(\vec{r}, t) : \vec{u}(\vec{r}, t) \notin L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))\}.$$

Note que caso $(\vec{r}, t) \notin S$, então, pelo Teorema D, temos que a solução é suave espacialmente nesse ponto.

Lema 69 (Recobrimento de Vitalli). *Seja uma família de cilindros $\mathcal{F} := \{W_{r_i}\}_i$, com $r_i < \infty$ para todo i. Então existe subfamília enumerável disjunta $\mathcal{G} := \{W'_{r_i}\}_i$ que cobre $\mathcal{F}$, com*

$$\bigcup_{W_r \in \mathcal{F}} W_r \subset \bigcup_{W_r \in \mathcal{G}} W_{5r}.$$

Demonstração. A demonstração se encontra em Caffarelli-Kohn-Niremberg [2, Lema 6.1]. A demonstração do lema para bolas (em vez de cilindros parabólicos) pode ser encontrada em [8, Capítulo 2], com fácil generalização para cilindros, uma vez que basta increvê-los nas bolas. □

Proposição 70. *Para $1 < p < 4/3$ e constantes $\lambda < 1$ e $\delta_p \leq C_0/2$ pequenas suficientes tal que para toda solução de Navier-Stokes em Ω advinda do Teorema 51, $(\vec{r}_0, t_0) \in \Omega \times (0, \infty)$ a propriedade abaixo seja válida:*

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-1} \iiiint_{W_\epsilon(\vec{r}_0, t_0)} |\nabla \vec{u}|^2 \, dV \, dt \leq \delta_p. \tag{7.15}$$

Então existe $k_0 > 0$ tal que

$$V_{k+1} \leq \frac{V_k}{4} + \frac{C_0}{4},$$

onde $V_k := \|\vec{u}_k\|_{L^\infty(-1,1;L^2(B_0))} + \lambda^{-8} \|P_k - \overline{P}_k\|_{L^p(-1,1;L^2(B_0))}^2$ (ver definição de $\vec{u}_k$, P_k em Seção 2.2).

Demonstração. Omitiremos, mas a demonstração pode ser encontrada em [23, Proposição 5]. □

A Proposição 70 e o Teorema 66 implicam no resultado fundamental para o entendimento da distribuição de singularidades:

Teorema 71. *Para toda solução de Navier-Stokes em* Ω *advinda do Teorema* 51 *em* $(0,\infty)$ *e* $(\vec{r}_0, t_0) \in \Omega \times (0,\infty)$ *tal que*

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon^{-1} \iiiint_{W_\epsilon(\vec{r}_0,t_0)} |\nabla \vec{u}|^2 \, dV \, dt \leq \delta_p, \tag{7.16}$$

temos que $\vec{u}$ *é limitada numa vizinhança* V *de* $(\vec{r}_0, t_0)$*, ou seja,* $\vec{u}(\vec{r}_0, t_0) \in L^\infty_{loc}(V)$.

Demonstração. Pela Proposição 70, temos que para $k \geq k_0$:

$$V_{k+1} \leq \frac{V_k}{4} + \frac{C_0}{4},$$

o que implica que $\limsup_k V_k \leq C_0/3$. Note ainda que pela Proposição 70:

$$\|\nabla \vec{u}_k\|^2_{L^2(W_1(\vec{r}_0,t_0))} = \lambda^{-k} \int_{t_0-\lambda^{2k}}^{t_0+\lambda^{2k}} \iiint_{B'(\lambda^k)} |\nabla \vec{u}|^2 \, dV \, dt \leq \delta_p,$$

onde $B'(r)$ denota a bola de raio r e centro em $\vec{r}_0$; e existe K grande o suficiente tal que

$$V_K + \|\nabla \vec{u}_K\|^2_{L^2(W_1(\vec{r}_0,t_0))} < \frac{C_0}{3} + \frac{C_0}{2} + \epsilon \leq C_0.$$

Notando que $\vec{u}_K$ e $P_K - \overline{P}_K$ são soluções das equações de Navier-Stokes em Q_0, temos pelo Teorema 66 que $|\vec{u}_K| \leq 1$ em $[-1/2, 1] \times B(1/2)$. □

Concluímos com o resultado principal da seção:

