

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
BACHARELADO EM FÍSICA: PESQUISA BÁSICA

BERNARDO JUCHEM BECKER

**APLICAÇÃO DE MÉTODOS DE BEAMFORMING AO PROBLEMA
DE FOCALIZAÇÃO DE SOM POR UM ARRANJO DE
ALTO-FALANTES**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PORTO ALEGRE
2018

BERNARDO JUCHEM BECKER

**APLICAÇÃO DE MÉTODOS DE BEAMFORMING AO PROBLEMA
DE FOCALIZAÇÃO DE SOM POR UM ARRANJO DE
ALTO-FALANTES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Bacharelado em Física: Pesquisa Básica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel.

Orientador: Carlo Requião da Cunha
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

PORTO ALEGRE
2018

A meus pais, que serão sempre meu maior exemplo de educação.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer, primeiramente, a minha família, pelo seu suporte e carinho incondicional nesta etapa e em todas as etapas da minha vida. Em segundo, agradeço e reconheço a oportunidade gratuita de ensino que tive dentro da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e o empenho de meus professores.

Quem analisa profundamente as coisas, embora possa avaliar cuidadosamente o futuro acabará, no mais das vezes, raciocinando em torno de seu próprio bem-estar. (SHINMEN, Musashi, 1645).

RESUMO

BECKER, Bernardo. Aplicação de Métodos de Beamforming ao problema de Focalização de Som por um Arranjo de Alto-falantes. 2018. 80 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Bacharelado em Física: Pesquisa Básica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2018.

Com um arranjo de alto-falantes é possível dar diretividade ao som emitido. Mas, para tanto, é necessário sincronizar os alto-falantes e atribuir valores às excitações de cada um dependendo da frequência da radiação e das características do arranjo. O seguinte problema pode ser tratado por métodos de *beamforming*. Estuda-se a aplicação dos métodos de *beamforming* DAS (*Delay and Sum*), ABC (*Acoustic Brightness Control*) e ACC (*Acoustic Contrast Control*) a um arranjo linear de alto-falantes, com o objetivo de focar a radiação sonora em um ponto ou região do espaço para avaliar a diretividade do arranjo. É avaliada a maneira como cada método apresenta a solução ao problema e o seu resultado de diretividade para o arranjo sob as variáveis de frequência da radiação emitida, distância entre alto-falantes do arranjo e o número de alto-falantes. Apesar de mais simples, DAS apresentou os melhores resultados de diretividade, seguido por ABC. Já ACC, não conseguiu dar diretividade ao arranjo.

Palavras-chave: Focalização de Som. Beamforming. Arranjo de alto-falantes.

ABSTRACT

BECKER, Bernardo. Application of Beamforming methods to the Sound Focusing problem for a Speaker Array. 2018. 80 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Bacharelado em Física: Pesquisa Básica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2018.

A speaker array is capable of emitting directional sound. But, to do so, it is necessary to synchronize the speakers and to choose an input for the excitations of each speaker depending of the radiation frequency and characteristics of the array. The following problem may be treated by beamforming methods. The methods DAS (Delay and Sum), ABC (Acoustic Brightness Control) and ACC (Acoustic Contrast Control) were applied to the sound focusing problem to provide directivity to the speaker array. It is shown how each method solves the following problem and how much directivity it is able to provide concerning the variables of radiation frequency, distance between the speakers and number of speakers. Despite being simpler, DAS presented the best results for directivity, followed by ABC. ACC was not able to provide directivity to the array.

Keywords: Sound Focusing. Beamforming. Speaker array.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de Alto-falante e seus principais componentes.	12
Figura 2 – Sensibilidade auditiva é apresentada em curvas isoaudíveis dadas em fones. O nível de audibilidade em fones corresponde ao mesmo valor em dB que o nível de pressão SPL de uma fonte de som com frequência 1000 Hz. Assim, uma curva isoaudível mostra como variam os valores de SPL e frequência perante uma percepção fixa de intensidade sonora.	14
Figura 3 – Exemplo de alto-falante direcional de Brown Innovations Directional Audio: modelo SB-24 SonicBeam Directional Speaker. Possui comprimento de 24" e resposta em faixa de frequências 150 Hz a 20.000 Hz.	16
Figura 4 – Dois alto-falantes direcionais localizados acima do painel de propaganda emitem o som da mesma em região próxima ao painel.	17
Figura 5 – Uso de dispositivo LRAD por autoridades.	18
Figura 6 – Alguns modelos de dispositivos de LRAD e seu alcance em metros.	18
Figura 7 – Coordenadas em um arranjo: a) linear de comprimento L ; e b) plano em superfície S	19
Figura 8 – Excitações $q(x_s, k)^{(i)}$, ($i = 1, \dots, M$) de M alto-falantes em um arranjo linear de comprimento L . Cada $q(x_s, k)^{(i)}$ com a liberdade de tomar um valor diferente do outro.	20
Figura 9 – Exemplos de padrão de radiação $b(\theta)$ largo e estreito. A medida que se torna mais estreito, $b(\theta)$ apresenta mais lóbulos, além do lóbulo principal em $\theta = 0$	22
Figura 10 – Ângulo θ' de propagação em $b_c(\theta)$. Com $\alpha = 0.5$, o θ'_c previsto é de 30°	25
Figura 11 – Padrão de radiação $b_c(\theta)$ - para baixos valores de $kL/2$. A medida que $kL/2$ aumenta, o lóbulo principal começa a se formar.	33
Figura 12 – Padrão de radiação $b_c(\theta)$ - altos valores de $kL/2$. A medida que $kL/2$ aumenta, o lóbulo principal fica mais estreito e mais lóbulos secundários aparecem.	33
Figura 13 – <i>Beam pattern</i> $BP(\theta)$ - baixos valores de $kL/2$. É conferido os mesmos lóbulos que em $b_c(\theta)$, porém em escala de dB.	34
Figura 14 – <i>Beam pattern</i> $BP(\theta)$ - altos valores de $kL/2$. É vista a formação dos lóbulos e como o SPL do som emitido cai rapidamente a medida que θ se afasta de zero.	34
Figura 15 – Índice de Diretividade $DI(\theta = 0)$. Sempre crescente em $kL/2$, atinge valores extremamente altos rapidamente.	35
Figura 16 – Padrão de radiação $b_d(\theta)$ para $M = 4$. Respeitado $k\Delta x \leq 2\pi$, não aparecem lóbulos principais adicionais.	37

Figura 17 – Padrão de radiação $b_d(\theta)$ para $M = 4$. Quando $k \Delta x > 2\pi$ os lóbulos principais adicionais aparecem cada vez que se acresce 2π em $k \Delta x$. Aparecendo primeiramente nos extremos, em $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 270^\circ$, depois encontram-se em valores cada vez mais próximos de $\theta = 0^\circ$. No centro da imagem, estão os lóbulos secundários que ficam cada vez menores e apareceram sobrepostos.	37
Figura 18 – Padrão de radiação $b_d(\theta)$ para $k \Delta x = 1$. Valores crescentes de M fazem o feixe se estreitar e apresentar cada vez mais lóbulos secundários.	38
Figura 19 – <i>Beam pattern</i> $BP(\theta)$ para M crescente. Observa-se como o aumento no valor de M faz todos os lóbulos se estreitarem e aumenta a quantidade de lóbulos secundários. Como $k \Delta x = 2\pi$, os lóbulos principais adicionais encontram-se nos ângulos $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 270^\circ$, dessa forma o SPL do som emitido cai em θ , mas volta a zero nestes ângulos.	39
Figura 20 – <i>Beam pattern</i> $BP(\theta)$ para M crescente. Desta vez, com $k \Delta x \leq 2\pi$, o SPL do som emitido não volta a zero porque não há lóbulos principais adicionais.	39
Figura 21 – Diretividade na direção de propagação. $D(\theta = 0)$ é crescente em $k \Delta x$, mas sempre sujeito a cair em $k \Delta x$ múltiplo de 2π	40
Figura 22 – Índice de Diretividade na direção de propagação em ampla faixa de $k \Delta x$. $ID(\theta = 0)$ encontra seu valor máximo logo antes de ser forçado a cair pela origem de lóbulos principais adicionais em $k \Delta x = 2\pi$. Um número crescente de M ajuda a aumentar a diretividade máxima, assim como a diretividade em qualquer valor de $k \Delta x$	41
Figura 23 – Região <i>bright</i> : arco Ω_b , em branco, contendo N_b pontos retratados por pontos azuis; região <i>dark</i> : arcos Ω_d , em cinza, contendo N_d pontos retratados por pontos vermelhos.	42
Figura 24 – Autovalor β para as regiões <i>bright</i> com $M = 7$	44
Figura 25 – Comportamento de componentes de \mathbf{q} em $\Omega_b = 10^\circ$ para $M = 7$	46
Figura 26 – Comportamento de componentes de \mathbf{q} em $\Omega_b = 20^\circ$ para $M = 7$	46
Figura 27 – Comportamento de componentes de \mathbf{q} em $\Omega_b = 30^\circ$ para $M = 7$	47
Figura 28 – Diretividade em região <i>bright</i> $\Omega_b = 0^\circ$ e $M = 7$. O comportamento é igual a DAS discreto.	48
Figura 29 – Diretividade em região <i>bright</i> $\Omega_b = 10^\circ$ e $M = 7$. A diretividade vai a zero em regiões marcadas pelos mínimos valores do autovalor β	48
Figura 30 – Diretividade em região <i>bright</i> $\Omega_b = 20^\circ$ e $M = 7$. A diretividade vai a zero em regiões marcadas pelos mínimos valores do autovalor β	49
Figura 31 – Diretividade em região <i>bright</i> $\Omega_b = 30^\circ$ e $M = 7$. A diretividade vai a zero em regiões marcadas pelos mínimos valores do autovalor β	49
Figura 32 – Diretividade em região <i>bright</i> $\Omega_b = 0^\circ$ e $M = 15$. O comportamento é igual a DAS discreto.	50

Figura 33 – Diretividade em região <i>bright</i> $\Omega_b = 10^\circ$ e $M = 15$. Assim como em $M = 7$, a diretividade vai a zero em regiões marcadas pelos mínimos valores do autovalor β	50
Figura 34 – Diretividade em região <i>bright</i> $\Omega_b = 20^\circ$ e $M = 15$. Assim como em $M = 7$, a diretividade vai a zero em regiões marcadas pelos mínimos valores do autovalor β	51
Figura 35 – Diretividade em região <i>bright</i> $\Omega_b = 30^\circ$ e $M = 15$. Assim como em $M = 7$, a diretividade vai a zero em regiões marcadas pelos mínimos valores do autovalor β	51
Figura 36 – Diretividade em região <i>bright</i> $\Omega_b = 0^\circ$ e $M = 4$. A diretividade é constantemente forçada a zero entre os pontos de autovalor ϖ	53
Figura 37 – Diretividade em região <i>bright</i> $\Omega_b = 10^\circ$ e $M = 4$. A diretividade é constantemente forçada a zero entre os pontos de autovalor ϖ	53
Figura 38 – Diretividade em região <i>bright</i> $\Omega_b = 20^\circ$ e $M = 4$. A diretividade é constantemente forçada a zero entre os pontos de autovalor ϖ	54
Figura 39 – Diretividade em região <i>bright</i> $\Omega_b = 30^\circ$ e $M = 4$. A diretividade é constantemente forçada a zero entre os pontos de autovalor ϖ	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Velocidades do Som em gases e água	9
Tabela 2 – Comprimento e número de onda para velocidade do som 340 m/s	10
Tabela 3 – Limiar de Tolerância Auditiva	13
Tabela 4 – Exemplo de autovetor $\mathbf{q}(k \Delta x = 5)$ para $M = 7$	45

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AAL	<i>Ambiente de Áudio Local</i>
ABC	<i>Acoustic Brightness Control</i>
ACC	<i>Acoustic Contrast Control</i>
DAS	<i>Delay and Sum</i>
DOA	<i>Direction of Arrival</i>
LRAD	<i>Long Range Acoustic Device</i>
RADAR	<i>Radio Detector and Ranging</i>
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i>
SPL	<i>Sound Pressure Level</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Amplitude
α	variável auxiliar imposição de fase em DAS
b	Padrão de Radiação
BP	<i>Beam Pattern</i>
β	Brilho acústico
c	Velocidade de Propagação
E	Densidade de Energia
D	Diretividade
DF	Fator de diretividade
DI	Índice de Diretividade
f	Frequência
g	Função de Green
g_f	Função livre de Green
γ	Calor Específico de gás
H	Matriz de funções transferência
J	Função custo
k	Número de onda
λ	Comprimento de onda
L	Comprimento de arranjo
M	Número de alto-falantes ou peso molecular
N	Número de pontos em espaço
N_b	Número de pontos em espaço para ABC
N_d	Número de pontos em espaço para ACC
p	Pressão

ϖ	Contraste acústico
ρ	Densidade
R	Constante do gás
\mathbf{R}	Matriz de correlação espacial das funções de transferência
\mathbf{R}_b	Matriz de correlação espacial das funções de transferência (<i>bright</i>)
\mathbf{R}_d	Matriz de correlação espacial das funções de transferência (<i>bright</i>)
t	Tempo
τ	Fase temporal
θ	Coordenada Polar
θ'	Direção de propagação em DAS
ϕ	Coordenada zenital ou fase
q	Excitação de alto-falante ou perturbação sonora
\mathbf{q}	Vetor excitação de alto-falante
r	Coordenada distância radial
σ	Autovetor em ABC
T	Período ou Temperatura
μ	Autovetor em ACC
w	Frequência Angular
ω	Função Peso de sinal
x	Coordenada cartesiana
z	Coordenada cartesiana
x_s	Coordenada de um alto-falante no arranjo

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 Justificativa	1
1.2 Objetivo	3
2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
2.1 Som - Introdução	4
2.2 Movimento Harmônico	5
2.3 Equação da Onda	6
2.3.1 Equação da Onda em três dimensões	7
2.3.2 Soluções de Equação da Onda em três dimensões	7
2.3.2.1 Solução por caso particular: fonte omnidirecional	8
2.3.2.2 Solução por funções de Green	8
2.4 Conceitos Básicos de Ondas de Som no ar	8
2.4.1 Velocidade de propagação para baixa amplitude	9
2.4.2 Nível e Unidades de Pressão	10
2.4.3 Densidade de Energia	11
2.5 Alto-falantes	11
2.6 Audição Humana	12
2.7 Introdução a Arranjo de Emissores/Receptores e Beamforming	13
2.7.1 Arranjos e definição de Beamforming	13
2.7.2 Aplicações - Ondas de Rádio	15
2.7.3 Aplicações - Ondas de Som	15
2.7.3.1 Ambiente de Áudio Local (AAL) e Alto-falantes Direcionais	16
2.7.3.2 Emissão de Som com altas energias	17
2.8 Focalização de Som com arranjo de alto-falantes	18
2.8.1 Introdução - Apresentação do Problema	18
2.8.1.1 Aproximação de Fraunhofer	20
2.8.2 Medidas de Performance de um Arranjo	22
2.8.2.1 Diretividade (D)	22
2.8.2.2 Índice de Diretividade (DI)	23
2.8.2.3 Fator Direcional (DF)	23
2.8.2.4 Beam Pattern (BP)	23
2.9 Aplicação de Métodos de Beamforming ao problema de Focalização de Som	23
2.9.1 Métodos de Soma	24
2.9.1.1 Delay-and-Sum (DAS) - arranjo contínuo	24
2.9.1.2 Delay-and-Sum (DAS) - arranjo discreto	25

2.9.2	Métodos de Divisão	26
2.9.2.1	Acoustic Brightness Control (ABC)	27
2.9.2.2	Acoustic Contrast Control (ACC)	29
3	– METODOLOGIA E ANÁLISE	31
3.1	Método de Soma - DAS	31
3.1.1	Resolução e códigos de cálculo	31
3.1.2	Comportamento DAS contínuo	32
3.1.2.1	Padrão de Radiação	32
3.1.2.2	Beam Pattern	32
3.1.2.3	Diretividade	35
3.1.3	Comportamento DAS Discreto	35
3.1.3.1	Padrão de Radiação	35
3.1.3.2	Beam Pattern	38
3.1.3.3	Diretividade	40
3.2	Métodos de Divisão - ABC e ACC	41
3.2.1	Resolução	41
3.2.1.1	Código ABC	42
3.2.1.2	Código ACC	43
3.2.2	Comportamento ABC	43
3.2.2.1	Autovalores	44
3.2.2.2	Autovetores	45
3.2.2.3	Diretividade	47
3.2.3	Comportamento ACC	52
3.2.3.1	Autovalores e Diretividade	52
3.2.3.2	Autovetores	55
4	– CONCLUSÃO	56
	Referências	58
	Apêndices	59
	APÊNDICE A–Código DAS - Contínuo	60
	APÊNDICE B–Código DAS - Discreto	63
	APÊNDICE C–Código ABC	66
	APÊNDICE D–Código ACC	73

1 INTRODUÇÃO

1.1 Justificativa

A audição é um sentido *sui generis*, difícil de descrever ou comparar. A sensação de ouvir pode nos trazer prazer, permite conversar com o outro e nos alerta sobre o que acontece ao redor. Nossa qualidade de vida está muito ligada à audição, seja por razões de entretenimento, comunicação ou saúde. Não obstante, a tecnologia voltada à área de áudio e acústica é vasta e em constante aprimoramento, com exemplos comuns de aparelhos de som, microfones, aparelhos de ouvido e tecnologias contra ruído.

Em particular, a tecnologia de arranjo de microfones recebeu bastante interesse para detecção de fontes de ruído em máquinas e visualização de campos de radiação sonora. Um arranjo de microfones atua pelo processamento de sinal de cada microfone individual, de forma muito semelhante à maneira com que tecnologias antecessoras como o processamento de sinal de antenas de rádio funcionam, como o RADAR (*Radio Detector and Ranging*), por exemplo (BAI; BENESTY, 2013). Com um arranjo de antenas, o RADAR é capaz de identificar a direção de chegada, DOA (*direction of arrival*), de uma onda de rádio e sua intensidade. No arranjo de microfones, o análogo pode ser feito com ondas sonoras. Além da recepção de som, ou radiação, também existe a emissão por arranjo de emissores.

São várias as vantagens para emitir ou receber radiação com um arranjo de emissores ou receptores. Em destaque, está a capacidade de o arranjo agir como um filtro espacial capaz de dar diretividade à radiação emitida ou recebida, também conhecido como *beamforming* (BAI; BENESTY, 2013). Outras razões são o aumento da razão sinal a ruído, SNR (*signal to noise ratio*), e a capacidade de apontar a radiação em determinada direção ou estimar a DOA pela atribuição de uma fase ou atraso sem mecanicamente mover o arranjo. De maneira mais prática, *beamforming* procura somar todas as ondas em fase em um determinado eixo de propagação, enquanto fora deste a intensidade cai, aproximando-se do formato de um feixe, daí o seu nome. E para isso, é necessário processar o sinal corretamente dos emissores ou receptores.

Essa tecnologia tem extenso uso em telecomunicações e na distribuição de sinal de rádio a celulares. Em acústica, também existem exemplos de dispositivos, mas o uso ainda é mais forte em área de pesquisa. A literatura é, na sua maioria, sobre arranjo de microfones e somente em décadas recentes que a literatura em arranjo de alto-falantes começou a surgir (BAI; HSIEH, 2015). Enquanto o arranjo de microfones serve para estudar as melhores maneiras de receber o som, e identificar a sua fonte ou causa, o arranjo de alto-falantes estuda diferentes maneiras de emitir e reproduzir o som. Ou seja, até certo grau, pode-se controlar a maneira com que o som emitido se propaga ou restringi-lo a uma região, e este é o tema de interesse do seguinte trabalho.

Mas som é produzido por vibrações no ar e viaja como ondas que se propagam livremente, e se espalham e reverberam no meio até serem absorvidas. E ouve-se som em certo local se as ondas sonoras chegam até lá com suficiente intensidade. Restringir a propagação do som a uma região é um problema complicado porque não se pode simplesmente fazê-lo parar arbitrariamente.

Convencionalmente, o som emitido por alto-falantes se faz ser emitido por um, dois ou um conjunto deles, mas nenhum deles devidamente posicionados como um arranjo. Desta forma, as ondas de som se interferem de uma maneira não determinada e o som resultante é próximo de espacialmente homogêneo. Para o caso de um arranjo de alto-falantes, cada um recebe um sinal diferente, contendo uma fase (ou atraso) e uma função peso (ou força de sinal). Controlando-se essas variáveis pode-se moldar o som resultante emitido, e portanto, dar diretividade à propagação e possivelmente criar zonas de som alto e som baixo.

Essa prática vai de encontro ao conceito de Ambiente de Áudio Local (AAL), que consiste na reprodução de som localmente, de tal forma que, idealmente, ambientes abertos ou recintos fechados possuam regiões adjacentes com diferentes conteúdos de áudio sem interferirem entre si (KUUTTI; SEPPONEN, 2014). Dito de outra maneira, esse conceito procura confinar a propagação de som a uma região do espaço em questão. Assim, pessoas dentro dessa região ouvem o som reproduzido, enquanto pessoas fora dela ouvem o som muito baixo ou não o ouvem de fato, devido ao barulho residual presente no local. Alto-falantes operando sob este conceito são chamados de alto-falantes direcionais (KUUTTI; SEPPONEN, 2014) e tem aplicação em ambientes como exposições e museus, espaços de convivência e *lounges*, escritórios, espaços urbanos ou espaços adequados a propaganda. Em geral, procurando evitar a poluição sonora de múltiplas fontes de som ou conservando silêncio onde se deseja. Além disso, alto-falantes direcionais são uma eventual alternativa ao uso de fones de ouvido, pois o usuário é mais capaz de se comunicar e ouvir as pessoas ao redor do que o faria com o uso de fones, e ambos objetivam por reproduzir áudio de forma pessoal.

Em suma, o problema de interesse deste trabalho é chamado pela literatura de Focalização de Som com arranjo de alto-falantes. Este assunto recebe atenção desde 1990, e busca aprimorar a diretividade e performance do som propagado por meio de diferentes métodos de *beamforming* (AL., 2016). Os métodos se diferenciam na maneira com que otimizam o problema de focalização e nos vínculos associados a energia, campo acústico ou outros parâmetros. Os métodos de *beamforming* tratados são: *Delay and Sum* (DAS), que procura somar todas as ondas em fase, e *Acoustic Brightness Control* (ABC) e *Acoustic Contrast Control* (ACC), que agem pelo controle da distribuição de energia acústica nas regiões de propagação. Os passos para o tratamento desse problema são: (1) escolha das características do arranjo (espaçamento entre elementos e geometria); (2) aplicação de um método de *beamforming* e obtenção do sinal previsto para cada alto-falante; (3) usar deste sinal para determinar como se manifesta o som emitido pelo arranjo.

1.2 Objetivo

Objetiva-se aplicar os métodos de *beamforming* DAS, ABC e ACC a um arranjo linear de alto-falantes e determinar as propriedades de diretividade do som emitido para cada método. Evidenciando, também, as influências da relação entre o espaçamento entre alto-falantes e a frequência (ou comprimento de onda) do som emitido, e o número de alto-falantes no arranjo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Som - Introdução

Som e vibração estão fortemente conectados. Um exemplo prático disso é quando se interrompe com o toque da mão uma corda de violino vibrando ou um sino soando e se percebe que o som cessa. Ao mesmo tempo, para ouvir o som desses instrumentos é preciso haver um meio material sem interrupções até nossos ouvidos - um instrumento dentro de uma câmara de vácuo, por exemplo, será inaudível. O ar da atmosfera é este meio material livre em que todas as vibrações de nosso mundo podem ser comunicadas e ouvidas. Na prática, o ar é o principal veículo para o som, mas outros meios gasosos, líquidos e sólidos são igualmente capazes de propagá-lo.

A passagem do som no ar não é instantânea e é alterada levemente por condições climáticas como temperatura, umidade e pressão, valendo na ordem de 340 metros por segundo e é medida em relação à velocidade do vento. É consequência direta de observação que esta velocidade também é, em amplos limites, independente de intensidade, frequência e timbre do som (STRUTT, 1894), do contrário uma peça de música soaria completamente diferente. A velocidade do som está vinculada a rapidez com que as moléculas do meio transferem a energia da perturbação, desta forma quanto menor for o espaçamento médio entre as moléculas e quanto maior for a constante elástica do material, maior será a velocidade (FORD, 1970). É por essa razão que geralmente o som é bastante mais rápido em sólidos do que em fluidos.

Também é consequência direta de observação que o som se propaga de maneira a se espalhar no recinto ou ambiente aberto, ultrapassa obstáculos ou os contorna. Isso se dá devido a propagação do som em forma de onda, que tem as propriedades gerais de reflexão, transmissão e difração, e permitem este efeito e outros como o eco. O som propagado em um ambiente aberto também cai em intensidade rapidamente com a distância, pois cobre cada vez mais espaço conforme viaja. Além disso, ocorre a absorção da energia por parte do chão, árvores e até mesmo o próprio ar. De fato, a grande maioria das propriedades do som são aquelas esperadas de uma onda; sendo o som uma onda de compressão.

Também pode-se distinguir o som entre musical e não musical, referidos como notas e barulho, respectivamente, mas não é fácil de fazer uma distinção completa (STRUTT, 1894). Para exemplos extremos como o toque de um instrumento, ou o som de um carro ou ônibus, não há discussão, mas mesmo assim, no som de uma flauta é possível ouvir o barulho da passagem do ar. Ou, ao tocarmos todas as teclas de um piano, percebemos um som sem tom definido e que lembra barulho. Não é simples entender o que compõe uma nota ou barulho, muito menos a sua diferença. Em geral, notas são mais restritas e são formadas pela combinação de harmônicos - tons ou frequências múltiplas de uma frequência fundamental - enquanto barulho varia aleatoriamente no tempo e não apresenta padrão ou ordem nas frequências que o

compõem. Este fato se comunica bem com o teorema de Fourier, segundo o qual, qualquer função periódica, som inclusive, pode ser expressa como um somatório de funções circulares seno e cosseno de períodos submúltiplos daquela dada função. E o movimento físico de oscilação correspondente a função seno e cosseno é justamente o Movimento Harmônico, que tem como variável a pressão no ar, ou seja, som como oscilações de pressão.

2.2 Movimento Harmônico

A quantidade em questão que constitui uma vibração pode ser o deslocamento de uma partícula, como a posição da massa de um pêndulo, ou variações de pressão em um ponto fixo para o caso de som. Denotando por $a(t)$ a quantidade desta vibração, temos

$$a(t) = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right) \quad (1)$$

onde a é a amplitude, T é o período e ϕ é a fase da vibração no momento em que o tempo t foi medido. Quando duas ou mais vibrações se propagam juntas no meio, a vibração resultante é a superposição ou soma das vibrações,

$$a(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t), \quad (2)$$

onde:

$$a_i(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i} + \phi_i\right). \quad (3)$$

Para a soma de duas vibrações de mesmo período e de fases diferentes, ϕ_1 e ϕ_2 , é importante notar a diferença entre as fases. Se as fases diferem por um período, é dito haver interferência construtiva, logo a soma de amplitudes

$$a(t) = (a_1 + a_2) \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right). \quad (4)$$

Se as fases diferem por meio período, é dito haver interferência destrutiva, logo a diferença de amplitudes,

$$a(t) = (a_1 - a_2) \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right). \quad (5)$$

Equivalentemente, pode-se representar a vibração usando de coordenada espacial x no eixo de propagação da mesma

$$a(x) = a \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \phi\right), \quad (6)$$

onde λ é o comprimento de onda e toma o lugar do período, assim a cada distância percorrida de 1λ ou tempo percorrido de $1 T$ a vibração repete. A frequência f , o inverso de T , é a

quantidade de oscilações ocorridas por unidade de tempo e se relaciona com a velocidade de propagação da oscilação c com:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}. \quad (7)$$

2.3 Equação da Onda

A equação da onda descreve fenômenos ondulatórios lineares e sua aplicação é diversa, com o exemplo clássico de oscilações em uma corda e as oscilações de campo eletromagnético que compõem a luz. Dada uma função f que respeita a equação da onda, temos, no caso de uma dimensão,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (8)$$

tomando c como a velocidade de propagação da onda, x e t como as coordenadas espaciais e temporais. Para o som, usa-se a equação da onda aplicada a pressão no meio, podemos expressar a pressão total P como

$$P = P_0 + p, \quad (9)$$

sendo P_0 a pressão estática do meio não perturbado e p a perturbação, ou seja, a variação de pressão que se propaga no meio. Portanto, no ar P_0 é a pressão atmosférica e p é a compressão veiculada pelo som. Desprezando o valor de viscosidade no ar e flutuações da pressão P_0 por influências de entropia, e assumindo valores pequenos de p em relação a P_0 , temos a equação da onda no caso acústico (FORD, 1970), (KIM; CHOI, 2013),

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (10)$$

No caso de som, refere-se a ondas longitudinais, portanto as partículas do meio oscilam e se movimentam no mesmo eixo de propagação da onda. O ar é um meio de viscosidade muito baixa, e por isso é incapaz de carregar ondas transversais (FORD, 1970). Para essas ondas, o movimento das partículas, ou a oscilação, é perpendicular a propagação da onda, como as ondas formadas em uma corda, por exemplo.

