UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE PESQUISAS HIDRÁULICAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
RECURSOS HÍDRICOS E SANEAMENTO

MODELO HIDRODINÂMICO BIDIMENSIONAL COM APLICAÇÃO AO RIO GUAÍBA

ANDRÉ LUIZ LOPES DA SILVEIRA

ORIENTADOR: PROF. CARLOS EDUARDO MORELLI TUCCI

PORTO ALEGRE, ABRIL DE 1986

À minha família

AGRADECIMENTOS

O autor expressa seus agradecimentos:

Ao Professor Carlos Eduardo Morelli Tucci, pela eficiente orientação e incentivo durante a realização deste trabalho.

Ao Professor Marc Pierre Bordas, pelo interesse e contribuição ao bom termo da tarefa.

Ao Professor Alejandro Borche Casalas, pelas oportunas sugestões.

Ao 1º Distrito do Departamento Nacional de Águas e Energia Elétrica — DNAEE, pela cessão dos dados básicos requeridos.

Ao Instituto de Pesquisas Hidráulicas, pelo apoio proporcionado na elaboração desta dissertação.

Ao Centro de Processamento de Dados da UFRGS, pelo uso do computador B 6700.

A todas pessoas que pelas mais diversas formas proporcionaram as condições necessárias à realização deste trabalho.

RESUMO

Nesta dissertação é desenvolvido um modelo hidrodinâmico bidimensional para simulação de escoamentos em rios, lagos e mares onde as dimensões horizontais predominam sobre a vertical. São apresentadas as etapas de elaboração do modelo matemático desde a dedução das equações diferenciais básicas do escoamento até a estruturação de um programa computacional operacional com o esquema numérico em diferenças finitas de Leendertse (1967). O modelo está apto a representar escoamentos em corpos d'água com qualquer configuração em planta e quaisquer condições de contorno de nível ou velocidade. Uma aplicação, precedida por testes numéricos, foi feita no rio (lago) Guaíba.

S U M Á R I O

Página

Página

ÍNDICE DAS FIGURAS

Página

Página

Página

Página

ÍNDICE DAS TABELAS

ÍNDICE DOS QUADROS

I — INTRODUÇÃO

A modelação matemática é um dos procedimentos que o homem procura utilizar na reprodução e estudo de fenômenos das mais diversas áreas do conhecimento, que lhe interessam. Nas áreas de Física e Engenharia, onde esta atividade mais se difundiu, os modelos matemáticos já se tornaram, em muitos casos, em instrumentos imprescindíveis ao processamento de informações que subsidiam as tomadas de decisão.

Nas especialidades de Hidráulica e Hidrologia, o progressivo desenvolvimento dos computadores, nas duas últimas décadas, tornou possível o desenvolvimento de modelos matemáticos numéricos complexos para simulação de eventos eminentemente não permanentes, como transformações de chuvas em descargas em bacias hidrográficas e propagação de ondas de cheia em rios e canais.

Acompanhando a capacidade e disponibilidade dos computadores, os modelos computacionais se diversificaram, passando a atender aos mais diversos problemas de recursos hídricos. Relativamente aos escoamentos em rios, lagos e mares, tiveram preliminarmente maior desenvolvimento, e mais largo emprego, os modelos unidimensionais em função de os dados disponíveis e os problemas a resolver vincularem-se mais a rios e canais. Entre tanto, os estudos de escoamentos de lagos e mares, tão importantes quanto os de rios e canais, tornaram necessários o desenvolvimento de modelos mais complexos, bi ou tridimensionais.

Modelos hidrodinâmicos bidimensionais horizontais, para simulação de escoamentos em lagos, mares e baías, tiveram desenvolvimento efetivo a partir da década de sessenta, onde o trabalho de Leendertse (1967) é referência básica, por se constituir em uma obra pioneira na apresentação de uma ampla e completa análise numérica e prática, demonstrando a eficiência da esquematização utilizada.

Muitos outros autores também trataram com competência da modelação bidimensional. Hinwood e Wallis (1975) analisaram dezenas de modelos cujas diferenças principais consistiam na consideração ou não de termos não lineares, na linearização destes termos e no método numérico empregado. Como exemplo dos trabalhos que desprezaram as acelerações não lineares, Abbott et alii (1973) aplicaram um método de diferenças finitas implícito às equações com o termo de fricção linearizado, Masch (1971) utilizou uma formulação explícita e Daubert e Graffe (1967) resolveram as equações diferenciais, com rugosidade linear, pelo método das características. Dos autores que utilizaram as equações diferenciais completas do movimento, podem ser destacados os exemplos de Hansen (1956), tido como autor do primeiro modelo bidimensional completo, do já referido Leendertse (1967) e de Fischer (1970), que aplicou o método numérico dos elementos finitos.

Dentre todos os trabalhos desta área, o de Leendertse que apresentou um esquema numérico ADI (Alternating Direct Implicit) multioperacional original, é, ainda hoje, a fonte predominante das formulações dos modelos bidimensionais, em geral. Não significa, entretanto, que as técnicas de resolução das equações diferenciais bidimensionais não estejam em constante aperfeiçoamento. É possível, por exemplo, que o trabalho de Benquê et alii (1982), que introduz uma complexa, mas eficiente, formulação envolvendo métodos implícitos e das características, venha a ser considerado um padrão para o futuro.

