

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

Alexandre Andreas Prieto Sauerwein

MODELOS VIÁVEIS DE MATÉRIA ESCURA EM FÍSICA DE  
PARTÍCULAS

PORTO ALEGRE  
2018

ALEXANDRE ANDREAS PRIETO SAUERWEIN

MODELOS VIÁVEIS DE MATÉRIA ESCURA EM FÍSICA  
DE PARTÍCULAS

**Trabalho de Conclusão de Curso sub-  
metido à Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul, como requisito necessá-  
rio para obtenção do grau de Bacharel  
em Física**

Orientador: Magno V. T. Machado

Porto Alegre, dezembro de 2018

# Resumo

Atualmente, há uma quantidade contundente de diversas evidências experimentais de que o Universo contém muito mais matéria do que aquela que pode ser detectada via interação eletromagnética: denomina-se criativamente matéria escura essa exótica forma de matéria que não interage com luz.

A identidade de matéria escura é um dos principais problemas abertos em Física e sua relevância se justifica devido a importantes implicações em diferentes ramos da Física. Por exemplo, em Cosmologia, matéria escura desempenha um papel fundamental na estrutura e evolução da formação do Universo. Do ponto de vista de Física de Partículas, a investigação de matéria escura pode fornecer evidência empírica para a descoberta de um novo tipo de partícula.

É nesse espírito que este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de entender como o estudo de matéria escura relaciona diferentes áreas da Física. Em especial, buscou-se entender o que constitui um modelo viável em Física de Partículas para matéria escura e como ele se relaciona com evidências experimentais cosmológicas.

Particularmente, foi estudado com mais detalhes uma das partículas candidatas favoritas a matéria escura, os WIMPs, partículas massivas com interação fraca que inicialmente se encontravam em equilíbrio térmico com o plasma primordial, mas depois passaram por um processo de *freeze out*. Para isso, focamos em um modelo em Física de Partículas que fornece um candidato natural a WIMP, o MSSM, uma extensão supersimétrica do Modelo Padrão. Graças à implementação do código `micrOmegas`, foi possível obter, numericamente, observáveis de matéria escura a partir da escolha do modelo e comparar com evidências observacionais de experimentos como o WMAP, PLANCK, entre outros.

**Palavras-chave:** Matéria Escura, WIMP, MSSM, Equação de Boltzmann



# Abstract

Nowadays there is an overwhelming amount of experimental evidence that there is much more matter in the Universe than what can be detected via electromagnetic interactions: we call this exotic form of matter that does not interact with light dark matter.

The identity of dark matter is still one of the main open issues in modern Physics and its relevance is due to its profound implications in several branches of Physics. For instance, in Cosmology dark matter plays a fundamental role in structure formation and in the evolution of the Universe. From a Particle Physics perspective, the study of dark matter may lead to experimental evidence of a new type of particle.

To this extent, this work has been developed with the main goal of understanding how the study of dark matter connects different branches of Physics. Specifically, we sought to comprehend what constitutes a viable model in Particle Physics for a dark matter description and how it relates to cosmological empirical evidences.

In particular, one of the main dark matter particle candidates has been studied in more detail: the WIMPs, weakly interactive massive particles that were once in thermal equilibrium with the primordial plasma, but have *frozen out* at some point. In order to achieve that, we focused on a Particle Physics model that gives a natural candidate for a WIMP, the MSSM, a supersymmetric extension of the Standard Model. Thanks to the software `micrOmegas`, it was possible to obtain numerically dark matter observables from the specification of our model and compare them with empirical evidence of experiments such as the WMAP and PLANCK surveys.

**Keywords:** Dark Matter, WIMP, MSSM, Boltzmann Equation.



# Lista de abreviaturas e siglas

## Lista de Siglas

- CMB: Cosmic Microwave Background;
- DM: Dark Matter;
- GUT: Grand Unified Theory;
- LSP: Lightest Supersymmetric Particle;
- MSSM: Minimal Supersymmetric Standard Model;
- mSUGRA: minimal Supergravity;
- RG: Relatividade Geral;
- SM: Standard Model;
- SUSY: Supersymmetry;
- WIMP: Weakly Interacting Massive Particle.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>1.1</b>	<b>Evidências Experimentais de Matéria Escura</b>	<b>11</b>
1.1.1	Escala de Aglomerados de Galáxias	11
1.1.2	Escala de Galáxias	12
1.1.3	Escala Cosmológica	14
<b>1.2</b>	<b>Quantidades cosmológicas de interesse</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>EMBASAMENTO TEÓRICO</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Relatividade Geral e Equação de Friedmann</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Equação de Boltzmann e Densidade de Relíquia</b>	<b>23</b>
2.2.1	Equação de Boltzmann para Aniquilação	23
2.2.2	Cálculo da Densidade de Relíquia	26
<b>3</b>	<b>MODELOS VIÁVEIS EM FÍSICA DE PARTÍCULAS PARA MATÉRIA ESCURA</b>	<b>31</b>
<b>3.1</b>	<b>Propriedades e Candidatos de Matéria Escura</b>	<b>31</b>
<b>3.2</b>	<b>WIMPs e Modelos Supersimétricos</b>	<b>33</b>
3.2.1	Restrições na densidade e massa de WIMPs	33
3.2.2	Modelos Supersimétricos	34
3.2.2.1	MSSM	36
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>41</b>
<b>4.1</b>	<b>Descrição geral do código <math>\text{micr}\Omega_{\text{gas}}</math></b>	<b>41</b>
<b>4.2</b>	<b>Cálculo numérico da densidade de relíquia</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>47</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>49</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>51</b>
	<b>APÊNDICE A – ETAPAS INTERMEDIÁRIAS DA DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE FRIEDMANN</b>	<b>53</b>
<b>A.1</b>	<b>Cálculo dos Símbolos de Christoffel</b>	<b>53</b>
<b>A.2</b>	<b>Cálculo do Tensor e Escalar de Ricci</b>	<b>57</b>



# 1 Introdução

Matéria escura é o nome que se dá para a matéria não-luminosa que compõe o Universo, isto é, matéria que não pode ser detectada via interação eletromagnética, mas cuja interação gravitacional com a matéria luminosa (ou usualmente chamada de bariônica) é perceptível. De fato, ao longo do último século, muitos cientistas se depararam com sistemas de diferentes escalas astrofísicas com uma extraordinária incompatibilidade entre medidas indiretas da massa total do sistema utilizando argumentos de gravitação e medidas diretas, através de estimativas de matéria luminosa (galáxias, estrelas, gás interestelar, neutrinos, etc.). A essas discrepâncias se atribui justamente a existência de uma outra forma de matéria mais exótica que não pode ser detectada via interação eletromagnética - a matéria escura.

Nesse sentido, o estudo de matéria escura estabelece uma conexão inédita entre Física de partículas, Cosmologia e Astrofísica que nos permite, por um lado, investigar a natureza e propriedades de uma nova partícula, mas também pelo outro entender como a sua existência impacta na estrutura e formação do Universo ao longo do tempo.

É nesse contexto que este trabalho se propôs a investigar exatamente como se dá o vínculo entre propriedades de um potencial candidato a matéria escura a partir de um modelo em Física de Partículas e dados observacionais cosmológicos. Assim, neste primeiro capítulo discutimos as principais evidências empíricas de matéria escura; após, estabelecemos a base teórica necessária para este vínculo no segundo capítulo. Na sequência do Capítulo 3, alguns modelos viáveis em Física de Partículas para potenciais candidatos a matéria escura são elencados para, por fim, no Capítulo 4 analisarmos um modelo específico - o *Minimal Supersymmetric Standard Model* (MSSM) - e estudarmos as propriedades do candidato, quando confrontadas com dados observacionais cosmológicos.

## 1.1 Evidências Experimentais de Matéria Escura

Resultados recentes do experimento Planck [Arghanim et al. 2018] indicam uma abundância de matéria escura no mínimo cinco vezes maior que a de matéria bariônica. Vamos analisar como a existência de matéria escura se manifesta em diferentes escalas astrofísicas.

### 1.1.1 Escala de Aglomerados de Galáxias

A maioria das galáxias não se distribui aleatoriamente no espaço; na verdade, devido à atração gravitacional, elas tendem a se aglutinar e formar estruturas chamadas

aglomerados de galáxias. Fritz Zwicky, ao estudar as dispersões de velocidades de galáxias do aglomerado de Coma, foi quem propôs a existência de matéria escura pela primeira vez em 1933.

Um dos métodos utilizado por Zwicky e colaboradores para estimar a massa do aglomerado consiste na utilização do Teorema do Virial, que relaciona as médias temporais das energias cinética  $T$  e potencial  $U$  de um sistema estável cujos constituintes interagem gravitacionalmente:

$$2 \langle T \rangle = - \langle U \rangle . \quad (1.1)$$

Assumindo que o aglomerado de Coma era um sistema estável, ao medir as velocidades das galáxias, Zwicky conseguiu calcular a energia cinética média e, com o Teorema do Virial, a energia potencial gravitacional média do sistema, podendo inferir, assim, a densidade de massa do aglomerado.

Em seu artigo [Zwicky 1937], foi estimado que o aglomerado de Coma possui um raio de  $2 \times 10^6$  anos-luz, contendo cerca de 1000 galáxias. Observando uma dispersão de velocidade de 700 km/s, ele obteve uma massa para o aglomerado equivalente a  $4.5 \times 10^{13}$  massas solares. Atualmente, levando em conta que o aglomerado também possui um halo de gás quente (fato desconhecido à época de Zwicky), verifica-se que a quantidade de matéria luminosa é cerca de seis vezes menor do valor necessário para explicar este valor tão alto dispersão de velocidades das galáxias [Gorenstein e Tucker 2014].

Essa clara discrepância entre a medida da massa total do aglomerado e a sua estimativa levando em conta apenas a matéria luminosa sugere que o aglomerado não é composto só de galáxias e gás, mas também de outras estruturas invisíveis que Zwicky batizou de matéria escura.

### 1.1.2 Escala de Galáxias

Graças ao trabalho pioneiro desenvolvido por Vera Rubin, a presença de matéria escura também pode ser observada na escala galáctica, principalmente nas curvas de rotação de estrelas de galáxias espirais. Da mecânica newtoniana, a velocidade  $v$  de rotação de uma estrela num disco a uma distância  $R$  do centro galáctico pode ser expressa como

$$v(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}, \quad M(R) \equiv 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr, \quad (1.2)$$

onde  $G$  é a constante da gravitação universal e a definição de  $M(R)$  é válida para densidades de massa,  $\rho(r)$ , esféricamente simétricas.

Como nas galáxias espirais a matéria luminosa se concentra principalmente no disco galáctico, era esperado que, para estrelas mais periféricas, as velocidades de rotação

$v$  fossem inversamente proporcionais a  $R^{\frac{1}{2}}$ , uma vez para raios cada vez maiores  $M(R)$  se aproxima de um valor constante  $M_{\text{vis}}$ , a massa total de matéria visível da galáxia.

Na Figura 1, podemos rapidamente notar que esse perfil de velocidades não é observado nas estrelas periféricas das galáxias espirais.

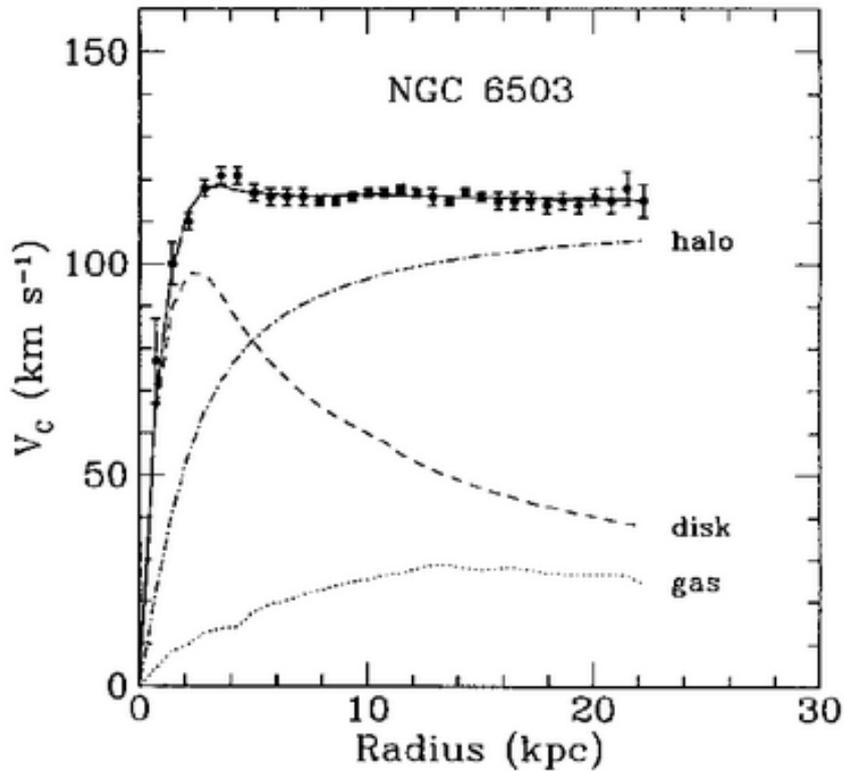


Figura 1 – Curva de rotação de estrelas da galáxia espiral NGC6503 e as relativas contribuições do disco visível, gás interestelar e halo de matéria escura, respectivamente [Jungman, Kamionkowski e Griest 1996].

Pelo contrário, para raios maiores, as velocidades das estrelas se mantêm praticamente constantes. Isso só pode ser explicado por uma presença considerável de matéria nos halos das galáxias espirais que não pode ser detectada em qualquer faixa do espectro eletromagnético. Trata-se de outra evidência importante apontando para a existência de matéria escura.

Para a detecção de matéria escura em galáxias elípticas ou irregulares, é preciso de outro método mais conveniente do que a curva de rotação das estrelas constituintes. Uma forma de mensurar a massa desses objetos é fazer uso de lentes gravitacionais, uma interessante consequência de que grandes concentrações de matéria conseguem distorcer a trajetória da luz, um dos resultados fundamentais da Relatividade Geral.