Quando o som se propaga, variações de pressão implicam variações na densidade do meio. Como anteriormente, podemos escrever a densidade total ρ como:

$$\rho = \rho_0 + \varrho, \quad (11)$$

onde ρ_0 é a densidade normal do fluido e ϱ é a flutuação de densidade causada pela onda. Além disso, esta última também atende a equação da onda,

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2}. \quad (12)$$

A velocidade $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ da partícula do meio, segundo a equação da onda, se relaciona com a pressão e a densidade de forma

$$-\nabla p = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (13)$$

e também

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (14)$$

Ou seja, é um gradiente de pressão que faz o fluido se mover, e a variação de densidade é igual ao fluxo do fluido.

Além disso, é consequência da equação da onda que a frequência angular w e o número de onda k tem a relação de dispersão

$$w = 2\pi f = ck, \quad (15)$$

com

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (16)$$

2.3.1 Equação da Onda em três dimensões

A equação da onda para uma função f arbitrária em três dimensões tem a forma geral

$$\nabla^2 f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (17)$$

onde existe a liberdade de escolher-se o sistema de coordenadas desejado para expressar o operador laplaciano ∇^2 . Para coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , r é a distância radial, θ é o ângulo polar ou zenital e ϕ é o ângulo azimutal. E pode-se escrever o laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right), \quad (18)$$

e a equação da onda,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (19)$$

2.3.2 Soluções de Equação da Onda em três dimensões

Na solução da equação da onda, deve-se considerar a natureza da perturbação que a originou e as condições de contorno no espaço, isto é, o local onde a onda vai se propagar. São expostas duas alternativas para solução: uso de funções de Green e exploração de casos particulares de interesse.

2.3.2.1 Solução por caso particular: fonte omnidirecional

Frequentemente, é desejado expressar a onda de uma fonte omnidirecional (não direcional ou isotrópica) em um ambiente anecóico (livre e sem eco). Neste caso, a onda se expandirá à medida que viaja para longe do ponto onde se originou, e a frente de onda será sempre de superfície esférica. Neste caso, a equação da onda é apenas uma função de r , reduzindo-se a (BERANEK, 1954),

$$\frac{\partial^2(f r)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(f r)}{\partial t^2}, \quad (20)$$

e cuja solução será

$$f(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}, \quad (21)$$

ou seja, uma onda de amplitude complexa A que expande e atenua-se com a distância r . Para a quantidade de pressão p , substitui-se f por p :

$$p(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (22)$$

e A se torna a amplitude na pressão.

2.3.2.2 Solução por funções de Green

A função de Green $g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ é definida como a resposta em um ponto \mathbf{r} no espaço devido a uma excitação ou perturbação pontual $q(\mathbf{r}_0)$, localizada no ponto \mathbf{r}_0 e em volume V . E, portanto, depende das condições de contorno desse espaço. Dessa forma, a pressão em um ponto no espaço pode ser descrita como (KIM; CHOI, 2013):

$$p(\mathbf{r}) = \int_V g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) q(\mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}_0). \quad (23)$$

Mas, para isso é preciso saber de antemão a função de Green do espaço em questão, que no caso particular de campo livre (sem obstáculos e reflexões) é:

$$g_f(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|. \quad (24)$$

2.4 Conceitos Básicos de Ondas de Som no ar

Som é gerado pela vibração de corpos em contato com o ar e se manifesta como ondas longitudinais de compressão. Para descrever o som, é preciso olhar com atenção para as características da vibração do corpo, para o próprio ar e as condições em que ele está sujeito.

2.4.1 Velocidade de propagação para baixa amplitude

A velocidade do som é determinada pela velocidade com que as partículas no ar transferem a energia da perturbação de uma para a outra. Para perturbações pequenas, a velocidade depende apenas das propriedades físicas do ar, logo é independente da perturbação. Para perturbações grandes, porém, a velocidade depende também da magnitude da mesma, e se refere a propagações não lineares. Felizmente, o tratamento linear é suficiente para a maioria dos sons, e é necessário o tratamento não linear apenas para sons de altíssimas intensidades.

A velocidade do som pode ser expressa da forma

$$c = \left(\frac{\gamma P_0}{\rho_0} \right)^{1/2}, \quad (25)$$

onde γ é o calor específico do gás, P_0 é a pressão média e ρ_0 a densidade média. Como as colisões são rápidas, há pouco tempo para haver troca de calor, e por isso é considerado uma relação adiabática entre as variações de pressão e densidade. A razão P_0/ρ_0 é praticamente constante para a maioria dos gases, fazendo a velocidade do som ser independente da pressão (FORD, 1970). A Tabela 1 contém os valores de velocidade do som em alguns gases e em água:

Tabela 1 – Velocidades do Som em gases e água.

Meio	Densidade ρ_0 ($kg\ m^{-3}$)	Velocidade c ($m\ s^{-1}$)
Ar	1.21	343
Dióxido de Carbono	1.84	267
Hidrogênio	0.084	1330
Nitrogênio	1.17	349
Oxigênio	1.33	326
Água pura	998	1483
Água do mar	1025	1522

Fonte: Adaptado de (FORD, 1970), pg. 145

Alternativamente, pode-se escrever $P_0/\rho_0 = RT/M$, onde R é a constante do gás, M o peso molecular e T a temperatura absoluta. Assim, a velocidade fica

$$c = \left(\frac{\gamma RT}{M} \right)^{1/2}, \quad (26)$$

e se mostra proporcional à raiz quadrada da temperatura absoluta. Há outros fatores ambientais que influenciam a velocidade de propagação, como a umidade relativa do ar, por exemplo, mas o principal é a medida de temperatura.

Em posse da velocidade, podemos calcular o comprimento de onda λ e número de onda k . Em particular, para o espectro audível, compreendido entre frequências de 20 Hz a 20.000 Hz, e uma velocidade de 340 m/s, valor de referência a 20 °C, a Tabela 2 relaciona estes valores por meio de Equação (15) e Equação (16).

Tabela 2 – Comprimento e número de onda para velocidade do som 340 m/s.

Frequência (Hz)	Comprimento de onda λ (m)	Número de onda k (m^{-1})
20	17	0.37
100	3.4	1.8
200	1.7	3.7
500	0.68	9.2
1000	0.34	18.5
5000	0.068	92.4
10000	0.034	185
20000	0.017	370

2.4.2 Nível e Unidades de Pressão

A pressão no ar é descrita pela soma da pressão média P_0 , que é a pressão atmosférica constante no tempo, e a pressão do som $p(t)$. Assim, a pressão do som é vista como uma pequena variação de pressão que oscila em torno da pressão média ¹. E, dessa forma, não é interessante medir a pressão absoluta, mas sim a pressão devido ao som. Pela natureza oscilatória, a pressão média do som é zero, por isso a quantidade de interesse é a pressão quadrática média, a que se refere como nível de pressão.

A pressão de uma onda de som harmônica em um ponto é expressada por $p(t) = a \cos(\omega t)$. Para obter a pressão quadrática média do som, integrar-se-á a função no seu período de oscilação T

$$\bar{p}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T a^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{a^2}{2}, \quad (27)$$

e então:

$$\bar{p} = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0.707 a. \quad (28)$$

O nível de pressão \bar{p} é expresso no Sistema Internacional em Pascais ($Pa = 1Nm^{-2}$), mas é mais comum o uso de uma escala logarítmica, ou seja, em Decibéis. Nesta escala, mede-se a magnitude da pressão em relação a uma pressão de referência. Utilizando os valores de referência para a audição humana, $2 \cdot 10^{-5}$ Pa a 20 Pa, ² define-se a escala de nível de pressão, comumente referida a SPL (*Sound Pressure Level*):

$$SPL = 20 \log_{10} \left(\frac{\bar{p}}{2 \cdot 10^{-5}} \right) \quad (dB). \quad (29)$$

¹Para servir de comparação, a pressão atmosférica vale $1 atm$, ou 10^5 Pa ($Pa = 1Nm^{-2}$), enquanto que a faixa de valores de nível de pressão de interesse para o ramo de áudio-acústica é $2 \cdot 10^{-5}$ Pa a 20 Pa. O primeiro valor corresponde ao limite de pressão audível, e o último valor é aquele que traz desconforto e dor para quem ouve o som (FORD, 1970). Dessa forma, o som que se costuma ouvir de fato é uma pequena perturbação na pressão atmosférica.

²refira-se a [1]

Em termos da pressão de som audível, SPL vai de 0 dB ($2 \cdot 10^{-5}$ Pa) a 120 dB (20 Pa). Valores comuns de SPL no dia a dia costumam variar entre 35 dB a 85 dB.

2.4.3 Densidade de Energia

A densidade de energia do som é dada pela energia em determinada parte infinitesimal do gás dividida pelo volume dessa mesma parte. Para a onda plana, a densidade de energia em um ponto será (BERANEK, 1954)

$$E = \frac{\bar{p}^2}{\rho_0 c^2} = \frac{\bar{p}^2}{\gamma P_0}, \quad (30)$$

e cujo valor pode ser expresso pela soma de densidades de energia cinética e potencial, respectivamente,

$$E = E_k + E_p \quad (31)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \rho_0 u^2 \quad (32)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{\bar{p}^2}{\gamma P_0}. \quad (33)$$

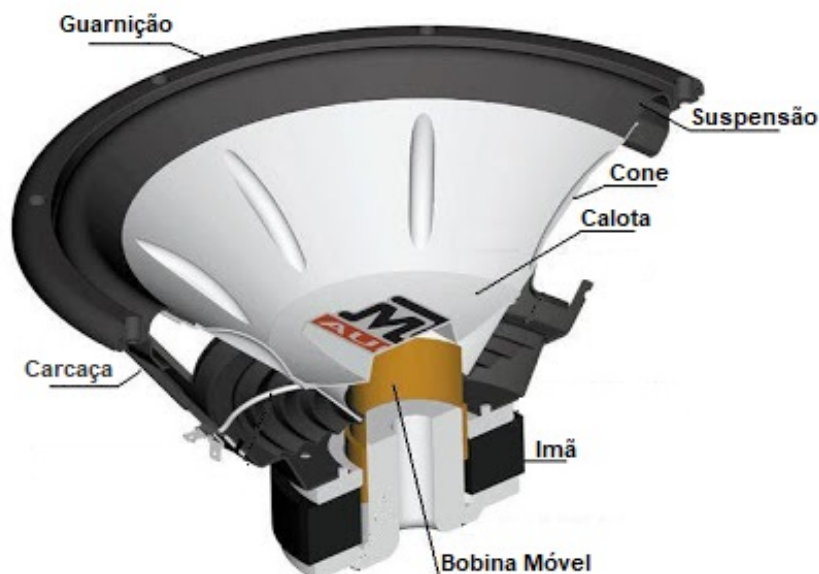
Por tratar-se de densidades de energia, os valores são expressos no Sistema Internacional por Wm^{-3} .

2.5 Alto-falantes

O alto-falante é um dispositivo composto de um transdutor eletroacústico que converte o sinal elétrico em som. Isso é feito de maneira que o transdutor, ao receber um sinal, excita um diafragma e o faz se movimentar para frente e para trás, rapidamente, e vibra produzindo som. Os dois principais tipos de alto-falantes são (1) aqueles cujo diafragma vai de encontro direto ao ar, os mais comuns (vide Figura 1), e (2) aqueles cujo diafragma é seguido por uma corneta por onde o som sai. A nível de comparação, o primeiro tipo tem a vantagem de ser de baixo custo, compacto, e ter uma resposta satisfatória em uma larga faixa de frequências. Mas, tem as desvantagens de ter baixa eficiência e, em altas frequências, apresentar resposta irregular e um padrão de radiação mais estreito, ou seja, de maior diretividade (BERANEK, 1954).

Há muito no que se considerar no projeto de um alto-falante, como dimensão e geometria do conjunto de diafragma e estrutura da caixa, materiais utilizados e o circuito elétrico. Em função disso, muitas características do som emitido pelo aparelho são afetadas. Um transdutor eletroacústico ideal deveria (KINSLER; FREY, 1950):

Figura 1 – Exemplo de Alto-falante e seus principais componentes.



Fonte: <http://altofalanteufes2007.blogspot.com/2007/12/componentes.html>

1. possuir eficiência eletroacústica perto de 100 %;
2. possuir resposta acústica independente da frequência em todo o espectro audível;
3. não introduzir distorção na emissão;
4. reproduzir fielmente transientes, assim como sinais de entrada constantes;
5. ser de menor tamanho possível considerando a potência desejada;
6. ser capaz de produzir um padrão de radiação não direcional.

2.6 Audição Humana

O ouvido é um complexo mecanismo que faz o ser humano capaz de ouvir, interpretar e distinguir sons. Outra curiosa capacidade é a de conscientemente escolher focar a atenção a uma fonte de som particular entre tantas outras. Não há microfone ou aparato acústico que se compare com o mecanismo de audição. E, embora sejam usados diferentes instrumentos para a avaliação da performance de um sistema de áudio, a audição sempre tem o dizer final quanto à qualidade do som.

Na tentativa de estudar a sensação de audição, cedo se percebeu como a resposta de um ouvinte a determinado estímulo está sujeita a diversas condições. Não somente condições ambientais e do próprio estímulo (logo do experimento), mas também de como o ouvinte se sente no presente momento, ou como ele se sente em relação a algo do próprio experimento (BERANEK, 1954). Dessa forma, facilmente existe substancial discrepância entre resultados.

Deixando de lado a anatomia do ouvido e de como o processo de audição acontece, é importante mencionar algumas capacidades e características da audição humana, como os

limites da audição. O espectro audível é a faixa de frequências de 20 Hz a 20.000 Hz, não se ouve nenhum som fora dessa faixa. Esses valores variam entre indivíduos, principalmente o limite superior, que reduz consideravelmente com a idade. Além da frequência, existe também a faixa de nível de pressão, $2 \cdot 10^{-5}$ Pa a 20 Pa. O primeiro corresponde ao valor limite de pressão audível, e o último ao valor que traz desconforto e dor para quem ouve o som (FORD, 1970).

Quanto à sensação de audição, observa-se que a sensibilidade auditiva depende do par de valores: nível de pressão SPL e frequência. Isto é, se um som de nível de pressão constante, digamos 50 dB, tiver sua frequência variada perante o espectro audível, o ouvinte terá a sensação que o som ora se torna mais ou menos alto ou intenso. Ou seja, a percepção de nível de pressão do som, chamada audibilidade, é uma função de frequência e nível de pressão, como se confere em Figura 2. Um valor em fones é igual ao mesmo valor de SPL em dB de um som cuja frequência é 1000 Hz. As curvas apresentadas são curvas isoaudíveis, e mostram como SPL e frequência variam perante uma percepção fixa de audibilidade em fones. Nota-se como, em geral, o ouvido é menos sensível a baixas frequências e mais sensível na faixa de 1000 Hz a 5000 Hz.

No outro extremo, é interessante saber os níveis de pressão máximos que ouvintes são capazes de suportar. Segundo (BERANEK, 1954), reporta-se que, entre frequências de 50 Hz a 8000 Hz, ouvintes usando fones de ouvido e submetidos a sons de alta intensidade apresentaram sensações de desconforto seguidas de cócegas no ouvido, dor e até danos imediatos à audição à medida que se aumenta o nível de pressão. Ouvintes acostumados a exposição de barulho se mostram mais tolerantes. Os valores são conferidos em Tabela 3.

Tabela 3 – Limiar de Tolerância Auditiva.

Sensação	SPL(dB) Ouvido não acostumado	SPL(dB) Ouvido acostumado
Desconforto	110	120
Cócegas	132	140
Dor	140	-
Dano imediato	150-160	150-160

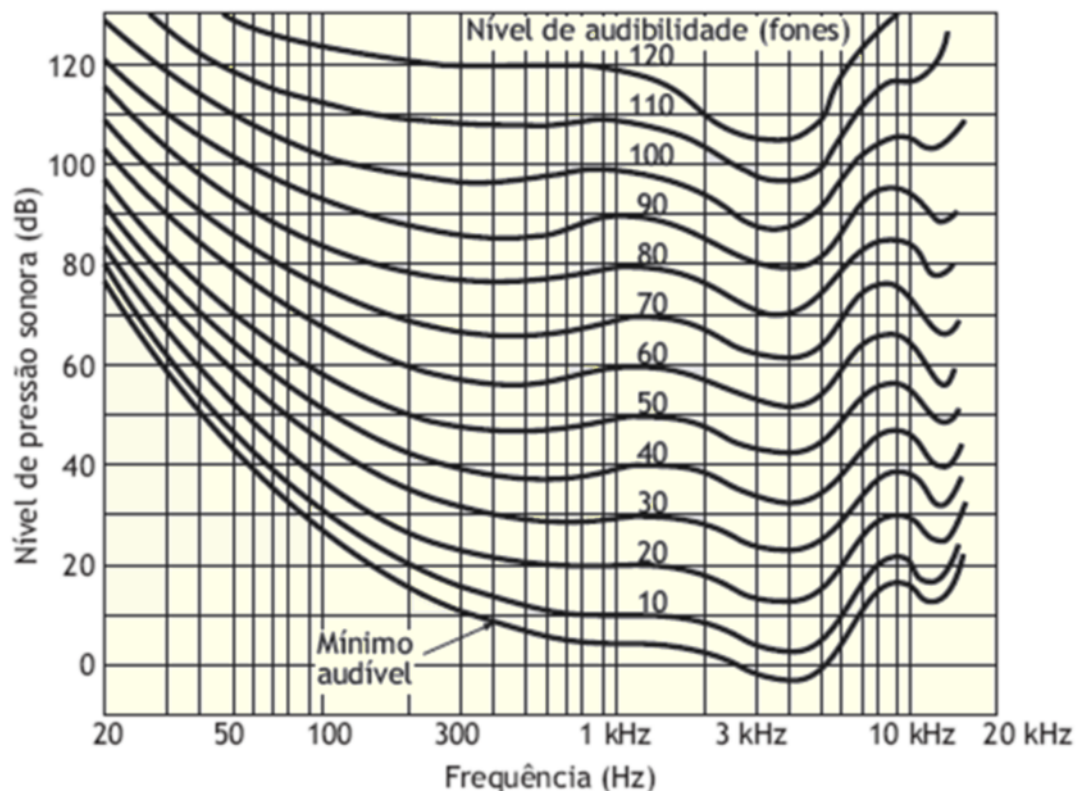
Fonte: Adaptado de (BERANEK, 1954), pg 397

2.7 Introdução a Arranjo de Emissores/Receptores e Beamforming

2.7.1 Arranjos e definição de Beamforming

Um arranjo de emissores ou receptores refere-se a emissão ou recepção de radiação por parte de não apenas um, mas um conjunto dos mesmos. Distribuídos e posicionados de

Figura 2 – Sensibilidade auditiva é apresentada em curvas isoaudíveis dadas em fones. O nível de audibilidade em fones corresponde ao mesmo valor em dB que o nível de pressão SPL de uma fonte de som com frequência 1000 Hz. Assim, uma curva isoaudível mostra como variam os valores de SPL e frequência perante uma percepção fixa de intensidade sonora.



Fonte: (BISTAFA, 2008)

uma maneira ordenada no espaço, esses formam um arranjo. O exemplo principal de emissor ou receptor é a antena, que trabalha com sinais de rádio; para ondas de som temos os alto-falantes e microfones.

Cada elemento, emissor ou receptor, tem um padrão de radiação que informa como se emite ou recebe a radiação de acordo com o ângulo de propagação. Elementos direcionais tem uma direção preferencial, enquanto elementos omnidirecionais, ou isotrópicos, não. Enquanto pode ser difícil projetar ou mudar o padrão de radiação de um elemento, é mais fácil manipular o padrão de radiação de um arranjo de elementos. Além disso, o uso de arranjos é vantajoso pelas seguintes razões:

Primeiro, utilizando um arranjo de forma apropriada, a razão sinal ruído, comumente referida a SNR (*signal to noise ratio*), de sinais corrompidos por barulho pode aumentar. Segundo, arranjos são por si filtros espaciais, que tornam possível a manipulação da diretividade do arranjo (também referido como *beamforming*). Essa propriedade é importante porque permite-se focar no sinal de interesse enquanto se rejeita contribuições de ruído e reverberação. Terceiro, o feixe pode ser guiado “eletronicamente” através da incorporação de atrasos ou fases nos sinais de cada elemento (BAI; BENESTY, 2013), pg.

1.

2.7.2 Aplicações - Ondas de Rádio

Desde a invenção do rádio, já eram utilizados vários tipos de antenas. E, durante a Segunda Guerra Mundial, tornou-se necessário a melhor compreensão das propriedades de irradiação. Geralmente, antenas possuem um largo padrão de radiação e baixa diretividade. Para projetar antenas com alta diretividade é necessário aumentar as dimensões da antena. Mas, isso nem sempre é possível e dá margem a problemas mecânicos com antenas grandes, para movê-las, por exemplo. Um modo alternativo é projetar antenas com um arranjo de vários elementos, assim o problema mecânico é trocado pelo problema de processamento e alimentação de sinais aos elementos da antena (BALANIS, 2005).

Ainda na Segunda Guerra Mundial, o RADAR foi a primeira área de atuação de arranjo de antenas. Com exemplos de sistemas de auxílio de mira a artilharia da marinha e de detecção de altura de aeronaves. Atualmente, são vários os sistemas militares que usam RADAR, e também há exemplos de atuação não militar, como o sistema de tráfego aéreo de aeroportos. Além do RADAR, surgiram várias outras aplicações, com destaques nas áreas de rádio astronomia, diagnóstico e tratamentos médicos, sismologia e principalmente telecomunicações. Vários sistemas a satélite utilizam de arranjos para o satélite ou na estrutura em terra. Outro exemplo, é o sistema de comunicação de celulares, que usa sofisticadas técnicas de multiacesso por meio de algoritmos aplicados a um arranjo de antenas (TREES, 2013), (BALANIS, 2005).

2.7.3 Aplicações - Ondas de Som

O uso de arranjos de microfones ou alto-falantes é análogo ao uso para antenas. Isto é, para o primeiro a onda é acústica, e para o segundo, eletromagnética. Apesar disso, ambos respeitam a equação da onda e o princípio de superposição da mesma forma. Assim, foi uma questão de tempo para haver arranjos para o caso acústico.

Um arranjo acústico opera com ondas sonoras geralmente dentro do espectro audível. Em particular, arranjos de microfones tem recebido atenção como meio de visualizar campos acústicos e identificar fontes de ruído e barulho. Então, barulhos resultantes de operações de máquinas, impactos e colisões, e até barulho induzido por fluxos de ar, como o barulho em aviões, tiveram mais meios de serem estudados (BAI; BENESTY, 2013).

Arranjos para a emissão de som tem aplicações no espectro audível e em ultrassom. No espectro audível, um arranjo de alto-falantes pode emitir som de forma direcional, ou seja, com o objetivo contrário do que se espera de um simples aparelho de som. Emitindo-se som de forma direcional, possibilita-se criar zonas de som alto e som baixo, isto é, zonas que respeitem o conceito de Ambiente de Áudio Local (AAL). Alternativamente, pode-se usar um arranjo para emitir som com altas energias, e devido a direcionalidade, fazer uso para comunicação a longas distâncias ou emitir som como meio de arma não letal para controle de multidões.

2.7.3.1 Ambiente de Áudio Local (AAL) e Alto-falantes Direcionais

O conceito AAL visa a reprodução de som localmente. De tal forma que, idealmente, seja possível ter regiões adjacentes em ambientes abertos ou recintos fechados com diferentes conteúdos de áudio e sem interferirem entre si (KUUTTI; SEPPONEN, 2014). Alto-falantes operando sob este conceito são chamados de alto-falantes direcionais.

Empresas já comercializam alto-falantes direcionais em diversas aplicações e soluções de áudio motivadas pelo conceito AAL. Exemplos de fabricantes são *Brown Innovations Directional Audio* (BROWN, 2018) e *Hypersound* (HYPER SOUND, 2018) que o leitor é convidado a conferir. Dispositivos de áudio operando sob o conceito AAL encontram aplicação em ambientes como exposições e museus, espaços de convivência e espaços urbanos ou locais adequados a propaganda e divulgação de informações. Além disso, podem servir como alternativa a fones de ouvido, permitindo reproduzir áudio de forma pessoal, mas mantendo a comunicação com o ambiente ao redor. Isso que pode ser útil em aparelhos de celular ou *notebooks*. Em Figura 3 e Figura 4, respectivamente, mostra-se um exemplo de aparelho de alto-falantes direcionais e o uso deste mesmo aparelho para fins de propaganda.

Figura 3 – Exemplo de alto-falante direcional de Brown Innovations Directional Audio: modelo SB-24 SonicBeam Directional Speaker. Possui comprimento de 24” e resposta em faixa de frequências 150 Hz a 20.000 Hz.



Fonte: (BROWN, 2018)

Na prática, por mais que se emita som de forma direcional, não é possível confiná-lo em uma região pela natureza de sua propagação, e sim, fazê-lo mais alto ou baixo em uma direção. Porém, nossos ouvidos percebem variações relativas de níveis de pressão, e não absolutas, de forma que o barulho residual de um ambiente ajuda a mascarar o som emitido fora do feixe de som. Então, quanto maior for o nível de barulho, mais fácil é de se atingir o conceito AAL.

Figura 4 – Dois alto-falantes direcionais localizados acima do painel de propaganda emitem o som da mesma em região próxima ao painel.



Fonte: (BROWN, 2018)

2.7.3.2 Emissão de Som com altas energias

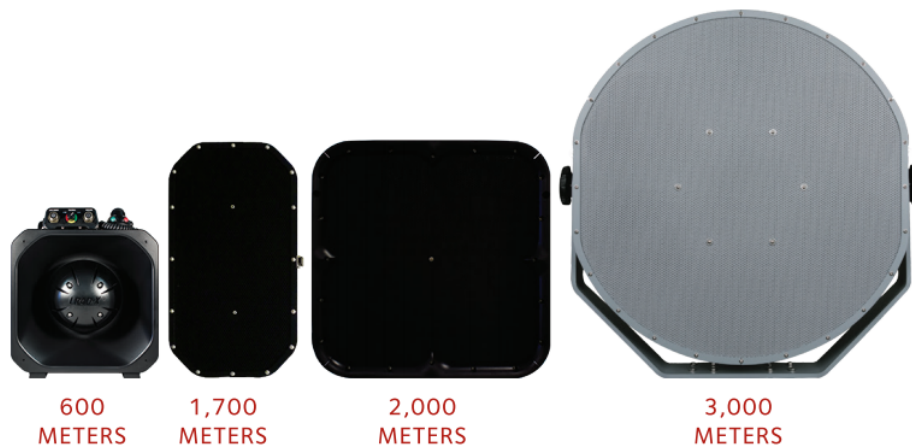
A LRAD (*Long Range Acoustic Device*) Corporation é um exemplo de empresa referência na fabricação de dispositivos emissores de som para propósitos de comunicação e avisos a longas distâncias; e que novamente o leitor é convidado a conferir (LRAD, 2018). Seus dispositivos encontram duas aplicação gerais: sistemas de notificação de emergência ou comunicação em massa, por exemplo, para desastres naturais e incêndios, e sistemas de defesa para o uso de exército e autoridades de polícia. O som emitido pode ser tanto uma mensagem de voz, como se faria com um megafone, um som de sirene para aviso, ou ainda um som desconfortável de ouvir. Na aplicação por parte de exército e polícia, os dispositivos da LRAD servem para, a longas distâncias, comunicar mensagens de aviso ou ajuda e emitir sons de aviso para deter ou dispersar manifestações hostis de pessoas. Ou ainda, criar um perímetro de sons de alta intensidade evitando a aproximação de pessoas de uma área específica. As figuras Figura 5 e Figura 6, mostram o uso de LRAD por autoridades e alguns dos modelos fabricados pela empresa com seu alcance em metros, respectivamente.

