Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

Estudo da Relatividade Geral com uma dimensão extra

Vinícius Bernardes da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a orientação do Prof. Dr. Dimiter Hadjimichef.

Porto Alegre, Brasil
Novembro de 2018

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar aos meus pais, Paulo e Nana, e à minha irmã Laura, pelo apoio essencial ao longo de toda minha formação. Agradeço também à minha namorada Roberta, cuja companhia proporcionou os melhores anos da graduação.

Faço um agradecimento especial ao Prof.° Dimiter Hadjimichef, cuja serenidade ao ensinar e a liberdade passada ao orientar foram um pilar inspirador no meu estudo de física.

Enfim, agradeço aos amigos queridos que fiz durante o curso, que fizeram do ambiente acadêmico um lugar agradável. E também agradeço aos amigos de longa data, em especial Schmökel e Neco, que se mantiveram próximos, mesmo estando tão distantes.

"What man sees depends both upon what he looks at and also upon what his previous visual-conception experience has taught him to see."

Thomas S. Kuhn,
The Structure of Scientific Revolutions

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estudar teorias que estendem o espaço-tempo 4-dimensional da Relatividade Geral a um espaço com uma dimensão a mais. Para isso, uma revisão da Relatividade Especial é feita no Capítulo 2, onde o conceito de espaço-tempo é introduzido. No Capítulo 3, é feita uma revisão da Relatividade Geral, construindo passo a passo o conceito de gravitação como curvatura do espaço-tempo.

Duas teorias extra-dimensionais são abordadas. A primeira é a icônica teoria de Kaluza-Klein, estudada no Capítulo 4, que propõe a unificação entre a Relatividade Geral e a Teoria Eletromagnética, dando à dimensão extra uma interpretação ligada ao eletromagnetismo. No Capítulo 5 é realizado um estudo da Teoria da Matéria Induzida, que interpreta a 5ª dimensão como estando associada à energia e ao momento da máteria do universo, ou seja, que atribui uma natureza geométrica à matéria.

Abstract

This work aims to study theories that extend the General Relativity's 4-dimensional space-time to a space with an extra dimension. To this goal, a review of Special Relativity is carried in Chapter 2, in which the concept of space-time is introduced. In Chapter 3, a review of General Relativity is done, in a step by step form, developing the concept of gravitation as space-time curvature.

Two extra-dimensional theories are addressed. The first one is the iconic Kaluza-Klein theory, studied in Chapter 4, which proposes a unification of General Relativity and Electromagnetic Theory, giving an electromagnetic related interpretation to the extra dimension. In Chapter 5, a study of the Theory of Induced Matter is done. Such theory interprets the 5th dimension as linked to energy and momentum of matter in the universe, assigning a geometric nature to matter.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A teoria da Relatividade Especial, concebida por Albert Einstein em 1905, apresentou uma estrutura unificada do espaço e do tempo, o espaço-tempo [1]. Da tri-dimensionalidade do espaço clássico de distâncias, e da unidimensionalidade do tempo, até então visto como apenas um parâmetro, o espaço-tempo surgiu como estrutura 4-dimensional (quadri-dimensional), que aconchegava a estrutura matemática das já consolidadas equações de Maxwell.

Em 1915, Einstein deu um passo a mais, ao desenvolver a teoria da Relatividade Geral, uma extensão da Relatividade Especial para referenciais acelerados [1, 2]. Ao considerar referenciais acelerados, ao espaço-tempo teve de ser associada uma possível curvatura, descrita por uma grandeza chamada de tensor métrico. Essa curvatura mostrou-se capaz de descrever o movimento de corpos sob efeitos gravitacionais, pois previu-se que o espaço-tempo curvo gera uma equação de movimento que relaciona a velocidade de um corpo à própria geometria do espaço-tempo.

Einstein propôs então uma equação de campo gravitacional em termos de quantidades associadas à curvatura do espaço-tempo, e propôs como fonte da equação a distribuição de energia e momento (e massa) do universo. No limite de um espaço-tempo pouco curvo, sua equação reduzia-se à equação de campo da gravitação Newtoniana.

Em 1921, Theodor Kaluza [3] propôs tratar a Relatividade Geral em um espaço de cinco dimensões, do qual quatro dimensões equivaleriam às dimensões usuais de espaço-tempo, e a quinta dimensão seria um parâmetro livre. Kaluza associou a curvatura de seu espaço 5-dimensional (penta-dimensional) à curvatura do espaço 4D, a um campo escalar (necessário para consistência da teoria), e também ao potencial eletromagnético, conectando dessa forma a geometria de seu espaço extra-dimensional ao eletromagnetismo. Tomando uma aproximação para a curvatura do espaço chamada de *condição do cilindro*, a equação de Einstein nesse espaço de cinco dimensões *sem* matéria desacoplava-se em três equações: a equação de Einstein em 4 dimensões *com* energia e momento da matéria no universo 4D como fonte; a equação de Maxwell no vácuo, descrevendo o comportamento de um campo eletromagnético na ausência de corrente elétrica; e uma equação de Klein-Gordon para o campo escalar. Alem disso, a força sofrida por um corpo carregado em um campo eletromagnético (a força de Lorentz) foi obtida da equação de movimento nesse universo de 5 dimensões, desde que imposta uma associação da 5ª componente da velocidade com a carga elétrica do corpo.

Em 1926, Oskar Klein [4] adicionou uma nova ideia na teoria de Kaluza, trazendo embasamento físico para a condição do cilindro que havia sido tomada. Inspirado em ideias de Mecânica Quântica, Klein sugeriu que a 5ª dimensão fosse compactificada, i.e. que a 5ª coordenada tivesse uma topologia cilíndrica, com um diâmetro suficientemente pequeno para que a curvatura ao longo do diâmetro pudesse ser desprezada. Além disso, vislumbrando a existência de um tipo de matéria descrita por uma função de onda no espaço 5-dimensional, Klein obteve uma previsão da quantização da carga. Baseado no valor conhecido da carga fundamental e, estimou um diâmetro da ordem do comprimento de Planck para o 5ª dimensão.

Já em 1992, P. S. Wesson [5, 6] fez a extensão da Relatividade Geral a uma dimensão extra abdicando da compactificação e da condição do cilindro. Em sua Teoria da Matéria Induzida, ele associou a curvatura em 5D associada à curvatura 4D e a um campo escalar. Resolvendo a equação de Einstein em 5 dimensões no vácuo, recuperou uma equação de Einstein em 4 dimensões na presença de uma distribuição de energia e momento induzidas por quantidades associadas ao campo escalar e à curvatura 4D, antes desconsideradas devido à condição do cilindro. Com esse resultado, podemos interpretar o conteúdo de energia e momento no espaço-tempo 4D como uma propriedade geométrica de um espaço 5-dimensional mais geral, induzida ao impôr a dinâmica da Relatividade Geral a esse espaço.

Os conceitos aqui apresentados serão estudados em detalhe ao longo do texto. Uma revisão de Relatividade Especial será feita no Capítulo 2, e no Capítulo 3 será feita uma construção da teoria da Relatividade Geral. Com base nesses estudos, a teoria de Kaluza-Klein é a primeira das teorias extra-dimensionais a ser estudada, no Capítulo 3. A outra, Teoria da Matéria Induzida, é apresentada e explorada no Capítulo 4. As conclusões, no Capítulo 5, fecham as discussões abertas ao longo do texto.

Capítulo 2

Relatividade Especial: *O paradigma das 4 dimensões*

2.1 O Espaço-Tempo

O conceito de espaço-tempo surgiu na teoria da Relatividade Especial (RE) como uma unificação dos conceitos de espaço e de tempo. Esses conceitos físicos eram explorados na física clássica de formas distintas, mas os princípios da RE implicaram em simetrias que evidenciaram a natureza equivalente das três dimensões de espaço e do tempo unidimensional [1]. Assim, de um espaço tridimensional e do tempo, surgiu o espaço-tempo 4-dimensional.

No entanto, esse espaço-tempo 4-dimensional trazia a peculiaridade de possuir uma métrica não-Euclidiana. O intervalo invariante entre dois pontos do espaço-tempo é

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2, \tag{2.1}$$

onde Δs^2 é o intervalo invariante, Δt é o intervalo de tempo entre os dois pontos, $\Delta \vec{r}$ é a distância 3-dimensional e c é a velocidade da luz. Essa é a chamada métrica de Minkowski, e o espaço que possui essa métrica é o espaço de Minkowski, denominado $\mathcal{M}$.

Escolhendo-se uma base vetorial $\{e_\mu, \mu = 0, \ldots, 3\} \subset \mathcal{M}$, podemos escrever qualquer elemento $x \in \mathcal{M}$ do espaço de Minkowski como uma combinação linear[1] $x = x^\mu e_\mu$. Nessa base, podemos nos referir ao elemento x apenas por suas componentes x^μ. Lembrando de que se trata do espaço-tempo, adotamos a convenção de que o índice $\mu = 0$ corresponde à coordenada temporal e os índices $\mu = 1, 2, 3$ correspondem a coordenada espaciais (sejam cartesianas, esféricas ou outras). Dessa forma, podemos escrever[2]

$$x^\mu = \left(x^0, x^i\right) = \left(c\Delta t, \Delta \vec{r}\right). \tag{2.2}$$

Para definir o intervalo invariante nessa notação, precisamos definir o produto interno. Para isso, introduzimos os espaço dual $\mathcal{M}^*$, tal que um elemento $y \in \mathcal{M}^*$ aplicado sobre $x \in \mathcal{M}$ resulta em um número real $y(x)$. Já fixada a base $\{e_\mu\} \in \mathcal{M}$, vamos agora tomar uma base $\{\omega^\mu\} \in \mathcal{M}^*$ que satisfaça a relação $\omega^\mu (e_\nu) = \delta^\mu_\nu$. Nessa base, um elemento

[1] A notação de Einstein para somatórios é sempre adotada na presença de índices repetidos. Os índices do alfabeto grego sempre correm de 0 a 3.

[2] Os índices do alfabeto latino sempre correm de 1 a 3.

$y \in \mathcal{M}^*$ é descrito como $y = y_\mu \omega^\mu$, ou simplesmente y_μ. Em termos de componentes, o produto interno fica

$$y(x) = y_\mu \omega^\mu \left(x^\nu e_\nu\right) = y_\mu x^\nu \omega^\mu \left(e_\nu\right) = y_\mu x^\nu \delta^\mu_\nu = y_\mu x^\mu. \tag{2.3}$$

O produto interno se dá entre dois elementos do espaço de Minkowski $\mathcal{M}$, por isso precisamos fazer uma correspondência entre elementos de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^*$. Fazemos isso através de uma função $\eta : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^*$, de forma que o produto interno entre $x, y \in \mathcal{M}$ é $x \cdot y = x^*(y)$, onde $x^* = \eta(x)$. Pela linearidade do produto interno, η também é linear.

Queremos reproduzir a eq. (2.1) em termos do produto interno. Para isso, dado um elemento x^μ, fazemos a associação $x^0 = c\Delta t$ e $x^i = \Delta r^i, i = 1, 2, 3$. Impondo que $\Delta s^2 = x \cdot x$, temos que

$$x_\mu x^\mu = \left(x^0\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(x^i\right)^2. \tag{2.4}$$

Isso implica que o correspondente dual de $x^\mu = (x^0, x^i)$ é dado por

$$x_\mu = (x_0, x_i) = \left(x^0, -x^i\right) = (c\Delta t, -\Delta\vec{r}). \tag{2.5}$$

Podemos portanto associar a função η com a matriz

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

com $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$. Assim, dado um vetor $x = x^\mu e_\mu$, seu respectivo vetor dual é

$$x^* = \eta\left(x\right) = \eta\left(x^\mu e_\mu\right) = x^\mu \eta\left(e_\mu\right) = \eta_{\mu\nu} v^\mu \omega^\nu. \tag{2.7}$$

Vemos que $\eta\left(e_\mu\right) = \eta_{\mu\nu}\omega^\nu$. A matriz inversa $\eta^{\mu\nu}$ tem as mesmas componentes (no espaço de Minkowski), e realiza a transformação $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$. A ação de g sobre a base dual é portanto $\eta\left(\omega^\mu\right) = \eta^{\mu\nu} e_\nu$. A grandeza $\eta_{\mu\nu}$ é chamada de tensor métrico, e define a métrica do espaço-tempo. Nesses termos, obtemos outra forma de escrever o intervalo invariante

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \tag{2.8}$$

onde agora escrevemos um intervalo infinitesimal. Se o intervalo for positivo é chamado de *tipo tempo*, e se for negativo é chamado de *tipo espaço*. Dizemos que o tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ possui assinatura $(+, -, -, -)$.

Dados dois eventos – i.e. pontos do espaço-tempo – cujo intervalo entre eles é tipo tempo, existe um referencial em que a distância entre eles tem as componentes $\Delta x^\mu = (\Delta\tau, 0, 0, 0)$, e o intervalo Δs^2 se reduz ao quadrado do intervalo de tempo entre eles. Nesse caso definimos o intervalo de tempo próprio $\Delta\tau$ como

$$c^2 \Delta\tau^2 = \Delta s^2, \tag{2.9}$$

e vemos que é uma quantidade invariante, i.e. independente do referencial em que se expressam as coordenadas. Portanto, em qualquer referencial, podemos expressar o tempo próprio como

$$c^2 \Delta\tau^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu. \tag{2.10}$$

Por outro lado, se o intervalo entre dois eventos é tipo espaço, em algum referencial em que a distância entre eles é $\Delta x^\mu = (0, \Delta\vec{r})$, e o intervalo invariante se reduz a

$$\Delta s^2 = -\Delta r^2. \tag{2.11}$$

Para uma partícula cuja 4-posição é x^μ, definimos seu tempo próprio por $c^2\tau^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$. Nesse caso, τ é a componente temporal da 4-posição no referencial de repouso da partícula.

2.2 Transformações de Lorentz

A concepção do espaço-tempo foi motivada pela mistura entre as quantidades de tempo e espaço nas transformações de Lorentz (TL), que era responsável por implementar a troca de um referencial inercial a outro na RE. Uma troca entre referenciais inerciais movendo-se com velocidade v na direção x, um em relação ao outro, implica na seguinte transformação [1, p. 45]

$$\begin{aligned}
ct' &= \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right), \\
x' &= \gamma\left(-\frac{v}{c}ct + x\right), \\
y' &= y, \quad z' = z,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ é o fator de Lorentz. Uma troca de variáveis define a rapidez $\phi = \operatorname{arctanh}(v/c)$, a partir da qual a transformação pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
ct' &= \cosh\phi\, ct - \sinh\phi\, x, \\
x' &= -\sinh\phi\, ct + \cosh\phi\, x, \\
y' &= y, \quad z' = z,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

ou, com $x^\mu = (ct, x, y, z)$, podemos escrever $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, onde

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

é a matriz da TL correspondente a um *boost* na direção x – i.e. uma troca de um referencial inercial a outro conectados através do parâmetro ϕ. Os boosts podem se dar também nas direções y e z. O conjunto de todas as TL possíveis são combinações de boosts nas três direções e as rotações no espaço tridimensional (que podem ser definidas por três parâmetros angulares).

Sob a perspectiva do espaço de Minkowski como um espaço vetorial, as TL correspondem a trocas de coordenadas que preservam ângulos e mantêm intervalos invariantes. Portanto podemos escrever, em termos das componentes,

$$\Delta s^2 = x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu, \tag{2.15}$$

onde as componentes com $'$ indicam componentes após a transformação de Lorentz. Sabemos implementar a TL nas componentes do vetor x^μ através de uma matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ (como a da eq. (2.14)), mas não sabemos como transformar as componentes do vetor dual x_μ. Se definirmos uma matriz de transformação $(\Lambda^*)_\mu^{\ \nu}$ para esse caso, temos

$$x'_\mu x'^\mu = (\Lambda^*)_\mu^{\ \alpha} \Lambda^\mu{}_\beta x_\alpha x^\beta = x_\mu x^\mu \tag{2.16}$$

e daí tiramos que

$$(\Lambda^*)_\mu^{\ \alpha} \Lambda^\mu{}_\beta = \delta^\alpha_\beta \tag{2.17}$$

e, por fim, vemos que

$$(\Lambda^*)_\mu^{\ \nu} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu . \tag{2.18}$$

Ou seja, as componentes dos vetores duais transformam-se como a *inversa* da TL. Para simplificar a notação, chamamos a matriz $(\Lambda^*)_\mu^{\ \nu}$ apenas de $\Lambda_\mu^{\ \nu}$, tomando cuidado com a ordem dos índices para que não seja confundida pela matriz $\Lambda^\nu{}_\mu$.

Em resumo, as TL são trocas puntuais de coordenadas do espaço-tempo cujas componentes são transformadas de acordo com

$$\begin{aligned} x^\mu &\to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \\ x_\mu &\to \Lambda_\mu^{\ \nu} x_\nu, \end{aligned} \tag{2.19}$$

e que satisfazem

$$\Lambda_\mu^{\ \alpha} \Lambda^\mu{}_\beta = \delta^\alpha_\beta . \tag{2.20}$$

As componentes x^μ de vetores são denominadas *contravariantes*, e as componentes x_μ de vetores duais são denominadas *covariantes*, devido às suas leis de transformação. Quaisquer quantidades cujas componentes v^μ ou v_μ que sigam as mesmas leis de transformação que as coordenadas do espaço-tempo são chamadas de *vetores*.

Além disso, quaisquer quantidades com componentes $T^{\mu_1 \cdots \mu_M}{}_{\nu_1 \ldots \nu_N}$ cuja lei de transformação para cada índice seja a mesma que a lei de transformação de componentes de vetores, são chamadas de *tensores*. Por exemplo, se T^μ_ν, $\mu, \nu = 0, \ldots, 3$, são componentes de um tensor em um referencial, ao aplicar uma transformação de Lorentz as componentes desse tensor ficam

$$T'^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda_\beta^{\ \nu} T^\mu{}_\nu . \tag{2.21}$$

Assim, a transformação de um tensor com n índices envolve a multiplicação por n matrizes de Lorentz, dos tipos $\Lambda^\mu{}_\nu$ ou $\Lambda_\mu^{\ \nu}$, a depender se o índice que a matriz transforma é covariante ou contravariante. Um tensor de n índices é dito de ordem n.

Dado um tensor $T^{\mu_1 \cdots \mu_N}$, podemos definir sua parte simetrizada, impondo simetria de permutação dos índices:

$$T^{(\mu_1 \ldots \mu_N)} = \sum_{p \in P_N} T^{p(\mu_1) \ldots p(\mu_N)}, \tag{2.22}$$

onde P_N é o grupo de permutações de N elementos. A antissimetrização do tensor $T^{\mu_1 \cdots \mu_N}$ é definida como

$$T^{[\mu_1 \ldots \mu_N]} = \sum_{p \in P_N} \sigma(p) T^{p(\mu_1) \ldots p(\mu_N)}, \tag{2.23}$$

onde $\sigma(p)$ é o sinal da permutação p. As mesmas definições podem ser aplicadas para índices covariantes, e podem ser aplicadas para apenas parte dos índices de um tensor.

Por serem trocas de coordenadas, as TL mantém os vetores invariantes, i.e.

$$x = x^\mu e_\mu = x'^\mu e'_\mu . \tag{2.24}$$

Daí podemos tirar que a lei de transformação da base $\{e_\mu\}$ é a mesma das componentes covariantes:

$$e_\mu \to \Lambda_\mu{}^\nu e_\nu. \tag{2.25}$$

Similarmente, os vetores duais mantêm-se invariantes

$$y = y_\mu \omega^\mu = y'_\mu \omega'^\mu, \tag{2.26}$$

portanto a lei de transformação da base $\{\omega^\mu\}$ é igual à das componentes contravariantes, ou seja,

$$\omega^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu \omega^\nu. \tag{2.27}$$

Como o intervalo Δs^2 é invariante frente a transformações de Lorentz, o tempo próprio $\Delta\tau$ definido na eq. (2.9) também é um invariante – i.e. uma quantidade escalar.

O movimento de um corpo é descrito como uma curva no espaço-tempo, chamada *linha de mundo*. Parametrizando essa trajetória pelo tempo próprio τ do corpo, podemos definir sua 4-velocidade (quadri-velocidade) como

$$u^\mu(\tau) = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}(\tau). \tag{2.28}$$

Para relacioná-la com a velocidade em 3 dimensões, notamos que

$$c^2\mathrm{d}\tau^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = c^2\mathrm{d}t^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(v^i\right)^2\mathrm{d}t^2 = \frac{c^2}{\gamma^2}\mathrm{d}t^2, \tag{2.29}$$

onde v^i são as componentes da velocidade em 3 dimensões. Portanto $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau = \gamma$. Aí, utilizando a regra da cadeia, temos

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma\left(c, \vec{v}\right). \tag{2.30}$$

A norma da velocidade é

$$u_\mu u^\mu = c^2. \tag{2.31}$$

Podemos definir o momento em 4-dimensões de um corpo de massa m como [1, p. 109]

$$p^\mu = m u^\mu = \gamma\left(mc, m\vec{v}\right). \tag{2.32}$$

Da Relatividade Especial, definimos o momento relativístico em 3 dimensões como $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ e a energia relativística como $E = \gamma mc^2$, de forma que o 4-momento fica

$$p^\mu = \left(E/c, \vec{p}\right). \tag{2.33}$$

Por sua definição na eq. (2.32), sua norma é

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2. \tag{2.34}$$

2.3 Eletromagnetismo

A teoria eletromagnética clássica tratava-se de explicar as forças elétricas e magnéticas sofridas por partículas. A explicação era feita baseando-se na atribuição de uma carga elétrica q para partículas (ou uma densidade de cargas $\rho(\vec{r})$ para uma distribuição de matéria) e na existência de um campo elétrico $\vec{E}(\vec{r},t)$ e um campo magnético $\vec{B}(\vec{r},t)$ responsáveis por mediar as forças do eletromagnetismo.

Dada a configuração dos campos, o movimento de uma partícula de massa m e carga q é mediado pelos campos através da força de Lorentz:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right), \tag{2.35}$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula. E dadas uma distribuição de carga elétrica ρ e uma densidade de corrente elétrica $\vec{j} = \rho\vec{v}$, as equações de Maxwell são responsáveis por descrever a dinâmica dos campos elétrico e magnético[3]:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} =& \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j},\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} =& 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

onde $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$. É interessante notar que as equações da linha de cima apresentam fontes e as da linha de baixo são apenas identidades dos campos. Devido a essas identidades, podemos defini-los em termos de quantidades chamadas potenciais, como

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}, \tag{2.37}$$

onde ϕ é o potencial escalar e $\vec{A}$ é o potencial vetorial. Com essas definições, as equações de Maxwell da linha de baixo são automaticamente satisfeitas.

A formulação do eletromagnetismo na Relatividade Especial se dá de forma bastante natural. Para que as equações de Maxwell mantenham-se da mesma forma frente a uma transformação de Lorentz, é necessário que os campos elétrico e magnético transformem-se como se fossem componentes de um tensor. Esse tensor é chamado de tensor de campo eletromagnético e é definido como [2, p. 74]

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Essa estrutura fica mais evidente com a definição do 4-potencial elétrico em termos dos potenciais escalar e vetorial. A definição

$$A^\mu = (\phi/c, \vec{A}), \tag{2.39}$$

e a partir do 4-potencial pode-se definir o tensor de campo eletromagnético como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{2.40}$$

[3] As equações estão escritas em unidades do Sistema Internacional.

onde definimos $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$.

Dada uma distribuição de matéria carregada eletricamente, podemos descrever seu movimento através de um campo de 4-velocidades $u^\mu(x)$. Assim, dado um ponto $x^\mu = (ct, \vec{x})$ da distribuição, existe um referencial onde as cargas que compõem a distribuição estão em repouso em $\vec{x}$, no instante t, i.e. a 4-velocidade que descreve a distribuição de carga nesse ponto do espaço-tempo é $u^\mu(x) = (c, 0)$. Nesse referencial a densidade de carga elétrica $\rho_0(x)$ é chamada de densidade própria, e é uma quantidade escalar (assim como tempo próprio e massa de repouso). O vetor de densidade de corrente elétrica em 4 dimensões, ou 4-corrente, é então definido como $j^\mu = \rho_0 u^\mu$. No referencial de repouso, suas componentes são $j^\mu = (\rho_0 c, 0)$, mas para um referencial arbitrário, define-se a densidade de carga relativistica como $\rho = \gamma\rho_0$ e a densidade de corrente relativística como $\vec{j} = \gamma\rho_0\vec{v}$. Conhecendo as componentes da 4-velocidade pela eq. (2.30), as componentes da 4-corrente ficam

$$j^\mu = (\rho c, \vec{j}). \tag{2.41}$$

Essa quantidade é a nova fonte do campo eletromagnético, agora em uma formulação em 4 dimensões.

As equações de Maxwell com fontes podem ser reescritas em termos do tensor de campo e da 4-corrente. As duas equações – uma escalar e outra vetorial – se unem em uma só escalar de 4 componentes vetoriais. Isso mostra como a formulação do eletromagnetismo em 4 dimensões simplifica a teoria. A equação resultante é

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\beta. \tag{2.42}$$

Apesar das equações de Maxwell homogêneas já serem satisfeitas pela definição do tensor de campo em termos do 4-potencial (eq. (2.40)), podemos reescrevê-las em termos do tensor de campo eletromagnético. A equação equivalente é

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \tag{2.43}$$

ou, levando em conta que $2F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu}$ (pois o tensor de campo eletromagnético é antissimétrico), podemos escrever em termos da antissimetrização dos índices

$$\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0. \tag{2.44}$$

Essa simetria do tensor de campo é chamada de identidade de Bianchi.