Teorema E. *Para toda solução de Navier-Stokes em* Ω *advinda do Teorema* 51 *em* $(0,T)\times\Omega$, $0 < T \leq \infty$*, temos que* $\mathcal{P}^1(S) = 0$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, se $(\vec{r}_0, t_0) \in S$, então

$$\delta_p < \limsup_{\epsilon_i\to 0} \epsilon_i^{-1} \iiiint_{W_{\epsilon_i}(\vec{r}_0,t_0)} |\nabla \vec{u}|^2 \, dV \, dt.$$

Tome $V \subset (0,T)\times\Omega$ vizinhança de S e $\eta > 0$. Para cada $(\vec{r}_i, t_i) \in S$, escolhe $\epsilon_i < \eta$ tal que

$$\delta_p < \epsilon_i^{-1} \iiiint_{W_{\epsilon_i}(\vec{r}_i,t_i)} |\nabla \vec{u}|^2 \, dV \, dt \quad \text{e} \quad W_\epsilon(\vec{r}_i, t_i) \subset V.$$

Aplicando o Lema 69 para essa família de cilindros contidos em V, obtemos uma subfamília disjunta tal que

$$S \subset \bigcup_i W_{5\epsilon_i}(\vec{r}_i, t_i)$$

e

$$\sum_i \epsilon_i \leq \sum_i \delta_p^{-1} \iiiint_{W_{\epsilon_i}(\vec{r}_i,t_i)} |\nabla \vec{u}|^2 \, dV \, dt \leq \delta_p^{-1} \iiiint_V |\nabla \vec{u}|^2 \, dV \, dt.$$

Como η é arbitrário, temos que $|S| = 0$ e que

$$\mathcal{P}^1(S) \leq \sum_i \delta_p^{-1} \iiiint_{W_{5\epsilon_i}(\vec{r}_i,t_i)} |\nabla \vec{u}|^2 \, dV \, dt \leq 5\delta_p^{-1} \iiiint_V |\nabla \vec{u}|^2 \, dV \, dt.$$

Note que vale para qualquer vizinhança V de S. Pelo Teorema 51, $|\nabla \vec{u}|^2$ é integrável e, portanto, tomando $|V| \to 0$, temos que $\mathcal{P}^1(S) = 0$. Em particular, $\mathcal{H}^1(S) = 0$. □

Como $\mathcal{H}^1(S) = 0$ e a medida de Hausdorff coincide com a noção de medida usual para domínios suaves, temos que o conjunto de singularidades não pode assumir estrutura de reta no espaço-tempo (ou conjuntos com "estrutura maior", com área ou volume positivos, por exemplo). Note, entretanto, que $\mathcal{H}^1(\mathbb{Q}^4) = 0$ [20] e $\mathcal{H}^1(C) = 0$, C conjunto de Cantor, o que implica que é possível que o conjunto de singularidades não seja "tão pequeno".

Corolário 72 (Inexistência de Singularidades em Todo Tempo). *O conjunto* $\Upsilon \coloneqq \{t : \vec{u}(t) \notin L^\infty(0,T)\}$, $0 \leq T \leq \infty$ *é caracterizado por* $\mathcal{H}^{1/2}(\Upsilon) = 0$.

Demonstração. Sejam $t_i \in \Upsilon$ pontos de singularidades temporais indexados por i. Então toma bola unidimensional, isto é, um itervalo, em torno de t_i da forma $I_{r_i} \coloneqq (t_i - r_i^2, t_i + r_i^2)$. Logo

$$\mathcal{H}^{1/2}(\Upsilon) = C \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(r_i^2\right)^{1/2} : \Upsilon \subset \bigcup_i I_{r_i}, r_i^2 < \delta \right\}$$

$$\leq C \lim_{\epsilon \to 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i : S \subset \bigcup_i W_{r_i}, r_i < \epsilon \right\} = C\mathcal{P}^1(S) = 0,$$

onde a desigualdade é válida pois $\Upsilon \subset S$ e $I_{r_i} \subset W_{r_i}$. $\square$

Como $\mathcal{H}^{1/2}(\Upsilon) = 0$, temos que o conjunto de singularidades temporais não pode assumir a estrutura de dimensão (de Hausdorff) 1/2. Note que $\mathcal{H}^{1/2}(\mathbb{Q}) = 0$ e $\mathcal{H}^{1/2}(C_\delta) = 0$ para $\delta < 3/4$, onde C_δ é conjunto de Cantor generalizado (a cada passo de construção do conjunto de Cantor, retira-se $\delta/3$ em vez de $1/3$ como o usual). Então o conjunto de singularidades Υ pode ser um conjunto compacto ou um conjunto denso, ilustrando novamente que ele pode não ser "tão pequeno".

