

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**ANÁLISE DE PLACAS E CASCAS DE MATERIAIS LAMINADOS  
COM NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA, USANDO ELEMENTOS  
FINITOS 3-D, COM INTEGRAÇÃO REDUZIDA**

por

**LUCIANI NEVES LENS**

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre

1994

ESCOLA DE ENGENHARIA  
BIBLIOTECA

# **ANÁLISE DE PLACAS E CASCAS DE MATERIAIS LAMINADOS COM NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA, USANDO ELEMENTOS FINITOS 3-D, COM INTEGRAÇÃO REDUZIDA**

por

**LUCIANI NEVES LENS**

**ENGENHEIRO CIVIL**

Dissertação submetida ao corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de

**Mestre em Engenharia**

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Armando Miguel Awruch

Aprovada por:

Prof. Dr. Guill ermo J. Creus

Prof. Dr. Ronald Elwanger

Prof. Dr. Ademar G. Groehs

Prof. Dr. Sergio V. Möller

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 23 de Agosto de 1994

## AGRADECIMENTOS

Agradece-se às seguintes pessoas, indispensáveis à realização deste trabalho de dissertação :

ao professor Armando Miguel Awruch pelo apoio e orientação, fundamentais ao desenvolvimento do trabalho;

ao colega José Milton pelo programa BARRAGEM.FOR , ponto de partida deste trabalho;

aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, e do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, CPGEC, ambos da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo inestimável conhecimento transmitido; e aos funcionários pela colaboração cotidiana;

ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e a FAPERGS-Fundação de Apoio à Pesquisa do Rio Grande do Sul pela ajuda financeira dada a este trabalho;

aos colegas pela convivência e amizade.

A meus pais Corálio e Zaira,  
a Nani, ao Rafa e ao Jaime  
pelo apoio e carinho.

## RESUMO

Neste trabalho é estudado o comportamento dinâmico e estático de placas e cascas de materiais laminados anisotrópicos com não-linearidade geométrica, empregando o Método dos Elementos Finitos, com elementos 3-D de 20 nós e integração reduzida.

São apresentadas as características do problema, um resumo das principais teorias, a formulação empregada e alguns resultados obtidos.

A análise com não linearidade geométrica é realizada uma Formulação Lagrangeana Total e a análise dinâmica é feita empregando o Método de Newmark e o sistema de solução para equações não-lineares é efetuado usando o método o BFGS.

As rotinas computacionais empregadas foram feitas em FORTRAN-77, sendo o trabalho desenvolvido no sistema UNIX, nas estações de trabalho SUN-SPARCstation 1+.

De forma geral, a análise 3-D com elementos de 20 nós se mostrou muito eficiente, alcançando resultados bem próximos dos experimentais e melhores do que aqueles relativo a análise com elementos degenerados 2-D.

## **ABSTRACT**

Static and dynamic behaviour of plates and shells of laminate anisotropic materials with geometric non-linearity using 3-D isoparametric elements of 20 nodes and reduced integration are studied in this work.

The characteristic of the problems, a summary of the main theories, the employed formulation and some results are presented.

Geometric non linear analysis is performed using a total lagrangian formulation. The dynamic analysis is accomplished using Newmark's Method. Finally the non linear system of equation is solved by the BFGS technique.

FORTRAN-77 and a SUN-SPARCstation 1+ were used.

The 3-D element with 20 nodes had shown to be very efficient, getting excellent results when compared with experimental works and better than those obtained with 2-D degenerated elements.

## ÍNDICE

Resumo.....	v
Abstract.....	vi
Lista de Figuras.....	xi
Lista de Tabelas.....	xiii
Lista de Símbolos.....	xiv
Lista de Apêndices.....	xx
1.- INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - Preliminares.....	1
1.2 - Organização do Texto.....	2
1.3 - Revisão da Literatura.....	3
2.- CONCEITOS BÁSICOS.....	7
2.1 - Preliminares.....	7
2.2 - Tipos de Materiais Compostos.....	7
2.2.1 - Compostos Fibrosos ("Fibrous Composites").....	8
2.2.2 - Compostos Laminados ("Laminated Composites").....	8
2.2.3 - Compostos de Partículas ("Particulate Composites").....	9
2.3 - Classificação dos Materiais Compostos.....	10
2.3.1 - Quanto às Propriedades em Função da Posição dos Pontos no corpo.....	10
2.3.1.1 - Material Homogêneo.....	10
2.3.1.2 - Material Heterogêneo.....	10

2.3.2 - Quanto à Simetria de suas Propriedades.....	10
2.3.2.1 - Material Isótropo.....	10
2.3.2.2 - Material Ortótropo.....	11
2.3.2.3 - Material Anisótropo.....	11
2.4 - Variação da Resistência e Rigidez de alguns Materiais.....	11
3.- TEORIA DA ELASTICIDADE APLICADA A MATERIAIS COMPOSTOS.....	13
3.1 - Preliminares.....	13
3.2 - Relações Constitutivas de uma lâmina.....	14
3.3 - Transformação das constantes elásticas sob uma mudança do sistema de coordenadas.....	18
3.4 - Análise não linear geométrica.....	20
3.4.1 - Equações incrementais do movimento segundo a Descrição Lagrangeana Total.....	21
4.- FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE ESTÁTICA( LINEAR E NÃO-LINEAR) E DINÂMICA.....	26
4.1 - Preliminares.....	26
4.2 - Análise não linear geométrica.....	26
4.3 - Análise dinâmica.....	28
5.- APLICAÇÕES.....	31
5.1 - Preliminares.....	31
5.2 - Análise Estática.....	31
5.2.1 - CASO 1 - Análise Linear de uma viga bi-apoiada, sujeita a uma carga concentrada P no centro da mesma.....	32
5.2.2 - CASO 2 - Análise Linear de uma viga bi-apoiada, sujeita	



	a uma carga uniformemente distribuída .....	34
5.2.3 - CASO 3	- Análise Linear de uma viga bi-apoiada, sujeita ao peso próprio.....	35
5.2.4 - CASO 4	- Análise Linear de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a uma carga concentrada $P$ , no centro..	36
5.2.5 - CASO 5	- Análise Linear de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a uma carga uniformemente distribuída $q$ .....	38
5.2.6 - CASO 6	- Análise Linear de uma placa simplesmente apoiada, sujeita ao peso próprio $t$ .....	39
5.2.7 - CASO 7	- Análise Linear de uma casca cilíndrica, sujeita a uma carga uniformemente distribuída $q$ .....	39
5.2.8 - CASO 8	- Análise Linear e Não linear Geométrica de uma placa simplesmente apoiada, com e sem enrijecedor, sujeita a uma carga distribuída uniforme $q$ .....	42
5.2.9 - CASO 9	- Análise Linear e Não linear Geométrica de uma placa simplesmente apoiada ortotrópica, sujeita a uma carga distribuída uniforme $q$ .....	43
5.2.10 - CASO 10	- Análise Linear e Não linear Geométrica de uma placa engastada anisótropa (0/90/0/90), sujeita a uma carga uniformemente distribuída $q$ .....	45
5.3 - Análise Dinâmica.....		46
5.3.1 - CASO 11	- Análise Dinâmica Linear de uma viga simplesmente apoiada, sujeita a uma carga pulso concentrada no ponto central, sem amortecimento.....	47
5.3.2 - CASO 12	- Análise Dinâmica Linear de uma viga simplesmente	

apoiada, sujeita a uma carga pulso $P_0$ no centro da mesma, com amortecimento.....	48
5.3.3 - CASO 13 - Análise Dinâmica Não linear de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a uma carga pulso uniformemente distribuída, sem amortecimento.....	49
5.4 - Análise de Tensões.....	51
5.4.1 - CASO 14 - Análise de Tensões em uma viga bi-apoiada, sujeita a uma carga concentrada P.....	51
6.- CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	54
ANEXO A - Formulação do elemento 3-D de 20 nós empregado.....	56
ANEXO B - Projeção de tensões.....	59
BIBLIOGRAFIA.....	62

## LISTA DE FIGURAS

### Figura

2.1 - Compostos laminados reforçados com fibras.....	9
2.2 - Variação da resistência e rigidez de fibras e lâminas.....	12
5.1 - Características geométricas do caso 1.....	32
5.2 - Malha de elementos finitos para o caso 1.....	33
5.3 - Características geométricas do caso 4.....	36
5.4 - Malha de elementos finitos para o caso 4.....	37
5.5 - Geometria e condições de contorno do caso 7.....	40
5.6 - Malha de elementos finitos empregada no caso 7.....	40
5.7 - Gráfico deslocamento $w$ ao longo da casca do caso 7.....	41
5.8 - Gráfico deslocamento $v$ ao longo da casca do caso 7.....	41
5.9 - Geometria e condições de bordo do caso 8, com e sem enrijecedor.....	42
5.10 - Gráfico deslocamento central versus carga para o caso 8.....	43
5.11 - Geometria e condições de contorno do caso 9.....	44
5.12 - Gráfico carga deslocamento central versus para o caso 9.....	44
5.13 - Geometria e condições de contorno do caso 10.....	45
5.14 - Gráfico carga versus deslocamento central para o caso 10.....	46
5.15 - Gráfico deslocamento central versus tempo para o caso 11.....	48
5.16 - Gráfico deslocamento central versus tempo para o caso 12-a e 12-b .....	49
5.18 - Geometria e condições de contorno do caso 13.....	50
5.19 - Gráfico deslocamento central versus tempo para o caso 13.....	50
5.20 - Distribuição de tensões $\sigma_{xx}$ em uma seção genérica.....	52

**APÊNDICE A**

A-1 - Formulação do elemento isoparamétrico 3-D de 20 nós.....54

## LISTA DE TABELAS

Tabela

I.5.1 - Avaliação dos resultados do caso 1 .....	34
I.5.2 - Avaliação dos resultados do caso 2 .....	35
I.5.3 - Avaliação dos resultados do caso 3 .....	36
I.5.4 - Avaliação dos resultados do caso 4 .....	38
I.5.5 - Avaliação dos resultados do caso 5 .....	38
I.5.6 - Avaliação dos resultados do caso 6 .....	39
I.5.7 - Distribuição das tensões $\sigma_{xx}$ em uma seção generica.....	52

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Capítulo I

2-D	bi-dimensional
3-D	tridimensional
$w$	incógnita em deslocamento
$w_{,x}$	derivada de $w$ em relação a $x$
$w_{,xx}$	segunda derivada de $w$ em relação a $x$
$w_{,y}$	derivada de $w$ em relação a $y$
$w_{,yy}$	segunda derivada de $w$ em relação a $y$

### Capítulo II

$\alpha$	ângulo de inclinação das fibras
----------	---------------------------------

### Capítulo III

$\Delta \varepsilon_{ij}$	incrementos do 2º tensor de deformações de Green-Lagrange
$\Delta \eta_{ij}$	parte não linear do 2º tensor de deformações de Green-Lagrange
$\Delta \mathbf{e}_{ij}$	parte linear do 2º tensor de deformações de Green-Lagrange
$\Delta \mathbf{S}_{ij}$	incrementos do 2º tensor de tensões de Piola-Kirchhoff
$\delta_{t+\Delta t} \mathbf{e}_{ij}$	variação virtual das componentes cartesianas do tensor deformações infinitesimais
$\delta \Delta \mathbf{u}_k$	variação virtual dos deslocamentos ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_k$
$\varepsilon_{ii}, \varepsilon_i$	deformações normais, com $i = 1, 2, 3$
$\varepsilon_{ij}$	deformações por corte, com $i = 1, 2, 3$
$\{\varepsilon\}$	vetor de deformações
$\bar{\varepsilon}_i$	deformações segundo as direções principais das propriedades do material

${}^{t+\Delta t}_o \epsilon_{ij}$	componentes cartesianas do 2 <sup>o</sup> tensor de deformações de Green-Lagrange na configuração $t + \Delta t$ , medidas na configuração inicial
$\nu_{ij} = \nu_i = \nu$	coeficiente de Poisson, com $i = 1, 2, 3$ representando os eixos $x, y, z$
$\rho$	massa específica do corpo
$\theta$	ângulo de inclinação das fibras, do eixo $x$ para $\bar{x}$
$\{\sigma\}$	vetor de tensões
$\sigma_{ii}, \sigma_i$	componentes de tensões normais, com $i = 1, 2, 3$ representando os eixos $x, y, z$
$\sigma_{ij}$	componentes de tensões de corte, com $i, j = 1, 2, 3$
$\bar{\sigma}_i$	tensões segundo as direções principais das propriedades do material, com $i = 1, 2, \dots, 6$
${}^{t+\Delta t} \tau_{ij}$	componentes cartesianas do tensor de Cauchy no tempo $t + \Delta t$
$[C]$	matriz constitutiva elástica, relaciona tensão com deformação
$\bar{C}_{ij}$	coeficientes da matriz constitutiva elástica no sistema $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$
$C_{ijmn}$	coeficientes da matriz constitutiva elástica
$C_o$	configuração inicial $t = 0$ (zero)
$C_{t+\Delta t}$	configuração no tempo $t + \Delta t$
$[D]$	matriz que relaciona deformação com tensão
$E_{ij} = E_i = E$	módulo de elasticidade longitudinal, com $i, j = 1, 2, 3$
${}^t F$	forças internas aplicadas na configuração de tempo $t$
${}^{t+\Delta t} f_{t+\Delta t}$	forças de massa aplicadas externamente, referidas na configuração $C_{t+\Delta t}$
$G_{ij} = G_i = G$	módulo de elasticidade transversal, com $i, j = 1, 2, 3$
${}^{t+\Delta t} \mathcal{R}$	trabalho realizado pelas forças externas
${}^t R$	forças externas aplicadas na configuração de tempo $t$
${}^{t+\Delta t}_o S_{ij}$	componentes cartesianas do 2 <sup>o</sup> tensor de tensões de Piola-Kirchhoff

$u, v, w$	componentes de deslocamento em relação aos eixos $x, y, z$ , respectivamente
$\{u\}$	vetor de deslocamentos
${}^{t+\Delta t}_o u_i$	componentes de deslocamento correspondentes ao movimento de corpo rígido entre as configurações $C_o$ e $C_{t+\Delta t}$
$x, y, z$	sistema de coordenadas cartesiano
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	sistema de coordenadas de simetria das propriedades do material
${}^{t+\Delta t} x_i$	coordenadas cartesianas de um ponto qualquer do corpo, na configuração $C_{t+\Delta t}$
${}^o x_k$	coordenadas cartesianas de um ponto qualquer do corpo, na configuração $C_o$

#### Capítulo IV

$\alpha, \delta$	coeficientes do Método de Newmark
$\beta, \gamma$	coeficientes de amortecimento de Rayleigh
$\Delta\delta^e$	vetor de incremento de deslocamentos nodais
$\rho$	massa específica do corpo
$[c]$	matriz de amortecimento
${}^t_o [B_L]$	matriz de deformação-deslocamento linear
${}^t_o [B_{NL}]$	matriz de deformação-deslocamento não-linear
$d\xi, d\eta, d\zeta$	diferencial em relação aos eixos $\xi, \eta$ e $\zeta$
$\det J$	determinante do Jacobiano
${}^t_o \{F\}$	vetor de forças internas no tempo $t$
$\{\bar{F}\}$	vetor de forças equivalentes
$\{f\}$	vetor de forças
$[K]$	matriz de rigidez
$[\bar{K}]$	matriz de rigidez equivalente



${}^t_0[\mathbf{K}_L]$	matriz de rigidez linear no tempo $t$ medido com relação à configuração inicial
${}^t_0[\mathbf{K}_{NL}]$	matriz de rigidez não-linear no tempo $t$ medido com relação à configuração inicial
$[\mathbf{m}]$	matriz de massa
${}^t_0[\mathbf{S}]$	matriz de componentes do 2 <sup>o</sup> Tensor de tensões de Piola-Kirchhoff
${}^t_0[\hat{\mathbf{S}}]$	vetor de componentes do 2 <sup>o</sup> Tensor de tensões de Piola-Kirchhoff
$\{\mathbf{u}\}$	vetor de deslocamentos
$\{\dot{\mathbf{u}}\}$	vetor de velocidades
$\{\ddot{\mathbf{u}}\}$	vetor de acelerações