A força de Lorentz (eq. (2.35)) também pode ser reescrita em termos de quantidades 4-dimensionais. No entanto, ao invés de utilizarmos a velocidade em três dimensões, vamos escrever a equação em termos da 4-velocidade. Além disso, a derivada temporal deve ser em relação ao tempo próprio – uma quantidade escalar –, para conservar o caráter vetorial da equação. Também por isso, admitimos que a equação tenha uma componente (a componente temporal) ao fazermos as associações $\vec{v} \to u^\mu$, $t \to \tau$ e escrevermos os campos elétrico e magnético em termos do tensor de campo. A massa e a carga mantêm-se como estão. O resultado é

$$m\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = qF_{\alpha\beta}u^\beta. \tag{2.45}$$

As componentes espaciais dessa equação recaem em uma igualdade com a eq. (2.35) apenas no limite de baixas velocidades do corpo que sofre a força, pois $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau = \gamma\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

Se quisermos escrever a força de Lorentz sobre uma distribuição contínua de matéria carregada eletricamente, devemos tratar a 4-velocidade como um campo vetorial, e devemos substituir as quantidades m e q por densidades de massa e de carga. Definindo a

4-corrente como na eq. (2.41), podemos fazer a substituição $qu^\mu \to j^\mu$ (passando de carga para densidade de carga), e da mesma forma, podemos transformar $mu^\mu \to \mathcal{P}^\mu$, onde $\mathcal{P}^\mu$ é um vetor de densidade de 4-momento. Assim, a eq. (2.45) pode ser reescrita como

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = F_{\alpha\beta} j^\beta, \tag{2.46}$$

onde agora a equação representa a densidade de força sobre a distribuição de matéria.

2.3.1 Tensor de energia e momento

Levando em conta que a 4-corrente serve como fonte de campo eletromagnético, podemos reescrever a densidade força de Lorentz apenas em termos do tensor de campo eletromagnético. O objetivo é ser capaz de descrever a densidade de força como a derivada de uma quantidade que dependa apenas dos campos – i.e. em termos de um potencial. Assim, usando a eq. (2.42), temos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_\alpha}{\mathrm{d}\tau} =& \frac{1}{\mu_0} F_{\alpha\beta} \partial_\lambda F^{\lambda\beta} \\ =& \frac{1}{\mu_0} \left[\partial_\lambda \left(F_{\alpha\beta} F^{\lambda\beta}\right) - \partial_\lambda F_{\alpha\beta} F^{\lambda\beta}\right],\end{aligned} \tag{2.47}$$

onde usamos a regra do produto para obter a segunda linha. O último termo pode ser reescrito explorando a antissimetria do tensor de campo

$$\begin{aligned}\partial_\lambda F_{\alpha\beta} F^{\lambda\beta} =& \frac{1}{2} \left(\partial_\lambda F_{\alpha\beta} - \partial_\beta F_{\alpha\lambda}\right) F^{\lambda\beta} \\ =& \frac{1}{2} \left(\partial_\lambda F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\lambda\alpha}\right) F^{\lambda\beta}.\end{aligned} \tag{2.48}$$

Utilizando a identidade de Bianchi para o tensor de campo (eq. (2.43)), podemos substituir as duas derivadas por uma só, obtendo

$$\partial_\lambda F_{\alpha\beta} F^{\lambda\beta} = -\frac{1}{2} \partial_\alpha F_{\beta\lambda} F^{\lambda\beta}. \tag{2.49}$$

Agora vemos que podemos trocar as posições dos índices (entre covariante e contravariante) na contração:

$$\begin{aligned}\partial_\alpha F_{\beta\lambda} F^{\lambda\beta} =& \eta^{\rho\lambda} \eta^{\gamma\beta} \partial_\alpha F_{\beta\lambda} F_{\rho\gamma} \\ =& \partial_\alpha F^{\gamma\rho} F_{\rho\gamma},\end{aligned} \tag{2.50}$$

então, se dividirmos a eq. (2.49) na soma de dois termos iguais e trocarmos as posições dos índices, temos

$$\begin{aligned}\partial_\lambda F_{\alpha\beta} F^{\lambda\beta} =& -\frac{1}{4} \partial_\alpha F_{\beta\lambda} F^{\lambda\beta} - \frac{1}{4} \partial_\alpha F^{\beta\lambda} F_{\lambda\beta} \\ =& -\frac{1}{4} \partial_\alpha \left(F_{\beta\lambda} F^{\lambda\beta}\right) = \frac{1}{4} \partial_\alpha \left(F_{\beta\lambda} F^{\beta\lambda}\right).\end{aligned} \tag{2.51}$$

Substituindo esse resultado de volta na eq. (2.47), temos

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\lambda \left[F_{\alpha\beta} F^{\beta\lambda} + \frac{1}{4} \delta_\alpha^\lambda F_{\beta\rho} F^{\beta\rho}\right], \tag{2.52}$$

ou ainda, utilizando a métrica para obter as componentes contravariantes da equação,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = -\partial_{\beta} T^{\alpha\beta}, \tag{2.53}$$

onde

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\alpha}_{\ \lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) \tag{2.54}$$

é o tensor de energia e momento do campo eletromagnético.

As componentes do tensor de energia e momento podem ser escritas em termos das quantidades 3-dimensionais da formulação clássica da eletrodinâmica, a partir das quais pode-se entender o significado físico desse tensor. A componente puramente temporal é $T^{00} = u$, onde u é a densidade de energia do campo eletromagnética, dada por

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2, \tag{2.55}$$

com $E^2 = \sum_{i=1}^{3} E_i^2$ e $B^2 = \sum_{i=1}^{3} B_i^2$. Para $i = 1, 2, 3$, temos também $T^{0i} = S_i/c$, onde

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \tag{2.56}$$

é o vetor de Poynting, que é a densidade de momento carregada pelo campo eletromagnético. Por fim, as componentes espaciais do tensor de energia e momento equivalem ao tensor de stress do campo eletromagnético, $T^{ij} = \sigma^{ij}$, onde

$$\sigma^{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - u\delta_{ij}. \tag{2.57}$$

Olhando para a eq. (2.53), podemos obter outra informação sobre $T^{\alpha\beta}$. Abrindo a derivada em relação ao tempo próprio em termos de derivadas no espaço-tempo, utilizando a regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0. \tag{2.58}$$

Dessa forma, a equação manifesta um balanço de energia e momento entre a distribuição de matéria que sofre a força eletromagnética, representada pelo primeiro termo, e o próprio campo eletromagnético, representado pelo segundo termo. Podemos então fazer uma outra interpretação do tensor de energia e momento: a componente $T^{\mu\nu}$ do tensor indica o fluxo da componente $\mathcal{P}^{\mu}$ da densidade de 4-momento na direção x^{ν} do espaço-tempo.

Capítulo 3

Relatividade Geral:
A gravitação geométrica

3.1 Princípio da Equivalência

A partir do espaço-tempo construído na RE, visto de referenciais inerciais, Albert Einstein visualizou uma forma de descrever referenciais acelerados, com uma generalização que acabou também por descrever naturalmente a gravitação em termos geométricos.

Einstein notou que um corpo em queda livre em um campo gravitacional não sente em si uma força, apesar de estar em movimento acelerado em relação a outro referencial que não esteja em queda livre. Se no referencial desse corpo em queda livre não há forças, para todos os efeitos esse referencial é inercial aos olhos da RE. Podemos tratá-lo como viemos tratando até então. De nosso interesse, temos que a métrica do espaço-tempo nesse referencial é a métrica de Minkowski.

É importante notar, no entanto, que esse referencial é inercial apenas localmente. Por exemplo, tome dois objetos separados a uma certa distância, em queda livre devido a um mesmo campo gravitacional. No referencial de um deles, o outro objeto desloca-se na direção do primeiro. Isso evidencia um efeito gravitacional sobre o movimento do segundo objeto, visto do referencial do primeiro.

Assim, se um corpo está em queda livre, apenas na sua própria posição é que podemos afirmar que a métrica do espaço-tempo é a métrica de Minkowski. Quanto a posições mais distantes, devemos permitir que possuam métricas distintas. Assim, paramos de tratar o espaço-tempo como algo uniforme, associando a cada elemento x^μ uma métrica $g_{\alpha\beta}\left(x^\mu\right)$ diferente. Para garantir que o espaço-tempo tenha métrica de Minkowski localmente, supondo que o ponto onde associamos à queda livre é y^μ, tomamos

$$g_{\alpha\beta}(y^\mu) = \eta_{\alpha\beta}, \tag{3.1}$$

e ainda impomos que

$$\partial_\lambda g_{\alpha\beta}(y^\mu) = 0, \tag{3.2}$$

para que, numa região suficientemente pequena, o espaço-tempo pareça plano.

Essa generalização do espaço-tempo permite que ele possua uma curvatura, marcada pela variação da métrica [1]. A permissão da variação da métrica implica que o tensor métrico seja tratado como um campo tensorial sobre o espaço-tempo. A nova definição do produto interno fica

$$\mathrm{d}s^2(x) = g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \tag{3.3}$$

a partir da qual podemos tomar a liberdade de impor que $g_{\mu\nu}$ seja simétrico frente à troca entre índices.

O tempo próprio τ pode ser definido no espaço-tempo curvo de maneira análoga à sua definição no espaço-tempo de Minkowski (eq. (2.10)), como

$$c^2\mathrm{d}\tau^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu. \tag{3.4}$$

Tomamos como referencial Devido à existência de um referencial onde, localmente, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, dizemos que $g_{\mu\nu}$ possui assinatura $(+,-,-,-)$.

Um corpo em queda livre, portanto, possui a seguinte equação de movimento em seu referencial de repouso:

$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0, \tag{3.5}$$

onde $u^\mu = \mathrm{d}y^\mu/\mathrm{d}\tau$ é sua velocidade, τ é o tempo próprio do corpo e y^μ é sua posição nesse referencial. Podemos a partir daí fazer o exercício de reescrever essa equação de um outro referencial qualquer, como por exemplo aquele do qual o corpo parece estar em queda livre. Para isso, vamos realizar uma transformação com as mesmas propriedades das TL (eqs. (2.19) e (2.20)), mas com a peculiaridade de ser função da posição. Ou seja, para cada posição x^μ vamos implementar uma transformação de Lorentz diferente ${p^\alpha}_\beta(x^\mu)$, variando de forma contínua em cada ponto do espaço-tempo. As equações (2.19) e (2.20) ficam, nesse caso,

$$\begin{aligned} x^\mu &\to {p^\mu}_\nu(x^\lambda)x^\nu \\ x_\mu &\to {p_\mu}^\nu(x^\lambda)x_\nu \end{aligned} \tag{3.6}$$

e

$$ {p_\mu}^\alpha {p^\mu}_\beta = \delta^\alpha_\beta. \tag{3.7}$$

A transformação de um tensor de ordem 2 de componentes $T^\mu_{\ \nu}$ agora é

$$T^\mu_{\ \nu} \to T'^\alpha_{\ \beta} = {p^\alpha}_\mu {p_\beta}^\nu T^\mu_{\ \nu} \tag{3.8}$$

Assim, vamos relacionar a posição do corpo em seu referencial de repouso com sua posição em outro referencial na forma $y^\mu = {p^\mu}_\nu(x)x^\nu$, ou ainda

$$y^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}(x)\, x^\nu, \tag{3.9}$$

onde reconhecemos que ${p^\mu}_\nu = \partial y^\mu/\partial x^\nu$. Notando que a velocidade u^μ transforma-se como as coordenadas y^μ, também temos que $u^\mu = {p^\mu}_\nu v^\nu$, onde v^ν são as coordenadas da velocidade no novo referencial. Vamos calcular a forma que a eq. (3.5) assume em termos de x^μ e v^μ:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}v^\nu\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}v^\nu + \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}v^\nu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{3.10}$$

e abrindo a derivada da transformação em relação a τ com uma regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau}v^\nu + \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}v^\nu}{\mathrm{d}\tau} \\ &= \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}v^\lambda v^\nu + \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}v^\nu}{\mathrm{d}\tau}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora que já reescrevemos a eq. (3.5) em termos de variáveis de um referencial arbitrário, ainda vamos transformar essa equação do referencial de queda livre para o referencial em questão. A relação inversa é, lembrando da eq. (2.20), $x^\nu = p_\mu{}^\nu y^\mu$. Dessa relação podemos reconhecer que $p_\mu{}^\nu = \partial x^\nu / \partial y^\mu$, e assim podemos aplicar a transformação sobre (3.11):

$$0 = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} v^\lambda v^\nu + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\mathrm{d}v^\nu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{3.12}$$

e finalmente obtemos

$$0 = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} v^\lambda v^\nu + \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}\tau}. \tag{3.13}$$

Vemos que um novo termo surge na equação de movimento do corpo, proporcional ao quadrado de sua velocidade e a uma função da transformação realizada. O termo que depende da transformação é chamado de *conexão*, e é simbolizado por

$$\Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}. \tag{3.14}$$

Nesses termos, a equação de movimento fica

$$\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} v^\lambda v^\nu = 0. \tag{3.15}$$

Essa equação é chamada de *geodésica*. Esse resultado está de acordo com a motivação inicial de incorporar a gravitação através de trocas de coordenadas, pois no novo referencial vemos surgir uma força descrita pela conexão $\Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}$, definida na eq. (3.14). Resta saber se sabemos ligar esse termo com a gravitação conhecida pré-relativisticamente.

3.1.1 A conexão em termos da métrica

A conexão pode ser expressa em termos da métrica do espaço-tempo. Para obter essa relação, vamos analisar como a conexão transforma-se frente a troca de referenciais. Vamos propor uma transformação da forma

$$x^\mu \to x^{\mu'} = p^{\mu'}{}_\mu x^\mu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} x^\mu, \tag{3.16}$$

com a inversa

$$x^\mu = p_{\mu'}{}^\mu x^{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} x^{\mu'}, \tag{3.17}$$

onde passamos a identificar as componentes transformadas com linhas nos índices. Vamos avaliar o efeito dessa transformação sobre as componentes da conexão. Pela definição (3.14) da conexão, sua lei de transformação é

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'} &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^{\mu'} x^{\nu'}} = p^{\lambda'}{}_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} p_{\mu'}{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(p_{\nu'}{}^\nu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\nu} \right) \\
&= p^{\lambda'}{}_\lambda p_{\mu'}{}^\mu p_{\nu'}{}^\nu \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + p^{\lambda'}{}_\lambda p_{\mu'}{}^\mu \frac{\partial p_{\nu'}{}^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\nu} \\
&= p^{\lambda'}{}_\lambda p_{\mu'}{}^\mu p_{\nu'}{}^\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + p^{\lambda'}{}_\lambda p_{\mu'}{}^\mu \partial_\mu p_{\nu'}{}^\nu \delta^\lambda_\nu,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

onde usamos que $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ na última linha. E reconhecemos a componente não transformada da conexão. Podemos reescrever o último termo, que envolve uma derivada de $p_{\nu'}^{\ \nu}$, em termos de uma derivada segunda de x^ν. A componente transformada da conexão fica

$$\Gamma^{\lambda'}_{\ \mu'\nu'} = p^{\lambda'}_{\ \lambda} p_{\mu'}^{\ \mu} p_{\nu'}^{\ \nu} \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} + p^{\lambda'}_{\ \lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}}, \tag{3.19}$$

onde também já simplificamos a expressão contraindo o índice ν da delta δ^λ_ν.

Vamos definir a conexão com todos os índices covariantes

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} \equiv g_{\lambda\rho} \Gamma^{\rho}_{\ \mu\nu}, \tag{3.20}$$

e obter sua lei de transformação. Para isso, precisamos saber como a metrica se transforma. Podemos deduzir a lei de transformação da métrica partir da invariância do produto interno:

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu'\nu'} p^{\mu'}_{\ \mu} p^{\nu'}_{\ \nu} x^\mu x^\nu, \tag{3.21}$$

de onde temos que

$$g_{\mu'\nu'} = p_{\mu'}^{\ \mu} p_{\nu'}^{\ \nu} g_{\mu\nu}. \tag{3.22}$$

Analogamente, da expressão

$$g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu = g^{\mu'\nu'} p_{\mu'}^{\ \mu} p_{\nu'}^{\ \nu} x_\mu x_\nu, \tag{3.23}$$

obtemos a lei de transformação para a métrica com índices contravariantes:

$$g^{\mu'\nu'} = p^{\mu'}_{\ \mu} p^{\nu'}_{\ \nu} g^{\mu\nu}. \tag{3.24}$$

Assim, a transformação de $\Gamma_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\ \mu\nu}$ fica

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\lambda'\mu'\nu'} &= g_{\lambda'\rho'} \Gamma^{\rho'}_{\ \mu'\nu'} \\
&= p_{\lambda'}^{\ \lambda} p_{\rho'}^{\ \alpha} g_{\lambda\alpha} \left(p^{\rho'}_{\ \rho} p_{\mu'}^{\ \mu} p_{\nu'}^{\ \nu} \Gamma^{\rho}_{\ \mu\nu} + p^{\rho'}_{\ \rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \right) \\
&= p_{\lambda'}^{\ \lambda} p_{\mu'}^{\ \mu} p_{\nu'}^{\ \nu} \Gamma_{\lambda\mu\nu} + p_{\lambda'}^{\ \lambda} g_{\lambda\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde usamos que $p_{\rho'}^{\ \rho} p^{\rho'}_{\ \alpha} = \delta^\rho_\alpha$ (eq. (3.7)). Como resultado, vemos que a lei de transformação não exatamente a de um tensor, devido ao último termo[1].

Vamos utilizar essa propriedade para relacionar a conexão com a métrica. Para isso, vamos obter a lei de transformação da derivada da métrica:

$$\begin{aligned}
\partial_{\lambda'} g_{\mu'\nu'} &= p_{\lambda'}^{\ \lambda} \partial_\lambda \left(p_{\mu'}^{\ \mu} p_{\nu'}^{\ \nu} g_{\mu\nu} \right) \\
&= p_{\lambda'}^{\ \lambda} p_{\mu'}^{\ \mu} p_{\nu'}^{\ \nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu} + p_{\lambda'}^{\ \lambda} p_{\mu'}^{\ \mu} \partial_\lambda p_{\nu'}^{\ \nu} g_{\mu\nu} + p_{\lambda'}^{\ \lambda} p_{\nu'}^{\ \nu} \partial_\lambda p_{\mu'}^{\ \mu} g_{\mu\nu} \\
&= p_{\lambda'}^{\ \lambda} p_{\mu'}^{\ \mu} p_{\nu'}^{\ \nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \left(p_{\mu'}^{\ \mu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\nu'}} + p_{\nu'}^{\ \nu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\mu'}} \right).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Essa transformação assemelha-se à da conexão, apresentando termos de derivada da transformação. De fato, podemos encontrar uma quantidade cuja transformação é idêntica à

[1] A lei de transformação de um tensor envolve um termo p de transformação para cada índice do tensor, como exemplificado na eq. (3.8). Portanto, $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ seria um tensor se sua transformação envolvesse apenas o primeiro dos termos obtidos na eq. (3.25).

da conexão. Essa quantidade, denominada *símbolo de Christoffel*, é definida como [1, p. 206]

$$\{_{\lambda\mu\nu}\} = \frac{1}{2}\left(-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}\right). \tag{3.27}$$

Para obter a lei de transformação do símbolo de Christoffel, podemos somar e subtrair a lei de transformação da derivada da métrica (eq. (3.26)) permutando adequadamente os índices. Temos

$$\begin{aligned}
2\{_{\lambda'\mu'\nu'}\} =& -\partial_{\lambda'} g_{\mu'\nu'} + \partial_{\mu'} g_{\nu'\lambda'} + \partial_{\nu'} g_{\lambda'\mu'} \\
=& -p_{\lambda'}^{\lambda} p_{\mu'}^{\mu} p_{\nu'}^{\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\left(p_{\mu'}^{\mu}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\nu'}} + p_{\nu'}^{\nu}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\mu'}}\right) \\
& + p_{\lambda'}^{\lambda} p_{\mu'}^{\mu} p_{\nu'}^{\nu} \partial_\mu g_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\left(p_{\nu}^{\nu'}\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}} + p_{\lambda'}^{\lambda}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}\right) \\
& + p_{\lambda'}^{\lambda} p_{\mu'}^{\mu} p_{\nu'}^{\nu} \partial_\nu g_{\lambda\mu} + g_{\lambda\mu}\left(p_{\lambda'}^{\lambda}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\nu'}\partial x^{\mu'}} + p_{\mu'}^{\mu}\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\nu'}\partial x^{\lambda'}}\right) \\
=& p_{\lambda'}^{\lambda} p_{\mu'}^{\mu} p_{\nu'}^{\nu} 2\{_{\lambda\nu\mu}\} + p_{\mu'}^{\mu}\left(-g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\nu'}} + g_{\mu\lambda}\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\nu'}}\right) \\
& + p_{\nu'}^{\nu}\left(-g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\mu'}} + g_{\lambda\nu}\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\nu'}}\right) \\
& + p_{\lambda'}^{\lambda}\left(g_{\nu\lambda}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} + g_{\mu\lambda}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}\right),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde juntamos os termos que compõem $\{_{\lambda\mu\nu}\}$ e agrupamos os termos restantes de forma a organizar a expressão. Podemos reescrever a expressão dentro dos últimos parênteses trocando o índice mudo μ do último termo para ν, obtendo o seguinte:

$$\begin{aligned}
g_{\nu\lambda}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} + g_{\mu\lambda}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} =& g_{\rho\lambda}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} + g_{\rho\lambda}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} \\
=& 2g_{\rho\lambda}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Fazendo isso com as expressões dentro dos outros parênteses, vemos que essas se anulam, devido à diferença de sinal entre o par de termos que compõe cada expressão. Assim, podemos escrever a lei de transformação do símbolo de Christoffel como

$$\{_{\lambda'\mu'\nu'}\} = p_{\lambda'}^{\lambda} p_{\mu'}^{\mu} p_{\nu'}^{\nu}\{_{\lambda\mu\nu}\} + p_{\lambda'}^{\lambda} g_{\lambda\rho}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}. \tag{3.30}$$

Comparando essa expressão com a eq. (3.25), vemos que a conexão e o símbolo de Christoffel possuem exatamente a mesma lei de transformação. Para ambas quantidades, conexão e símbolo de Christoffel, suas leis de transformação trazem um termo envolvendo as quantidades não transformadas, e um segundo termo idêntico para as duas. Nem a conexão, nem o símbolo de Christoffel, transformam-se como tensores, devido a presença desse último termo. No entanto, podemos calcular a lei de transformação da diferença $\Gamma_{\lambda\mu\nu} - \{_{\lambda\mu\nu}\}$, subtraindo uma lei de tranformação da outra, e obtemos

$$\Gamma_{\lambda'\mu'\nu'} - \{_{\lambda'\mu'\nu'}\} = p_{\lambda'}^{\lambda} p_{\mu'}^{\mu} p_{\nu'}^{\nu}\left(\Gamma_{\lambda\mu\nu} - \{_{\lambda\mu\nu}\}\right), \tag{3.31}$$

onde vemos o último termo das transformações originais ser cancelado. Assim, sobra apenas a parte da transformação que tem exatamente a forma da transformação de um tensor. Concluímos, portanto, que a diferença entre a conexão e o símbolo de Christoffel é de fato um tensor.

Esse resultado traz luz à tentativa de encontrar uma relação entre as duas quantidades. No referencial de queda livre, cuja existência é garantida pelo Princípio da Equivalência, a descrição do movimento de um corpo é dada pela equação (3.5). Comparando com a equação de movimento em um referencial arbitrário, que é a própria geodésica (eq. (3.15)), concluímos que, no referencial de queda livre, as componentes da conexão são nulas. Além disso, como supomos que, localmente, a métrica do referencial de queda livre é a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, e sua variação é nula (eq. (3.2)), temos que o símbolo de Christoffel, por sua definição (3.27), é nulo. Assim, no referencial de queda livre, a diferença entre a conexão e o símbolo de Christoffel é nula: $\Gamma^{\mathrm{QL}}_{\lambda\mu\nu} - \{_{\lambda\mu\nu}\}^{\mathrm{QL}} = 0$. Mas, como sabemos que essa diferença possui a lei de transformação de um tensor, dada pela eq. (3.31), que envolve apenas um produto da diferença não transformada (que no QL é nula) pelos coeficientes p da transformação, temos por garantia que em qualquer outro referencial a diferença continua sendo nula. Basta escrever qualquer referencial a partir de uma transformação do referencial de queda livre. Assim, sabemos que, em qualquer referencial, a conexão e o símbolo de Christoffel possuem as mesmas componentes:

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \{_{\lambda\mu\nu}\}\,. \tag{3.32}$$

Dessa forma, temos uma expressão para a conexão em termos da métrica do espaço-tempo:

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}\right). \tag{3.33}$$

Para obter a conexão com o primeiro índice contravariante, que é forma como obtemos a conexão na eq. (3.14), fazemos $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho}\Gamma_{\rho\mu\nu}$. Com isso também obtemos uma expressão para $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ em termos da métrica:

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(-\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu}\right). \tag{3.34}$$

Vemos que o Princípio da Equivalência levou-nos a uma equivalência entre uma quantidade associada a troca de coordenadas (a conexão) e uma quantidade associada à variação da métrica (o símbolo de Christoffel). Por esse resultado, é comum referir-se à conexão como símbolo de Christoffel, e vice-versa.

3.1.2 A métrica como potencial gravitacional

Para que a equação da geodésica (3.15) seja de fato uma equação de movimento contendo efeitos gravitacionais, precisamos garantir que ela esteja de acordo com a gravitação de Newton.

Para um corpo de massa inercial m_I, massa gravitacional m_G e velocidade $\vec{v}$ imersa em um campo gravitacional $\phi(\vec{x})$, a gravitação Newtoniana prevê a seguinte equação de movimento

$$m_I \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m_G \vec{\nabla}\phi(\vec{x})\,. \tag{3.35}$$

A primeira coisa que vamos assumir é o Princípio da Equivalência posto de outra forma: as massas inercial e gravitacional são fundamentalmente idênticas. Dessa forma, a equação de movimento perde qualquer informação dinâmica intrínseca do corpo em movimento.

Vamos agora propôr uma forma para a métrica do espaço-tempo, buscando expressar sua forma no limite não-relativístico. Primeiro vamos supor que ela seja um desvio pequeno $h_{\mu\nu}$ em relação à métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{3.36}$$

Para que $g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$, é preciso que, em primeira ordem em $h_{\mu\nu}$, tenhamos

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \tag{3.37}$$

Como buscamos um limite não-relativístico, buscamos uma expressão no regime em que a velocidade da luz c é um parâmetro muito grande em comparação com os outros. Como a variável temporal $x^0 = ct$ relaciona tempo ao espaço através dessa constante, vamos também supor que a métrica seja estática, i.e. $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$. Além disso, vamos buscar obter a equação de movimento de uma partícula em repouso, com 4-velocidade dada por $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$. Não esperamos que o resultado seja muito diferente para partículas em movimento com velocidades não relativísticas, i.e. muito menores do que c. Com a partícula em repouso, seu tempo próprio e a coordenada temporal coincidem: $t = \tau$.