### 1.1.3 Escala Cosmológica

A radiação cósmica de fundo, em inglês *Cosmic Microwave Background* (CMB), é a radiação eletromagnética mais primordial do Universo, detectável em todas as direções do espaço. Quando o Universo era mais jovem e quente, ele era constituído basicamente de um plasma primordial ionizado. À medida que foi esfriando, prótons e elétrons se combinaram, formando os primeiros átomos de hidrogênio neutros numa época que cosmólogos chamam de Recombinação. Ao contrário das partículas mais primordiais descombinadas, esses novos átomos neutros não são mais capazes de absorver a radiação térmica: a partir desse instante, o Universo se torna transparente para radiação e os fótons passam a se propagar livremente, dando origem a CMB.

A radiação cósmica de fundo é uma das principais evidências a favor do Big Bang e medidas precisas são indispensáveis, já que todo modelo cosmológico deve ser capaz de descrevê-la. A CMB é uma radiação uniforme de corpo negro, cujas anisotropias nas temperaturas estão diretamente relacionadas com inhomogeneidades na distribuição de massa durante a era da Inflação, responsáveis pela formação de grandes estruturas do Universo, como aglomerados, galáxias, etc. Isto é, o estudo das anisotropias de temperatura nos permite ter informação de quanta matéria bariônica ou não há no Universo.

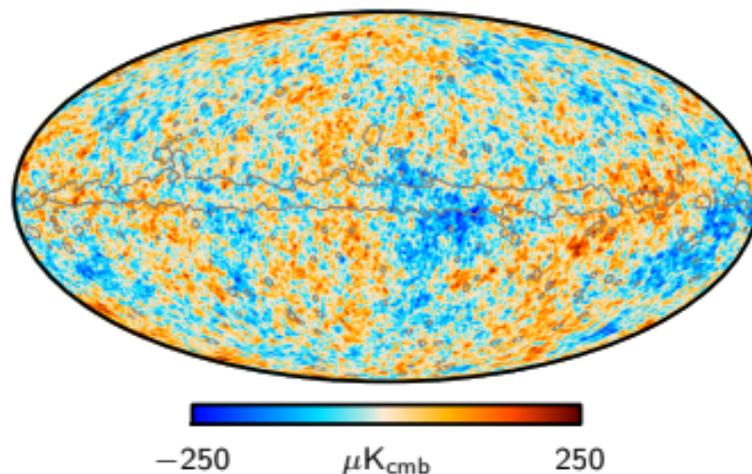


Figura 2 – Mapa de temperatura do CMB, obtido pelo satélite Planck em 2018 [Arghanim et al. 2018].

Dados de 2018 do experimento Planck indicam uma abundância de matéria escura mais de cinco vezes maior que a de matéria bariônica.

## 1.2 Quantidades cosmológicas de interesse

É fato bem conhecido que vivemos em um Universo em expansão, ou seja, no passado, as galáxias se encontravam mais próximas uma das outras. Uma forma conveniente de

descrever esse fenômeno é introduzir o fator de escala  $a$ , que relaciona distâncias físicas entre objetos em instantes distintos de tempo:

$$d(t) = a(t)d_0. \quad (1.3)$$

Na Equação 1.3,  $d(t)$  é a distância própria entre dois pontos no tempo  $t$  e  $d_0$  é a distância no tempo atual (em cosmologia, subíndice zero geralmente identifica valores de grandezas para o tempo presente). De 1.3, nota-se que  $a(t_0) = 1$ , por definição.

Trabalhar com o fator de escala em Cosmologia pode ser de fato bem útil, uma vez que ele possui uma dependência direta com a idade do Universo, como podemos ver na Figura 3. Isso nos permite fazer mudanças de variáveis que podem ser oportunas em diversas análises.

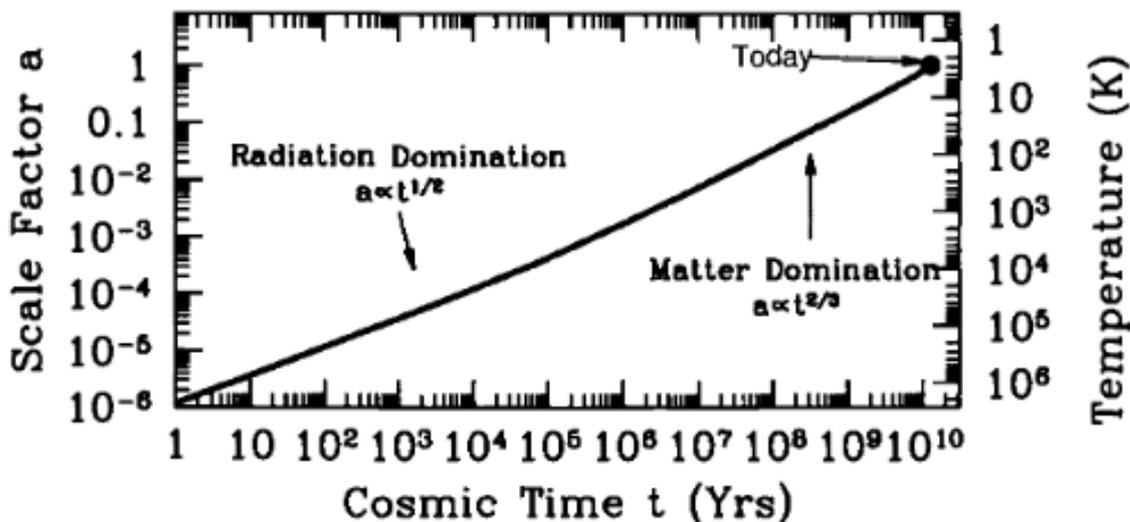


Figura 3 – Evolução temporal do fator de escala  $a(t)$  [Dodelson 2003].

Uma outra quantidade cosmológica de interesse é o parâmetro de Hubble  $H(t)$ , definido como:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (1.4)$$

onde  $\dot{a}(t)$  denota a derivada temporal do fator de escala. Derivando a Equação 1.3 em relação ao tempo implica que

$$\dot{d}(t) = d_0 \dot{a}(t).$$

Substituindo  $d_0 = d(t)/a(t)$  e a definição 1.4 na expressão acima, obtemos:

$$\dot{d}(t) = \frac{d(t)\dot{a}(t)}{a(t)} \rightarrow \dot{d}(t) = H(t)d(t)$$

e acabamos recaindo na Lei de Hubble-Lemaitre: as galáxias se afastam de nós com velocidade proporcional às distâncias em que elas se encontram, como se pode notar na Figura 4.

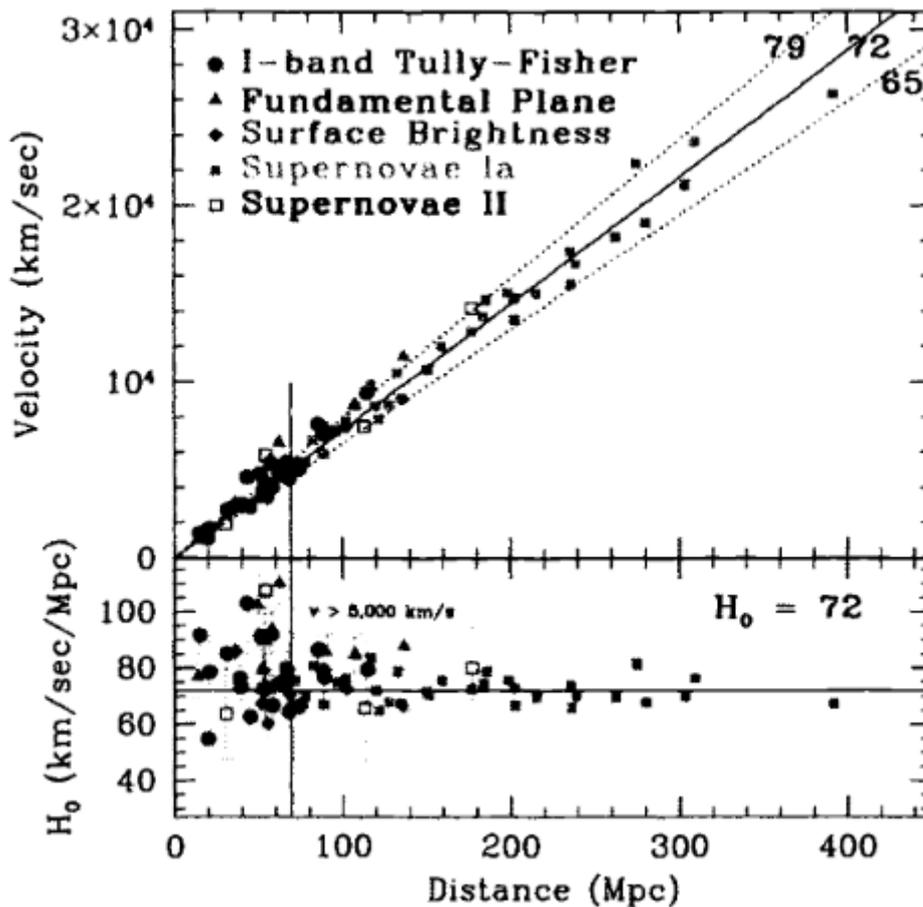


Figura 4 – Lei de Hubble-Lemaitre: velocidades com que galáxias se afastam de nós em função da distância em que elas se encontram [Dodelson 2003].

Um fóton em equilíbrio com um plasma a temperatura  $T$  possui energia igual a  $k_B T$  e comprimento de onda  $\frac{hc}{k_B T}$ . Em tempos passados, onde o fator de escala era menor, o comprimento de onda do fóton também era menor. Como a energia do fóton é inversamente proporcional ao seu comprimento de onda, a energia hoje seria maior com um fator  $1/a$ . Estendendo esse argumento ao banho térmico de fótons implica que a temperatura  $T$  pode ser expressa como uma função do tempo:

$$T(t) = \frac{T_0}{a(t)}. \quad (1.5)$$

A Equação 1.5 nos diz que o universo primordial de fato era mais quente, além de promover a temperatura do Universo como uma possível variável temporal da mesma

forma que o fator de escala  $a$ . A Equação de Boltzmann, por exemplo, é comumente integrada ao longo da temperatura, ao invés do tempo, como o faremos no capítulo 2.

Enfim, agora o próximo passo é estabelecer a conexão entre um observável cosmológico - a densidade de relíquia - e propriedades intrínsecas à partícula candidata a matéria escura, dependendo do modelo adotado. Para isso, no Capítulo 2, primeiramente derivaremos a Equação de Friedmann para, num segundo momento, discutirmos o formalismo da Equação de Boltzmann e estabelecer, enfim, o vínculo entre Cosmologia e Física de Partículas.



## 2 Embasamento Teórico

Neste capítulo, vamos estabelecer a conexão para um candidato a matéria escura entre um observável cosmológico (a densidade de relíquia da espécie) e uma de suas propriedades intrínsecas (a seção de choque de aniquilação média), determinada pelo modelo em Física de Partículas adotado para a escolha do candidato. Para tanto, precisamos antes desenvolver duas ferramentas fundamentais para este cálculo: Relatividade Geral (RG) e Mecânica Estatística, esta última via Equação de Boltzmann.

Uma observação importante é que as unidades escolhidas neste trabalho foram tais que  $c = \hbar = k_B = 1$ , uma prática comum em problemas de Cosmologia.

### 2.1 Relatividade Geral e Equação de Friedmann

Para a descrição do Universo em escala astrofísica, é natural que trabalhemos com Relatividade Geral. Um dos pilares desta teoria é a invariância frente à mudança de coordenadas para qualquer referencial do intervalo  $ds^2$ , que é expresso como:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

Na equação 2.1, o índice zero se refere à coordenada temporal ( $dx^0 = dt$ ), enquanto os demais índices correspondem às três coordenadas espaciais. Além disso,  $g_{\mu\nu}$  é um tensor de ordem 2 que representa a métrica do espaço, enquanto que a definição diz respeito à convenção de Einstein para suprimir a escrita explícita do símbolo de somatório.

A grosso modo, a métrica transforma distâncias de coordenadas em distâncias físicas. Por exemplo, a métrica para um sistema de coordenadas cartesiano bidimensional é trivial: do teorema de Pitágoras, sabemos que a distância ao quadrado entre dois pontos separados por  $dx$  e  $dy$  é  $(dx^2 + dy^2)$ . Logo, a métrica  $g_{\mu\nu}$  é simplesmente a matriz identidade  $I_2$ . Porém, para coordenadas polares,  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ , de modo que  $g_{\mu\nu}$  também é diagonal, mas com  $g_{11} = 1$  e  $g_{22} = r^2$ .

A grande vantagem da métrica é que ela incorpora a gravidade: ao invés de pensarmos na gravidade como uma força externa que gera um campo gravitacional a que partículas movendo no espaço estão submetidas, podemos incluir a gravidade na métrica e tratarmos as partículas movendo-se livremente num espaço-tempo distorcido, geralmente não-Euclidiano.

Enfim, descrever a gravitação com a métrica é apenas um dos aspectos da RG. Por

outro lado, a métrica do espaço-tempo ainda se relaciona com o conteúdo de energia e matéria do Universo, via as Equações de Campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde  $G$  é a constante da gravitação de Newton,  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci, o escalar de Ricci  $\mathcal{R}$  é a contração do tensor de Ricci ( $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ), e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momentum.

O lado direito das equações de Einstein é uma função da energia, enquanto que o lado esquerdo é uma função da métrica. De fato, o tensor de Ricci pode ser convenientemente expresso em termos dos símbolos de Christoffel:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}, \quad (2.3)$$

onde as vírgulas são uma notação para indicar uma derivada com respeito à coordenada. Por exemplo,  $\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})$ . Já os símbolos de Christoffel são completamente determinados pela métrica  $g_{\mu\nu}$ :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (2.4)$$

Para o caso mais simples de um fluido perfeito isotrópico sem perturbações, o tensor de energia-momentum  $T_{\mu\nu}$  pode ser escrito como:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

no qual  $\rho$  é a densidade de energia e  $\mathcal{P}$  é a pressão do fluido.