### Capítulo V

$\alpha$	ângulo de inclinação das fibras
$\beta$ e $\gamma$	coeficientes de amortecimento de Rayleigh
$\bar{\delta}, \bar{\alpha}$	parâmetros do Método de Newmark
$\Delta t$	intervalo de tempo considerado
$\nu_{ij}$	coeficiente de Poisson no plano $ij$ , com $i,j=1,2,3$
$\rho$	massa específica do corpo
$\phi$	ângulo do arco
$\sigma_i^*$	tensão $\sigma_{xx}$ no ponto $i$ , com $i=1, 2, \dots, 6$
$\sigma_{xx}$	tensão normal na direção $x$
$\sigma_c^*$	tensão $\sigma_{xx}$ analítica
$a$	dimensão lateral da placa
$b, h$	dimensões da seção transversal da peça
$E_{ii} = E_i = E$	módulo de elasticidade longitudinal na direção $i$ , com $i=1, 2, 3$
$G_{ij}$	módulo de elasticidade transversal no plano $ij$ , com $i,j=1, 2, 3$
$I$	momento de inércia

$L$	comprimento longitudinal da peça
$M_x$	momento fletor
$N$	número de elementos
$NNOS$	número total de nós
$P$	carga concentrada
$P_0$	carga pulsante concentrada
$q$	carga distribuída por $m^2$
$\hat{q}$	carga distribuída por $m$
$q_0$	carga pulsante uniformemente distribuída
$t$	força de corpo
$u$	deslocamento na direção $x$
$v$	deslocamento na direção $y$
$w$	deslocamento na direção $z$
$W_1$	velocidade angular para o primeiro modo de vibração
$w_i$	deslocamento teórico na direção $z$ no nó $i$ (nó central)
$w_e$	deslocamento teórico na direção $z$
$\bar{z}$	altura da linha neutra
$T_1$	período do primeiro modo de vibração, em segundos

### Apêndice A

$\xi, \eta$ e $\zeta$	sistema de coordenadas naturais
$[B]$	matriz deslocamento-deformação
$[J]$	matriz do Jacobiano
$\ J\ $	determinante do Jacobiano
$[K]$	matriz de rigidez
$N$	polinômio de interpolação
$N_i$	polinômio de interpolação para o nó $i$ , com $i=1, 2, \dots, 20$

$u, v, w$  componentes de deslocamento na direção  $x, y, z$ , respectivamente  
 $x, y, z$  coordenadas cartesianas

### Apêndice B

$\sigma^*$  tensão nos nós do elemento  
 $\sigma^{*e}$  matriz de tensões nos nós para cada elemento  
 $\hat{\sigma}$  tensões nos pontos de integração  
 $M$  matriz de massa diagonalizada  
 $M^e$  matriz de massa diagonalizada para cada elemento  
 $M^{G-1}$  inversa da matriz de massa global  
 $N_o$  função de interpolação para tensões  
 $P$  vetor de esforços  
 $P^e$  vetor de esforços para cada elemento  
 $P^G$  vetor de esforços global  
 $\bar{u}$  deslocamento no pontos de integração

## LISTA DE APÊNDICE

APÊNDICE A - Formulação do elemento isoparamétrico 3-D de 20 nós empregado...	56
APÊNDICE B - Projeção de Tensões.....	59

## I - INTRODUÇÃO

### 1.1 - Preliminares

A crescente utilização do Método dos Elementos Finitos, associado ao avanço tecnológico dos equipamentos de computação com o advento dos supercomputadores, impulsionaram os estudos do comportamento mais real das estruturas (analisando-as no espaço 3-D, e considerando não-linearidade física e geométrica), bem como o surgimento de novos materiais mais leves e mais resistentes em direções bem definidas, seja através do reforço por fibras, da utilização de diferentes materiais por camadas, ou ainda de partículas de um material na matriz de outro, que são exemplos típicos de materiais compostos.

Nas últimas décadas, o uso destes materiais nas estruturas aero-espaciais e automotivas cresceu consideravelmente e seu campo de aplicação vem aumentando à medida que o conhecimento técnico, tanto para análise como para execução, está sendo dominado e difundido. Materiais compostos já estão sendo utilizados na medicina em prótese, em equipamentos de esporte, equipamentos eletrônicos, entre outros.

Frente a estes avanços um dos grandes problemas das estruturas laminadas ainda tem sido quando uma camada desliza em relação a outra, ou seja, quando ocorre delaminação. Para evitar a delaminação é necessário conhecer a real distribuição dos esforços em todas as camadas, bem como a capacidade de resistência dos materiais que as compõem; sendo assim, a análise no plano 2-D com elementos degenerados de placas e cascas não é eficiente para avaliar tal fenômeno.

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é a implementação computacional de um programa em linguagem FORTRAN que faça a análise dinâmica e estática de cascas e placas de materiais laminados com não-linearidade geométrica, usando elementos finitos 3-D de 20 nós, com integração reduzida.

A teoria e a formulação empregada são descritas ao longo deste trabalho, alguns resultados obtidos são apresentados e comparados com aqueles obtidos de elementos degenerados de placas e cascas, ou com resultados experimentais encontrados na bibliografia especializada.

## 1.2 - Organização do Texto

O texto desta dissertação encontra-se dividido em 6 capítulos. O capítulo I é constituído pela presente introdução, onde se apresenta os objetivos e motivações para realização deste trabalho, a organização do texto e um breve resumo histórico da aplicação do Método dos Elementos Finitos a cascas e placas.

No capítulo II, apresenta-se os conceitos básicos sobre materiais compostos, a descrição dos diferentes tipos, sua classificação sob diferentes aspectos, assim como alguns exemplos de materiais e suas vantagens estruturais.

No capítulo III, é descrita a Teoria da Elasticidade aplicada a materiais compostos, incluindo a análise dinâmica e o enfoque da não-linearidade geométrica.

No capítulo IV é apresentada a formulação do Método dos Elementos Finitos para análise estática, linear e não linear, e para análise dinâmica.

No capítulo V, apresenta-se de forma concisa os dados relativos aos exemplos numéricos resolvidos, assim como a análise dos resultados obtidos, comparando-os com resultados experimentais e com resultados da teoria de placas e cascas 2-D com elementos degenerados.

No capítulo VI, são apresentados as conclusões deste trabalho e algumas sugestões para complementação e aperfeiçoamento deste trabalho.

Os apêndices A, B encerram este trabalho. No apêndice A é descrita a formulação do elemento 3-D isoparamétrico de 20 nós empregado, no apêndice B é apresentada a formulação empregada para a projeção de tensões (processo pelo qual os valores obtidos nos pontos de integração são levados aos nós).

### 1.3 - Revisão Histórica

Placas e cascas como um caso particular de um sólido tridimensional podem ser analisadas empregando o Método dos Elementos Finitos com distintas teorias. Por exemplo, placas podem ser analisadas pela Teoria de Placa Fina (utilizando as hipóteses de Kirchhoff) e pela Teoria de Placa Espessa (empregando os postulados de Reissner-Mindlin), utilizando elementos diferentes.

Neste sentido tem-se que a Teoria de Placa Fina, baseada nas hipóteses formuladas por Kirchhoff em 1850, cuja primeira e mais importante hipótese admite que as retas normais à placa na configuração original, permanecem retas e normais à superfície média deformada, conduzindo a uma distribuição linear das deformações ao longo da espessura. A segunda hipótese parte da observação de que as tensões normais à direção "z" são pequenas, desconsiderando as deformações nesta direção; esta inconsistência na aproximação é compensada pela hipótese de tensões planas em cada lâmina.

Uma relaxação destas hipóteses foi introduzida por Reissner em 1945 e uma maneira diferente de desconsiderá-las foi introduzidas por Mindlin em 1951. As teorias modificadas, associadas aos postulados de Reissner-Mindlin, estenderam a análise ao campo de aplicação das placas espessas.

Entre os elementos empregados, que utilizam a teoria de placa fina baseada nas hipóteses de Kirchhoff, podemos citar :

- a) Retângulo R-12 com 4 nós, 3 parâmetros por nó  $(w, w_x, w_y)$  e 12 graus de liberdade;
- b) Triângulo T-9 com 3 nós, 3 parâmetros por nó  $(w, w_x, w_y)$  e 9 graus de liberdade;
- c) Triângulo T-21 com 3 nós, 6 parâmetros para os nós de canto  $(w, w_x, w_y, w_{,yy}^2, w_{,xx}^2, w_{,xy}^2)$  e 1 parâmetro para os nós intermediários  $(w, \eta)$ , com  $\eta$  como direção local, e 21 graus de liberdade;
- d) Triângulo T-18 com 3 nós, 6 parâmetros por nó  $(w, w_x, w_y, w_{,yy}^2, w_{,xx}^2, w_{,xy}^2)$ , e 18 graus de liberdade.

Os elementos T-9 e Q-12 são elementos não conformes, isto é, satisfazem o critério de serem completos mas violam parcialmente a continuidade, ou seja, não satisfazem a continuidade das primeiras derivadas; são bastante simples de serem implementados, podendo em alguns casos convergirem para solução correta. O elemento T-21 introduzido, independente e simultaneamente, por ARGYRIS et. al. (1968), BELL (1969), BOSSHARD (1968), IRONS (1969) e VISSEC (1968), e o elemento T-18 introduzido por ARGYRIS et. al. (1968), BELL (1969) e COWPER et. al. (1968), são elementos conformes e apresentam bom desempenho.

Elementos que incluem a deformação por corte, segundo as teorias de Reissner ou Mindlin, são introduzidos para analisar placas espessas, sendo fácil sua implementação pois não requerem continuidade da primeira derivada.

Entretanto este tipo de elemento não é adequado para tratar placas muito finas, onde as hipóteses de Kirchhoff se cumprem, e as deformações por corte são quase nulas conduzindo a resultados errados. Outra limitação é a superestimação da energia por corte quando se utiliza a mesma função de interpolação para deslocamentos e rotações. Para solucionar este problema utiliza-se a técnica de integração reduzida.

As teorias de casca começaram com a Teoria de Membrana estabelecida por Lamé e Clapeyron em 1816, e posteriormente com a teoria de flexão formulada em 1874 por Aron, sendo que a primeira Teoria Geral foi estabelecida por Love em 1888. A partir destas teorias



vários outros trabalhos surgiram trazendo soluções analíticas fechadas, as quais apresentam restrições de geometria carregamento, condições de apoio, etc.

A complexibilidade da análise de cascas encontra-se no seu comportamento não linear, quer seja físico ou geométrico, nas variações de geometria com diferentes espessuras e curvaturas assim como a freqüente utilização de enrijecedores, entre outros. Neste contexto, a aplicação dos métodos numéricos, principalmente o Método dos Elementos Finitos, representam uma ferramenta eficiente para resolver problemas mais complexos.

Sendo assim, a aplicação do Método dos Elementos Finitos à análise de cascas tem sido intensa, e inúmeros são os trabalhos que introduzem novos elementos, simplificando e eliminando possíveis restrições e erros de análise. Entre os diversos elementos empregados estão os elementos planos, que consideram o comportamento de flexão e de membrana, os elementos curvos baseados em teorias de cascas, e os elementos tridimensionais degenerados deduzidos de elementos isoparamétricos tridimensionais.

Os elementos planos foram os primeiros a serem desenvolvidos, pois após sua utilização em problemas de estado plano e de flexão de placas estendeu-se sua utilização para estruturas laminares curvas ou planas, aproximando a geometria com elementos planos tais como : elemento triangular T-21 e T-18 ou mesmo o elemento não conforme T-9. Os elementos planos fornecem bons resultados em determinados casos, mas em geral não apresentam bom desempenho necessitando de uma discretização bastante refinada para melhorar sua performance.

Entre os principais problemas deste tipo de elemento citam-se :

- a) desconsideram o acoplamento entre o comportamento de flexão e de membrana;
- b) apresentam dificuldades para tratar as uniões de elementos coplanares;
- c) fazem surgir momentos fletores nas uniões que não existem na geometria original.

A fim de representar melhor a geometria e de considerar o acoplamento existente entre os comportamento de membrana e flexão surgiram os elementos curvos baseados nas teorias de casca, os quais foram introduzidos em 1966 por Gallagher, surgindo posteriormente

inúmeros elementos baseados em diferentes teorias de casca. Esses elementos empregam coordenadas curvilíneas de superfície que acompanham a superfície média da casca. As dificuldades encontram-se na definição da relação deformação-deslocamento generalizada, na escolha de uma teoria de casca na qual a energia de deformação seja nula para movimentos de corpo rígido, na definição adequada dos deslocamentos angulares, e na aproximação da geometria, entre outros.

Elementos tridimensionais também são utilizados para modelar cascas; seu interesse está na possibilidade de dispensar as teorias especiais de cascas e seus inconvenientes, utilizando elementos como os isoparamétricos, os quais são adequados para aproximar geometrias complexas.

Entretanto, com a finalidade de reduzir o número de graus de liberdade AHMAD (1968) deduziu, a partir dos elementos isoparamétricos tridimensionais, os chamados elementos tridimensionais degenerados. Para tal impôs as hipóteses de deformações nulas na direção da espessura e de que as normais à superfície média permanecem retas, e não necessariamente normais, após a deformação, definindo os nós sobre a superfície média somente e adotando três translações e duas rotações como graus de liberdade em cada nó.

A análise tridimensional, assim como a análise tridimensional com elementos degenerados, apresentam problemas quando a casca é muito delgada, ou seja, quando as deformações de cisalhamento transversal são nulas. Técnicas de integração reduzida e seletiva, formulações mistas são exemplos de procedimentos adotados para eliminar estas fragilidades.

Neste trabalho propõe-se a utilização de elementos tridimensionais de 20 nós para a análise de placas e cascas e os resultados obtidos são comparados com aqueles de elementos degenerados 3-D e com resultados experimentais.

## II - CONCEITOS BÁSICOS

### 2.1 - Preliminares

Este capítulo introduz, de forma breve, os conceitos básicos e fundamentais ao estudo dos materiais compostos, seus diferentes tipos, assim como suas diferentes classificações em função de suas propriedades.

Em termos gerais, material composto é definido como a combinação de dois ou mais materiais em escala microscópica, resultando em um material homogêneo em escala macroscópica.

A vantagem principal da utilização de materiais compostos é a melhoria da qualidade dos materiais constituintes, podendo surgir propriedades que os materiais não apresentavam isoladamente. Entre as propriedades exibidas por estes materiais podemos citar: altas relações resistência/peso e rigidez/peso, isolamento térmico e acústico, resistência à corrosão e a fadiga, estabilidade dimensional (coeficiente de dilatação nulo); tais características conduzem a estruturas extremamente leves, resistentes e rígidas, justificando assim o seu uso intenso nas indústrias aeronáutica, aeroespacial e automobilísticas.

A seguir são apresentados os tipos de materiais compostos.

### 2.2 - Tipos de Materiais Compostos

Existem diversos tipos, os quais pertencem basicamente a uma das três classes abaixo, ou combinações delas, a saber:

- i ) compostos fibrosos;
- ii ) compostos laminados;
- iii ) compostos de partículas.

### 2.2.1 - Compostos Fibrosos ("Fibrous Composites")

Constituem os materiais formados de fibras de um determinado material, unidas por um aglomerante chamado matriz. O interesse na utilização dos compostos fibrosos está nas fibras, as quais são bem mais resistentes e rígidas que um bloco do mesmo material.

Além da resistência das fibras, cuidados com a resistência da matriz e com a união fibra-matriz devem ser levados em consideração, pois sempre que uma fibra falhar, a matriz deve suportar tensões de cisalhamento geradas pela transferência de esforços de uma fibra para outra.

Dois exemplos de compostos fibrosos são: fibras de boro unidas com resina epoxi ( os chamados boro-epoxi ), e fibras de grafite unidas por resina epoxi ( os chamados grafite-epoxi ).

### 2.2.2 - Compostos Laminados ( "Laminated Composites" )

Constituem os materiais formados de lâminas de diferentes materiais, isto é, duas ou mais camadas de diferentes materiais unidas para combinar suas melhores qualidades.

Compostos laminados reforçados por fibras possuem características de compostos fibrosos e laminados simultaneamente, e sendo constituídos por um conjunto de lâminas unidas e tendo o mesmo material como matriz, onde as orientações das fibras de cada lâmina são arbitrárias. Em função das lâminas componentes pode-se apresentar características diferenciadas uma das outras, ocorrem deformações diferenciadas, surgindo com isto tensões de cisalhamento inter laminares, aumentando a complexibilidade do estudo.

Na figura 2.1 pode-se observar lâminas com fibras cruzadas, formando ângulo  $\alpha=90^\circ/0^\circ$  (denominadas 'cross-ply'), e fibras formando ângulo  $+\alpha/-\alpha$  com o eixo x local (denominadas 'angle-ply').