Figura 5 – Uso de dispositivo LRAD por autoridades.



Fonte: (LRAD, 2018)

Figura 6 – Alguns modelos de dispositivos de LRAD e seu alcance em metros.



Fonte: (LRAD, 2018)

2.8 Focalização de Som com arranjo de alto-falantes

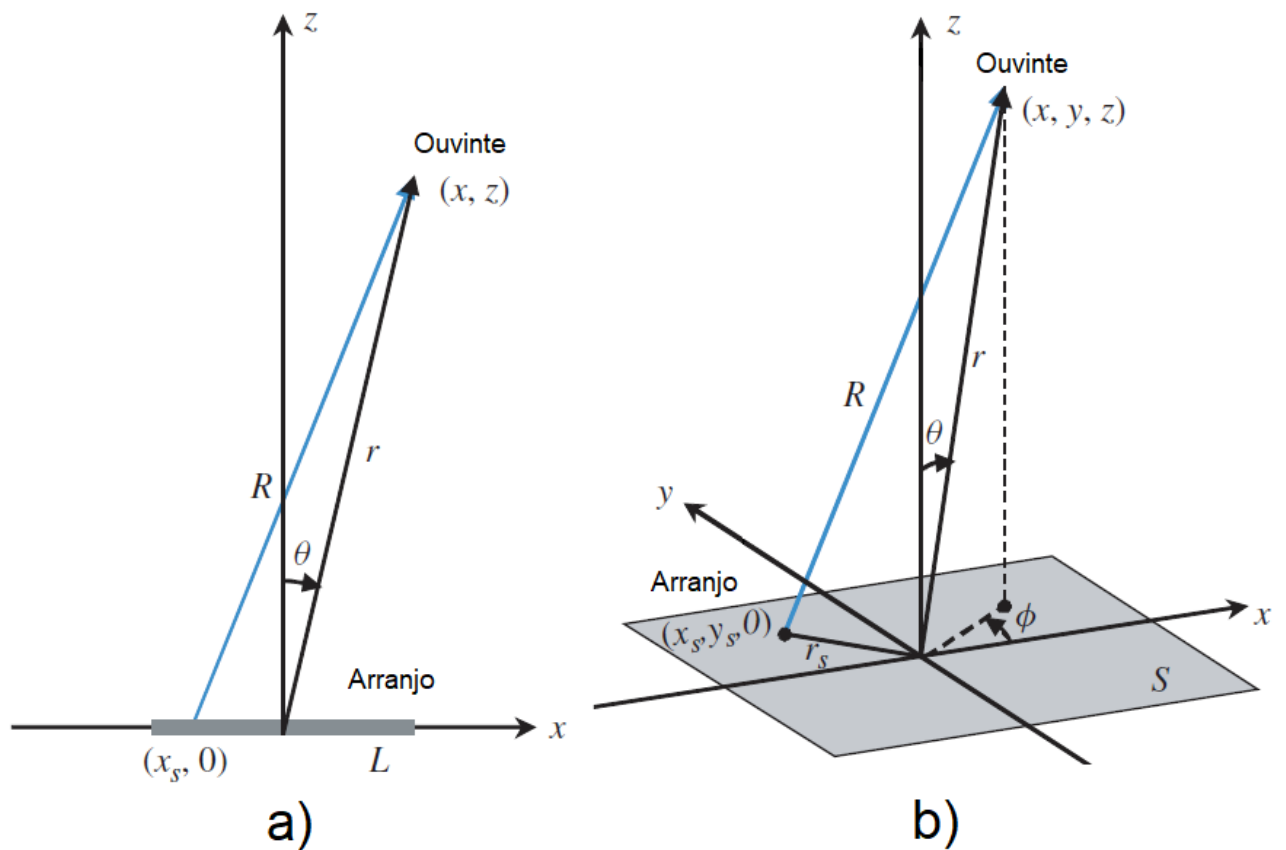
2.8.1 Introdução - Apresentação do Problema

Deseja-se caracterizar a relação entre o sinal de entrada e de saída, logo, o som de cada alto-falante com o som do arranjo. Como este problema se relaciona com o controle do nível de pressão SPL, a pressão acústica é a variável de interesse. Negligenciando a difração na saída de som dos alto-falantes, pode-se aproximar a radiação de cada um como omnidirecional. Essa simplificação permite determinar a pressão do arranjo disposto em uma superfície S alterando [Equação \(23\)](#) para:

$$p(\mathbf{r}) = \int_S g_f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) q(\mathbf{r}_s) dS = \int_S \frac{e^{i k R}}{4\pi R} q(\mathbf{r}_s) dS \quad (34)$$

onde g_f denota a função de Green de campo livre e $q(\mathbf{r}_s)$ a excitação isotrópica do alto-falante em \mathbf{r}_s . A distância $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|$ é definida como a distância entre um elemento do arranjo e o ouvinte em \mathbf{r} . Em princípio, o arranjo pode ter um formato geométrico qualquer, e a radiação emitida deste se dá em um ângulo sólido $\Omega(\theta, \phi)$. Porém, por motivos de simplificação, neste trabalho refere-se apenas a arranjos lineares e de espaçamento constante. Consequentemente, tratando o problema em 2 dimensões (vide Figura 7 a)). Assim, o problema é tratado em coordenadas (r, θ) ou (x, z) ao invés de em três eixos de coordenadas como se faria para um arranjo disposto em um plano (vide Figura 7 b)). E x_s é a posição no eixo x de um elemento do arranjo.

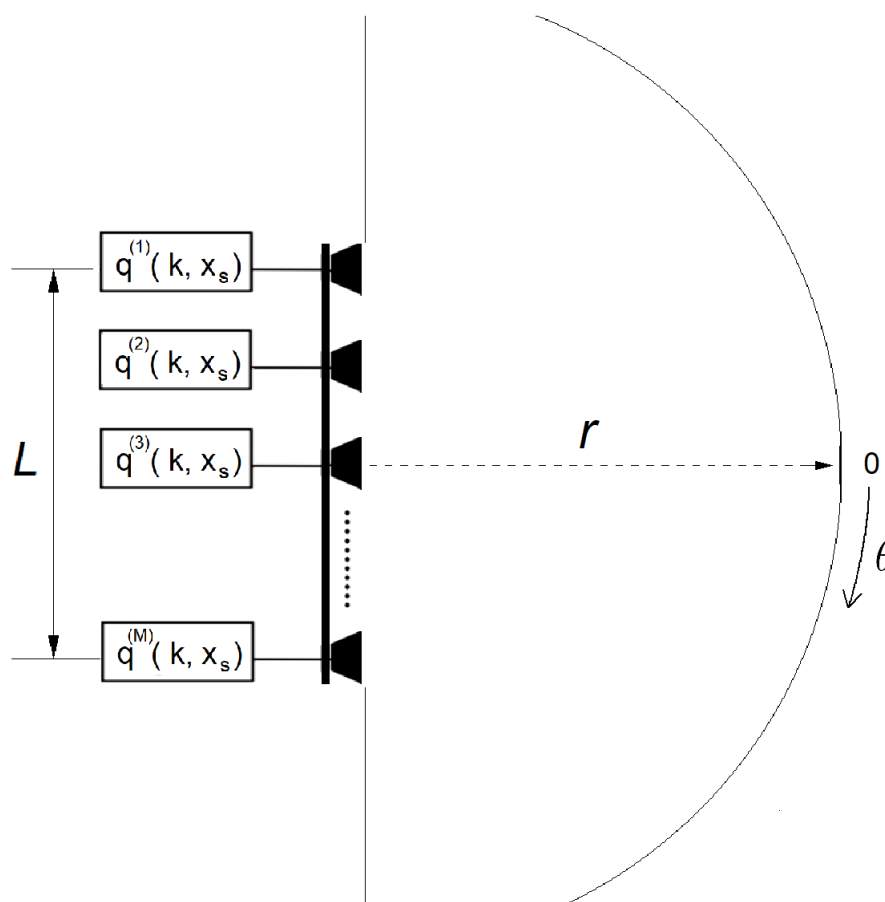
Figura 7 – Coordenadas em um arranjo: a) linear de comprimento L ; e b) plano em superfície S .



Fonte: Adaptado de (KIM; CHOI, 2013)

A figura Figura 8 mostra como cada alto-falante em um arranjo linear pode ter seu próprio valor de excitação q como função de x_s e k .

Figura 8 – Excitações $q(x_s, k)^{(i)}$, ($i = 1, \dots, M$) de M alto-falantes em um arranjo linear de comprimento L . Cada $q(x_s, k)^{(i)}$ com a liberdade de tomar um valor diferente do outro.



Formulado o problema, é necessário usar de um método de *beamforming* para focar o nível de pressão do som em um ponto ou região do espaço. Cada método aborda o problema de uma forma diferente, mas depois de aplicados, todos determinam o valor da excitação $q(x_s, k)$ de cada alto-falante no arranjo. Em posse da excitação, por meio de [Equação \(34\)](#) pode-se determinar finalmente a pressão em um ponto no espaço (r, θ) , o padrão de radiação e as outras quantidades que dizem respeito a propagação.

Costuma-se dizer que este problema é resolvido em domínio de frequências, já que w ou k são variáveis cujo valor é implícito e aguarda escolha. E uma alteração nessas variáveis implica alterações diretas na pressão e padrão de radiação do arranjo. Já as características do arranjo em questão, como formato e distância entre alto-falantes, são parâmetros fixos.

2.8.1.1 Aproximação de Fraunhofer

O campo acústico tem comportamento diferente dependendo da distância em relação ao arranjo. A região de Fraunhofer é aquela cuja distância ao arranjo é grande em comparação com o comprimento L do mesmo ($r \gg x_s$ ou $z \gg x_s$), e nos permite expressar ([KIM](#); [CHOI](#),

2013):

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{(x - x_s)^2 + z^2} \\
 &= \sqrt{x^2 - 2x x_s + x_s^2 + z^2} \quad \text{ou} \quad r \sqrt{1 + \frac{x_s^2 - 2x x_s}{r^2}} \\
 &\approx r + \frac{x_s^2}{2r} - \frac{x x_s}{r} \\
 &\approx r - \frac{x x_s}{r}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Essa aproximação, tomando $x = r \sin(\theta)$, simplifica a função de Green em [Equação \(24\)](#) para:

$$\begin{aligned}
 g_f(x_s, r) &\approx \frac{e^{i k r}}{4\pi r} e^{-i k (x x_s)/r} \\
 &\approx \frac{e^{i k r}}{4\pi r} e^{-i k \sin(\theta) x_s}
 \end{aligned} \tag{36}$$

e, conseqüentemente, a pressão do som transmitido pelo arranjo em [Equação \(34\)](#) para:

$$p(r, \theta) = \frac{e^{i k r}}{4\pi r} \int_L q(x_s) e^{i k \sin(\theta) x_s} dx_s. \tag{37}$$

Em [Equação \(37\)](#), a aproximação de Fraunhofer permitiu retirar o termo de radiação de monopolo da integração em dx_s . Dessa forma, é mais simples expressar o padrão de radiação $b(\theta)$, definido pela radiação em questão dividida pela radiação de dipolo,

$$b(\theta) = p(r, \theta) / \left(\frac{e^{i k r}}{4\pi r} \right). \tag{38}$$

Válido na aproximação de Fraunhofer, $b(\theta)$ expressa como a radiação se distribui em θ independentemente da distância do arranjo ao ouvinte. E, através de [Equação \(37\)](#) é calculado por:

$$b(\theta) = \int_L q(x_s) e^{i k \sin(\theta) x_s} dx_s. \tag{39}$$

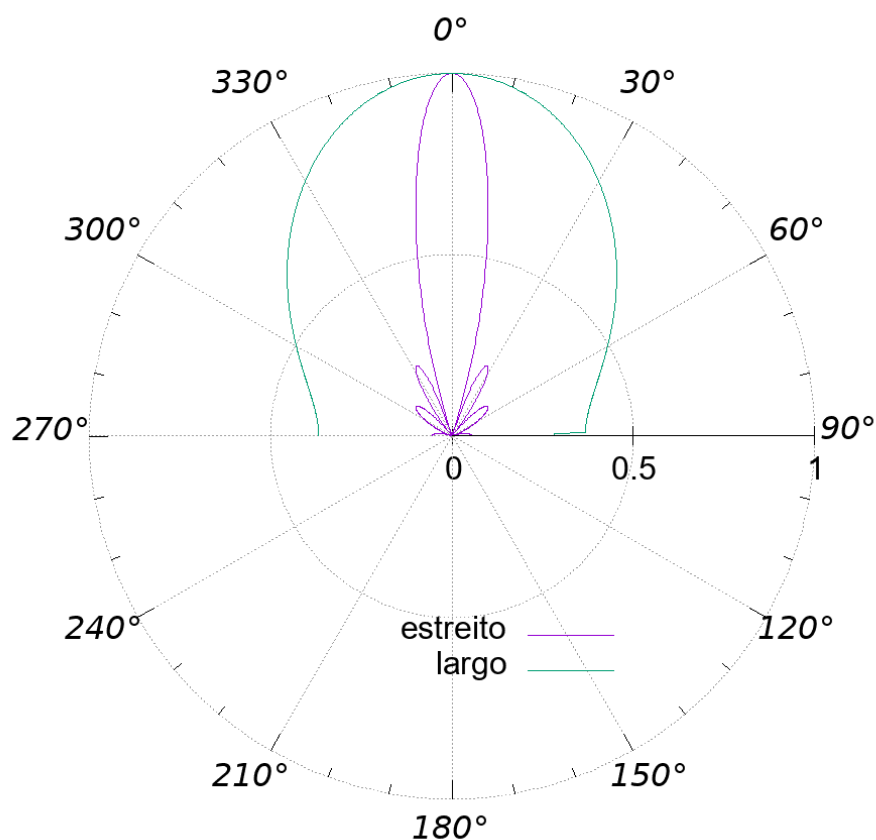
O padrão de radiação pode ter vários formatos, representando feixes largos ou estreitos como visto em [Figura 9](#).

A distância de Fraunhofer r_R é definida como a distância mínima indicada para uso da aproximação de Fraunhofer,

$$r_R \equiv \frac{L^2}{2\lambda} \ll r, \tag{40}$$

e recomenda-se $r \gg r_R$ para bom uso da aproximação.

Figura 9 – Exemplos de padrão de radiação $b(\theta)$ largo e estreito. A medida que se torna mais estreito, $b(\theta)$ apresenta mais lóbulos, além do lóbulo principal em $\theta = 0$.



2.8.2 Medidas de Performance de um Arranjo

As medidas expressas aqui são quanto a intensidade e orientação da propagação do som. Nenhuma diz respeito a qualidade do som. Apenas dizem respeito a como a energia sonora se distribui. E no problema de arranjos em questão, o padrão de radiação $b(\theta)$ ou a pressão $p(r, \theta)$ são tais que possuem um único valor de frequência angular ω ou número de onda k , não uma faixa deles.

Os parâmetros a seguir são todos funções da pressão dada por [Equação \(37\)](#) ou, equivalentemente, do padrão de radiação por [Equação \(39\)](#).

2.8.2.1 Diretividade (D)

A diretividade do arranjo ou de uma fonte sonora é definida como a razão da intensidade do som na direção escolhida (definido por θ) pela intensidade média (KINSLER; FREY, 1950)

$$D(\theta) = \frac{|p|^2(\theta)}{\langle |p|^2 \rangle_{\text{media}}} = \frac{I}{I_{\text{media}}}, \quad (41)$$

onde

$$\langle |p| \rangle_{media}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p(r, \theta)|^2 d\theta. \quad (42)$$

Assim, a diretividade é sempre positiva e costuma variar entre 1 para fontes isotrópicas até grandes números para fontes altamente direcionais. Se $0 \leq D(\theta) \leq 1$, quer dizer que a fonte potencialmente emite muito pouco de sua radiação em ângulo θ .

2.8.2.2 Índice de Diretividade (DI)

O índice de diretividade é uma função direta da diretividade e a expressa em escala logarítmica:

$$DI(\theta) = 10 \log_{10} D(\theta). \quad (43)$$

2.8.2.3 Fator Direcional (DF)

O fator direcional representa a pressão em θ normalizada pela pressão de maior valor, $|p(r, \theta)|_{max}$, no eixo preferencial de propagação, e sempre é positivo com máximo valor de 1 (KIM; CHOI, 2013):

$$DF(\theta) = \frac{|p(r, \theta)|}{|p(r, \theta)_{max}|}. \quad (44)$$

2.8.2.4 Beam Pattern (BP)

O *beam pattern* representa o fator direcional DF em escala logarítmica:

$$BP(\theta) = 20 \log_{10} DF(\theta) \quad (45)$$

Nota a semelhança de BP com a maneira como se exprime o nível de pressão SPL (Equação (29)). Enquanto SPL usa a razão entre a pressão em questão e a mínima pressão audível, BP usa a razão entre a pressão em θ e a pressão máxima. Isso faz com que BP seja expresso em dB, mas variando de valores negativos até 0 ao invés de normalmente positivos para o caso de SPL. Então, BP informa como decai a intensidade do som em dB conforme o ângulo θ .

2.9 Aplicação de Métodos de Beamforming ao problema de Focalização de Som

Desde 1990 há estudos sobre a implementação de métodos de *beamforming* para arranjos de alto-falantes. Pode-se dividí-los em três categorias: (1) Métodos baseados no controle da distribuição de energia acústica, tais como *Delay and Sum* (DAS), *Acoustic Brightness Control* (ABC) e *Acoustic Contrast Control* (ACC); (2) métodos que objetivam a reprodução

(ou síntese) de um campo acústico, por exemplo *Pressure Matching* (PM); e (3) métodos híbridos que trabalham com ambas abordagens (BAI; HSIEH, 2015), (AL., 2016).

Neste trabalho, são discutidos apenas os métodos baseados em energia DAS, ABC e ACC, classificados em métodos de soma e divisão.

2.9.1 Métodos de Soma

DAS é um método de *beamforming* baseado em somar a radiação de todos os alto-falantes em fase e em um único ponto do espaço, por isso é comum referir-se a ele como um método de soma.

2.9.1.1 Delay-and-Sum (DAS) - arranjo contínuo

O caso contínuo considera um arranjo com número de alto-falantes e comprimento L arbitrários. Considera-se um espaçamento entre alto-falantes que tende a zero, pois a posição destes é tratada como uma variável contínua de integração no arranjo.

Podem haver diferentes maneiras de escrever a excitação $q(\mathbf{x}_s)$. Considera-se um peso $\omega(x_s)$ e um atraso temporal $\tau(x_s)$ dependentes da distância x_s de um elemento do arranjo (KIM; CHOI, 2013):

$$q_c(x_s) = \omega_c(x_s) e^{i\omega \tau_c(x_s)} = \omega_c(x_s) e^{i c k \tau_c(x_s)}, \quad (46)$$

onde o índice c retrata especificamente o caso contínuo. No arranjo, temos $-L/2 \leq x_s \leq L/2$, e em DAS escolhemos um peso igual para todos os alto-falantes e normalizado em L

$$\omega_c(x_s) = \frac{1}{L}, \quad (47)$$

e uma fase progressiva no arranjo

$$\tau_c(x_s) = \alpha x_s / c, \quad (48)$$

que servirá para apontar a direção de propagação. Então, a pressão do arranjo, Equação (37), fica:

$$\begin{aligned} p_c(r, \theta) &= \frac{e^{i k r}}{4\pi r} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{L} e^{i k x_s [\alpha - \sin(\theta)]} dx_s \\ &= \frac{e^{i k r}}{4\pi r} \frac{\sin(k L/2 [\alpha - \sin(\theta)])}{k L/2 [\alpha - \sin(\theta)]} \\ &= \frac{e^{i k r}}{4\pi r} \operatorname{sinc} \left(\frac{k L}{2} [\alpha - \sin(\theta)] \right). \end{aligned} \quad (49)$$

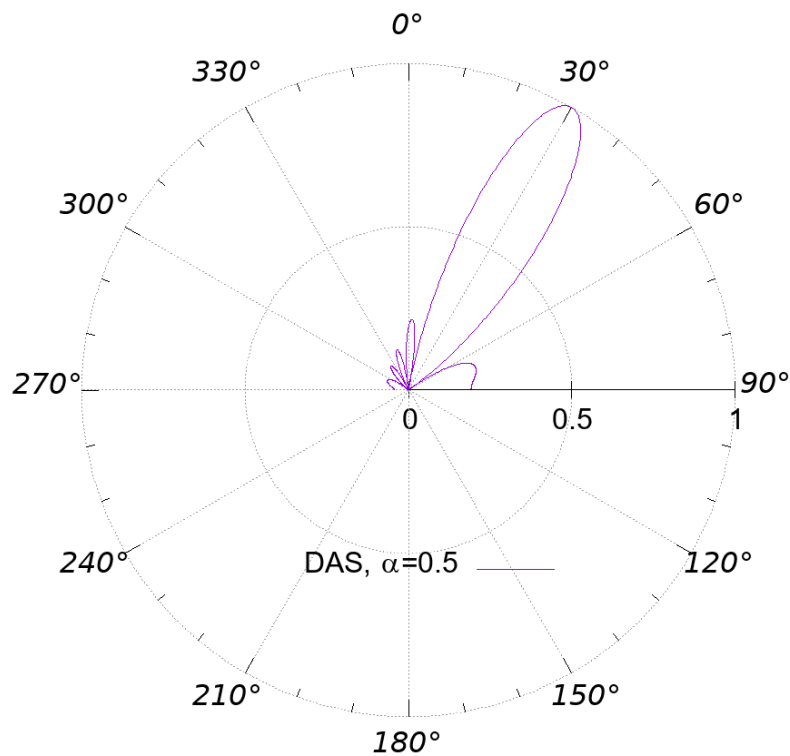
E o padrão de radiação:

$$b_c(\theta) = \operatorname{sinc} \left(\frac{k L}{2} [\alpha - \sin(\theta)] \right). \quad (50)$$

Como a radiação irá apontar para o máximo de $b_c(\theta)$, o ângulo θ' de propagação será (vide Figura 10).

$$\theta'_c = \sin^{-1}(\alpha). \quad (51)$$

Figura 10 – Ângulo θ' de propagação em $b_c(\theta)$. Com $\alpha = 0.5$, o θ'_c previsto é de 30° .



2.9.1.2 Delay-and-Sum (DAS) - arranjo discreto

O tratamento para DAS de arranjo discreto tem demonstração que segue os passos do caso contínuo. Na excitação $q(\mathbf{x}_s)$, introduzimos um peso $\omega(x_s)$ e fase temporal $\tau(x_s)$ dependentes da distância x_s de um elemento do arranjo (KIM; CHOI, 2013).

$$q_d(x_s) = \omega_d(x_s) e^{i\omega\tau_d(x_s)} = \omega_d(x_s) e^{i c k \tau_d(x_s)}, \quad (52)$$

onde o índice d retrata especificamente o caso discreto. No arranjo discreto, temos $-L/2 \leq x_s \leq L/2$, sendo x_s uma variável discreta. Em DAS, escolhemos um peso igual para todos os M alto-falantes e normalizado pelo número destes,

$$\omega_d(x_s) = \frac{1}{M}, \quad (53)$$

e uma fase progressiva no arranjo

$$\tau_d(x_s) = \alpha x_s / c, \quad (54)$$

igual ao caso contínuo e que servirá para apontar a direção de propagação. Para levar em conta a natureza discreta, $q_d(x_s)$ deve ser não nulo somente para os valores x_s onde existe um alto-falante no arranjo. Para tanto, escreve-se

$$q_d(x_s) = \sum_{-M/2}^{M/2} \delta(x_s - m \Delta x) \omega_d(x_s) e^{i c k \tau_d(x_s)}, \quad (55)$$

sendo δ a delta de Kronecker e Δx a distância entre alto-falantes. Então, a pressão do arranjo, [Equação \(37\)](#), fica:

$$\begin{aligned} p_d(r, \theta) &= \frac{e^{i k r}}{4\pi r} \int_{-L/2}^{L/2} \sum_{-M/2}^{M/2} \delta(x_s - m \Delta x) \frac{1}{M} e^{i k x_s [\alpha - \sin(\theta)]} dx_s \\ &= \frac{e^{i k r}}{4\pi r} \frac{1}{M} \sum_{-M/2}^{M/2} e^{i k m \Delta x [\alpha - \sin(\theta)]} \end{aligned} \quad (56)$$

E o padrão de radiação:

$$b_d(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{-M/2}^{M/2} e^{i k m \Delta x [\alpha - \sin(\theta)]}. \quad (57)$$

Como a radiação irá apontar para o máximo de $b_d(\theta)$, o ângulo θ' de propagação será

$$\theta'_d = \sin^{-1}(\alpha), \quad (58)$$

igual ao caso contínuo.

2.9.2 Métodos de Divisão

Diferente de DAS, ABC e ACC são métodos mais complexos e que trabalham com o objetivo de maximizar ou minimizar uma razão entre energias. Ao contrário de DAS, ABC e ACC não consideram um ponto no espaço apenas, mas potencialmente uma coleção de pontos, formando regiões. E a excitação $q(x_s)$ dos alto-falantes não a mesma para todos, como também depende da frequência.

Considerando N pontos no espaço e M alto-falantes, podemos expressar a pressão como um vetor coluna cujo cada componente é a pressão em um dos N pontos ([KIM; CHOI, 2013](#))

$$\mathbf{p} = [p(\mathbf{r}^{(1)}), \dots, p(\mathbf{r}^{(N)})]^T \quad (59)$$

e a excitação como um vetor coluna cujo cada componente é a excitação de um dos M alto-falantes

$$\mathbf{q} = [q^{(1)}, \dots, q^{(M)}]^T. \quad (60)$$

E que também é escrito de forma explícita:

$$\mathbf{q}(k) = [q^{(1)}(x_s^{(1)}, k), \dots, q^{(M)}(x_s^{(M)}, k)]^T. \quad (61)$$

A pressão em um ponto, expressa por [Equação \(37\)](#) pode ser equivalentemente escrita,

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^M g_f(\mathbf{r}|\mathbf{r}_s^{(m)}) q^{(m)}, \quad (62)$$

onde soma-se todas as funções livres de Green dos alto-falantes sob a aproximação de Fraunhofer [Equação \(36\)](#). Podemos definir uma matriz dessas funções de Green entre os N pontos e M alto-falantes, chamada função de transferência:

$$[\mathbf{H}]^{(n,m)} = g_f(\mathbf{r}^{(n)}|\mathbf{r}_s^{(m)}) \quad (63)$$

e o vetor pressão pode ser escrito:

$$\mathbf{p} = \mathbf{H} \mathbf{q}. \quad (64)$$

Como a energia é proporcional à pressão ao quadrado, pode-se escrever a energia total radiada como:

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \mathbf{p}^H \mathbf{p} = N (\mathbf{q}^H \mathbf{R} \mathbf{q}), \quad (65)$$

onde \mathbf{R} ($\mathbf{R} = \mathbf{R}^H$) é a matriz hermitiana,

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \mathbf{H}^H \mathbf{H}, \quad (66)$$

para N pontos de amostra no espaço. \mathbf{R} é considerado como a matriz de correlação espacial das funções de transferência dos alto-falantes.