Finalmente, a métrica que descreve um Universo em expansão com curvatura  $k$  é também conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robinson-Walker (FLRW). Em coordenadas esféricas, ela é expressa como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2a^2(t)\sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Agora que a métrica já foi especificada, podemos calcular os símbolos de Christoffel, a partir da equação 2.4. Pode-se mostrar<sup>1</sup> que os símbolos de Christoffel não-nulos são:

<sup>1</sup> Ver Apêndice A

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{22}^0 = r^2 a\dot{a}, \quad \Gamma_{22}^0 = r^2 a\dot{a} \sin^2(\theta)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2), \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2(\theta)(1-kr^2), \quad \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Gamma_{33}^2 = \sin(\theta) \cos(\theta), \quad \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot(\theta)$$

Uma vez computados os símbolos de Christoffel, podemos prosseguir calculando as componentes do tensor de Ricci a partir da equação 2.3, resultando em<sup>2</sup>

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{3\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Com o tensor de Ricci obtido, o escalar de Ricci  $\mathcal{R}$  é facilmente calculado, contraindo-se  $R_{\mu\nu}$  com a métrica:

$$\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (2.8)$$

Dessa forma, computamos todas as quantidades necessárias para prosseguirmos o cálculo e analisarmos uma das componentes das equações de Einstein. Por exemplo, tomando a componente temporal-temporal da Equação 2.2,

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R} = 8\pi GT_{00}.$$

Sabe-se quanto vale  $R_{00}$  a partir da Equação 2.7, enquanto que  $\mathcal{R}$  é dado por 2.8 e  $T_{00} = -\rho$ . Portanto,

$$-\frac{3\ddot{a}}{a} + 3 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) = 8\pi G\rho \rightarrow 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3k}{a^2} = 8\pi G\rho.$$

Usando a definição do parâmetro de Hubble, recaímos na seguinte expressão:

$$3H^2(t) + \frac{3k}{a^2} = 8\pi G\rho. \quad (2.9)$$

<sup>2</sup> Ver Apêndice A

Considerar nosso Universo plano, isto é, com curvatura zero, é uma boa aproximação; resultados do Planck sugerem isso. O valor da densidade total de energia e matéria  $\rho$  para o qual a curvatura  $k$  é zero denomina-se densidade crítica  $\rho_{\text{cr}}$ , por definição. Impondo  $k = 0$  na equação 2.9, obtemos:

$$\rho_{\text{cr}} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.10)$$

Dividindo ambos os lados da equação 2.9 por  $H_0^2$ , derivamos finalmente a **Equação de Friedmann**:

$$\boxed{\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho = \frac{\rho}{\rho_{\text{cr}}}.} \quad (2.11)$$

Com a Equação de Friedmann em mãos, temos informação acerca de como a evolução temporal do fator de escala depende da densidade de energia total contida no Universo, incluindo as contribuições de todas as espécies, entre elas matéria bariônica, matéria escura, radiação e até energia escura.

Aliás, ao dividirmos a densidade de energia de uma espécie  $i$  pela densidade crítica, conseguimos expressar adimensionalmente a abundância desta espécie, o que certamente é bem conveniente. Assim, define-se:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{\text{cr}}}. \quad (2.12)$$

Da Equação 2.10, nota-se que a definição de  $\rho_{\text{cr}}$  contém o valor atual do parâmetro de Hubble  $H_0$ , cujas medidas costumam ser parametrizadas da seguinte forma:

$$H_0 = 100h \text{ km/s/Mpc} = \frac{h}{0.98 \cdot 10^{10} \text{ anos}}.$$

Dessa forma, é comum também expressar as abundâncias como  $\Omega h^2$ , a fim de se separar a incerteza associada à medida da taxa de Hubble com a da medida da abundância propriamente dita.

Dados recentes do satélite Planck [Arghanim et al. 2018] indicam as seguintes abundâncias de matéria bariônica  $\Omega_b$  e de matéria escura  $\Omega_{\text{dm}}$ :

$$\boxed{\Omega_b h^2 = 0.0244 \pm 0.0001, \quad \Omega_{\text{dm}} h^2 = 0.120 \pm 0.001.} \quad (2.13)$$

Os dados do Planck de fato confirmam uma presença importante de matéria escura no Universo. Note que a abundância de matéria escura é praticamente cinco vezes maior do que a de matéria bariônica.

## 2.2 Equação de Boltzmann e Densidade de Relíquia

Para estabelecermos a conexão entre propriedades intrínsecas de um dado candidato à matéria escura e a sua abundância observada no tempo atual, precisamos lidar com sistemas fora do equilíbrio. Esse estudo é feito com o formalismo da Equação de Boltzmann, de modo que essa seção é dedicada totalmente a ela: na primeira parte a equação é derivada heurísticamente, para na segunda subseção finalmente obtermos uma expressão para a abundância de uma partícula candidata à matéria escura.

### 2.2.1 Equação de Boltzmann para Aniquilação

O universo primordial era quente e denso, de modo que interações entre partículas ocorriam com uma frequência muito maior do que atualmente. Essas múltiplas interações foram responsáveis por manter os constituintes do Universo em equilíbrio na maioria dos casos. Entretanto, à medida que o Universo se esfria e se expande, muitas dessas reações não conseguem manter mais o equilíbrio, e a época em que isso ocorre é de interesse fundamental para os cosmólogos.

De fato, fenômenos fora do equilíbrio desempenham um papel importante na formação de elementos leves durante a nucleossíntese do Big Bang, na recombinação de elétrons e prótons em Hidrogênio neutro quando a temperatura era da ordem de 1/4 eV e, supostamente, na produção de matéria escura no Universo primordial. Naturalmente, dentre os três processos citados, neste trabalho interessa-nos principalmente o último. Ainda assim, é interessante delinear argumentos e princípios mais gerais por trás da Equação de Boltzmann antes de atacarmos o problema específico da produção de matéria escura.

A equação de Boltzmann basicamente estabelece que a taxa com que a abundância de determinada partícula varia com o tempo é igual à diferença entre as taxas com que ela é produzida e com que ela é eliminada. Por exemplo, suponha que estamos interessados na densidade de número  $n_1$  de uma partícula 1, cuja abundância é afetada somente por um processo no qual ela se aniquila com uma partícula 2, produzindo outras duas partículas, que vamos chamar de 3 e 4. Considerando que o processo inverso pode ocorrer, isto é, as partículas 3 e 4 se aniquilarem em 1 e 2, temos esquematicamente a reação  $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ . A equação de Boltzmann para esse sistema, em um Universo em expansão, é [Dodelson 2003]:

$$a^{-3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \\ \times (2\pi)^4 \delta^3(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2 \\ \times [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)].$$

O lado esquerdo da equação de Boltzmann inclui a expansão do Universo por meio do fator de escala  $a$ : na ausência de interações, a densidade de número não é constante, uma vez que o volume cresce com  $a^3$ , portanto, é a quantidade  $n_1 a^3$  que é conservada.

Já o lado direito da equação descreve as interações. Analisando termo a termo, começando de baixo para cima, notamos que a produção da partícula 1 é diretamente proporcional aos números de ocupação das espécies 3 e 4,  $f_3$  e  $f_4$ , respectivamente. Da mesma forma, o termo de destruição da partícula 1 é diretamente proporcional a  $f_1$  e  $f_2$ , o que é bem razoável. Afinal, quanto mais houver partículas 3 e 4, maior será a probabilidade de ocorrer uma interação entre essas espécies e eventualmente se criar um par 1 + 2. Analogamente, quanto mais partículas 1 e 2 existirem, maior a probabilidade de elas interagirem e produzirem um par 3 + 4.

Os termos  $1 \pm f$ , cujos sinais são positivos para bósons e negativos para férmions, contemplam o princípio de exclusão de Pauli. Se uma partícula 1 já existe, uma reação produzindo mais dessa espécie é mais provável de ocorrer se a partícula for um bóson do que um férmion, já que, ao contrário de férmions, não existe nenhuma restrição para ocupações de estados para bósons.

Além disso, as deltas de Dirac garantem a conservação de energia e momentum; os fatores  $2\pi$  acabam surgindo quando passamos da delta discreta de Kronecker para a versão contínua de Dirac. Energia e momentum estão relacionados por meio da expressão  $E^2 = p^2 + m^2$ .

A amplitude  $\mathcal{M}$  é determinada pela física das partículas em questão. Por exemplo, para o espalhamento Compton de fótons em elétrons,  $\mathcal{M}$  seria proporcional a  $\alpha$ , a constante de estrutura fina.

Por fim, as integrais são feitas em todos os momenta para computarmos o número total de interações. Os fatores  $(2\pi)^3$  representam o volume unitário do espaço de fase (lembre-se que estamos usando  $\hbar = 1$ ). Os fatores  $2E$  acabam surgindo da integração sobre as energias. A princípio, as integrações sobre o espaço de fase deveriam ser quadridimensionais, mas a relação de energia-momentum da Relatividade restringe o espaço na esfera tridimensional fixada por  $E^2 = p^2 + m^2$ . De fato,

$$\int d^3p \int_0^\infty dE \delta(E^2 - p^2 - m^2) = \int d^3p \int_0^\infty dE \frac{\delta(E - \sqrt{p^2 + m^2})}{2E},$$

integrando-se sobre a energia com a função delta gera o fator  $2E$ .

A equação de Boltzmann nesta forma é uma equação íntegro-diferencial sobre as distribuições no espaço de fase. A princípio, deveríamos ainda implementar equações para as demais espécies, o que acaba sendo um obstáculo bem enfadonho para fins de cálculos. Uma primeira e importante consideração para simplificarmos essa dificuldade é que processos

de espalhamento tipicamente impõem equilíbrio cinético. Isto é, o espalhamento ocorre tão rapidamente que as distribuições das várias espécies obedecem às conhecidas estatísticas de Bose-Einstein ou Fermi-Dirac. Com isso, toda incerteza acerca da distribuição é condensada numa única função, o potencial químico  $\mu$ , e, como será demonstrado mais adiante, a complexa forma da equação de Boltzmann acaba recaindo numa equação diferencial ordinária.

Estaremos interessados em sistemas com temperaturas menores do que  $E - \mu$ , de modo que nesse limite as exponenciais das distribuições de Bose-Einstein ou Fermi-Dirac são grandes e podemos desprezar o termo  $\pm 1$  do denominador. Com isso, conseguimos outra boa aproximação e podemos ignorar as complicações da estatística quântica.

$$f = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \xrightarrow{(E-\mu) \gg T} e^{\mu/T} e^{-E/T}. \quad (2.14)$$

Sob essas aproximações, o termo da última linha da Equação de Boltzmann se torna

$$[f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)] \rightarrow e^{-(E_1+E_2)/T} [e^{(\mu_3+\mu_4)/T} - e^{(\mu_1+\mu_2)/T}],$$

onde a conservação da energia  $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$  foi usada. Queremos resolver a equação de Boltzmann para a densidade de número  $n_i$ , ao invés de para o potencial químico  $\mu$ . Essas duas grandezas se relacionam via [Dodelson 2003]

$$n_i = g_i e^{\mu_i/T} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-E_i/T}, \quad (2.15)$$

onde  $g_i$  é a degenerescência da espécie. É útil definir a densidade de número no equilíbrio ( $\mu_i = 0$ ) como:

$$n_i^{(0)} \equiv g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-E_i/T} = \begin{cases} g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m_i/T}, & \text{se } m_i \gg T. \\ g_i \frac{T^3}{\pi^2}, & \text{se } m_i \ll T. \end{cases} \quad (2.16)$$

Com essa definição,  $e^{\mu_i/T}$  pode ser reescrito como  $n_i/n_i^{(0)}$  e o termo da última linha da equação de Boltzmann se torna:

$$e^{-(E_1+E_2)/T} [e^{(\mu_3+\mu_4)/T} - e^{(\mu_1+\mu_2)/T}] = e^{-(E_1+E_2)/T} \left[ \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right].$$

Definindo agora a seção de choque de aniquilação térmica média,

$$\langle \sigma v \rangle \equiv \frac{1}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} e^{-(E_1+E_2)/T} \\ \times (2\pi)^4 \delta^3(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2,$$

a equação de Boltzmann se torna:

$$\boxed{a^{-3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left[ \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right]}. \quad (2.17)$$

Realmente, acabamos recaindo em uma equação diferencial ordinária para a densidade de número, muito mais simples do que a forma da equação de Boltzmann sem as aproximações utilizadas.

## 2.2.2 Cálculo da Densidade de Relíquia

Aplicaremos agora a equação 2.17 para o caso de uma partícula  $X$  candidata a matéria escura. Esta partícula encontrava-se em equilíbrio com o plasma primordial a altas temperaturas, mas, à medida que o Universo se esfriou e se expandiu, ela deixou o equilíbrio numa época conhecida como *freeze out*. Mais tecnicamente, *freez out* se refere à incapacidade das aniquilações manterem a partícula em equilíbrio. De fato, se o equilíbrio se mantivesse indefinidamente, a abundância da partícula seria suprimida por um fator  $e^{-m/T}$  e não haveria mais partículas de matéria escura hoje em dia, o que não é observado.