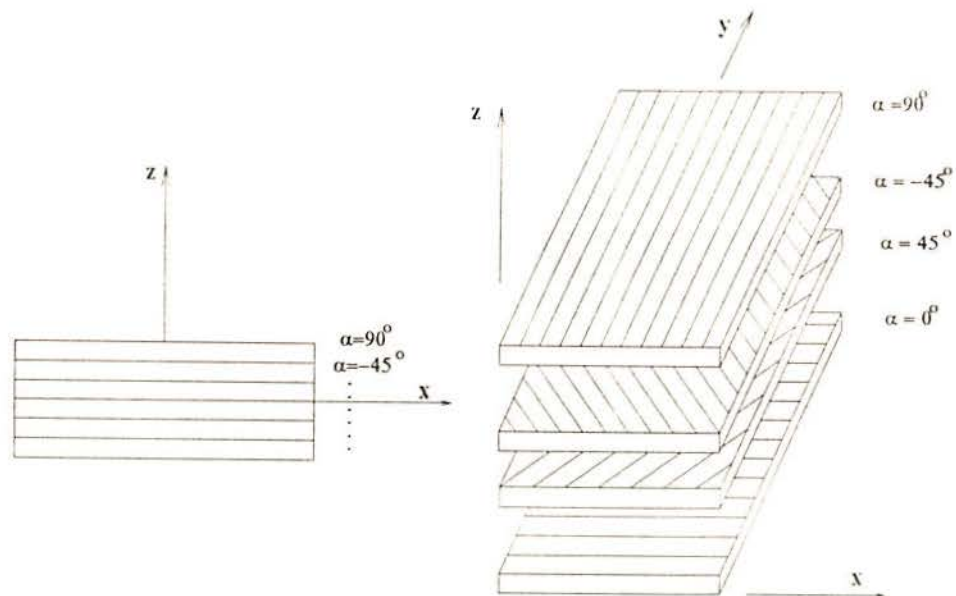


Figura 2.1 - Compostos laminados reforçados com fibras.

Lâminas de boro-epoxi ou grafite-epoxi dispostas em camadas, nas quais as fibras estão cruzadas ou formando ângulos, são exemplos de compostos laminados reforçados com fibras.

### 2.2.3 - Compostos de Partículas ( "Particulate Composites" )

Constituem os materiais formados de partículas de um ou mais materiais suspensas em uma matriz de outro material. As partículas, assim como a matriz, podem ser formadas de materiais metálicos ou não-metálicos; sendo assim tais compostos combinam estas características e pode-se ter: compostos metálicos em metálicos, metálicos em não-metálicos, não-metálicos em metálicos e não-metálicos em não-metálicos, o quer dizer partícula da primeira propriedade e matriz da segunda.

O concreto é um exemplo de composto metálico em não-metálico.

## **2.3 - Classificação dos Materiais**

Os materiais podem ser classificados quanto a variação das propriedades em relação à posição do corpo, e quanto à simetria destas propriedades, entre outras.

### **2.3.1 - Quanto às Propriedades em Função da Posição dos Pontos no Corpo**

Sob estes aspectos, os materiais podem ser considerados homogêneos ou heterogêneos.

#### **2.3.1.1 - Material Homogêneo**

O material homogêneo possui propriedades uniformes em todos os pontos do corpo, isto é, suas propriedades não variam em função da posição do ponto no corpo.

#### **2.3.1.2 - Material Heterogêneo**

O material heterogêneo possui propriedades diferentes de um ponto para outro, isto é, suas propriedades variam em função da posição do ponto no corpo.

### **2.3.2 - Quanto à Simetria de suas Propriedades**

Sob este aspecto, os materiais podem ser classificados como: isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos.

#### **2.3.2.1 - Material Isótropo**

A caracterização de um material como isotrópico implica que as propriedades mecânicas sejam as mesmas em todas as direções, para qualquer ponto do corpo. Portanto estas propriedades independem da orientação em qualquer ponto do corpo, apresentando infinitos planos de simetria.

### 2.3.2.2 - Material Ortótropo

As propriedades mecânicas de um material ortótropo são distintas em três direções mutuamente ortogonais, para qualquer ponto do corpo, apresentando três planos de simetria mutuamente perpendiculares entre si. Portanto as propriedades variam em função da orientação em qualquer ponto do corpo.

### 2.3.2.3 - Material Anisótropo

As propriedades mecânicas de um material anisótropo são diferentes em todas as direções, para qualquer ponto do corpo, e não apresentam planos de simetria.

Materiais isotrópicos, ortótropos e anisótropos apresentam diferentes equações constitutivas, sendo que os dois primeiros tem suas matrizes constitutivas derivadas daquela dos materiais anisótropos, através da introdução de algumas simplificações que facilitam sua aplicação na maioria dos programas de análise. Neste trabalho foi implementada a equação constitutiva para materiais anisótropos, sendo testada para analisar problemas com materiais das três classes acima.

## 2.4 - Variação da Resistência e Rigidez de alguns Materiais

Nesta seção, apresenta-se na figura 2.2 alguns dados sobre resistência e rigidez (em função da densidade), fornecidos por PROLA (1987), os quais verificam o comportamento de alguns materiais, tais como: boro, grafite, aço. Pode-se observar que as fibras são mais resistentes e rígidas que materiais como alumínio e aço, e por outro lado, as fibras em uma direção somente apresentam melhor performance quando comparadas com fibras dispostas nas duas direções.

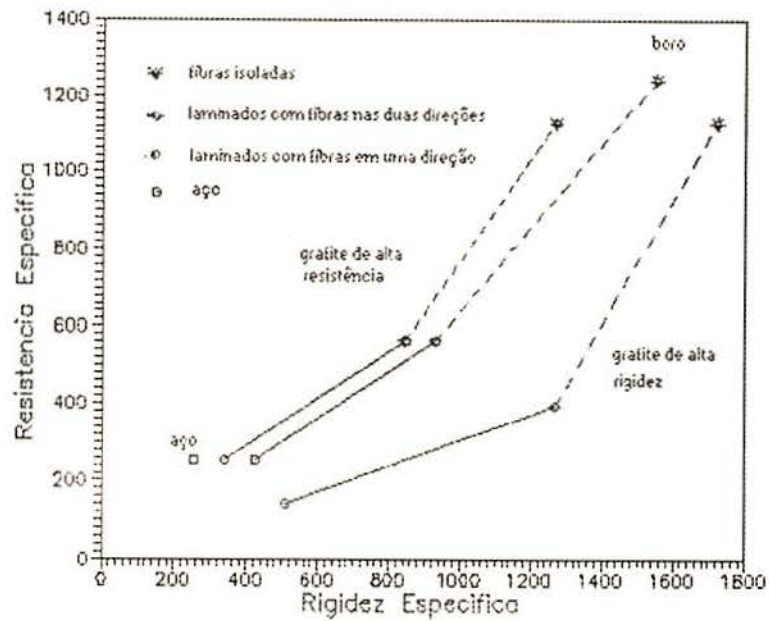


Figura 2.2 - Variação da resistência e rigidez de fibras, lâminas com fibras em uma e duas direções.

Observa-se, na figura 2.2, que as fibras são mais resistentes, seguida das lâminas com fibras em uma direção, lâminas com fibras em duas direções e por fim os metais. Entre os materiais mais resistentes temos o boro e o grafite de alta resistência.



### III - TEORIA DA ELASTICIDADE APLICADA A MATERIAIS COMPOSTOS

#### 3.1 - Preliminares

Este capítulo tem por finalidade estender para o caso tridimensional as Equações da Elasticidade, usualmente empregadas na formulação de Elementos Finitos, estabelecendo as relações constitutivas usadas na análise de placas e cascas laminadas com comportamento elástico, assim como a descrição dos aspectos fundamentais da análise não linear geométrica .

Inicialmente devemos considerar, para o caso tridimensional, três componentes de deslocamento, que podem ser escritas da seguinte forma:

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

e seis componentes de deformações específicas:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^2} \right] \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}^2} \right] \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}^2} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{w} \partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{w} \partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{z}} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{w} \partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{x}} \right] \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Para problemas lineares, as deformações específicas da equação (3.2) podem ser simplificadas, desconsiderando os termos de segunda ordem, obtendo-se

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

O estado de tensões em um volume elementar de um corpo carregado é definido em termos de seis componentes de tensões, expressas em forma vetorial como segue:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

### 3.2 - Relações Constitutivas para uma Lâmina

A relação tensão-deformação, também conhecida como Lei de Hooke Generalizada, de um material elástico e anisótropo é expressa da seguinte maneira :

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad ; \quad (\text{para } i,j,m,n = 1,2,3) \tag{3.5}$$

na qual, por simetria de tensões e deformações, tem-se que:

$$\begin{aligned} C_{ijmn} &= C_{jimn} \\ C_{ijmn} &= C_{ijnm} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Então pode-se representar a equação (3.5) com uma notação contraída, do seguinte modo:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad ; \quad (\text{para } i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.7)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1 & \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 \\ \sigma_{22} &= \sigma_2 & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 \\ \sigma_{33} &= \sigma_3 & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3 \\ \sigma_{12} &= \sigma_4 & \varepsilon_{12} &= \varepsilon_4 \\ \sigma_{13} &= \sigma_5 & \varepsilon_{13} &= \varepsilon_5 \\ \sigma_{23} &= \sigma_6 & \varepsilon_{23} &= \varepsilon_6 \end{aligned}$$

A matriz  $C$ , expressa na equação (3.8), é referida como matriz constitutiva elástica do material e os coeficientes  $C_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) são denominadas de constantes elásticas do material; na forma matricial tem-se

$$[C] = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Se existe uma função energia de deformação por unidade de volume, cuja existência está condicionada a considerações termodinâmicas (a variação do corpo sob deformação deve ocorrer isotermicamente), o número das constantes elásticas diminui de trinta e seis para vinte e um, devido a simetria da matriz  $C$ , uma vez que:

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (3.9)$$

Se existe um plano de simetria elástica para cada ponto da lâmina, ou seja, as propriedades elásticas são as mesmas para a direção perpendicular ao plano de simetria, o número de constantes elásticas independentes fica reduzido a treze. Se este plano de simetria for o plano  $z = 0$ , chega-se as seguintes constantes elásticas :

$$[C] = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Se existe três planos mutuamente ortogonais de simetria elástica para cada ponto de lâmina ( característica dos materiais ortótropos), o número de constantes se reduz para nove, uma vez que:

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0 \quad (3.11)$$

Se há um número infinito de planos de simetria elásticas para cada ponto da lâmina, ou seja, se as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções (material isotrópico), o número de constantes elásticas independentes se reduz a duas.

De forma análoga pode-se escrever a relação inversa deformação-tensão como segue :

$$\{\varepsilon\} = [D] \{\sigma\} \quad (3.12)$$

sendo :

$$[D] = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ & & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ & & & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ & \text{sim.} & & & D_{55} & D_{56} \\ & & & & & D_{66} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

tal que :

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{C}]^{-1} \quad (3.14)$$

A matriz  $[\mathbf{C}]$  é obtida geralmente por inversão da matriz  $[\mathbf{D}]$ , uma vez que a determinação experimental desta última é mais fácil. Os coeficientes da matriz  $[\mathbf{D}]$  são determinados submetendo um corpo de prova a determinadas solitações, e medindo as respectivas deformações, sendo definidos em função de parâmetros elásticos chamados de constantes de engenharia ou constantes técnicas, tais como: Módulo de Elasticidade Longitudinal (Módulo de Young), coeficiente de Poisson, e Módulo da Elasticidade Transversal (Módulo de Cisalhamento).

Considerando a relação tensão-deformação para uma placa laminada ortótropa, expressa em (3.7), referindo aos eixos orientados segundo as direções principais de simetria elástica do material, temos:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ & & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ & & & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ & \text{sim.} & & & \bar{C}_{55} & 0 \\ & & & & & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_1 \\ \bar{\epsilon}_2 \\ \bar{\epsilon}_3 \\ \bar{\epsilon}_4 \\ \bar{\epsilon}_5 \\ \bar{\epsilon}_6 \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

onde  $\bar{\epsilon}_1$ ,  $\bar{\epsilon}_2$  e  $\bar{\epsilon}_3$  são as deformações normais,  $\bar{\epsilon}_4$ ,  $\bar{\epsilon}_5$  e  $\bar{\epsilon}_6$  são as deformações por corte, assim como  $\bar{\sigma}_1$ ,  $\bar{\sigma}_2$  e  $\bar{\sigma}_3$  são as tensões normais e  $\bar{\sigma}_4$ ,  $\bar{\sigma}_5$  e  $\bar{\sigma}_6$  são as tensões de cisalhamento, associados aos eixos  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , direções principais das propriedades do material.

Os coeficientes  $\bar{C}_{ij}$  são obtidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{\Delta} E_{11} \\
\bar{C}_{12} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{32}}{\Delta} E_{22} \\
\bar{C}_{13} &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}}{\Delta} E_{33} \\
\bar{C}_{22} &= \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{\Delta} E_{22} \\
\bar{C}_{23} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}}{\Delta} E_{33} \\
\bar{C}_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{\Delta} E_{33} \\
\bar{C}_{44} &= G_{23} \\
\bar{C}_{55} &= G_{13} \\
\bar{C}_{66} &= G_{12}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\nu_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) &= \nu \quad (\text{Coeficiente de Poisson}) \\
E_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) &= E \quad (\text{Módulo de Elasticidade Longitudinal}) \\
G_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) &= G \quad (\text{Módulo de Elasticidade Transversal})
\end{aligned}$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{13} \nu_{31} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31} - \nu_{21} \nu_{13} \nu_{32}$$

A simetria da matriz  $[\bar{C}]$  implica em:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = \frac{\nu_{ji}}{E_{jj}} \tag{3.17}$$

### 3.3 - Transformação das constantes elásticas sob uma mudança do sistema de coordenadas

Para um material anisótropo a matriz  $[\bar{C}]$  tem uma lei de transformação em função de uma mudança no sistema de coordenadas. Um caso particular importante são as equações de transformação entre as tensões  $\sigma_i$  no sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  e as tensões  $\bar{\sigma}_i$  no sistema de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  quando se produz uma rotação ao redor do eixo  $z$  (isto é:  $z = \bar{z}$ ) e que podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

onde  $\theta$  é o ângulo medido no plano x-y, do eixo x para o eixo  $\bar{x}$ , sendo positivo no sentido anti-horário.

Reescrevendo a relação tensão-deformação para o sistema de eixos  $(x,y,z)$ , tem-se na forma matricial que :

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (3.19)$$

onde  $C_{ij}$  são os coeficientes elásticos transformados, relacionados com os coeficientes  $\bar{C}_{ij}$  pelas seguintes equações :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \bar{C}_{11} \cos^4 \theta + 2(\bar{C}_{12} + 2\bar{C}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{C}_{22} \sin^4 \theta \\ C_{12} &= C_{21} = (\bar{C}_{11} + \bar{C}_{22} - 4\bar{C}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{C}_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ C_{13} &= C_{31} = \bar{C}_{13} \cos^2 \theta + \bar{C}_{23} \sin^2 \theta \\ C_{16} &= C_{61} = (\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12} - 2\bar{C}_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (\bar{C}_{12} - \bar{C}_{22} + 2\bar{C}_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ C_{22} &= \bar{C}_{11} \sin^4 \theta + 2(\bar{C}_{12} + 2\bar{C}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{C}_{22} \cos^4 \theta \\ C_{23} &= C_{32} = \bar{C}_{13} \sin^2 \theta + \bar{C}_{23} \cos^2 \theta \\ C_{26} &= C_{62} = (\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12} - 2\bar{C}_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (\bar{C}_{12} - \bar{C}_{22} + 2\bar{C}_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ C_{33} &= \bar{C}_{33} \\ C_{36} &= C_{63} = (\bar{C}_{13} - \bar{C}_{23}) \cos \theta \sin \theta \\ C_{44} &= \bar{C}_{44} \cos^2 \theta + \bar{C}_{55} \sin^2 \theta \\ C_{45} &= C_{54} = (\bar{C}_{55} - \bar{C}_{44}) \cos \theta \sin \theta \\ C_{55} &= \bar{C}_{44} \sin^2 \theta + \bar{C}_{55} \cos^2 \theta \\ C_{66} &= (\bar{C}_{11} + \bar{C}_{22} - 2\bar{C}_{12} - 2\bar{C}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \bar{C}_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3.4 - Análise Não Linear Geométrica

O Princípio dos Trabalhos Virtuais é aplicado tanto para análise linear como para não linear, uma vez que ambas procuram o equilíbrio do sistema de elementos finitos em uma configuração determinada, ou seja:

$${}^t\mathbf{R} = {}^t\mathbf{F} \quad (3.21)$$

onde:

${}^t\mathbf{R}$  = forças externas aplicadas na configuração de tempo  $t$  ;

${}^t\mathbf{F}$  = forças internas aplicadas na configuração de tempo  $t$  .