Com essas aproximações, as componentes espaciais (índices $i = 1, 2, 3$) da equação da geodésica reduzem-se a

$$\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i{}_{00}c^2 = 0. \tag{3.38}$$

Calculando as componentes da conexão, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma^i{}_{00} &= \frac{1}{2}g^{i\rho}\left(-\partial_\rho g_{00} + \partial_0 g_{0\rho} + \partial_0 g_{\rho 0}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\eta^{i\rho} - h^{i\rho}\right)\partial_\rho\left(\eta_{00} + h_{00}\right) \\
&= \frac{1}{2}\delta^{i\rho}\partial_\rho h_{00} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Inserindo na equação da geodésica, temos

$$\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}c^2\partial_i h_{00} = 0. \tag{3.40}$$

Comparando com a eq. (3.35), concluímos que a métrica e o potencial gravitacional estão relacionados

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}. \tag{3.41}$$

Isso mostra que podemos descrever a gravitação como efeito de curvatura do espaço-tempo se associarmos a métrica do espaço ao potencial gravitacional. Eventualmente precisamos obter uma equação que governe a evolução do campo gravitacional. A equação obtida será a equação de Einstein, que governa a evolução da métrica do espaço-tempo.

3.2 Derivada Covariante

Agora que permitimos que diferentes pontos do espaço-tempo possuam métricas diferentes, podemos descrever a curvatura desse espaço. Obtivemos os resultados anteriores aplicando, sobre o referencial de queda livre, uma transformação dependente da posição. Por consequência, isso implica em uma base vetorial diferente para cada ponto do espaço-tempo.

Assim, para cada ponto $x \in \mathcal{M}$ do espaço-tempo, as componentes v^μ de um campo vetorial (contravariante) v representam o vetor $v(x)$ na base da coordenada em questão, i.e.

$$v(x) = v^\mu(x)\, e_\mu(x)\,, \tag{3.42}$$

onde $e_\mu(x)$ são os vetores de base no ponto x e $v^\mu(x)$ são as componentes de $v(x)$ escrito em termos dessa base.

A variação de um campo vetorial portanto não se dá somente através da variação de suas componentes, mas também da variação da base vetorial. Fazendo uma translação infinitesimal $x \to x + \epsilon$, temos

$$\begin{aligned} v(x+\epsilon) &= v^\mu(x+\epsilon)\, e_\mu(x+\epsilon) \\ &= v^\mu(x)\, e_\mu(x) + \epsilon^\alpha \partial_\alpha v^\mu(x)\, e_\mu(x) + \epsilon^\alpha v^\mu(x)\, \partial_\alpha e_\mu(x)\,. \end{aligned} \tag{3.43}$$

A variação da base $\{e_\mu(x)\}$, dada pelos elementos $\partial_\alpha e_\mu(x)$, pode ser escrita como uma combinação linear da própria base. Se chamarmos os coeficientes da combinação de ${G^\lambda}_{\alpha\mu}(x)$ temos

$$\partial_\alpha e_\mu(x) = {G^\lambda}_{\alpha\mu}(x)\, e_\lambda(x)\,, \tag{3.44}$$

então a variação de $v(x)$ pode ser escrita como

$$v(x+\epsilon) = \left(v^\mu(x) + \epsilon^\alpha \partial_\alpha v^\mu(x) + \epsilon^\alpha {G^\mu}_{\alpha\lambda}(x)\, v^\lambda\right) e_\mu(x)\,. \tag{3.45}$$

Assim podemos definir a real variação do campo vetorial $v(x)$ através da derivada covariante, dada no ponto x pelas componentes

$$\nabla_\alpha v^\mu = \partial_\alpha v^\mu + {G^\mu}_{\alpha\lambda} v^\lambda. \tag{3.46}$$

Voltando a analisar o referencial de queda livre, onde localmente a métrica do espaço-tempo é a métrica de Minkowski, temos a eq. (3.5) que descreve a velocidade da partícula. Podemos definir a velocidade u^μ como um campo vetorial definido sobre toda a trajetória do corpo no espaço-tempo. Se a trajetória é parametrizada pelo tempo próprio τ, então podemos também parametrizar a velocidade como

$$u^\mu(\tau) = u^\mu(x^\nu(\tau)) = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}(\tau)\,. \tag{3.47}$$

Para verificar como fica a derivada da velocidade, fazemos uma variação infinitesimal no tempo próprio $\tau \to \tau + \epsilon$, e temos

$$u^\mu(\tau+\epsilon) = u^\mu(x^\nu(\tau+\epsilon)) = u^\mu\left(x^\nu(\tau) + \epsilon\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}(\tau)\right). \tag{3.48}$$

Agora utilizamos a derivada covariante de u para expressar essa variação:

$$u^\mu(\tau+\epsilon) = u^\mu(\tau) + \epsilon\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}(\tau)\, \nabla_\alpha u^\mu(\tau)\,. \tag{3.49}$$

Assim vemos que a variação da velocidade em relação ao tempo próprio é

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\nabla_\alpha u^\mu &= \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\left(\partial_\alpha u^\mu + G^\mu{}_{\alpha\lambda}u^\lambda\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} + G^\mu{}_{\alpha\lambda}u^\alpha u^\lambda. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Para o corpo em queda livre, $\mathrm{d}u^\mu/\mathrm{d}\tau = 0$, portanto nesse caso temos $G^\mu{}_{\alpha\lambda} = 0$. Mas nesse caso a conexão $\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}$ também é nula. Vemos que a equação acima assemelha-se à eq. (3.15), do movimento de um corpo em um referencial arbitrário. Comparando as eqs. (3.5) e (3.15) (referentes ao referencial de queda livre e a um referencial arbitrário), vemos que as duas equações são um caso particular da eq. (3.50) quando a derivada covariante da velocidade é nula, fazendo a identificação $G^\mu{}_{\alpha\lambda} = \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}$ e mostrando que a derivada covariante é expressa em termos da conexão já definida anteriormente:

$$\nabla_\alpha v^\mu = \partial_\alpha v^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}v^\lambda. \tag{3.51}$$

Para um campo vetorial covariante $v(x) = v_\mu(x)\omega^\mu(x)$, sua variação toma a forma

$$\begin{aligned} v\left(x+\epsilon\right) &= v_\mu(x)\omega^\mu(x) + \epsilon^\alpha\left(\partial_\alpha v_\mu(x)\omega^\mu(x) + v_\mu(x)\partial_\alpha\omega^\mu(x)\right)\\ &= v_\mu\omega^\mu + \epsilon^\alpha\left(\partial_\alpha v_\mu + \mathcal{G}^\lambda{}_{\alpha\mu}v_\lambda\right)\omega^\mu, \end{aligned} \tag{3.52}$$

onde definimos $\partial_\alpha\omega\left(x\right) = \mathcal{G}^\lambda{}_{\alpha\mu}\left(x\right)\omega^\mu\left(x\right)$. Podemos usar a métrica para relacionar o campo vetorial covariante com o campo vetorial contravariante, para o qual já sabemos calcular a variação. Aplicando a função g tal que $g\left(\omega^\mu\right) = g^{\mu\nu}e_\nu$, temos $g\left(v\right) \equiv v^*$, e

$$v^*\left(x+\epsilon\right) = v^\mu e_\mu + \epsilon^\alpha\left(g^{\mu\lambda}\partial_\alpha v_\lambda + g^{\mu\nu}\mathcal{G}^\lambda{}_{\alpha\nu}v_\lambda\right)e_\mu. \tag{3.53}$$

Mas já sabemos que

$$\begin{aligned} v^*\left(x+\epsilon\right) &= v^\mu e_\mu + \epsilon^\alpha\left(\partial_\alpha v^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}v^\lambda\right)e_\mu\\ &= v^\mu e_\mu + \left(g^{\mu\lambda}\partial_\alpha v_\lambda + \partial_\alpha g^{\mu\lambda}v_\lambda + \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}v^\lambda\right)e_\mu. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Comparando as eqs. (3.53) e (3.54), obtemos a relação

$$g^{\mu\nu}\mathcal{G}^\lambda{}_{\alpha\nu}v_\lambda = \partial_\alpha g^{\mu\lambda}v_\lambda + \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}v^\lambda. \tag{3.55}$$

Contraindo a equação com $g_{\mu\beta}$ sobre o índice μ, temos (contando que $g_{\mu\beta}g^{\mu\nu} = \delta^\nu_\beta$)

$$\mathcal{G}^\lambda{}_{\alpha\beta}v_\lambda = g_{\mu\beta}\partial_\alpha g^{\mu\lambda}v_\lambda + g_{\mu\beta}\Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma}g^{\gamma\lambda}v_\lambda, \tag{3.56}$$

onde também introduzimos $g^{\gamma\lambda}$ para tornar o índice de v_λ covariante em todos os termos e poder reescrever a equação sem essas componentes. No fim, temos uma relação entre $\mathcal{G}^\lambda{}_{\alpha\beta}$ e $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$:

$$\mathcal{G}^\lambda{}_{\alpha\beta} = g_{\mu\beta}\partial_\alpha g^{\mu\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma}g^{\gamma\lambda}g_{\mu\beta}. \tag{3.57}$$

Utilizando o fato de que $g_{\mu\beta}g^{\mu\lambda} = \delta^\lambda_\beta$ e derivando, temos que $g_{\mu\beta}\partial_\alpha g^{\mu\lambda} = -g^{\mu\lambda}\partial_\alpha g_{\mu\beta}$. Com isso e com a eq. (3.34), podemos mostrar que $\mathcal{G}^\lambda{}_{\alpha\beta} = -\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}$.

Assim, a derivada covariante para campos vetoriais com índice covariante fica

$$\nabla_\alpha v_\mu = \partial_\alpha v_\mu - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}v_\lambda. \tag{3.58}$$

Com a mesma linha de raciocínio que utilizamos até agora, podemos mostrar que a derivada covariante de um tensor $T^{\mu_1\ldots\mu_M}{}_{\nu_1\ldots\nu_N}$ fica

$$\nabla_\alpha T^{\mu_1\ldots\mu_M}{}_{\nu_1\ldots\nu_N} = \partial_\alpha T^{\mu_1\ldots\mu_M}{}_{\nu_1\ldots\nu_N} + \sum_{j=1}^{M} \Gamma^{\mu_j}{}_{\alpha\lambda} T^{\mu_1\ldots\lambda\ldots\mu_M}{}_{\nu_1\ldots\nu_N} - \sum_{k=1}^{N} \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\nu_k} T^{\mu_1\ldots\mu_M}{}_{\nu_1\ldots\lambda\ldots\nu_N}, \tag{3.59}$$

ou seja, há um termo com $\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}$ para cada índice do tensor, com formas diferentes para índices covariantes e contravariantes.

A derivada covariante da métrica é nula, como podemos checar, calculando

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu} g_{\mu\rho}, \tag{3.60}$$

e então utilizamos a definição da conexão em termos da métrica (eq. (3.34)) para obter

$$\begin{aligned} \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} g_{\rho\nu} =& \frac{1}{2} g_{\rho\nu} g^{\rho\gamma} \left(-\partial_\gamma g_{\alpha\mu} + \partial_\alpha g_{\mu\gamma} + \partial_\mu g_{\gamma\alpha}\right) \\ =& \frac{1}{2} \left(-\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha}\right). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Levando em conta a simetria entre os índices da métrica, temos

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha g_{\mu\nu} =& \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(-\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu}\right) \\ & - \frac{1}{2} \left(-\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu}\right). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Somando os termos de índices iguais, eles se cancelam e temos

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0. \tag{3.63}$$

Com essa propriedade, podemos verificar que

$$\nabla_\alpha v_\mu = \nabla_\alpha \left(g_{\mu\nu} v^\nu\right) = \nabla_\alpha g_{\mu\nu} v^\nu + g_{\mu\nu} \nabla_\alpha v^\nu = g_{\mu\nu} \nabla_\alpha v^\nu, \tag{3.64}$$

ou seja, a métrica pode ser "removida" da derivada covariante.

A derivada covariante possui as propriedades usuais de uma derivada, como a regra do produto. Podemos verificar o caso do produto de dois vetores A^α e B^β:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \left(A^\alpha B^\beta\right) =& \partial_\beta \left(A^\alpha B^\beta\right) + A^\rho B^\beta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho} + A^\alpha B^\rho \Gamma^{\beta}{}_{\mu\rho} \\ =& \partial_\mu A^\alpha B^\beta + A^\alpha \partial_\mu B^\beta + A^\rho B^\beta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho} + A^\alpha B^\rho \Gamma^{\beta}{}_{\mu\rho} \\ =& \left(\partial_\mu A^\alpha + A^\rho \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho}\right) B^\beta + A^\alpha \left(\partial_\mu B^\beta + B^\rho \Gamma^{\beta}{}_{\mu\rho}\right) \\ =& \nabla_\mu A^\alpha B^\beta + A^\alpha \nabla_\mu B^\beta. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Outras notações para derivada parcial e derivada covariante são

$$\partial_\alpha v_\nu \equiv v_{\nu,\alpha} \quad \text{e} \quad \nabla_\alpha v_\nu \equiv v_{\nu;\alpha} \tag{3.66}$$

i.e. vírgula para representar derivada parcial e ponto-e-vírgula para representar derivada covariante. Também podemos escrever derivadas de maior ordem assim

$$\partial_\alpha \partial_\beta v_\nu = v_{\nu,\alpha,\beta} \equiv v_{\nu,\alpha\beta}, \tag{3.67}$$

por exemplo.

Equações de Maxwell no espaço-tempo curvo

As equações de Maxwell com fonte (eq. (2.42)) e sem fonte (eq. (2.43)) devem ser generalizadas na RG, pois devem descrever a variação do campo eletromamgnético levando em conta a curvatura do espaço-tempo. A generalização é feita de forma natural, fazendo a troca $\partial_\mu \to \nabla_\mu$. As equações ficam

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\beta \tag{3.68}$$

e

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \tag{3.69}$$

O tensor de energia e momento eletromagnético (eq. (2.54)) também é generalizado, expressando-o através da métrica $g^{\alpha\beta}$ ao invés da métrica de Minkowski $\eta^{\alpha\beta}$. Sua expressão fica

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^\alpha{}_\lambda F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right). \tag{3.70}$$

3.3 Os Tensores de Curvatura

A principal manifestação da curvatura de um espaço é a não comutatividade da derivada covariante. Essa propriedade se evidencia no transporte paralelo de um vetor, i.e. mantendo sempre o mesmo ângulo entre o vetor e a trajetória. Em uma superfície bidimensional curva como uma esfera, por exemplo, o transporte paralelo saindo de um ponto e voltando ao mesmo, resulta numa mudança da orientação original do vetor que depende do caminho tomado.

3.3.1 O tensor de Riemann

A quantidade que mede a não comutatividade da derivada covariante é o tensor de Riemann. Para obtê-lo, vamos calcular o comutador da derivada covariante aplicado sobre um campo vetorial:

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_\alpha, \nabla_\beta\right] v^\mu =& \nabla_\alpha\nabla_\beta v^\mu - \nabla_\beta\nabla_\alpha v^\mu \\
=& \nabla_\alpha\left(\partial_\beta v^\mu + \Gamma^\mu{}_{\beta\lambda}v^\lambda\right) - \nabla_\beta\left(\partial_\alpha v^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}v^\lambda\right) \\
=& \partial_\alpha\partial_\beta v^\mu - \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta}\partial_\rho v^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho}\partial_\beta v^\rho \\
& + \partial_\alpha\left(\Gamma^\mu{}_{\beta\lambda}v^\lambda\right) + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho}\Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}v^\lambda - \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta}\Gamma^\mu{}_{\rho\lambda}v^\lambda \\
& - \partial_\beta\partial_\alpha v^\mu + \Gamma^\rho{}_{\beta\alpha}\partial_\rho v^\mu - \Gamma^\mu{}_{\beta\rho}\partial_\alpha v^\rho \\
& - \partial_\beta\left(\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}v^\lambda\right) - \Gamma^\mu{}_{\beta\rho}\Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}v^\lambda + \Gamma^\rho{}_{\beta\alpha}\Gamma^\mu{}_{\rho\lambda}v^\lambda
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Explorando o a simetria dos índices covariantes da conexão e o fato de que as derivadas parciais comutam, e abrindo a derivada dos produtos, alguns termos cancelam-se (inclusive todos os que envolvem $\partial_\alpha v^\beta$). Ficamos com

$$\left[\nabla_\alpha, \nabla_\beta\right] v^\mu = R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}v^\lambda, \tag{3.72}$$

onde o *tensor de Riemann* é definido como [1, p. 217]

$$R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^{\mu}{}_{\beta\lambda} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}. \tag{3.73}$$

Aplicando o comutador da derivada covariante sobre um vetor de índice covariante v_ν, podemos fazer um cálculo análogo ao feito na eq. (3.71), e identificar o tensor de Riemann como definido na eq. (3.73). O resultado é

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\, v_\nu = -R^{\lambda}{}_{\nu\alpha\beta} v_\lambda, \tag{3.74}$$

onde agora há um sinal negativo para o vetor de índice covariante, manifestando a mesma característica que a derivada covariante.

Dado qualquer ponto x^μ do espaço-tempo, é possível encontrar um sistema de coordenadas onde as componentes da conexão anulam-se localmente, mas a variação da conexão, caracterizada pelas componentes $\hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu,\sigma}$, podem ser não nulas. Um sistema de coordenadas desse tipo é chamado de sistema de coordenadas geodésico (SCG) [1, p. 208]. Já havíamos garantido a existência do referencial de queda livre (pelo Princípio da Equivalência), onde tanto as componentes da conexão quanto as componentes de sua derivada se anulam. Portanto um SCG, onde a variação da conexão não se anula, está associado ao referencial de queda livre por uma transformação que apenas não modifique a condição $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0$ no ponto em questão. Assim, podemos escrever o tensor de Riemann em um sistema de coordenadas geodésico como

$$R^{\mu(\mathrm{SCG})}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}. \tag{3.75}$$

Podemos definir uma versão do tensor de Riemann com todos os índices covariantes, com $R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} R^{\lambda}{}_{\nu\alpha\beta}$. Em um SCG, essa forma do tensor de Riemann fica

$$R^{(\mathrm{SCG})}_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda}\partial_\alpha \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\nu} - g_{\mu\lambda}\partial_\beta \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\nu}. \tag{3.76}$$

Expressando a variação da conexão em termos de sua versão com todos os índices covariantes (eq. (3.33)), temos

$$\partial_\alpha \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\nu} = \partial_\alpha g^{\lambda\rho}\Gamma_{\rho\alpha\nu} + g^{\lambda\rho}\partial_\alpha \Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu}, \tag{3.77}$$

e portanto, num SCG, o primeiro termo se anula. Inserindo essa expressão na eq. (3.76), temos

$$R^{(\mathrm{SCG})}_{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta\nu} - \partial_\beta \Gamma_{\mu\alpha\nu}. \tag{3.78}$$

Abrindo a conexão em termos da métrica (eq. (3.33), temos

$$\begin{aligned} R^{(\mathrm{SCG})}_{\mu\nu\alpha\beta} =& \frac{1}{2}\partial_\alpha \left(-\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\mu} + \partial_\nu g_{\mu\beta}\right) \\ &- \frac{1}{2}\partial_\beta \left(-\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\nu\mu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha}\right), \end{aligned} \tag{3.79}$$

e utilizando a notação de vírgula para derivada (eq. (3.67)) e cancelando os devidos termos, obtemos a seguinte expressão para o tensor de Riemann no SCG:

$$R^{(\mathrm{SCG})}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\nu\alpha} - g_{\nu\beta,\mu\alpha} + g_{\nu\alpha,\mu\beta} - g_{\mu\alpha,\nu\beta}\right). \tag{3.80}$$

Com o tensor de Riemann escrito nessa forma, é possível observar algumas simetrias que aparecem explicitamente, mas que se mantêm válidas em todos os referenciais. A mais óbvia é a antissimetria dos dois últimos índices

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}, \tag{3.81}$$

já sugerida pela definição do tensor em termos da derivada covariante. Outra é a antissimetria nos dois primeiros índices

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}, \tag{3.82}$$

e também a simetria na troca entre o primeiro par de índices com o segundo par

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}, \tag{3.83}$$

que pode ser verificada utilizando a simetria dos índices da métrica $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ e a simetria dos índices de derivada parcial $g_{\mu\nu,\alpha\beta} = g_{\mu\nu,\beta\alpha}$, visto que derivadas parciais comutam.

A última simetria que pode ser obtida vem da soma sobre permutações dos três últimos índices. Efetuando esse cálculo, temos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha} =& \frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\nu\alpha} - g_{\nu\beta,\mu\alpha} + g_{\nu\alpha,\mu\beta} - g_{\mu\alpha,\nu\beta}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(g_{\mu\alpha,\beta\nu} - g_{\beta\alpha,\mu\nu} + g_{\beta\nu,\mu\alpha} - g_{\mu\nu,\beta\alpha}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\alpha\beta} - g_{\alpha\nu,\mu\beta} + g_{\alpha\beta,\mu\nu} - g_{\mu\beta,\alpha\nu}\right), \end{aligned} \tag{3.84}$$

e simplificando os termos, contando com a simetria da métrica e a comutatividade da derivada parcial, temos

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha} = 0. \tag{3.85}$$

Levando em conta a antissimetria de troca entre os dois últimos índices (eq. (3.81)), temos que

$$2R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} - R_{\mu\nu\beta\alpha}. \tag{3.86}$$

Assim podemos escrever, em termos da notação de colchetes para antissimetrização dos índices,

$$\begin{aligned} R_{\mu[\nu\alpha\beta]} =& R_{\mu\nu\alpha\beta} - R_{\mu\nu\beta\alpha} + R_{\mu\beta\nu\alpha} - R_{\nu\beta\alpha\nu} + R_{\mu\alpha\beta\nu} - R_{\mu\alpha\nu\beta} \\ =& 2\left(R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu}\right), \end{aligned} \tag{3.87}$$

ou seja, pela eq. (3.85),

$$R_{\mu[\nu\alpha\beta]} = 0. \tag{3.88}$$

O tensor de Riemann possui n^4 componentes (256 componentes para o espaço-tempo de 4 dimensões), mas as simetrias do tensor implicam que apenas $n^2(n^2-1)/12$ sejam independentes. Isso implica que, em 4 dimensões, 20 componentes do tensor de Riemann sejam necessárias para descrever completamente a curvatura do espaço-tempo.

Uma última simetria associada ao tensor de Riemann é a identidade de Bianchi, que é uma identidade diferencial. Para obtê-la, vamos argumentar o seguinte: num sistema de coordenadas geodésico, a derivada covariante localmente se reduz a uma derivada parcial, pois as componentes da conexão se anulam. Dessa forma,

$$\nabla_\gamma R^{\mu(\mathrm{SCG})}{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\gamma R^{\mu(\mathrm{SCG})}{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\gamma\left(\partial_\alpha \Gamma^\mu{}_{\beta\nu} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}\right) = \Gamma^\mu{}_{\beta\nu,\alpha\gamma} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu,\beta\gamma}. \tag{3.89}$$

Utilizando novamente o raciocínio da eqs. (3.86) e (3.87), temos

$$R^{\mu}{}_{\nu[\alpha\beta;\gamma]} = 2\left(R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta;\gamma} + R^{\mu}{}_{\nu\beta\gamma;\alpha} + R^{\mu}{}_{\nu\gamma\alpha;\beta}\right). \tag{3.90}$$

Avaliando essa quantidade num SCG, temos

$$R^{\mu(\mathrm{SCG})}_{\nu[\alpha\beta;\gamma]} = 2\left(\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu,\alpha\gamma} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu,\beta\gamma} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\nu,\beta\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu,\gamma\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu,\gamma\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\nu,\alpha\beta}\right), \tag{3.91}$$

onde, utilizando simetrias da métrica e de derivadas parciais, os termos se cancelam e a quantidade se anula. A simetria válida em SCGs pode ser então transformada para um referencial arbitrário, e ficamos com

$$R^{\mu}{}_{\nu[\alpha\beta;\gamma]} = 0, \tag{3.92}$$

que é a identidade de Bianchi.

3.3.2 O tensor de Ricci e o escalar de curvatura

Um tensor com um número menor de componentes que também descreve curvatura, mas com menor informação, é o tensor de Ricci, definido em termos do tensor de Riemann como

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}. \tag{3.93}$$

Esse tensor será de maior interesse ao buscar conectar gravitação com a curvatura do espaço tempo.

Utilizando a simetria de troca entre pares de índices do tensor de Riemann (eq. (3.83)), podemos verificar a simetria entre troca de índices do tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\rho}R_{\rho\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\rho}R_{\lambda\nu\rho\mu} = R^{\rho}{}_{\nu\rho\mu}, \tag{3.94}$$

portanto

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \tag{3.95}$$

O tensor de Ricci possui n^2 componentes no total (em 4 dimensões são 16 componentes). A sua simetria, no entanto, torna independentes apenas $n\left(n-1\right)/2$ das componentes (10 componentes independentes em 4 dimensões).

Uma última grandeza relacionada à curvatura do espaço-tempo que pode ser definida é o escalar de curvatura, definido por

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{3.96}$$

que é apenas um número relacionado com a curvatura do espaço-tempo.

3.4 A Equação de Einstein

Vamos buscar a equação que descreve a dinâmica do campo gravitacional. A eq. (3.41) serviu como motivação para associar o campo gravitacional com a métrica do espaço-tempo, tratando-o como iguais. Se utilizarmos unidades em que $c = 1$, a argumentação desenvolvida para chegar na eq. (3.41) implica em campo gravitacional e métrica serem a mesma entidade física.

Na gravitação Newtoniana, o campo gravitacional é gerado pela distribuição de massa. A equação que rege o potencial gravitacional é uma equação de Poisson da forma

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \tag{3.97}$$

onde ρ é a densidade de massa e ϕ é o potencial gravitacional. Essa equação tem como fonte a informação dinâmica da matéria, e possui derivada de segunda ordem do potencial gravitacional. Da mesma forma, queremos encontrar uma equação que tenha como fonte a informação dinâmica da matéria, e possua derivada de segunda ordem da métrica.