Assim, o objetivo é determinar justamente a época de *freeze-out* para matéria escura e a sua abundância a partir deste momento, também conhecida como densidade de relíquia. Então, suponhamos que duas partículas de matéria escura  $X$  aniquilem-se em duas partículas leves (praticamente sem massa)  $l$  do Modelo Padrão. Assumimos que as partículas leves estão bem acopladas ao plasma, de modo que estão em total equilíbrio (cinético e químico), com  $n_l = n_l^{(0)}$ . A partir dessas suposições, a equação 2.17 torna-se:

$$a^{-3} \frac{d(n_X a^3)}{dt} = \langle \sigma v \rangle \left[ \left( n_X^{(0)} \right)^2 - n_X^2 \right]. \quad (2.18)$$

Como a temperatura escala com  $a^{-1}$ , podemos multiplicar e dividir o termo  $n_X a^3$  entre parênteses e passar  $(aT^3)$  para fora da derivada. Logo, a equação 2.18 pode ser reescrita como

$$T^3 \frac{d(n_X/T^3)}{dt} = \langle \sigma v \rangle \left[ \left( n_X^{(0)} \right)^2 - n_X^2 \right]. \quad (2.19)$$

O próximo passo é definir a variável  $Y$  como

$$Y \equiv \frac{n_X}{T^3}. \quad (2.20)$$

Dividindo ambos os lados da equação 2.19 por  $T^3$  e usando a definição 2.20, chegamos na seguinte equação diferencial para  $Y$ :

$$\frac{dY}{dt} = T^3 \langle \sigma v \rangle (Y_{\text{EQ}}^2 - Y^2), \quad (2.21)$$

onde  $Y_{\text{EQ}} \equiv n_X^{(0)}/T^3$ , naturalmente.

Vamos agora introduzir uma nova variável temporal  $x$ :

$$x \equiv \frac{m}{T}, \quad (2.22)$$

onde  $m$  corresponde à massa da partícula de matéria escura, que acaba escalando a temperatura na região de interesse. Altas temperaturas correspondem a  $x \ll 1$ . Note que, para temperaturas mais baixas, ou  $x$  maiores, a abundância de equilíbrio  $Y_{\text{EQ}}$  fica suprimida por uma exponencial  $e^{-x}$ , como se pode ver da equação 2.16. Ou seja, as partículas  $X$  acabam ficando tão rarefeitas por causa dessa supressão que elas não são mais capazes de se encontrar, interagir e manter o equilíbrio. É nesse instante que começa a se dar o processo de *freeze-out*.

Para a mudança de variável de  $t$  para  $x$ , precisamos do Jacobiano  $dx/dt = Hx$ . Como a produção de matéria escura tipicamente ocorre na era da radiação onde a densidade de energia escala com  $T^4$ ,  $H = H(m)/x^2$  [Dodelson 2003].

Então, após a mudança de variável, a equação 2.21 é reescrita como:

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2} (Y_{\text{EQ}}^2 - Y^2), \quad (2.23)$$

onde se usou a definição

$$\lambda \equiv \frac{m^3 \langle \sigma v \rangle}{H(m)}. \quad (2.24)$$

A equação 2.23 é uma forma da equação de Riccati, para a qual não existem soluções analíticas geralmente. No entanto, podemos utilizar algumas aproximações para obter uma expressão analítica para a abundância após o *freeze-out*,  $Y_\infty \equiv Y(x = \infty)$ . Para tempos mais recentes, isto é,  $x$  grande,  $Y$  é muito maior que  $Y_{\text{EQ}}$ , visto que as partículas  $X$  não conseguem mais se aniquilarem rápido o suficiente para manter o equilíbrio. Assim,

$$\frac{dY}{dx} \approx -\frac{\lambda Y^2}{x^2}, \quad (x \gg 1). \quad (2.25)$$

Integrando-se analiticamente da época do *freeze-out*  $x_f$  até épocas bem tardes, isto é,  $x = \infty$ , obtemos:

$$\frac{1}{Y_\infty} - \frac{1}{Y_f} = \frac{\lambda}{x_f}. \quad (2.26)$$

Como tipicamente  $Y_f$  é consideravelmente maior que  $Y_\infty$  [Dodelson 2003], conseguimos uma simples aproximação analítica para a abundância após o *freeze-out*.

$$Y_\infty \approx \frac{x_f}{\lambda}. \quad (2.27)$$

No entanto, ainda resta determinar a época do *freeze out*,  $x_f$ . Para isso, foi integrada numericamente a equação 2.23, para alguns valores de  $\langle\sigma v\rangle$ , utilizando o *software Mathematica*. Na Figura 5, constam as curvas obtidas de  $Y$  e  $Y_{\text{EQ}}$  em função de  $x$ .

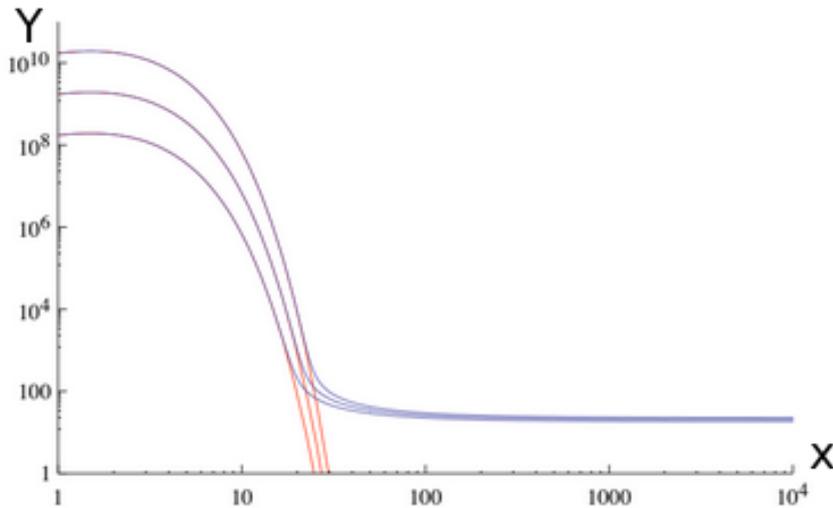


Figura 5 – Curvas obtidas numericamente para  $Y$  (azul) e  $Y_{\text{EQ}}$  (vermelho) em função de  $x$ , para  $\langle\sigma v\rangle = 10^{-10} \text{ GeV}^{-2}$ ,  $10^{-11} \text{ GeV}^{-2}$ ,  $10^{-12} \text{ GeV}^{-2}$ .

A partir da Figura 5, temos uma simples estimativa da ordem de grandeza de  $x_f \approx 10$ , o que está de acordo com [Dodelson 2003]. De fato, após transcorrido muito tempo o *freeze-out*,  $Y_{\text{EQ}}$  cai dramaticamente, enquanto  $Y$  tende a um valor assintótico constante.

Depois que a espécie passa pelo *freeze-out*, a densidade de número cai com  $a^{-3}$ . Logo, a densidade de energia atualmente é o produto entre  $m(a_1/a_0)^3$  e a densidade de número, onde  $a_1$  corresponde a um instante suficientemente tarde para que  $Y$  tenha atingido o valor assintótico  $Y_\infty$ . De 2.20, a densidade de número para esse instante é

simplesmente  $Y_\infty T_1^3$ . Portanto,

$$\rho_X = m \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^3 Y_\infty T_1^3 = m Y_\infty T_0^3 \left( \frac{a_1 T_1}{a_0 T_0} \right)^3. \quad (2.28)$$

A razão  $(a_1 T_1 / a_0 T_0)$  não é trivial. Da referência [Dodelson 2003], temos que ela vale aproximadamente  $1/27$ . Para fins de ordem de grandeza, então,

$$\rho_X \approx \frac{m Y_\infty T_0^3}{30}. \quad (2.29)$$

Dividindo ambos os lados por  $\rho_{\text{cr}}$  e substituindo a expressão 2.27 para  $Y_\infty$ , temos que

$$\Omega_X = \frac{x_f m T_0^3}{30 \lambda \rho_{\text{cr}}}. \quad (2.30)$$

Substituindo a definição 2.24 de  $\lambda$ ,

$$\Omega_X = \frac{H(m) x_f T_0^3}{30 m^2 \langle \sigma v \rangle \rho_{\text{cr}}}. \quad (2.31)$$

Resta agora determinarmos a quantidade  $H(m)$ , a taxa de Hubble para quando a massa da partícula é igual à temperatura. Da equação de Friedmann 2.11, temos que  $H = \sqrt{\frac{8\pi G \rho}{3}}$ . Já a densidade de energia em função da temperatura, na era da radiação onde tipicamente ocorre a produção de matéria escura é [Dodelson 2003]:

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} T^4 \left( \sum_{i=\text{bósons}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{férmions}} g_i \right) \equiv g_* \frac{\pi^2}{30} T^4. \quad (2.32)$$

Logo,

$$H(m) = m^2 \sqrt{\frac{4\pi^3 G g_*(m)}{45}}. \quad (2.33)$$

Substituindo 2.33 em 2.31, obtemos finalmente

$$\Omega_X = \sqrt{\frac{4\pi^3 G g_*(m)}{45}} \frac{x_f T_0^3}{30 \langle \sigma v \rangle \rho_{\text{cr}}}. \quad (2.34)$$

Portanto, verificamos que a abundância  $\Omega_X$  não depende explicitamente da massa da partícula candidata a matéria escura, de forma que é principalmente a seção de choque de aniquilação que determina a densidade de relíquia.

Produção de matéria escura ocorre em temperaturas tipicamente da ordem de 100 GeV [Dodelson 2003], enquanto que  $g_*(m)$  inclui contribuições de todas as partículas do

modelo padrão de Física de Partículas, sendo de ordem 100. Além disso,  $x_f$  é de ordem 10. Consequentemente,

$$\Omega_X h^2 = 0,15 \left( \frac{x_f}{10} \right) \left( \frac{g_*(m)}{100} \right)^{1/2} \frac{10^{-39} \text{ cm}^2}{\langle \sigma v \rangle}. \quad (2.35)$$

A expressão 2.35 é justamente aonde queríamos chegar: trata-se de uma relação entre um observável cosmológico - a densidade de relíquia - e uma propriedade decorrente do modelo em física de partículas do candidato - a seção de choque de aniquilação média. Seja qual for o modelo escolhido para descrever um potencial candidato a matéria escura, para ele ser viável deve prever uma seção de choque pequena da ordem de  $10^{-39} \text{ cm}^2$ , a fim de que a abundância  $\Omega_X$  obtida esteja de acordo com dados cosmológicos coletados em experimentos, como os do satélite Planck.

Muitos textos se referem à expressão 2.35 como "milagre do WIMP". Isso se deve ao fato de que partículas massivas que interagem fracamente (em inglês, *weakly interacting massive particle*) tipicamente possuem seções de choque dessa ordem de grandeza, compatíveis com a abundância observada de matéria escura. Por essa razão, dedicaremos uma análise mais detalhada ao modelo que descreve os WIMPs no próximo capítulo, onde também discutiremos outros modelos em física de partículas e o que os torna viáveis para descrever um potencial candidato a matéria escura.

## 3 Modelos Viáveis em Física de Partículas para Matéria Escura

No capítulo anterior, ao deduzirmos a Equação de Friedmann, conseguimos verificar como a taxa de expansão do Universo está diretamente ligada com o total de matéria e energia que o constitui. Por outro lado, a expansão nas três direções espaciais e a consequente diminuição da temperatura do plasma primordial afetou propriedades termodinâmicas dos seus constituintes, entre eles a matéria escura, quebrando inclusive o equilíbrio térmico de sistemas de partículas. Nesse contexto, ao integrarmos a Equação de Boltzmann da época em que as partículas de DM passaram pelo *freeze-out* e saíram do equilíbrio térmico até os dias de hoje, conseguimos obter alguma informação a respeito das propriedades dessa forma exótica de matéria, ou seja, quais propriedades para que haja compatibilidade com medidas experimentais diretas da abundância de matéria não-bariônica observada.

Assim, na sequência da primeira parte deste capítulo, vamos enumerar outras propriedades fundamentais que a matéria escura deve apresentar. Além disso, citaremos alguns dos principais candidatos para, na segunda seção do capítulo, darmos mais ênfase ao modelo MSSM que contempla um dos candidatos favoritos a matéria escura, os WIMPs.

### 3.1 Propriedades e Candidatos de Matéria Escura

O cálculo da densidade de relíquia efetuado no capítulo anterior constitui um dos alicerces para a implementação de um modelo para um possível candidato a matéria escura. Além de revelar que  $\Omega_X h^2$  não depende explicitamente da massa  $m_X$  da partícula, a estimativa realizada na equação 2.35 nos fornece a ordem de grandeza da seção de choque média de aniquilação do candidato, que coincidentemente é muito próximo do valor de uma partícula na escala fraca. Um cálculo análogo de [Jungman, Kamionkowski e Griest 1996] resultou em  $\Omega_X h^2 \approx 3 \times 10^{-27} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \langle \sigma v \rangle^{-1}$ , enquanto que, se uma nova partícula na escala fraca de interação existir, sua seção de choque de aniquilação pode ser estimada como  $\langle \sigma v \rangle \approx \alpha^2 (100 \text{ GeV})^{-2} \approx 10^{-25} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ , para  $\alpha \approx 10^{-2}$  [Jungman, Kamionkowski e Griest 1996]. Essa coincidência de ordem de grandeza entre esses dois valores de seções de choque, a princípio independentes, é um dos argumentos mais sólidos para a hipótese dos WIMPs.

Entretanto, explicar a abundância observada  $\Omega_X h^2$  é apenas um dos pré-requisitos que um modelo em física de partículas para matéria escura deve satisfazer para se tornar viável. Outras propriedades também devem ser contempladas, como por exemplo:

- Matéria escura possui interação gravitacional atrativa com matéria luminosa ordinária. De fato, a existência de matéria escura só foi proposta depois de observados fenômenos decorrentes de interação gravitacional com sistemas astrofísicos conhecidos; alguns deles como galáxias e aglomerados de galáxias foram elencados no Capítulo 1;
- Matéria escura deve ser estável, ou pelo menos possuir um tempo de meia-vida muito maior do que a idade do Universo. Caso contrário, não seriam observados manifestações de sua presença em estruturas próximas de nós, como galáxias espirais vizinhas;
- Matéria escura não interage com luz, isto é, não apresenta interação eletromagnética. Uma importante consequência desse fato é que partículas de DM não podem esfriar emitindo fótons, como bárions o fazem durante a formação de galáxias, o que é consistente com a presença observada de DM no halo das galáxias espirais. A matéria bariônica dissipa energia ao emitir fótons, causando um colapso em torno de um centro e a consequente formação de um disco galáctico de matéria luminosa em galáxias espirais;
- Matéria escura deve ser "fria", isto é, quando se iniciou a formação de galáxias no Universo, as partículas de DM se moviam em velocidades não relativísticas. Denomina-se matéria escura "quente" se, caso contrário, as partículas candidatas fossem relativísticas nessa época. No entanto, as partículas de DM não conseguiriam se aglutinar em escalas galácticas até que esfriassem para velocidades não-relativísticas [White, Frenk e Davis 1985].