Quando se considera que as deformações ou os deslocamentos são finitos, as variáveis do problema assim como o volume do corpo são desconhecidas em uma configuração qualquer. Este problema é contornado empregando uma análise incremental, onde subseqüentes configurações vão sendo obtidas ( $C_0, C_{\Delta t}, \dots, C_t, C_{t+\Delta t}, \dots, C_f$ ). Desta forma em cada passo da análise as equações de equilíbrio são linearizadas e as variáveis do problema referentes ao tempo  $t$  são conhecidas, devendo ser determinadas as mesmas no tempo  $t + \Delta t$ .

Duas formulações incrementais têm sido amplamente empregadas: a Lagrangeana Total e a Lagrangeana Atualizada. Neste trabalho emprega-se a primeira, a qual será descrita em seus pontos fundamentais baseada em autores como BATHE ( 1982 ), MALVERN ( 1969 ), DESAI e ABEL ( 1972 ), MARQUES e AWRUCH (1990), os quais trazem o equacionamento e o aporte teórico de ambas as formulações, sendo que este último aplica a materiais laminados empregando elementos isoparamétricos degenerados.



### 3.4.1 - Equações incrementais do movimento segundo a Descrição Lagrangeana Total

Considerando o movimento de um corpo, referido a um sistema de eixos cartesianos fixo, este corpo pode estar sujeito a grandes deslocamentos e rotações devido a um certo carregamento. A configuração de equilíbrio final será obtida por um processo incremental de discretização deste movimento no tempo, em configurações intermediárias, onde o problema não linear é linearizado em cada passo.

Empregando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, pode-se expressar o equilíbrio do corpo em uma configuração genérica  $C_{t+\Delta t}$  da seguinte forma:

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} \delta {}_{t+\Delta t} e_{ij} {}^{t+\Delta t} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} \quad (3.22)$$

onde:

${}^{t+\Delta t} \tau_{ij}$  = componentes cartesianas do tensor de Cauchy no tempo  $t+\Delta t$  ;

$\delta {}_{t+\Delta t} e_{ij}$  = variação virtual das componentes cartesianas do tensor deformações infinitesimais, correspondentes aos deslocamentos  $\Delta u_i$ , ocorridos durante o movimento do corpo, entre os tempos  $t$  e  $t+\Delta t$ , sendo que

$$\delta {}_{t+\Delta t} e_{ij} = \delta \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t} x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial {}^{t+\Delta t} x_i} \right) \cong \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t} x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial {}^{t+\Delta t} x_i} \right) \quad (3.23)$$

na configuração  $C_{t+\Delta t}$ , e

${}^{t+\Delta t} x_i$  = coordenadas cartesianas de um ponto qualquer do corpo nesta configuração;

${}^{t+\Delta t} \mathcal{R}$  = trabalho realizado pelas forças externas, expresso por

$$\mathcal{R} = \int_{{}^{t+\Delta t} A} {}^{t+\Delta t} \mathbf{q}_{{}^{t+\Delta t} A} \delta \Delta u_k {}^{t+\Delta t} dA + \int_{{}^{t+\Delta t} V} \rho {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{{}^{t+\Delta t} V} \delta \Delta u_k {}^{t+\Delta t} dV \quad (3.24)$$

na qual

${}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_{t+\Delta t}$  e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{t+\Delta t}$  são as forças de superfície e de massa aplicadas externamente e referidas na configuração  $\mathbf{C}_{t+\Delta t}$  respectivamente;

${}^{t+\Delta t}\rho$  é a massa específica do corpo;

$\delta\Delta\mathbf{u}_k$  é a variação virtual dos deslocamentos  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_k$ .

A diferença básica entre o problema não linear e o linear, na solução da equação (3.22), consiste em que esta última tem como hipótese básica que os deslocamentos são infinitesimais, podendo se considerar a configuração final igual a inicial; o mesmo não acontece na análise não linear geométrica, pois em cada passo tem-se uma nova configuração, a qual é desconhecida. Esta mudança de configuração estabelece uma série de consequências no desenvolvimento da análise incremental, por exemplo as tensões de Cauchy no tempo  $t+\Delta t$  não podem ser obtidas por simples adição do incremento de tensão às tensões no tempo  $t$ , sendo necessário considerar as tensões de corpo rígido do material. Sendo assim é preciso escolher variáveis adequadas para quantificar estas mudanças de configurações. Na bibliografia existe algumas variáveis para este fim, mas é de uso mais freqüente o 2º tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e o tensor de deformações de Green-Lagrange, os quais são simétricos e invariantes.

Neste contexto, a expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais (3.22), pode ser rescrita em função destes novos tensores, referida a configuração inicial  $\mathbf{C}_0$ , em uma relação de equivalência que constitui a base das formulações Lagrangeanas incrementais empregadas na análise não-linear de sólidos, como:

$$\int_{{}^{t+\Delta t}\mathcal{V}} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij} {}^{t+\Delta t}dV = \int_{{}^0\mathcal{V}} {}^0S_{ij} \delta {}^0\epsilon_{ij} {}^{t+\Delta t}dV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} \quad (3.25)$$

na qual:

${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij}$  componentes cartesianas do 2<sup>o</sup> tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, correspondentes à configuração do tempo  $t + \Delta t$ , medidas com relação à configuração inicial, expresso por:

$${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij} = \frac{{}_0\rho}{{}^{t+\Delta t}{}_0\rho} \frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_m} {}^{t+\Delta t}\tau_{mn} \frac{\partial {}^0x_j}{\partial {}^{t+\Delta t}x_n} \quad (3.26)$$

sendo:

${}^0x_k$  coordenada cartesiana de um ponto do corpo na configuração inicial.

${}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij}$  componentes cartesianas do tensor de deformação de Green-Lagrange na configuração  $t + \Delta t$ , medidas na configuração inicial, e expresso por:

$${}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij} = (1/2) \left[ {}^{t+\Delta t}{}_0u_{i,j} + {}^{t+\Delta t}{}_0u_{j,i} + {}^{t+\Delta t}{}_0u_{k,i} {}^{t+\Delta t}{}_0u_{k,j} \right] \quad (3.27)$$

sendo:

${}^{t+\Delta t}{}_0u_i$  componentes de deslocamento correspondentes ao movimento de corpo rígido entre as configurações  $C_0$  e  $C_{t+\Delta t}$ , ou seja  ${}^{t+\Delta t}{}_0u_i = {}^{t+\Delta t}x_i - {}^0x_i$

Da mesma forma pode-se calcular o trabalho virtual externo pela expressão :

$${}^{t+\Delta t}\mathcal{W} = \int_{{}_0V} {}^{t+\Delta t}{}_0q_k \delta \Delta u_k \, {}^0dA + \int_{{}_0V} {}^0\rho {}^{t+\Delta t}{}_0f_k \delta \Delta u_k \, {}^0dV \quad (3.28)$$

Para o equilíbrio das variáveis expressas nas equações (3.25) e (3.28), na análise incremental, em cada passo da análise emprega-se as relações :

$${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij} = {}^t{}_0S_{ij} + {}_0\Delta S_{ij} \quad (3.29)$$

$${}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij} = {}^t{}_0\varepsilon_{ij} + {}_0\Delta \varepsilon_{ij} \quad (3.30)$$

onde os tensores  ${}^tS_{ij}$  e  ${}^t\varepsilon_{ij}$ , que são o 2<sup>o</sup> tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e de deformação de Green-Lagrange respectivamente, correspondente a configuração do tempo  $t$  são conhecidos e  ${}_o\Delta S_{ij}$  e  ${}_o\Delta\varepsilon_{ij}$  são os incrementos destes tensores.

Os incrementos de deformação  ${}_o\Delta\varepsilon_{ij}$  podem ser desacoplados em uma parte linear e outra não linear, da seguinte forma:

$${}_o\Delta\varepsilon_{ij} = {}_o\Delta e_{ij} + {}_o\Delta\eta_{ij} \quad (3.31)$$

onde  ${}_o\Delta e_{ij}$  é a parte linear sendo expresso como:

$$\Delta e_{ij} = (1/2)({}_o\Delta u_{i,j} + {}_o\Delta u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}_o\Delta u_{k,j} + {}_o\Delta u_{k,i} {}^t u_{k,j}) \quad (3.32)$$

e  ${}_o\Delta\eta_{ij}$  é a parte não linear, expresso como:

$${}_o\Delta\eta_{ij} = (1/2)({}_o\Delta u_{k,i} {}_o\Delta u_{k,j}) \quad (3.33)$$

A relação constitutiva elástica em termos destes incrementos de tensões é a seguinte:

$${}_o\Delta S_{ij} = {}_oC_{ijmn} \Delta\varepsilon_{mn} \quad (3.34)$$

Relacionando as equações (3.29), (3.31), (3.34) e a igualdade  $\delta^{t+\Delta} {}^t\varepsilon_{ij} = \delta {}_o\Delta\varepsilon_{ij}$  com a equação (3.25), temos a equação não linear de equilíbrio correspondente aos incrementos de deslocamento  $\Delta u_i$ , ou seja:

$$\int C_{ijmn} {}_o\Delta\varepsilon_{mn} \delta {}_o\Delta\varepsilon_{ij} dV + \int {}^tS_{ij} \delta {}_o\Delta\eta_{ij} dV = \mathfrak{R} - \int {}^tS_{ij} \delta {}_o\Delta e_{ij} dV \quad (3.35)$$

A formulação Lagrangeana total em termos do Método dos elementos Finitos será deduzida da expressão (3.35) fazendo uma aproximação, ou seja admitindo  ${}_o\Delta\varepsilon_{ij} = {}_o\Delta e_{ij}$  e por tanto  $\delta {}_o\Delta\varepsilon_{ij} = \delta {}_o\Delta e_{ij}$ , resultando a expressão:

$$\int_{\circ V} \circ C_{ijmn} \Delta \mathbf{e}_{mn} \delta_{\circ} \Delta \mathbf{e}_{ij} \circ dV + \int_{\circ V} \circ S_{ij} \delta_{\circ} \Delta \eta_{ij} \circ dV = \mathfrak{R} - \int_{\circ V} \circ S_{ij} \delta_{\circ} \Delta \mathbf{e}_{ij} \circ dV \quad (3.36)$$

## IV - IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 4.1 - Preliminares

Neste capítulo, apresenta-se a formulação para o Método dos Elementos Finitos em deslocamentos, considerando uma análise linear e não-linear geométrica, estática e dinâmica, empregando elementos isoparamétricos 3-D de 20 nós.

Apresenta-se a formulação básica para o problema com não linearidade geométrica, sobre o qual comenta-se as simplificações ao caso linear; da mesma forma as variáveis dinâmicas são reduzidas a uma formulação estática equivalente, através da aplicação do Método de Newmark.

### 4.2 - Análise não linear geométrica

As coordenadas cartesianas de um ponto do elemento isoparamétrico quadrilátero de 20 nós, na configuração correspondente do tempo  $t$ , são expressas por:

$${}^t\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{20} N_j \mathbf{x}_{ij} \quad (i=1,2,3) \quad (4.1)$$

A partir da equação (4.1) obtém-se os deslocamentos  ${}^t\mathbf{u}_i$  na configuração de tempo  $t$  e os incrementos de deslocamento  $\Delta\mathbf{u}_i$ , transcorridos entre as configurações  $C_t$  e  $C_{t+\Delta t}$ , através das equações:

$${}^t\mathbf{u}_i = {}^t\mathbf{x}_i - {}^o\mathbf{x}_i \quad (4.2)$$

$$\Delta\mathbf{u}_i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{x}_i - {}^t\mathbf{x}_i \quad (4.3)$$

A formulação empregada pelo método dos elementos finitos, considerando a equação (3.36) do Princípio dos Trabalhos Virtuais, adquire a seguinte notação:

$$({}_0[\mathbf{K}_L] + {}_0[\mathbf{K}_{NL}]) \{\Delta\delta^e\} = {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{R}\} - {}^t\{\mathbf{F}\} \quad (4.4)$$

onde  $\{\Delta\delta^e\}$  é o vetor de incrementos de deslocamento nodais, correspondente ao movimento entre as configurações  $C_t$  e  $C_{t+\Delta t}$  em um elemento, e os demais termos se relacionam com a equação (3.36) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} {}_0[\mathbf{K}_L] \{\Delta\delta^e\} &= \int_{^0V} {}_0C_{ijmn} \Delta e_{mn} \delta_0 \Delta e_{ij} \, {}^0dV \\ {}_0[\mathbf{K}_{NL}] \{\Delta\delta^e\} &= \int_{^0V} {}^tS_{ij} \delta_0 \Delta \eta_{ij} \, {}^0dV \\ {}^t\{\mathbf{F}\} &= \int_{^0V} {}^tS_{ij} \delta_0 \Delta e_{ij} \, {}^0dV \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde  ${}_0[\mathbf{K}_L]$  é a matriz de rigidez linear,  ${}_0[\mathbf{K}_{NL}]$  é a matriz de rigidez não linear e  ${}^t\{\mathbf{F}\}$  o vetor de forças internas no tempo  $t$ , referidas a configuração inicial, e são obtidos através das relações:

$${}_0[\mathbf{K}_L] = \int_{^0V} {}_0[\mathbf{B}_L]^T {}_0[\mathbf{C}] {}_0[\mathbf{B}_L] \, {}^0dV \quad (4.6)$$

$${}_0[\mathbf{K}_{NL}] = \int_{^0V} {}_0[\mathbf{B}_{NL}]^T {}^t[\mathbf{S}] {}_0[\mathbf{B}_{NL}] \, {}^0dV \quad (4.7)$$

$${}^t\{\mathbf{F}\} = \int_{^0V} {}_0[\mathbf{B}_L] {}^t\{\hat{\mathbf{S}}\} \, {}^0dV \quad (4.8)$$

nas quais,  ${}_0[\mathbf{B}_L]$  e  ${}_0[\mathbf{B}_{NL}]$  são as matrizes de deformação-deslocamento linear e não linear respectivamente,  ${}_0[\mathbf{C}]$  é a matriz constitutiva incremental obtida da forma que foi descrita no início deste capítulo,  ${}^t[\mathbf{S}]$  é a matriz contendo as componentes do 2º tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff e  ${}^t\{\hat{\mathbf{S}}\}$  é um vetor contendo estas componentes de tensão.

### 4.3 - Análise Dinâmica

A análise transiente por Elementos Finitos, assim como a análise não-linear geométrica, emprega métodos iterativos na solução das equações governantes porém o tempo é uma variável efetiva do problema.

Em uma análise estática linear tem-se um sistema de equações do tipo :

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.9)$$

tal que :

- $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez;
- $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos; e
- $\mathbf{f}$  é o vetor de forças.

onde a equação (4.9) pode ser resolvida através de Métodos diretos ou iterativos. Por outro lado quando consideramos grandes deslocamentos, a equação (4.9) adquire a forma da equação (3.36), uma vez que a geometria varia ao longo de diferentes configurações; cabe salientar que nesta formulação o tempo é uma variável fictícia, sendo empregada para reduzir o problema não linear em um problema de n-equações linearizadas.

Em uma análise transiente emprega-se também métodos de solução de equações não linear, porém pode-se ter problemas de 1ª ordem considerando somente os efeitos de inércia e de 2ª ordem, os quais consideram, além da inércia, efeitos de amortecimento.