2.9.2.1 Acoustic Brightness Control (ABC)

O objetivo de ABC é maximizar a energia acústica na região de interesse, região *bright*, com respeito a energia fornecida aos alto-falantes. A densidade de energia nessa região é

$$e_b = \mathbf{q}^H \mathbf{R}_b \mathbf{q}, \quad \mathbf{R}_b = \frac{1}{N_b} \mathbf{H}_b^H \mathbf{H}_b, \quad (67)$$

onde \mathbf{R}_b e \mathbf{H}_b dizem respeito a região *bright*, sendo N_b o número de pontos nela.

A energia suprida aos alto-falantes é proporcional ao quadrado das excitações

$$e_i = h_c^2 \mathbf{q}^H \mathbf{q}, \quad (68)$$

onde h_c^2 é uma constante que converte a grandeza da equação para a de energia.

Então, aplicando ABC, deseja-se maximizar o brilho acústico β , que é a razão entre energia e_b e a energia fornecida e_i

$$\beta = \frac{e_b}{e_i} = \frac{\mathbf{q}^H \mathbf{R}_b \mathbf{q}}{h_c^2 \mathbf{q}^H \mathbf{q}}, \quad (69)$$

e pode-se achar a solução mais energética. Para fazer isso, utiliza-se de uma técnica de otimização para achar a excitação \mathbf{q} que maximiza β . Este problema pode ser encarado de duas maneiras equivalentes: maximizar β enquanto e_i é restrito a um valor fixo, ou minimizar e_i enquanto β é restrito (KIM; CHOI, 2013). Para ser breve, expor-se-á somente uma delas:

$$\text{Maximizar } [e_b = \mathbf{q}^H \mathbf{R}_b \mathbf{q}] \text{ sujeito a } e_{ic} - h_c^2 \mathbf{q}^H \mathbf{q} = 0. \quad (70)$$

A energia de entrada é restrita a um valor e_{ic} arbitrário, por isso $e_{ic} - h_c^2 \mathbf{q}^H \mathbf{q} = 0$ representa um vínculo. Este problema pode ser escrito usando um multiplicador de Lagrange σ e uma função de custo J de forma:

$$\text{Maximizar } J = \mathbf{q}^H \mathbf{R}_b \mathbf{q} + \sigma (e_{ic} - h_c^2 \mathbf{q}^H \mathbf{q}). \quad (71)$$

Tomando as derivadas com respeito a σ e \mathbf{q} :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{R}_b \mathbf{q} - \sigma h_c^2 \mathbf{q} = 0, \quad (72)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma} = e_{ic} - h_c^2 \mathbf{q}^H \mathbf{q} = 0, \quad (73)$$

permite-se escrever a equação característica:

$$\mathbf{R}_b \mathbf{q} = \sigma h_c^2 \mathbf{q}. \quad (74)$$

Então, basta selecionar o maior autovalor σ para determinar-se a excitação \mathbf{q}_σ que maximiza e_b :

$$\mathbf{R}_b \mathbf{q}_\sigma = \sigma_{max} h_c^2 \mathbf{q}_\sigma. \quad (75)$$

Isso pode se tornar mais evidente se multiplicado por \mathbf{q}_σ^H à esquerda:

$$\mathbf{q}_\sigma^H \mathbf{R}_b \mathbf{q}_\sigma = \sigma_{max} h_c^2 \mathbf{q}_\sigma^H \mathbf{q}_\sigma, \quad (76)$$

dessa maneira as quantidades são de energia e fica claro como σ deve ter valor máximo. E neste caso temos:

$$\sigma_{max} = \frac{\mathbf{q}_\sigma^H \mathbf{R}_b \mathbf{q}_\sigma}{h_c^2 \mathbf{q}_\sigma^H \mathbf{q}_\sigma} = \beta, \quad (77)$$

ou seja, o autovalor máximo é o próprio brilho acústico.

2.9.2.2 Acoustic Contrast Control (ACC)

O objetivo de ACC é maximizar o contraste de energia acústica entre duas regiões de interesse: *bright* (de alta energia) e *dark* (de baixa energia). A densidade de energia nessas regiões é

$$e_b = \mathbf{q}^H \mathbf{R}_b \mathbf{q}, \quad \mathbf{R}_b = \frac{1}{N_b} \mathbf{H}_b^H \mathbf{H}_b, \quad (78)$$

$$e_d = \mathbf{q}^H \mathbf{R}_d \mathbf{q}, \quad \mathbf{R}_d = \frac{1}{N_d} \mathbf{H}_d^H \mathbf{H}_d, \quad (79)$$

onde, de novo, \mathbf{R}_b e \mathbf{H}_b dizem respeito à região *bright* com N_b número de pontos; e, \mathbf{R}_d e \mathbf{H}_d dizem respeito à região *dark* com N_d número de pontos.

Então, aplicando ACC, deseja-se maximizar o contraste acústico ϖ , que é a razão entre energia e_b e energia e_d

$$\varpi = \frac{e_b}{e_d} = \frac{\mathbf{q}^H \mathbf{R}_b \mathbf{q}}{\mathbf{q}^H \mathbf{R}_d \mathbf{q}}. \quad (80)$$

Para fazer isso, utiliza-se de uma técnica de otimização para achar a excitação \mathbf{q} que maximiza ϖ . Como em ABC, há duas maneiras equivalentes: maximizar e_b enquanto e_d é restrito a um valor fixo, ou minimizar e_d enquanto e_b é restrito (KIM; CHOI, 2013). Para ser breve, expor-se-á somente uma delas:

$$\text{Maximizar } [e_b = \mathbf{q}^H \mathbf{R}_b \mathbf{q}] \text{ sujeito a } e_{dc} - \mathbf{q}^H \mathbf{R}_d \mathbf{q} = 0. \quad (81)$$

A energia em região *dark* é restrita a um valor e_{dc} arbitrário, por isso $e_{dc} - \mathbf{q}^H \mathbf{R}_d \mathbf{q} = 0$ representa um vínculo. Este problema pode ser escrito usando um multiplicador de Lagrange μ e uma função de custo J de forma:

$$\text{Maximizar } J = \mathbf{q}^H \mathbf{R}_b \mathbf{q} + \mu (e_{dc} - \mathbf{q}^H \mathbf{R}_d \mathbf{q}). \quad (82)$$

Tomando as derivadas com respeito a μ e \mathbf{q} :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{R}_b \mathbf{q} - \mu \mathbf{R}_d \mathbf{q} = 0, \quad (83)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mu} = e_{dc} - \mathbf{R}_d \mathbf{q} = 0, \quad (84)$$

permite-se escrever a equação:

$$\mathbf{R}_b \mathbf{q} = \mu \mathbf{R}_d \mathbf{q}. \quad (85)$$

Aí mora uma complicação, essa não é uma simples relação de autovalores e autovetores como em ABC. Se \mathbf{R}_d tem inversa, é possível resgatar uma equação característica:

$$\mathbf{R}_d^{-1} \mathbf{R}_b \mathbf{q} = \mu \mathbf{q} \quad (86)$$

Porém, esse geralmente não é o caso e precisa-se trabalhar com a relação anterior, [Equação \(85\)](#), que neste trabalho é tratada utilizando fatorização de Schur. Então, seleciona-se o maior autovalor μ para determinar-se a excitação \mathbf{q}_μ correspondente:

$$\mathbf{R}_b \mathbf{q}_\mu = \mu_{max} \mathbf{R}_d \mathbf{q}_\mu, \quad (87)$$

e nota-se que ao multiplicar por \mathbf{q}_μ^H à esquerda, pode-se isolar μ_{max} :

$$\mu_{max} = \frac{\mathbf{q}_\mu^H \mathbf{R}_b \mathbf{q}_\mu}{\mathbf{q}_\mu^H \mathbf{R}_d \mathbf{q}_\mu} = \varpi. \quad (88)$$

Ou seja, o autovalor máximo é o contraste acústico.

3 METODOLOGIA E ANÁLISE

Nesta seção, refiro-me ao leitor, por vezes, na primeira pessoa e relato o trabalho que fiz. Divido a análise entre os métodos de Soma e Divisão porque seus tratamentos técnicos ao problema de focalização do som são bem diferentes um do outro. Todos os métodos foram estudados por cálculos e códigos no computador, escritos em linguagem de programação Python.

Não especifica-se as características do arranjo, exceto o seu formato linear e de espaçamento contínuo entre os elementos. Ao invés de atribuir valores ao comprimento do arranjo e ao espaçamento entre alto-falantes, trabalho com a relação $k \Delta x$ presente na função de Green de um elemento no arranjo sob a aproximação de Fraunhofer (Equação (36)). Ou seja, isso quer dizer que o caso $k = 1$ e $\Delta x = 10$ se comporta de mesma forma que $k = 10$ e $\Delta x = 1$. E, a diretividade é estudada em ampla faixa de $k \Delta x$, pois a o espectro audível também é amplo.

O tratamento de todas as grandezas é adimensional, incluindo energia e $k \Delta x$, que naturalmente não tem dimensão.

3.1 Método de Soma - DAS

3.1.1 Resolução e códigos de cálculo

Como visto em Capítulo 2, os padrões de radiação para DAS contínuo e discreto são, respectivamente:

$$b_c(\theta) = \text{sinc} \left(\frac{kL}{2} [\alpha - \sin(\theta)] \right) \quad (89)$$

$$b_d(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{-M/2}^{M/2} e^{i k m \Delta x [\alpha - \sin(\theta)]} \quad (90)$$

e cujo o ângulo de propagação de ambos é:

$$\theta'_c = \theta'_d = \sin^{-1}(\alpha). \quad (91)$$

Para ambos, trabalha-se com uma energia fixa e adimensional independente do número de alto-falantes. A prova disso é que Equação (89) e Equação (90) tem sempre valor máximo de 1. E, a energia acústica é proporcional a p^2 , então em um ponto arbitrário e longe do arranjo a energia será proporcional a b^2 .

Para DAS, as excitações dos alto-falantes são todas iguais, o que faz pular uma etapa do problema. Enquanto a quantidade α dita a direção de propagação, utilizou-se sempre $\alpha = 0$, correspondendo a uma propagação perpendicular ao arranjo. Não é do interesse deste trabalho

utilizar outros valores de α e sim ter em mente que o arranjo sempre mantém a propriedade de, com α , orientar a propagação.

Para DAS contínuo, $b_c(\theta)$ depende exclusivamente do produto $kL/2$ que diz respeito à relação entre número de onda e espaçamento entre alto-falantes. Mas, isso é um pouco difícil de perceber porque o caso contínuo é uma idealização em que L e o número de alto-falantes tendem ao infinito, ou, o espaçamento entre eles tende a zero.

Para DAS discreto, $b_d(\theta)$ depende do número M de alto-falantes e do produto $k\Delta x$. Em geral, espera-se que o arranjo se beneficie cada vez mais de um número crescente de alto-falantes, obtendo maior diretividade. A relação $k\Delta x$ também pode ser encarada como $2\pi/\lambda \cdot \Delta x$, ou seja, relaciona os valores de espaçamento e comprimento de onda. Desta, espera-se que a partir de $k\Delta x = 1$ o arranjo seja capaz de obter diretividade. Porque para $k\Delta x < 1$, o comprimento de onda da radiação é consideravelmente maior que o espaçamento entre alto-falantes, dificultando a geração de interferência destrutiva em regiões ao redor do eixo de propagação.

Para estudar o método DAS, escreveu-se os códigos encontrados em [Apêndice A](#) e [Apêndice B](#) para os casos contínuo e discreto, respectivamente. São códigos simples, já que [Equação \(89\)](#) e [Equação \(90\)](#) são funções diretas dos parâmetros discutidos acima ($kL/2$ para contínuo; M e $k\Delta x$ para discreto) e de coordenada θ . Os parâmetros de performance do arranjo são calculados também e estes são funções diretas do padrão de radiação calculado.

3.1.2 Comportamento DAS contínuo

3.1.2.1 Padrão de Radiação

Como o som é emitido perpendicularmente ao arranjo, o padrão de radiação se mostra simétrico em relação ao eixo de propagação e tem valor máximo neste. A medida que $kL/2$ aumenta, $b_c(\theta)$ parte de aproximadamente isotrópico ($kL/2 \approx 1$) e começa a se propagar em um lóbulo cada vez mais evidente (vide [Figura 11](#)). Para valores ainda maiores de $kL/2$, $b_c(\theta)$ apresenta um número crescente de lóbulos e cada vez mais estreitos. Os lóbulos são um menor que o anterior a medida que se afastam do eixo de propagação (vide [Figura 12](#)). Chama-se de lóbulo principal o maior lóbulo e orientado no eixo de propagação, os lóbulos restantes e menores são chamados de lóbulos secundários.

3.1.2.2 Beam Pattern

O mesmo comportamento visto para $b_c(\theta)$ pode ser conferido pelo *beam pattern* em [Figura 13](#) e [Figura 14](#), com a diferença de que o *beam pattern* informa como se comporta o nível de pressão do som emitido pelo arranjo. Na escala de dB, o *beam pattern* mostra como o SPL cai rapidamente em θ e também mostra os mesmos lóbulos vistos em $b_c(\theta)$.

Figura 11 – Padrão de radiação $b_c(\theta)$ - para baixos valores de $kL/2$. A medida que $kL/2$ aumenta, o lóbulo principal começa a se formar.

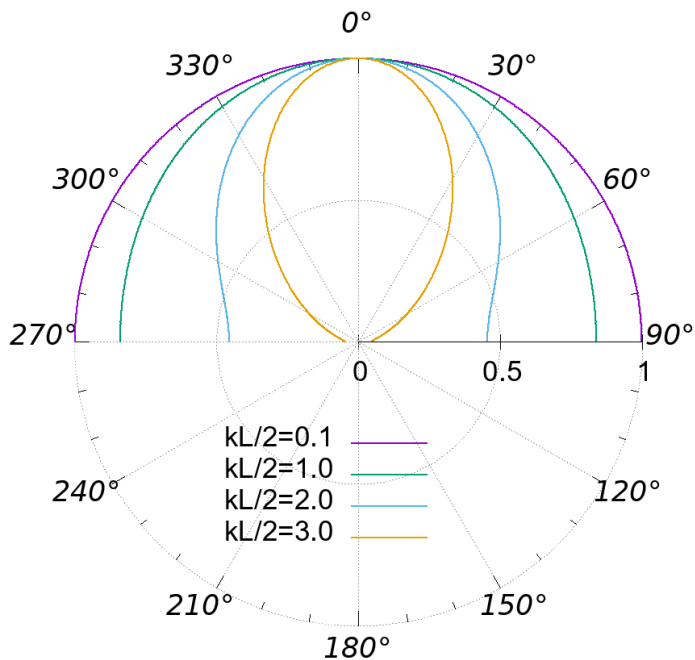


Figura 12 – Padrão de radiação $b_c(\theta)$ - altos valores de $kL/2$. A medida que $kL/2$ aumenta, o lóbulo principal fica mais estreito e mais lóbulos secundários aparecem.

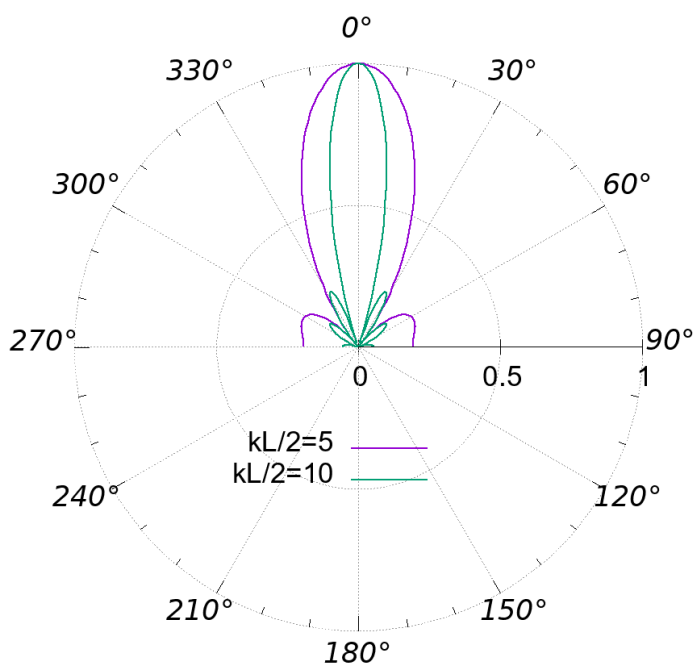


Figura 13 – *Beam pattern* $BP(\theta)$ - baixos valores de $kL/2$. É conferido os mesmos lóbulos que em $b_c(\theta)$, porém em escala de dB.

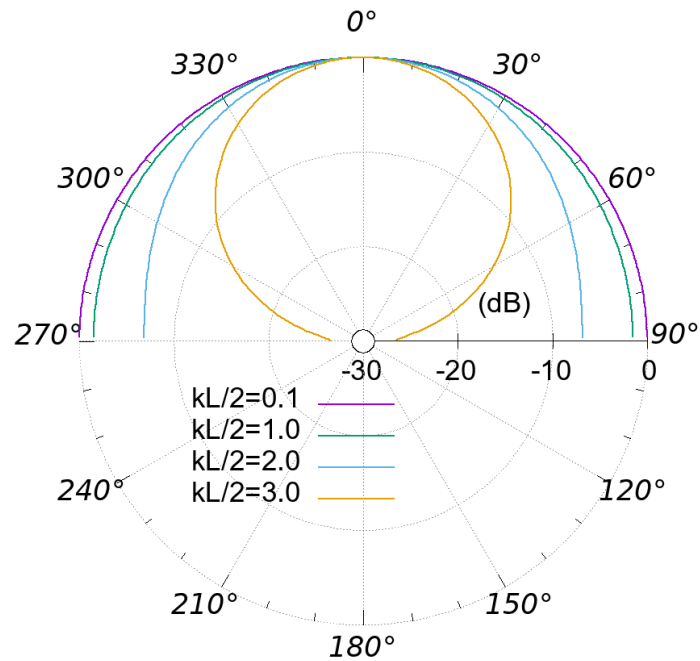
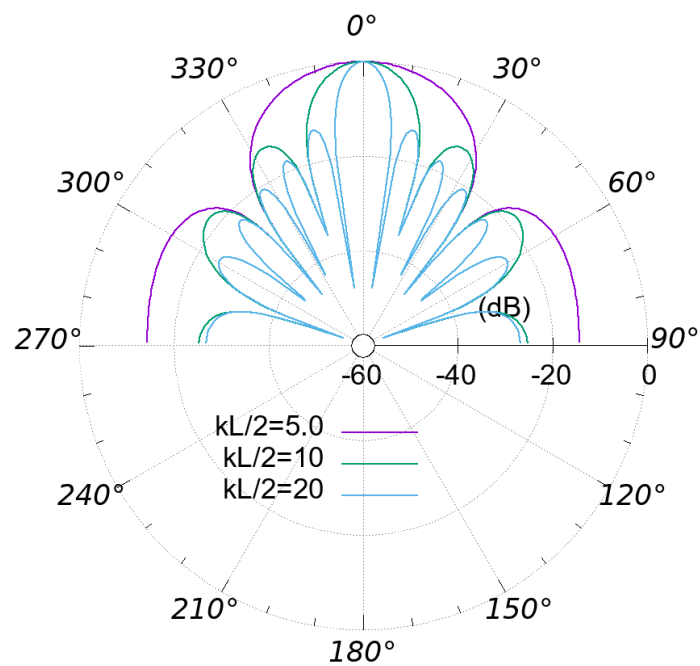


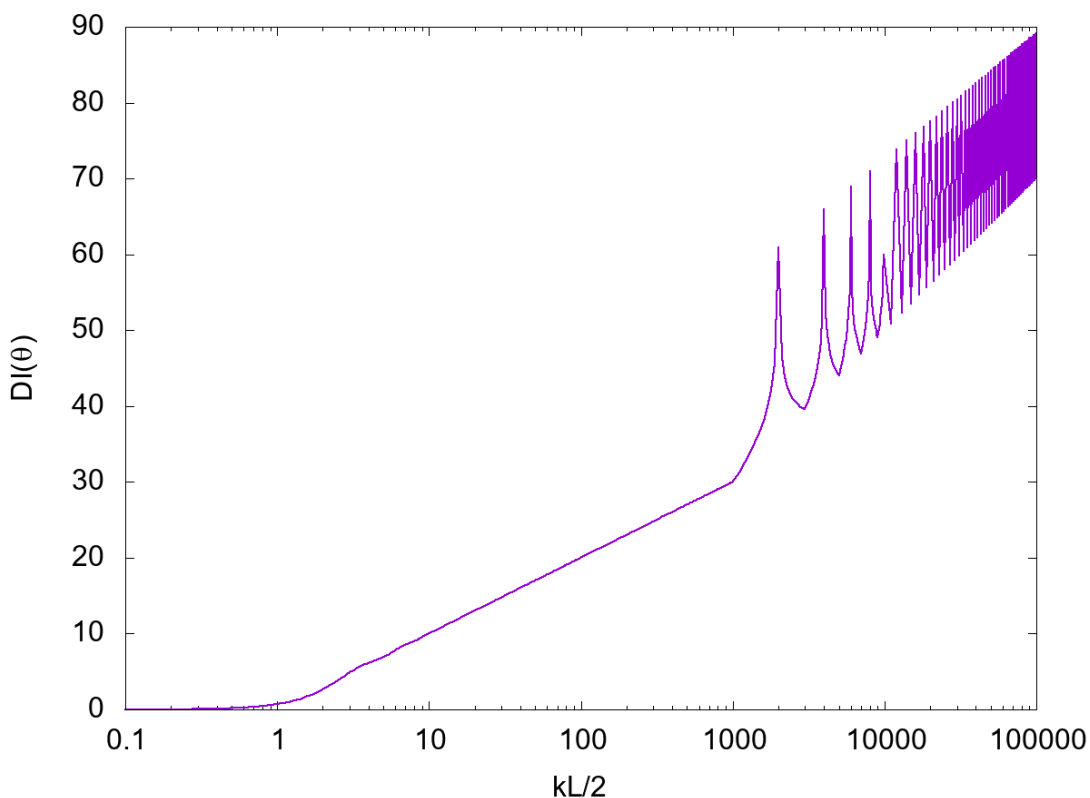
Figura 14 – *Beam pattern* $BP(\theta)$ - altos valores de $kL/2$. É vista a formação dos lóbulos e como o SPL do som emitido cai rapidamente a medida que θ se afasta de zero.



3.1.2.3 Diretividade

Por se tratar de um arranjo contínuo, a diretividade cresce muito rapidamente com $kL/2$. Isso faz sentido com o padrão de radiação observado em [Figura 11](#) e [Figura 12](#), pois o número de lóbulos secundários é sempre crescente e de tamanho cada vez menor, enquanto que o lóbulo principal só tende a se estreitar. A [Figura 15](#) mostra como cresce o índice de diretividade na direção de propagação com respeito a $kL/2$, que embora oscile, continua a crescer e atinge valores extremamente altos rapidamente. A razão de DAS propiciar tanta diretividade ao arranjo, porém, se deve ao fato de este se considerar contínuo. E, portanto, não sofre dos efeitos adicionais que o espaçamento entre alto-falantes ocasiona.

Figura 15 – Índice de Diretividade $DI(\theta = 0)$. Sempre crescente em $kL/2$, atinge valores extremamente altos rapidamente.



3.1.3 Comportamento DAS Discreto

3.1.3.1 Padrão de Radiação

Diferente de um arranjo contínuo, o arranjo discreto tem a grande diferença que os lóbulos vistos em $b_d(\theta)$ não são sempre um menor do que o anterior. E isso se deve ao fato de o espaçamento entre os alto-falantes ser considerado. O agravante é o fato de que o

lóbulo principal (aquele em $\theta = 0$) pode se repetir em outros ângulos θ . Isto é, suponha que $b_d(\theta_1) = b_d(\theta_2)$, por [Equação \(90\)](#) isso implica:

$$\frac{1}{M} \sum_{-M/2}^{M/2} e^{i k m \Delta x [\alpha - \sin(\theta_1)]} = \frac{1}{M} \sum_{-M/2}^{M/2} e^{i k m \Delta x [\alpha - \sin(\theta_2)]}. \quad (92)$$

Se tomarmos $\alpha = 0$ e $\theta_1 = 0$ (propagação em $\theta = 0$),

$$\frac{1}{M} \sum_{-M/2}^{M/2} e^{m \cdot 0} = \frac{1}{M} \sum_{-M/2}^{M/2} e^{i k m \Delta x \sin(\theta_2)}, \quad (93)$$

e essa igualdade valerá para qualquer valor de m porque as funções são linearmente independentes. Mostrando que o número de alto-falantes não tem dizer sobre isso, e permitindo-nos escrever:

$$k \Delta x \sin(\theta_2) = 2\pi \quad (94)$$

e também

$$k \Delta x = \frac{2\pi}{\sin(\theta_2)}. \quad (95)$$

O primeiro lóbulo surgirá em $\theta_2 = \pi/2$ e se aproximará de $\theta = 0$. Assim, a condição limite para não haver mais de um lóbulo principal é a mesma que a condição para este se localizar em ângulo $\theta_2 \geq \pi/2$. Portanto, deve valer:

$$k \Delta x \leq 2\pi \quad \text{para não haver outros lóbulos principais.} \quad (96)$$

O que é uma lástima, pois não é uma condição fácil de se cumprir. E uma vez que existem mais lóbulos principais no padrão de radiação, a radiação aponta com intensidade máxima para outros ângulos além de $\theta = 0$. Por isso, a diretividade será comprometida.

Quanto ao comportamento de $b_d(\theta)$, se respeitado [Equação \(96\)](#), confere-se em [Figura 16](#) que não existem lóbulos principais adicionais e que $b_d(\theta)$ se comporta como $b_c(\theta)$. Do contrário, confere-se em [Figura 17](#) que o número de lóbulos principais adicionais aumenta a cada vez que se acresce uma quantidade 2π em $k \Delta x$. Já o número M de alto-falantes, age sempre em benefício da diretividade, estreitando o padrão de radiação (vide [Figura 18](#)), porém pode acontecer de seu efeito ser muito pequeno se $k \Delta x \ll 1$.

Figura 16 – Padrão de radiação $b_d(\theta)$ para $M = 4$. Respeitado $k \Delta x \leq 2\pi$, não aparecem lóbulos principais adicionais.

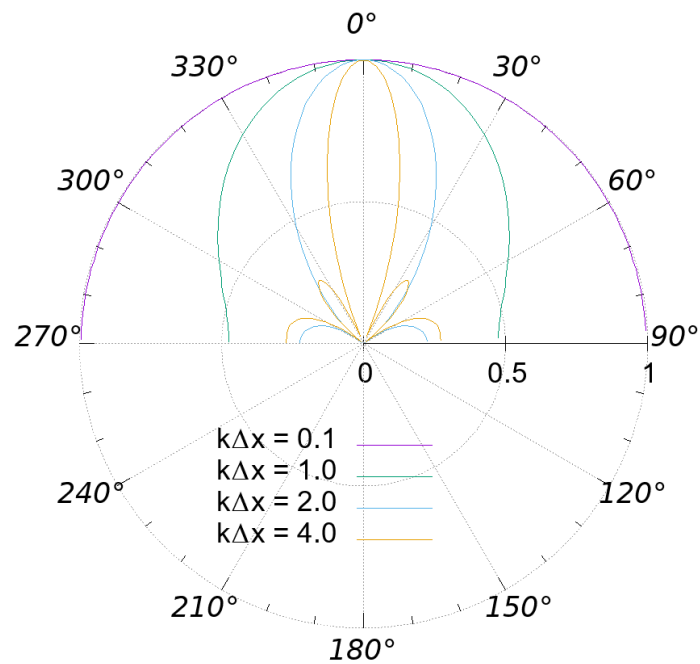


Figura 17 – Padrão de radiação $b_d(\theta)$ para $M = 4$. Quando $k \Delta x > 2\pi$ os lóbulos principais adicionais aparecem cada vez que se acresce 2π em $k \Delta x$. Aparecendo primeiramente nos extremos, em $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 270^\circ$, depois encontram-se em valores cada vez mais próximos de $\theta = 0^\circ$. No centro da imagem, estão os lóbulos secundários que ficam cada vez menores e apareceram sobrepostos.