Dentre todos os possíveis candidatos a matéria escura, alguns deles são inclusive bariônicos. O principal exemplo desta categoria são objetos massivos compactos do halo das galáxias espirais (em inglês, *Massive Compact Halo Objects*, MACHOs), que incluem anãs marrons, exoplanetas, anãs brancas, estrelas de nêutrons, buracos negros estelares e outros objetos astronômicos de difícil detecção. No entanto, os MACHOs não conseguem contemplar toda a massa faltante do halo, compondo, na melhor das hipóteses, cerca de 1/5 da massa do halo [Jungman, Kamionkowski e Griest 1996].

Sendo assim, a esmagadora maioria dos demais candidatos é de fato não-bariônica, que incluem espécies de partículas como:

- **Neutrinos do Modelo Padrão:** Já foi especulado que a massa faltante identificada nas observações pudesse ser atribuída a neutrinos do Modelo Padrão, partículas extremamente leves (massas da ordem de eV) neutras, de difícil detecção. Cálculos indicam que, se  $m_i$  é a massa do  $i$ -ésimo neutrino, então, [Bertone, Hooper e Silk

2005]:

$$\Omega_\nu h^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{93 \text{ eV}}.$$

No entanto, resultados de experimentos em laboratório do decaimento beta do Trítio [Bertone, Hooper e Silk 2005] indicam que a massa  $m_\nu$  dos neutrinos devem satisfazer  $m_\nu < 2,05 \text{ eV}$ . Isso implica num limite superior para a densidade de relíquia de  $\Omega_\nu h^2 < 0,07$ , um valor que está bem longe de contemplar toda a abundância observada de matéria escura, como se pode verificar nos dados do satélite Planck na equação 2.13;

- **Neutrinos Estéreis:** são partículas que, além da gravitação, não possuem qualquer outra interação fundamental do Modelo Padrão. No entanto, a densidade de relíquia de neutrinos estéreis depende de suas massas e ângulos de mistura. Para reproduzir a densidade de relíquia correta, seus parâmetros devem ter valor pequenos bem definidos que não são justificados por nenhum argumento teórico independente. Portanto, neutrinos estéreis não produzem naturalmente a densidade de relíquia correta [Feng 2010];
- **Áxions:** Introduzidos inicialmente para tentar resolver o problema da violação de CP em Física de Partículas na interação forte, os áxions também são tidos como possíveis candidatos a matéria escura. São extremamente leves; experimentos em laboratório e estudos sobre esfriamento de estrelas indicam um limite superior para a massa dos áxions de  $0,01 \text{ eV}$  [Bertone, Hooper e Silk 2005];
- **Candidatos Supersimétricos:** Provavelmente a classe mais vasta de candidatos, são partículas que surgem de extensões do Modelo Padrão para a escala eletrofraca, entre elas o MSSM. Um ponto interessante de modelos supersimétricos é que eles fornecem candidatos naturais para matéria escura, os WIMPs, que podem ser, entre outras coisas, a LSP (em inglês, *Lightest Supersymmetric Particle*). Dedicaremos um estudo mais detalhado dessas partículas na segunda seção do capítulo.

## 3.2 WIMPs e Modelos Supersimétricos

### 3.2.1 Restrições na densidade e massa de WIMPs

Antes de detalharmos exatamente o que são WIMPs, podemos extrair alguma informação acerca dessas partículas a partir de restrições cosmológicas, como a idade do Universo.

Se superestimarmos a quantidade de massa que há no Universo, a sua expansão será mais rápida e ele atingirá o atual tamanho em um intervalo de tempo menor. Portanto, um

limite inferior para a idade do Universo promove um limite superior para a abundância total de matéria  $\Omega h^2$  e, conseqüentemente, também para  $\Omega_X h^2$ . Uma estimativa conservadora para a idade mínima do Universo  $t_U$  é  $10^{10}$  anos, o que implica em  $\Omega h^2 \leq 1$  [Jungman, Kamionkowski e Griest 1996]. Se  $t_U > 1.3 \times 10^{10}$  anos, conseguimos uma restrição ainda mais forte para o limite superior de abundância de matéria escura:  $\Omega_X h^2 \leq 0,4$ .

Obviamente, como o Universo não é constituído apenas de matéria escura, temos que  $\Omega_X h^2 \leq 1$ . Além disso, [Jungman, Kamionkowski e Griest 1996] estabelece um limite inferior para a densidade de relíquia de matéria escura em função da massa  $m_X$  da partícula:

$$\Omega_X h^2 \geq \left( \frac{m_X}{300 \text{ TeV}} \right)^2. \quad (3.1)$$

Logo, a partir da Equação 3.1 e  $\Omega_X h^2 \leq 1$ , obtemos que  $m_X \leq 300 \text{ TeV}$ . É importante salientar aqui que essa restrição é independente do modelo supersimétrico adotado.

### 3.2.2 Modelos Supersimétricos

No Modelo Padrão de Física de Partículas, há uma diferença fundamental entre dois tipos de partículas: enquanto bósons são mediadores das interações, férmions são os constituintes da matéria. É natural se perguntar, então, se não existe simetria que relaciona essas duas famílias de partículas, fornecendo-nos dessa forma uma perspectiva unificada acerca de matéria e interações.

No entanto, argumentos de simetria não foram a única motivação para o desenvolvimento de Supersimetria (SUSY): historicamente, ele surgiu como uma tentativa de solução para o problema de hierarquia e explicar as tremendas diferenças entre as escalas de energia de Planck e eletrofraca. O problema surge nas correções radiativas da massa do bóson de Higgs.

Todas as partículas têm correções radiativas para suas massas, mas enquanto as massas de férmions crescem apenas logaritmicamente, massas de escalares crescem quadraticamente com a energia, gerando correções em 1-loop de [Bertone, Hooper e Silk 2005]:

$$\delta_{m_s}^2 \approx \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right) \Lambda^2, \quad (3.2)$$

onde  $\Lambda$  é uma alta energia de *cut-off* a partir da qual se espera que nova Física desempenhe um papel importante.

As correções radiativas para a massa de Higgs (que é esperado que seja da ordem da escala eletrofraca  $M_W \approx 100 \text{ GeV}$ ) destroem a estabilidade da escala eletrofraca se  $\Lambda$  é

maior que a ordem de TeV, isto é, se  $\Lambda$  for próximo à massa de Planck.

Um modo de resolver este problema é postular a existência de novas partículas, com massas semelhantes, mas spin diferentes por um fator de um meio. Logo, como a contribuição de loops fermiônicos para  $\delta_{m_s}^2$  possui sinal oposto à contribuição de loops bosônicos, a equação 3.2 se torna [Bertone, Hooper e Silk 2005]:

$$\delta_{m_s}^2 \approx \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) (\Lambda^2 + m_B^2) - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) (\Lambda^2 + m_F^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) (m_B^2 - m_F^2). \quad (3.3)$$

Portanto, dado que  $|m_B^2 - m_F^2| \leq 1$  TeV, a álgebra de SUSY garante que a divergência quadrática na massa de Higgs seja cancelada em todas as ordens de teoria de perturbação. Nesse contexto, SUSY também garante naturalmente a existência de novas partículas, com propriedades adequadas, associando a todas as partículas do Modelo Padrão superparceiros de mesma massa, mas diferente tipo de spin (férmion ou bóson).

Outro grande advento para Supersimetria vem da unificação de constantes de acoplamento na escala  $M_U \approx 2 \times 10^{16}$  GeV.

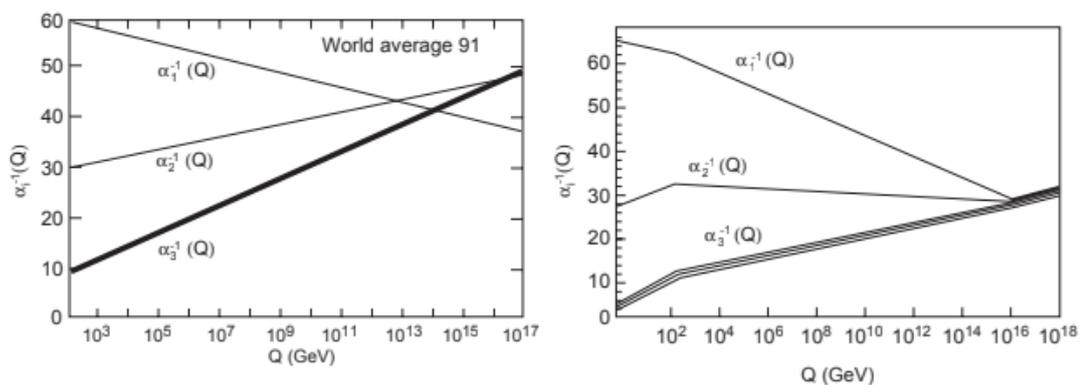


Figura 6 – Medidas das constantes de acoplamento no LEP (Large Electron-Positron Collider) não evoluem para um valor unificado se não há supersimetria (esquerda), mas o fazem quando supersimetria é assumida (direita) [Bertone, Hooper e Silk 2005].

Embora a extrapolação das constantes de acoplamento usando apenas partículas do Modelo Padrão falhe em as unificar num valor comum (lado esquerdo da Figura 6), [Amaldi, Boer e Fürsteneau 1991] mostraram que, ao introduzir-se supersimetria na escala TeV, essas forças de fato se unificam na escala  $M_U \approx 2 \times 10^{16}$  GeV (lado direito da Figura 6). Esse fato acabou servindo como uma pista forte a favor da Grande Teoria de Unificação (em inglês, GUT), que prevê a unificação de acoplamento de calibre abaixo da escala de Planck.

Enfim, os novos geradores introduzidos pela supersimetria transformam bósons em férmions, e vice-versa, isto é,

$$Q |\text{férmion}\rangle = |\text{bóson}\rangle, \quad Q |\text{bóson}\rangle = |\text{férmion}\rangle.$$

Por causa de sua natureza fermiônica, os operadores  $Q$  carregam spin  $1/2$ , o que implica que supersimetria é uma simetria espaço-temporal. A pergunta que surge naturalmente é como estender o grupo de Poincaré de transformações espaciais e de transformações de Lorentz para incluir essa nova simetria de bóson/férmion. A estrutura de tal grupo é altamente restringida pela extensão Haag-Lopuszanski-Sohnius do teorema de Coleman e Mandula. Para teorias realísticas, os operadores  $Q$  (que escolhemos por convenção serem spinores de Majorana) devem satisfazer [Bertone, Hooper e Silk 2005]:

$$\begin{cases} \{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2\gamma_{ab}^\mu P_\mu, \\ \{Q_a, P_\mu\} = 0, \\ [Q_a, M^{\mu\nu}] = \sigma_{ab}^{\mu\nu} Q_b, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde  $\bar{Q}_a \equiv (Q^\dagger \gamma_0)_a$  e  $\sigma = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$  são constantes de estrutura da teoria.

Da mesma forma que a invariância de Lorentz se manifesta no espaço-tempo de Minkowski, supersimetria se manifesta no formalismo chamado *superespaço*, onde o superespaço é definido como um conjunto de coordenadas  $\{x, \theta, \bar{\theta}\}$ , tais que  $x = x^\mu$  são as coordenadas usuais espaço-temporais de Minkowski e  $\theta, \bar{\theta}$  são os spinores Weyl anticomutantes. Então, um *supercampo* é uma função  $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$  definida num superespaço; é comum introduzir campos quirais, representando matéria, e campos vetoriais, representando campos de calibre.

### 3.2.2.1 MSSM

Após enumerarmos as principais motivações para o desenvolvimento de supersimetria, vamos começar a trabalhar com um modelo específico de partículas supersimétrico, o *Minimal Supersymmetric Standard Model* - MSSM.

O MSSM é a extensão do Modelo Padrão de Física de Partículas que contém a menor quantidade necessária de constituintes de campo para gerar todos os campos do SM (nenhum outro campo é adicionado) - é nesse sentido que se trata de um modelo "mínimo". Isso pode ser feito da seguinte forma:

- Associam-se superparceiros fermiônicos para todos os campos de *gauge*. Glúons,  $W^\pm$  e bósons B ganham parceiros fermiônicos chamados de gluinos  $\tilde{g}$ , winos  $\tilde{W}_i$  e binsos  $\tilde{B}$ , respectivamente. O nome comum a esses superparceiros é gaugino;
- Associam-se parceiros escalares para os férmions, isto é, quarks e léptons ganham parceiros escalares chamados de squarks e sléptons;

- Introdúz-se um campo de Higgs adicional (para um total de dois dupeltos de Higgs, correspondendo a cinco estados físicos de Higgs) e associa-se um higgsino de spin 1/2 para cada bóson de Higgs. Isso é feito para dar massas a ambos quarks up e down sobre a quebra de simetria eletrofraca e também para preservar supersimetria.

Com isso, o conseqüente conteúdo de campos e de partículas do modelo pode ser esquematizado da seguinte forma, como mostram as Figuras 7 e 8:

Superfield	SM particles	Spin	Superpartners	Spin
$Q$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	1/2	$\begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$	0
$U^c$	$\bar{u}_R$	1/2	$\tilde{u}_R^*$	0
$D^c$	$\bar{d}_R$	1/2	$\tilde{d}_R^*$	0
$L$	$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	1/2	$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$	0
$E^c$	$\bar{e}_R$	1/2	$\tilde{e}_R^*$	0
$H_1$	$H_1$	0	$\tilde{H}_1$	1/2
$H_2$	$H_2$	0	$\tilde{H}_2$	1/2
$G^a$	$g$	1	$\tilde{g}$	1/2
$W_i$	$W_i$	1	$\tilde{W}_i$	1/2
$B$	$B$	1	$\tilde{B}$	1/2

Figura 7 – Conteúdo de campo do MSSM [Bertone, Hooper e Silk 2005].