O modelo bidimensional horizontal apresentado nesta dissertação tem a formulação básica estabelecida por Leendertse (1967). A apresentação inicia com a definição das equações diferenciais básicas do escoamento bidimensional, no capítulo II, segue com uma introdução aos modelos hidrodinâmicos, no capítulo III, com a definição das equações diferenciais integradas, no capítulo IV, passando, após, a tratar da esquematização numérica e desenvolvimento do modelo computacional, no capítulo V, com aplicação prática ao rio Guaíba, no capítulo VI, finalizando com o capítulo VII, de conclusões e recomendações.

Desta forma, pretende-se atingir o objetivo principal deste trabalho que é o de desenvolver um modelo para simulação de escoamentos bidimensionais não permanentes, segundo a estrutura de Leendertse (1967), demonstrando domínio da técnica de modelação temática, desde o estabelecimento das equações diferenciais básicas até a elaboração e aplicação de um modelo computacional operacional.

Paralelamente, é objetivo realçar o potencial desta técnica no gerenciamento dos recursos hídricos de corpos d'água bidimensionais, principalmente em um país como o Brasil onde inúmeros são os lagos, baías e estuários e enormes são as dimensões da costa marítima. Dentre os diversos aspectos do gerenciamento destaca-se o estudo de dispersão de poluentes ao qual é fundamental o estudo prévio de correntologia. O modelo descrito nesta dissertação é um modelo do correntologia.

II — EQUAÇÕES BÁSICAS DO ESCOAMENTO

II.1 — INTRODUÇÃO

O movimento de um fluido é basicamente regido pelos princípios físicos fundamentais de conservação da massa, quantidade de movimento e energia.

A conservação da massa estabelece que não há ganho nem perda de massa por parte do fluido, durante o escoamento, enquanto que as conservações da quantidade de movimento e energia são conseqüências diretas, respectivamente, da segunda lei de Newton e da primeira lei da Termodinâmica.

Baseando-se nos princípios acima é possível a dedução de equações teóricas capazes de descrever, em conjunto, o escoamento de um fluido.

A equação que representa a conservação da massa, uma grandeza escalar, é conhecida por **equação da continuidade**; as equações que traduzem a conservação da quantidade de movimento, uma grandeza vetorial, são chamadas de **equações dinâmicas**, e a conservação da energia, grandeza escalar como a massa, é descrita por uma equação denominada de **equação de energia**.

Existem dois métodos para a dedução destas equações: o método de Euler e o método de Lagrange. Este último considera, individualmente, cada partícula de fluido, como no estudo do movimento de corpos sólidos feito na Mecânica. O outro método, o de Euler, se preocupa em descrever o escoamento em coordenadas fixas do espaço. Comparando-se os dois métodos, o método de Euler é o mais aconselhável de se utilizar na descrição da maioria dos escoamentos fluidos, porque interessa mais conhecer o estado do movimento em diferentes pontos fixos do espaço, no decorrer do tempo, do que o comportamento de partículas individuais. Além disso, a ótica euleriana é beneficiada pela utilização do conceito de "volume de controle" que possibilita uma dedução menos complexa e mais direta das equações básicas do escoamento. No presente trabalho, as equações apresentadas serão sempre advindas do método de Euler.

Em uma formulação geral, num espaço de coordenadas cartesianas, o sistema das equações básicas do escoamento descreve o movimento tridimensional, não permanente, de um fluido. Desta forma, além das equações de grandezas escalares (massa e energia), haverá três equações dinâmicas, uma para cada direção ortogonal do espaço.

A orientação relativa dos três eixos cartesianos ortogonais é de escolha livre, e o empregado da dedução das equações apresentadas posteriormente neste texto, terá os eixos OX e OY, horizontais em relação à superfície terrestre, orientados no sentido horário, com o eixo OZ, vertical, apontando para o alto.

O detalhamento das equações diferenciais do escoamento será feito a seguir, nos itens subseqüentes, apresentando-se primeiro as equações dinâmicas.

II.2 — EQUAÇÕES DINÂMICAS

As equações dinâmicas são estabelecidas a partir da segunda lei do movimento de Newton aplicada ao fluido. Tal lei determina, para um volume de controle fixo no espaço, que a saída líquida de quantidade de movimento mais a variação desta grandeza no seu interior deve ser igual, em cada intervalo de tempo, ao somatório das forças aplicadas. Em outras palavras, a força de inércia será, em cada ponto, igual à resultante das forças aplicadas no fluido, no decorrer do tempo.

As forças aplicadas em um escoamento de um fluido natural têm origem, principalmente, na gravidade, na rotação terrestre, na pressão e na viscosidade do fluido. Geralmente são desprezíveis as forças com origem em gradientes térmicos e de concentração de solutos, assim como em manifestações de campos eletromagnéticos e de radiação.

Em termos compactos e gerais, as equações dinâmicas podem ser apresentadas da seguinte forma:

$$I_x = G_x + C_x + P_x + A_x$$

$$I_y = G_y + C_y + P_y + A_y$$

$$I_z = G_z + C_z + P_z + A_z$$

onde

I_x, I_y, I_z , são as três componentes da força de inércia;

G_x, G_y, G_z, da força de gravidade;

C_x, C_y, C_z, da força de Coriolis(rotação terrestre);

P_x, P_y, P_z, da força de pressão; e

A_x, A_y, A_z, da força de atrito (viscosidade).

As forças acima, como já foi mencionado, podem ser divididas em força de inércia e forças aplicadas. A definição das expressões dos termos das equações dinâmicas, a partir desta distinção, será feita a seguir, começando-se pela caracterização da força de inércia e abordando-se posteriormente as forças aplicadas.