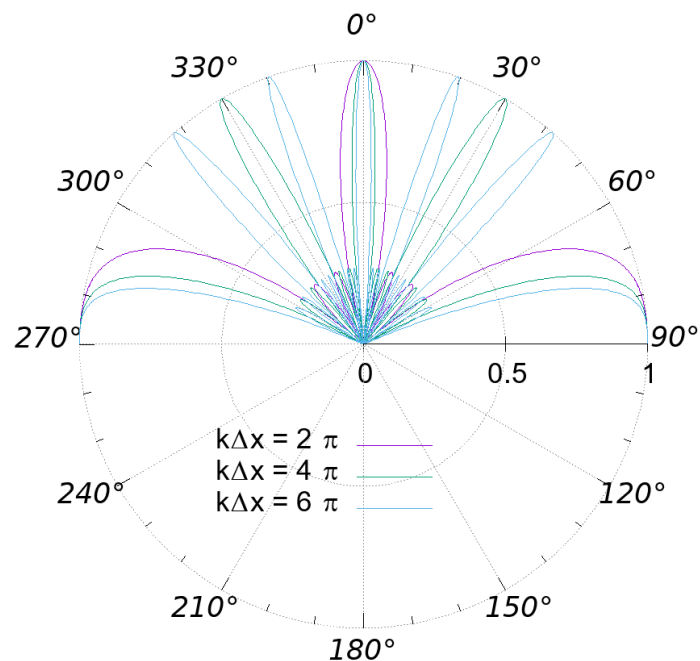
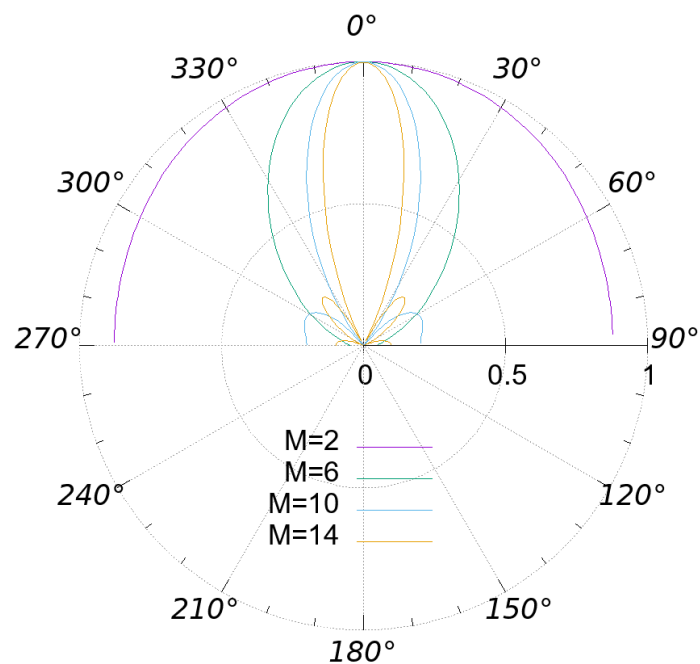


Figura 18 – Padrão de radiação $b_d(\theta)$ para $k \Delta x = 1$. Valores crescentes de M fazem o feixe se estreitar e apresentar cada vez mais lóbulos secundários.



3.1.3.2 Beam Pattern

O *beam pattern* é importante para ver como o SPL se comporta quando atendido, ou não, a condição $k \Delta x \leq 2\pi$ para o aparecimento de mais lóbulos principais. Quando não atendido, pode-se ver como um número crescente de alto-falantes aumenta a quantidade de lóbulos secundários dentro dos lóbulos principais, e que, em um mesmo lóbulo principal, os lóbulos secundários são um menor que o seguinte (vide [Figura 19](#)). E, quando não há lóbulos principais adicionais, o *beam pattern* se comporta de forma análoga ao arranjo contínuo, como visto em [Figura 20](#).

Figura 19 – *Beam pattern* $BP(\theta)$ para M crescente. Observa-se como o aumento no valor de M faz todos os lóbulos se estreitarem e aumenta a quantidade de lóbulos secundários. Como $k \Delta x = 2\pi$, os lóbulos principais adicionais encontram-se nos ângulos $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 270^\circ$, dessa forma o SPL do som emitido cai em θ , mas volta a zero nestes ângulos.

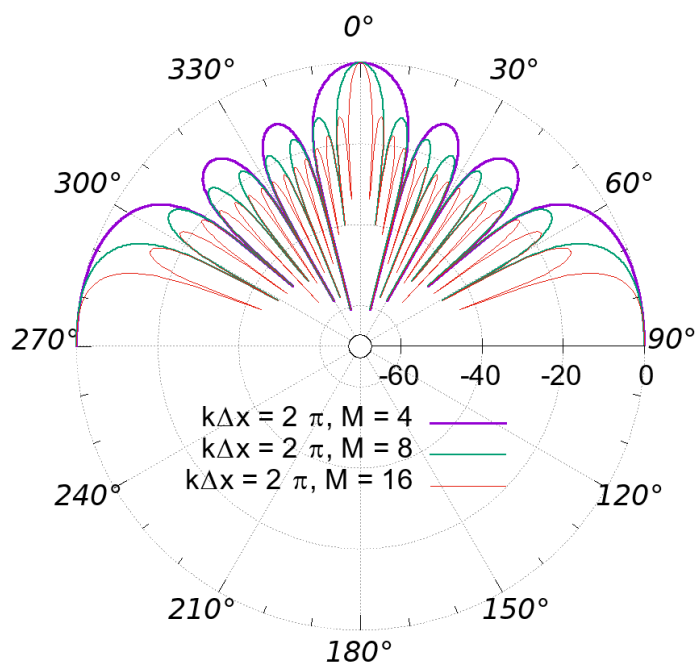
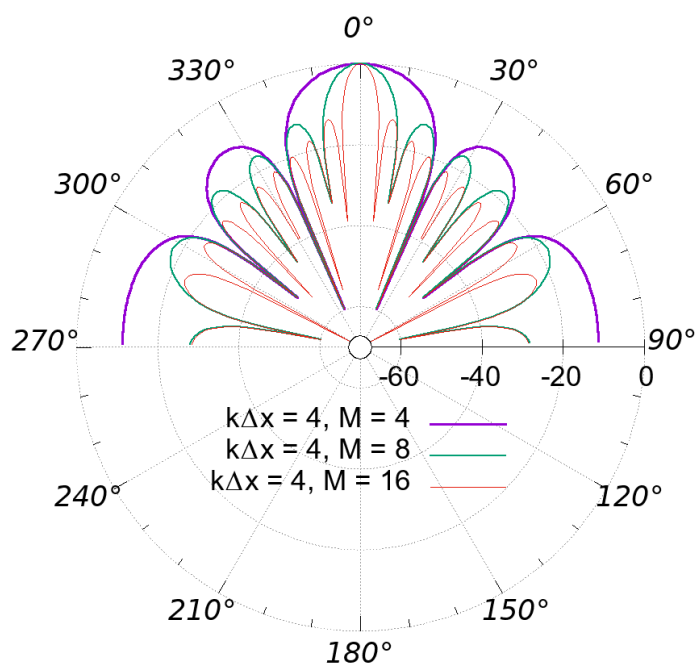


Figura 20 – *Beam pattern* $BP(\theta)$ para M crescente. Desta vez, com $k \Delta x \leq 2\pi$, o SPL do som emitido não volta a zero porque não há lóbulos principais adicionais.



3.1.3.3 Diretividade

A diretividade é crescente em $k \Delta x$, mas é completamente afetada pela presença de lóbulos principais adicionais que a fazem decrescer nos pontos onde aproximadamente $k \Delta x$ é múltiplo de 2π (vide Figura 21). Em Figura 22 pode-se ver como o índice de diretividade se comporta em ampla faixa de $k \Delta x$. Confere-se que a diretividade do arranjo é máxima momentos antes de este adquirir os primeiros lóbulos principais adicionais, e se encontra ao redor do intervalo (5.0, 6.0) no domínio de $k \Delta x$. Depois disso, apesar de o valor da diretividade estar sujeita a quedas e flutuar bastante, é capaz de manter um valor razoavelmente grande. Mas, o problema principal é que temos ciência de que mesmo tendo um valor de diretividade alto, os lóbulos principais adicionais ainda estarão lá. E o *beam pattern* ou padrão de radiação não será um feixe estreito, mas uma coleção de feixes estreitos apontando em outros valores de θ , além de $\theta = 0$ (como visto em Figura 17, por exemplo). Então, o som tem razoável valor de diretividade, mas aponta em várias direções, o que parece uma contradição e não é o resultado desejado. Busca-se diretividade e que a radiação aponte apenas em uma direção.

Figura 21 – Diretividade na direção de propagação. $D(\theta = 0)$ é crescente em $k \Delta x$, mas sempre sujeito a cair em $k \Delta x$ múltiplo de 2π .

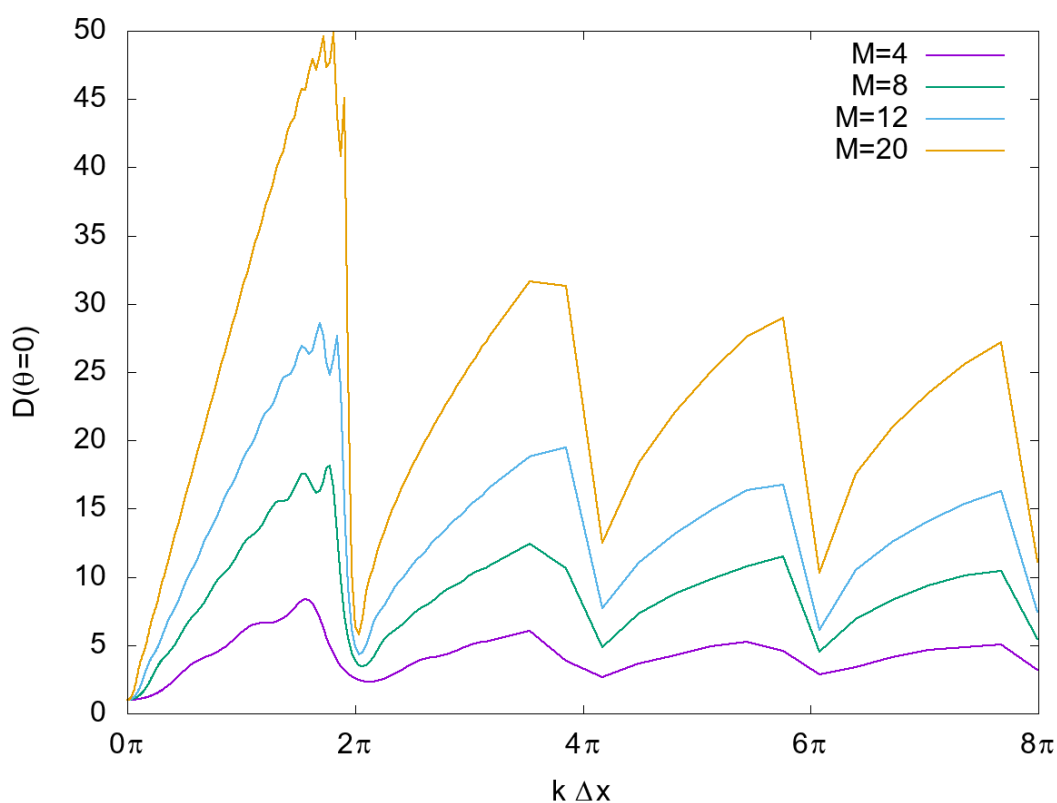
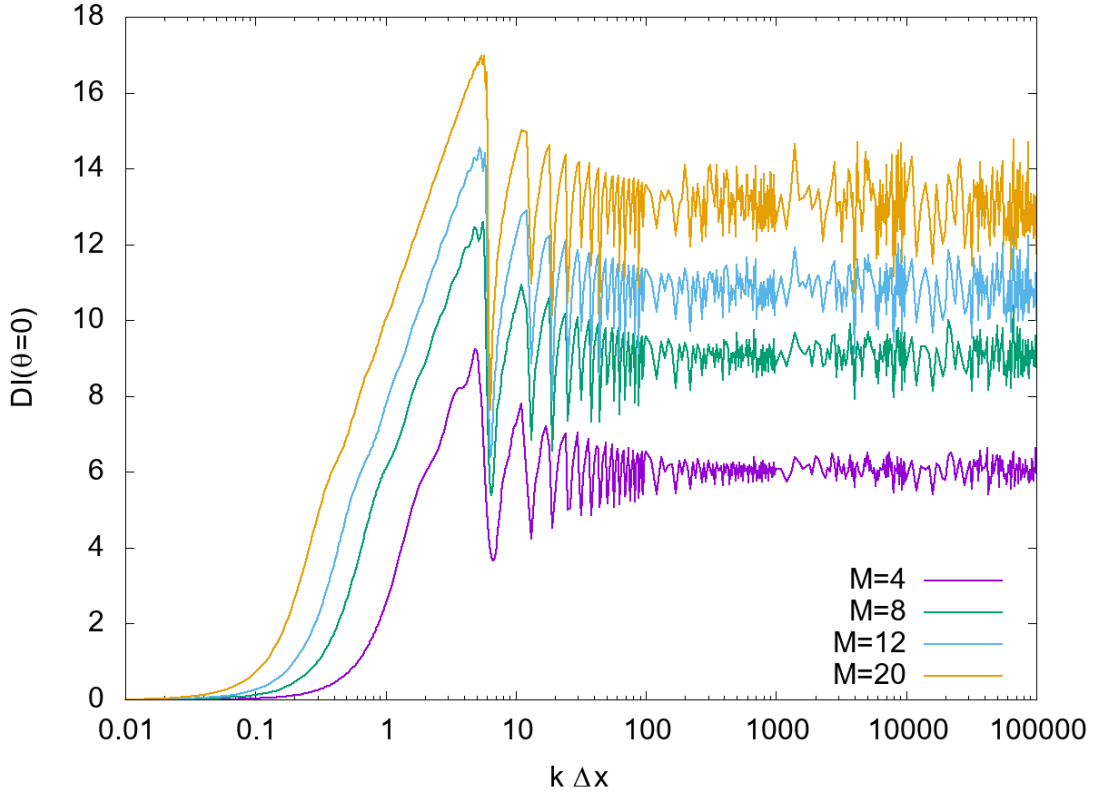


Figura 22 – Índice de Diretividade na direção de propagação em ampla faixa de $k \Delta x$. $ID(\theta = 0)$ encontra seu valor máximo logo antes de ser forçado a cair pela origem de lóbulos principais adicionais em $k \Delta x = 2\pi$. Um número crescente de M ajuda a aumentar a diretividade máxima, assim como a diretividade em qualquer valor de $k \Delta x$.



3.2 Métodos de Divisão - ABC e ACC

3.2.1 Resolução

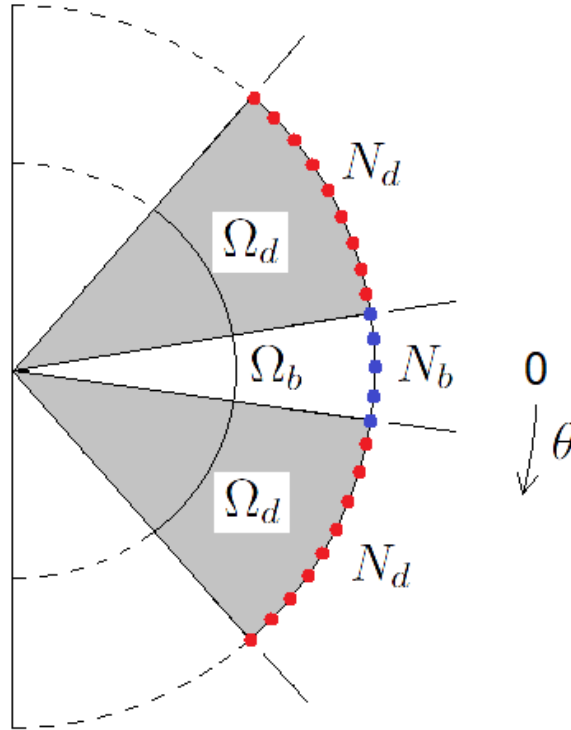
Como visto em [Capítulo 2](#), o padrão de radiação é:

$$b(\theta) = \int_L q(x_s) e^{i k \sin(\theta) x_s} dx_s, \quad (97)$$

onde as excitações $q(x_s)$ precisam ser determinadas e cuja direção de propagação ainda não foi escolhida.

Primeiramente, é necessário definir a região *bright* e *dark* e distribuir, respectivamente, os N_b e N_d pontos nelas. ABC, trabalha apenas com a primeira, e ACC com as duas. Como utilizou-se a aproximação de Fraunhofer, essas regiões são posicionadas a uma distância arbitrária do arranjo, e compreendem arcos dentro do domínio de θ . Escolhi Ω_b como o arco para região *bright* centrado em $\theta = 0$ (logo é esta a direção de propagação) e Ω_d como os arcos ao redor de Ω_b para a região *dark*. Os N_b e N_d pontos escolhidos são distribuídos uniformemente nas regiões (vide [Figura 23](#)).

Figura 23 – Região *bright*: arco Ω_b , em branco, contendo N_b pontos retratados por pontos azuis; região *dark*: arcos Ω_d , em cinza, contendo N_d pontos retratados por pontos vermelhos.



Depois disso, temos que definir um valor para $k \Delta x$ e o número M de alto-falantes que será utilizado. Com essas informações, podemos escrever as matrizes \mathbf{R}_b e \mathbf{R}_d , e aplicar os métodos. Para isso, escreveu-se os códigos encontrados em [Apêndice C](#) e [Apêndice D](#) para ABC e ACC, respectivamente.

3.2.1.1 Código ABC

Depois de entrado: $\Omega_b, N_b, k \Delta x$ e M , \mathbf{R}_b é calculado por:

$$\mathbf{R}_b = \frac{1}{N_b} \mathbf{H}_b^H \mathbf{H}_b, \quad [\mathbf{H}_b]^{(n_b, m)} = g_f(\mathbf{r}^{(n_b)} | \mathbf{x}_s^{(m)}). \quad (98)$$

Então, resolve-se o problema de autovalores e autovetores:

$$\mathbf{R}_b \mathbf{q}_\sigma = \sigma h_c^2 \mathbf{q}_\sigma, \quad h_c^2 = 1, \quad (99)$$

onde $h_c^2 = 1$, pois estou trabalhando com valores adimensionais de energia. Isso é feito com a função `linalg.eig` da biblioteca `linalg` do Python, e depois seleciona-se o maior autovalor e seu autovetor.

O autovetor retornado por `linalg.eig`, porém, apresenta muito erro. Portanto, precisei desenvolver um procedimento de otimização para corrigí-lo. Para isso, com o autovalor e o autovetor \mathbf{q} retornado, verifico a igualdade de [Equação \(99\)](#) e altero o valor das componentes

de \mathbf{q} , buscando diminuir o erro, até que a igualdade seja correspondida dentro de uma tolerância de 0.01. Ou seja, a igualdade em [Equação \(99\)](#) é um conjunto de M equações, e todas devem valer, apresentando erro menor que 0.01 (1% de erro). O processo converge, retorna \mathbf{q} corrigido, e a partir daí, o padrão de radiação e outros parâmetros podem ser calculados. *A priori*, não sei informar o erro nos autovalores, mas espera-se que ele seja pequeno, e *a posteriori* o erro é pequeno pois os autovetores foram determinados corretamente e com precisão.

Escolhi a tolerância de 0.01, pois, se maior, às vezes o processo de correção não convergia. Isso acontecia também para um número M muito grande. Além disso, foi imposto $|\mathbf{q}| = 1$, para a energia de um arranjo não depender do número de alto-falantes.

3.2.1.2 Código ACC

Depois de entrado: $\Omega_b, N_b, \Omega_d, N_d, k \Delta x$ e M , \mathbf{R}_b e \mathbf{R}_d são calculados por:

$$\mathbf{R}_b = \frac{1}{N_b} \mathbf{H}_b^H \mathbf{H}_b, \quad [\mathbf{H}_b]^{(n_b, m)} = g_f(\mathbf{r}^{(n_b)} | \mathbf{x}_s^{(m)}) \quad (100)$$

e

$$\mathbf{R}_d = \frac{1}{N_d} \mathbf{H}_d^H \mathbf{H}_d, \quad [\mathbf{H}_d]^{(n_d, m)} = g_f(\mathbf{r}^{(n_d)} | \mathbf{x}_s^{(m)}). \quad (101)$$

Então, resolve-se a equação:

$$\mathbf{R}_b \mathbf{q}_\mu = \mu_{max} \mathbf{R}_d \mathbf{q}_\mu \quad (102)$$

por fatorização de Schur. Isso é feito com a função `linalg.qz` da biblioteca `linalg` do Python, e depois seleciona-se o maior autovalor e seu autovetor.

Como em ABC, o autovetor retornado por `linalg.qz` apresenta muito erro. Para corrigí-lo, usei o mesmo procedimento que o feito em ABC, mas agora aplicado em [Equação \(102\)](#). Novamente, com uma tolerância de 0.01 para as M equações de [Equação \(102\)](#), o processo converge e retorna \mathbf{q} corrigido para depois calcular o padrão de radiação e outros parâmetros. Para ACC, porém, a correção foi mais custosa e percebeu-se que o próprio autovalor também apresentava erro, principalmente porque a fatorização de Schur é um processo mais complicado. E que, durante este, o autovalor é calculado pela razão de dois números que eram muito pequenos, ficando sujeito a erros de arredondamento. Então, a correção de \mathbf{q} se mostrou pouco precisa. Além disso, como em ABC, também foi imposto $|\mathbf{q}| = 1$.

3.2.2 Comportamento ABC

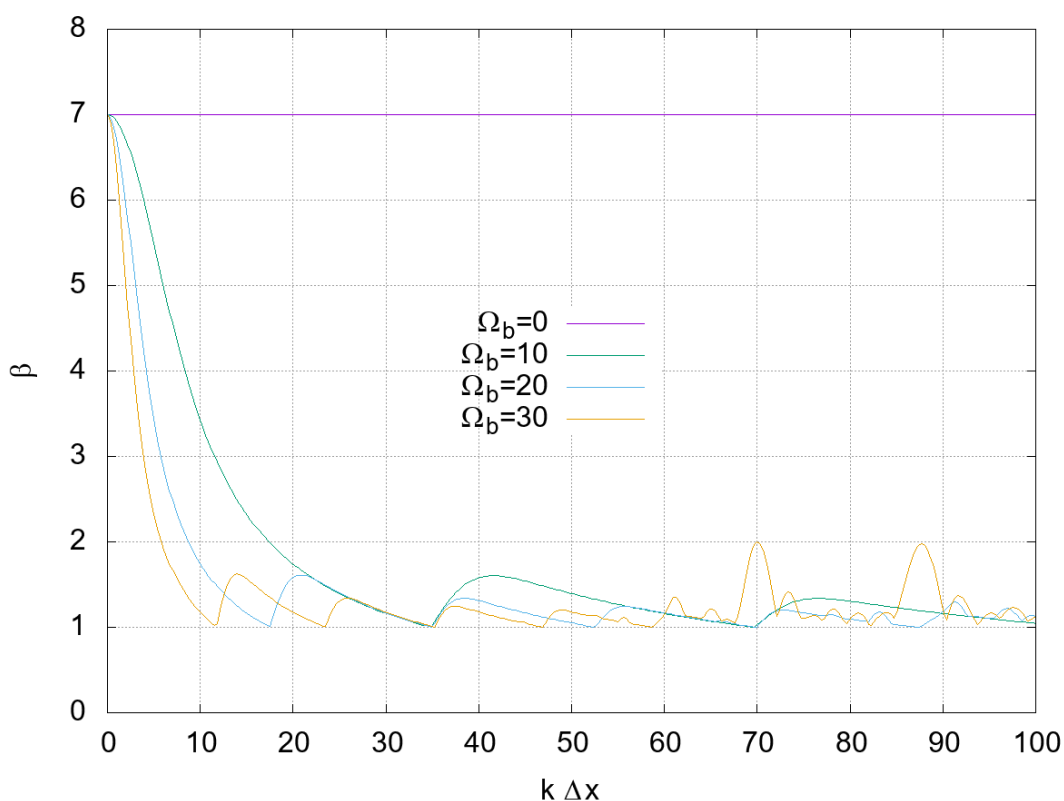
O que é mais valioso aqui é caracterizar como ABC determina \mathbf{q} e depois como o arranjo se beneficia da excitação escolhida. O comportamento do arranjo quanto a M e $k \Delta x$ já sabemos. Agora, deseja-se saber qual é o valor de \mathbf{q} para uma dada região *bright* e como se comporta a diretividade em ampla faixa $k \Delta x$.

Como o objetivo é focar o som, escolhi arcos estreitos: 0° , 10° , 20° e 30° para Ω_b e um número suficientemente grande, $N_b = 30$, assim os pontos estão bem distribuídos. Escolhi $M = 7$ porque é suficiente para o arranjo ser razoavelmente direcional (como visto para DAS) e principalmente pela conveniência. Isto é, por ser um número pequeno, é mais fácil de avaliar \mathbf{q} e o código não é sobrecarregado, pois, afinal, M também é a ordem das matrizes trabalhadas para resolver o problema de autovalores e autovetores.

3.2.2.1 Autovalores

O autovalor $\sigma_{max} = \beta$ é a medida de brilho acústico e é dado pela razão entre a energia em região *bright* e a energia suprida ao sistema. Assim, o brilho acústico informa o quão eficientemente energética é a solução na região. Em [Figura 24](#), percebe-se que para $\Omega_b = 0^\circ$, $\beta = 7 = M$ é constante e de máximo valor. Para os outros arcos Ω_b , observa-se que eles decaem e oscilam com mais rapidez de acordo com o tamanho de Ω_b .

Figura 24 – Autovalor β para as regiões *bright* com $M = 7$.



O brilho acústico é uma variável do método, e não um parâmetro de desempenho como a diretividade. Na verdade, pela característica de um arranjo emitir a radiação em lóbulos cada vez mais estreitos, o brilho sempre será menor em regiões maiores. Mas, a seguir, confere-se que é nos pontos de mínimo brilho quando o autovetor \mathbf{q} tem uma mudança brusca.

3.2.2.2 Autovetores

Obtive sucesso em determinar os autovetores com alta precisão, o que permitiu uma análise clara. A primeira observação é que \mathbf{q} sempre é simétrico, portanto, $\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{q}^{(M)}$, $\mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{q}^{(M-1)}$ e assim em diante. O que faz sentido porque a direção de propagação é $\theta = 0$, e se não houvesse simetria a direção dificilmente seria essa. Para o caso especial de $\Omega_b = 0^\circ$, todas as componentes são iguais e positivas, e como $|\mathbf{q}| = 1$, logo $\mathbf{q}^{(i)} = 1/(M)^{0.5}$. E isso se repete para qualquer valor de $k \Delta x$ porque o autovalor é constante. Ou seja, $\Omega_b = 0^\circ$ remete exatamente ao caso DAS discreto. Em [Tabela 4](#), apresento alguns valores de \mathbf{q} .

Tabela 4 – Exemplo de autovetor $\mathbf{q}(k \Delta x = 5)$ para $M = 7$.