Standard Model particles and fields		Supersymmetric partners			
Symbol	Name	Interaction eigenstates		Mass eigenstates	
		Symbol	Name	Symbol	Name
$q = d, c, b, u, s, t$	Quark	$\tilde{q}_L, \tilde{q}_R$	Squark	$\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$	Squark
$l = e, \mu, \tau$	Lepton	$\tilde{l}_L, \tilde{l}_R$	Slepton	$\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$	Slepton
$\nu = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	Neutrino	$\tilde{\nu}$	Sneutrino	$\tilde{\nu}$	Sneutrino
$g$	Gluon	$\tilde{g}$	Gluino	$\tilde{g}$	Gluino
$W^\pm$	W-boson	$\tilde{W}^\pm$	Wino	$\tilde{\chi}_{1,2}^\pm$	Chargino
$H^-$	Higgs boson	$\tilde{H}_1^-$	Higgsino		
$H^+$	Higgs boson	$\tilde{H}_1^+$	Higgsino		
$B$	B-field	$\tilde{B}^2$	Bino	$\tilde{\chi}_{1,2,3,4}^0$	Neutralino
$W^3$	$W^3$ -field	$\tilde{W}^3$	Wino		
$H_1^0$	Higgs boson	$\tilde{H}_1^0$	Higgsino		
$H_2^0$	Higgs boson	$\tilde{H}_2^0$	Higgsino		
$H_3^0$	Higgs boson	$\tilde{H}_2^0$	Higgsino		

Figura 8 – Partículas do SM e seus superparceiros no MSSM [Bertone, Hooper e Silk 2005].

O MSSM é então especificado através do superpotencial, definido como [Bertone, Hooper e Silk 2005]:

$$W = \epsilon_{ij}[y_e H_1^j L^i E^c + y_d H_1^j Q^i D^c + y_u H_2^i Q^j U^c] + \epsilon_{ij} \mu H_1^i H_2^j \quad (3.5)$$

onde  $i, j$  são índices do  $SU(2)$  e  $y$  são acoplamentos de Yukawa. Cor e índices de geração foram suprimidos na expressão 3.5. Assim, o superpotencial entra no Lagrangiano da teoria através dos termos:

$$\mathcal{L}_{\text{SUSY}} = -\frac{1}{2} \left( W^{ij} \psi_i \psi_j + W_{ij}^* \psi_i^\dagger \psi_j^\dagger \right) - W^i W_i^*, \quad (3.6)$$

onde  $W_i \equiv \frac{\partial W}{\partial \phi_i}$ ,  $W_i^* \equiv \frac{\partial W}{\partial \phi_i^*}$  e  $W^{ij} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j}$ , sendo  $\phi_i$  e  $\psi_i$  os campos escalares e fermiônicos, respectivamente.

Além disso, um ingrediente adicional do modelo MSSM é a conservação da paridade de um número quântico multiplicativo  $R$ , definido como:

$$R \equiv (-1)^{3B+L+2s}, \quad (3.7)$$

onde  $B$  é o número bariônico,  $L$  é o número leptônico e  $s$  é o spin.

Note que todas as partículas do SM possuem  $R = 1$ , enquanto que seus superparceiros possuem  $R = -1$ . Logo, uma consequência direta da conservação da paridade- $R$  é que spartículas só podem decair em um número ímpar de spartículas (além de partículas do SM). Consequentemente, a spartícula mais leve - batizada de *Lightest Supersymmetric Particle* (LSP) - é estável e só pode ser destruída via aniquilação em pares, configurando-se como uma excelente partícula candidata a matéria escura. É interessante salientar que essa não foi a motivação original para definição de paridade- $R$ ; na verdade, ela foi introduzida pela primeira vez para suprimir a taxa de decaimento do próton [Bertone, Hooper e Silk 2005].

A natureza da LSP é restringida por algumas observações: primeiro, não pode apresentar carga ou cor, caso contrário, teria condensado com matéria bariônica e produzido isótopos pesados, contrariando observações. Dentre os candidatos neutros, uma possível LSP seria o sneutrino; porém, experimentos de detecção direta de matéria escura já descartaram essa hipótese [Bertone, Hooper e Silk 2005]. Além disso, embora axinos e gravitinos não podem ser *a priori* descartados, eles surgem apenas em subconjuntos de cenários supersimétricos e possuem propriedades que os tornam menos interessantes. Em particular, axinos e gravitinos apresentam interações muito fracas, sendo praticamente impossível de detectá-los e tornando-os menos interessantes do ponto de vista fenomenológico [Bertone, Hooper e Silk 2005].

Então, a partícula favorita a ser a LSP e constituir um bom candidato a matéria escura é o neutralino. Para determinarmos a identidade da LSP, precisamos especificar como a supersimetria é quebrada. Se ela não se quebrasse, então cada superparceiro teria a massa idêntica a seu análogo no SM, o que não é o caso. Logo, novos termos devem ser adicionados ao Lagrangiano para quebrar a supersimetria, mas ainda assim respeitar a hierarquia entre as escalas de Planck e eletrofraca.

No MSSM, os superparceiros dos bósons de *gauge* e de Higgs, os chamados binos, winos e higgsinos, misturam-se em quatro autoestados fermiônicos de Majorana de massa, chamados de neutralinos. Os quatro autoestados de massa dos neutralinos são tipicamente denotados como  $\bar{\chi}_1^0, \bar{\chi}_2^0, \bar{\chi}_3^0, \bar{\chi}_4^0$ , em ordem crescente de massa. Define-se como  $\chi$  o mais leve dos neutralinos, ou seja,  $\chi \equiv \bar{\chi}_1^0$ .

Na base  $(\tilde{B}, \tilde{W}_3, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0)$ , a matriz de massa do neutralino é representada como [Bertone, Hooper e Silk 2005]:

$$\mathcal{M}_N = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z \cos \beta \sin \theta_W & M_Z \sin \beta \sin \theta_W \\ 0 & M_2 & M_Z \cos \beta \cos \theta_W & -M_Z \sin \beta \cos \theta_W \\ -M_Z \cos \beta \sin \theta_W & M_Z \cos \beta \cos \theta_W & 0 & -\mu \\ M_Z \sin \beta \sin \theta_W & -M_Z \sin \beta \cos \theta_W & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

onde  $M_1, M_2$  são parâmetros de massa do bino e wino,  $\theta_W$  é o ângulo de Weinberg,  $\tan \beta$  é a razão entre os valores esperados no vácuo dos bósons de Higgs e  $\mu$  é o parâmetro de massa do higgsino.

Sendo assim, o neutralino mais leve é uma combinação linear de binos, winos e higgsinos:

$$\chi = N_{11}\tilde{B} + N_{12}\tilde{W}_3 + N_{13}\tilde{H}_1^0 + N_{14}\tilde{H}_2^0 \quad (3.9)$$

Da Equação 3.9, podemos definir as frações de gaugino e de higgsino,  $f_g$  e  $f_h$ , respectivamente, como  $f_g = N_{11}^2 + N_{12}^2$ ,  $f_h = N_{13}^2 + N_{14}^2$ .

Assim, após apresentarmos características gerais de modelos viáveis em física de partículas para matéria escura e fazermos essa breve introdução a modelos supersimétricos, o próximo passo é investigar com um pouco mais de detalhamento a hipótese da LSP ser um neutralino e constituir um WIMP. Para isso, no próximo capítulo, integraremos numericamente a equação de Boltzmann com o uso do *software micrOmegas*.

O *software micrOmegas* calcula seções de choque em três níveis, além de ser uma ferramenta muito útil para o cálculo de densidade de relíquia e outros observáveis cosmológicos de matéria escura. Com a implementação do código, é possível extrair um pouco mais de informação acerca da LSP e verificar se ela realmente fornece uma abundância de matéria escura compatível com a observada por experimentos como o satélite Planck.



## 4 Resultados e Discussão

Neste capítulo, a hipótese de que o neutralino seja uma partícula de matéria escura será investigada com mais detalhes, a partir da implementação do código `micrOmegas`. Neste contexto, primeiro vamos descrever em linhas gerais algumas características importantes do código para, após, implementá-lo e obter a densidade de relíquia para a LSP e avaliar a hipótese de matéria escura ser de fato constituída por WIMPs.

### 4.1 Descrição geral do código `micrOmegas`

O código `micrOmegas` foi desenvolvido com o objetivo de calcular densidade de relíquia; fluxos de fótons, prótons e antiprótons para buscas de detecção indireta de DM; neutrinos e fluxos de múons oriundas de partículas de DM capturadas pelo Sol, entre tantos outros observáveis pertinentes ao estudo de WIMPs como hipótese de partícula de matéria escura.

Uma das grandes vantagens do `micrOmegas` é fazer uso de outros códigos públicos quando relevante, como, por exemplo, para verificar eventuais incompatibilidades com vínculos e restrições impostas por experimentos em *colliders* como o LHC e o LEP: `Lilith`, `HiggsSignals`, `HiggsBounds` checam restrições no setor de Higgs, enquanto que `CheckMate`, `SModel11S` e outros códigos testam limites em buscas por supersimetria ou outra nova Física [Barducci et al.].

O código `micrOmegas` assume modelos que contenham simetrias discretas como a paridade R, garantindo a estabilidade da LSP, como já discutido no fim do último capítulo. O *input* do programa são a especificação dos parâmetros e partículas do modelo estudado; após, o programa executa as rotinas e retorna os observáveis, como a temperatura de *freeze-out*  $x_f$ , definida em 2.22, e a densidade de relíquia  $\Omega_{\text{DM}} h^2$ . Um fluxograma esquematizando o funcionamento do código está esquematizado na Figura 9.

O código conta com `CalcHEP` para a computação de seções de choque em nível de árvore, incluindo todas as aniquilações e coaniquilações envolvidas, constituindo-se numa poderosa ferramenta numérica. Na derivação de uma expressão analítica entre a densidade de relíquia e a seção de choque térmica média feita no capítulo 2, consideramos apenas o caso da partícula de DM  $\chi$  aniquilar-se apenas consigo mesmo, sem considerar a possibilidade de outra spartícula aniquilar uma LSP e decaírem-se em duas partículas do SM (coaniquilação).

Para muitos modelos como o MSSM, dado um Lagrangiano, é uma tarefa bem desgastante derivar todas as regras de Feynmann. Para isso, `micrOmegas` tradicionalmente

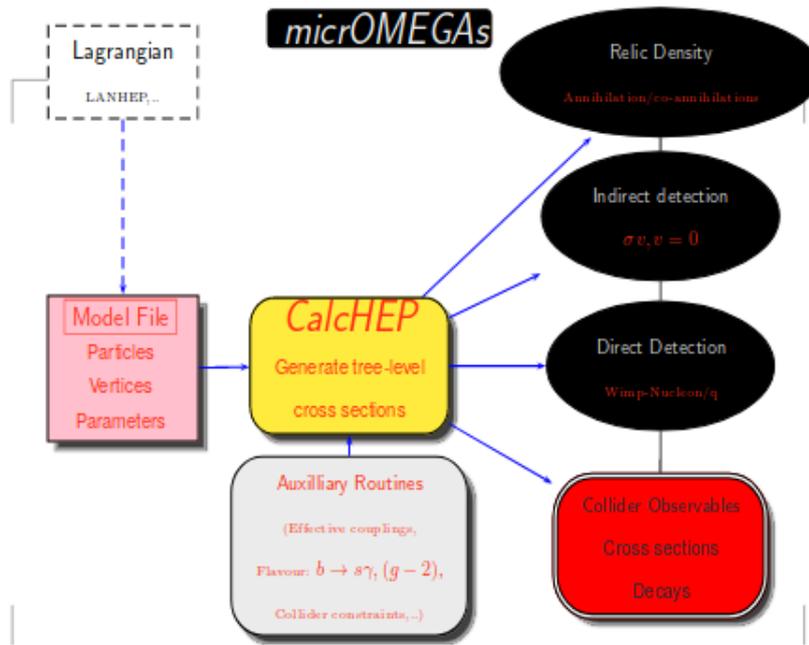


Figura 9 – Fluxograma do funcionamento do micrOmeGas [Barducci et al. 2018].

depende de LanHEP, mas FEYNRULES é um código recente que consegue o mesmo efeito.

Uma vez computada a seção de choque média com CalcHEP, o código prossegue integrando-se a equação de Boltzmann numericamente da época do *freeze-out* até atualmente a partir de darkOmega, que faz uso do método Runge-Kutta sob a condição inicial  $Y(T_f) = 2,5Y_{\text{EQ}}(T_f)$  [Barducci et al. 2018]. Após, o programa imprime na tela a densidade de relíquia, a temperatura de *freeze-out* e outros observáveis de interesse.

Por *default*, os parâmetros e constantes globais adotados estão enumerados nas Figuras 10 e 11.

Name	Value	Units	Description
MPlanck	$1.22091 \times 10^{19}$	GeV	Planck mass
EntropyNow	$2.8912 \times 10^9$	$\text{m}^{-3}$	Present day entropy, $s_0$
RhoCrit100	10.537	$\text{GeVm}^{-3}$	$\rho_c/h^2$ or $\rho$ for $H = 100\text{km/s/Mpc}$

Figura 10 – Constantes adotadas na implementação do código micrOmeGas [Barducci et al. 2018].