A análise dinâmica diferencia-se da estática pela necessidade de se considerar os efeitos de inércia e amortecimento na expressão (4.9), surgindo dois tipos de problemas dinâmicos de problemas de primeira ordem e de segunda ordem. As equações diferenciais parciais lineares dependente do tempo, pode ser discretizada por elementos finitos, fazendo :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (4.10)$$



Aplicando o método de Newmark obtêm-se as seguintes expressões para velocidade e aceleração :

$$\begin{aligned}\{\dot{\mathbf{u}}\}_{i+1} &= \frac{\bar{\delta}}{\bar{\alpha} \Delta t} \{\mathbf{u}\}_{i+1} - \frac{\bar{\delta}}{\bar{\alpha} \Delta t} \mathbf{u}_i (1 - \frac{\bar{\delta}}{\bar{\alpha}}) + \Delta t (1 - \frac{\bar{\delta}}{2\bar{\alpha}}) \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \{\ddot{\mathbf{u}}\}_{i+1} &= \frac{1}{\bar{\alpha} \Delta t^2} \{\mathbf{u}\}_{i+1} - \frac{1}{\bar{\alpha} \Delta t^2} \{\mathbf{u}\}_i - \frac{1}{\bar{\alpha} \Delta t} \{\dot{\mathbf{u}}\}_i + (\frac{1}{2\bar{\alpha}} - 1) \{\ddot{\mathbf{u}}\}_i\end{aligned}\quad (4.11)$$

onde, em função da estabilidade e precisão, adota-se :  $\bar{\delta} = \frac{1}{2}$  e  $\bar{\alpha} = \frac{1}{4}$ .

Substituindo a equação (4.11) em (4.10), resulta :

$$\{\bar{\mathbf{K}}\} \{\mathbf{u}\}_{i+1} = \{\bar{\mathbf{F}}_{i+1}\} \quad (4.12)$$

onde :

$$\begin{aligned}\{\bar{\mathbf{K}}\} &= \{\mathbf{K}\} + \mathbf{a}_0 \{\mathbf{M}\} + \mathbf{a}_1 \{\mathbf{c}\} \\ \{\bar{\mathbf{F}}\}_{i+1} &= \{\mathbf{F}\}_{i+1} + \{\mathbf{M}\} (\mathbf{a}_0 \{\mathbf{u}\}_i + \mathbf{a}_2 \{\dot{\mathbf{u}}\}_i + \mathbf{a}_3 \{\ddot{\mathbf{u}}\}_i) \\ &\quad + \{\mathbf{c}\} (\mathbf{a}_4 \{\mathbf{u}\}_i + \mathbf{a}_5 \{\dot{\mathbf{u}}\}_i + \mathbf{a}_6 \{\ddot{\mathbf{u}}\}_i)\end{aligned}\quad (4.13)$$

sendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_0 &= \frac{1}{\bar{\alpha} \Delta t^2}; \quad \mathbf{a}_1 = \frac{\bar{\delta}}{\bar{\alpha} \Delta t}; \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\bar{\alpha} \Delta t}; \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2\bar{\alpha}} - 1; \quad \mathbf{a}_4 = \frac{\bar{\delta}}{\bar{\alpha}} - 1 \\ \mathbf{a}_5 &= \frac{\Delta t}{2} (\frac{\bar{\delta}}{\bar{\alpha}} - 2); \quad \mathbf{a}_6 = \Delta t - 1 - \bar{\delta}; \quad \mathbf{a}_7 = \bar{\delta} \Delta t\end{aligned}\quad (4.14)$$

Então as velocidades e acelerações são obtidas por :

$$\{\dot{\mathbf{u}}\}_{i+1} = \{\dot{\mathbf{u}}\}_i + \mathbf{a}_6 \{\ddot{\mathbf{u}}\}_i + \mathbf{a}_7 \{\ddot{\mathbf{u}}\}_{i+1} \quad (4.15)$$

$$\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{i+1} = \mathbf{a}_0 (\{\mathbf{u}\}_{i+1} - \{\mathbf{u}\}_i) - \mathbf{a}_2 \{\dot{\mathbf{u}}\}_i - \mathbf{a}_3 \{\ddot{\mathbf{u}}\}_i \quad (4.16)$$

O amortecimento empregado é o de Rayleigh onde :

$$\{\mathbf{c}\} = \gamma \{\mathbf{M}\} + \beta \{\mathbf{K}\} \quad (4.17)$$

Substituindo (4.17) na equação (4.13), tem-se :

$$\begin{aligned} \{\bar{\mathbf{K}}\} &= \{\mathbf{K}\}(1 + \alpha_1 \beta) + \{\mathbf{M}\}(\alpha_0 + \alpha_1 \gamma) \\ \{\bar{\mathbf{F}}\}_{i+1} &= \{\mathbf{F}\}_{i+1} + \{\mathbf{M}\} [(\alpha_0 + \gamma \alpha_1)\{\mathbf{u}\}_i + (\alpha_2 + \gamma \alpha_4)\{\dot{\mathbf{u}}\}_i + \\ &\quad (\alpha_3 + \gamma \alpha_5)\{\ddot{\mathbf{u}}\}_i] + \beta \{\mathbf{K}\}(\alpha_1 \{\mathbf{u}\}_i + \alpha_4 \{\dot{\mathbf{u}}\}_i + \alpha_5 \{\ddot{\mathbf{u}}\}_i) \end{aligned} \quad (4.18)$$

A matriz de massa do elemento é expressa como:

$$\{\mathbf{M}\}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (4.19)$$

## V - APLICAÇÕES

### 5.1 - Preliminares

Neste capítulo são apresentados um número representativo de problemas que foram analisados utilizando elementos finitos 3-D de 20 nós. Os resultados obtidos foram comparados com soluções analíticas, resultados experimentais, ou com outros procedimentos apresentados na bibliografia especializada.

Apresenta-se problemas de análise estática e dinâmica, linear e não linear geométrica de diferentes estruturas (vigas, placas e cascas), com materiais isotropos, ortotropos e anisotropos, sujeitos a distintos carregamentos (cargas uniformemente distribuídas, cargas concentradas e cargas de corpo). Tais estruturas foram analisadas com diferentes esquemas de integrações numéricas, destacando o emprego da integração reduzida.

Além das aplicações anteriores, apresenta-se um exemplo de suavização de tensões, no qual é feita a comparação da discretização utilizada e a performance entre resultados de deslocamento e de tensões.

### 5.1 - Análise Estática

Nesta seção são apresentadas algumas aplicações de análise estática, linear e não linear geométrica, de placas, cascas e vigas, com diferentes propriedades do material.

### 5.1.1 - CASO 1 - Análise Linear de uma viga bi-apoiada, sujeita a uma carga concentrada $P$ no centro da mesma

Determina-se o deslocamento central  $w$  de uma viga bi-apoiada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 20 \text{ kN}$ , no ponto central.

As propriedades do material são as seguintes:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = E_3 = 3.0 \times 10^6 \text{ N/cm}^2 \\ G_{12} &= G_{13} = G_{23} = 1.5 \times 10^6 \text{ N/cm}^2 \\ \nu_{12} &= \nu_{13} = \nu_{23} = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Na figura 5.1 pode-se observar a geometria deste problema.

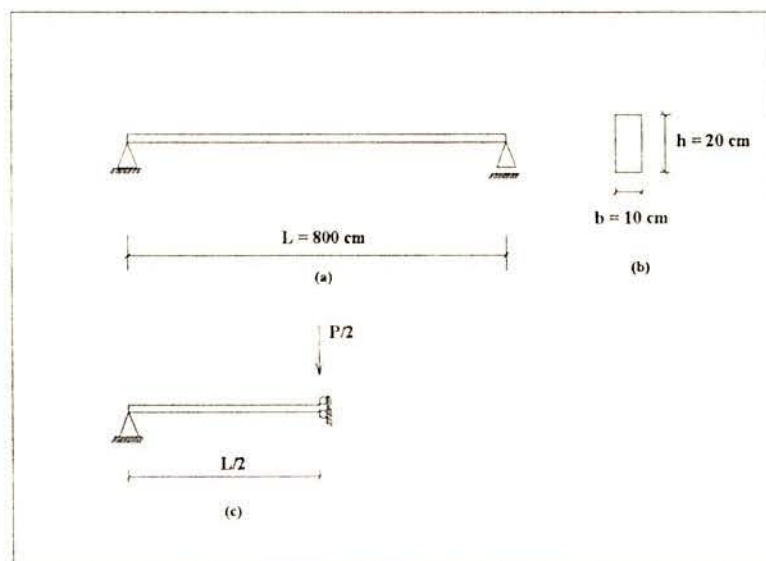


Figura 5.1 - Características geométricas do caso 1.

Discretizou-se a metade da viga, conforme foi apresentado na figura 5.1-c, com uma malha de  $2 \times 2 \times 1$  (veja a figura 5.2).

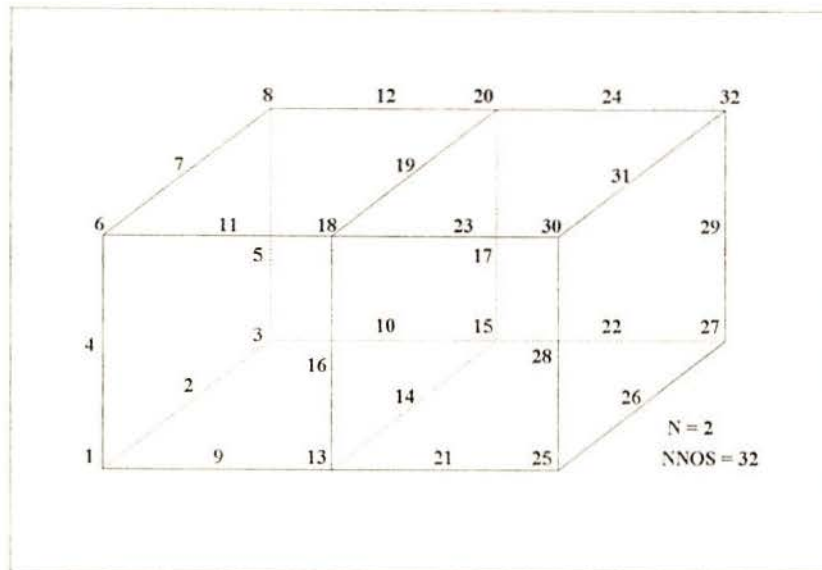


Figura 5.2 - Malha de elementos finitos para o caso 1

As condições de contorno empregadas foram as seguintes:

- nós : 4 , 5 , (  $w = 0$  e  $u = 0$  );
- nós: 25 a 32 , (  $u = 0$  );
- nós: 2 , 14 , 26 , 7 , 19 e 31, (  $v = 0$  ).

O deslocamento teórico na direção  $z$  ( $w_e$ ), é determinado analiticamente pela seguinte expressão:

$$w_e = \frac{P L^3}{48 E I}, \quad (5.3)$$

onde:

$w_e$  = deslocamento teórico no meio do vão, em cm;

$P$  = carga concentrada, em kN;

$L$  = comprimento da viga, em cm;

$E$  = Módulo de Elasticidade Longitudinal, em kN/cm<sup>2</sup>;

$I$  = Momento de Inércia, em cm<sup>4</sup>

O resultado teórico é  $w_e = 6,4$  cm.

Embora a discretização empregada seja grosseira, os resultados em deslocamentos são bastante próximos do teórico, conforme podemos observar na tabela I.5.1, destacando a variação dos resultados para diferentes integrações numéricas.

Tabela I.5.1 - Avaliação dos resultados do caso 1.

Integração	$w_{26}$	$w_{26} / w_e$	Diferença %
2x2x3	-6.4223	1.003	0.3
3x3x3	-6.0444	0.943	5.7

onde  $w_i$  é o deslocamento na direção  $z$ , no nó  $i$ .

### 5.1.2 - CASO 2 - Análise Linear de uma viga bi-apoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída.

Determina-se o deslocamento central na direção  $z$ , da mesma viga analisada no caso 1, submetida a um carregamento uniformemente distribuído  $q = 0.0005 \text{ kN/cm}^2$ .

A geometria e a discretização foram apresentadas nas figura 5.1-(a e b) e 5.2, respectivamente.

As propriedades do material e as condições de contorno são as mesmas das equações (5.1) e (5.2), respectivamente.

O deslocamento teórico ( $w_e$ ), determina-se pela seguinte expressão:

$$w_e = \frac{5 \hat{q} L^4}{384 E I}, \quad (5.4)$$

onde

$w_e$  = deslocamento teórico no meio do vão, em cm;

$\hat{q} = q b$ , carga distribuída por centímetro;

$L$  = comprimento, em cm;

$E$  = Módulo de Elasticidade Longitudinal, em  $\text{kN/cm}^2$ .

resultando  $w_e = 8 \text{ cm}$ .

Os resultados obtidos, para diferentes integrações numéricas, são apresentados na tabela I.5.2 .

Tabela I.5.2 - Avaliação dos resultados para o caso 2.

Integração	$w_{26}$	$w_{26} / w_e$	Diferença %
2x2x3	-8.0173	1.003	0.22
3x3x3	-7.8933	0.987	0.33

onde  $w_i$  é o deslocamento na direção  $z$ , no nó  $i$ .

### 5.1.3 - CASO 3 - Análise Linear de uma viga bi-apoiada, sujeita ao peso próprio

Analisou-se novamente a mesma viga dos casos 1 e 2, sujeita a uma força de corpo  $t = 0.00025 \text{ kN/cm}^3$ , relacionada com o carregamento do caso 2 da seguinte forma:

$$t = \frac{\hat{q}}{b h} \quad (5.5)$$

onde:

$$\hat{q} = 0.005 \text{ kN/cm}$$

$$b = 10 \text{ cm}$$

$$h = 20 \text{ cm}$$

Sendo assim, o deslocamento central na direção  $z$  ( $w_e$ ) é o mesmo do caso 2, ou seja  $w_e = 8 \text{ cm}$ .

Os resultados obtidos, com diferentes integrações numéricas, são apresentados na tabela I.5.3.

Tabela 1.5.3 - Avaliação dos resultados no caso 3

Integração	$w_{26}$	$w_{26} / w_e$	Diferença %
2x2x3	-8.0361	1.005	0.45
3x3x3	-7.8029	0.975	2.46

onde  $w_i$  é o deslocamento na direção  $z$ , no nó  $i$ .

#### 5.1.4 - CASO 4 - Análise Linear de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a uma carga concentrada $P$ , no centro

Determina-se o deslocamento central, na direção  $z$ , de uma placa quadrada simplesmente apoiada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 2000 \text{ N}$ .

A geometria da placa é apresentada na figura 5.3, e as propriedades do material são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_2 = E_3 = 5.00 \times 10^6 \text{ N/cm}^2 \\
 G_{12} &= G_{13} = G_{23} = 1.92 \times 10^6 \text{ N/cm}^2 \\
 \nu_{12} &= \nu_{13} = \nu_{23} = 0.3
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

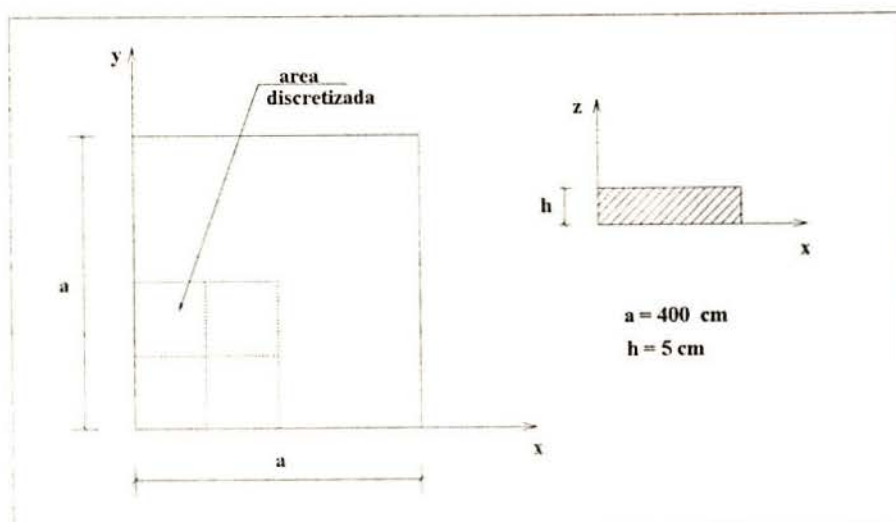


Figura 5.3 - Geometria do caso 4



Discretizou-se um quarto da placa, com uma malha de  $2 \times 2 \times 1$ , conforme figura 5.4. A carga aplicada no nó 51 foi de  $P/4$ .