$\Omega_b(^\circ)$	$\mathbf{q}^{(1)}$	$\mathbf{q}^{(2)}$	$\mathbf{q}^{(3)}$	$\mathbf{q}^{(4)}$	$\mathbf{q}^{(5)}$	$\mathbf{q}^{(6)}$	$\mathbf{q}^{(7)}$
0	0.3765	0.3793	0.3773	0.3773	0.3766	0.3793	0.3794
10	0.3157	0.3725	0.4131	0.4238	0.4131	0.3725	0.3192
20	0.1959	0.341	0.461	0.5109	0.4662	0.3409	0.1959
30	0.1165	0.3015	0.4861	0.5642	0.4861	0.3015	0.1165

A segunda observação é quanto a maneira como ABC faz variar as componentes de \mathbf{q} no arranjo, perante uma faixa de valores $k \Delta x$ quando $\Omega_b \neq 0$. Como \mathbf{q} é simétrico, em [Figura 25](#) ploto as primeiras 4 componentes de \mathbf{q} para $\Omega_b = 10^\circ$. Observa-se que, conforme $k \Delta x$ aumenta a partir de zero, a excitação \mathbf{q} se comporta no padrão composto dos seguintes passos:

- Passo 1: as componentes do centro do arranjo aumentam em valor e as componentes dos extremos diminuem, mas todas ainda são positivas, logo todas estão em fase;
- Passo 2: quando as componentes dos extremos diminuem até um valor perto de zero, o método se torna muito sensível e a solução para as componentes é caótica;
- Passo 3: depois de um regime caótico, as componentes dos extremos do arranjo se tornam negativas, e as componentes mais próximas do centro permanecem positivas e aumentam em valor. Nota: sinal negativo representa um alto-falante reproduzindo em meia fase com os alto-falantes de sinal positivo.
- Passo 4: outro regime caótico acontece similar a Passo 2;
- Fim do ciclo é marcado pelo ponto $k \Delta x$ onde $\beta = 1$ (i.e seu mínimo) em [Figura 24](#). Repete-se Passo 1 seguido dos demais.

Para os outros valores de Ω_b , o mesmo comportamento acontece e o ciclo encurta o seu tamanho em $k \Delta x$ (vide [Figura 26](#) e [Figura 27](#)). Ou seja, assim como o autovalor β vai a 1 mais rapidamente quanto maior for Ω_b , o ciclo em \mathbf{q} também acaba mais rapidamente.

Figura 25 – Comportamento de componentes de q em $\Omega_b = 10^\circ$ para $M = 7$.

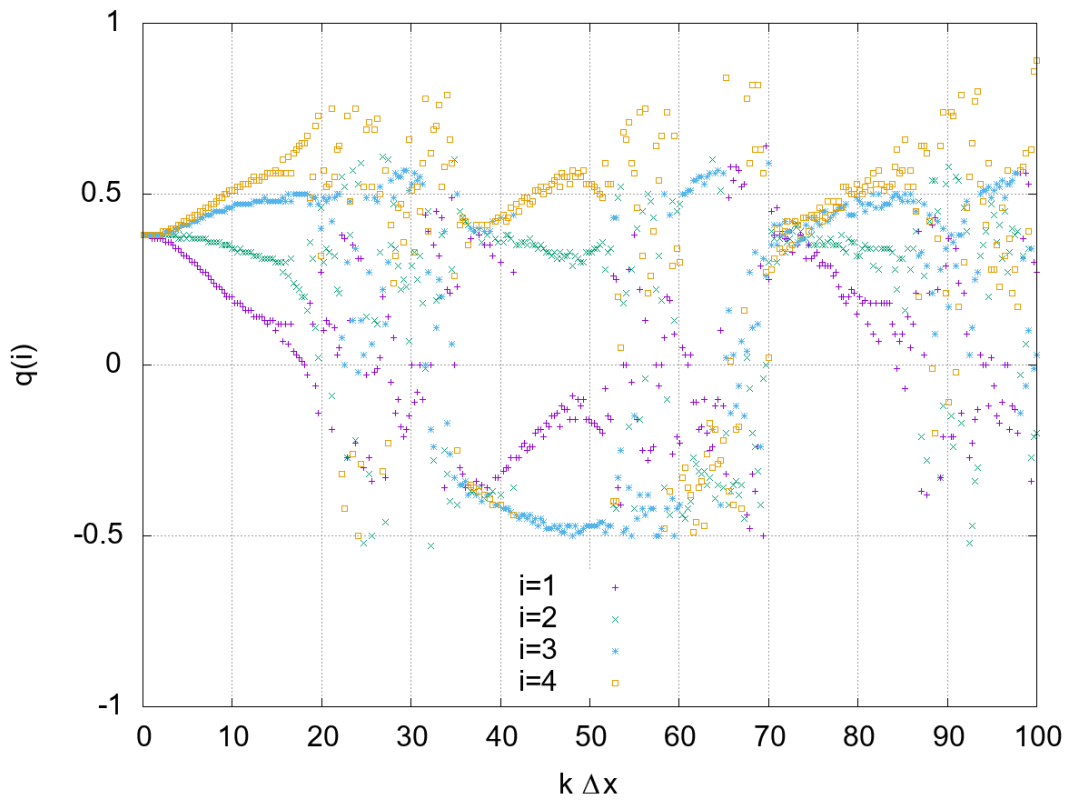


Figura 26 – Comportamento de componentes de q em $\Omega_b = 20^\circ$ para $M = 7$.

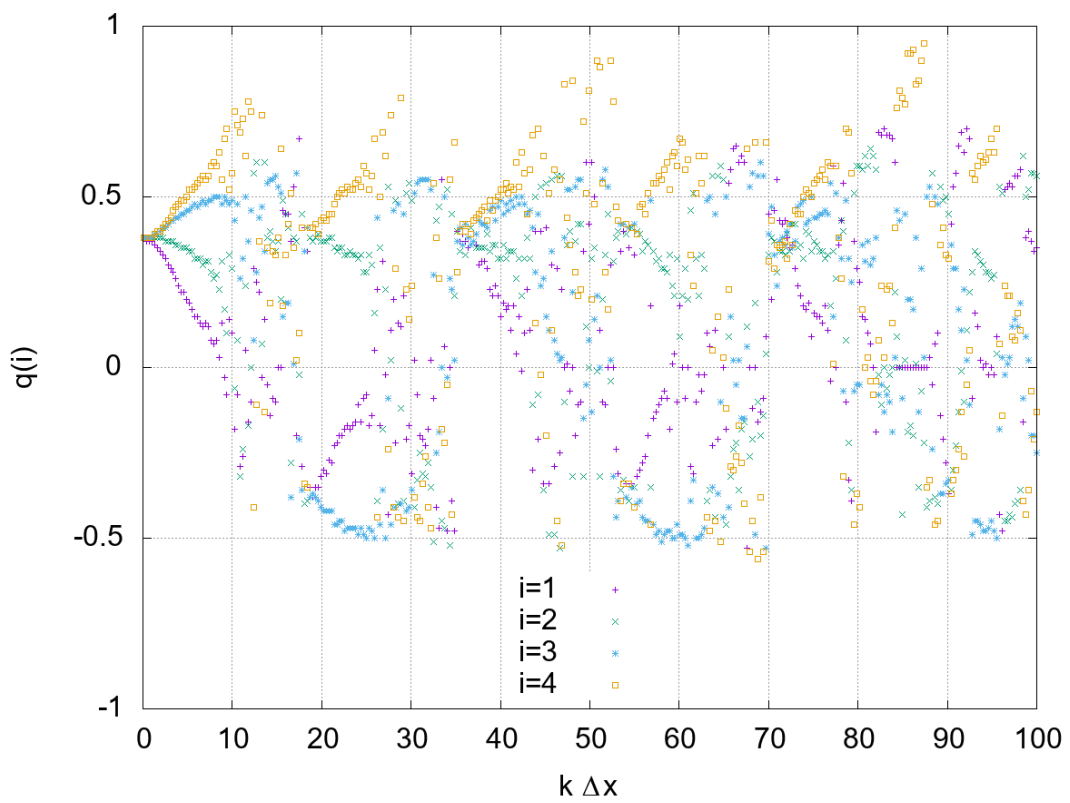
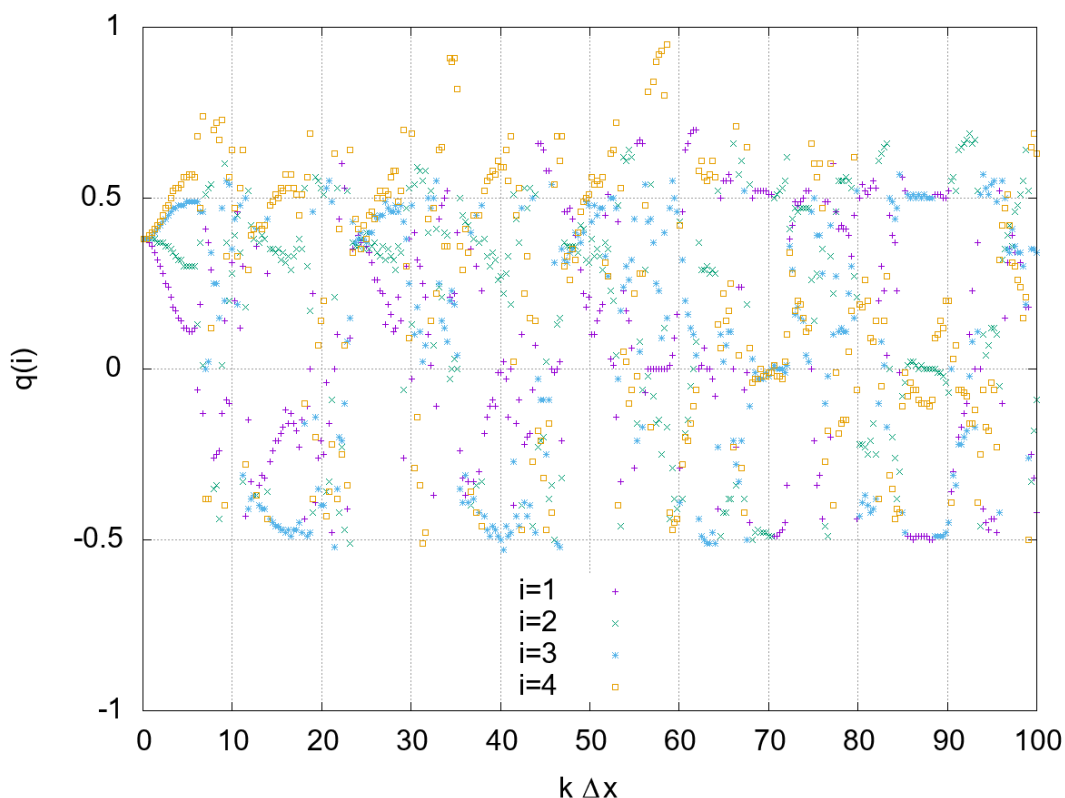


Figura 27 – Comportamento de componentes de \mathbf{q} em $\Omega_b = 30^\circ$ para $M = 7$.

3.2.2.3 Diretividade

Agora, calculo $D(\theta = 0)$ na direção de propagação com as excitações \mathbf{q} determinadas. Apesar do grau de liberdade adicional que ABC tem em relação a DAS, a determinação de \mathbf{q} pelo método não foi benéfica para a diretividade. De fato, em comparação a DAS, foi muito pior porque a diretividade, em determinadas faixas de $k \Delta x$, vai a zero. Ora, isso quer dizer que a intensidade média do som entre os ângulos $\theta = -90^\circ$ a $\theta = 90^\circ$ é muito maior que em $\theta = 0$, ou, e mais provável, que o padrão de radiação em $\theta = 0$ vai a zero. Em [Figura 28](#), [Figura 29](#), [Figura 30](#) e [Figura 31](#), ploto a diretividade e o autovalor para $\Omega_b = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ e 30° , respectivamente. Em $\Omega_b = 0^\circ$, remete ao caso DAS e a diretividade oscila, mas nunca vai a zero. Já para os outros valores de Ω_b , a diretividade oscila e vai a zero em regiões de $k \Delta x$ separadas pelos pontos onde o autovalor encontra um mínimo. Ao comparar com o comportamento das componentes de \mathbf{q} , percebe-se que as regiões de $k \Delta x$ onde a diretividade vai a zero são aquelas compreendidas pelos Passos 3 e 4. Ou seja, justamente onde os alto-falantes estão operando em meia fase um com os outros. Isso indica que o padrão de radiação vai a zero em $\theta = 0$, e por isso a diretividade também o faz. Então, embora ABC tenha atingido bons valores de diretividade, as faixas em $k \Delta x$ onde a diretividade vai a zero comprometem o resultado.

Em mais uma tentativa, determinei a diretividade e o autovalor para um arranjo com $M = 15$ e com os mesmos parâmetros que anteriormente. Mas o comportamento sobre a diretividade persistiu igual (vide [Figura 32](#), [Figura 33](#), [Figura 34](#) e [Figura 35](#)).

Figura 28 – Diretividade em região *bright* $\Omega_b = 0^\circ$ e $M = 7$. O comportamento é igual a DAS discreto.

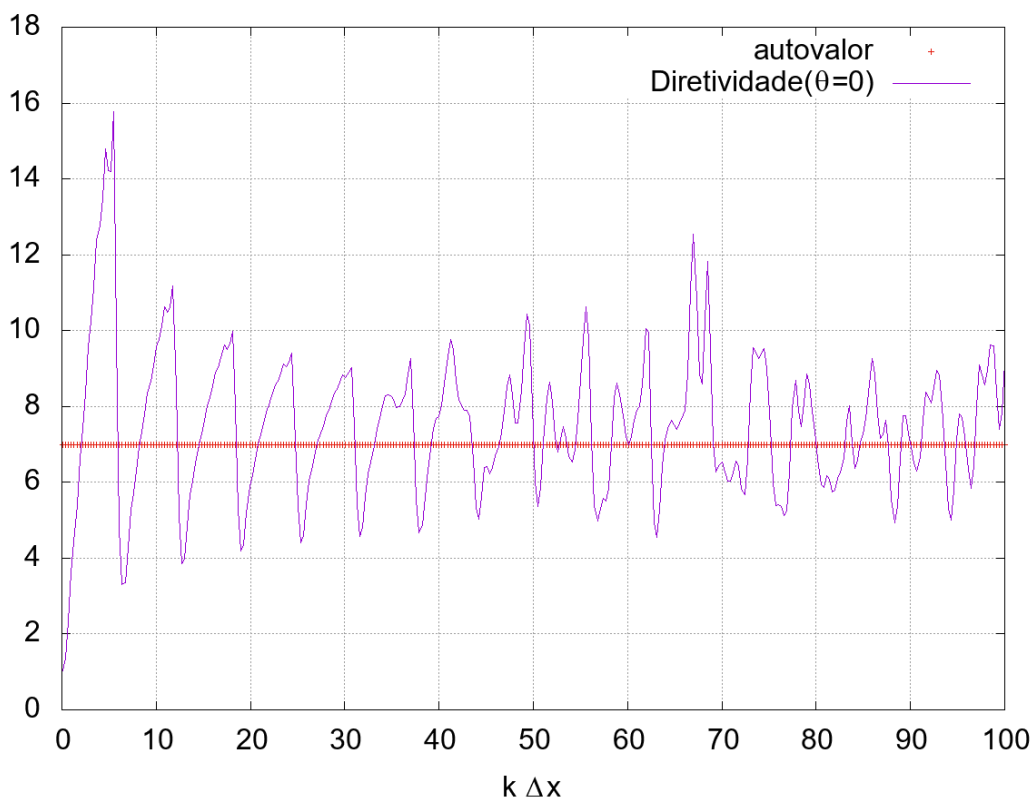


Figura 29 – Diretividade em região *bright* $\Omega_b = 10^\circ$ e $M = 7$. A diretividade vai a zero em regiões marcadas pelos mínimos valores do autovalor β .

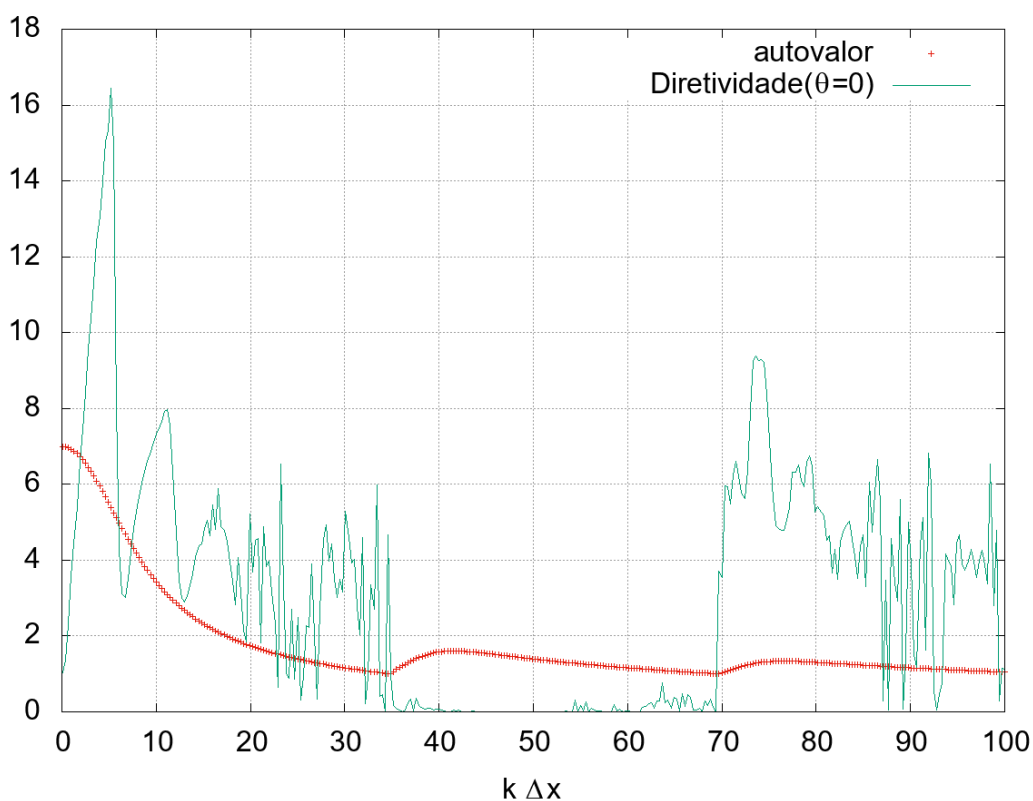


Figura 30 – Diretividade em região *bright* $\Omega_b = 20^\circ$ e $M = 7$. A diretividade vai a zero em regiões marcadas pelos mínimos valores do autovalor β .

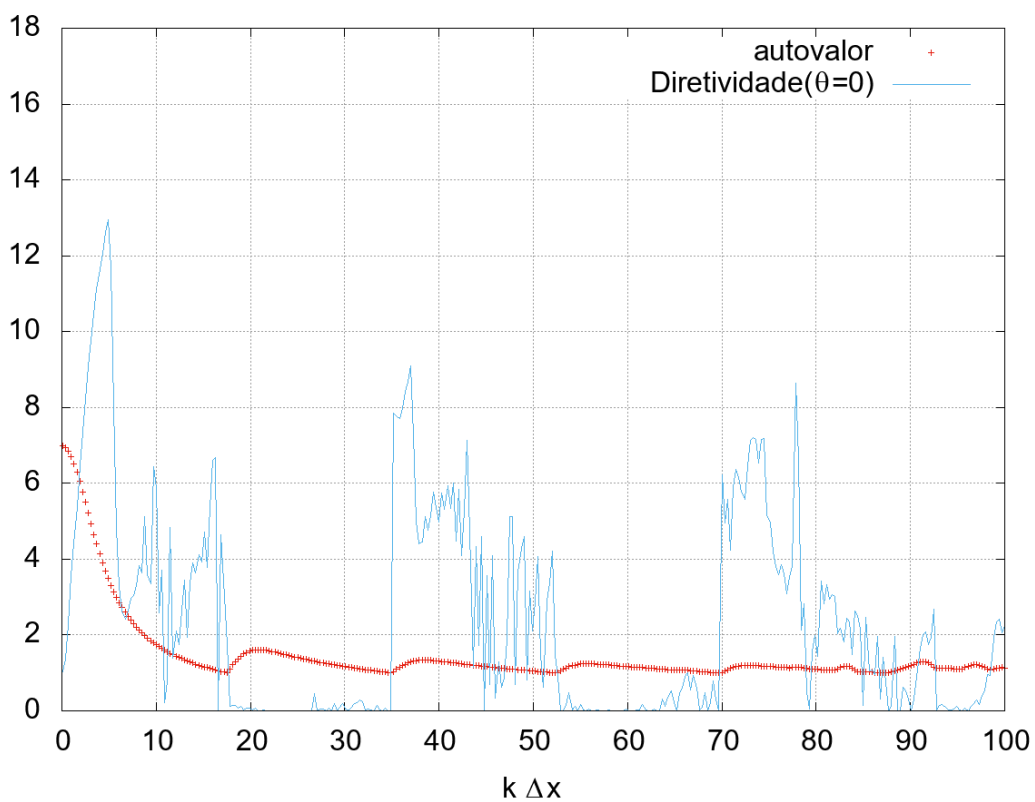


Figura 31 – Diretividade em região *bright* $\Omega_b = 30^\circ$ e $M = 7$. A diretividade vai a zero em regiões marcadas pelos mínimos valores do autovalor β .

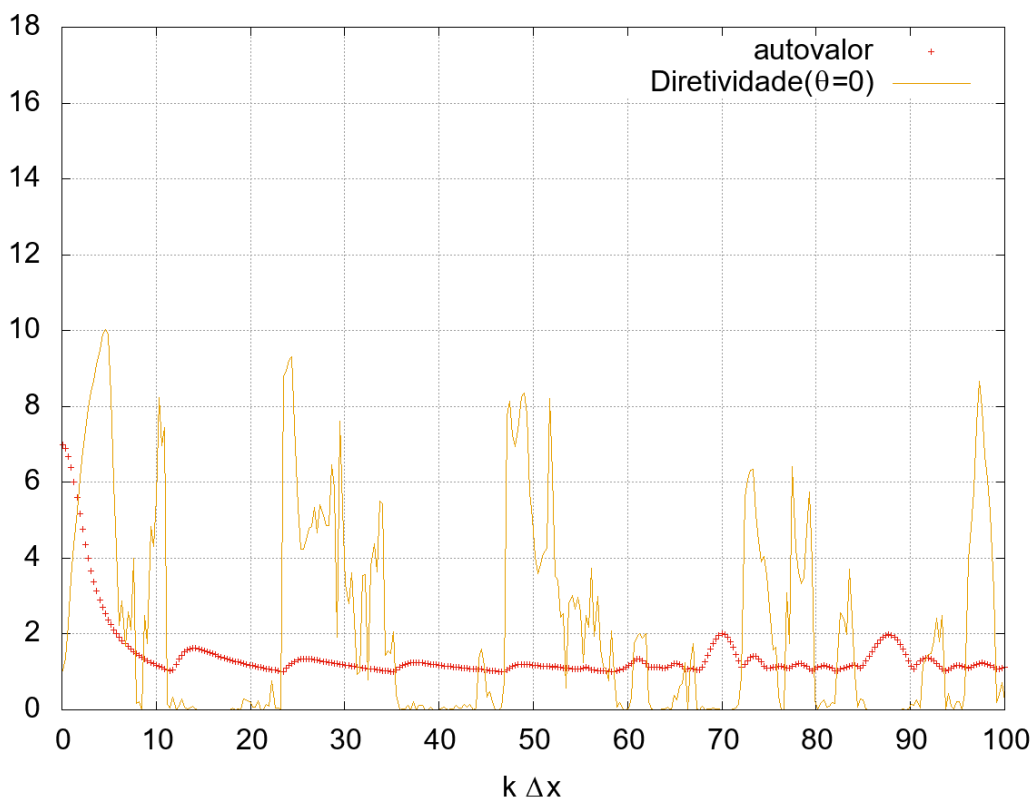


Figura 32 – Diretividade em região *bright* $\Omega_b = 0^\circ$ e $M = 15$. O comportamento é igual a DAS discreto.

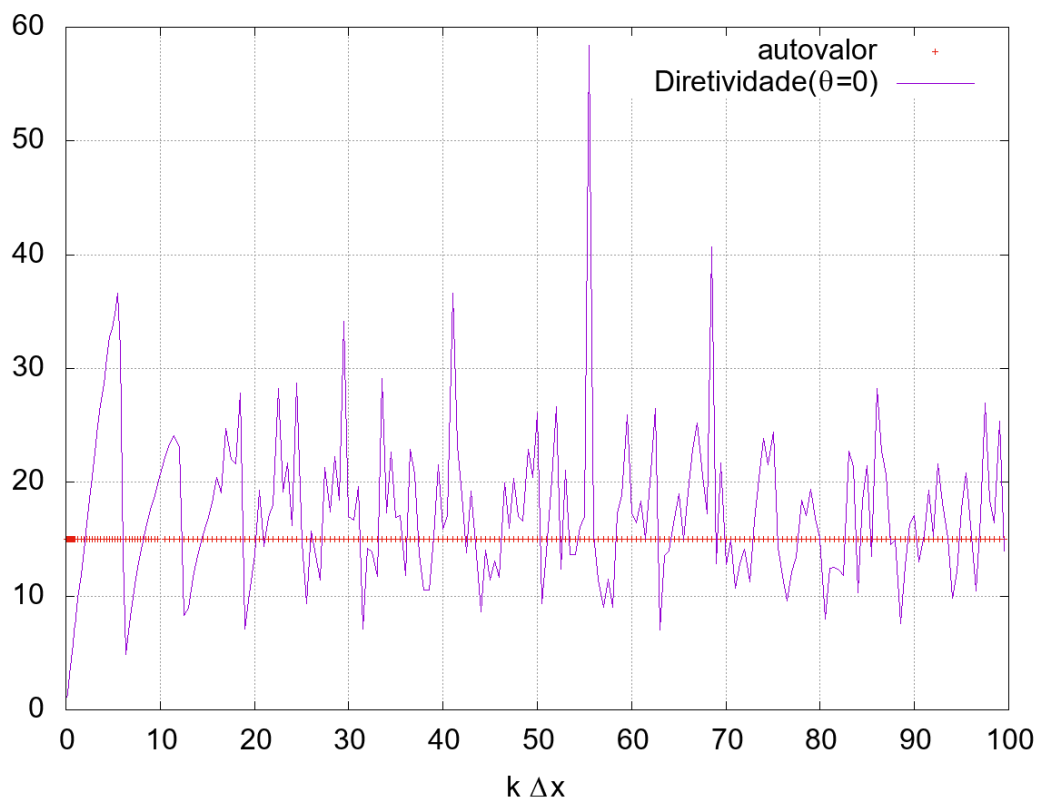


Figura 33 – Diretividade em região *bright* $\Omega_b = 10^\circ$ e $M = 15$. Assim como em $M = 7$, a diretividade vai a zero em regiões marcadas pelos mínimos valores do autovalor β .

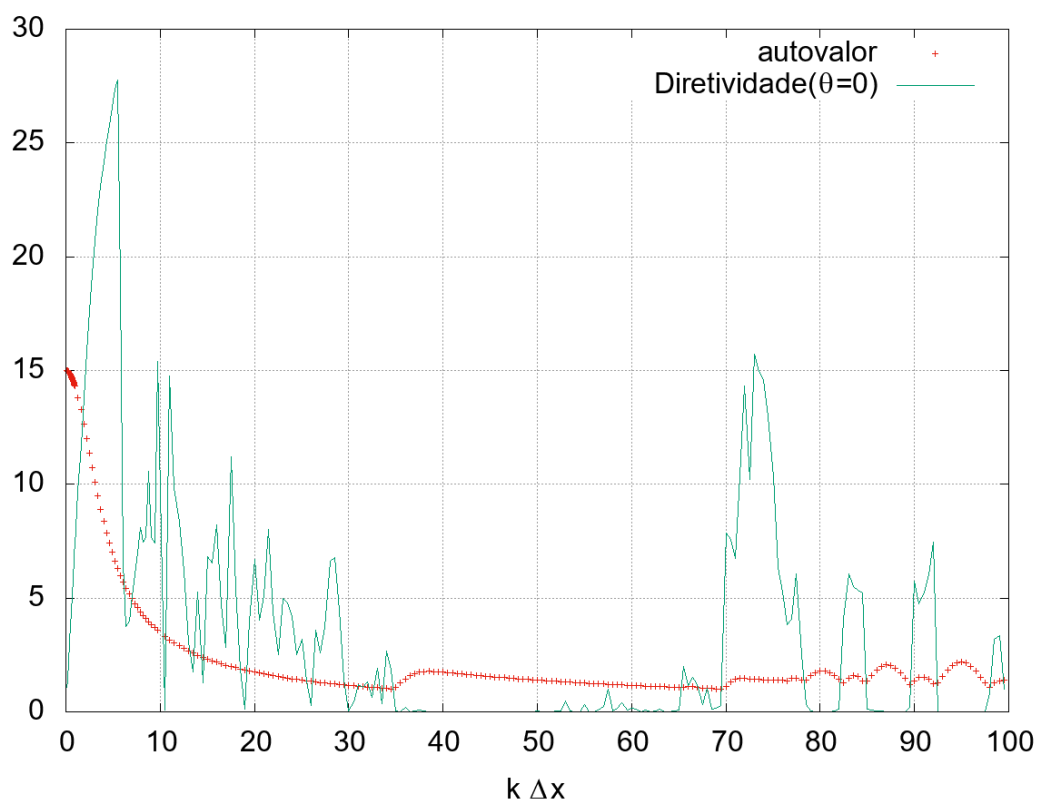


Figura 34 – Diretividade em região *bright* $\Omega_b = 20^\circ$ e $M = 15$. Assim como em $M = 7$, a diretividade vai a zero em regiões marcadas pelos mínimos valores do autovalor β .