II.2.1 — Força de inércia

A força de inércia é a força que traduz a tendência natural de um corpo material de resistir a mudanças no seu esta do de movimento.

Expressão da força de inércia — é obtida pela representação matemática da saída líquida de quantidade de movimento somada à variação desta grandeza, em relação à parcela de fluido interna ao volume de controle. A expressão final, em suas três componentes, em termos de força por unidade de volume, tem a seguinte forma:

$$I_x = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}$$

$$I_y = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z}$$

$$I_z = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z}$$

onde

u,v,w = são as componentes de velocidade segundo os eixos, respectivamente, OX, OY e OZ; e

ρ = massa específica do fluido.

A correspondente expressão vetorial é

$$\vec{I} = \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \rho\vec{V}\,(\nabla.\vec{V}) + (\vec{V}.\nabla)\rho\vec{V}$$

sendo

$$\vec{V} = V(u,v,w); \quad e$$

$$\vec{I} = I(I_x, I_y, I_z)$$

II.2.2 — Forças aplicadas

As forças aplicadas, considerando-se uma partícula elementar de fluido, dividem-se em forças internas e forças externas.

As forças internas se originam no interior da partícula devido a interação de seus pontos internos. Estas interações são causadas pela pressão e atrito. As resultantes das forças internas e de seus momentos são nulas. Entretanto, o trabalho resultante não é zero, fato importante no estudo dos mecanismos de dissipação de energia em forma de calor.

As forças externas, por sua vez, são aquelas que agem sobre as partículas de fluido individualizadas, modificando seu estado de movimento. Conseqüentemente, as resultantes das forças externas, quando estas existirem, e dos seus momentos, não serão, em geral, nulas.

Verifica-se, então, pela diferença conceitual, que o estudo do movimento do fluido como um todo depende unicamente da ação das forças externas, uma vez que são as únicas capazes de alterar o estado de movimento das partículas. Por outro lado, se aspectos quantitativos ligados à energia forem importantes, o trabalho das forças internas deve ser considerado, constituindo-se em um termo da equação de energia.

Como as equações dinâmicas pretendem descrever o movimento de um fluido no decorrer do tempo somente as forças externas devem ser consideradas, de acordo com as razões apontadas acima.

Na superfície terrestre, o escoamento de um fluido real está sujeito a forças externas com origens diferentes, destacando-se o campo gravitacional e rotação do planeta, a atração de outros corpos celestes e os esforços superficiais decorrentes da pressão e da viscosidade.

As forças externas podem ser classificadas, de acordo com a natureza de ação, em forças de campo e forças de contato, cujas características são explicadas a seguir.

II.2.2.1 — Forças de campo

Define-se força de campo como aquela exercida à distância sobre cada partícula elementar de fluido, em uma certa direção, com origem em um campo de forças externo ao fluido.

Os campos gravitacionais da Terra e de outros corpos celestes são exemplos de campos de força que agem no escoamento de fluidos naturais na superfície terrestre. A força resultante destes campos será aqui denominada de força de gravidade.

Existe outra força, considerada de campo, que resulta da rotação terrestre: a força de Coriolis. Não obstante seu caráter intrinsecamente inercial, a força de Coriolis, resultante da aceleração geostrófica da Terra, pode ser considerada, sob o ponto de vista do fluido, como uma força de campo, sem prejuízo de seu efeito físico nem de sua expressão matemática.

Uma vez identificadas as forças de campo como as forças de gravidade e de Coriolis, suas expressões matemáticas serão agora definidas para incluí-las nas equações dinâmicas.

Expressão da força de gravidade — a origem mais importante da força de gravidade, o campo gravitacional terrestre, é caracterizado, em cada ponto da superfície, pela aceleração constante a que submete qualquer corpo, em movimento ou não, com sentido apontando para o centro do planeta. Ao se dispor os três eixos cartesianos ortogonais de referência para estudo de um escoamento, coloca-se, normalmente, um eixo na vertical, eixo OZ, com os outros dois, eixos OX e OY, formando o plano horizontal. Verifica-se, com rigor de precisão, que a direção do OZ muitas vezes não coincide com a direção da aceleração da gravidade. Assim haveria pequenas componentes horizontais da aceleração da gravidade. Na prática, estas componentes são desprezadas. A outra origem que contribui para a força de gravidade é a atração gravitacional de outros corpos celestes. Dentre estes corpos, aqueles cujos efeitos são perceptíveis, mesmo que somente em alguns casos, são a Lua e o Sol. O efeito principal da atração da Lua e do Sol são as marés oceânicas. Devido às suas características regulares e ondulatórias, o tratamento científico das marés pode ser realizado à parte, entrando, posteriormente, como condições de contorno no escoamento das massas oceânicas (Ramming & Kovalik, 1981). Para corpos líquidos menores e gases o efeito de maré é desprezível. De acordo com o exposto, as componentes da força de gravidade podem ser escritas, simplificadamente, como abaixo:

$$G_x = 0$$

$$G_y = 0$$

$$G_z = -\rho g$$

onde "g" é a aceleração da gravidade terrestre.

Expressão da força de Coriolis — a força de Coriolis é conseqüência da rotação terrestre. O fato da Terra girar em torno de seu eixo Norte-Sul no sentido Oeste-Este condiciona o escoamento de grandes massas fluidas em sua superfície de maneira importante. Se um corpo qualquer se desloca horizontalmente na superfície terrestre estará sujeito a uma componente da força de Coriolis perpendicular a sua trajetória. No hemisfério norte a deflecção ocorre para a direita e no hemisfério sul o desvio acontece para a esquerda. É o chamado efeito de Coriolis. No caso geral de um fluido escoando na superfície da Terra, onde as partículas possuem uma componente horizontal "V" de velocidade, com direção e sentido quaisquer no plano XOY, e outra "w", vertical, na direção do eixo OZ, a força geostrófica ou de Coriolis possui as seguintes componentes, em termos de força por unidade de volume.