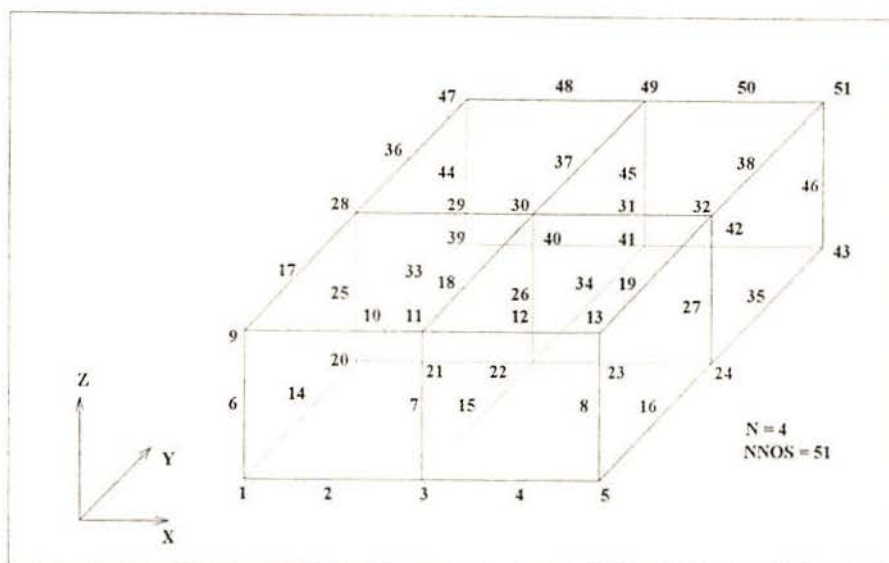


Figura 5.4 - Malha de Elementos Finitos para o caso 4

As condições de contorno empregadas foram as seguintes:

$$\begin{aligned}
 \text{nós : } 1, 2, 3, 4, 5, 14, 20, 33, 39 & ; (w = 0) \\
 \text{nós : } 5, 16, 24, 35, 43, 8, 27, 46, 13, 19, 32, 38, 51 & ; (u = 0) \\
 \text{nós : } 39 \text{ a } 51 & ; (v = 0) \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

A solução teórica pode ser encontrada no SZILARD (1974), página 652, onde  $w_e = 0.06449$  cm.

Os resultados obtidos, com diferentes integrações numéricas, são comparados com a solução teórica na tabela I.5.4.

Tabela I.5.4 - Avaliação dos resultados para o caso 4

Integração	$w_{s1}$	$w_{s1} / w_e$	Diferença %
2x2x2	-0.064945	1.007	0.7
2x2x3	-0.064945	1.007	0.7
3x3x3	-0.05375	0.833	16.6

onde  $w_i$  é o deslocamento na direção  $z$ , no nó  $i$ .

#### 5.1.5 -CASO 5 - Análise Linear de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a uma carga uniformemente distribuída $q$

Determina-se o deslocamento central na direção  $z$ , da mesma placa analisada no caso 4, sendo a geometria e discretização apresentada nas figuras 5.3 e 5.4, respectivamente; as propriedades do material e condições de contorno são as mesmas das equações 5.6 e 5.7, respectivamente. O carregamento considerado é uma carga uniformemente distribuída  $q = 1.5 \text{ N/cm}^2$ .

A solução teórica é apresentada por SZILARD (1974), página 650, sendo  $w_e = 2,7015 \text{ cm}$ .

Os resultados obtidos são apresentados na tabela I.5.5, para diferentes integrações numéricas.

Tabela I.5.5 - Avaliação dos resultados para o caso 5

Integração	$w_{s1}$	$w_{s1} / w_e$	Diferença %
2x2x2	-2.7874	1.032	3.18
2x2x3	-2.7874	1.032	3.18
3x3x3	-2.5322	0.937	6.27

### 5.1.6 - Análise Linear de uma placa simplesmente apoiada sujeita ao peso próprio $t$

Determina-se o deslocamento central, na direção  $z$ , da mesma placa simplesmente apoiada, cuja geometria, discretização, propriedades do material e condições de contorno foram apresentadas no caso 4, sujeita ao peso próprio  $t = 0.3 \text{ N/cm}^3$ .

A solução teórica é a mesma do caso 5, pois  $t = q/h$  e portanto  $We=2,7015$  cm.

Os resultados são apresentados na tabela I.5.6, para diferentes integrações numéricas.

Tabela I.5.6 - Avaliação dos resultados para o caso 5

Integração	$w_{s1}$	$w_{s1} / w_e$	Diferença %
2x2x2	-2.7877	1.032	3.19
2x2x3	-2.7877	1.032	3.19
3x3x3	-2.5324	0.937	6.26

### 5.1.7 - Análise Linear de uma casca cilíndrica, sujeita a uma carga uniformemente distribuída $q$

Analisa-se os deslocamentos  $w$  e  $v$ , ao longo da superfície desta casca, submetida a uma carga de peso próprio superficial  $q = 0.625 \text{ lb/in}^2$ .

As propriedades do material são as seguintes:

$$E = 3 \times 10^6 \text{ lb/cm}^2 \quad (5.7)$$

$$v = 0$$

Na figura 5.5, apresentam-se a geometria e as condições de contorno empregadas.

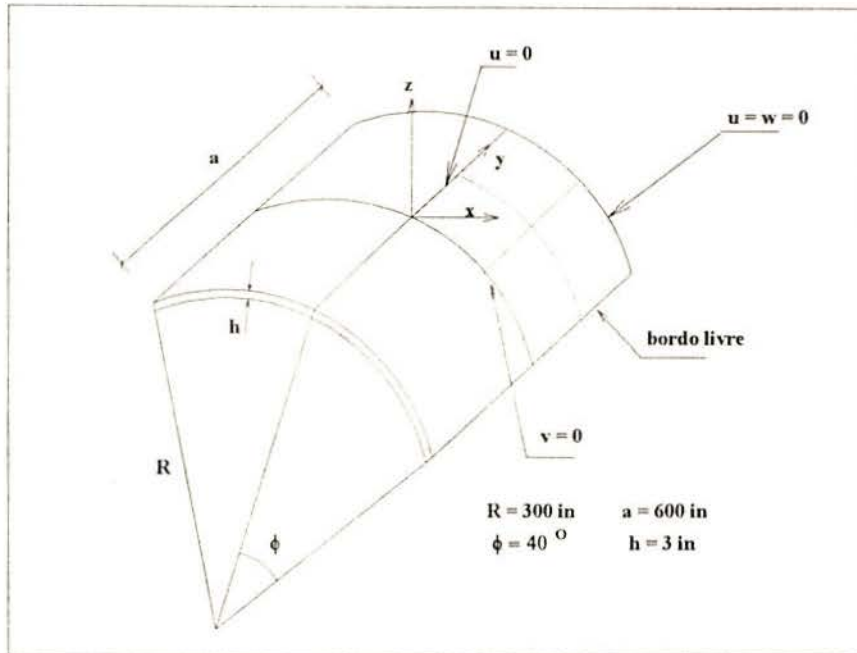


Figura 5.5 - Geometria e condições de contorno do caso 7

Discretizou-se um quarto da casca com uma malha de  $2 \times 2 \times 1$ , conforme figura

5.6.

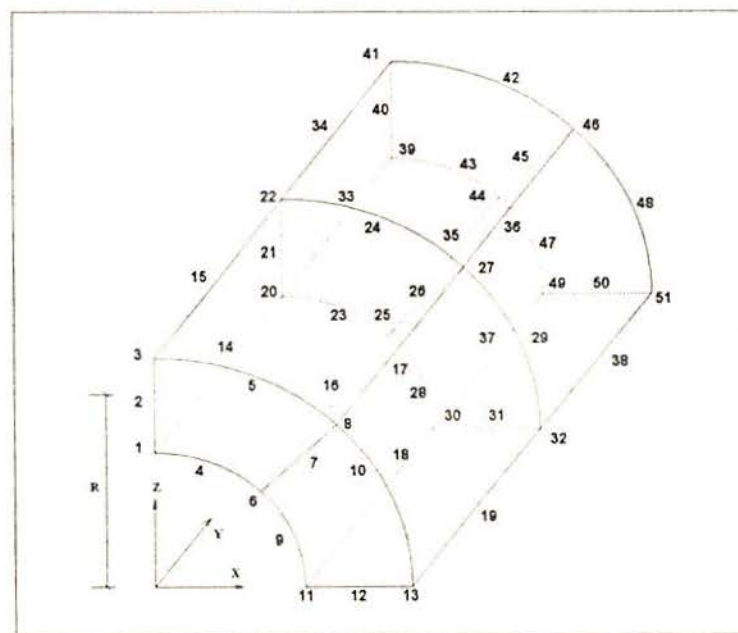


Figura 5.6 - Malha de Elementos Finitos empregada no caso 7

Este problema é apresentado por ZIENKIEWICZ (1990), e os resultados teóricos por SCORDELIS e LO (1969). Os resultados obtidos, deslocamento  $w$  e  $v$ , são comparados com os teóricos nas figuras 5.7 e 5.8, respectivamente.

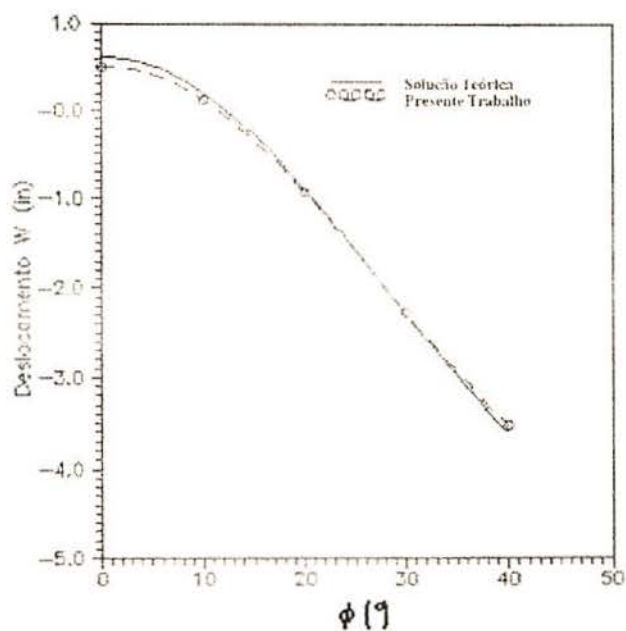


Figura 5.7 - Gráfico deslocamento  $w$  ao longo da casca do caso 7

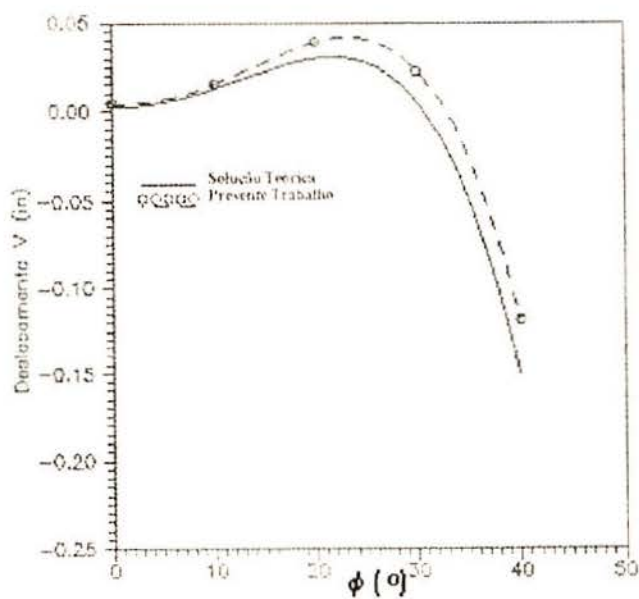


Figura 5.8 - Gráfico do deslocamento  $v$  ao longo da casca do caso 7

**5.1.8 - CASO 8 -Análise Linear e Não linear Geométrica de uma placa quadrada simplesmente apoiada, com e sem enrijecedor, sujeita a uma carga distribuída uniforme  $q$**

A variação do deslocamento  $w$  em uma placa quadrada simplesmente apoiada, sujeita a uma carga uniformemente distribuída  $q = 3.75 \text{ psi}$ , com e sem enrijecedor é analisada.

As geometrias de ambos casos são apresentadas na figura 5.9, e as propriedades do material são as seguintes:

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\rho = 2.5393 \times 10^{-4} \frac{\text{lbf s}^2}{\text{in}^4}$$

(5.8)

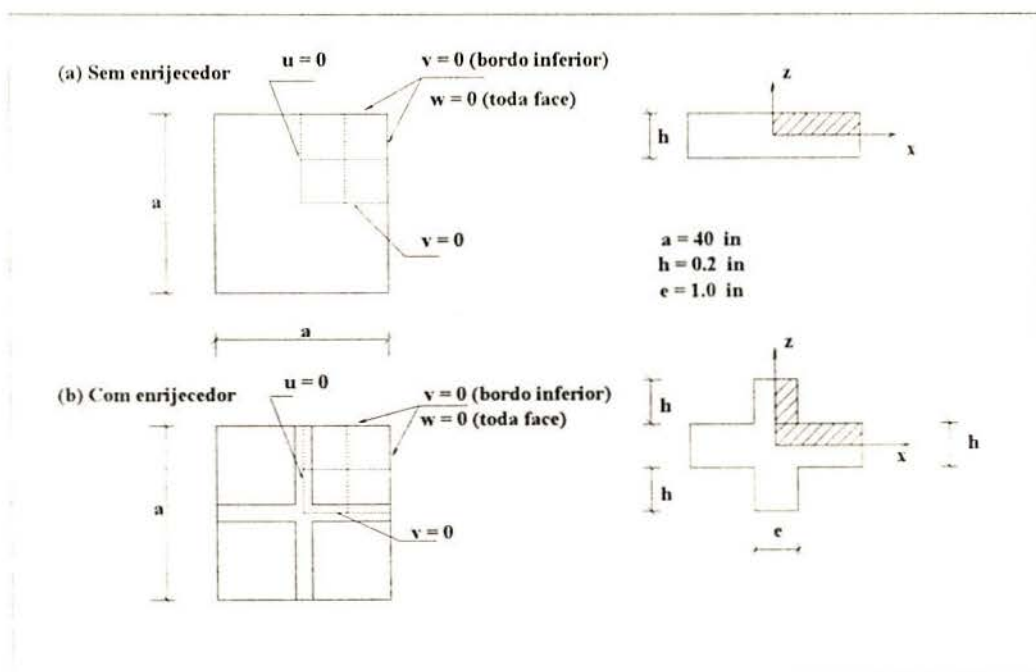


Figura 5.9 - Geometria e condições de bordo do caso 8, com e sem enrijecedor.

Os resultados obtidos são apresentados na figura 5.10, e comparados com aqueles apresentados por LIAO e REDDY (1987), utilizando elementos 3-D degenerados.

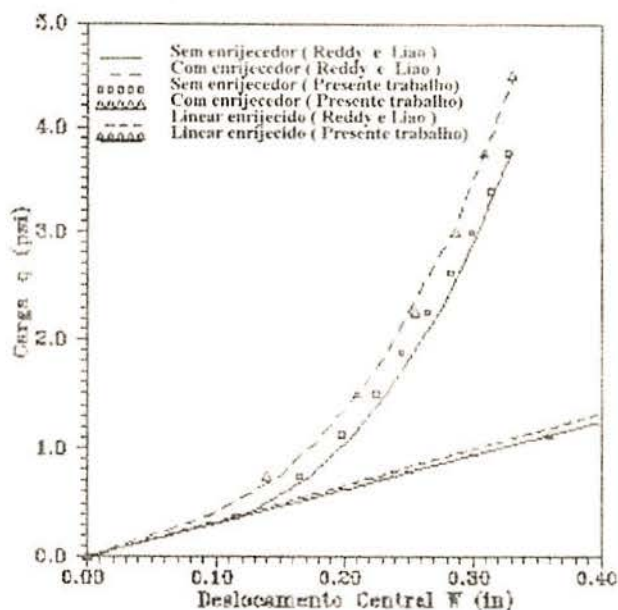


Figura 5.10 - Gráfico deslocamento central versus carga para o caso 8

### 5.1.9 - CASO 9 - Análise Linear e Não linear Geométrica de uma placa quadrada simplesmente apoiada ortotrópa, sujeita a uma carga uniformemente distribuída $q$

Determina-se o deslocamento central  $w$  de uma placa quadrada simplesmente apoiada, sujeita a uma carga  $q = 2 \text{ psi}$ .

As propriedades do material são as seguintes:

$$E_1 = 3 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$E_2 = E_3 = 1.28 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.37 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.32$$

(5.9)

A geometria da placa e as condições de contorno são apresentadas na figura 5.11.