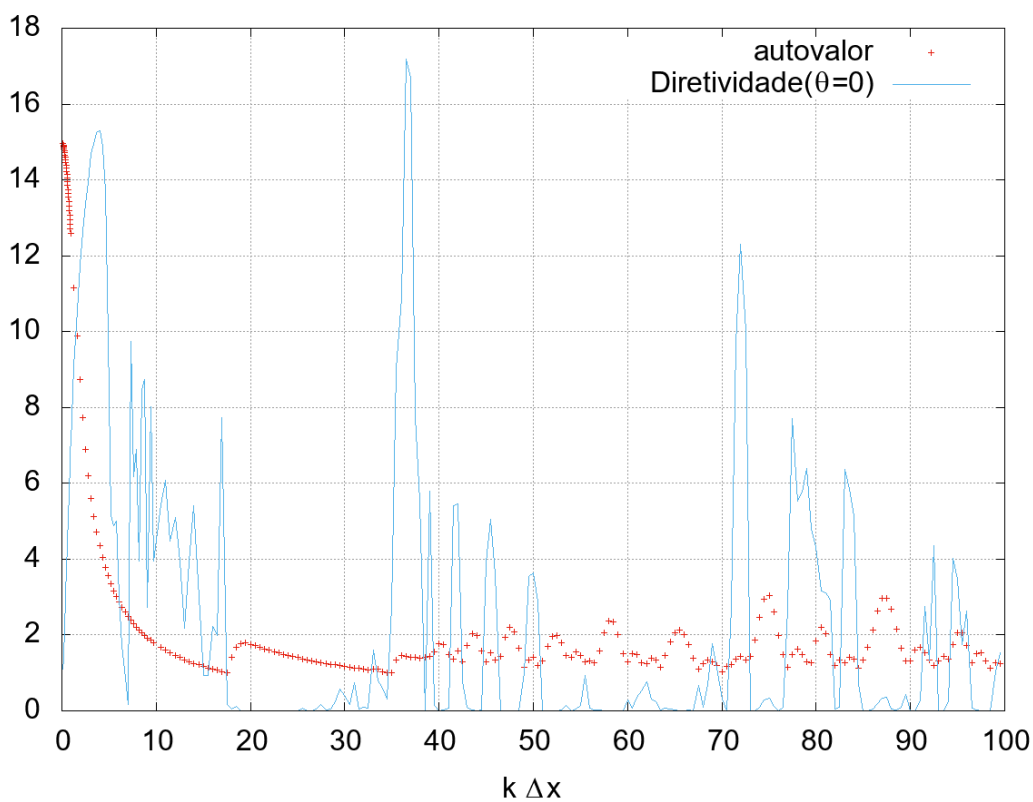
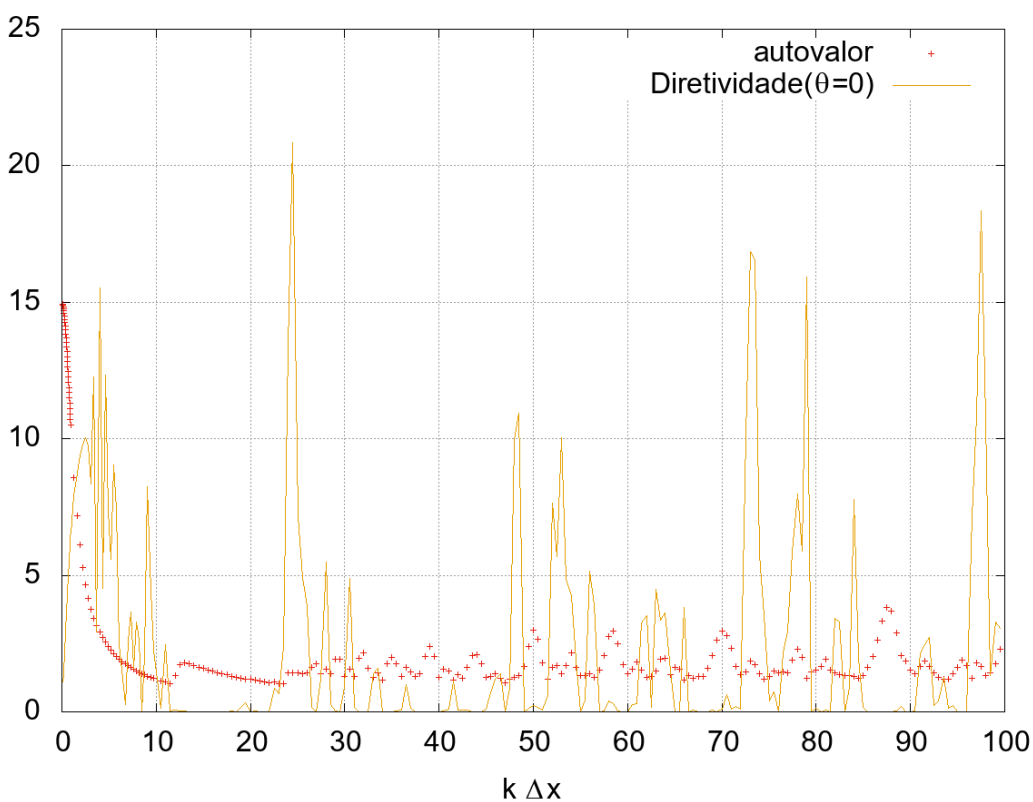


Figura 35 – Diretividade em região *bright* $\Omega_b = 30^\circ$ e $M = 15$. Assim como em $M = 7$, a diretividade vai a zero em regiões marcadas pelos mínimos valores do autovalor β .



3.2.3 Comportamento ACC

No método de ACC, *a priori*, o erro em autovalores e autovetores foi um fator limitante para a análise. Na tentativa de minimizar o erro, escolhi parâmetros que simplificassem o problema.

Como o objetivo é focar o som, escolhi arcos estreitos: 0° , 10° , 20° e 30° para Ω_b e $N_b = 1$ em região *bright*, assim procuro focar apenas em $\theta = 0$. A região *dark* é o respectivo arco Ω_d para que os 180° a frente do arranjo sejam ocupados por *bright* e *dark*, então $\Omega_b + 2 \cdot \Omega_d = 180^\circ$. E escolhi $N_d = 30$ para que a região fosse bem distribuída. Como o método se mostrou impreciso, usei de $M = 4$ para apresentar os resultados, esperando que fosse mais estável. Porém, a instabilidade parece ser uma característica do próprio método, pela maneira como este determina seus autovalores.

3.2.3.1 Autovalores e Diretividade

O autovalor máximo $\mu_{max} = \varpi$ representa o contraste acústico. Em ACC, ϖ é a razão de energias entre região *bright* e *dark* e o método busca maximizá-lo. Porém, para fazer isso, o método acaba diminuindo muito a energia de ambas as regiões, a ponto que as duas quantidades se aproximam de zero, o que não é uma boa solução. Além disso, essa razão é altamente instável, e pode-se observar que uma pequena variação em $k \Delta x$ frequentemente fazia ϖ ter valor infinito porque a energia em *dark* era zero. Este fator sozinho é limitante para a qualidade dos resultados do método. Como a razão de energias é instável, o mesmo acontece com a diretividade. Fazendo com que frequentemente esta tome valores nulos onde ϖ tende a infinito.

Para evidenciar este comportamento, em [Figura 36](#), tomamos o caso de $\Omega_b = 0$ como exemplo. Nota-se como a diretividade é constantemente forçada a zero entre cada ponto plotado para ϖ . Isso acontece porque nesse pontos ϖ diverge a infinito e não é plotado no gráfico. O curioso, é que ϖ , com excessão dos pontos onde diverge, é bem comportado, indicando que não há demasiado erro na implementação do método pelo programa como se pensava. Em [Figura 37](#), [Figura 38](#) e [Figura 39](#), o mesmo comportamento se confere para os outros valores de Ω_b .

Figura 36 – Diretividade em região *bright* $\Omega_b = 0^\circ$ e $M = 4$. A diretividade é constantemente forçada a zero entre os pontos de autovalor ϖ .

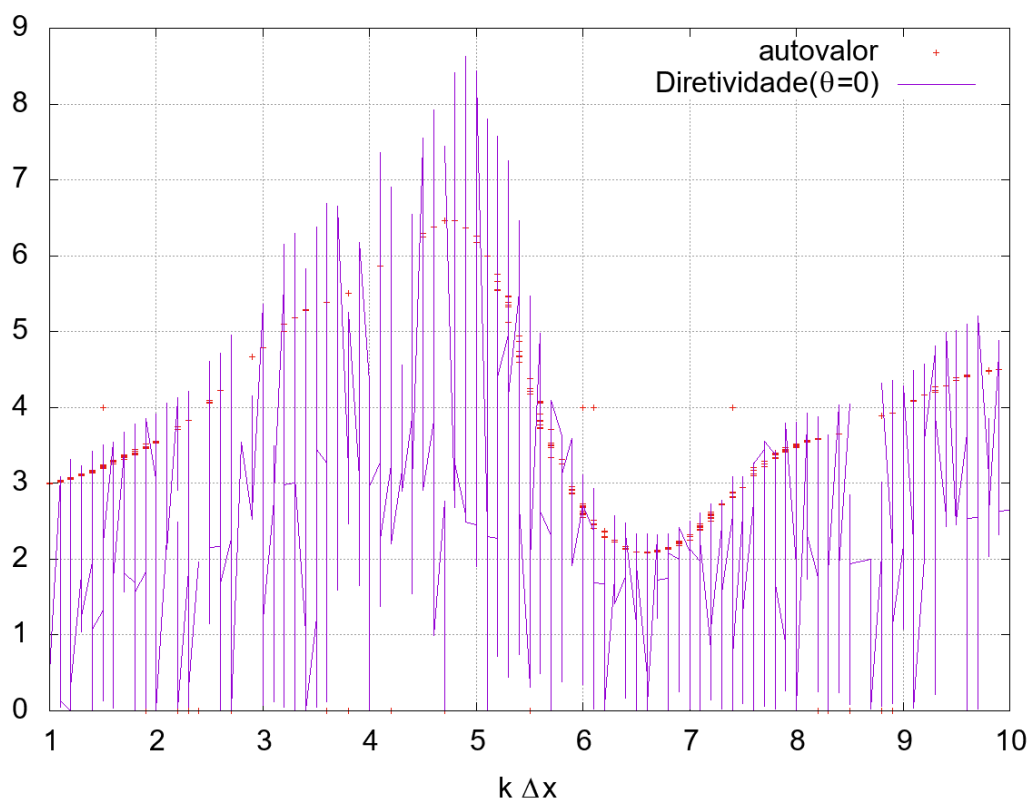


Figura 37 – Diretividade em região *bright* $\Omega_b = 10^\circ$ e $M = 4$. A diretividade é constantemente forçada a zero entre os pontos de autovalor ϖ .

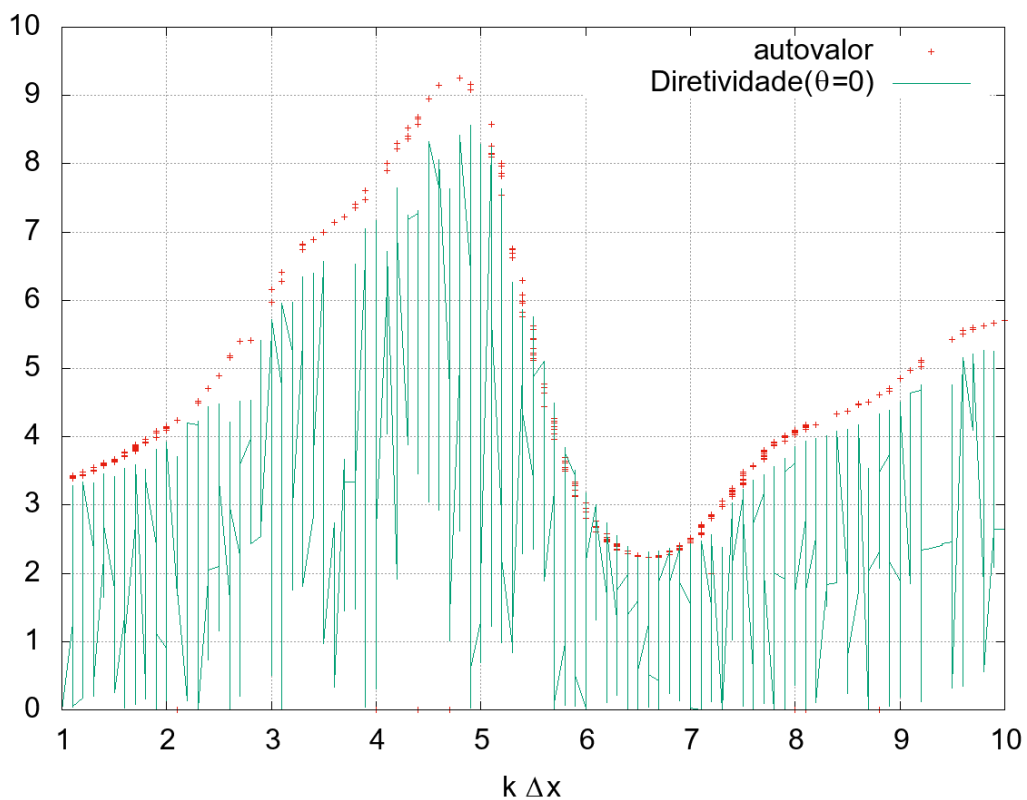


Figura 38 – Diretividade em região *bright* $\Omega_b = 20^\circ$ e $M = 4$. A diretividade é constantemente forçada a zero entre os pontos de autovalor ϖ .

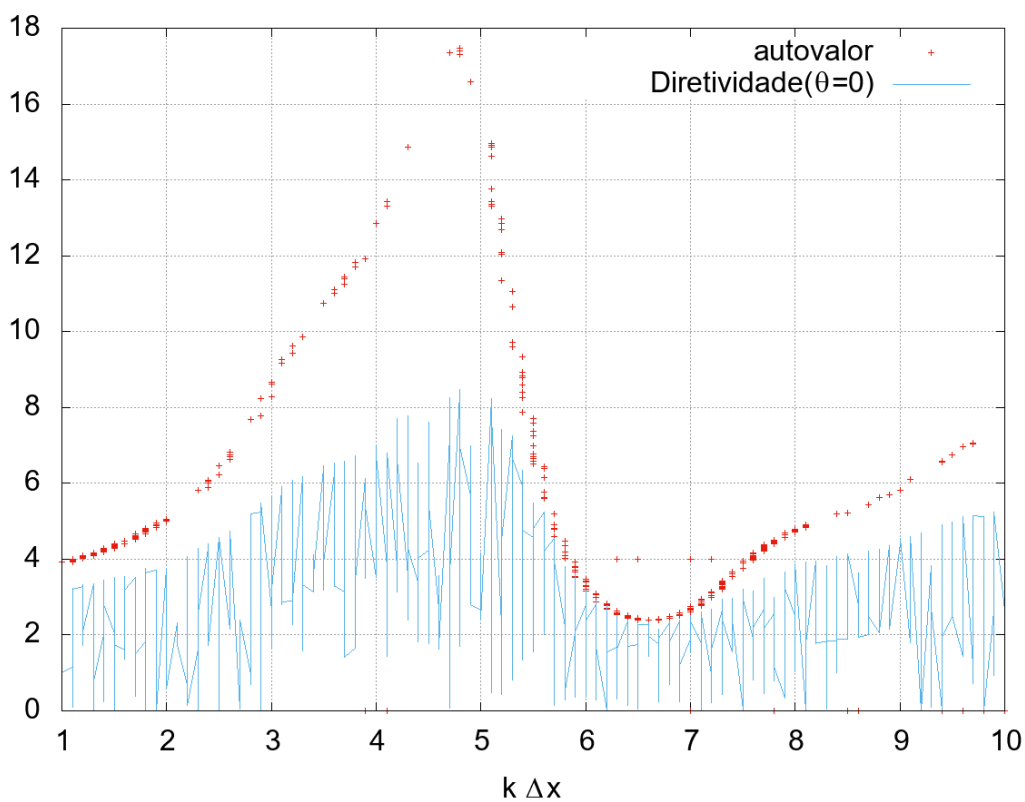
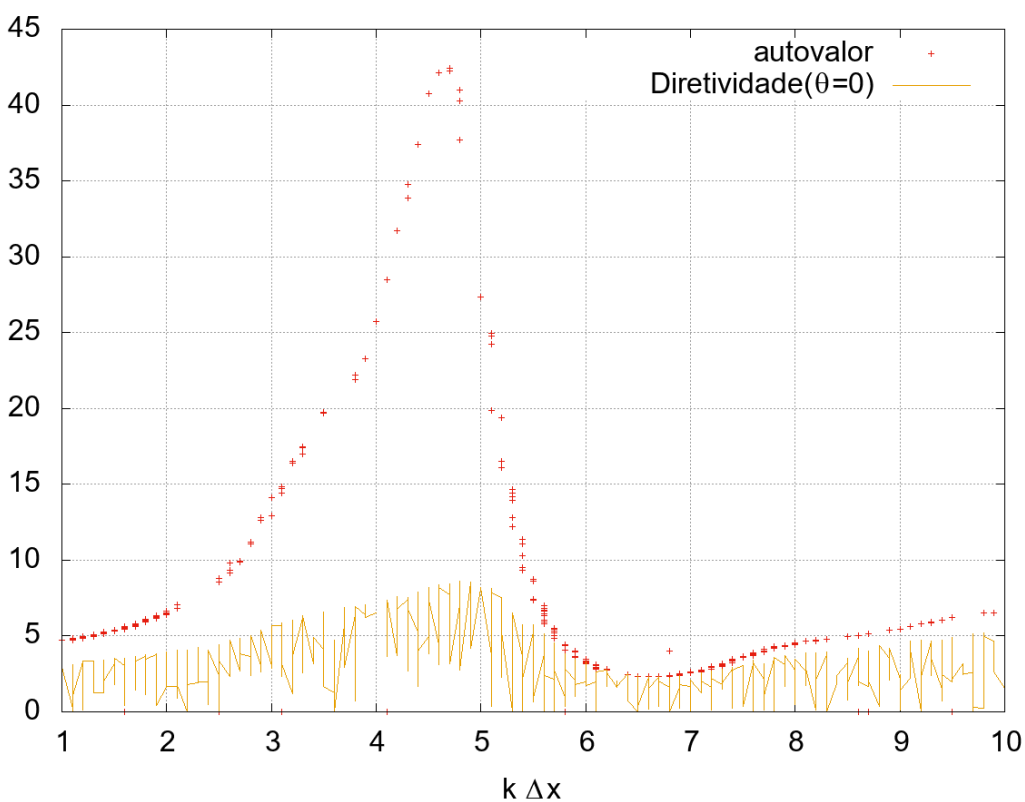


Figura 39 – Diretividade em região *bright* $\Omega_b = 30^\circ$ e $M = 4$. A diretividade é constantemente forçada a zero entre os pontos de autovalor ϖ .



3.2.3.2 Autovetores

Ao contrário de ABC, observa-se que em ACC os autovetores \mathbf{q} tendem a ser antissimétricos, então $\mathbf{q}^{(1)} \approx \mathbf{q}^{(M)}$, $\mathbf{q}^{(2)} \approx \mathbf{q}^{(M-1)}$ e assim por diante. Nota que uma solução antissimétrica para \mathbf{q} implica que o arranjo tem direção de propagação em $\theta = 0$, mas que todos os alto-falantes estão em meia fase. Em decorrência, disso, existe muita interferência destrutiva em todos os ângulos θ . E, percebe-se que, nos casos onde \mathbf{q} se mostra precisamente antissimétrico, as energias em *bright* e *dark* tendem a zero. E é nestes casos que ϖ facilmente tem valor infinito.

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho, pode-se estudar todos os métodos propostos com sucesso. Toda a análise foi feita perante um espectro de valores $k \Delta x$, que representam o produto do número de onda da radiação e o espaçamento entre alto-falantes.

O método DAS contínuo apresentou os melhores resultados de diretividade, que são sempre altos e crescentes em $k L/2$ (que se assimila com o valor de $k \Delta x$). Isso acontece porque, a medida que $k L/2$ aumenta, o padrão de radiação se torna mais estreito e com cada vez mais lóbulos secundários. Porém, tal método é uma idealização, isto é, porque o seu espaçamento entre alto-falantes tende a zero.

Para DAS discreto, obteve-se altos valores de diretividade e estes sempre se beneficiam do aumento do número de alto-falantes. A diretividade máxima do método acontece sempre em intervalo $(5.0, 6.0)$ no domínio de $k \Delta x$, sendo este o intervalo ideal para tratar o problema de focalização do som. Mas, para valores maiores de $k \Delta x$, o método dá origem a lóbulos principais adicionais no padrão de radiação a cada acréscimo de 2π em $k \Delta x$. Essa é a grande restrição do método. Embora a diretividade permaneça grande, ainda assim existe uma coleção de lóbulos principais adicionais no padrão de radiação. O resultado em ampla faixa de $k \Delta x$ é: diretividade alta, mas com o padrão de radiação sendo máximo em diversos ângulos θ à medida que $k \Delta x$ aumenta. Ou seja, o som é direcional, mas o som com intensidade máxima aponta para vários ângulos.

Pode-se conferir que o método ABC, em região *bright* de $\Omega_b = 0^\circ$, tem solução para o arranjo de tal forma que todas as excitações são de mesmo valor. Ou seja, neste caso particular, ABC é igual a DAS discreto. Este também foi o caso onde o método teve melhor desempenho. Para as outras regiões *bright* testadas, com Ω_b valendo 10° , 20° e 30° , o método apresentou a deficiência de que a sua diretividade periodicamente caía a zero em determinadas faixas de valores de $k \Delta x$. Este comportamento foi explicado pela maneira como o método determina as excitações de cada alto-falante. Para as referidas faixas de valores de $k \Delta x$, a solução de ABC determina que os alto-falantes operem em meia fase. Isso acontece porque, nestes valores de $k \Delta x$, o método não consegue maximizar a energia em uma região *bright* grande. Mas, se a região é pontual ($\Omega_b = 0^\circ$) isso é sempre possível. Porém, se é pontual, ABC se comporta como DAS discreto e tem as mesmas deficiências do último.

O método ACC se mostrou problemático na maneira como este busca resolver o problema de focalização do som. Ao tentar maximizar o contraste acústico (razão entre energia em região *bright* e *dark*), frequentemente o método faz ambas energias serem muito baixas. Dessa forma, o método se mostrou muito instável para qualquer variação pequena em $k \Delta x$, independentemente das regiões *bright* e *dark* utilizadas. O resultado na diretividade é que esta sofre a instabilidade do método e constantemente vai a zero para pequenas variações em $k \Delta x$. Por isso, ACC não se mostrou um bom método para o problema de focalização de som.

O problema de focalização de som para um valor fixo de frequência é bem atendido por DAS discreto. Mas, tratando-se de um espectro de frequências, não, e os outros métodos também não resolvem bem o problema. Para um espectro de frequências, a solução parece ser tratar o problema com um arranjo de espaçamento variável. Desta forma, as limitações nos valores de $k \Delta x$ podem ser tratadas.

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad P = P_0 + p(t) \quad (103)$$

$$\nabla^2 \varrho = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2}, \quad \rho = \rho_0 + \varrho(t) \quad (104)$$

$$P: \text{pressão total}; \quad P_0: \text{pressão atmosférica média} \quad p(t): \text{perturbação em pressão} \quad (105)$$

$$\rho: \text{densidade total}; \quad \rho_0: \text{densidade média} \quad \varrho(t): \text{perturbação em densidade} \quad (106)$$

$$g_f(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \quad (107)$$

$$\mathbf{r}: \text{ponto no espaço} \quad \mathbf{r}_0: \text{local da perturbação} \quad k: \text{número de onda} \quad (108)$$

$$\text{peso:} \quad \text{fase:} \quad \text{direção de propagação} \quad (109)$$

Referências

- AL., F. L. et. Theoretical and experimental comparative analysis of beamforming methods for loudspeaker arrays under given performance constraints. **Journal of Sound and Vibration**, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 24.
- BAI, J.-G. I. M. R.; BENESTY, J. **Acoustic Array Systems**. 1. ed. Singapore: 2013 John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2013. Citado 3 vezes nas páginas 1, 14 e 15.
- BAI, M. R.; HSIEH, Y.-H. Point focusing using loudspeaker arrays from the perspective of optimal beamforming. **Acoustical Society of America**, n. doi: 10.1121/1.4921602, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 24.
- BALANIS, C. A. **Antenna Theory: Analysis and design**. 3. ed. [S.I.]: John Wiley & Sons, Inc, 2005. Citado na página 15.
- BERANEK, L. L. **Acoustics**. 1. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc, 1954. Citado 4 vezes nas páginas 8, 11, 12 e 13.
- BISTAFA, S. R. **Acústica aplicada ao controle do ruído**. [S.I.]: Edgard Blücher, 2008. Citado na página 14.
- BROWN. **Brown Innovations Directional Audio**. 2018. Disponível em: <<http://www.browninnovations.com/>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- FORD, R. D. **Introduction to Acoustics**. England: Elsevier Publishing Company LTD, 1970. Citado 5 vezes nas páginas 4, 6, 9, 10 e 13.
- HYPER SOUND. **Hypersound**. 2018. Disponível em: <<http://hypersoundhearing.com/>>. Citado na página 16.
- KIM, Y.-H.; CHOI, J.-W. **Sound Visualization and Manipulation**. 1. ed. Singapore: 2013 John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2013. Citado 10 vezes nas páginas 6, 8, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 28 e 29.
- KINSLER, L. E.; FREY, A. R. **Fundamentals of Acoustics**. 1. ed. London: John Wiley & Sons. Inc, 1950. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 22.
- KUUTTI, J. L. J.; SEPPONEN, R. E. Local control of audio environment: A review of methods and applications. **Technologies**, n. doi:10.3390/technologies2010031, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 16.
- LRAD. **LRAD**. 2018. Disponível em: <<https://www.lradx.com//>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- STRUTT, B. R. J. W. **The Theory of Sound**. 2. ed. [S.I.]: New York Dover Publications, 1894. Citado na página 4.
- TREES, H. L. V. **Optimum Array Processing: Part iv of detection, estimation, and modulation theory**. [S.I.]: 2002 John Wiley & Sons, Inc., 2013. Citado na página 15.