$-2\rho\omega V \operatorname{sen} \phi$	componente horizontal perpendicular a "V" com sentido, no hemisfério norte, apontando para a esquerda desta. A latitude "ϕ" é, por convenção, positiva neste hemisfério. No hemisfério sul esta componente tem sentido para a direita de "V". Por isso, a latitude "ϕ" deve ser tomada com valor negativo neste hemisfério;
$-2\rho\omega w \cos \phi$	componente horizontal de sentido fixo oeste-leste;
$-2\rho\omega V_e \cos \phi$	componente vertical com sentido positivo do eixo OZ se a componente leste "V_e", da componente horizontal "V" é positiva.

onde "ω" é a velocidade angular de rotação da Terra. O sinal negativo nestas componentes decorre do fato de a força de Coriolis, sob o ponto de vista do fluido, ser considerada uma força de campo, para facilitar o entendimento de sua ação, quando na realidade é uma força inercial da Terra. Voltando às componentes, verifica-se que a primeira, sem dúvida, é a mais importante porque é a responsável direta pelo efeito de Coriolis. A segunda componente horizontal só terá alguma importância se a relação entre a componente vertical e a resultante horizontal for significativa. Isto é, "w/V" tiver um valor razoável, o que não ocorre em escoamentos aproximadamente horizontais. Por último, a terceira componente, a componente vertical da força de Coriolis, é muito pequena se comparada com a ação do campo gravitacional terrestre. Na prática, este pequeno valor da aceleraçao geostrófica vertical é implicitamente considerado nas medições da aceleração da gravidade "g". Deste modo, as expressões das três componentes da força de Coriolís, ajustadas ao sistema tricoordenado de referência XYZ, serão, por unidade de volume, as seguintes:

$$C_x = \rho\Omega v$$

$$C_y = -\rho\Omega u$$

$$C_z = 0$$

onde

Ω = 2ω sen ϕ (parâmetro de Coriolis) e;

ω = velocidade angular de rotação da Terra;

Vetorialmente, a força de Coriolis pode ser representada por:

$$\vec{C} = -2\rho\,\vec{W} \times \vec{V}$$

sendo $\vec{W} = W\ (o,o,\omega)$

$\vec{V} = V\ (u,v,w)$

II.2.2.2 — Forças de contato

Denomina-se força de contato aquela cuja ação se verifica em uma superfície de contorno. Considerando-se um elemento de fluido, as forças exercidas em sua superfície externa pelos elementos circunvizinhos, através de contato direto, são melhor estudadas se for utilizado o conceito de tensão, que é vinculado a forças de natureza superficial.

As tensões originadas no interior de um fluido real em movimento se devem, principalmente, às ações da pressão e da viscosidade. A pressão é responsável apenas por tensões normais de compressão enquanto que a viscosidade provoca o aparecimento de tensões normais e tangenciais.

Em termos gerais, sem a preocupação de conceituar a pressão e a viscosidade em um fluido, todas as tensões normais e tangenciais possíveis, em torno de um elemento paralepipédico de fluido com faces paralelas ao triedro de referência, podem ser vistas na figura II.1. O símbolo "σ" representa tensões normais e "τ", tensões tangenciais. O primeiro sub-índice indica a direção normal ao plano de ação da tensão e o segundo, a direção do eixo coordenado paralelo à direção da mesma. As tensões representadas na figura II.1 são, por convenção, tensões positivas.

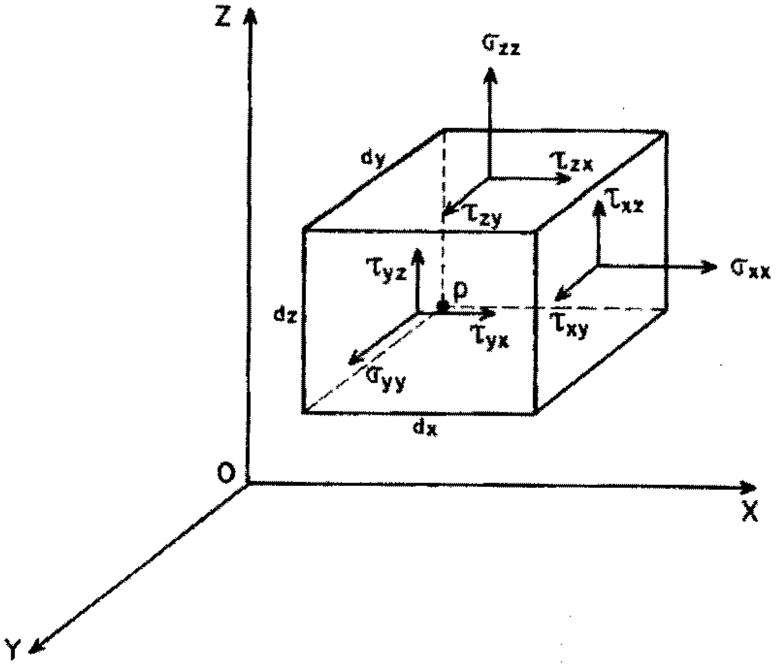

Figura II.1 — Tensões em um elemento de fluido.