Os tensores de curvatura são todos definidos em termos do tensor de Riemann (eq. (3.73)), que por sua vez é definido como derivadas de primeira ordem e produtos da conexão. A conexão, por sua vez, é dada em termos de derivadas de primeira ordem da métrica (eq. (3.34)). Assim, os tensores de curvatura são proporcionais a derivadas de segunda ordem da métrica, bem como produtos de derivadas de primeira ordem. Por serem quantidades diretamente ligadas à curvatura do espaço, são bons candidatos a entrarem na equação que buscamos, i.e. de serem o campo gravitacional da teoria descrita por essa equação.

Cada um dos tensores de curvatura possui um número diferente de índices, portanto cada um deles exigiria uma fonte de natureza diferente. Caso queiramos construir a equação com a massa como fonte, assim como na gravitação Newtoniana, o escalar de curvatura seria o candidato ideal. No entanto, essa grandeza diz muito pouco sobre a curvatura.

No outro extremo, poderíamos tomar o tensor de Riemann como campo gravitacional, mas não teríamos uma grandeza relacionada à massa com tantos graus de liberdade para acoplar-se como fonte na equação.

O que resta é o tensor de Ricci. A motivação de escrever a equação de campo em termos desse tensor aumenta ao lembrarmos que o nosso potencial gravitacional é a métrica, que também é um tensor simétrico de ordem 2. Uma equação em termos do tensor de Ricci tem portanto o número correto de componentes para determinar cada componente da métrica.

Para escrever a equação em termos do tensor de Ricci, precisamos de uma fonte que seja um tensor de segunda ordem. A fonte precisa estar relacionada com a massa da matéria, como na gravitação clássica. Sabemos que o módulo quadrado do 4-momento de uma partícula é a massa da mesma, e o 4-momento é um tensor de primeira ordem. Notamos que, na equação de campo, a fonte deve descrever uma distribuição de matéria, e não um corpo apenas. Isso nos motiva a tomar como fonte um tensor de energia e momento $T^{\mu\nu}$, análogo à quantidade já definida para o campo eletromagnético na seção 2.3 (eq. (2.58)). A componente $T^{\mu\nu}$ corresponde ao fluxo da componente p^μ do 4-momento na direção x^ν do espaço-tempo.

O protótipo da equação de Einstein é portanto $R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$, onde k é uma constante de proporcionalidade. No entanto, devemos impor uma restrição física. O momento deve ser conservado, por isso queremos que

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \tag{3.98}$$

portanto queremos que $\nabla^\mu R_{\mu\nu}$ se anule, mas o tensor de Ricci não satisfaz essa propriedade.

Podemos verificar isso partindo da identidade de Bianchi (eq. (3.92) e contraindo dois pares de índices, sendo que para uma das contrações, utilizamos a métrica para subir um índice:

$$g^{\nu\beta} R^{\lambda}{}_{\nu[\lambda\beta;\gamma]} = 0. \tag{3.99}$$

Abrindo a antissimetrização e já utilizando a eq. (3.86), temos

$$2g^{\nu\beta}\left(R^{\lambda}{}_{\nu\lambda\beta;\gamma} + R^{\lambda}{}_{\nu\beta\gamma;\lambda} + R^{\lambda}{}_{\nu\gamma\lambda;\beta}\right) = 0. \tag{3.100}$$

O primeiro termo fica, lembrando que a derivada covariante da métrica é nula,

$$g^{\nu\beta} R^{\lambda}{}_{\nu\lambda\beta;\gamma} = g^{\nu\beta} R_{\nu\beta;\gamma} = R_{;\gamma} = \nabla^{\rho}\left(g_{\rho\gamma} R\right). \tag{3.101}$$

Para o segundo termo, utilizamos a antissimetria nos primeiros índices do tensor de Riemann,

$$g^{\nu\beta} R^{\lambda}{}_{\nu\beta\gamma;\lambda} = g^{\nu\beta} g^{\lambda\rho} R_{\rho\nu\beta\gamma;\lambda} = -g^{\nu\beta} g^{\lambda\rho} R_{\nu\rho\beta\gamma;\lambda} = -g^{\lambda\rho} R_{\rho\gamma;\lambda} = -\nabla^{\rho} R_{\rho\gamma}, \tag{3.102}$$

e para o último termo, utilizando a antissimetria dos últimos índices do tensor de Riemann,

$$g^{\nu\beta} R^{\lambda}{}_{\nu\gamma\lambda;\beta} = -g^{\nu\beta} R^{\lambda}{}_{\nu\lambda\gamma;\beta} = -g^{\nu\beta} R_{\nu\gamma;\beta} = -\nabla^{\nu} R_{\nu\gamma}. \tag{3.103}$$

Por fim, a contração da identidade de Bianchi nos dá

$$\nabla^{\rho}\left(g_{\rho\gamma} R - 2R_{\rho\gamma}\right) = 0, \tag{3.104}$$

ou seja, a divergência do tensor de Ricci é a divergência da métrica "pesada" pelo escalar de curvatura, e é diferente de zero.

Na busca pela equação de campo da Relatividade Geral, Einstein decidiu escrevê-la em termos de um novo tensor de curvatura que possui divergência nula, chamado em sua referência de tensor de Einstein. Ele é definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{3.105}$$

e obviamente, pela eq. (3.104), sua divergência é nula. Assim, a equação de Einstein é postulada como [2, p. 405]

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{3.106}$$

ou ainda

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{3.107}$$

Outra forma de escrever a equação pode ser obtida tomando-se o seu traço, i.e. contraindo a equação com a métrica:

$$g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \tag{3.108}$$

Definindo $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ como o traço do tensor de energia e momento, e observando que $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$, temos que

$$R = -\kappa T. \tag{3.109}$$

Assim, a equação de Einstein também pode ser escrita como

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right). \tag{3.110}$$

Em todas as formas apresentadas da equação de Einstein, o tensor de energia e momento é dado como proporcional a tensores de curvatura simétricos frente à troca de índices, portanto devemos impor que $T_{\mu\nu}$ também seja simétrico.

Para garantir que essa seja uma equação de campo gravitacional, devemos garantir que ela se reduza à equação (3.97) no caso não relativístico. Novamente faremos uma perturbação infitesimal da métrica: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Na seção 3.1.2 verificamos que, no limite não-relativístico, uma das componentes da métrica se relaciona com o potencial gravitacional através da relação $h_{00} = 2\phi/c^2$. Assim, podemos dizer que essa perturbação da métrica é uma aproximação de campo gravitacional fraco.

Com essa aproximação, vamos obter uma das componentes do tensor de Ricci. Primeiro vamos lembrar a expressão da conexão nesse regime de campo fraco, que é

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left(-h_{\mu\nu,\rho} + h_{\nu\rho,\mu} + h_{\rho\mu,\nu}\right), \tag{3.111}$$

ou seja, as suas componentes são de primeira ordem na perturbação $h_{\mu\nu}$. Assim, olhando para a expressão do tensor de Ricci em termos da conexão,

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}, \tag{3.112}$$

vemos que, em primeira ordem, podemos desprezar os dois últimos termos, referentes ao produto de componentes da conexão. Assim, a componente R_{00} fica

$$R_{00} = \Gamma^{\lambda}{}_{00,\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda 0,0} = \Gamma^{i}{}_{00,i}, \tag{3.113}$$

onde o último termo possui uma soma sobre $i = 1, 2, 3$. Os outros termos são nulos pois tomamos que a métrica é estática no limite não-relativístico. Com $\Gamma^{i}{}_{00,i}$ obtido na eq. (3.39), temos

$$R_{00} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\partial_i^2 h_{00} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\phi. \tag{3.114}$$

Para verificar a forma da equação de Einstein no limite não-relativístico, vamos propor a forma do tensor de energia e momento de uma partícula parada. O 4-momento de uma partícula parada é $p^{\mu} = (mc, 0, 0, 0)$. Sendo p^0 sua única componente não nula, as componentes não nulas do tensor de energia e momento representam o fluxo de p^0 nas 4 direções de espaço-tempo. No entanto, as componentes $T^{0i}, i = 1, 2, 3$, que representam a densidade de momento, devem ser nulas, pois a partícula está parada. Pela simetria frente a troca de índices, concluímos que a única componente não nula é T^{00}, que representa a densidade de energia da partícula.

Como ela está parada, sua energia é a energia de repouso $E = mc^2$. A densidade de energia é portanto $u = mc^2\delta(\vec{x})$, onde utilizamos a delta de Dirac para expressar que a partícula encontra-se na origem espacial do sistema de coordenadas. Definindo a densidade de massa como $\rho = m\delta(\vec{x})$, temos $T^{00} = \rho c^2$. Na aproximação não relativística, assumimos que a massa da partícula é suficientemente pequena para que obtenhamos a componente T_{00} e o traço T apenas com a métrica de Minkowski, resultando também em

$$T_{00} = T = \rho c^2. \tag{3.115}$$

Assim, podemos calcular o escalar de curvatura com a eq. (3.109), obtendo

$$R = -\kappa\rho c^2. \tag{3.116}$$

Por fim, a componente $(0,0)$ equação de Einstein (3.107) pode ser calculada, em primeira ordem na perturbação, utilizando as eqs. (3.114), (3.116) e (3.115). O resultado é

$$\frac{1}{c^2}\nabla^2\phi + \frac{1}{2}\kappa\rho c^2 = \kappa\rho c^2, \tag{3.117}$$

ou ainda

$$\nabla^2\phi = \frac{\kappa c^4}{2}\rho. \tag{3.118}$$

Comparando essa equação com a equação de campo da gravitação newtoniana, eq. (3.97), fazemos a identificação da constante κ como

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \tag{3.119}$$

possilitando-nos escrever a equação de Einstein em sua forma final

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{3.120}$$

A equação de Einstein restringe o espaço-tempo a possuir curvaturas específicas para cada distribuição de energia e momento diferente. No caso da ausência de energia e momento, i.e. no vácuo, a equação de Einstein reduz-se a

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{3.121}$$

pois $T_{\mu\nu} = 0$, e portanto, pela eq. (3.110), também $R = 0$.

A equação de Einstein (bem como a equação da geodésica) respeita o Princípio de Covariância Geral, i.e. as equações são válidas para quaisquer sistemas de coordenadas. Como utilizamos o conceito de derivada covariante, incluindo a informação de curvatura na variação das quantidades físicas, garantimos que as equações possuam a mesma forma para qualquer sistema de coordenadas arbitrário.

O papel do Princípio da Equivalência como fundamento para a construção da teoria da Relatividade Geral entra em garantir a existência de um sistema de coordenadas em que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ localmente, sistema no qual se recupera a Relatividade Especial.

Capítulo 4

Teoria de Kaluza-Klein: *Unificação em 5 dimensões*

4.1 A Proposta de Kaluza

Einstein apresentou a teoria de Relatividade Geral em 1915. Seis anos depois, o matemático Theodor Kaluza apresentou uma extensão da teoria de Einstein baseada na adição de uma dimensão a mais no espaço-tempo [3].

A motivação de Kaluza foi observar uma grande similaridade entre a Teoria Eletromagnética e a Relatividade Geral. Ambas as teorias têm como entes fundamentais potenciais elétrico A_μ e gravitacional $g_{\mu\nu}$ (a própria métrica). Colocando lado a lado as definições do tensor de campo eletromagnético e da conexão, vemos uma similaridade nas expressões:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}; \qquad \Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu}\right). \tag{4.1}$$

Também é possível ver uma semelhança entre as equações de campo de cada teoria. Para o eletromagnetismo, temos

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \tag{4.2}$$

uma equação que associa a derivada do tensor de campo à densidade de corrente com uma constante de proporcionalidade; enquanto que, na Relatividade Geral, temos a equação de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{4.3}$$

onde $G_{\mu\nu}$ é proporcional a contrações do tensor de Riemann (eq. (3.105)), que por sua vez é a parte antissimétrica da soma da *derivada* da conexão e de um produto de duas componentes da conexão (eq. (3.73)). Ou seja, com exceção do termo envolvendo o produto de componentes da conexão, a equação de campo da Relatividade Geral também associa a derivada do campo gravitacional (a conexão) com uma fonte, à densidade de energia e momento $T_{\mu\nu}$, através de uma constante de proporcionalidade.

Para buscar uma formulação unificada das duas teorias, Kaluza procurou uma forma de unir os potenciais A_μ e $g_{\mu\nu}$ em um único potencial. A métrica $g_{\mu\nu}$, por ser um tensor (simétrico) de ordem 2 em um espaço 4-dimensional, possui 16 componentes (10 independentes) organizadas em uma matriz 4×4. Já o 4-potencial A_μ possui apenas 4 componentes. Para acomodá-los em uma mesma entidade, devemos buscar uma estrutura tal que possua, no mínimo, 14 componentes independentes. Essa condição é satisfeita se tomarmos um tensor simétrico de ordem 2 em um espaço de 5 dimensões. Um tensor desse tipo possui $5 \times 5 = 25$ componentes, no entanto apenas 15 são independentes. Ainda que essa estrutura nos dê um grau de liberdade a mais do que precisamos, ela é interessante, pois conserva a mesma forma que a métrica $g_{\mu\nu}$ – forma de um tensor de ordem 2, apenas com a dimensionalidade aumentada – permitindo que a formulação unificada que buscamos seja escrita nos moldes da Relatividade Geral. Ao aplicarmos o formalismo da Relatividade Geral sobre esse tensor de 5 dimensões, passamos a enxergá-lo como a métrica de um espaço-tempo estendido a 5 dimensões.

Na busca pela unificação das duas teorias, esse é o ansatz de Kaluza: o potencial eletromagnético e a métrica do espaço-tempo 4-dimensional são partes de uma mesma métrica de um espaço de 5 dimensões. Chamamos as componentes dessa métrica 5D de $\hat{g}_{AB}$, onde o acento circunflexo é o que as diferem das componentes da métrica do espaço-tempo 4D, $g_{\mu\nu}$, e onde os índices latinos maiúsculos agoram correm de 0 a 4.

Ao generalizar o espaço tridimensional espacial para o espaço-tempo 4-dimensional, na Relatividade Especial, definimos a 4-posição x^μ. Mantivemos as componentes $x^i, i = 1, 2, 3$, das coordenadas representando as coordenadas espaciais, e associamos a componente x^0 com o tempo. No espaço-tempo 5-dimensional, definimos a 5-posição $\hat{x}^A$. Vamos reservar as componentes $\hat{x}^\mu, \mu = 0, \ldots, 3$, a representarem as coordenadas do espaço-tempo 4-dimensional, e a componente $\hat{x}^4$ será um novo parâmetro, que vamos chamar de y. Assim,

$$\hat{x}^\mu \equiv x^\mu, \qquad \hat{x}^4 \equiv y. \tag{4.4}$$

4.1.1 A métrica em 5 dimensões

Queremos que a métrica do espaço-tempo 5D contenha a métrica 4D, bem como o potencial eletromagnético. Uma forma simples de fazer essa associação é tomar $\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, e $\hat{g}^{4\mu} = -kA^\mu$, onde k é uma constante de proporcionalidade (que garante que a métrica seja adimensional), e o sinal negativo é utilizado por convenção. A componente g^{44} resta como um parâmetro adicional. Permitindo que tome qualquer valor, a associamos a um campo escalar $\hat{g}^{44} = \chi$.

Para simplificar a notação, vamos incorporar a constante k na definição do potencial eletromagnético. Vamos tomar $\tilde{A}^\mu$ como o potencial eletromagnético, com a dimensionalidade usual, e vamos definir $A^\mu = k\tilde{A}^\mu$.

Matricialmente, podemos expressar a métrica 5D da seguinte forma

$$\hat{g}^{AB} = \begin{pmatrix} \hat{g}^{\mu\nu} & \hat{g}^{\mu 4} \\ \hat{g}^{4\nu} & \hat{g}^{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -A^\mu \\ -A^\nu & \chi \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Para determinar as componentes da métrica com índices covariantes $\hat{g}_{AB}$, vamos utilizar a condição

$$\hat{g}^{AB}\hat{g}_{BC} = \delta^A_C, \tag{4.6}$$

mantendo a mesma condição $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$ para a métrica 4D. Separando a eq. (4.6) entre componentes 4D e a quinta componente $(A, B = 4)$ temos

$$\begin{aligned} \hat{g}^{\mu 4}\hat{g}_{4\lambda} + \hat{g}^{\mu\nu}\hat{g}_{\nu\lambda} &= \delta^\mu_\lambda, \qquad & \hat{g}^{\mu 4}\hat{g}_{44} + \hat{g}^{\mu\nu}\hat{g}_{\nu 4} = 0, \\ \hat{g}^{44}\hat{g}_{4\lambda} + \hat{g}^{4\nu}\hat{g}_{\nu\lambda} &= 0, \qquad & \hat{g}^{44}\hat{g}_{44} + \hat{g}^{4\nu}\hat{g}_{\nu 4} = 1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Agora substituímos $\hat{g}^{AB}$ por $g^{\mu\nu}$, A^μ e χ, de acordo com a eq. (4.5), e obtemos

$$\begin{aligned} -A^\mu \hat{g}_{4\lambda} + g^{\mu\nu}\hat{g}_{\nu\lambda} =& \delta^\mu_\lambda, \qquad & -A^\mu \hat{g}_{44} + g^{\mu\nu}\hat{g}_{\nu 4} = 0, \\ \chi \hat{g}_{4\lambda} - A^\nu \hat{g}_{\nu\lambda} =& 0, \qquad & \chi \hat{g}_{44} - A^\nu \hat{g}_{\nu 4} = 1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Vamos contrair as duas equações de cima com a métrica 4D contravariante $g_{\rho\mu}$, e, interpretando A^μ como um campo vetorial sobre o espaço-tempo 4-dimensional, vamos utilizar a métrica 4D para tornar seu índice covariante, i.e. $g_{\rho\mu}A^\mu = A_\rho$. As equações de cima ficam

$$-A_\rho \hat{g}_{4\lambda} + \delta^\nu_\rho \hat{g}_{\nu\lambda} = g_{\rho\lambda}, \qquad -A_\rho \hat{g}_{44} + \delta^\nu_\rho \hat{g}_{\nu 4} = 0, \tag{4.9}$$

de onde tiramos, usando a segunda equação, que

$$\hat{g}_{\rho 4} = A_\rho \hat{g}_{44}, \tag{4.10}$$

e, substituindo na primeira,

$$\hat{g}_{\rho\lambda} = g_{\rho\lambda} + A_\rho \hat{g}_{4\lambda} = g_{\rho\lambda} + A_\rho A_\lambda \hat{g}_{44}. \tag{4.11}$$

Na última equação em (4.8), podemos substituir a eq. (4.10) e resolver para $\hat{g}^{44}$. O resultado é

$$\hat{g}_{44} = \frac{1}{\chi - A_\nu A^\nu}. \tag{4.12}$$

Com essa equação, e com as eqs. (4.10) e (4.11), definimos completamente a métrica com índices covariantes $\hat{g}_{AB}$. Para simplificar a notação, vamos usar uma outra definição para o campo escalar que resta como parâmetro livre da métrica. Ao invés de definir $\hat{g}_{44} = \chi$, como havíamos feito, vamos tomar $\hat{g}_{44} = \phi$. Em termos desse campo, a componente $\hat{g}_{44}$ fica

$$\hat{g}^{44} = \phi^{-1} + A_\nu A^\nu. \tag{4.13}$$

Assim, temos as componentes da métrica 5D com índices covariantes e contravariantes em termos da métrica 4D, do potencial EM e do campo escalar ϕ. Em termos matriciais,

$$\hat{g}^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -A^\mu \\ -A^\nu & \phi^{-1} + A_\lambda A^\lambda \end{pmatrix}, \qquad \hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \phi A_\nu & \phi \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

4.1.2 Condição do cilindro

Na RG, a métrica 4D era um campo tensorial definido sobre o espaço-tempo, ou seja, era uma função das coordenadas do espaço-tempo 4-dimensional. Para cada 4-posição x^λ havia uma métrica $g_{\mu\nu}\left(x^\lambda\right)$ associada. Analogamente, ao estender o espaço-tempo para 5 dimensões, a métrica 5D passa a ser um campo tensorial definido sobre as coordenadas do espaço-tempo 5-dimensional. Assim, para cada 5-posição x^C, há uma métrica $g_{AB}\left(x^C\right)$ associada.

Como queremos incorporar o espaço-tempo 4-dimensional da RG dentro de um espaço-tempo de dimensionalidade maior, precisamos definir como associar coordenadas do espaço-tempo 5D a coordenadas 4-dimensionais. Já decidimos como vamos separar as componentes da métrica 5D, $\hat{g}_{AB}$, em termos de quantidades 4-dimensionais $g_{\mu\nu}$, A_μ e ϕ. No entanto, sendo $\hat{g}_{AB}$ função de x^C, as quantidades de natureza 4-dimensional também serão funções das coordenadas 5-dimensionais. Separando a 5-posição como $x^C = (x^\lambda, y)$

(lembrando que $x^4 \equiv y$), podemos escrever $\hat{g}_{AB}\left(x^\lambda, y\right)$ para a métrica em função das coordenadas, obtendo $g_{\mu\nu}\left(x^\lambda, y\right)$, $A_\mu\left(x^\lambda, y\right)$ e $\phi\left(x^\lambda, y\right)$ para suas componentes. Portanto, na perspectiva 4-dimensional, essas quantidades não são apenas campos definidos sobre o espaço-tempo 4-dimensional, mas também dependem de um parâmetro adicional y.

Para obter o resultado que esperava, Kaluza fez uma aproximação, chamada *condição do cilindro*, que corresponde a assumir que a métrica $\hat{g}_{AB}$ não dependa do parâmetro y, i.e.

$$\hat{g}_{AB,4} = 0. \tag{4.15}$$

Do ponto de vista da covariância da teoria, agora na perspectiva de um espaço 5-dimensional, essa condição não é fisicamente motivada. No entanto, anos após Kaluza propô-la, Oskar Klein deu uma interpretação fisicamente satisfatória a essa condição.

Para simplificar o problema, em primeiro contato, vamos também tomar que o campo escalar ϕ seja constante. Com essas condições, podemos calcular as componentes da conexão, separando-as entre partes 4-dimensionais ($\mu = 0, \ldots, 3$) e partes da quinta dimensão ($\mu = 4$). Vamos calcular primeiro as componentes da conexão com todos os índices covariantes. A definição da conexão é análoga à eq. (3.33), mas agora com índices que correm de 0 a 4. Utilizamos a notação de acento circunflexo para todas as quantidades 5-dimensionais. Portanto a conexão que vamos calcular é

$$\hat{\Gamma}_{ABC} = \tfrac{1}{2}\left(-\hat{g}_{BC,A} + \hat{g}_{AB,C} + \hat{g}_{CA,B}\right). \tag{4.16}$$

Devido à simetria entre os dois últimos índices de $\hat{\Gamma}_{ABC}$, as componentes que devemos calcular são $\hat{\Gamma}_{444}$, $\hat{\Gamma}_{44\nu}$, $\hat{\Gamma}_{4\mu\nu}$, $\hat{\Gamma}_{\lambda 44}$, $\hat{\Gamma}_{\lambda 4\nu}$ e $\hat{\Gamma}_{\lambda\mu\nu}$. Do ponto de vista 4-dimensional, essas 6 componentes são campos escalares, vetoriais e tensoriais.

A primeira das componentes fica

$$\hat{\Gamma}_{444} = \tfrac{1}{2}\left(-\hat{g}_{44,4} + \hat{g}_{44,4} + \hat{g}_{44,4}\right) = 0. \tag{4.17}$$

Devido à condição do cilindro, ela se anula. A próxima componente fica

$$\hat{\Gamma}_{44\nu} = \tfrac{1}{2}\left(-\hat{g}_{4\nu,4} + \hat{g}_{44,\nu} + \hat{g}_{\nu 4,4}\right) = \tfrac{1}{2}\hat{g}_{44,\nu} = 0, \tag{4.18}$$

onde também utilizamos que ϕ é um campo constante. Outra componente que também se anula devido a essas propriedades é

$$\hat{\Gamma}_{\lambda 44} = \tfrac{1}{2}\left(-\hat{g}_{44,\lambda} + \hat{g}_{\lambda 4,4} + \hat{g}_{4\lambda,4}\right) = 0. \tag{4.19}$$

A componente onde traços do eletromagnetismo começam a aparecer é $\hat{\Gamma}_{\lambda 4\nu}$, que fica

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{\lambda 4\nu} =& \tfrac{1}{2}\left(-\hat{g}_{4\nu,\lambda} + \hat{g}_{\lambda 4,\nu} + \hat{g}_{\nu\lambda,4}\right) \\ =& \tfrac{1}{2}\phi\left(-\partial_\lambda A_\nu + \partial_\nu A_\lambda\right) = -\tfrac{1}{2}\phi F_{\lambda\nu},\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde identificamos o tensor de campo eletromagnético, definido como na eq. (2.40). Outra componente análoga a essa é

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{4\mu\nu} =& \tfrac{1}{2}\left(-\hat{g}_{\mu\nu,4} + \hat{g}_{4\mu,\nu} + \hat{g}_{\nu 4,\mu}\right) \\ =& \tfrac{1}{2}\phi\left(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu\right) = \tfrac{1}{2}\phi H_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{4.21}$$

onde definimos $H_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu$, um parceiro simétrico do tensor de campo eletromagnético.

A última componente é a com 3 índices espaço-temporais:

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} =& \tfrac{1}{2}\left(-\hat{g}_{\mu\nu,\lambda} + \hat{g}_{\lambda\mu,\nu} + \hat{g}_{\nu\lambda,\mu}\right) \\
=& \tfrac{1}{2}\left(-g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu}\right) \\
&+ \tfrac{1}{2}\phi\Big(-\left(A_\mu A_\nu\right)_{,\lambda} + \left(A_\lambda A_\mu\right)_{,\nu} + \left(A_\nu A_\lambda\right)_{,\mu}\Big) \\
=& \Gamma_{\lambda\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\phi\left(-A_\mu\partial_\lambda A_\nu - A_\nu\partial_\lambda A_\mu\right. \\
&\qquad +A_\lambda\partial_\nu A_\mu + A_\mu\partial_\nu A_\lambda \\
&\qquad \left.+A_\nu\partial_\mu A_\lambda + A_\lambda\partial_\mu A_\nu\right) \\
=& \Gamma_{\lambda\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_\lambda H_{\mu\nu} + A_\mu F_{\nu\lambda} + A_\mu F_{\mu\lambda}\right).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Devido à escolha $\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, a parte "4-dimensional" da conexão do espaço 5-dimensional contém a conexão do espaço 4-dimensional. Para entender a que espaço 4-dimensional nos referimos devemos lembrar que todas essas componentes são funções das 5-coordenadas x^A do espaço-tempo 5-dimensional, ou seja, são campos no espaço-tempo 4-dimensional parametrizados por y. Assim, a quantidade $\Gamma_{\lambda\mu\nu}(x^\alpha, y)$ é a conexão de uma hipersuperfície 4-dimensional dentro do espaço-tempo 5-dimensional, constituída pelos pontos cujo valor da 5ª coordenada é y.