## 4.2 Cálculo numérico da densidade de relíquia

O modelo MSSM, a princípio, é um modelo com um número muito grande de parâmetros livres. Para a redução do número de parâmetros para uma quantidade mais razoável, alguma suposições teóricas devem ser feitas; dependendo do tipo de suposição feita, um novo modelo supersimétrico é obtido. Um dos modelos mais adotados nesse

Proton		Neutron		comments
Name	value	Name	value	
ScalarFFPd	0.0191	ScalarFFNd	0.0273	Scalar form factor
ScalarFFPu	0.0153	ScalarFFNu	0.011	
ScalarFFPs	0.0447	ScalarFFNs	0.0447	
pVectorFFPd	-0.427	pVectorFFNd	0.842	Axial-vector form factor
pVectorFFPu	0.842	pVectorFFNu	-0.427	
pVectorFFPs	-0.085	pVectorFFNs	-0.085	
SigmaFFPd	-0.23	SigmaFFNd	0.84	Tensor form factor
SigmaFFPu	0.84	SigmaFFNu	-0.23	
SigmaFFPs	-0.046	SigmaFFNs	-0.046	

Figura 11 – Parâmetros globais do código `micrOmegas`: *form factors* de quarks [Barducci et al. 2018].

sentido é o mSUGRA (em inglês *minimal SUPER GRAvity*), ou simplesmente MSSM restrito.

O mSUGRA é um modelo fenomenológico que é obtido quando se impõe uma série de condições de contorno aos parâmetros do MSSM na escala de energia da grande teoria da unificação (GUT). Com isso, ficamos com os seguintes parâmetros livres [Bertone, Hooper e Silk 2005]:

- Unificação dos acoplamentos de *gauge*:  $\alpha_1(M_U) = \alpha_2(M_U) = \alpha_3(M_U) \equiv \alpha_U$ , onde  $\alpha_i \equiv \frac{g_i^2}{4\pi}$ ;
- Unificação das massas dos gauginos:  $M_1(M_U) = M_2(M_U) = M_3(M_U) \equiv m_{1/2}$ ;
- Unificação das massas dos escalares (sfermions e bóson de Higgs):  $M_{\tilde{Q}}(M_U) = M_{\tilde{u}_R}(M_U) = M_{\tilde{d}_R}(M_U) = M_{\tilde{L}}(M_U) = M_{\tilde{t}_R}(M_U) = M_{H_u}(M_U) = M_{H_d}(M_U) \equiv m_0$
- Unificação dos acoplamentos trilineares:  $A_u(M_U) = A_d(M_U) = A_t(M_U) \equiv A_0$

Impondo a minimização do potencial de Higgs para recuperar a quebra da simetria eletrofraca, ficamos com 5 parâmetros livres, um discreto e quatro contínuos [Bertone, Hooper e Silk 2005]:

$$\tan \beta, \text{sign}(\mu), m_0, m_{1/2}, A_0$$

onde  $\tan \beta$  é a razão entre os valores esperados no vácuo dos dois campos de Higgs e  $\text{sign}(\mu)$  é o sinal do parâmetro de massa do higgsino  $\mu$ .

Dessa forma, queremos determinar possíveis intervalos permitidos para estes parâmetros de modo que obtenhamos a densidade de relíquia observada, indicada pela expressão 2.13. A referência [Ellis, Olive e Santoso 2003] investigou justamente os parâmetros do

MSSM restrito e testou a compatibilidade da partícula candidata com a abundância observada pelo experimento WMAP e outras restrições impostas por experimentos em *colliders*. Os resultados estão representados na Figura 12:

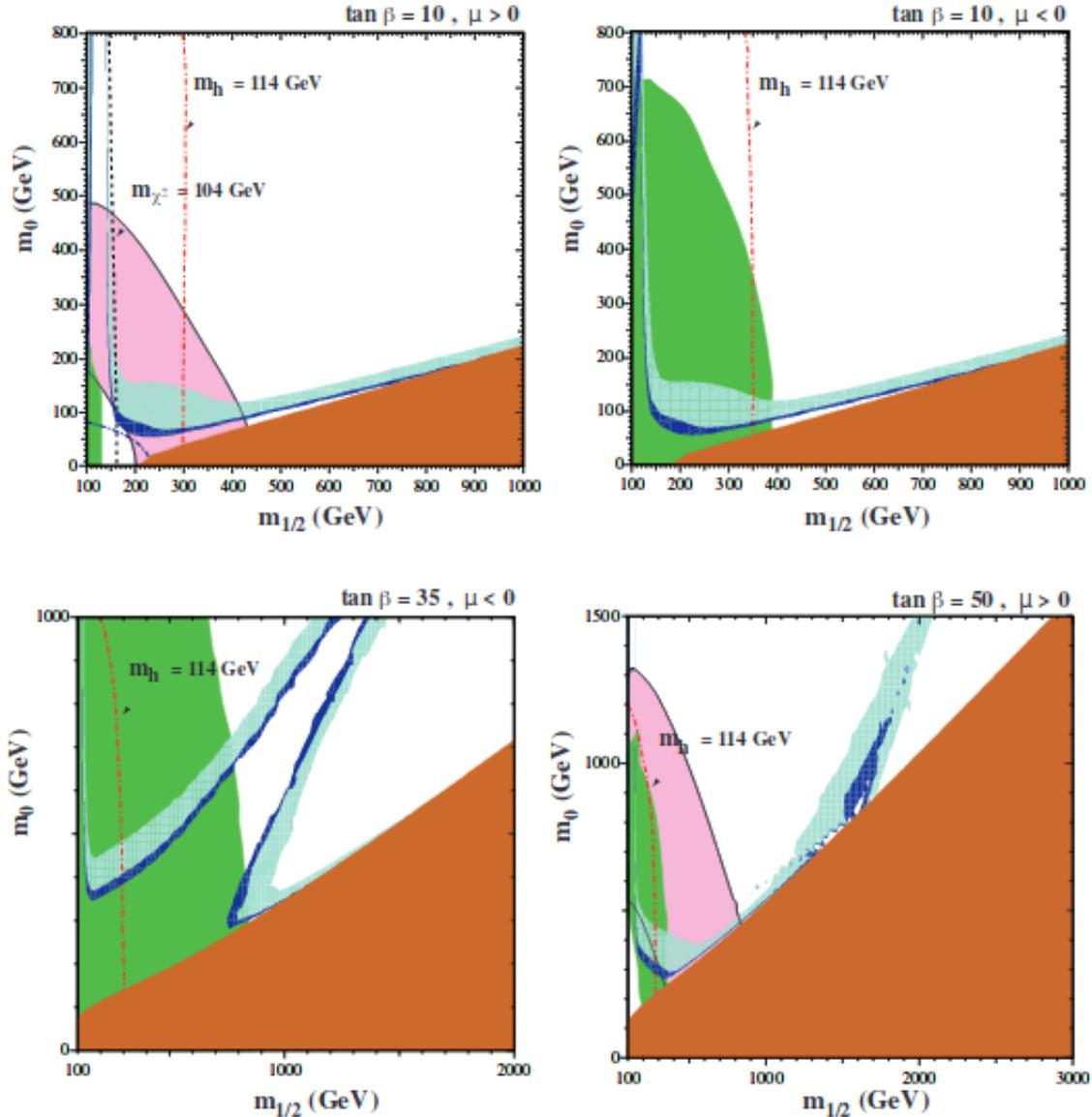


Figura 12 – Resultados obtidos por [Ellis, Olive e Santos 2003] ao se comparar conjuntos de escolhas de parâmetros do MSSM restrito com dados do WMAP. Em azul claro, estão representados pontos com  $0,1 < \Omega_\chi h^2 < 0,3$ , enquanto que azul forte corresponde a pontos que satisfazem  $0,094 < \Omega_\chi h^2 < 0,129$ . A região laranja corresponde a uma região proibida, onde  $m_{\tilde{\tau}} < m_\chi$  e  $\tilde{\tau}$  se define como a spartícula mais leve excluindo-se a LSP. A região verde é uma área excluída pelo decaimento  $b \rightarrow s\gamma$ , enquanto que a região rosa é uma área descartada por medidas feitas pelo BNL de  $g_\mu - 2$  no nível  $2\sigma$ . As linhas pontilhadas são restrições impostas pelo LEP [Ellis, Olive e Santos 2003].

Então, tendo em vista os dados obtidos pela referência [Ellis, Olive e Santos 2003], foram escolhidos alguns conjuntos de parâmetros como entrada para a execução do código

`micrOmegas`, a fim de se verificar se os valores escolhidos de fato geram uma densidade de relíquia compatível. Os resultados obtidos estão organizados na Tabela 1.

Ponto	$A_0$	$\tan \beta$	$\text{sign} \mu$	$m_0$ (GeV)	$m_{1/2}$ (GeV)	$\Omega_\chi h^2$
1	0	10	$> 0$	100	200	0,103
2	0	10	$> 0$	150	250	0,228
3	0	10	$> 0$	200	500	0,314
4	0	10	$< 0$	100	150	0,122
5	0	10	$< 0$	100	250	0,174
6	0	10	$< 0$	200	500	0,491
7	0	35	$< 0$	800	1000	0,115
8	0	35	$< 0$	800	1250	0,153
9	0	35	$< 0$	800	1500	0,329
10	0	50	$> 0$	1000	1800	0,197
11	0	50	$> 0$	1000	1600	0,212
12	0	50	$> 0$	1000	1000	0,341

Tabela 1 – Densidades de relíquias obtidas via implementação do código `micrOmegas`, em função das escolhas dos parâmetros  $A_0, \tan \beta, \mu, m_0, m_{1/2}$ .

Na Tabela 1, buscou-se escolher 3 pontos distintos, para uma escolha fixa de  $\tan \beta$  e  $\mu$ , uma vez que impôs-se  $A_0 = 0$  para todos os casos: a primeira escolha de um par  $(m_0, m_{1/2})$  buscou contemplar um ponto da Figura 12 que estivesse no intervalo mais restrito  $0,094 < \Omega_\chi h^2 < 0,129$ , enquanto que a segunda escolha foi feita tendo em vista um ponto no intervalo mais abrangente  $0,1 < \Omega_\chi h^2 < 0,3$  e por último, elegeu-se um ponto que gerasse uma densidade de relíquia que estivesse em desacordo com o valor observado.

Percebemos que, com exceção da densidade obtida a partir do ponto 10, todos os outros valores estão de acordo com os gráficos da Figura 12, obtidos por [Ellis, Olive e Santoso 2003], o que sugere que a implementação do código de certa forma teve êxito.

No entanto, certamente seria interessante replicar os resultados encontrados pela referência [Ellis, Olive e Santoso 2003], mas tendo em vista os dados mais recentes do satélite Planck, coletados em 2018. O trabalho desenvolvido por J. Ellis e colaboradores foi feito a partir de dados do satélite WMAP e publicado em 2003, estando sem dúvidas desatualizado.

Infelizmente, as dificuldades técnicas impostas pelo uso pouco intuitivo do `micrOmegas` acabaram se constituindo um importante obstáculo no desenvolvimento deste trabalho. Sendo assim, ficamos restritos apenas a uma checagem do funcionamento do código, a partir da comparação com os resultados obtidos por [Ellis, Olive e Santoso 2003].



## 5 Conclusão

Apesar de especificamente a implementação do código `micrOmegas` não ter sido bem-sucedida, podemos dizer que o desenvolvimento deste trabalho como um todo teve êxito. Foi possível entender como o estudo de matéria escura relaciona duas grandes áreas da física, como Cosmologia e Física de Partículas, que até então foram desenvolvidas de maneira muito independente uma da outra. Também, aprendeu-se os pré-requisitos básicos que um modelo em Física de Partículas deve satisfazer se quiser descrever um potencial candidato a matéria escura e porque a hipótese dos WIMPs é tão forte para solucionar o problema.

Além disso, ao longo do trabalho, o autor foi confrontado com áreas diversas da Física pouco exploradas durante a graduação. Nesse sentido, o trabalho acabou se constituindo como uma enriquecedora oportunidade para o estudo e aprofundamento de tópicos que vão desde Cosmologia e Relatividade Geral até Supersimetria e modelos de física de partículas além do modelo padrão.

Em suma, conclui-se que matéria escura é um problema em aberto na fronteira do conhecimento atual em Física e que se constitui em uma grande oportunidade para um melhor entendimento tanto de partículas e interações como de evolução e estruturas do Universo como um todo.



# Referências

AMALDI, U.; BOER, W. de; FÜRSTENEAU, H. Comparisson of grand unified theories with electroweak and strong couplings constants measured at lep. *Physics Letters B*, 1991. Citado na página 35.

ARGHANIM, N. et al. Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 2018. Disponível em: <<https://inspirehep.net/record/1682902?ln=pt>>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 14 e 22.

BARDUCCI, D. et al. *Collider limits on new Physics within micrOmegas 4.3*. [S.l.]. Citado na página 41.

BARDUCCI, D. et al. *The user's manual, version 5.0*. [S.l.], 2018. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

BERTONE, G.; HOOPER, D.; SILK, J. Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. *Physics Reports*, p. 279–390, 2005. Citado 9 vezes nas páginas 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39 e 43.

DODELSON, S. *Modern Cosmology*. [S.l.]: Academic Press, 2003. Citado 7 vezes nas páginas 15, 16, 23, 25, 27, 28 e 29.

ELLIS, J.; OLIVE, K.; SANTOSO, Y. Supersymmetric dark matter in light of wmap. *Phys. Lett.*, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 45.

FENG, J. Dark matter candidates from particle physics and methods of detection. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 2010. Citado na página 33.

GORENSTEIN, P.; TUCKER, W. Astronomical Signatures of Dark Matter. *Adv. High Energy Physics*, 2014. Citado na página 12.

JUNGMAN, G.; KAMIONKOWSKI, M.; GRIEST, K. Supersymmetric Dark Matter. *Physics Report*, p. 195–373, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 13, 31, 32 e 34.

WHITE, S.; FRENK, C.; DAVIS, M. Cold dark matter, the structure of galactic haloes and the origin of the hubble sequence. *Nature*, p. 595–597, 1985. Citado na página 32.

ZWICKY, F. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *Astrophysics Journal*, p. 217–346, 1937. Citado na página 12.