As nove componentes de tensão representadas na figura II.1 — σ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}, σ_{yy}, τ_{yx}, τ_{yz}, σ_{zz}, τ_{zx}, τ_{zy} — caracterizam o estado de tensão em um ponto em uma referência ortogonal XYZ. Isto é, as tensões presentes em um ponto "p", segundo um plano de orientação qualquer, são perfeitamente definidas em função destas nove componentes, supostas conhecidas. Logo, somente se conhece o estado de tensão em um ponto se estiverem definidas as nove tensões fundamentais, no caso de se estar trabalhando com um sistema tricoordenado ortogonal cartesiano.

Genericamente, sem definir o tipo de sistema de referência, o estado de tensão em um ponto está definido se o tensor das tensões for conhecido neste ponto. Em um sistema de referência ortogonal XYZ, o tensor das tensões é um tensor cartesiano de segunda ordem cujas nove componentes são as tensões acima apresentadas. Este tensor pode ser representado matricialmente da seguinte forma:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Neste tensor "S" verifica-se um estado de simetria porque é possível provar que as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Relativamente às tensões normais, demonstra-se que a soma de quaisquer três tensões ortogonais deste tipo é um invariante escalar. Em conseqüência torna-se possível definir uma tensão média normal, sem propriedades direcionais, para cada ponto. Considerando-se o tensor cartesiano apresentado, a tensão normal média será dada pela média da diagonal principal:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

onde "$\bar{\sigma}$" é a tensão normal média.

Estas duas importantes propriedades do tensor das tensões — a simetria e a invariância escalar da tensão média — terão influência fundamental nas hipóteses para definição em detalhe das forças de contato.

As forças de contato são usualmente representadas, genericamente, através de uma forma condensada, obtida pela manipulação das nove tensões da figura II.1, sendo apresentadas na forma de forças por unidade de volume.

Expressão conjunta das forças de pressão e atrito — as componentes da força de contato, constituídas pela ação conjunta da pressão e viscosidade, têm a seguinte forma geral:

$$P_x + A_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$P_y + A_y = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$P_z + A_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$$

II.2.3 — Expressão das equações dinâmicas

De acordo com as expressões apresentadas para as diversas forças envolvidas no movimento, as equações dinâmicas pos suem a seguinte representação, ainda não detalhada no que se refere às forças de contato:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} - \rho\Omega v - \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} + \rho\Omega u - \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} - \rho g - \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right) = 0$$

Estas três equações possuem como incógnitas dez variáveis, não formando, por isso, um sistema determinado. As dez variáveis são: ρ, u, v, w, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy} $(=\tau_{yx})$, τ_{xz} $(=\tau_{zx})$ e τ_{yz} $(=\tau_{zy})$.

Neste rol de variáveis as únicas independentes entre si e das outras são as componentes de velocidade "u, v e w". As outras relacionam-se entre si e possuem algum grau de dependência do campo de velocidades. Novas relações devem, então, ser colocadas para construir um sistema de equações determinado. Naturalmente, as primeiras relações serão dadas pelas equações da continuidade e de energia.

II.3 — EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A aplicação do princípio de conservação da massa a um volume de controle estabelece que a variação da massa no seu interior deve ser igual à diferença das massas de entrada e saída, em cada intervalo de tempo.

O resultado deste balanço de massas é a equação da continuidade, escrita abaixo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

com as variáveis já definidas anteriormente.

Em notação vetorial, a equação da continuidade toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\vec{V}) = 0$$

O acoplamento da equação da continuidade às três equações dinâmicas não consegue ainda formar um sistema determinado, mas introduz uma forte condição entre a variável "ρ" (massa específica) e o campo de velocidades. A massa específica, entretanto, é uma variável de estado mecânico (depende das propriedades do fluido) e isto pressupõe a existência de uma equação para descrever o estado mecânico do fluido. Assim, após a apresentação da equação de energia, a próxima relação fundamental à descrição do escoamento fluido, a ser considerada, será a equação de estado para a variável "ρ".

II.4 — EQUAÇÃO DE ENERGIA

A conservação da energia é estabelecida pela primeira lei da Termodinâmica. Geralmente, a energia admitida como total nesta equação é constituída pela composição da energia mecânica com a energia térmica ou interna, desprezando-se outras formas de energia.

O balanço de energia para um volume de controle fixo no espaço, segundo a primeira lei da Termodinâmica, determina que a variação de energia total no interior do volume é igual à soma das entradas líquidas de energia total por convecção e de calor por condução, menos o trabalho feito pelo elemento de fluido contra os outros ao seu redor.

Para um fluido em escoamento na superfície terrestre, a equação de conservação da energia pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial t} + \frac{(\rho u\upsilon)}{\partial x} + \frac{(\rho v\upsilon)}{\partial y} + \frac{(\rho w\upsilon)}{\partial z} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) +$$

$$+ \left[\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + \tau_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \tau_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \rho R_q$$

onde υ = energia interna por unidade de massa;

q_x, q_y, q_z = componentes do fluxo de calor por condução;

R_q = termo de perdas e ganhos de calor devido a reações internas.