Para obter as componentes da conexão com o primeiro índice contravariante, usamos $\hat{\Gamma}^A{}_{BC} = \hat{g}^{AD}\Gamma_{DBC} = \hat{g}^{A4}\Gamma_{4BC} + \hat{g}^{\mu 4}\Gamma_{\mu BC}$. As componentes $\hat{\Gamma}^4{}_{44}$ e $\hat{\Gamma}^\lambda{}_{44}$ ficam nulas, pois $\hat{\Gamma}_{444}$ e $\hat{\Gamma}_{\lambda 44}$ são nulas. A componente $\hat{\Gamma}^4{}_{4\nu}$ fica

$$\hat{\Gamma}^4{}_{4\nu} = \hat{g}^{44}\hat{\Gamma}_{44\nu} + \hat{g}^{4\rho}\hat{\Gamma}_{\rho 4\nu} = \tfrac{1}{2}\phi A^\rho F_{\rho\nu}, \tag{4.23}$$

e a componente $\hat{\Gamma}^\lambda{}_{4\nu}$ fica

$$\hat{\Gamma}^\lambda{}_{4\nu} = \hat{g}^{\lambda 4}\hat{\Gamma}_{44\nu} + \hat{g}^{\lambda\rho}\hat{\Gamma}_{\rho 4\nu} = -\tfrac{1}{2}\phi F^\rho{}_\nu. \tag{4.24}$$

As outras componentes exigem um cálculo levemente mais extenso:

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^4{}_{\mu\nu} =& \hat{g}^{44}\hat{\Gamma}_{4\mu\nu} + \hat{g}^{4\rho}\hat{\Gamma}_{\rho\mu\nu} \\
=& \left(\phi^{-1} + A_\rho A^\rho\right)\tfrac{1}{2}\phi H_{\mu\nu} - A_\rho\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \\
&- \tfrac{1}{2}\phi\left(A_\rho A^\rho H_{\mu\nu} + A^\rho A_\mu F_{\nu\rho} + A^\rho A_\nu F_{\mu\rho}\right) \\
=& \tfrac{1}{2}H_{\mu\nu} - A_\rho\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\phi A^\rho\left(A_\mu F_{\nu\rho} + A_\nu F_{\mu\rho}\right).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

A última componente é

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} =& \hat{g}^{\lambda 4}\hat{\Gamma}_{4\mu\nu} + \hat{g}^{\lambda\rho}\hat{\Gamma}_{\rho\mu\nu} \\
=& -\tfrac{1}{2}\phi A^\lambda H_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \\
&+ \tfrac{1}{2}\phi\left(A^\lambda H_{\mu\nu} + A_\mu F_\nu{}^\lambda + A_\nu F_\mu{}^\lambda\right) \\
=& \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_\mu F_\nu{}^\lambda + A_\nu F_\mu{}^\lambda\right).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Em resumo, as componentes da conexão com todos os índices covariantes são

$$\boxed{\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{444} =& 0, & \hat{\Gamma}_{\lambda 44} &= 0, \\
\hat{\Gamma}_{44\nu} =& 0, & \hat{\Gamma}_{\lambda 4\nu} &= -\tfrac{1}{2}\phi F_{\lambda\nu}, \\
\hat{\Gamma}_{4\mu\nu} =& \tfrac{1}{2}\phi H_{\mu\nu}, & \hat{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} &= \Gamma_{\lambda\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_\lambda H_{\mu\nu}\right. \\
&& &\qquad \left.+ A_\mu F_{\nu\lambda} + A_\nu F_{\mu\lambda}\right),
\end{aligned}} \tag{4.27}$$

e as componentes da conexão com o primeiro índice contravariante são

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{\Gamma}^4{}_{44} = 0, && \hat{\Gamma}^\lambda{}_{44} = 0, \\ &\hat{\Gamma}^4{}_{4\nu} = \tfrac{1}{2}\phi A^\rho F_{\rho\nu}, && \hat{\Gamma}^\lambda{}_{4\nu} = -\tfrac{1}{2}\phi F^\lambda{}_\nu, \\ &\hat{\Gamma}^4{}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}H_{\mu\nu} - A_\rho \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} && \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}\phi A^\rho \left(A_\mu F_{\nu\rho} + A_\nu F_{\mu\rho}\right), && \qquad + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_\mu F_\nu{}^\lambda + A_\nu F_\mu{}^\lambda\right), \end{aligned}} \tag{4.28}$$

onde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} =& \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ H_{\mu\nu} =& \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu A_\nu. \end{aligned} \tag{4.29}$$

4.2 A equação de Einstein no universo 5-dimensional

Na Relatividade Geral, um universo de geometria definida por um tensor (campo tensorial) métrico $g_{\mu\nu}$ e com a presença de matéria caracterizada por tensor (campo tensorial) de energia e momento $T_{\mu\nu}$ satisfaz a equação de Einstein (eq. (3.120)), que basicamente expressa um balanço entre energia e curvatura do espaço. No caso da ausência de matéria, a eq. de Einstein se reduz a $R_{\mu\nu} = 0$ (eq. (3.121)).

No caso do universo 5-dimensional, vamos supor que não possua matéria e resolver uma equação de Einstein para o vácuo em 5 dimensões:

$$\hat{R}_{AB} = 0. \tag{4.30}$$

Para explorar a equação da perspectiva 4-dimensional, vamos calcular as componentes do tensor de Ricci $\hat{R}_{AB}$ em termos das quantidades de caráter 4-dimensional.

4.2.1 Tensores de curvatura no espaço 5D

O tensor de Ricci $\hat{R}_{AB}$ é definido de maneira análoga ao caso 4D, ou seja

$$\hat{R}_{AB} = \hat{R}^C{}_{ACB}, \tag{4.31}$$

onde o tensor de Riemann é definido como

$$\hat{R}^A{}_{BCD} = \hat{\Gamma}^A{}_{BD,C} - \hat{\Gamma}^A{}_{BC,D} + \hat{\Gamma}^A{}_{CE}\hat{\Gamma}^E{}_{BD} - \hat{\Gamma}^A{}_{DE}\hat{\Gamma}^E{}_{BC}, \tag{4.32}$$

que, assim como no caso 4-dimensional, mede a não comutatividade da derivada covariante, e portanto é uma medida da curvatura do espaço.

Estamos interessados em olhar para os subespaços 4-dimensionais desse universo de 5 dimensões, parametrizados por ω. Para isso, vamos dividir a eq. (4.30) nas componentes $\hat{R}_{44} = 0$, $\hat{R}_{4\nu} = 0$ e $\hat{R}_{\mu\nu} = 0$. Para isso, vamos precisar calcular as devidas componentes do tensor de Ricci. Pela eq. (4.31) temos

$$\begin{aligned} \hat{R}_{44} =& \hat{R}^C{}_{4C4} = \hat{R}^\lambda{}_{4\lambda 4}, \\ \hat{R}_{4\nu} =& \hat{R}^C{}_{4C\nu} = \hat{R}^4{}_{44\nu} + \hat{R}^\lambda{}_{4\lambda\nu}, \\ \hat{R}_{\mu\nu} =& \hat{R}^C{}_{\mu C\nu} = \hat{R}^4{}_{\mu 4\nu} + \hat{R}^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Calculando $\hat{R}^{\lambda}{}_{4\lambda 4}$, temos

$$\begin{aligned}\hat{R}^{\lambda}{}_{4\lambda 4} =& \hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{44,\lambda} - \hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{4\lambda,4} + \hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda A}\hat{\Gamma}^{A}{}_{44} - \hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{4A}\hat{\Gamma}^{A}{}_{\lambda 4} \\ =& -\hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{4\rho}\hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda 4} = \tfrac{1}{4}\phi^2 F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho},\end{aligned} \tag{4.34}$$

onde um dos termos é anulado pela condição do cilindro, e os outros anulam-se pois $\hat{\Gamma}^{4}{}_{44}$ e $\hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{44}$ são nulos. Assim, temos a primeira componente do tensor de Ricci

$$\boxed{\hat{R}_{44} = \tfrac{1}{4}\phi^2 F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}.} \tag{4.35}$$

A componente $\hat{R}^{4}{}_{44\nu}$ fica

$$\begin{aligned}\hat{R}^{4}{}_{44\nu} =& \hat{\Gamma}^{4}{}_{4\nu,4} - \hat{\Gamma}^{4}{}_{44,\nu} + \hat{\Gamma}^{4}{}_{4A}\hat{\Gamma}^{A}{}_{\nu 4} - \hat{\Gamma}^{4}{}_{\nu A}\hat{\Gamma}^{A}{}_{44} \\ =& \hat{\Gamma}^{4}{}_{4\rho}\hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu 4} = -\tfrac{1}{4}\phi^2 A^{\sigma}F_{\sigma\rho}F^{\rho}{}_{\nu}.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Para completar o cálculo de $\hat{R}_{4\nu}$ precisamos de $\hat{R}^{\lambda}{}_{4\lambda\nu}$, cuja expressão é

$$\begin{aligned}\hat{R}^{\lambda}{}_{4\lambda\nu} =& \hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{4\nu,\lambda} - \hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{4\lambda,\nu} + \hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda A}\hat{\Gamma}^{A}{}_{\nu 4} - \hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu A}\hat{\Gamma}^{A}{}_{\lambda 4} \\ =& \left(-\tfrac{1}{2}\phi F^{\lambda}{}_{\nu}\right)_{,\lambda} - \left(-\tfrac{1}{2}\phi F^{\lambda}{}_{\lambda}\right)_{,\nu} \\ &+ \hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda 4}\hat{\Gamma}^{4}{}_{\nu 4} - \hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu 4}\hat{\Gamma}^{4}{}_{\lambda 4} + \hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\rho}\hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu 4} - \hat{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\rho}\hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda 4} \\ =& -\tfrac{1}{2}\phi\partial_{\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} - \tfrac{1}{4}\phi^2 A^{\rho}F_{\rho\nu}F^{\lambda}{}_{\lambda} + \tfrac{1}{4}\phi^2 A^{\rho}F_{\rho\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} \\ &- \tfrac{1}{2}\phi F^{\rho}{}_{\nu}\left(\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\rho} + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_{\lambda}F_{\rho}{}^{\lambda} + A_{\rho}F_{\lambda}{}^{\lambda}\right)\right) \\ &+ \tfrac{1}{2}\phi F^{\rho}{}_{\lambda}\left(\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\lambda} + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_{\nu}F_{\rho}{}^{\lambda} + A_{\rho}F_{\nu}{}^{\lambda}\right)\right).\end{aligned} \tag{4.37}$$

Sabendo que $F_{\lambda}{}^{\lambda} = \partial_{\lambda}A^{\lambda} - \partial^{\lambda}A_{\lambda} = 0$, alguns termos se anulam. Ficamos com

$$\begin{aligned}\hat{R}^{\lambda}{}_{4\lambda\nu} =& -\tfrac{1}{2}\phi\partial_{\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\phi F^{\rho}{}_{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\rho} + \tfrac{1}{2}\phi F^{\rho}{}_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\lambda} \\ &+ \tfrac{1}{4}\phi^2 A^{\rho}F_{\rho\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} - \tfrac{1}{4}\phi^2 A^{\lambda}F_{\rho\lambda}F^{\rho}{}_{\nu} \\ &- \tfrac{1}{4}\phi^2 A_{\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} + \tfrac{1}{4}\phi^2 A^{\rho}F_{\rho\lambda}F_{\nu}{}^{\lambda}.\end{aligned} \tag{4.38}$$

Os três primeiros termos correspondem à uma derivada covariante (eqs. (3.51) e (3.58), ou, no caso geral, eq. (3.59)). Além disso, o primeiro termo da segunda linha cancela-se com o segundo termo da terceira linha. Por fim, no primeiro termo da terceira linha reconhecemos a componente $\hat{R}_{44}$, multiplicada por A_{ν}. Assim, ficamos com

$$\hat{R}^{\lambda}{}_{4\lambda\nu} = -\tfrac{1}{2}\phi\nabla_{\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} - \tfrac{1}{4}\phi^2 A^{\lambda}F_{\rho\lambda}F^{\rho}{}_{\nu} - A_{\nu}\hat{R}_{44}. \tag{4.39}$$

Para obter $\hat{R}_{4\nu}$, somamos as eqs. (4.36) e (4.39). O resultado é

$$\boxed{\hat{R}_{4\nu} = -\tfrac{1}{2}\phi\nabla_{\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} - A_{\nu}\hat{R}_{44}.} \tag{4.40}$$

A componente $\hat{R}_{\mu\nu}$ é a que exige mais cálculo. Primeiro, a componente $\hat{R}^{4}{}_{\mu 4\nu}$ é

$$\begin{aligned}\hat{R}^{4}{}_{\mu 4\nu} =& \hat{\Gamma}^{4}{}_{\mu\nu,4} - \hat{\Gamma}^{4}{}_{\mu 4,\nu} + \hat{\Gamma}^{4}{}_{4A}\hat{\Gamma}^{A}{}_{\nu\mu} - \hat{\Gamma}^{4}{}_{\nu A}\hat{\Gamma}^{A}{}_{4\mu} \\ =& -\left(\tfrac{1}{2}\phi A^{\rho}F_{\rho\mu}\right)_{,\nu} + \hat{\Gamma}^{4}{}_{4\rho}\hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu} - \hat{\Gamma}^{4}{}_{\nu 4}\hat{\Gamma}^{4}{}_{4\mu} - \hat{\Gamma}^{4}{}_{\nu\rho}\hat{\Gamma}^{\rho}{}_{4\mu} \\ =& -\tfrac{1}{2}\phi\partial_{\nu}A_{\rho}F^{\rho}{}_{\mu} - \tfrac{1}{2}\phi A^{\rho}\partial_{\nu}F_{\rho\mu} \\ &+ \tfrac{1}{2}\phi A^{\sigma}F_{\sigma\rho}\left(\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_{\nu}F_{\mu}{}^{\rho} + A_{\mu}F_{\nu}{}^{\rho}\right)\right) \\ &- \tfrac{1}{4}\phi^2 A^{\rho}A^{\lambda}F_{\rho\nu}F_{\lambda\mu} \\ &+ \tfrac{1}{2}\phi F^{\rho}{}_{\mu}\left(\tfrac{1}{2}H_{\nu\rho} - A_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho} - \tfrac{1}{2}\phi A^{\lambda}\left(A_{\nu}F_{\rho\lambda} + A_{\rho}F_{\nu\lambda}\right)\right).\end{aligned} \tag{4.41}$$

A expressão é uma soma de 10 termos. Primeiro, notamos que $\partial_\nu A_\rho = \frac{1}{2}(H_{\nu\rho} + F_{\nu\rho})$. Abrindo esses termos, a expressão fica então com 11 termos totais. Vamos separá-los nos seguintes tipos:

i) termos com derivada de F e com o produto de F com Γ (juntos formarão uma derivada covariante);

ii) produtos de F com H, e F^2;

iii) produtos de A^2 com F^2,

onde nos referimos aos tensores apenas pelos símbolos que os representam, e F^2 indica termos de ordem quadrática de F, e analogamente para A^2. Separando dessa forma, temos

$$\begin{aligned}\hat{R}^4{}_{\mu 4\nu} = &-\tfrac{1}{2}\phi A^\rho \partial_\nu F_{\rho\mu} + \tfrac{1}{2}\phi A^\sigma F_{\sigma\rho}\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \tfrac{1}{2}\phi A_\lambda F^\rho{}_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \\ &- \tfrac{1}{4}\phi H_{\nu\rho}F^\rho{}_\mu - \tfrac{1}{4}\phi F_{\nu\rho}F^\rho{}_\mu + \tfrac{1}{4}\phi H_{\nu\rho}F^\rho{}_\mu \\ &+ \tfrac{1}{4}\phi^2 \left(A^\sigma A_\nu F_{\sigma\rho}F_\mu{}^\rho + A^\sigma A_\mu F_{\sigma\rho}F_\nu{}^\rho\right. \\ &\left.-A^\rho A^\lambda F_{\rho\nu}F_{\lambda\mu} - A^\lambda A_\nu F^\rho{}_\mu F_{\rho\lambda} - A^\lambda A_\rho F^\rho{}_\mu F_{\nu\lambda}\right).\end{aligned} \tag{4.42}$$

A primeira linha pode ser reorganizada da seguinte forma:

$$-\tfrac{1}{2}\phi A_\sigma \partial_\nu F^\sigma{}_\mu + \tfrac{1}{2}\phi A_\sigma F^\sigma{}_\rho \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \tfrac{1}{2}\phi A_\sigma F^\rho{}_\mu \Gamma^\sigma{}_{\nu\rho}, \tag{4.43}$$

ou seja, escrita em termos de uma derivada covariante, ela vale $-\frac{1}{2}\phi A_\sigma \nabla_\nu F^\sigma{}_\mu$. Na segunda linha, os termos com $H_{\nu\rho}$ cancelam-se. Referente aos termos do terceiro tipo, o primeiro termo da terceira linha e o segundo termo da quarta linha somados nos dão

$$\tfrac{1}{4}\phi^2\left(A^\sigma A_\nu F_{\sigma\rho}F_\mu{}^\rho - A^\lambda A_\nu F^\rho{}_\mu F_{\rho\lambda}\right) = \tfrac{1}{4}\phi^2\left(A^\lambda A_\nu F_{\lambda\rho}F_\mu{}^\rho - A^\lambda A_\nu F_\mu{}^\rho F_{\lambda\rho}\right) = 0, \tag{4.44}$$

onde usamos a antissimetria na troca de índices de $F_\mu{}^\rho$ e troca de índices mudos. Usando as mesmas propriedades, vemos que o primeiro e o último termos da quarta linha também se cancelam. A componente $\hat{R}^4{}_{\mu 4\nu}$ fica, enfim

$$\hat{R}^4{}_{\mu 4\nu} = -\tfrac{1}{2}\phi A_\sigma \nabla_\nu F^\sigma{}_\mu - \tfrac{1}{4}\phi F_{\nu\rho}F^\rho{}_\mu + \tfrac{1}{4}\phi^2 A^\sigma A_\mu F_{\sigma\rho}F_\nu{}^\rho. \tag{4.45}$$

A componente $\hat{R}^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$ é a que exige a conta mais extensa. Pela definição, temos

$$\begin{aligned}\hat{R}^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} =& \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu,\lambda} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\lambda,\nu} + \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\lambda A}\hat{\Gamma}^A{}_{\nu\mu} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\nu A}\hat{\Gamma}^A{}_{\lambda\mu} \\ =& \left(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_\mu F_\nu{}^\lambda + A_\nu F_\mu{}^\lambda\right)\right)_{,\lambda} \\ &- \left(\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_\mu F_\lambda{}^\lambda + A_\lambda F_\mu{}^\lambda\right)\right)_{,\nu} \\ &+ \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\lambda 4}\hat{\Gamma}^4{}_{\nu\mu} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\nu 4}\hat{\Gamma}^4{}_{\lambda\mu} + \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\lambda\rho}\hat{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\rho}\hat{\Gamma}^\rho{}_{\lambda\mu}.\end{aligned} \tag{4.46}$$

Agora vamos abrir as derivadas e os termos restantes, e novamente utilizar $\partial_\nu A_\rho = \frac{1}{2}(H_{\nu\rho} + F_{\nu\rho})$. Em especial, o segundo termo da segunda linha e o primeiro termo da última linha se anulam, devido a $F^\lambda_\lambda = 0$. Temos

$$\begin{aligned}\hat{R}^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} =& \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu,\lambda} + \tfrac{1}{2}\phi A_\mu \partial_\lambda F_\nu{}^\lambda + \tfrac{1}{2}\phi A_\nu \partial_\lambda F_\mu{}^\lambda \\ &+ \tfrac{1}{4}\phi H_{\lambda\mu}F_\nu{}^\lambda + \tfrac{1}{4}\phi F_{\lambda\mu}F_\nu{}^\lambda + \tfrac{1}{4}\phi H_{\lambda\nu}F_\mu{}^\lambda + \tfrac{1}{4}\phi F_{\lambda\nu}F_\mu{}^\lambda \\ &- \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda,\nu} - \tfrac{1}{2}\phi A_\lambda \partial_\nu F_\mu{}^\lambda - \tfrac{1}{4}\phi H_{\nu\lambda}F_\mu{}^\lambda - \tfrac{1}{4}\phi F_{\nu\lambda}F_\mu{}^\lambda \\ &+ \tfrac{1}{2}\phi F^\lambda{}_\nu\left(\tfrac{1}{2}H_{\lambda\mu} - A_\rho \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2}\phi A^\rho\left(A_\lambda F_{\mu\rho} + A_\mu F_{\lambda\rho}\right)\right) \\ &+ \left(\Gamma^\lambda{}_{\lambda\rho} + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_\lambda F_\rho{}^\lambda + A_\rho F_\lambda{}^\lambda\right)\right)\left(\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_\nu F_\mu{}^\rho + A_\mu F_\nu{}^\rho\right)\right) \\ &- \left(\Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_\nu F_\rho{}^\lambda + A_\rho F_\nu{}^\lambda\right)\right)\left(\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2}\phi\left(A_\lambda F_\mu{}^\rho + A_\mu F_\lambda{}^\rho\right)\right).\end{aligned} \tag{4.47}$$

Agora temos 33 termos (3 na primeira linha, 4 na segunda, 4 na terceira, 4 na quarta, 9 na quinta e na sexta). No entanto, o termo com ${F_\lambda}^\lambda$ na quarta linha se anula, restando 30 termos. Para proceder com o cálculo em pequenos passos, vamos novamente separar os termos em tipos diferentes:

i) termos com derivadas de Γ e Γ^2 (juntos formarão o tensor de Ricci 4-dimensional);

ii) termos com derivadas de F e produtos de F com Γ (juntos formarão derivadas covariantes de F);

iii) produtos de F com H, e F^2;

iv) produtos de A^2 com F^2.