Além disso, o Corolário acima garante que não há pontos singulares fixos no espaço, já que se houvessem, formariam uma reta paralela ao eixo temporal. Isto mostra que caso exista pontos espaciais com velocidade ilimitada para algum tempo, ela deve se tornar limitada imediatamente depois.

8 Direções Futuras

Apesar das equações de Navier-Stokes serem um bom modelo para fluidos, foram feitas várias hipóteses em sua derivação (ver Seção 2.4). Uma possível extensão das equações é para fluidos não-Newtonianos, que utilizando a relação de lei de potências, ou relação de Ostwald - de Waele [18]: o tensor de cisalhamento segue uma relação

$$\mathbb{T} \propto \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}\right)^{p-1}.$$

Fazendo o procedimento similar à Seção 2.4, temos que

$$\mathbb{T} = \mu((\nabla \vec{u})^T + \nabla \vec{u})^{p-1} + \lambda(\nabla \cdot \vec{u})^{p-1}\, \mathbb{I}.$$

Fazendo as mesmas hipóteses 2 e 3 de Stokes e assumindo que o fluido é incompressível, temos que

$$\vec{f_t} = \mu(p-1)((\nabla \vec{u})^T + \nabla \vec{u})^{p-2} \Delta \vec{u}.$$

Note que a equação acima é similar a equação

$$\vec{f_t} = K|\nabla \vec{u}|^{p-2} \Delta \vec{u},$$

K constante não nula. Definindo o operador p-laplaciano por $\Delta_p f \coloneqq \nabla \cdot (|\nabla f|^{p-2} \nabla f)$, temos que $\vec{f_t} = \Delta_p \vec{u}$. Note que quando $p = 2$, temos a modelagem de fluidos newtonianos. Temos, portanto, que as equações

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{u} = 0; \\ &\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla P - K\Delta_p \vec{u} = \vec{f}_{ext}; \\ &\vec{u}(\vec{r}, 0) = \vec{u}_0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

são um modelo (rudimentar) para fluidos não-newtonianos.

Observação 73. Uma formulação análoga pode ser encontrada em [1], com a modificação do termo $-K\Delta_p \vec{u}$ para $-K\nabla \cdot \left\{|(\nabla \vec{u})^T + \nabla \vec{u}|^{p-2}[(\nabla \vec{u})^T + \nabla \vec{u}]\right\}$.

A expectativa de "vencimento" do termo $\Delta \vec{u}$ sobre $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ para garantirmos existência global temporal de solução única (ver Introduçâo) não existe mais aqui: a equação

$$\Delta_p \vec{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega$$

pode não possuir sequer duas derivadas no sentido clássico [7]. Como nenhum dos termos funciona como um "regularizador", espera-se que as soluções sejam problemáticas, como existência de tempo maximal finita ou não unicidade.

9 Conclusão

Apesar dos resultados pioneiros de Leray [15] para as soluções fortes das equações Navier-Stokes, como visto no Teorema B em Seção 6.2, além do estudo detalhado das equações de Stokes, nota-se a deficiência do método de iteração de Picard para concluirmos a existência global temporal das soluções, o que se deve ao parâmetro de contração λ depender da velocidade inicial. Apesar disto, provou-se a unicidade e regularidade das soluções no intervalo de existência da solução e conseguiu-se obter a existência global temporal das soluções fracas de Leray-Hopf.

A teoria para as soluções fracas das equações Navier-Stokes permanece fundamentalmente incompleta: ainda que tenhamos unicidade de soluções e, portanto, regularidade espacial das soluções de Leray Hopf (ver Teorema D e Observação 48), permaneceremos com a questão de regularidade temporal das soluções. Embora o trio Caffarelli-Kohn-Niremberg [2] caracterizaram a distruibuição de singularidades do campo de velocidades (ver Seção 8.3, Teorema E) e consequentemente a inexistência de singularidades em todo tempo, podemos ainda ter um conjunto “grande"de pontos onde a velocidade torna-se infinita em instantes de tempo. O objetivo motivado pelo resultado do trio é mostrar que $S = \emptyset$ e, portanto, que existe solução regular no espaço sem a necessidade da demonstração de unicidade (usando o resultado de Kiselev e Ladyshenskaya [14], ver Observação 48). Note que ainda sim a teoria permaneceria fundamentalmente incompleta, já que esta solução não teria garantia de existir globalmente no tempo.