Apêndices

APÊNDICE A – Código DAS - Contínuo

```

import os, os.path
import math

# ----- ALGORITMO DELAY AND SUM COM ARRANJO CONTINUO -----

#Dado  $b(\theta)=\sin(A*(\alpha-\sin(\theta)))/(A*(\alpha-\sin(\theta)))$ 
#onde  $A=kL/2$  e  $q=(1/L)*\exp(k*\alpha*xs)$ 
#k numero de onda
#L comprimento arranjo
#q fonte de som
#xs coordenada x no arranjo
#theta coordenada polar

# ----- ARQUIVOS -----

datafile1=open('das_c_theta.dat', 'w')
datafile2=open('das_c_kl.dat', 'w')

# ----- FUNCOES -----

#Padrao de Radiacao b

def b(theta,alfa,A):
    return abs(math.sin(A*(alfa-math.sin(theta)))/(A*(alfa-math.sin(theta))))

#Diretividade D

def D(theta,alfa,A):
    polar=-0.5*math.pi*(1.0-1.0/1000.0) #angulo polar
    bmedio=0 #padrao de rad azimutal quadratico medio
    passos=0
    while polar<0.5*math.pi-(1.0/1000.0):
        bmedio=bmedio+b(polar,alfa,A)**2
        passos=passos+1
        polar=polar+(1.0/1000.0)*math.pi

```

```

    D=(b(theta,alfa,A)**2)/(bmedio/passos)
    return D

#Indice de Diretividade DI

def DI(theta,alfa,A):
    return 10.0*math.log10(D(theta,alfa,A))

#Fator de Direcionalidade DF

def DF(theta,alfa,A):
    polar=-0.5*math.pi*(1.0-1.0/1000.0) #angulo polar
    bmax=0 #b(polar) maximo
    while polar<0.5*math.pi-(1.0/1000.0):
        if bmax<b(polar,alfa,A):
            bmax=b(polar,alfa,A)
        polar=polar+(1.0/1000.0)*math.pi

    return b(theta,alfa,A)/bmax

#Beam Pattern BP

def BP(theta,alfa,A):
    return 20.0*math.log10(DF(theta,alfa,A))

#WNG White Noise Gain

def WNG(theta,alfa,A):
    return b(theta,alfa,A)**2

# ----- PLOT em theta -----

A=3.0; alfa=0 ; theta=-0.5*math.pi*(1.0-1.0/1000.0)
while theta<0.5*math.pi-(1.0/1000.0):
    datafile1.writelines([str('%.4f' % theta),'',
        str('%.5f' % b(theta,alfa,A)),'',
        str('%.5f' % D(theta,alfa,A)),'',
        str('%.5f' % DI(theta,alfa,A)),', ',
        str('%.5f' % DF(theta,alfa,A)),', ',

```

```
str('%0.5f' % BP(theta,alfa,A)), ' ',
str('%0.5f' % WNG(theta,alfa,A)), '\n']

theta=theta+(1.0/1000.0)*math.pi

# ----- PLOT em A -----

#plot para kl valendo de 10**(-2) a 10**(6)
#k*l=2*A

A=0.5*10**(-2); alfa=0 ; theta=0-1.0e-20
while A<0.5*10**(5)+1:
    datafile2.writelines([str(2.0*A), ' ',
    str('%0.2f' % D(theta,alfa,2.0*A)), ' ',
    str('%0.2f' % DI(theta,alfa,2.0*A)), ' ',
    str('%0.2f' % WNG(theta,alfa,2.0*A)), '\n'])

    if A<0.5*10**(-1):
        A=A+0.5*10**(-2)
    if A>=0.5*10**(-1) and A<0.5*10**(0):
        A=A+0.5*10**(-2)
    if A>=0.5*10**(0) and A<0.5*10**(1):
        A=A+0.5*10**(-1)
    if A>=0.5*10**(1) and A<0.5*10**(2):
        A=A+0.5*10**(0)
    if A>=0.5*10**(2) and A<0.5*10**(3):
        A=A+0.5*10**(1)
    if A>=0.5*10**(3) and A<0.5*10**(4):
        A=A+0.5*10**(2)
    if A>=0.5*10**(4) and A<0.5*10**(6):
        A=A+0.5*10**(3)

datafile1.close()
datafile1.close()
```

APÊNDICE B – Código DAS - Discreto

```

import os, os.path
import math

# ----- ALGORITMO DELAY AND SUM COM ARRANJO DISCRETO -----

#b padrao de radiacao
#k numero de onda
#L comprimento arranjo
#q fonte de som
#xs coordenada x no arranjo
#theta coordenada polar

# ----- ARQUIVOS -----

datafile1=open('das_d_theta1.dat', 'w')
datafile2=open('das_d_kdx1.dat', 'w')

# ----- FUNCOES -----

#Padrao de Radiacao b

def b(theta,alfa,dx,k,N):
    i=-(N-1.0)/2.0; b=0.0; j=0
    while j!=N:
        b=b+math.cos(k*dx*i*(alfa-math.sin(theta)))
        i=i+1.0
        j=j+1
    return abs(b/N)

#Diretividade D

def D(theta,alfa,dx,k,N):
    polar=-0.5*math.pi*(1.0-1.0/1000.0) #angulo polar
    bmedio=0 #padrao de rad azimuthal quadratico medio
    passos=0
    while polar<0.5*math.pi*(1.0-1.0/1000.0):

```

```

        bmedio=bmedio+b(polar,alfa,dx,k,N)**2
        passos=passos+1
        polar=polar+(1.0/1000.0)*math.pi
    D=(b(theta,alfa,dx,k,N)**2)/(bmedio/passos)
    return D

#Indice de Diretividade DI

def DI(theta,alfa,dx,k,N):
    return 10*math.log10(D(theta,alfa,dx,k,N))

#Fator de Direcionalidade DF

def DF(theta,alfa,dx,k,N):
    polar=-0.5*math.pi*(1.0-1.0/1000.0) #angulo polar
    bmax=0 #b(polar) maximo
    while polar<0.5*math.pi*(1.0-1.0/1000.0):
        if bmax<b(polar,alfa,dx,k,N):
            bmax=b(polar,alfa,dx,k,N)
            polar=polar+(1.0/1000.0)*math.pi
    return b(theta,alfa,dx,k,N)/bmax

#Beam Pattern BP

def BP(theta,alfa,dx,k,N):
    return 20.0*math.log10(DF(theta,alfa,dx,k,N))

#WNG White Noise Gain

def WNG(theta,alfa,dx,k,N):
    return b(theta,alfa,dx,k,N)**2

# ----- PLOT em theta -----

alfa=-0.0; dx=1.0 ; k=1.0;
theta=-0.5*math.pi*(1.0-1.0/1000.0)
while theta<0.5*math.pi*(1.0-1.0/1000.0):
    datafile1.writelines([str('%0.3f' % theta), ' ',
        str('%0.3f' % b(theta,alfa,dx,k,4)), ' ',

```



```

str('%0.3f' % D(theta,alfa,dx,k,4)), ' ',
str('%0.3f' % DI(theta,alfa,dx,k,4)), ' ',
str('%0.3f' % DF(theta,alfa,dx,k,4)), ' ',
str('%0.3f' % BP(theta,alfa,dx,k,4)), ' ',
str('%0.3f' % WNG(theta,alfa,dx,k,4)), '\n']

theta=theta+(1.0/1000.0)*math.pi

# ----- PLOT em kdx -----

#plot para kdx valendo de 10**(-2) a 10**(6)

dx=1.0; k=2*10.0**(-2); alfa=0; theta=0-1.0e-20
while k<10.0**(5)+1:
    datafile2.writelines([str('%0.2f' % k), ' ',
str('%0.2f' % D(theta,alfa,dx,k,4)), ' ',
str('%0.2f' % DI(theta,alfa,dx,k,4)), ' ',
str('%0.2f' % WNG(theta,alfa,dx,k,4)), '\n'])

    if k<10**(-1):
        k=k+10**(-2)
    if k>=10**(-1) and k<10**(0):
        k=k+10**(-2)
    if k>=10**(0) and k<10**(1):
        k=k+10**(-1)
    if k>=10**(1) and k<10**(2):
        k=k+10**(0)
    if k>=10**(2) and k<10**(3):
        k=k+10**(1)
    if k>=10**(3) and k<10**(4):
        k=k+10**(2)
    if k>=10**(4) and k<10**(6):
        k=k+10**(3)

datafile1.close()
datafile2.close()

```

APÊNDICE C – Código ABC

```

import os, os.path
import math
import numpy as numpy
from scipy import linalg
import sys

# ----- CODIGO DE OPTIMIZACAO ACOUSTIC BRIGHTNESS CONTROL ABC -----

# ----- ARQUIVOS -----

datafile0=open('abc0_k.dat', 'w')
datafile1=open('abc1_k.dat', 'w')
datafile2=open('abc2_k.dat', 'w')
datafile3=open('abc3_k.dat', 'w')

# ----- DEFINICOES DE FUNCOES ABC -----

#Funcao coordenada xs em arranjo considerando M alto-falantes

def xs(Mj,dx,M):
    return (Mj-(M-1)/2.0)*dx

#Funcao coordenada theta
#posiciona os pontos a uma distancia angular dtheta entre eles

def theta(Ni,dtheta,N):
    return (Ni-(N-1)/2.0)*dtheta

#Funcao de green normalizada por rad de monopolo e usando aprox de fraunhofer

def green(theta,xs,k):
    return math.cos(-xs*k*math.sin(theta))

#Funcao Acoustic Brightness Control

def ABC(N,M,dx,k,omega):

```

```

H=numpy.zeros((N,M)) #matriz NxM de f.green
if N==1:
    dtheta=0
else:
    dtheta=omega/(N-1) #distancia angular entre pontos N

for i in range (N):
    for j in range(M):
        H[i][j]=green(theta(i,dtheta,N),xs(j,dx,M),k)
        #calcula matriz H de funcoes de green
        #entre ponto i e alto-falante j

Ht=numpy.transpose(H) #transposta de H: Ht (MxN)
R=numpy.dot(Ht,H)/N #matriz correlacao espacial de alto-falantes MxM

A=linalg.eigh(R) #retorna autovetores e autovalores

avmax=numpy.max(A[0]) #seleciona autovalor maximo
avindex=numpy.argmax(A[0]) #seleciona indice de autovalor maximo
q=A[1][avindex] #seleciona q como o autovetor do autovalor maximo

# Autovetor q apresenta muito erro, precisa-se corrigir
# Da equacao de autovetores e autovalores temos,
#  $R*q=avmax*q$  ou  $R*q/avmax=q$ , ou:
#  $R*q-avmax*q=0$  ou  $R*q/avmax-q=0$ 

# A seguir defino uma matriz de autovetores,
# cada um com uma correcao de +/- incremento em determinado
# elemento do autovetor a corrigir: q.
# Em um loop seleciono o autovetor corrigido cuja diferenca
# discutida acima tem menor valor
# ate a diferenca ser da ordem de  $1e-2$ 

incremento=1e-1 #passo de alteracao em autovetores
contador=0
while numpy.max(abs(numpy.dot(R,q)/avmax-q))>1e-2 or
numpy.max(abs(numpy.dot(R,q)-q*avmax))>1e-2:

    vc=numpy.zeros((2*M,M)) #declara matriz correcao

```

```

for i in range(2*M):
    vc[i]=q #igual a cada vetor a autovetor q
for i in range(M): #aplica incrementos
    vc[i][i]=vc[i][i]+incremento
    vc[M+i][i]=vc[M+i][i]-incremento

diff=numpy.zeros((2*M,M)) #declara vetores diferenca
modulos=numpy.zeros((1,2*M)) #declara o modulo
for i in range(2*M):
    diff[i]=abs(numpy.dot(R,vc[i])/avmax-vc[i])
    for j in range(M):
        modulos[0][i]=modulos[0][i]+diff[i][j]*diff[i][j]

min_index=numpy.argmin(modulos[0]) #determina o menor modulo
q=vc[min_index] #corrige autovetor q
somac=0 #declara cte de normalizacao

for i in range(M):
    somac=somac+q[i]*q[i]
q=q/math.sqrt(somac) #normaliza autovetor corrigido q

# aqui faco incremento variar,
# como o processo nao e estavel e sempre decrescente,
# faco haver variacao aleatoria do passo
# e em geral que decresca em funcao do erro

contador=contador+1
if contador%50==0:
    incremento1=numpy.max(abs(numpy.dot(R,q)/avmax-q))
    incremento2=numpy.max(abs(numpy.dot(R,q)-q*avmax))
    if incremento1>incremento2:
        incremento=incremento2*(numpy.random.randint(5)+1)/100
    else:
        incremento=incremento1*(numpy.random.randint(5)+1)/100

if contador%10000==0: # se demorou muito a convergir, aumento o passo
    incremento=1e-1

# q e -q são solucoes,

```

```

# escrevo o vetor como positivo
# as componentes negativas apenas se ha
# troca de sinal nelas
lista=numpy.zeros((2,M))
Q=abs(q)
qindex=numpy.argmax(Q)
if q[qindex]>=0:
    lista[0]=q
    lista[1][0]=avmax
    return lista
else:
    lista[0]=-q
    lista[1][0]=avmax
    return lista

# ----- DEFINICOES OUTRAS FUNCOES -----

#Padrao de Radiacao b

def b(q,theta,M,dx,k):
    b=0
    for i in range(M):
        b=b+q[i]*abs(q[i])*green(theta,xs(i,dx,M),k)
    return abs(b)

#Diretividade D

def D(q,theta,M,dx,k):
    polar=-0.5*math.pi*(1.0-1.0/100.0) #angulo polar
    bmedio=0 #padrao de rad azimutal quadratico medio
    passos=0
    while polar<0.5*math.pi-(1.0/100.0):
        bmedio=bmedio+b(q,polar,M,dx,k)**2
        passos=passos+1
        polar=polar+(1.0/100.0)*math.pi
    D=(b(q,theta,M,dx,k)**2)/(bmedio/passos)
    return D

```

```
#Indice de Diretividade DI

def DI(q,theta,M,dx,k):
    return 10*math.log10(D(q,theta,M,dx,k))

#Fator de Direcionalidade DF

def DF(q,theta,M,dx,k):
    polar=-0.5*math.pi*(1.0-1.0/100.0) #angulo polar
    bmax=0 #b(polar) maximo
    while polar<0.5*math.pi-(1.0/100.0):
        if bmax<b(q,polar,M,dx,k):
            bmax=b(q,polar,M,dx,k)
        polar=polar+(1.0/100.0)*math.pi

    return b(q,theta,M,dx,k)/bmax

#Beam Pattern BP

def BP(q,theta,M,dx,k):
    return 20.0*math.log10(DF(q,theta,M,dx,k))

#WNG White Noise Gain

def WNG(q,theta,M,dx,k):
    return b(q,theta,M,dx,k)**2/(numpy.dot(q,q))

# ----- GERACAO DE RESULTADOS -----

N=30 #pontos
M=15 #alto-falantes
dx=1.0 #distancia entre alto-falantes
k=0.1 #numero de onda

while k<100.0:
    numpy.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

    resultado=ABC(N,M,dx,k,math.pi/18.0)
```

```

q=resultado[0]
avmax=resultado[1][0]
datafile1.writelines([str('%1f' % k),',',str('%2f' % q[0]),
',',str('%2f' % q[1]),',',str('%2f' % q[2]),
',',str('%2f' % q[3]),',',str(b(q,0,M,dx,k)),
',',str(D(q,0,M,dx,k)),',',str(avmax), '\n'])

resultado=ABC(N,M,dx,k,math.pi/9.0)
q=resultado[0]
avmax=resultado[1][0]
datafile2.writelines([str('%1f' % k),',',str('%2f' % q[0]),
',',str('%2f' % q[1]),',',str('%2f' % q[2]),
',',str('%2f' % q[3]),',',str(b(q,0,M,dx,k)),
',',str(D(q,0,M,dx,k)),',',str(avmax), '\n'])

resultado=ABC(N,M,dx,k,math.pi/6.0)
q=resultado[0]
avmax=resultado[1][0]
datafile3.writelines([str('%1f' % k),',',str('%2f' % q[0]),
',',str('%2f' % q[1]),',',str('%2f' % q[2]),
',',str('%2f' % q[3]),',',str(b(q,0,M,dx,k)),
',',str(D(q,0,M,dx,k)),',',str(avmax), '\n'])

resultado=ABC(N,M,dx,k,0)
q=resultado[0]
avmax=resultado[1][0]
datafile0.writelines([str('%1f' % k),',',str('%2f' % q[0]),
',',str('%2f' % q[1]),',',str('%2f' % q[2]),
',',str('%2f' % q[3]),',',str(b(q,0,M,dx,k)),
',',str(D(q,0,M,dx,k)),',',str(avmax), '\n'])

if k<=1:
    k=k+0.03
if k>=1 and k<=10:
    k=k+0.3
if k>=10 and k<=100:
    k=k+0.5
if k>=100 and k<=1000:
    k=k+1.0

```

```
datafile0.close()  
datafile1.close()  
datafile2.close()  
datafile3.close()
```


APÊNDICE D – Código ACC

```

import os, os.path
import math
import numpy as numpy
from scipy import linalg
import sys

# ----- CODIGO DE OPTIMIZACAO CONTRAST -----

# ----- ARQUIVOS -----

datafile0=open('acc0_k.dat', 'w')
datafile1=open('acc1_k.dat', 'w')
datafile2=open('acc2_k.dat', 'w')
datafile3=open('acc3_k.dat', 'w')

# ----- DEFINICOES DE FUNCOES -----

# Funcao coordenada xs em arranjo considerando M alto-falantes

def xs(Mj,dx,M): #funcao coordenada xs em arranjo
    return (Mj-(M-1)/2.0)*dx

# Funcao coordenada theta de regioa bright
# posiciona os pontos a uma distancia angular dthetab entre eles

def thetab(Nbi,dthetab,Nb):
    return (Nbi-(Nb-1)/2.0)*dthetab

# Funcao coordenada theta de regioa dark
# posiciona os pontos a uma distancia angular dthetad entre eles

def thetad(Ndi,dthetad,Nd):
    if Ndi<=Nd/2-1:
        return -omegad/2+Ndi*dthetad #ocupa valores negativos de thetad
    else:

```

```

    return +omegab/2+(Ndi-Nd/2)*dthetad #ocupa valores positivos de thetad

#Funcao de green normalizada por rad de monopolo e usando aprox de fraunhofer

def green(theta,xs,k):
    return math.cos(-xs*k*math.sin(theta))

# Funcao Acoustic Contrast Control

def ACC(Nb,Nd,M,dx,k,omegab,omegad):

    if Nb==1: #caso de um ponto apenas
        dthetab=0 #logo thetab=0
    else: #caso de multiplos pontos
        dthetab=omegab/(Nb-1) #distancia entre pontos Nb

    dthetad=(omegad-omegab)/(Nd-2.0) #distancia entre pontos Nd
    Hb=numpy.zeros((Nb,M)) #matriz NxM de f.green em regioao bright
    Hd=numpy.zeros((Nd,M)) #matriz NxM de f.green em regioao dark

    for i in range (Nb):
        for j in range(M):
            Hb[i][j]=green(thetab(i,dthetab,Nb),xs(j,dx,M),k)

    for i in range(Nd):
        for j in range(M):
            Hd[i][j]=green(thetad(i,dthetad,Nd),xs(j,dx,M),k)

    Hbt=numpy.transpose(Hb) #matriz transposta de Hb: Ht (MxNb)
    Hdt=numpy.transpose(Hd) #matriz transposta de Hd: Ht (MxNd)

    Rb=numpy.dot(Hbt,Hb)/Nb #matriz correlacao espacial (bright)
    Rd=numpy.dot(Hdt,Hd)/Nd #matriz correlacao espacial (dark)

    Schur=linalg.qz(Rb,Rd)

# essa funcao retorna array de quatro quantidades, sao elas:
# 1: decomposicao de Schur - matriz upper triangular para Rb
# 2: decomposicao de Schur - matriz upper triangular para Rd

```

```

# 3: autovalores de Schur a esquerda
# 4: autovalores de Schur a direita

# Por definicao os autovalore_i=a_ii/b_ii, onde a_ii e o elemento ii
# da decomp Schur de Rb, e b_ii e o elemento ii da decomp Schur de Rd

autovalores=numpy.zeros(M)
autovetores=numpy.zeros((M,M))
for i in range(M):
    autovalores[i]=Schur[0][i][i]/Schur[1][i][i]
    autovetores[i]=Schur[3][i]
avmax=numpy.max(autovalores) #seleciona autovalor maximo
avindex=numpy.argmax(autovalores) #indice de autovalor maximo
q=Schur[3][avindex] #q como o autovetor do autovalor maximo

#Autovetor q apresenta muito erro, precisa-se corrigir
# Da equacao de autovetores e autovalores temos,
#  $Rb q = avmax Rd q$  ou:  $(Rb-Rd avmax) q=0$ 
# ou:  $(Rb/avmax - Rd) q =0$ 
# A seguir defino uma matriz de autovetores,
# cada um com uma correcao de +/- incremento em um determinado
# elemento do autovetor a corrigir: q.
# Em um loop seleciono o autovetor corrigido cuja diferenca
# discutida acima tem menor valor
# ate a diferenca ser da ordem de  $1e-2$ 

incremento=1e-1 #passo de alteracao em autovetores
contador=0
while numpy.max(abs(numpy.dot(Rb-Rd*avmax,q)))>0.5*1e-2 or
numpy.max(abs(numpy.dot(Rb/avmax-Rd,q)))>0.5*1e-2:

    vc=numpy.zeros((2*M,M)) #declara matriz correcao
    for i in range(2*M):
        vc[i]=q #igual a cada vetor a autovetor q
    for i in range(M): #aplica incremento
        vc[i][i]=vc[i][i]+incremento
        vc[M+i][i]=vc[M+i][i]-incremento

    diff=numpy.zeros((2*M,M)) #declara matriz diferenca

```

```
modulos=numpy.zeros((1,2*M)) #declara o modulo
for i in range(2*M):
    diff[i]=abs(numpy.dot(Rb/avmax-Rd,vc[i]))
    for j in range(M):
        modulos[0][i]=modulos[0][i]+diff[i][j]*diff[i][j]

min_index=numpy.argmin(modulos[0]) #seleciona menor erro
q=vc[min_index] #corrige autovetor q
somac=0 #declara cte de normalizacao

for i in range(M):
    somac=somac+q[i]*q[i]
q=q/math.sqrt(somac) #normaliza autovetor

# aqui faco incremento variar,
# como o processo nao e estavel e sempre decrescente,
# faco haver variacao aleatoria do passo
# e em geral que decresca em funcao do erro

if contador%200==0:
    incremento1=numpy.max(abs(numpy.dot(Rb/avmax-Rd,q)))
    incremento2=numpy.max(abs(numpy.dot(Rb-Rd*avmax,q)))
    if incremento1>incremento2:
        incremento=incremento2*(numpy.random.randint(5)+1)/100
    else:
        incremento=incremento1*(numpy.random.randint(5)+1)/100
if contador%10000==0:
    incremento=1e-1
if contador==100000:
    for i in range(M):
        q[i]=0
    lista=numpy.zeros((2,M))
    lista[0]=q
    lista[1][0]=avmax
    print 'erro'
    return lista
```

```
        contador=contador+1

# q e -q são solucoes,
# aqui escrevo o vetor como positivo
# e as componentes negativas
# aparecem apenas quando ha
# troca de sinal nelas

if abs(abs(q[0])-abs(q[M-1]))>=0.2:
    for i in range(M):
        q[i]=0
    lista=numpy.zeros((2,M))
    lista[0]=q
    lista[1][0]=avmax
    print 'erro'
    return lista

if abs(abs(q[1])-abs(q[M-2]))>=0.2:
    for i in range(M):
        q[i]=0
    lista=numpy.zeros((2,M))
    lista[0]=q
    lista[1][0]=avmax
    print 'erro'
    return lista

lista=numpy.zeros((2,M))
Q=abs(q)
qindex=numpy.argmax(Q)
if q[qindex]>=0:
    lista[0]=q
    lista[1][0]=avmax
    return lista
else:
    lista[0]=-q
    lista[1][0]=avmax
    return lista

# ----- DEFINICOES OUTRAS FUNCOES -----
```

```
#Padrao de Radiacao b
```

```
def b(q,theta,M,dx,k):  
    b=0  
    for i in range(M):  
        b=b+q[i]*abs(q[i])*green(theta,xs(i,dx,M),k)  
    return abs(b)
```

```
#Diretividade D
```

```
def D(q,theta,M,dx,k):  
    polar=-0.5*math.pi*(1.0-1.0/100.0) #angulo polar  
    bmedio=0 #padrao de rad azimuthal quadratico medio  
    passos=0  
    while polar<0.5*math.pi-(1.0/100.0):  
        bmedio=bmedio+b(q,polar,M,dx,k)**2  
        passos=passos+1  
        polar=polar+(1.0/100.0)*math.pi  
    D=(b(q,theta,M,dx,k)**2)/(bmedio/passos)  
    return D
```

```
#Indice de Diretividade DI
```

```
def DI(q,theta,M,dx,k):  
    return 10*math.log10(D(q,theta,M,dx,k))
```

```
#Fator de Direcionalidade DF
```

```
def DF(q,theta,M,dx,k):  
    polar=-0.5*math.pi*(1.0-1.0/100.0) #angulo polar  
    bmax=0 #b(polar) maximo  
    while polar<0.5*math.pi-(1.0/100.0):  
        if bmax<b(q,polar,M,dx,k):  
            bmax=b(q,polar,M,dx,k)  
        polar=polar+(1.0/100.0)*math.pi  
  
    return b(q,theta,M,dx,k)/bmax
```

```

#Beam Pattern BP

def BP(q,theta,M,dx,k):
    return 20.0*math.log10(DF(q,theta,M,dx,k))

#WNG White Noise Gain

def WNG(q,theta,M,dx,k):
    return b(q,theta,M,dx,k)**2/(numpy.dot(q,q))

# ----- GERACAO DE RESULTADOS -----

Nb=1 #pontos em regioa bright
Nd=20 #pontos (PARES!, 4, 6 ou maior) em regioa dark
M=4 #alto-falantes
dx=1.0 #distancia entre alto-falantes
k=1.0 #numero de onda
#omegab: representa regioa bright
omegad=math.pi # representa area dark de pi rad

while k<10.0:
    numpy.set_printoptions(precision=3, suppress=True)

    omegab=math.pi/18 ;lista=ACC(Nb,Nd,M,dx,k,omegab,omegad)
    q=lista[0]
    av=lista[1][0]
    if numpy.linalg.norm(q)!=0:
        datafile1.writelines([str('% .1f' % k),',',str('% .2f' % q[0]),
            ', ',str('% .2f' % q[1]),', ',str('% .2f' % q[2]),
            ', ',str('% .2f' % q[3]),', ',str(b(q,0,M,dx,k)),
            ', ',str(D(q,0,M,dx,k)),', ',str(av), '\n'])

    omegab=math.pi/9 ;lista=ACC(Nb,Nd,M,dx,k,omegab,omegad)
    q=lista[0]
    av=lista[1][0]
    if numpy.linalg.norm(q)!=0:

```

```

        datafile2.writelines([str('% .1f' % k),'',str('% .2f' % q[0]),
        '',str('% .2f' % q[1]),'',str('% .2f' % q[2]),
        '',str('% .2f' % q[3]),'',str(b(q,0,M,dx,k)),
        '',str(D(q,0,M,dx,k)),'',str(av), '\n'])

omegab=math.pi/6 ;lista=ACC(Nb,Nd,M,dx,k,omegab,omegad)
q=lista[0]
av=lista[1][0]
if numpy.linalg.norm(q)!=0:
    datafile3.writelines([str('% .1f' % k),'',str('% .2f' % q[0]),
    '',str('% .2f' % q[1]),'',str('% .2f' % q[2]),
    '',str('% .2f' % q[3]),'',str(b(q,0,M,dx,k)),
    '',str(D(q,0,M,dx,k)),'',str(av), '\n'])

omegab=0 ;lista=ACC(Nb,Nd,M,dx,k,omegab,omegad)
q=lista[0]
av=lista[1][0]
if numpy.linalg.norm(q)!=0:
    datafile0.writelines([str('% .1f' % k),'',str('% .2f' % q[0]),
    '',str('% .2f' % q[1]),'',str('% .2f' % q[2]),
    '',str('% .2f' % q[3]),'',str(b(q,0,M,dx,k)),
    '',str(D(q,0,M,dx,k)),'',str(av), '\n'])
k=k+0.003

datafile0.close()
datafile1.close()
datafile2.close()
datafile3.close()

```