Podemos notar de antemão que os termos contendo H, do tipo (iii), desaparecem, pois o primeiro termo da segunda linha cancela o primeiro termo da quarta linha, e o terceiro termo da segunda linha cancela o terceiro termo da terceira linha. Já expressando o tensor de Ricci 4-dimensional $R_{\mu\nu} = {R^\lambda}_{\mu\lambda\nu}$, que surge dos termos de tipo (i), temos que ${\hat{R}^\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ fica

$$\begin{aligned}
{\hat{R}^\lambda}_{\mu\lambda\nu} =& R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{4}\phi F_{\lambda\mu}{F_\nu}^\lambda + \tfrac{1}{4}\phi F_{\lambda\nu}{F_\mu}^\lambda - \tfrac{1}{4}\phi F_{\nu\lambda}{F_\mu}^\lambda \\
&+ \tfrac{1}{2}\phi A_\mu \partial_\lambda {F_\nu}^\lambda + \tfrac{1}{2}\phi A_\mu {F_\nu}^\rho {\Gamma^\lambda}_{\lambda\rho} - \tfrac{1}{2}\phi A_\mu {F_\lambda}^\rho {\Gamma^\lambda}_{\nu\rho} \\
&+ \tfrac{1}{2}\phi A_\nu \partial_\lambda {F_\mu}^\lambda + \tfrac{1}{2}\phi A_\nu {F_\mu}^\rho {\Gamma^\lambda}_{\lambda\rho} - \tfrac{1}{2}\phi A_\nu {F_\rho}^\lambda {\Gamma^\rho}_{\lambda\mu} \\
&- \tfrac{1}{2}\phi A_\lambda \partial_\nu {F_\mu}^\lambda + \tfrac{1}{2}\phi A_\lambda {F_\rho}^\lambda {\Gamma^\rho}_{\nu\mu} - \tfrac{1}{2}\phi A_\lambda {F_\mu}^\rho {\Gamma^\lambda}_{\nu\rho} \\
&+ \tfrac{1}{2}\phi A_\rho {F_\nu}^\lambda {\Gamma^\rho}_{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2} A_\rho F^\lambda_{\ \nu} {\Gamma^\rho}_{\lambda\mu} \\
&+ \tfrac{1}{4}\phi^2 \big(-A^\rho A_\lambda F^\lambda_{\ \nu} F_{\mu\rho} - A^\rho A_\mu F^\lambda_{\ \nu} F_{\lambda\rho} \\
&\qquad + A_\lambda A_\nu {F_\rho}^\lambda {F_\mu}^\rho + A_\lambda A_\mu {F_\rho}^\lambda {F_\nu}^\rho \\
&\qquad - A_\nu A_\lambda {F_\rho}^\lambda {F_\mu}^\rho - A_\nu A_\mu {F_\rho}^\lambda {F_\lambda}^\rho \\
&\qquad - A_\rho A_\lambda {F_\nu}^\lambda {F_\mu}^\rho - A_\rho A_\mu {F_\nu}^\lambda {F_\lambda}^\rho \big) .
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Pela antissimetria de $F_{\lambda\nu}$, os três últimos termos da primeira linha somam-se. Assim, a primeira linha pode ser reescrita da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} + \tfrac{3}{4}\phi F_{\mu\lambda} F^\lambda_{\ \nu}. \tag{4.49}$$

Os termos da segunda, da terceira e da quarta linhas juntam-se em três termos com derivadas covariantes de F, e os termos da quinta linha cancelam-se. Assim, podemos reescrever os termos da segunda à quinta linha como

$$\tfrac{1}{2}\phi A_\mu \nabla_\lambda {F_\nu}^\lambda + \tfrac{1}{2}\phi A_\nu \nabla_\lambda {F_\mu}^\lambda - \tfrac{1}{2}\phi A_\lambda \nabla_\nu {F_\mu}^\lambda \tag{4.50}$$

Quanto aos termos do último tipo, temos os seguintes cancelamentos: o primeiro termo da sexta linha cancela-se quando somado com o primeiro termo da última linha; o segundo termo da sexta linha cancela-se com o último termo da última linha; e o primeiro termo da sétima linha cancela-se com o primeiro termo da oitava linha. Com os termos que sobram, temos, após uma pequena reorganização dos índices,

$$\tfrac{1}{4}\phi^2 \left(A_\mu A_\nu F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} + A_\mu A_\lambda F^{\lambda\rho} F_{\rho\nu} \right) . \tag{4.51}$$

Enfim, a componente $\hat{R}^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$ fica

$$\begin{aligned}\hat{R}^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} =& R_{\mu\nu} + \tfrac{3}{4}\phi F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} \\ &+ \tfrac{1}{2}\phi A_\mu \nabla_\lambda F_\nu{}^\lambda + \tfrac{1}{2}\phi A_\nu \nabla_\lambda F_\mu{}^\lambda - \tfrac{1}{2}\phi A_\lambda \nabla_\nu F_\mu{}^\lambda \\ &+ \tfrac{1}{4}\phi^2 A_\mu A_\nu F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} + \tfrac{1}{4}\phi^2 A_\mu A_\lambda F^{\lambda\rho}F_{\rho\nu}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Finalmente, somando os resultados da eqs. (4.45) e (4.52) (componentes $\hat{R}^4{}_{\mu4\nu}$ e $\hat{R}^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$), podemos obter a componente $\hat{R}_{\mu\nu}$ do tensor de Ricci em 5 dimensões. A soma dos termos é

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\mu\nu} =& R_{\mu\nu} + \tfrac{3}{4}\phi F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} \\ &+ \tfrac{1}{2}\phi A_\mu \nabla_\lambda F_\nu{}^\lambda + \tfrac{1}{2}\phi A_\nu \nabla_\lambda F_\mu{}^\lambda - \tfrac{1}{2}\phi A_\lambda \nabla_\nu F_\mu{}^\lambda \\ &+ \tfrac{1}{4}\phi^2 A_\mu A_\nu F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} + \tfrac{1}{4}\phi^2 A_\mu A_\lambda F^{\lambda\rho}F_{\rho\nu} \\ &- \tfrac{1}{2}\phi A_\sigma \nabla_\nu F^{\sigma}{}_{\mu} - \tfrac{1}{4}\phi F_{\nu\rho}F^{\rho}{}_{\mu} + \tfrac{1}{4}\phi^2 A^\sigma A_\mu F_{\sigma\rho}F_\nu{}^\rho. \end{aligned}$$

Vemos que o segundo termo da primeira linha soma-se com o segundo termo da quarta linha, resultando no fator de 1/2. Além disso, as derivadas covariantes em relação ao índice ν desaparecem, devido ao cancelamento do terceiro termo da segunda linha com o primeiro termo da quarta linha. E o segundo termo da terceira linha é cancelado com o terceiro termo da última linha. Com essas simplificações, a componente $\hat{R}_{\mu\nu}$ fica

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\mu\nu} =& R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\phi F_{\mu\lambda}F^{\lambda}_{\nu} + \tfrac{1}{4}\phi^2 A_\mu A_\nu F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} \\ &- \tfrac{1}{2}\phi A_\mu \nabla_\lambda F^{\lambda}{}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\phi A_\nu \nabla_\lambda F^{\lambda}{}_{\mu}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Utilizando as definições de $\hat{R}_{44}$ e $\hat{R}_{4\nu}$ (eqs. (4.35) e (4.40)), identificamos essas componentes na expressão acima, e podemos escrever

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{R}_{\mu\nu} =& R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\phi F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} + A_\mu A_\nu \hat{R}_{44} \\ &+ A_\mu\left(\hat{R}_{4\nu} + A_\nu \hat{R}_{44}\right) + A_\nu\left(\hat{R}_{4\mu} + A_\mu \hat{R}_{44}\right). \end{aligned}} \tag{4.54}$$

Podemos ainda calcular o escalar de curvatura do espaço-tempo 5-dimensional. Partindo da mesma definição do caso 4-dimensional (eq. (3.96)), temos

$$\hat{R} = \hat{g}^{AB}\hat{R}_{AB} = \hat{g}^{44}\hat{R}_{44} + 2\hat{g}^{4\nu}\hat{R}_{4\nu} + \hat{g}^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu}. \tag{4.55}$$

Vamos calcular os três termos separadamente. O primeiro é

$$\begin{aligned}\hat{g}^{44}\hat{R}_{44} =& \left(\phi^{-1} + A_\sigma A^\sigma\right)\tfrac{1}{4}\phi^2 F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} \\ =& \tfrac{1}{4}\phi F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} + \tfrac{1}{4}\phi^2 A_\sigma A^\sigma F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}. \end{aligned} \tag{4.56}$$

O segundo termo fica

$$\begin{aligned}2\hat{g}^{4\nu}\hat{R}_{4\nu} =& -2A^\nu\left(-\tfrac{1}{2}\phi\nabla_\lambda F^{\lambda}{}_{\nu} - A_\nu \hat{R}_{44}\right) \\ =& -\phi A^\nu \nabla_\lambda F^{\lambda}{}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\phi^2 A_\sigma A^\sigma F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Por fim, para último termo temos

$$\begin{aligned}\hat{g}^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu} =& g^{\mu\nu}\Big(R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\phi F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} + A_\mu A_\nu \hat{R}_{44} \\ &+ A_\mu\left(\hat{R}_{4\nu} + A_\nu\hat{R}_{44}\right) + A_\nu\left(\hat{R}_{4\mu} + A_\mu\hat{R}_{44}\right)\Big) \\ =& R - \tfrac{1}{2}\phi F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} + \tfrac{1}{4}\phi^2 A_\sigma A^\sigma F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} \\ &- \tfrac{1}{2}\phi A^\mu \nabla_\lambda F^{\lambda}{}_{\mu} - \tfrac{1}{2}\phi A^\nu \nabla_\lambda F^{\lambda}{}_{\nu}.\end{aligned} \tag{4.58}$$

Somando as três expressões, temos o cancelamento dos termos envolvendo derivadas covariantes, e produtos de ordem quadrática de A_μ. Expresso com os termos que restam, o escalar de curvatura em 5 dimensões fica

$$\boxed{\hat{R} = R - \tfrac{1}{4}\phi F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}.} \tag{4.59}$$

Vemos que o escalar de curvatura do espaço-tempo 5-dimensional depende do escalar de curvatura do espaço-tempo 4D, como era esperado. Mas também traz uma dependência da parte eletromagnética na forma de um produto do tensor de campo eletromagnético com todos os índices contraídos, e a presença do campo escalar ϕ atuando como "mediador" da influência da parte eletromagnética no escalar de curvatura 5D.

4.2.2 Eletromagnetismo e gravitação

Já em posse das componentes "4-dimensionais" do tensor de Ricci do espaço-tempo 5-dimensional, podemos agora calcular as componentes de caráter 4-dimensional da equação de Einstein $\hat{R}_{AB} = 0$, que define a curvatura do espaço 5-dimensional na ausência de um tensor de energia e momento em 5 dimensões. A equação se separa em 3 componentes distintas: $\hat{R}_{44} = 0$, $\hat{R}_{4\nu} = 0$ e $\hat{R}_{\mu\nu} = 0$.

Utilizando a eq. (4.35), que expressa $\hat{R}_{44}$ em termos do campo eletromagnético, vemos que a primeira das componentes da equação é

$$F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} = 0. \tag{4.60}$$

Da eq. (4.40), temos $\hat{R}_{4\nu}$ em termos do campo eletromagnético e de $\hat{R}_{44}$. Como esse último se anula devido a uma das componentes da equação, a expressão de $\hat{R}_{4\nu}$ se reduz a

$$\hat{R}_{4\nu} = -\tfrac{1}{2}\phi\nabla_\lambda F^{\lambda}{}_{\nu}. \tag{4.61}$$

Então temos que a componente $\hat{R}_{4\nu} = 0$ da equação de Einstein fica

$$\boxed{\nabla_\lambda F^{\lambda}{}_{\nu} = 0.} \tag{4.62}$$

Essa equação é uma das equações de Maxwell no espaço-tempo 4-dimensional curvo (eq. (3.68), no vácuo (sem densidade de corrente como fonte). Isso mostra que, definindo a métrica $\hat{g}_{AB}$ em termos do potencial eletromagnético A_μ, como foi definida, faz com que a curvatura desse espaço 5-dimensional que satisfaz a equação de Einstein no vácuo, implique que a equação de Maxwell seja satisfeita. Ou seja, a equação de Maxwell é parte da equação de Einstein para um universo de dimensionalidade maior, com essas definições.

Mas o eletromagnetismo surge de outra forma mais impactante com essas definições. Usando as componentes da eq. de Einstein que já foram calculadas para eliminar $\hat{R}_{44}$ e $\hat{R}_{4\nu}$ da expressão de $\hat{R}_{\mu\nu}$ (eq. (4.54)), podemos escrevê-lo como

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\phi F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu}. \tag{4.63}$$

Pela componente $\hat{R}_{\mu\nu} = 0$ da equação de Einstein, temos então que

$$R_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}\phi F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu}. \tag{4.64}$$

Essa equação não equivale à equação de Einstein no vácuo em 4 dimensões, devido ao termo envolvendo o tensor de campo eletromagnético do lado direito. Então somos motivados a procurar uma equação cujo lado esquerdo não tenha apenas o tensor de Ricci, mas também o termo $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, presente na equação de Einstein na presença de um tensor de energia e momento (eq. (3.120)).

Contraindo os índices da equação de Einstein no vácuo (eq. (4.30)), temos que $\hat{R} = 0$. Podemos expressar essa equação em termos de quantidades 4-dimensionais, utilizando a eq. (4.59), que nos dá

$$R = \tfrac{1}{4}\phi F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}. \tag{4.65}$$

Multiplicando essa equação por $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}$ e subtraindo da equação (4.64), temos

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\tfrac{1}{2}\phi F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} - \tfrac{1}{8}\phi g_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}, \tag{4.66}$$

ou ainda

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\tfrac{1}{2}\phi\left(F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} + \tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}\right). \tag{4.67}$$

Vemos que, dentro dos parênteses do lado direito da equação, surge uma expressão idêntica à do tensor de energia e momento do campo eletromagnético, definido na eq. (3.70), sem contar constantes de proporcionalidade. Essa equação portanto descreve a curvatura de um espaço-tempo 4-dimensional (lado esquerdo da equação) cujo conteúdo de energia e momento presente nesse universo é justamente oriundo do campo eletromagnético.

O sinal negativo no lado direito da equação não parece motivar a interpretação de que o lado direito seja de fato um tensor de energia e momento, a não ser que permitamos que o campo escalar ϕ (que no momento estamos supondo constante) assuma um valor negativo – no limite em que o efeito de ϕ é negligenciável podemos tomar $\phi = -1$. Isso mostra que, para que nossa interpretação de A^{μ} como potencial eletromagnético seja consistente, é preciso que a métrica 5-dimensional tenha uma assinatura da forma $(+,-,-,-,-)$, ou seja, é preciso que a coordenada $\hat{x}^4$ seja de caráter espacial.

Assim, podemos fazer uma conexão da constante gravitacional G, presente na equação de Einstein original – que estabelece a grandeza da relação entre curvatura do espaço e energia –, e a constante k utilizada para acoplar o potencial eletromagnético $\tilde{A}^{\mu}$ com a métrica $\hat{g}^{AB}$, tendo sido definido $\hat{g}^{4\mu} = -A^{\mu} = -k\tilde{A}^{\mu}$. Identificando o lado direito da eq. (4.67) como

$$-\tfrac{1}{2}\phi k^2 \mu_0 T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu}, \tag{4.68}$$

onde $T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu}$ é o tensor de energia e momento eletromagnético, e impondo que essa expressão seja equivalente ao lado direito da equação de Einstein na presença de um campo eletromagnético:

$$\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{4.69}$$

onde interpretamos ϕ como sendo uma "dosagem" da contribuição de energia e momento do campo eletromagnético à curvatura do espaço, ou seja,

$$T_{\mu\nu} = -\phi T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu}, \tag{4.70}$$

nós obtemos uma relação entres as constantes k, G, μ_0 e c:

$$\frac{k^2\mu_0}{2} = \frac{8\pi G}{c^4}, \tag{4.71}$$

ou, ainda, uma expressão para k em termos de constantes conhecidas

$$k = \frac{4}{c^2}\sqrt{\frac{\pi G}{\mu_0}}. \tag{4.72}$$

Em unidades do Sistema Internacional, a constante vale aproximadamente

$$k = 5.739 \times 10^{-19}\,\frac{\mathrm{C}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}, \tag{4.73}$$

ou, em termos da carga fundamental e,

$$k = 3.587\,\frac{\mathrm{e}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}. \tag{4.74}$$

4.3 O campo escalar

Em todo desenvolvimento da teoria 5-dimensional até agora fizemos a suposição de que ϕ é um campo constante. A motivação da aproximação é para que os cálculos sejam simplificados, endossada por estarmos interessados majoritariamente na presença de A_μ. Agora que já recuperamos as equações de campo do eletromagnetismo da métrica que definimos, podemos explorar como a variação do campo escalar ϕ modifica as equações de campo.

O cálculo das componentes do tensor de Ricci fica muito mais trabalhoso ao permitir que ϕ varie. Por isso, vamos tomar como referência os resultados obtidos por L. L. Williams [7] utilizando um software de álgebra tensorial.

As componentes da conexão passam a incorporar mais termos, proporcionais a $\partial_\mu\phi$. Se denotarmos as componentes da conexão do caso em que ϕ é constante por $\tilde{\Gamma}^A{}_{BC}$, os resultados de Williams são

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^4{}_{44} - \tilde{\Gamma}^4{}_{44} &= \tfrac{1}{2}A^\rho\partial_\rho\phi & \hat{\Gamma}^\lambda{}_{44} - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{44} &= -\tfrac{1}{2}\partial^\lambda\phi,\\
\hat{\Gamma}^4{}_{4\nu} - \tilde{\Gamma}^4{}_{4\nu} &= \tfrac{1}{2}A_\nu A^\rho\partial_\rho\phi + \tfrac{1}{2}\phi^{-1}\partial_\nu\phi, & \hat{\Gamma}^\lambda{}_{4\nu} - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{4\nu} &= -\tfrac{1}{2}A_\nu\partial^\lambda\phi,\\
\hat{\Gamma}^4{}_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^4{}_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2}\phi^{-1}\left(A_\mu\partial_\nu\phi + A_\nu\partial_\mu\phi\right) & \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2}A_\mu A_\nu\partial^\lambda\phi.\\
&\quad - \tfrac{1}{2}A_\mu A_\nu A^\rho\partial_\rho\phi, & &
\end{aligned} \tag{4.75}$$

As quantidades que nos interessam no momento, no entanto, são as componentes do tensor de Ricci em 5 dimensões. De acordo com Williams, a componente $\hat{R}_{44}$ fica

$$\hat{R}_{44} = \tfrac{1}{4}\phi^2 F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} + \tfrac{1}{4}\phi^{-1}\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi - \tfrac{1}{2}\Box\phi, \tag{4.76}$$

onde $\Box \equiv \nabla_\lambda \nabla^\lambda$ é o operador d'Alembertiano. Temos que $\nabla_\lambda \phi = \partial_\lambda \phi$, pois ϕ é um escalar, mas $\Box\phi = \nabla_\lambda \partial^\lambda \phi = \partial_\lambda \partial^\lambda \phi - \partial^\rho \phi \Gamma^\lambda{}_{\lambda\rho}$. A componente $\hat{R}_{4\nu}$ fica

$$\hat{R}_{4\nu} = -\tfrac{1}{2}\nabla_\lambda F^\lambda{}_\nu + \tfrac{3}{4}\nabla_\lambda \phi F^\lambda{}_\nu + A_\nu \hat{R}_{44}. \tag{4.77}$$

A última das componentes do tensor de Ricci fica

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\mu\nu} =& R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\phi F_{\mu\lambda}F^\lambda{}_\nu - \tfrac{1}{2}\phi^{-1}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \tfrac{1}{4}\phi^{-2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \\ &+ A_\mu A_\nu \hat{R}_{44} + A_\mu\left(\hat{R}_{4\nu} - A_\nu\hat{R}_{44}\right) + A_\nu\left(\hat{R}_{4\mu} - A_\mu\hat{R}_{44}\right).\end{aligned} \tag{4.78}$$

Temos também que o escalar de curvatura do espaço 5-dimensional fica

$$\hat{R} = R - \tfrac{1}{4}\phi F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} + \tfrac{1}{2}\phi^{-2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \phi^{-1}\Box\phi. \tag{4.79}$$

Agora as equações de campo passam a conter derivadas de ϕ. Pela eq. (4.76), a componente $\hat{R}_{44} = 0$ da eq. de Einstein no vácuo fica

$$\Box\phi = \tfrac{1}{2}\phi^{-1}\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi + \tfrac{1}{2}\phi^2 F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}. \tag{4.80}$$

Da eq. (4.77), e com $\hat{R}_{44} = 0$, obtemos para a componente $\hat{R}_{4\nu} = 0$ da eq. de Einstein a seguinte equação

$$\nabla_\lambda F^{\lambda\nu} = \tfrac{3}{2}\nabla_\lambda\phi F^{\lambda\nu}, \tag{4.81}$$

a qual obtemos multiplicando $\hat{R}_{4\nu} = 0$ pela métrica 4-dimensional e contraindo o índice livre para torná-lo contravariante. A última das componentes, $\hat{R}_{\mu\nu} = 0$, fica

$$R_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}\phi F_{\mu\lambda}F^\lambda{}_\nu + \tfrac{1}{2}\phi^{-1}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \tfrac{1}{4}\phi^{-2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi. \tag{4.82}$$

Fazendo o mesmo procedimento feito na seção anterior, vamos buscar construir a equação de Einstein do espaço 4-dimensional na presença de um tensor de energia e momento. Tomando o traço da equação de Einstein no vácuo 5-dimensional temos $\hat{R} = 0$, que, com a eq. (4.79), nos dá

$$R = \tfrac{1}{4}\phi F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} - \tfrac{1}{2}\phi^{-2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi + \phi^{-1}\nabla\phi. \tag{4.83}$$

Calculando $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ com as eqs. (4.82) e (4.83), temos

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R =& -\tfrac{1}{2}\phi\left(F_{\mu\lambda}F^\lambda{}_\nu + \tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}\right) \\ &+ \tfrac{1}{2}\phi^{-1}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Box\phi\right) \\ &- \tfrac{1}{4}\phi^{-2}\left(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi\right).\end{aligned} \tag{4.84}$$

A equação pode ser bastante simplificada ao ser escrita em termos de outro campo escalar ψ definido como $\psi^2 = -\phi$. Temos

$$\nabla_\nu\phi = -\nabla_\nu\psi^2 = -2\psi\nabla_\nu\psi, \tag{4.85}$$

e, aplicando a derivada covariante mais uma vez,

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = -\nabla_\mu\left(2\psi\nabla_\nu\psi\right) = -2\nabla_\mu\psi\nabla_\nu\psi - 2\psi\nabla_\mu\nabla_\nu. \tag{4.86}$$

Escrevendo a eq. (4.84) em termos de ψ, os termos com produtos de derivadas de primeira ordem cancelam-se, ficando apenas derivadas de segunda ordem de ψ:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R =& \tfrac{1}{2}\psi\left(F_{\mu\lambda}F^{\lambda}_{\ \nu} + \tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}\right) \\ &+ \psi^{-1}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\psi - g_{\mu\nu}\Box\psi\right). \end{aligned} \tag{4.87}$$

Vemos que o campo ψ também contribui com energia e momento para a curvatura do espaço-tempo 4-dimensional.

A eq. (4.80) também pode ser escrita em termos de ψ. Ela também é simplifiada, ficando apenas

$$\Box\psi = \tfrac{1}{4}\psi^3 F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}, \tag{4.88}$$

que é uma equação de Klein-Gordon não homogênea [8] – pois possui como fonte um termo que acopla o campo ψ com o tensor de campo eletromagnético –, para um campo ψ de massa nula.

4.4 Análise da geodésica

A equação de movimento de uma partícula em 4 dimensões era a geodésica (eq. (3.15). Em 5 dimensões, a eq. de movimento é totalmente análoga, dada por

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}^A}{\mathrm{d}\hat{\tau}} + \hat{\Gamma}^A_{\ BC}\hat{u}^B\hat{u}^C = 0, \tag{4.89}$$

onde as quantidades denotadas com um acento circunflexo correspondem a quantidades definidas no espaço 5-dimensional. Nós conhecemos a conexão $\hat{\Gamma}^A_{\ BC}$, mas precisamos definir o tempo próprio $\hat{\tau}$ e a 5-velocidade $\hat{u}^A$.

Na seção 1.1, definimos o intervalo de tempo próprio $\mathrm{d}\tau$ como a distância (medida em unidade de tempo) entre dois pontos separados por um intervalo tipo tempo. Explorando a invariância de $\mathrm{d}\tau$ frente a troca de coordenadas, o definimos na Relatividade Especial pela eq. (2.10) e na Relatividade Geral pela eq. (3.4). Aqui, vamos definir o tempo próprio $\mathrm{d}\hat{\tau}$ como um invariante frente a trocas de coordenadas em 5 dimensões, de forma análoga ao caso 4D. A definição é

$$c^2\mathrm{d}\hat{\tau}^2 = \hat{g}_{AB}\mathrm{d}\hat{x}^A\hat{\mathrm{d}}x^B. \tag{4.90}$$

Para relacionar o tempo próprio $\mathrm{d}\hat{\tau}$ em 5D com o conhecido $\mathrm{d}\tau$ definido em 4-dimensões, abrimos sua definição em termos da métrica 5D (eq. (4.14)). Lembrando que tomamos $\hat{x}^\mu = x^\mu$ e $\hat{x}^4 = y$, temos

$$\begin{aligned} c^2\mathrm{d}\hat{\tau}^2 =& \left(g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu\right)\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + 2\phi A_\mu\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}y + \phi\mathrm{d}y^2 \\ =& g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + \phi\left(A_\mu\mathrm{d}x^\mu + \mathrm{d}y\right)^2. \end{aligned} \tag{4.91}$$

Identificamos o primeiro termo como a expressão $c^2\mathrm{d}\tau^2$, onde $\mathrm{d}\tau$ o tempo próprio em 4-dimensões. Lembrando que $u^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$, e definindo

$$\omega \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \tag{4.92}$$

temos

$$c^2 \mathrm{d}\hat{\tau}^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2 + \phi \left(A_\mu u^\mu + \omega\right)^2 \mathrm{d}\tau^2. \tag{4.93}$$

Se definirmos $\beta \equiv \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\hat{\tau}$, encontramos a seguinte expressão

$$\beta = \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\left(A_\mu u^\mu + \omega\right)^2\right)^{-1/2}, \tag{4.94}$$

onde escolhemos o valor positivo da raiz para que $\mathrm{d}\hat{\tau}$ e $\mathrm{d}\tau$ tenham o mesmo sinal.

A 5-velocidade é definida como

$$\hat{u}^A \equiv \frac{\mathrm{d}\hat{x}^A}{\mathrm{d}\hat{\tau}}. \tag{4.95}$$

Para relacionar as componentes $\mu = 0, \ldots, 3$ da 5-velocidade com as componentes da 4-velocidade, lembramos que $\hat{x}^\mu = x^\mu$, daí temos

$$\hat{u}^\mu = \frac{\mathrm{d}\hat{x}^\mu}{\mathrm{d}\hat{\tau}} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\hat{\tau}} = u^\mu \beta, \tag{4.96}$$

onde utilizamos a regra da cadeia. Da mesma forma, como $\hat{x}^4 = \omega$, temos

$$\hat{u}^4 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\hat{\tau}} = \omega\beta. \tag{4.97}$$

Para analisar a eq. (4.89) em termos de quantidades em 4 dimensões, precisamos obter $\mathrm{d}\hat{u}^A/\mathrm{d}\hat{\tau}$. Para as componentes $\mu = 0, \ldots, 3$, temos

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}^\mu}{\mathrm{d}\hat{\tau}} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\hat{\tau}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(u^\mu \beta\right) = \beta^2 \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \beta\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau}u^\mu. \tag{4.98}$$

De forma análoga, a componente 4 fica

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}^4}{\mathrm{d}\hat{\tau}} = \beta^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\tau} + \beta\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau}\omega. \tag{4.99}$$

Assim, a geodésica do espaço 5-dimensional (eq. (4.89)) pode ser separada em uma equação vetorial em termos de $\mathrm{d}u^\lambda/\mathrm{d}\tau$ (já dividindo a equação por β^2):

$$\frac{\mathrm{d}u^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau}u^\lambda + \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + 2\hat{\Gamma}^\lambda{}_{4\nu}\omega u^\nu + \hat{\Gamma}^\lambda{}_{44}\omega^2 = 0, \tag{4.100}$$

e uma equação de movimento na 5ª dimensão, em termos de $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\tau$:

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau}\omega + \hat{\Gamma}^4{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + 2\hat{\Gamma}^4{}_{4\nu}\omega u^\nu + \hat{\Gamma}^4{}_{44}\omega^2 = 0. \tag{4.101}$$

Vemos que a equação de movimento (4.100) depende do fator $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\tau$, que pode ser calculado pelo quadrado do inverso da eq. (4.94), e fica

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\beta^2}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau} =& \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\left(A_\mu u^\mu + \omega\right)^2 \\ &+ \frac{2\phi}{c^2}\left(A_\mu u^\mu + \omega\right)\left(\frac{\mathrm{d}A_\mu}{\mathrm{d}\tau}u^\mu + A_\mu\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\tau}\right). \end{aligned} \tag{4.102}$$

O fator $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\tau$ pode ser eliminado da equação substituindo-o pela eq. (4.101), e isolando novamente o termo $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\tau$, que surge também da eq. (4.101). As variações de ϕ e A_μ em relação ao tempo próprio podem ser expressas como variações em relação às coordenadas do espaço-tempo 4D, através de uma regra da cadeia. Temos

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \partial_\mu \phi u^\mu, \tag{4.103}$$

e

$$\frac{\mathrm{d}A_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \nabla_\nu A_\mu u^\nu = \partial_\nu A_\mu u^\nu - A_\rho \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} u^\mu, \tag{4.104}$$

onde, nesse último caso, a variação que aparece na regra da cadeia é necessariamente uma derivada covariante, pois A_μ é uma quantidade vetorial. A variação de A_μ aparece na equação (4.102) contraída com a 4-velocidade u^μ. O termo envolvendo a derivada parcial fica

$$\partial_\nu A_\mu u^\nu u^\mu = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu A_\nu\right) u^\nu u^\mu = \frac{1}{2} H_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \tag{4.105}$$

onde foi feita uma troca entre os índices mudos μ e ν em um dos termos e explorou-se a simetria do produto das velocidades.