A equação de energia é a quinta equação fundamental do sistema que pretende descrever o escoamento. As anteriores são as três dinâmicas e a da continuidade. Conforme a expressão apresentada a equação de energia tem como incógnitas as seguintes variáveis: ρ, u, v, w, υ, q_x, q_y, q_z, R_q, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}. Portanto, a adição da equação de energia ao sistema, na forma como foi apresentada, não contribuiu para torná-lo determinado. Na verdade, a equação acima introduz como novas variáveis (υ, q_x, q_y, q_z, R_q), contribuindo para que o sistema das cinco equações referidas contenha 15 incógnitas. Em realidade, tal indeterminação do sistema é de esperar, uma vez que as cinco equações foram apresentadas nas suas formas mais conceituais do que descritivas. Para torná-las descritivas e, conseqüentemente, encaminhar o sistema no sentido da determinação se faz necessário o uso de relações acerca de características individuais do fluido e sobre suas reações quando submetido a situações físicas conhecidas. Tais relações são conhecidas por equações constitutivas. A energia interna, por ser uma variável de estado calórico, terá para si uma equação constitutiva de estado calórico.

II.5 — MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO ESCOAMENTO

II.5.1 — Variáveis e equações fundamentais

Um sistema geral, para um fluido escoando na superfície terrestre, seria formado pelas três equações dinâmicas, pela equação da continuidade e pela equação de energia.

Entretanto, para estas cinco equações fundamentais, conforme apresentadas anteriormente, existe um total de 15 incógnitas, o que torna o sistema matematicamente indeterminado.

As 15 incógnitas são:

ρ

u, v, w

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

υ

$\dot{q}_x, \dot{q}_y, \dot{q}_z$

R_q

Destas incógnitas, as únicas que funcionam fisicamente como variáveis independentes são as componentes de velocidade "u, v, w". Nas restantes, estão presentes duas variáveis de estado: "ρ" (estado mecânico, cinético, inercial) e "υ" (estado termo-energético ou calórico). As variáveis de estado são dependentes porque são funções de propriedades do fluido, que por sua vez, são respostas do fluido a condições expressas por variáveis independentes como pressão, temperatura e outras. Da lista anterior, tirando-se as componentes de velocidade, e as variáveis de estado, sobram as variáveis dependentes do campo de velocidades e do estado do fluido.

Como, na situação apresentada, há cinco equações diferenciais e apenas três variáveis confirmadamente independentes, parte-se agora para a definição das duas variáveis que faltam. Paralelamente deve-se ainda conceber relações entre as demais variáveis e estas cinco fundamentais para definir um sistema de equações determinado.

As relações entre variáveis fisicamente dependentes e independentes, assim como a definição destas, vão surgir da caracterização do estado do fluido e de hipóteses relativas às tensões no escoamento e à condução de calor. Tais relações são chamadas de equações constitutivas.

II.5.2 — Equações constitutivas

As equações constitutivas podem ser divididas em equações de estado e leis de fluxo. As primeiras são equações para as variáveis de estado "ρ" e "υ", e as outras são equações para os fluxos de quantidade de movimento devido às deformações no fluido e fluxos de calor por condução.

As equações de estado são equações que traduzem o comportamento do fluido, relativo a uma propriedade em função de uma condição imposta ao fluido. Para a observação do comportamento de um fluido, a condição imposta é geralmente traduzida por duas variáveis principais: a pressao e a temperatura absoluta "T". Destas duas variáveis somente a pressão necessita uma definição mais precisa face às suas características.

Pressão é um termo geral aplicado a tensões médias normais de compressão em um fluido. É, portanto, um escalar. O conceito de pressão historicamente se vincula à idéia de equilíbrio hidrostático, hipótese básica dos primeiros estudos em mecânica dos fluidos. Entretanto, em hidrodinâmica, surge, originário do tensor das tensões, um invariante escalar com características de pressão que é a tensão média normal "$\bar{\sigma}$". Evidentemente, esta tensão média não se alinha ao conceito de equilíbrio hidrostático, pois provém das equações gerais do movimento. A partir desta situação é possível distinguir três tipos de pressão: a estática, a termodinâmica e a viscodinâmica. A **pressão estática** é a pressão relacionada ao estado de equilíbrio termodinâmica, isto é, é a tensão média normal em um fluido em equilíbrio térmico e mecânico. É nesta situação que as equações de estado são definidas. Quando o fluido está em movimento, é feita a hipótese de que continua a existir uma pressão que obedeça as mesmas relações funcionais dadas pelas equações de estado. É costume chamar tal pressão de **pressão termodinâmica** e notá-la pela letra "p". Por último, se o fluido em movimento é viscoso existe a **pressão viscodinâmica** "$\overline{\sigma}$" (diferente da termodinâmica "p") que considera os efeitos da viscosidade.

A pressão termodinâmica "p" é, devido a sua natureza, independente da viscosidade e do movimento. Portanto seria a última variável independente, ao lado de u, v, w e T, a ser considerada no sistema. Sua introdução explícita, entretanto, somente se dará quando for definida uma relação entre $\overline{\sigma}$ e p que, naturalmente, existe, pois $\overline{\sigma} = -p$ em repouso. Uma relação será proposta posteriormente como parte das equações constitutivas resultantes da lei de Stokes.

Feitas estas considerações sobre a pressão, as equações de estado podem ser representadas, em termos gerais, como a seguir:

Equação de estado mecânico — é a função que relaciona a massa específica de um fluido (em repouso) com a temperatura e a pressão. Poderia ser escrita como:

$$\rho = \rho(p, T)$$

Equação de estado térmico — é a equação que coloca a energia interna do fluido (em repouso) como função da pressão e temperatura. Seria uma função indicada por

$$\upsilon = \upsilon(p, T)$$

Indicadas de modo geral as duas mais importantes equações de estado de um fluido passa-se agora a tratar das outras equações constitutivas.

As mais importantes destas outras equações constitutivas para um fluido real em movimento se referem aos fluxos de quantidade de movimento provocadas pela viscosidade.