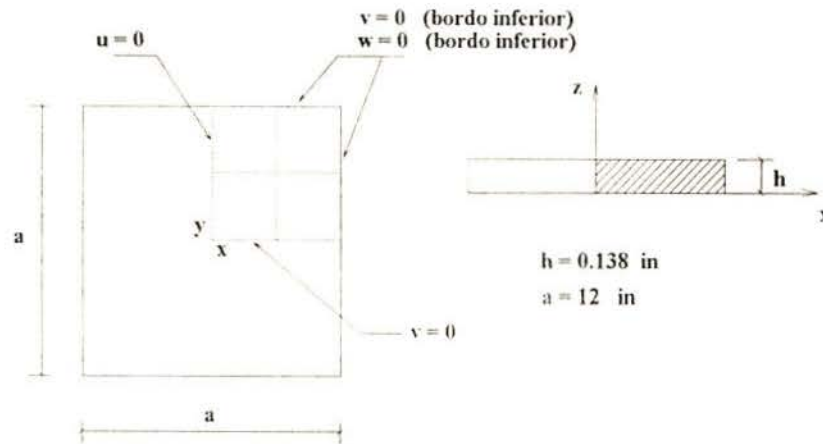


Figura 5.11 - Geometria e condições de bordo do caso 9

Os resultados obtidos, em ambas as análises (linear e não linear geométrica), são comparados com resultados experimentais e com aqueles obtidos com elementos finitos 3-D degenerados, ambos apresentados por REDDY (1988), os quais podem ser observados na figura 5.12.

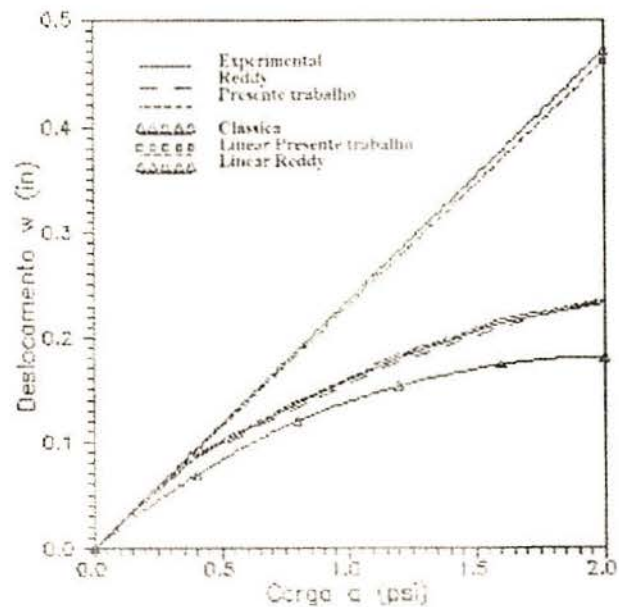


Figura 5.12 - Gráfico carga versus deslocamento central para o caso 9



**5.1.10 - CASO 10 - Análise Linear e Não linear Geométrica de uma placa quadrada engastada anisótropa (0/90/0/90), sujeita a uma carga uniformemente distribuída  $q$**

Determina-se o deslocamento central  $w$  de uma placa engastada, sujeita a uma carga uniformemente distribuída  $q = 2 \text{ psi}$ .

As propriedades do material são as seguintes:

$$E_1 = 1.8282 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$E_2 = E_3 = 1.8315 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$G_{12} = 0.37 \times 10^6 \text{ psi} \quad (5.10)$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.32$$

Na figura 5.13, pode-se observar a geometria e as condições de bordo deste problema.

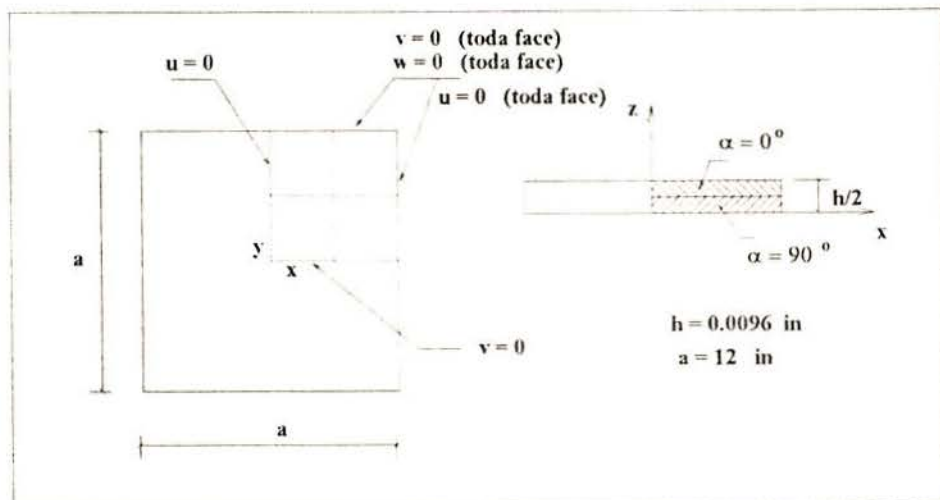


Figura 5.13 - Geometria e condições de bordo do caso 10.

Os resultados obtidos, nas análises linear e não linear geométrica, são comparados na figura 5.14, com aqueles encontrados com elemento finito 3-D degenerado e experimentais apresentados por REDDY (1988) e com resultados apresentados por ZAGHLOUL e KENNEDY (1975) utilizando a técnica de diferenças finitas.

As condições de contorno empregadas, mostradas na figura 5.13, procuraram representar as condições experimentais de vinculação ao logo da espessura; caso seja adotado as condições de contorno na linha neutra outros resultados serem obtidos, adequados a análise planas teóricas. Portanto um estudo adequado da vinculação com relação a espessura é fundamental.

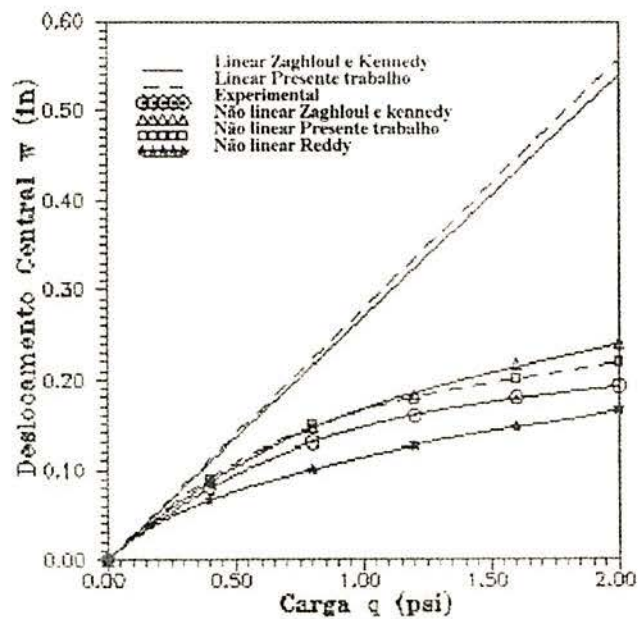


Figura 5.14 - Gráfico carga versus deslocamento central para o caso 10

### 5.3 - Análise Dinâmica

Nesta seção são apresentadas alguns exemplos de análise dinâmica, com e sem amortecimento.

### 5.3.1 - CASO 11 -Análise Dinâmica Linear de um viga simplesmente apoiada, sujeita a uma carga pulso no ponto central, sem amortecimento.

Determina-se o deslocamento central  $w$  de uma viga bi-apoiada sujeita a uma carga pulso  $P_0 = 20 \text{ kN}$ .

As propriedades do material são as mesmas apresentadas no caso 1, equação (5.1). As dimensões e a discretização também foram apresentadas no caso 1.

A solução analítica é apresentada por CLOUGH e PENZIEN (1975), cujos valores para o deslocamento central e período, para o primeiro modo de vibração, são os seguintes:

$$\begin{aligned} W_1 &= 12.4693 \text{ rad / s} \\ T_1 &= 0.50389 \text{ s} \end{aligned} \quad (5.11)$$

A análise foi feita com uma duração do carregamento de três vezes o período  $T_1$ , e o intervalo de tempo foi de :

$$\Delta t = \frac{3\pi}{40} \quad (5.12)$$

Os parâmetros do Método de Newmark empregados foram :

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= 0.5 \\ \bar{\alpha} &= 0.25 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Os coeficientes de amortecimento de Rayleigh ( $\gamma$  e  $\beta$ ) são nulos, pois não foi considerado amortecimento neste caso.

A integração numérica empregada foi de  $2 \times 2 \times 3$ , e os resultados obtidos são comparados com os analíticos apresentados por CLOUGH e PENZIEN (1975), conforme observa-se na figura 5.15.

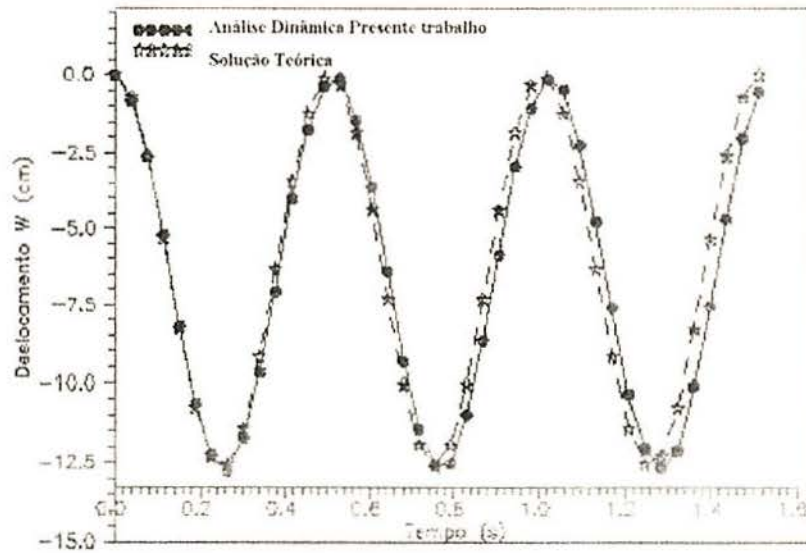


Figura 5.15 - Gráfico deslocamento central versus tempo do caso 11.

**5.3.2 - CASO 12 - Análise Dinâmica Linear de uma viga simplesmente apoiada, sujeita a uma carga pulso  $P_0$  no centro da mesma, com amortecimento.**

Determina-se o deslocamento central  $w$ , ao longo do tempo, da mesma viga analisada no caso 11, nas mesmas condições de carregamento, porém considerando dois casos de amortecimento, nos quais os coeficientes de amortecimento de Rayleigh são os seguintes:

- a)  $\gamma = \beta = 0.1$  (supercrítico) (5.14)  
 b)  $\gamma = \beta = 0.01$  (sub - crítico)

Os resultados obtidos são apresentados na figura 5.16.

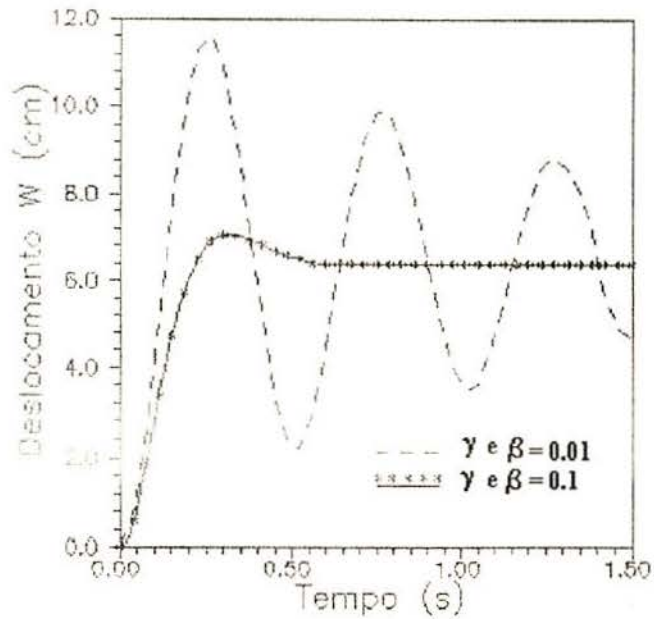


Figura 5.16 - Gráfico deslocamento central versus tempo do caso 12-a e 12-b

### 5.3.3 - CASO 13 - Análise Dinâmica Não linear de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a uma carga pulso uniformemente distribuída, sem amortecimento

Determina-se o deslocamento central, ao longo do tempo, de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a uma carga pulso uniformemente distribuída  $q_0 = 10 \text{ N/cm}^2$ .

As propriedades do material são as seguintes:

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu = 0.25 \tag{5.15}$$

$$\rho = 8 \times 10^{-6} \frac{\text{N s}^2}{\text{cm}^4}$$

A geometria e as condições de contorno são apresentadas na figura 5.18.

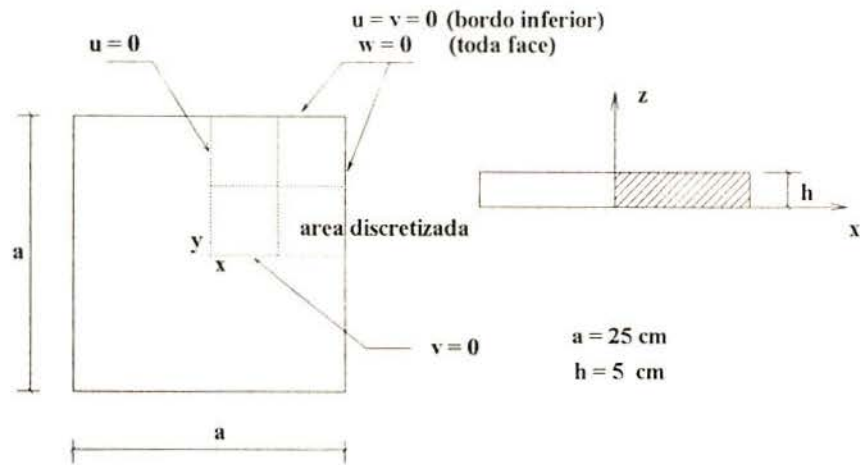


Figura 5.18 - Geometria e condições de contorno do caso 13

O intervalo de tempo empregado foi de  $10 \mu\text{s}$ , e os coeficientes do Método de Newmark são os mesmos apresentados na equação 5.13.

A malha de elementos finitos utilizada foi apresentada na figura 5.4, e os resultados obtidos são comparados com aqueles de LIAO e REDDY (1987), os quais são mostrados na figura 5.19.

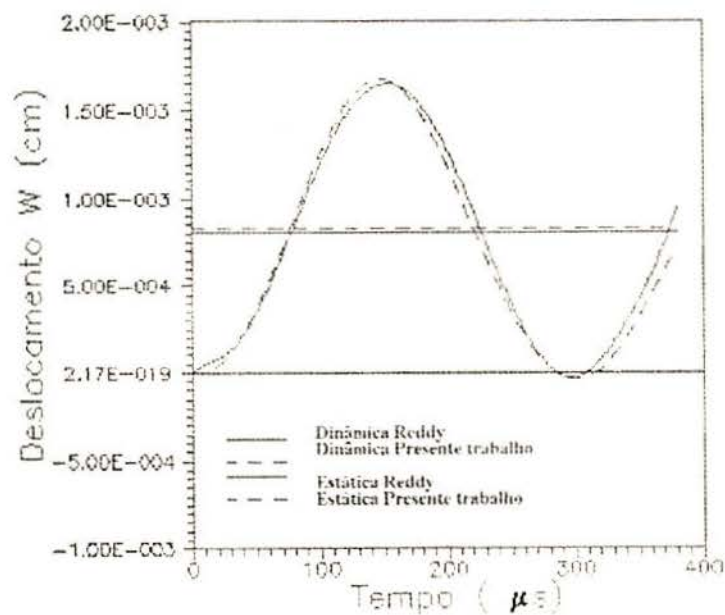


Figura 5.19 - Gráfico deslocamento central versus tempo do caso 13

## 5.4 - Análise de Tensões

A análise de tensões foi feita utilizando a técnica de suavização de tensões, conforme a formulação apresentada no apêndice B. Neste item, apresenta-se um exemplo de análise de tensões, onde é feita a variação da integração numérica e da discretização empregada.

### 5.4.1 - CASO 14 - Análise de Tensões em uma viga bi-apoiada, sujeita a uma carga concentrada P

Determina-se as tensões da viga apresentada no caso 1, com as mesmas condições de carregamento, geometria, propriedades do material e condições de bordo, variando apenas a discretização e a integração numérica empregada.

Pela teoria de viga, o valor analítico da tensão  $\sigma_{xx}$ , em uma seção  $x$ , é determinado pela seguinte expressão:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_x \bar{z}}{I} \quad (5.16)$$

onde:

$\sigma_{xx}$  = tensão de tração ou compressão na direção  $x$ , em  $\text{kN/cm}^2$ ;

$M_x$  = momento fletor no ponto  $x$ , em  $\text{kN/cm}$ ;

$\bar{z}$  = distância da linha neutra;

$I$  = momento de inércia, em  $\text{cm}^4$ .