Todas essas expressões se juntam na eq. (4.100) para formar a equação de movimento de um corpo em um subespaço 4-dimensional imerso no espaço 5-dimensional que engloba a teoria.

4.4.1 A força de Lorentz

A equação de movimento (4.100) fica bastante complicada, mas podemos fazer algumas aproximações para simplificá-la e obter uma conexão com o eletromagnetismo.

Vamos tomar novamente que ϕ seja constante, e vamos tomar seu valor como simplesmente $\phi = -1$. Também vamos tomar $A_\mu = 0$, ainda que sua derivada não seja nula. Essa escolha pode ser vista como uma escolha de coordenadas onde A_μ se anule localmente.

Com essas aproximações, o valor de β é

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2/c^2}} \tag{4.106}$$

Na equação de movimento na direção da 5ª coordenada, eq. (4.101), substituímos as componentes da conexão, da eq. (4.28), das quais apenas $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}$ é não nula dentro das aproximações. A equação fica

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau}\omega + \frac{1}{2} H_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0. \tag{4.107}$$

Pela eq. (4.102), a variação de β fica

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\beta^2}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau} =& \frac{2\omega}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}A_\mu}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\tau}\right) \\
=& \frac{2\omega}{c^2}\left(\frac{1}{2} H_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\tau}\right) \\
=& \frac{2\omega}{c^2}\left(\frac{1}{2} H_{\mu\nu} u^\mu u^\nu - \frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau}\omega - \frac{1}{2} H_{\mu\nu} u^\mu u^\nu\right) \\
=& -\frac{2\omega^2}{\beta c^2}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau},
\end{aligned} \tag{4.108}$$

onde usamos a eq. (4.104) na segunda linha e a eq. (4.107) na terceira. Temos que $\beta \neq 2\omega^2/c^2$, e portanto $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\tau = 0$.

Agora, a partir da eq. (4.100), tomando as componentes da conexão da eq. (4.28), temos a seguinte equação de movimento

$$\frac{\mathrm{d}u^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\lambda_{\ \mu\nu} u^\mu u^\nu + F^\lambda_{\ \nu} u^\nu \omega = 0. \tag{4.109}$$

Os dois primeiros termos equivalem remetem à geodésica da Relatividade Geral (eq. (3.15), onde aparece a aceleração gravitacional na componente da conexão do espaço-tempo 4D. O último termo remete à força de Lorentz, presente na equação de movimento do eletromagnetismo (eq. (2.45)), que pode ser reescrita como

$$\frac{\mathrm{d}u^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = \frac{q}{m} \tilde{F}^\lambda_{\ \nu} u^\nu, \tag{4.110}$$

onde q e m são a carga e a massa da partícula, e $\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu$ é o tensor de campo eletromagnético com a dimensão usual, tal que $F_{\mu\nu} = k\tilde{F}_{\mu\nu}$. Interpretando o último termo da eq. (4.109) como de fato referente à força de Lorentz, devemos impor que

$$\omega = -\frac{q}{mk}, \tag{4.111}$$

ou seja, a "velocidade" ω na direção da 5ª coordenada é proporcional à razão carga sobre massa do corpo.

Outra maneira de interpretar é definindo um 5-momento análogo ao 4-momento definido na eq. (2.32), como $\hat{p}^A$, tal que

$$\hat{p}^A = m\hat{u}^A = \beta\left(mu^\mu, m\omega\right) = \beta\left(p^\mu, -\frac{q}{k}\right), \tag{4.112}$$

onde então a 5ª componente do 5-momento de uma partícula seria o fator β vezes a própria carga da partícula, normalizada à dimensão de momento pela constante k.

4.5 Compactificação de Klein

Em 1926, Oskar Klein [4] propôs um modelo para explicar a necessidade da condição do cilindro – $\partial_4 \hat{g}_{AB}$ – para a obtenção das equações de Maxwell a partir da equação de Einstein em 5 dimensões. Klein sugeriu que a 5ª dimensão fosse compactificada, e tivesse um comprimento suficientemente pequeno para que a métrica dependesse de forma desprezível de y. A compactificação sugerida por ele consistia em pensar que um caminho em linha reta ao longo da 5ª coordenada fosse cíclico. Pictoricamente, podemos fazer analogia das 4 coordenadas originais do espaço-tempo com a direção axial da superfície de um cilindro, enquanto associamos a 5ª dimensão com a direção azimutal da superfície cilíndrica.

Inspirado pelas ideias da Mecânica Quântica que despontavam na época, ele sugeriu que o diâmetro L ao longo da 5ª coordenada, por ser pequeno, teria efeitos quânticos predominantes. Dessa forma, supondo algum tipo de matéria presente no universo 5-dimensional, ela seria descrita por uma função de onda $\psi\left(x^\mu, y\right)$ dependente das 5 dimensões. Devido ao caráter cíclico da 5ª direção, essa função de onda pode ser escrita em termos da uma série de Fourier da forma

$$\psi\left(x^{\mu},\omega\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{n}\left(x^{\mu}\right)\exp\left(\mathrm{i}n\frac{y}{L}\right). \tag{4.113}$$

Na Mecânica Quântica Relativística, o operador de 4-momento $P^{\mu}=(H/c,\vec{P})$ atuando sobre uma função de onda $\psi\left(x^{\mu}\right)$ corresponde a uma derivada da função, através da relação

$$P^{\mu}\psi\left(x^{\nu}\right)=\mathrm{i}\hbar\partial^{\mu}\psi\left(x^{\nu}\right). \tag{4.114}$$

Assim, podemos associar ao 5-momento definido na eq. (4.112) a um operador $\hat{P}^{A}$, relacionado com a seguinte operação diferencial em 5 dimensões:

$$\hat{P}^{A}\psi\left(x^{\mu},y\right)=\mathrm{i}\hbar\beta\hat{\partial}^{A}\psi\left(x^{\mu},y\right), \tag{4.115}$$

onde $\hat{\partial}^{A}=\hat{g}^{AB}\hat{\partial}_{B}$, e $\partial_{B}=\partial/\partial\hat{x}^{B}$, e a presença de β na definição vem de que $\hat{p}^{\mu}=\beta p^{\mu}$. As componentes 4D do 5-momento ficam

$$\hat{P}^{\mu}\psi=-\mathrm{i}\hbar\beta A^{\mu}\hat{\partial}_{4}\psi+\mathrm{i}\hbar\beta g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\psi, \tag{4.116}$$

e, para a 5ª componente,

$$\hat{P}^{4}\psi=\mathrm{i}\hbar\beta\left(\phi^{-1}+A_{\sigma}A^{\sigma}\right)\hat{\partial}_{4}\psi-\mathrm{i}\hbar\beta A^{\lambda}\partial_{\lambda}\psi. \tag{4.117}$$

Tomando $A^{\mu}=0$ e $\phi=-1$ para simplificar, as componentes ficam

$$\hat{P}^{\mu}\psi=\mathrm{i}\hbar\beta\partial^{\mu}\psi, \qquad \hat{P}^{4}\psi=-\mathrm{i}\hbar\beta\hat{\partial}_{4}\psi. \tag{4.118}$$

Assim, cada termo do somatório na eq. (4.113) corresponde a uma autofunção de $\hat{P}^{4}$. Para um n fixo, podemos aplicar a 5ª componente do operador 5-momento sobre $\psi\left(x^{\mu},\omega\right)$ e obter

$$\begin{aligned}\hat{P}^{4}\psi_{n}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}ny/L)}=&\mathrm{i}\hbar\beta\psi_{n}\hat{\partial}_{4}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}ny/L)}\\=&-\frac{\hbar n}{L}\beta\psi_{n}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}ny/L)}.\end{aligned} \tag{4.119}$$

Portanto os autovalores de $\hat{P}^{4}$ são $\hat{p}^{4}=-\hbar n/L$. Da definição do 5-momento na eq. (4.112), temos que $\hat{p}^{4}=-\beta q/k$, de onde podemos obter autovalores de carga, tais que, para cada n,

$$q=n\frac{\hbar k}{L}. \tag{4.120}$$

Esse resultado evidencia a quantização da carga, que assume valores múltiplos de uma carga fundamental dada por constantes $\hbar$ e k, e pelo diâmetro da 5ª dimensão compactificada. Impondo que a carga fundamental seja o valor conhecido e, temos

$$eL=\hbar k, \tag{4.121}$$

de onde podemos estimar o diâmetro L, que resulta em aproximadamente

$$L=3.784\times10^{-34}\,\mathrm{m}=23.42\,\ell_{\mathrm{P}}, \tag{4.122}$$

onde

$$\ell_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616 \times 10^{-35}\,\mathrm{m} \tag{4.123}$$

é o comprimento de Planck.

Além de explicar a não dependência da métrica com a 5ª dimensão, a compactificação do espaço 5-dimensional introduzida por Oskar Klein acabou também por explicar a quantização da carga elétrica. Com o valor da carga fundamental já conhecido, a pequena escala do diâmetro ao longo da 5ª dimensão é reafirmada, com um resultado envolvendo o icônico comprimento de Planck.

Podemos ainda fazer uma estimativa da massa de uma partícula no universo 5D. Como estamos tomando o vácuo em 5 dimensões, esperamos que a partícula não possua massa da perspectiva 5-dimensional, o que pode ser definido de maneira análoga à eq. (2.34), como

$$\hat{p}_A \hat{p}^A = \hat{g}_{AB} \hat{p}^A \hat{p}^B = 0, \tag{4.124}$$

que pode ser escrito separando-se a componente 4 das demais, utilizando a definição da métrica (eq. (4.14)) e do 5-momento (eq. (4.112)), como

$$\begin{aligned} 0 =& \left(g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu\right) \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu + \phi A_\mu \hat{p}^\mu \hat{p}^4 + \phi A_\nu \hat{p}^4 + \phi \hat{p}^4 \hat{p}^4 \\ =& g_{\mu\nu} \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu + \phi \left(A_\mu \hat{p}^\mu + \hat{p}^4\right)^2 \\ =& p_\mu p^\mu \beta^2 + \phi \left(A_\mu p^\mu - \frac{q}{k}\right)^2 \beta^2. \end{aligned} \tag{4.125}$$

Utilizando a eq. (2.34), que associa o 4-momento à massa m da partícula, temos

$$m^2 c^2 + \phi \left(A_\mu P^\mu - \frac{q}{k}\right)^2 = 0. \tag{4.126}$$

Tomando o limite $A_\mu = 0$ e $\phi = -1$, chegamos em uma relação entre a massa e a carga de uma partícula no universo 5-dimensional:

$$m = \frac{q}{ck}. \tag{4.127}$$

Pelo resultado da quantização da carga, chegamos também em uma quantização da massa. Podemos estimar a massa fundamental tomando $q = e$. Obtemos

$$m_0 = \frac{e}{ck} \approx 9.29 \times 10^{-10}\,\mathrm{kg}. \tag{4.128}$$

Podemos comparar o resultado com a massa do elétron, uma partícula fundamental que possui carga $-e$. Sua massa é $m_e \approx 9.109 \times 10^{-31}$ kg. A razão entre a massa estimada e a massa do elétron é

$$\frac{m_0}{m_e} \approx 1.020 \times 10^{21}. \tag{4.129}$$

A massa estimada m_0 é uma previsão da menor massa de uma partícula, quando essa tem carga de módulo $|q| = e$. Portanto esperaríamos que as partículas que conhecemos tivessem massas múltiplas a m_0 por um fator associado às suas cargas. No entanto, a massa do elétron é extremamente menor do que a massa fundamental prevista.

Essa argumentação é feita de maneira similar por Wesson [6, p. 22]. Somos levados a concluir que a compactificação de Klein, apesar de trazer resultados interessantes, não é totalmente consistente com a física conhecida. Apesar de haver surgido outras teorias de compactificação para corrigir esse problema, a ideia da unificação da gravitação e do eletromagnetismo não foi fortalecida. Mas teorias que exploram Relatividade Geral em dimensões extras continuaram a surgir, com outras interpretações.

Capítulo 5

Teoria da Matéria Induzida: *Energia e momento como geometria*

Em 1992, Paul S. Wesson [6, 5] introduziu uma alternativa não-compactificada da teoria de Kaluza-Klein. Em sua teoria, ao invés de tomar a condição do cilindro, como havia sido feito anteriormente, Wesson permitiu que derivadas em relação à $5^{\underline{a}}$ coordenada aparecessem no cálculo da equação de Einstein. Seu objetivo era obter um tensor de energia e momento efetivo, assim como, na teoria de Kaluza-Klein, um tensor de energia e momento dependente da métrica em 5 dimensões foi obtido, apenas como consequência da geometria de um espaço-tempo com uma dimensão extra.

A métrica da teoria é a métrica usual de Kaluza-Klein (eq. (4.14). No entanto, como não impomos mais a condição do cilindro, podemos livremente fazer troca de coordenadas. No caso anterior, em que $\partial_4 \hat{g}_{AB} = 0$, uma troca genérica de coordenadas não mantinha a condição intacta necessariamente. Assim, podemos escolher um sistema de coordenadas em que $A_\mu = 0$. Essa escolha é análoga à escolha, no eletromagnetismo, de um referencial onde um dos campos, elétrico ou magnético, anula-se.

Também, Wesson permitiu que a assinatura da métrica 5D fosse tanto $(+,-,-,-,+)$ quanto $(+,-,-,-,-)$. Para evidenciar essa arbitrariedade, definimos $\phi = \epsilon\psi^2$, onde $\epsilon = \pm 1$ é o parâmetro que define a assinatura, e ψ é a nova variável escalar da métrica. Assim, a métrica toma a seguinte forma

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \epsilon\psi^2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{g}^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \epsilon\psi^{-2} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Ao calcular as componentes da conexão, aparecerão derivadas em relação a $\hat{x}^4$ de $g_{\mu\nu}$ e ψ. Para simplificar a notação, vamos tomar

$$\partial_4 g_{\mu\nu} \equiv \dot{g}_{\mu\nu}, \qquad \partial_4\psi \equiv \dot{\psi}. \tag{5.2}$$

A conexão com todos os índices covariantes é definida como na eq. (4.16). A componente $\hat{\Gamma}_{444}$ fica

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{444} =& \frac{1}{2}\left(-\partial_4\hat{g}_{44} + \partial_4\hat{g}_{44} + \partial_4\hat{g}_{44}\right) \\ =& \frac{1}{2}\partial_4\left(\epsilon\psi^2\right) = \epsilon\psi\dot{\psi}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

A componente $\hat{\Gamma}_{44\nu}$ fica

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{44\nu} =& \frac{1}{2}\left(-\partial_4 \hat{g}_{4\nu} + \partial_4 \hat{g}_{\nu 4} + \partial_\nu \hat{g}_{44}\right)\\ =&\frac{1}{2}\partial_\nu\left(\epsilon\psi^2\right) = \epsilon\psi\partial_\nu\psi,\end{aligned} \tag{5.4}$$

onde usamos que $\hat{g}_{4\nu} = 0$. A outra componente vetorial, $\hat{\Gamma}_{\lambda 44}$, fica

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{\lambda 44} =& \frac{1}{2}\left(-\partial_\lambda \hat{g}_{44} + \partial_4 \hat{g}_{4\lambda} + \partial_4 \hat{g}_{\lambda 4}\right)\\ =& -\frac{1}{2}\partial_\lambda\left(\epsilon\psi^2\right) = \epsilon\psi\partial_\nu\psi.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Agora, as componentes de apenas um índice 5-dimensional, que na teoria de Kaluza-Klein estavam ligados ao potencial eletromagnético, agora ficam

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{4\mu\nu} =& \frac{1}{2}\left(-\partial_4 \hat{g}_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu 4} + \partial_\nu g_{4\mu}\right)\\ =& -\frac{1}{2}\partial_4 g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\dot{g}_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{5.6}$$

e, a outra componente,

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{\lambda 4\nu} =& \frac{1}{2}\left(-\partial_\lambda \hat{g}_{4\nu} + \partial_4 \hat{g}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \hat{g}_{\lambda 4}\right)\\ =& \frac{1}{2}\partial_4 g_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\dot{g}_{\lambda\nu}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Enfim, a última das componentes, $\hat{\Gamma}_{\lambda\mu\nu}$, fica igual à conexão 4-dimensional, pois $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, ou seja,

$$\hat{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\mu\nu}. \tag{5.8}$$

Vemos que as componentes da conexão ficam bastante simples, sendo apenas as combinações possíveis de derivadas (em relação ao espaço-tempo ou à 5ª coordenada) em relação às componentes da métrica.

Para obter as componentes da conexão com o primeiro índice contravariante, contraímos as componentes totalmente covariantes com a métrica: $\hat{\Gamma}^C{}_{AB} = \hat{g}^{CD}\hat{\Gamma}_{DAB}$. Como a métrica é diagonal, a relação fica simplesmente

$$\hat{\Gamma}^\lambda{}_{AB} = g^{\lambda\rho}\hat{\Gamma}_{\rho AB}, \qquad \hat{\Gamma}^4{}_{AB} = \epsilon\psi^{-2}\hat{\Gamma}_{4AB}. \tag{5.9}$$

Notando que $\epsilon^2 = (\pm 1)^2 = 1$, temos que as componentes da conexão com o primeiro índice contravariante ficam

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\Gamma}^4{}_{44} =& \psi^{-1}\dot{\psi}, & \hat{\Gamma}^\lambda{}_{44} &= -\epsilon\psi\partial^\nu\psi,\\ \hat{\Gamma}^4{}_{4\nu} =& \psi^{-1}\partial_\nu\psi, & \hat{\Gamma}^\lambda{}_{4\nu} &= \tfrac{1}{2}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\rho\nu},\\ \hat{\Gamma}^4{}_{\mu\nu} =& -\tfrac{1}{2}\epsilon\psi^{-1}\dot{g}_{\mu\nu}, & \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} &= \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}.\end{aligned}} \tag{5.10}$$

5.1 Tensores de Curvatura

Lembrando que o tensor de Ricci é definido como $\hat{R}_{AB} = \hat{R}^C{}_{ACB}$, e o tensor de Riemann é dado por $\hat{R}^D{}_{ACB} = \hat{\Gamma}^D{}_{AB,C} - \hat{\Gamma}^D{}_{AC,B} + \hat{\Gamma}^D{}_{CE}\hat{\Gamma}^E{}_{AB} - \hat{\Gamma}^D{}_{BE}\hat{\Gamma}^E{}_{AC}$, podemos calcular as componentes do tensor de Ricci. Vamos calcular a componente $\hat{R}_{44}$:

$$\hat{R}_{44} = \hat{R}^4{}_{444} + \hat{R}^\lambda{}_{4\lambda 4} = \hat{R}^\lambda{}_{4\lambda 4}, \tag{5.11}$$

onde a primeira das componentes do tensor de Riemann se anula devido à sua antissimetria na troca dos últimos índices. Para a outra componente, temos

$$\begin{aligned}\hat{R}^\lambda{}_{4\lambda 4} =& \hat{\Gamma}^\lambda{}_{44,\lambda} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{4\lambda,4} + \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\lambda A}\hat{\Gamma}^A{}_{44} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{4A}\hat{\Gamma}^A{}_{4\lambda}\\ =& \left(-\epsilon\psi\partial^\lambda\psi\right)_{,\lambda} - \left(\tfrac{1}{2}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\right)_{,4}\\ &+ \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\lambda 4}\hat{\Gamma}^4{}_{44} + \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\lambda\rho}\hat{\Gamma}^\rho{}_{44} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{44}\hat{\Gamma}^4{}_{4\lambda} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{4\rho}\hat{\Gamma}^\rho{}_{4\lambda}\\ =& -\epsilon\partial_\lambda\psi\partial^\lambda\psi - \epsilon\psi\partial_\lambda\partial^\lambda\psi - \tfrac{1}{2}\dot{g}^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho} - \tfrac{1}{2}g^{\lambda\rho}\ddot{g}_{\lambda\rho}\\ &+ \tfrac{1}{2}\psi^{-1}\dot{\psi}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho} - \epsilon\psi\partial^\rho\psi\Gamma^\lambda{}_{\lambda\rho} + \epsilon\partial_\lambda\psi\partial^\lambda\psi - \tfrac{1}{4}g^{\lambda\sigma}g^{\rho\gamma}\dot{g}_{\sigma\rho}\dot{g}_{\gamma\lambda}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

O primeiro termo da primeira linha cancela-se com o terceiro termo da segunda linha. O segundo termo da primeira linha pode ser juntado ao segundo termo da segunda linha em uma derivada covariante. Assim, a componente em questão do tensor de Ricci fica

$$\begin{aligned}\hat{R}_{44} =& -\epsilon\psi\Box\psi - \tfrac{1}{2}\big(g^{\lambda\rho}\ddot{g}_{\lambda\rho} + \dot{g}^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\\ &- \psi^{-1}\dot{\psi}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho} + \tfrac{1}{2}g^{\lambda\sigma}g^{\rho\gamma}\dot{g}_{\sigma\rho}\dot{g}_{\gamma\lambda}\big),\end{aligned} \tag{5.13}$$

onde $\Box = \nabla_\lambda\nabla^\lambda$ é o operador d'Alembertiano em termos de derivadas covariantes, e $\ddot{g}_{\lambda\rho} \equiv \partial_4\partial_4 g_{\lambda\rho}$. Podemos simplificar mais, se notarmos que

$$\left(g^{\rho\gamma}g_{\sigma\rho}\right)_{,4} = \delta^\gamma_{\sigma,4} = 0, \tag{5.14}$$

e, portanto,

$$g^{\rho\gamma}\dot{g}_{\sigma\rho} = -g_{\sigma\rho}\dot{g}^{\rho\gamma}. \tag{5.15}$$

Aí o último termo da eq. (5.13) fica

$$\begin{aligned}g^{\lambda\sigma}g^{\rho\gamma}\dot{g}_{\sigma\rho}\dot{g}_{\gamma\lambda} =& -g^{\lambda\sigma}g_{\sigma\rho}\dot{g}^{\rho\gamma}\dot{g}_{\gamma\lambda}\\ =& -\delta^\lambda_\rho\dot{g}^{\rho\gamma}\dot{g}_{\gamma\lambda}\\ =& -\dot{g}^{\lambda\gamma}\dot{g}_{\gamma\lambda}.\end{aligned} \tag{5.16}$$

Assim, o segundo e o último termos dentro do parênteses da eq. (5.13) podem unir-se em um só termo, fazendo com que $\hat{R}_{44}$ seja expresso como

$$\hat{R}_{44} = -\epsilon\psi\Box\psi - \frac{1}{2}\left(g^{\lambda\rho}\ddot{g}_{\lambda\rho} - \psi^{-1}\dot{\psi}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho} + \frac{1}{2}\dot{g}^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\right). \tag{5.17}$$

Para a componente $\hat{R}_{4\nu}$, temos

$$\hat{R}_{4\nu} = \hat{R}^4{}_{44\nu} + \hat{R}^\lambda{}_{4\lambda\nu}. \tag{5.18}$$

A componente $\hat{R}^4{}_{44\nu}$ fica

$$\begin{aligned}
\hat{R}^4{}_{44\nu} =& \hat{\Gamma}^4{}_{4\nu,4} - \hat{\Gamma}^4{}_{44,\nu} + \hat{\Gamma}^4{}_{4A}\hat{\Gamma}^A{}_{4\nu} - \hat{\Gamma}^4{}_{\nu A}\hat{\Gamma}^A{}_{44} \\
=& \left(\psi^{-1}\partial_\nu\psi\right)_{,4} - \left(\psi^{-1}\dot{\psi}\right)_{,\nu} \\
&+ \hat{\Gamma}^4{}_{44}\hat{\Gamma}^4{}_{4\nu} + \hat{\Gamma}^4{}_{4\rho}\hat{\Gamma}^\rho{}_{4\nu} - \hat{\Gamma}^4{}_{\nu 4}\hat{\Gamma}^4{}_{44} - \hat{\Gamma}^4{}_{\nu\rho}\hat{\Gamma}^\rho{}_{44} \\
=& -\psi^{-2}\dot{\psi}\partial_\nu\psi + \psi^{-1}\partial_\nu\dot{\psi} + \psi^{-2}\partial_\nu\psi\dot{\psi} - \psi^{-1}\partial_\nu\dot{\psi} \\
&+ \tfrac{1}{2}\psi^{-1}\partial_\rho\psi g^{\rho\lambda}\dot{g}_{\lambda\nu} - \tfrac{1}{2}\psi^{-1}\partial^\rho\psi\dot{g}_{\nu\rho},
\end{aligned} \tag{5.19}$$

onde usamos de antemão o fato de que o primeiro e o terceiro produto de duas componentes da conexão cancelam-se. Também usamos que $\epsilon^2 = 1$. Simplificando os termos da primeira linha da equação que também se cancelam, temos

$$\hat{R}^4{}_{44\nu} = \tfrac{1}{2}\psi^{-1}\partial^\lambda\psi\dot{g}_{\lambda\nu} - \tfrac{1}{2}\psi^{-1}\partial^\rho\psi\dot{g}_{\nu\rho}. \tag{5.20}$$

Trocando índices mudos, somamos os termos e obtemos $\hat{R}^4{}_{44\nu} = 0$.