# Apêndices



# APÊNDICE A – Etapas intermediárias da dedução da Equação de Friedmann

## A.1 Cálculo dos Símbolos de Christoffel

A métrica de FLRW é dada pela matriz:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 a^2(t) \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Dessa forma,  $g^{\mu\nu}$  é obtida calculando-se a inversa de A.1. Com isso, obtemos:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-kr^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 a^2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 a^2(t) \sin^2(\theta)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Os símbolos de Christoffel podem ser obtidos através da seguinte relação:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}), \quad (\text{A.3})$$

onde se adotou a convenção de Einstein para a soma sobre o índice  $m$ . Vamos computar os símbolos de Christoffel para dado  $i$  e depois variar os índices  $k$  e  $l$ , respectivamente.

- $i = 0$

Para  $i = 0$ , a equação A.3 se torna:

$$\Gamma_{kl}^0 = \frac{1}{2} g^{0m} (g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}). \quad (\text{A.4})$$

Do somatório em  $m$  da expressão acima, só sobrevivem os termos com  $m = 0$ , pois  $g^{0m} \neq 0$  apenas para  $m = 0$ . Com isso, a expressão A.4 se torna:

$$\Gamma_{kl}^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{0k}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^0} \right). \quad (\text{A.5})$$

Para  $k = l = 0$ , a expressão A.5 se anula, pois  $g_{00}$  é uma constante e as derivadas anulam os termos entre parêntese, logo,  $\Gamma_{00}^0 = 0$ . Para  $k, l$  não nulos, os dois primeiros termos entre parênteses são nulos; assim, para termos um símbolo de Christoffel diferente de zero, temos que ter  $g_{kl} \neq 0$ . Isso é satisfeito para  $k = l$ . Portanto,

$$\Gamma_{kk}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{kk}}{\partial t}$$

Assim, obtemos os seguintes símbolos de Christoffel para  $k = 1, 2, 3$ :

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}$$

$$\Gamma_{22}^0 = r^2 a\dot{a}$$

$$\Gamma_{22}^0 = r^2 a\dot{a} \sin^2(\theta)$$

onde  $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$ .

- $i = 1$

Para  $i = 1$ , a equação A.3 se torna:

$$\Gamma_{kl}^1 = \frac{1}{2} g^{1m} (g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}). \quad (\text{A.6})$$

Desta vez, os únicos termos não nulos da soma implícita em  $m$  são aqueles com  $m = 1$ , fazendo com que a expressão A.6 seja equivalente a:

$$\Gamma_{kl}^1 = -\frac{1 - kr^2}{2a^2(t)} \left( \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^1} \right). \quad (\text{A.7})$$

Para  $k = l = 0$ , os dois primeiros termos entre parênteses são nulos, pois as componentes da métrica são nulos, enquanto que o último termo é uma constante. Dessa forma,  $\Gamma_{00}^1 = 0$ .

Para  $k = l = 1$ , a equação A.7 se torna:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1 - kr^2}{2a^2(t)} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) = -\frac{1 - kr^2}{2a^2(t)} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = -\frac{1 - kr^2}{2a^2(t)} \cdot \frac{-a^2 \cdot (2kr)}{(1 - kr^2)^2}.$$

Logo,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1 - kr^2}$$

Para  $k = l = 2, 3$  os dois primeiros entre parênteses se anulam. Com isso, a expressão A.7 se torna:

$$\Gamma_{kk}^1 = \frac{1 - kr^2}{2a^2(t)} \cdot \frac{\partial g_{kk}}{\partial r}, \quad k = 2, 3.$$

Assim, conseguimos computar os seguintes dois símbolos de Christoffel, para  $k = 2, 3$ :

$$\boxed{\Gamma_{22}^1 = -r(1 - kr^2)}$$

$$\boxed{\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2(\theta)(1 - kr^2)}$$

Para  $k \neq l$ , o último termo entre parênteses da equação A.7 é zero. Os outros dois termos serão diferentes de zero se  $k$  ou  $l$  igual a 0 para que tenhamos componentes da métrica não triviais. Porém, para a derivação não anular os termos, ainda é preciso que  $k$  ou  $l$  seja igual a 1 também, pois a componente  $g_{11}$  depende apenas das coordenadas  $x^0 = t$  e  $x^1 = r$ . Conseqüentemente, os símbolos de Christoffel diferentes de zero com  $k \neq l$  são:

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = -\frac{1 - kr^2}{2a^2(t)} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = \frac{1 - kr^2}{2a^2(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{a^2(t)}{1 - kr^2} \right)$$

$$\boxed{\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{a}}{a}}$$

- $i = 2$

Para  $i = 2$ , a equação A.3 se torna:

$$\Gamma_{kl}^2 = \frac{1}{2} g^{2m} (g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}). \quad (\text{A.8})$$

Desta vez, os únicos termos não nulos da soma implícita em  $m$  são aqueles com  $m = 2$ , fazendo com que a expressão A.8 seja equivalente a:

$$\Gamma_{kl}^2 = -\frac{1}{2r^2 a^2(t)} \left( \frac{\partial g_{2k}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^2} \right). \quad (\text{A.9})$$

Para  $k = l \neq 2$ , os dois primeiros termos são nulos por causa da métrica. O último termo possui uma derivada em relação a  $x^2 = \theta$ ; a única componente que possui uma dependência com essa coordenada é  $g_{33}$ . Com isso, podemos computar o seguinte símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2r^2a^2(t)} \cdot \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = \frac{1}{2r^2a^2(t)} \frac{\partial}{\partial \theta}(-r^2a^2(t) \sin^2(\theta)),$$

$$\boxed{\Gamma_{33}^2 = \sin(\theta) \cos(\theta)}$$

Para  $k = l = 2$ , a equação A.9 se anula, pois  $g_{22}$  não possui dependência explícita com a coordenada  $x^2 = \theta$ .

Resta analisar o caso de  $k \neq l$ . Com essa condição, o último termo entre parênteses em A.9 é zero. Para os demais termos não serem nulos, precisamos ter  $k$  ou  $l$  igual a 2. Além disso, para a derivada não cancelar esses termos,  $k$  ou  $l$  precisam ser uma coordenada da qual  $g_{22}$  deve depender explicitamente, ou seja,  $r(x^1)$  ou  $t(x^0)$ . Daí, obtemos

$$\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = -\frac{1}{2r^2a^2(t)} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} = -\frac{1}{2r^2a^2(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(-r^2a^2(t)),$$

$$\boxed{\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{a}}{a}}$$

Analogamente,

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{2r^2a^2(t)} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2r^2a^2(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(-r^2a^2(t)),$$

$$\boxed{\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}}$$

- $i = 3$

Para  $i = 3$ , a equação A.3 se torna:

$$\Gamma_{kl}^3 = \frac{1}{2}g^{3m} (g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}). \quad (\text{A.10})$$

Desta vez, os únicos termos não nulos da soma implícita em  $m$  são aqueles com  $m = 3$ , fazendo com que a expressão A.8 seja equivalente a:

$$\Gamma_{kl}^3 = -\frac{1}{2r^2a^2(t) \sin^2(\theta)} \left( \frac{\partial g_{3k}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{3l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^3} \right). \quad (\text{A.11})$$

O último termo da equação A.11 é nulo para qualquer escolha de  $k$  e  $l$ , pois não há nenhuma componente da métrica que depende explicitamente da coordenada  $x^3 = \phi$ . Assim, para termos um símbolo de Christoffel não nulo,  $k$  ou  $l$  devem ser igual a 3. Além

disso, para a derivada não cancelar os termos,  $k$  ou  $l$  devem corresponder a uma coordenada da qual  $g_{33}$  dependa explicitamente, isto é,  $t(x^0)$ ,  $r(x^1)$  ou  $\theta(x^2)$ .

Dessa forma, a partir de A.11 conseguimos computar os seguintes símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = -\frac{1}{2r^2 a^2(t) \sin^2(\theta)} \cdot \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} = -\frac{1}{2r^2 a^2(t) \sin^2(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(-r^2 a^2(t) \sin^2(\theta)).$$

$$\boxed{\Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a}}$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = -\frac{1}{2r^2 a^2(t) \sin^2(\theta)} \cdot \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2r^2 a^2(t) \sin^2(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(-r^2 a^2(t) \sin^2(\theta)).$$

$$\boxed{\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}}$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = -\frac{1}{2r^2 a^2(t) \sin^2(\theta)} \cdot \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2r^2 a^2(t) \sin^2(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(-r^2 a^2(t) \sin^2(\theta)).$$

$$\boxed{\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot(\theta)}$$

## A.2 Cálculo do Tensor e Escalar de Ricci

O tensor de Einstein, na sua forma covariante, pode ser expresso em termos do tensor de Ricci e do escalar de Ricci:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (\text{A.12})$$

onde o tensor de Ricci pode ser calculado em termos dos símbolos de Christoffel, através da relação:

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^j}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{lm}^l - \Gamma_{il}^m \Gamma_{jm}^l. \quad (\text{A.13})$$

A partir de A.11, podemos computar as componentes do tensor de Ricci:

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{00}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{0l}^l}{\partial x^0} + \Gamma_{00}^m \Gamma_{lm}^l - \Gamma_{0l}^m \Gamma_{0m}^l$$

$$R_{00} = -\frac{\partial \Gamma_{0l}^l}{\partial x^0} - \Gamma_{0l}^m \Gamma_{0m}^l.$$

Dos símbolos de Christoffel obtidos no item anterior, temos que

$$R_{00} = -3 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -3 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \dot{a} \cdot \left( -\frac{\dot{a}}{a^2} \right) \right] - 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{3\ddot{a}}{a}.$$

$$\boxed{R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}}$$

Vamos calcular agora a componente  $R_{11}$ , a partir de A.11:

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma_{11}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{1l}^l}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^m \Gamma_{lm}^l - \Gamma_{1l}^m \Gamma_{1m}^l.$$

$$R_{11} = \left[ \frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \cancel{\Gamma_{11}^1} + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 \right] + \Gamma_{11}^0 \left[ \cancel{\Gamma_{10}^0} + \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{30}^3 \right] + \Gamma_{11}^1 \left[ \cancel{\Gamma_{11}^1} + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 \right] \\ - \cancel{\Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^0} - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \cancel{\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1} - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3.$$

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2}{r} \right) + \frac{a\dot{a}}{(1-kr^2)} \cdot \frac{2\dot{a}}{a} + \frac{kr}{1-kr^2} \cdot \frac{2}{r} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{a\dot{a}}{(1-kr^2)} - \frac{2}{r^2}.$$

$$\boxed{R_{11} = \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}}$$

Vamos prosseguir computando  $R_{22}$ , a partir de A.11:

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma_{22}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{2l}^l}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^m \Gamma_{lm}^l - \Gamma_{2l}^m \Gamma_{2m}^l,$$

$$R_{22} = \left[ \frac{\partial \Gamma_{22}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} \right] - \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x^2} + \left[ \Gamma_{22}^0 \left( \Gamma_{10}^1 + \cancel{\Gamma_{20}^2} + \Gamma_{30}^3 \right) + \Gamma_{22}^1 \left( \Gamma_{11}^1 + \cancel{\Gamma_{21}^2} + \Gamma_{31}^3 \right) \right], \\ - \cancel{\Gamma_{22}^0 \Gamma_{20}^0} - \cancel{\Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^1} - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

$$R_{22} = \frac{\partial}{\partial t} (r^2 a \dot{a}) + \frac{\partial}{\partial r} [-r(1 - kr^2)] - \frac{\partial}{\partial \theta} (\cot \theta) + r^2 a \dot{a} \cdot \frac{2\dot{a}}{a} - r(1 - kr^2) \left( \frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{1}{r} \right) - \frac{\dot{a}}{a} r^2 \dot{a} - \frac{1}{r} [-r(1 - kr^2)] - \cot^2(\theta),$$

$$\boxed{R_{22} = (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2}$$

Por último, vamos obter  $R_{33}$ :

$$R_{33} = \frac{\partial \Gamma_{33}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{3l}^l}{\partial x^3} + \Gamma_{33}^m \Gamma_{lm}^l - \Gamma_{3l}^m \Gamma_{3m}^l,$$

$$R_{33} = \left[ \frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma_{33}^0 + \frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma_{33}^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \Gamma_{33}^2 \right] + \left[ \Gamma_{33}^0 (\Gamma_{10}^1 + \Gamma_{20}^2 + \cancel{\Gamma_{30}^3}) + \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \cancel{\Gamma_{31}^3}) + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 \right],$$

$$- \cancel{\Gamma_{33}^0 \Gamma_{30}^3} - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 - \cancel{\Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1} - \cancel{\Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2},$$

$$R_{33} = \frac{\partial}{\partial t} (r^2 a \dot{a} \sin^2 \theta) + \frac{\partial}{\partial r} [-r(1 - kr^2) \sin^2 \theta] + \frac{\partial}{\partial \theta} (-\cos \theta \sin \theta),$$

$$+ r^2 a \dot{a} \sin^2 \theta \cdot \frac{2\dot{a}}{a} - r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \left( \frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{1}{r} \right),$$

$$+ r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \cdot \frac{1}{r} - (-\cos \theta \sin \theta) \cot \theta - \frac{\dot{a}}{a} \cdot r^2 a \dot{a} \sin^2 \theta,$$

$$\boxed{R_{33} = (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta}$$

Como a métrica é diagonal, o tensor de curvatura de Ricci também deve o ser. Portanto, temos que o  $R_{\mu\nu}$  é dado por

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{3\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

O escalar de Ricci é obtido através da seguinte relação:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.15})$$

De A.14 e A.2, temos que

$$R = -\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{(1 - kr^2)}{a^2} \cdot \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k}{(1 - kr^2)} - \frac{1}{r^2 a^2} \cdot (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 - \frac{1}{r^2 a^2 \sin^2(\theta)} \cdot (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 \sin^2 \theta$$

Portanto,

$$R = -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right)$$