A variação destas tensões, em uma seção genérica, está representada esquematicamente na figura 5.20.

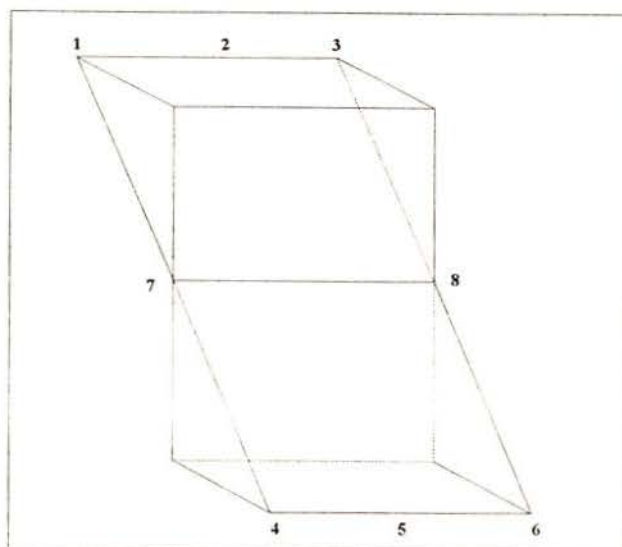


Figura 5.20 - Distribuição de tensão  $\sigma_{xx}$  em uma seção genérica

A comparação dos resultados obtidos, com aqueles encontrados empregando a equação 5.16, são apresentados na tabela I.5.7, para diferentes integrações numéricas.

Tabela I.5.7 Comparação de resultados

Integração	2 X 2 X 3			3 X 3 X 3			
	nó	$\sigma_i$	$\sigma_i / \sigma_e$	Diferença (%)	$\sigma_i$	$\sigma_i / \sigma_e$	Diferença (%)
	1	-6.0007	1.0001	0.01	-4.6368	0.7728	22.72
	2	-6.0000	1.0000	0.00	-4.6368	0.7728	22.72
	3	-5.9992	0.9999	0.01	-4.6368	0.7728	22.72
	4	-6.0010	1.0001	0.02	4.6368	0.7732	22.68
	5	-6.0000	1.0000	0.00	4.6368	0.7732	22.68
	6	-5.9990	0.9998	0.02	4.6368	0.7732	22.68



onde :

$\sigma_i$  : tensão  $\sigma_{xx}$  no ponto  $i$ , com  $i=1,2,\dots,6$ ;

$\sigma_e$  : tensão  $\sigma_{xx}$  analítica.

Os resultados de deslocamento apresentaram uma diferença de 0,14% com integração  $2 \times 2 \times 3$  e de 4,43% com integração  $3 \times 3 \times 3$  em relação aos resultados teóricos, no primeiro caso os resultados em tensões foram bons, mas no segundo não, conforme pode ser observado na tabela 1.5.7. Outros testes foram feitos com integração  $3 \times 3 \times 3$  melhorando a discretização, nos quais foram obtidos bons resultados com uma malha de elementos finitos de  $5 \times 1 \times 1$ .

## VI - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O objetivo inicial deste trabalho é o de fazer a análise dinâmica e estática de materiais laminados usando elementos finitos 3-D de 20 nós, incluindo não-linearidade geométrica e a técnica de integração reduzida.

Neste contexto, as seguintes considerações foram feitas :

- a) o efeito da não-linearidade geométrica é fundamental na análise de placas e cascas, sempre que os deslocamentos forem maiores que a metade da espessura.
- b) a análise com elementos finitos 3-D é bastante simples na sua implementação e obtém-se resultados muito bons, sendo que o aumento do número de graus de liberdade do problema pode ser compensado com discretizações mais grosseiras, sem prejudicar os resultados.
- c) outro ponto importante na análise com elementos finitos 3-D dimensionais e a adequada escolha das condições de contorno, procurando adequá-las quanto a comparação com dados experimentais ou analíticos.
- d) as discretizações para resultados em deslocamentos e em tensões dependem da integração numérica empregada; empregando a integração reduzida, os resultados obtidos foram bons mesmo com discretizações grosseiras; empregando a integração normal para obter bons resultados foi necessário refinar a malha.
- e) o procedimento empregado para obtenção das tensões nos nós, apresentado no apêndice B. mostrou-se bastante simples e eficaz.

Frente aos bons resultados obtidos com o presente trabalho, sugere-se o seguinte:

- a) implementar um sistema de solução iterativo (gradientes conjugados) e comparar a performance de ambos;
- b) estudar a vetorização do programa, para para sua utilização no supercomputador CRAY, possibilitando a análise de problemas com muitos mais graus de liberdade;
- c) empregar este elemento para analisar delaminação, em elementos laminados;
- d) testar outros elementos tridimensionais;
- e) implementar a análise com não linearidade física;
- f) implementar um esquema explícito para análise dinâmica;
- g) testar este elemento em subestruturação.

## APÊNDICE A

### Formulação do elemento isoparamétrico 3-D de 20 nós empregado

O elemento tridimensional isoparamétrico de 20 nós foi idealizado para contornos curvos. Na Fig. A-1 podemos observar este elemento.

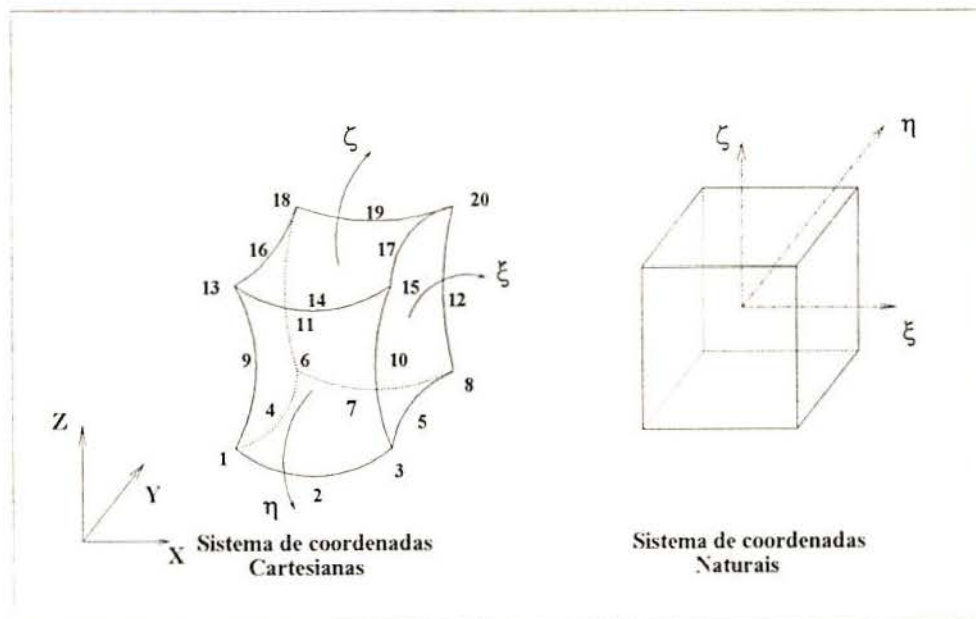


Figura A-1 - Elemento isoparamétrico 3-D de 20 nós

O polinômio de interpolação  $N$  para este elemento é do tipo :

$$N = \{N_1, N_2, N_3, \dots, N_{19}, N_{20}\} \quad (A.1)$$

Para os nós de canto ( $i=1,3,5,7,13,15,17$  e  $19$ ) os polinômios de interpolação são os seguintes :

$$N_i = (1/8)(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)(1 \pm \zeta)(\pm \zeta \pm \eta \pm \xi - 2) \quad (A.2)$$

para  $i=9,10,11,12$ , será :

$$N_i = (1/4)(1 - \zeta^2)(1 \pm \eta)(1 \pm \xi) \quad (A.3)$$

para  $i=2,6,14,18$ , será :

$$N_i = (1/4)(1-\xi^2)(1\pm\eta)(1\pm\zeta) \quad (\text{A.4})$$

para  $i=4,8,16,20$ , será :

$$N_i = (1/4)(1-\eta^2)(1\pm\xi)(1\pm\zeta) \quad (\text{A.5})$$

A geometria do elemento é descrita como :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} N_i \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \\ \mathbf{z}_i \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

A variação dos deslocamentos sobre o elemento é expressada pela mesma função de forma, ou seja :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} N_i \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \\ \mathbf{w}_i \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A matriz do Jacobiano  $[\mathbf{J}]$  e a matriz deslocamento-deformação  $[\mathbf{B}]$  são apresentadas abaixo :

$$[\mathbf{J}] = \sum_{i=1}^{20} \begin{bmatrix} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & z_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & z_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ x_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & y_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & z_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

e  $[\mathbf{B}] = [[\mathbf{B}_1]_{6 \times 3} [\mathbf{B}_2]_{6 \times 3} \dots \dots [\mathbf{B}_{20}]_{6 \times 3}]$ , onde  $[\mathbf{B}_i]$  é dado pela seguinte expressão :

$$[\mathbf{B}_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

A matriz de rigidez do elemento é a seguinte :

$$[\mathbf{K}] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (\text{A.10})$$

O esquema de integração numérica pode ser escolhido entre 2x2x2, 2x2x3 ou 3x3x3, conforme o problema.

## APÊNDICE B

### Projeção de tensões

A análise por elementos finitos envolve a estimativa de variáveis no campo contínuo ( por exemplo : deslocamentos), em um conjunto de pontos conhecido como nós, sendo que as tensões são geralmente apresentadas nos pontos de integração.

No presente trabalho, emprega-se uma técnica de projeção das tensões dos pontos de integração aos nós, baseada na técnica dos Mínimos Quadrados Locais, esta técnica, assim como o procedimento computacional é apresentada por MOYER (1982) em uma Nota Técnica. Na seqüência é necessário fazer a suavização destas tensões a nível global.

A seguir apresenta-se o procedimento empregado de forma concisa.

Uma aproximação das tensões nos pontos de integração, empregando o MEF, pode ser obtida pela expressão :

$$\hat{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{B.1})$$

onde :

$\hat{\sigma}$  aproximação das tensões nos pontos de integração;

$\bar{\mathbf{u}}$  deslocamentos nos nós,

Sendo assim, as tensões a nível de elemento podem ser expressas como :

$$\bar{\sigma} = \mathbf{N}_{\sigma} \sigma^* \quad (\text{B.2})$$

onde :

$\sigma^*$  tensões nos nós do elemento;

$\mathbf{N}_{\sigma}$  função de interpolação para tensões;

$\bar{\sigma}$  tensões reais nos pontos de integração.

Quando o Método dos Elementos Finitos é empregado adequadamente  $\bar{\sigma} \cong \hat{\sigma}$  e então podemos escrever :

$$\int_V \mathbf{N}_{\sigma}^T (\bar{\sigma} - \hat{\sigma}) dV = 0 \quad (\text{B.3})$$

ou

$$\left( \int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{N}_\sigma dV \right) \boldsymbol{\sigma}^* = \int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{C} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} dV \quad (\text{B.4})$$

fazendo :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{N}_\sigma dV \\ \mathbf{P} &= \int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{C} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} dV = \int_V \mathbf{N}_\sigma^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Pode-se rescrever a expressão (B.4) na forma matricial como :

$$\mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{P} \quad (\text{B.6})$$

onde :

- $\boldsymbol{\sigma}^*$  tensão nos nós;
- $\mathbf{M}$  matriz diagonalizada;
- $\mathbf{P}$  vetor de tensões nos pontos de integração..

A determinação das tensões nos nós do elemento ( $\boldsymbol{\sigma}^*$ ) a partir das tensões nos pontos de integração através da expressão (B.2) não apresentou resultados satisfatórios sendo necessário empregar a técnica dos Mínimos Quadrados apresentada por MOYER (1982), conforme mencionado anteriormente. A matriz  $\mathbf{M}$  é determinada a nível de elemento e diagonalizada, por qualquer dos procedimentos apresentados por ZIENKIEWICZ (1990 -vol 1) e armazenada na forma vetorial a nível global. O vetor  $\mathbf{P}$ , a nível de elemento é obtido facilmente através da expressão :

$$\mathbf{P}^e = \mathbf{M}^e \boldsymbol{\sigma}^{*e} \quad (\text{B.7})$$

onde o subíndice "e", indica que são valores a nível de elemento. Este vetor é montado e armazenado a nível global.

Finalmente as tensões, a nível global, são obtidos através da técnica de suavização a nível global, pela expressão :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{M}^G \mathbf{P}^G \quad (\text{B.8})$$

Este procedimento se mostrou bastante eficiente conforme pode ser observado no capítulo V - caso 14, onde associado a técnica de integração reduzida apresenta bons resultados mesmo com uma discretização grosseira.



## BIBLIOGRAFIA

1. ARGYRYS, J. H. , FRIED, I. e SCHARPF, D. W. , The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method, *The Aeronaut. J., Roy Aeronaut. Soc.* , **72**, (1968).
2. AHMAD, S. Curved finite elements in the analysis of solids, shells and plate structures, *Ph.D. thesis, University of Wales, Swansea*, (1968).
3. ASHTON, J. E. e WHITNEY, J. M. , **Theory of Laminated Plates** , Technomic Publishing Co., Inc. , Stamford (1970).
4. BATHE, K. J. , **Finite Element Procedures in Engineering Analysis** , Prentice Hall Inc. , Englewood Cliffs , New York (1982).
5. BELL, K. , A refined triangular plate bending element , *Int. J. Num. Meth. Eng.* , **1** , (1969) 101 - 122 .
6. BOSSHARD, W. , Ein neues vollverträgliches endliches Element für platten-biegung , *Mt. Ass. Bridge Struct. Eng. Bull.* , **28** (1968) 27 - 40.
7. CLOUGH, R. W. e PENZIEN, J. , **Dynamics of Structures** , McGraw-Hill, New York (1975).
8. COWPER, G. R. , KOSKO, E. , LINDBERG, G. M. e OLSON, M. D. , Formulation of a new triangular plate bending element , *Trans. Canad. Aero-Space Inst.* , **1** , (1968) 86- 90.
9. DESAI, C. S. e ABEL, J. F. **Introduction to the Finite Element Method** , Van Nostrand Reinhold Company , New York (1972).
10. IRONS, B. M. , A conforming quartic triangular element for plate bending , *Int. J. Num. Meth.* , **1** (1969) , 29 - 46.

11. KIRCHHOFF, G. , Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, *J. Reine und Angewandte Mathematic*, **40** , (1950) 51 - 88.
12. LIAO, C. -L. e REDDY, J. N. , An incremental Total Lagrangian Formulation for general anisotropic shell-type structures, Virginia Polytechnic Institute and State University Blacksburg, Virginia , 24061 (1987).
13. MALVERN, L. E. , **Introduction to the Mechanics Continuous Medium** , Prentice Hall Inc. , Englewood Cliffs, New Jersey (1969).
14. MARQUES, D. C. S. C. e AWRUCH, A. M. , Aspectos da análise de cascas laminadas pelo Método dos Elementos Finitos, CPGEC/UFRGS, CE-40/90 , Porto Alegre (1990).
15. MOYER, E. T. , **A Brief Note on the "Local Least Squares" Stress Smoothing Technique**, *Computers & Structures*, Vol. 18, nº 1 , 185-187, (1984).
16. PROLA, L. C. , Comportamento de pós-flambagem de placas laminadas de materiais compostos dispostos simetricamente, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (1987).
17. REDDY, J. N. , **Lecture Notes in Engineering in mechanics of Composite Structures**, Eds. C. A. Brebbia e S. A. Oszag , Springer-Verlag , Berlin (1988).
18. SZILARD, R. , **Theory and Analysis of Plates** , Prentice Hall Inc. , New York (1974).
19. VISSER, W. , The finite element in deformation and heat conduction problems , Dr. Wiss. Dissertation , Tech. Hoch. , Delft (1968).
20. WEAVER, W. e JONSTON, P. R. , **Finite Element for Structural Analysis** , Prentice-Hall Inc. , Englewood Cliffs , New Jersey (1984).
21. ZAGHLOUL, S. A. e KENNEDY, J. B. , Nonlinear behavior of symmetrically laminated plates, *ASME* (1975).
22. ZIENKIEWICZ, O. C. , **The Finite Element Method**, McGraw-Hill book Company Ltd., New york, V. 1 e V. 2 , 4th. ed. (1991).