A componente $\hat{R}^\lambda{}_{4\lambda\nu}$ fica

$$\begin{aligned}
\hat{R}^\lambda{}_{4\lambda\nu} =& \hat{\Gamma}^\lambda{}_{4\nu,\lambda} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{4\lambda,\nu} + \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\lambda A}\hat{\Gamma}^A{}_{4\nu} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\nu A}\hat{\Gamma}^A{}_{4\lambda} \\
=& \left(\tfrac{1}{2}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\rho\nu}\right)_{,\lambda} - \left(\tfrac{1}{2}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\right)_{,\nu} \\
&+ \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\lambda 4}\hat{\Gamma}^4{}_{4\nu} + \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\lambda\rho}\hat{\Gamma}^\rho{}_{4\nu} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\nu 4}\hat{\Gamma}^4{}_{4\lambda} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\rho}\hat{\Gamma}^\rho{}_{4\lambda} \\
=& \tfrac{1}{2}\left(g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\rho\nu}\right)_{,\lambda} - \tfrac{1}{2}\left(g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\right)_{,\nu} \\
&+ \tfrac{1}{2}\psi^{-1}\partial_\nu\psi g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho} + \tfrac{1}{2}g^{\rho\sigma}\dot{g}_{\sigma\nu}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\rho} - \tfrac{1}{2}\psi^{-1}\partial_\lambda\psi g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\rho\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\rho\sigma}\dot{g}_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Junto com o primeiro termo da primeira linha, o segundo e o quarto termos da segunda linha formam uma derivada covariante. Como a quantidade dentro do parênteses do segundo termo da primeira linha é escalar, o segundo termo também constitui uma derivada covariante. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\hat{R}^\lambda{}_{4\lambda\nu} =& \tfrac{1}{2}\nabla_\lambda\left(g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\rho\nu}\right) - \tfrac{1}{2}\nabla_\nu\left(g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\right) \\
&+ \tfrac{1}{2}\psi^{-1}\partial_\nu\psi g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho} - \tfrac{1}{2}\psi^{-1}\partial_\lambda\psi g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\rho\nu}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Agora podemos notar que $\nabla_\nu\psi^{-1} = \partial_\nu\psi^{-1} = -\psi^{-2}\partial_\nu$. Identificando esse termo na segunda linha da equação, podemos multiplicar $\hat{R}^\lambda{}_{4\lambda\nu}$ por ψ^{-1} e obter

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}\hat{R}^\lambda{}_{4\lambda\nu} =& \tfrac{1}{2}\psi^{-1}\nabla_\lambda\left(g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\rho\nu}\right) - \tfrac{1}{2}\psi^{-1}\nabla_\nu\left(g^{\alpha\beta}\dot{g}_{\alpha\beta}\right) \\
&- \tfrac{1}{2}\nabla_\nu\psi^{-1}g^{\alpha\beta}\dot{g}_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\nabla_\lambda\psi^{-1}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\rho\nu},
\end{aligned} \tag{5.23}$$

onde também mudamos alguns dos índices mudos. Vemos que o par de termos com derivadas no índice λ são o resultado de uma regra do produto de derivadas, assim como o par de derivadas em ν. Assim, podemos escrever

$$\psi^{-1}\hat{R}^\lambda{}_{4\lambda\nu} = \tfrac{1}{2}\nabla_\lambda\left(\psi^{-1}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\rho\nu}\right) - \tfrac{1}{2}\nabla_\nu\left(\psi^{-1}g^{\alpha\beta}\dot{g}_{\alpha\beta}\right). \tag{5.24}$$

Por fim, reescrevemos a derivada em ν como $\nabla_\nu = \delta^\lambda_\nu\nabla_\lambda$. Como δ^λ_ν é independente de coordenadas, passamos para dentro do parênteses e ficamos com

$$\psi^{-1}\hat{R}^\lambda{}_{4\lambda\nu} = \tfrac{1}{2}\nabla_\lambda\left(\psi^{-1}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\rho\nu} - \psi^{-1}\delta^\lambda_\nu g^{\alpha\beta}\dot{g}_{\alpha\beta}\right). \tag{5.25}$$

Como $\hat{R}^4{}_{44\nu} = 0$, a componente $\hat{R}_{4\nu}$ do tensor de Ricci fica

$$\hat{R}_{4\nu} = \psi \nabla_\lambda P^\lambda{}_\nu, \tag{5.26}$$

onde definimos o tensor $P^\lambda{}_\nu$ como

$$P^\lambda{}_\nu = \frac{1}{2\psi}\left(g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\rho\nu} - \delta^\lambda_\nu g^{\alpha\beta}\dot{g}_{\alpha\beta}\right). \tag{5.27}$$

Finalmente, para a última das componentes do tensor de Ricci, temos

$$\hat{R}_{\mu\nu} = \hat{R}^4{}_{\mu4\nu} + \hat{R}^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}. \tag{5.28}$$

A componente $\hat{R}^4{}_{\mu4\nu}$ fica

$$\begin{aligned}
\hat{R}^4{}_{\mu4\nu} =& \hat{\Gamma}^4{}_{\mu\nu,4} - \hat{\Gamma}^4{}_{\mu4,\nu} + \hat{\Gamma}^4{}_{4A}\hat{\Gamma}^A{}_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^4{}_{\nu A}\hat{\Gamma}^A{}_{\mu4}\\
=& \left(-\tfrac{1}{2}\epsilon\psi^{-2}\dot{g}_{\mu\nu}\right)_{,4} - \left(\psi^{-1}\partial_\mu\psi\right)_{,\nu}\\
&+ \hat{\Gamma}^4{}_{44}\hat{\Gamma}^4{}_{\mu\nu} + \hat{\Gamma}^4{}_{4\rho}\hat{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^4{}_{\nu4}\hat{\Gamma}^4{}_{\mu4} - \hat{\Gamma}^4{}_{\nu\rho}\hat{\Gamma}^\rho{}_{\mu4}\\
=& \epsilon\psi^{-3}\dot{\psi}\dot{g}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\epsilon\psi^{-2}\ddot{g}_{\mu\nu} + \psi^{-2}\partial_\nu\psi\partial_\mu\psi - \psi^{-1}\psi\partial_\mu\partial_\nu\psi\\
&- \tfrac{1}{2}\epsilon\psi^{-3}\dot{\psi}\dot{g}_{\mu\nu} + \psi^{-1}\partial_\rho\psi\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \psi^{-2}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi + \tfrac{1}{4}\epsilon\psi^{-2}g^{\rho\sigma}\dot{g}_{\nu\rho}\dot{g}_{\sigma\mu}.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Vemos que o terceiro termo da primeira linha cancela-se com o terceiro termo da segunda linha. O segundo termo da segunda linha, junto com o último da primeira linha formam uma derivada covariante, da forma $\nabla_\mu\partial_\nu\psi$. Como ψ é escalar, o termo pode ser tomado como duas derivadas covariantes. Reagrupando os termos restantes, temos

$$\hat{R}^4{}_{\mu4\nu} = -\psi^{-1}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi - \tfrac{1}{2}\epsilon\psi^{-2}\left(\ddot{g}_{\mu\nu} - \psi^{-1}\dot{\psi}\dot{g}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\rho\sigma}\dot{g}_{\rho\nu}\dot{g}_{\sigma\mu}\right). \tag{5.30}$$

A última componente do tensor de Riemann que precisamos calcular é $\hat{R}^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$, que fica

$$\begin{aligned}
\hat{R}^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} =& \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu,\lambda} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\lambda,\nu} + \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\lambda A}\hat{\Gamma}^A{}_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\nu A}\hat{\Gamma}^A{}_{\mu\lambda}\\
=& \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\lambda\rho}\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\\
&+ \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\lambda4}\hat{\Gamma}^4{}_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\lambda{}_{\nu4}\hat{\Gamma}^4{}_{\mu\lambda},
\end{aligned} \tag{5.31}$$

onde usamos que $\hat{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$. Reconhecemos os quatro primeiros termos da expressão como o tensor de Ricci em quatro dimensões $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$. Substituindo as outras componentes da conexão, temos

$$\hat{R}^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}\epsilon\psi^{-2}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\dot{g}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{4}\epsilon\psi^{-2}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\rho\nu}\dot{g}_{\lambda\mu}. \tag{5.32}$$

Tendo em mãos as componentes do tensor de Riemann necessárias, nas eqs. (5.30) e (5.32), montamos a componente $\hat{R}_{\mu\nu}$ do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\mu\nu} =& R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}\epsilon\psi^{-2}g^{\lambda\rho}\left(\dot{g}_{\lambda\rho}\dot{g}_{\mu\nu} - \dot{g}_{\rho\nu}\dot{g}_{\lambda\mu}\right)\\
&- \psi^{-1}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi - \tfrac{1}{2}\epsilon\psi^{-2}\left(\ddot{g}_{\mu\nu} - \psi^{-1}\dot{\psi}\dot{g}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\rho\sigma}\dot{g}_{\nu\rho}\dot{g}_{\sigma\mu}\right).
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Juntando termos similares, a expressão final fica

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\mu\nu} =& R_{\mu\nu} - \psi^{-1}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi\\
&- \tfrac{1}{2}\epsilon\psi^{-2}\left(\ddot{g}_{\mu\nu} - \psi^{-1}\dot{\psi}\dot{g}_{\mu\nu} - g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\mu}\dot{g}_{\rho\nu} + \tfrac{1}{2}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\dot{g}_{\mu\nu}\right).
\end{aligned} \tag{5.34}$$

5.2 As equações de campo

Vamos considerar, como anteriormente, o universo 5-dimensional vazio, e resolver a equação de Einstein no vácuo

$$\hat{R}_{AB} = 0. \tag{5.35}$$

A componente $\hat{R}_{44} = 0$ nos dá, pela eq. (5.17), a equação

$$\psi \Box \psi = -\frac{1}{2}\epsilon \left(g^{\lambda\rho}\ddot{g}_{\lambda\rho} + \tfrac{1}{2}\dot{g}^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho} - \psi^{-1}\dot{\psi} g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho} \right), \tag{5.36}$$

que é uma equação de onda para ψ. A componente $\hat{R}_{4\nu} = 0$ da equação nos dá, pela eq. (5.26),

$$\nabla_\lambda P^\lambda_{\ \nu} = 0, \tag{5.37}$$

que é uma lei de conservação para o tensor $P^\lambda_{\ \nu}$ definido na eq. (5.27).

A última componente da equação de Einstein no vácuo é $\hat{R}_{\mu\nu} = 0$, que nos dá, pelo resultado da eq. (5.34), a equação

$$R_{\mu\nu} = \psi^{-1}\nabla_\mu \nabla_\nu \psi + \tfrac{1}{2}\epsilon\psi^{-2} \left(\ddot{g}_{\mu\nu} - \psi^{-1}\dot{\psi}\dot{g}_{\mu\nu} - g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\mu}\dot{g}_{\rho\nu} + \tfrac{1}{2} g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\dot{g}_{\mu\nu} \right). \tag{5.38}$$

No entanto, buscamos uma equação que tenha a forma da equação de Einstein na presença de matéria em 4 dimensões. Para isso, precisamos do escalar de curvatura em 4 dimensões R. Para obtê-lo, vamos contrair a equação acima com a métrica 4D $g^{\mu\nu}$. Como $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, ficamos com

$$R = \psi^{-1}\Box\psi + \tfrac{1}{2}\epsilon\psi^{-2} \left(g^{\mu\nu}\ddot{g}_{\mu\nu} - \psi^{-1}\dot{\psi} g^{\mu\nu}\dot{g}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\mu}\dot{g}_{\rho\nu} + \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\dot{g}_{\mu\nu} \right). \tag{5.39}$$

O terceiro termo dentro dos parênteses pode ser reescrito como $\dot{g}^{\nu\rho}\dot{g}_{\rho\nu}$, com o procedimento desenvolvido na eq. (5.16). A expressão fica então

$$R = \psi^{-1}\Box\psi - \tfrac{1}{2}\epsilon\psi^{-2} \left(g^{\mu\nu}\ddot{g}_{\mu\nu} + \dot{g}^{\mu\nu}\dot{g}_{\mu\nu} - \psi^{-1}\dot{g}^{\mu\nu}\dot{g}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\hat{g}_{\mu\nu} \right). \tag{5.40}$$

Agora, pela equação de onda para ψ (eq. (5.36)), podemos substituir $\Box\psi$ e escrever R sem derivadas de ψ no espaço-tempo:

$$\begin{aligned} R = &- \tfrac{1}{2}\epsilon\psi^{-2} \left(g^{\lambda\rho}\ddot{g}_{\lambda\rho} + \tfrac{1}{2}\dot{g}^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho} - \psi^{-1}\dot{\psi} g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho} \right) \\ &+ \tfrac{1}{2}\epsilon\psi^{-2} \left(g^{\mu\nu}\ddot{g}_{\mu\nu} + \dot{g}^{\mu\nu}\dot{g}_{\mu\nu} - \psi^{-1}\dot{\psi} g^{\mu\nu}\dot{g}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\dot{g}_{\mu\nu} \right). \end{aligned} \tag{5.41}$$

O primeiro termo da primeira linha e o primeiro termo da segunda linha são iguais a menos do sinal, então se cancelam. O terceiro termo da primeira linha e o terceiro da segunda linha também se cancelam. O segundo da primeira e o segundo da segunda linha somam-se em um só termo, e no fim obtemos a expressão

$$R = \frac{\epsilon}{2\psi^2} \left(\dot{g}^{\alpha\beta}\dot{g}_{\alpha\beta} + \left(g^{\alpha\beta}\dot{g}_{\alpha\beta} \right)^2 \right). \tag{5.42}$$

Com equações para $R_{\mu\nu}$ e R em mãos, podemos obter uma equação para o tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$. O resultado é

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} =& \psi^{-1}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi \\ &+ \frac{\epsilon}{2\psi^2}\left(\ddot{g}_{\mu\nu} - \psi^{-1}\dot{\psi}\dot{g}_{\mu\nu} - g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\mu}\dot{g}_{\rho\nu} + \tfrac{1}{2}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\dot{g}_{\mu\nu}\right. \\ &\left. -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\dot{g}^{\alpha\beta}\dot{g}_{\alpha\beta} + \left(g^{\alpha\beta}\dot{g}_{\alpha\beta}\right)^2\right)\right). \end{aligned} \tag{5.43}$$

Vemos surgir um tensor de energia e momento efetivo, originado de derivadas em relação à 5ª coordenada da métrica 4D, ou de derivadas no espaço-tempo 4D do campo escalar ψ ligada a componentes da métrica 5D. Levando em conta a constante de proporcionalidade na eq. de Einstein com matéria (3.120), o tensor de energia e momento efetivo $T_{\mu\nu}$ é definido como

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} =& \frac{\nabla_\mu\nabla_\nu\psi}{\psi} + \frac{\epsilon}{2\psi^2}\left(\ddot{g}_{\mu\nu} - \frac{\dot{\psi}\dot{g}_{\mu\nu}}{\psi} - g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\mu}\dot{g}_{\rho\nu} + \tfrac{1}{2}g^{\lambda\rho}\dot{g}_{\lambda\rho}\dot{g}_{\mu\nu}\right. \\ &\left. - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\dot{g}^{\alpha\beta}\dot{g}_{\alpha\beta} + \left(g^{\alpha\beta}\dot{g}_{\alpha\beta}\right)^2\right)\right). \end{aligned} \tag{5.44}$$

Vemos que o primeiro termo, envolvendo derivadas de ψ no espaço-tempo 4D, assemelha-se a um dos termos do tensor de energia e momento obtido na teoria de Kaluza-Klein (eq. (4.87)). Evidentemente, os termos envolvendo o 4-potencial eletromagnético, que constituíam o tensor de energia e momento eletromagnético, não aparecem no tensor obtido pela teoria de Matéria Induzida, devido a escolha de um sistema de coordenadas onde $\hat{g}_{4\nu} = 0$, possibilitada pela ausência da condição do cilindro. No entanto, vemos surgir diversos novos termos envolvendo derivadas de $g_{\alpha\beta}$ e ψ em relação à 5ª coordenada. Na teoria de Kaluza-Klein esses termos haviam sido desprezados, mas, na ausência de compactificação, o conteúdo de energia e momento descrito por esses termos deve ser considerado.

Frente ao procedimento de tomar superfícies 4-dimensionais de um espaço de 5 dimensões sem energia e momento, esse é o tensor de energia e momento resultante em 4 dimensões: a energia e o momento do espaço-tempo 4D é induzido pela forma da métrica em 5 dimensões. Trocando o sistema de coordenadas para algum tal que $\hat{g}_{4\nu} \neq 0$, apareciam termos envolvendo um 4-potencial genérico A_μ (não necessariamente eletromagnético) na expressão do tensor de energia e momento. No entanto, esse tensor de energia e momento efetivo pode ser usado para descrever diversas distribuições de matéria e radiação relevantes, escolhendo a métrica 5-dimensional $\hat{g}_{AB}$ que resulte no tensor de energia e momento desejado, junto com a métrica 4-dimensional do modelo almejado.

Um modelo explorado por Wesson é a métrica esfericamente simétrica em 5 dimensões [6, p. 34] . Calculando o tensor de energia e momento efetivo, Wesson obtém o tensor que descreve um fluido perfeito com densidade de energia ρ e pressão p. O resultado é separado em 4 tipos diferentes de constituintes: radiação ($p = \rho/3c$), poeira ($p = 0$), vácuo ($p = -\rho/c$) e matéria rígida ($p = \rho/c$). Em especial, quando a condição do cilindro é tomada novamente, a radiação é o único constituinte remanescente. O resultado vai ao encontro da teoria de Kaluza-Klein, onde o tensor de energia e momento efetivo é o do próprio campo eletromagnético, um campo de radiação.

5.3 Interpretação da 5ª coordenada e a geodésica

Uma partícula no espaço 5D, assim como na teoria de Kaluza-Klein, tem como velocidade u^μ aquela que satisfaz a equação geodésica

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}^A}{\mathrm{d}\hat{\tau}} + \hat{\Gamma}^A{}_{BC}\hat{u}^A\hat{u}^B = 0. \tag{5.45}$$

Definindo $\beta = \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\hat{\tau}$, $u^\lambda = \mathrm{d}x^\lambda/\mathrm{d}\tau$ e $\omega = \mathrm{d}\hat{x}^4/\mathrm{d}\tau$, como antes, temos

$$c^2\mathrm{d}\hat{\tau}^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 + \epsilon\psi^2\omega^2\mathrm{d}\tau^2, \tag{5.46}$$

de onde tiramos

$$\beta = \left(1 + \epsilon\frac{\psi^2\omega^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{5.47}$$

Invertendo a equação, elevando-a ao quadrado, e derivando em relação a τ, temos

$$-\frac{1}{\beta^2}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2\epsilon}{c^2}\left(\psi^2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\tau} + \psi\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau}\omega^2\right). \tag{5.48}$$

Como no caso de Kaluza-Klein, $\hat{u}^\mu = \beta u^\mu$ e $\hat{u}^4 = \beta\omega$, portanto valem as equações (4.100) e (4.101). A prescrição para encontrar a equação de movimento de uma partícula no espaço-tempo 4D em termos apenas das componentes da conexão é substituir a eq. (4.101) na eq. (5.48), isolar o termo $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\tau$ e inseri-lo na eq. (4.100).

No entanto, Wesson dá à 5ª coordenada $\hat{x}^4 = y$ uma interpretação que simplifica a equação de movimento, e elucida a natureza do espaço-tempo 5D sobre o qual a teoria é construída. Ao observar, entre outras coisas, que os modelos cosmológicos podem ser modelados como hipersuperfícies de $y =$ constante, ele conclui que uma boa escolha do sistema de coordenadas é aquele tal que $\omega = \mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau = 0$.

À essa escolha segue-se o questionamento sobre a que, fisicamente, corresponde a coordenada y. Sua interpretação, observando o caráter pelo qual a dimensão extra manifesta-se na equação de Einstein – como um tensor de energia e momento –, e tendo em vista que a massa de repouso de uma partícula é constante, é que a coordenada y corresponda à *massa* de uma partícula localizada em (x^μ, y). Como outro argumento, Wesson toma como motivação o fato de uma métrica que não dependa de y resulte em um tensor de energia e momento de radiação [6, p. 48].

Tomando y como a massa m de uma partícula, normalizando através das constantes fundamentais G e c:

$$y = \frac{Gm}{c^2}, \tag{5.49}$$

podemos assumir que $\omega = 0$, pois tomamos sua massa como constante. Assim, pela eq. (5.48), temos $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\tau$. Portanto, na eq. de movimento (4.100), restam apenas a derivada da 4-velocidade, e o termo com um produto de duas componentes da 4-velocidade. A equação fica

$$\frac{\mathrm{d}u^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0, \tag{5.50}$$

ou seja, se reduz à equação de movimento usual em 4 dimensões.

Generalizando, podemos considerar uma massa não constante, o que nos leva a obter, a partir da 5ª componente da geodésica (eq. (5.45)), uma equação que rege a variação da massa. Com $\omega = (G/c^2)\mathrm{d}m/\mathrm{d}\tau$, a equação fica

$$\beta^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\tau} + \beta \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau}\omega + \hat{\Gamma}^4{}_{AB}\hat{u}^A \hat{u}^B = 0. \tag{5.51}$$

A equação envolve as componentes da conexão (derivadas da métrica 4D e do campo escalar), componentes da 4-velocidade u^λ, e a própria 5ª componente ω da 5-velocidade. Ou seja, a métrica do espaço-tempo 5D pode também prever uma variação de massa, dentro dessa interpretação da 5ª coordenada.

O espaço 5-dimensional da Teoria de Matéria Induzida pode portanto ser chamado de "espaço-tempo-matéria", como sugerido por Wesson. A generalidade da teoria passa a permitir que coordenadas de espaço-tempo 4-dimensional e quantidades de massa misturem-se em sistemas de coordenadas arbitrários. Portanto, para cada métrica 4-dimensional em conjunto com um tensor de energia e momento que se queira modelar através de uma métrica 5-dimensional, há um limite de possíveis sistemas de coordenadas sobre os quais é possível descrever o modelo.

O ponto levantado por Wesson, de que matéria pode ser descrita em termos geométricos, é de fato sustentado por sua teoria, ainda que aspectos de covariância, i.e. troca geral de coordenadas e suas consequência físicas, ainda mereçam ser explorados com detalhe. Em suma, a Teoria da Matéria Induzida demonstra que é possível reformular a Relatividade Geral de forma a ter como objeto da teoria apenas a métrica de um espaço extra-dimensional – contendo toda informação necessária –, e não mais um tensor de energia e momento separado da métrica do espaço-tempo 4D. Devido a essa possibilidade, podemos satisfatoriamente interpretar as variáveis dinâmicas da física, i.e. massa, energia e momento, como efeitos geométricos de um espaço-tempo-matéria mais fundamental.

Capítulo 6

Conclusões

A beleza da teoria da Relatividade Geral está em descrever a gravitação, uma força que sempre foi um dos pilares do conhecimento físico, através da geometria, uma das bases do pensamento analítico. Einstein não via a geometria simplesmente como matemática. Em sua aula *Geometria e Experiência* na Academia de Ciências da Prússia, em 1921, afirmou:

> *"Geometry thus completed is evidently a natural science; we may in fact regard it as the most ancient branch of physics. Its affirmations rest essentially on induction from experience, but not on logical inferences only."*

O objeto sobre o qual Einstein tratou de explorar a geometria é o espaço-tempo. Essa estrutura que surgiu primeiramente da natureza matemática das leis de transformação das equações de Maxwell, implicou em uma profunda modificação na maneira como os físicos enxergam o universo – pois teve sua existência como uma entidade realmente física continuamente confirmada por experimentos.

A motivação teórica de estudar um objeto análogo ao espaço-tempo, porém com dimensionalidade diferente, surgiu da possibilidade de investigar a física que é sugerida no formalismo da Relatividade Geral. Einstein introduziu um modus operandi para conectar a física e a geometria.

A extensão da Relatividade Geral proposta por Kaluza e revisada por Klein seguiu os passos de Einstein e propôs uma nova unificação, com o eletromagnetismo. Porém, a unificação que a Relatividade Especial havia proporcionado, entre espaço e tempo, trouxera uma simplificação às leis da física. A teoria de Kaluza-Klein fez pouco mais do que reproduzir, em um único formalismo, resultados já conhecidos, sem resolver problemas físicos em aberto.

A Teoria da Matéria Induzida, no entanto, trouxe mais otimismo aos entusiastas de uma unificação geométrica. O tensor de energia e momento efetivo obtido na teoria levou-nos a concluir que toda matéria pode ser vista, sim, como propriedade geométrica do espaço: um espaço mais geral do que o espaço-tempo da Relatividade Geral.

Em última análise, somos motivados a pensar que toda a física pode ser explicada com a descrição geométrica de um único espaço, do qual apenas parte manifesta-se para nós como o espaço-tempo. Mesmo o tempo e o espaço, cujas naturezas são completamente distintas nas escalas naturais do ser humano, provaram-se constituintes de uma única estrutura. Se há a possibilidade matemática da unificação de outras entidades físicas com o espaço-tempo, e observações não virem a descartar essa formulação única, ela pode ser considerada – e deve, se a unificação trouxer simplificação de modelos e praticidade matemática. Teorias desenvolvidas com a visão puramente geométrica das quantidades físicas podem trazer nova luz à compreensão da natureza do espaço-tempo.

Referências Bibliográficas

[1] Rindler, W., 2006. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. 2nd ed. United States: Oxford University Press Inc., New York (2006).

[2] Misner, C. W., Thorne, S. K., Wheeler, J. A., *Gravitation*. 1st ed. United States: W. H. Freeman and Company, San Francisco.

[3] Th. Kaluza, *On the Unification Problem in Physics*, `arXiv:1803.08616v1 [physics.hist-ph]` (1921).

[4] O. Klein, *The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law*, *Nature* **118**, 516 (1926).

[5] P S. Wesson, J. Ponce de Leon, *Kaluza-Klein equatons, Einstein's equations, and an effective energy-momentum tensor*, J. Math. Phys. **33** (1992).

[6] J. M. Overduin, P. S. Wesson, *Kaluza-Klein Gravity*, `arXiv:gr-qc/9805018` (1998).

[7] L. L. Williams, *Field Equations and Lagrangian for the Kaluza Metric Evaluated with Tensor Algebra Software*, Journal of Gravity, Volume 2015, Article ID 901870 (2015).
L. L. Williams, *Corrigendum to "Field Equations and Lagrangian for the Kaluza Metric Evaluated with Tensor Algebra Software"*, Journal of Gravity, Volume 2018, Article ID 7082340 (2018).

[8] Peskin, M. E., Schroeder D. V., *An Introduction to Quantum Field Theory*. 1st ed. United States: Westview Press (1995).