A **viscosidade** de um fluido real, tem origem na agitação térmica de suas moléculas (caso de um gás) ou na coesão entre elas (caso de um líquido), podendo ser definida como uma medida da resistência exercida pelas partículas entre si em seus movimentos relativos. É um fenômeno que ocorre a nível molecular, sendo, portanto, característico de cada fluido. A viscosidade para um mesmo fluido varia com a temperatura e a pressão, isto é, depende de sua energia interna. O efeito macroscópico da viscosidade em um fluido em movimento, ou que se queira movimentar, é análogo ao atrito entre corpos sólidos, pois se resume no aparecimento de tensões. Entretanto em um fluido as interações são internas. As trocas de posição entre moléculas com quantidades de movimento diferentes provocam transferências espaciais destas grandezas que, pela segunda lei de Newton, implicam no aparecimento de esforços superficiais no meio fluido.

Tais esforços dissipam parte da energia de movimento.

A caracterização da viscosidade através de tensões afins foi o caminho histórico natural percorrido por Newton para apresentar a primeira equação de viscosidade. É uma equação linear útil até hoje (os fluidos a que ela se adaptam são chamados newtonianos):

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

onde τ = tensão tangencial entre duas camadas de fluido;

$\frac{du}{dy}$ = gradiente de velocidade entre as camadas; e

μ = coeficiente de viscosidade

Este coeficiente "μ" é que caracteriza a viscosidade do fluido. Costuma-se chamá-lo de coeficiente de viscosidade dinâmico para diferenciá-lo do coeficiente de viscosidade cinemático "ν" ($=\mu/\rho$).

A equação de Newton tem seu maior valor na definição de "μ" (em função da temperatura, com a pressão igual a atmosférica) para a maioria dos fluidos reais. Entretanto, conforme já visto, as tensões em um fluido viscoso em movimento tridimensional possuem caráter matemático tensorial. Fisicamente isto significa que as tensões quando relacionadas com os gradientes de velocidade (ou deformações) não serão dadas por relações simples como a de Newton.

As tensões analisadas constituem-se de dois tipos: tensões tangenciais e tensões normais.

Em um fluido real em escoamento, as tensões podem ser avaliadas, analogamente ao que ocorre com os sólidos, e adotando-se a hipótese do "contínuo", através das deformações ocorridas nos elementos de fluido. A diferença é que um fluido não apresenta deformações elásticas e as tensões devem ser relacionadas com as velocidades angulares de deformação.

A consideração de relações lineares entre as tensões e as velocidades de deformação (extensão da idéia de Newton) é conhecida como hipótese de Stokes (1845), embora St. Venant (1843) já as tivesse utilizado antes.

Equações constitutivas das tensões no fluido — segundo a hipótese linear de Stokes, válida para a maioria dos fluidos naturais, as seis tensões (três tangenciais e três normais) do tensor das tensões possuem as seguintes expressões:

$$\tau_{xy} \; (=\tau_{yx}) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} \; (=\tau_{zx}) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} \; (=\tau_{zy}) = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{xx} = \bar{\sigma} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = \bar{\sigma} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = \bar{\sigma} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$

A tensão média normal "σ" (média das três tensões normais acima) pode, como já foi mencionado, ser expressa por uma relação que contenha "p", a pressão termodinâmica.

Para um fluido imóvel, mesmo sendo viscoso, tem-se a igualdade $\bar{\sigma} = -p$. Quando em movimento, entretanto, um fluido viscoso compressível apresenta dilatações e compressões volumétricas ditadas pelas condições de escoamento, que são restringidas pela ação da viscosidade. Lembrando que a pressão "p" age sempre no sentido de comprimir, uma expressão válida para a pressão viscodinâmica "$\bar{\sigma}$" em um fluido newtoniano é dada por:

$$\bar{\sigma} = -p + \lambda'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

onde λ' = coeficiente de viscosidade volumétrica.

A expressão entre parêntesis é o divergente da velocidade e seu significado físico é a expansão (se positiva) ou compressão (se negativa) de volume. Substituindo-se a expressão acima para "$\bar{\sigma}$"nas expressões das tensões normais, obtêm-se as relações:

$$\sigma_{xx} = -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

onde $\lambda = \lambda' - \frac{2}{3} \mu$ é um segundo coeficiente de viscosidade.

Excluindo-se a pressão das relações acima, os termos restantes se constituem na parcela de contribuição da viscosidade às tensões normais.

Agora, definidas as expressões das seis tensões independentes do tensor das tensões, é possível expressar separadamente as forças de pressão e atrito das equações dinâmicas, apresentadas conjuntamente no item II.2.2.2.

Expressão da força de pressão — nada mais é que o gradiente da pressão termodinâmica. Portanto, as componentes são

$$P_x = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$P_y = - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$P_z = - \frac{\partial p}{\partial z}$$

Expressão da força do atrito — a força de atrito resultante das tensões tangenciais e normais com origem na viscosidade possui, conforme as relações anteriores, as seguintes componentes:

$$A_x = (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$A_y = (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$A_z = (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Viu-se que uma lei de fluxo de quantidade de movimento viscosa (lei de Stokes) permitiu a definição das equações constitutivas das tensões. Analogamente, uma lei para os fluxos de calor por condução em função da temperatura "T" (uma das variáveis independentes), resultará em equações constitutivas que tornarão a equação de energia mais descritiva.