As técnicas deselvolvidas no trabalho são utilizadas em equações de Navier-Stokes Hiperdissipativas [3] e Magnetohidrodinâmicas [24], com resultados análogos aos obtidos para as equações de Navier-Stokes, além de outras generalizações para a modelagem de dinâmica de fluidos. Um dos objetivos de pesquisa futura é obter resultados análogos para o p-laplaciano, que modela fluidos que seguem a lei de potência, ou a relação de Ostwald–de Waele [18] para pseudoplásticos e dilatantes, isto é, para $p < 2$ e $p > 2$, respectivamente.

Referências

[1] Breit, D., Existence Theory for Generalized Newtonian Fluids, Academic Press, 2017;

[2] Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L., Partial regularity of suitable weak solution of the Navier-Stokes equations, Comm. Pure Appl. Math., 35(6), 1982, pp. 771-831.;

[3] Colombo, M., Lellis, C., Massaccesi, A., The generalized Caffarelli-Kohn-Nirenberg Theorem for the hyperdissipative Navier-Stokes system, arXiv, link: https://arxiv.org/abs/1712.07015, 2017;

[4] De Giorgi, E., Sulla differenziabilità e l'analitixà delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 3, 1957, pp. 25-43;

[5] Escauriaza, Seregin & Sverak, $L^{3,\infty}$-solutions to the Navier-Stokes equations and backward uniqueness, Uspekhi Matematicheskih Nauk vol. 58, 2(350), 2002, pp. 3-44. Tradução para o inglês em Russian Mathematical Surveys 58(2), 2003, pp. 211-250;

[6] Evans, L., Partial Differential Equations, Graduate Studies of Mathematics, Volume 19, AMS, 2002;

[7] Evans, L., A New Proof of Local $C^{1,\alpha}$ Regularity for Solutions of Certain Degenerate Elliptic P.D.E., Journal of Differential Equations 45, 1982, pp. 356–373;

[8] Federer, H., Geometric Measure Theory, Springer-Verlag, New York, 1969;

[9] Fefferman, C., Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006, pp. 57-67;

[10] Gilbarg, D., Trudinger, N., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Classic in Mathematics, Springer, 2001;

[11] Helly, E., Über lineare Funktionaloperation, Wien. Ber. 121, 1912, pp. 265–297;

[12] Helmholtz, H, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welcher der Wirbelbewegungen entsprechen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 55, 1858, pp. 25–55;

[13] Hopf, E., Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Gryndgleichungen, Math. Nachr. 4, 1951, pp. 213-231;

[14] Ladyshenkaya, O., Kiselev, A., On existence and uniqueness of the solution of nonstationary problem for viscous incompressible fluid, Izvestiya Akad. Nauk SSSR 21, 1957, pp. 655-680;

[15] Leray, S.; Predazzi, Sur le mouvement d'un liquide visquex emplissant l'espace, Acta Math. 63, 1934, pp. 193-248;

[16] Lieberman, G., Second order parabolic differential equations, World Scientific, Singapore, 1996;

[17] Oseen, C., Sur les formules de green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelquesunes de leurs applications, Acta. Math. 34, 1911, pp. 205-288;

[18] Ostwald, W., Ueber die rechnerische Darstellung des Strukturgebietes der Viskosität, Kolloid Zeitschrift 47 (2), 1929, pp. 176-187;

[19] Ożański, W., Pooley, B., Leray's fundamental work on the Navier-Stokes equations: a modern review of "Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace", em preparação. preprint: https://arxiv.org/abs/1708.09787;

[20] Schleicher, Dierk, Hausdorff Dimension, Its Properties, and Its Surprises, The American Mathematical Monthly, 2007, 114 (6): 509–528;

[21] Serrin, J., On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations, Arch Ration. Mech. Anal. 9,1962, pp. 187-195;

[22] Stuwe, M., On partial regularity results for the Navier-Stokes equations, Comm. Pure. Appl. Math. 41, 1988, pp. 437-458;

[23] Vasseur, A., A new proof of partial regularity of solutions to Navier Stokes equations,Nonlinear Differential Equations Appl. 14, 2007, pp. 753-785;

[24] Wang, Y., Jiu, Q., Remarks on partial regularity for suitable weak solutions of the incompressible magnetohydrodynamic equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 409, Issue 2, 2014, pp. 1052-1065.