Equações constitutivas dos fluxos de calor — o senso comum e as experiências da calorimetria indicam que a transferência de calor por condução de um corpo para outro é função da diferença de temperatura. Matematicamente significa que os fluxos de calor seriam funções de gradientes de temperatura. Baseando-se nesta idéia, a mais simples e usada relação entre fluxos de calor e gradientes de temperatura é a equação linear conhecida por lei de Fourier. Os fluxos de calor (para um fluido isotrópico ao calor), dados por esta lei, têm a forma:

$$q_x = -K_q \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_y = -K_q \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_z = -K_q \frac{\partial T}{\partial z}$$

onde K_q = coeficiente de condutividade térmica

II.5.3 — Sistema de equações para um fluido viscoso compressível

A inclusão das equações constitutivas no sistema de equações que descreve o escoamento de um fluido com soluto reduz, conforme esperado, o número de variáveis, aproximando-o de um sistema determinado.

Com as relações anteriores indicadas pelas equações constitutivas, o sistema de equações válido para um fluido viscoso compressível toma, após manipulações algébricas simples, a seguinte forma:

Equações dinâmicas

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} - \rho\Omega v + \frac{\partial p}{\partial x} - (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} - \mu\Delta u = 0$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} + \rho\Omega u + \frac{\partial p}{\partial y} - (\lambda+\mu)\,\frac{\partial\Theta}{\partial y} - \mu\Delta v = 0$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} + \rho g + \frac{\partial p}{\partial z} - (\lambda+\mu)\,\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \mu\Delta w = 0$$

Equação da continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Equação de energia

$$\frac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\upsilon u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\upsilon v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\upsilon w)}{\partial z} + K_q\Delta T + p\Theta - \lambda'\Theta^2 - \mu\phi - \rho R_q = 0$$

onde $\Theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$ = divergente da velocidade

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} = \text{operador de Laplace}$$

$$\phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\,\Theta^2 = \text{função dissipação}$$

As demais grandezas presentes nas equações já foram apresenta - das anteriormente.

As variáveis independentes deste sistema de cinco e- quações são as três componentes de velocidade "u, v, w", a pres são "p" e a temperatura "T". A determinação matemática do sistema ocorre somente quando as equações de estado mecânico "$\rho(p,T)$" e calórico "$\phi(p,T)$" forem definidas (considerando-se R_q já determinado).

Para alguns gases mais simples existem algumas equações de estado empíricas com boa aplicabilidade. Para outros tipos de gases e conforme o estudo a ser realizado, a definição de equações de estado é uma tarefa bastante complexa. Felizmente quando se trata de líquidos algumas simplificações importantes (que seriam grosseiras para gases, na maioria dos casos) podem ser feitas.

No que tange a simplificações é comum se considerar primeiro as de aspecto formal. É o que ocorre quando se utiliza a relação dada pela equação da continuidade para reduzir os quatro primeiros termos de cada uma das três equações dinâmicas e da equação de energia. As relações obtidas com este procedimento são:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Observe-se que "ρ" permanece variável nas relações acima.

As simplificaçoes posteriores às formais se preocuparão com a natureza do fluido, isto é atingirão as equações de estado. A mais importante destas simplificações é a hipótese de **incompressibilidade** que é aceita principalmente para líquidos.

II.5.4 — Sistema de equações para um fluido viscoso incompressível

A incompressibilidade é expressa matematicamente pela constância da massa específica no tempo e no espaço:

ρ = constante

A relação acima se constitui na equação de estado mecânico. Sua forma simples admite implicitamente que variações de pressão e temperatura não são capazes de alterar a massa específica.

A principal conseqüência que advém da hipótese de incompressibilidade é a quase desvinculação dos processos mecânicos dos térmicos no escoamento. Deixariam de existir os efeitos térmicos com origem em expansões internas do fluido, assim como mudanças de temperatura não seriam mais capazes de mudar a massa específica que é importante na mecânica do escoamento. Quanto à pressão termodinâmica "p" a incompressibilidade corta qualquer dependência desta variável com o estado térmico, tornando-a efetivamente em uma funçao meramente posicional.

Assim, o escoamento mecânico de um fluido viscoso incompressível pode ser simulado somente com as três equações dinâmicas e a equação da continuidade, onde as variáveis "mecânicas" seriam as componentes de velocidade e a pressão.

Entretanto, mesmo com a incompressibilidade permanece um elo de ligação entre a parte dinâmica e térmica do escoamento, representado pela viscosidade. O coeficiente de viscosidade "μ" é função do estado térmico (suposto homogêneo) do fluido, dependendo portanto da temperatura do fluido. Para a água e outros líquidos a variação de alguns graus centígrados não é suficiente para "μ" variar significativamente e na maioria dos casos práticos isto dificilmente acontecerá. Por isso é comum admitir-se "μ" constante. Tal procedimento, associado à hipótese de incompressibilidade, desvincula totalmente a parte dinâmica do estado térmico do escoamento.

Mesmo com essa desvinculação de fenômenos a equação de energia pode ser usada para simular as trocas térmicas, mas os resultados não terão o poder de influenciar a parte dinâmica do escoamento que estaria sendo descrita pelas três equações dinâmicas e pela equação da continuidade.

As simplificações decorrentes da admissão de ρ = cons tante começam pela equação da continuidade que se reduz a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ou, conforme notação já utilizada, $\Theta = 0$

Fisicamente o divergente nulo da velocidade ($\Theta = 0$) significa que não há nem compressões nem expansões da massa fluida. Isto é, reafirma-se a hipótese adotada de que o fluido é incompressível.

Com $\Theta = 0$ (resultante da equação de estado ρ = constante) o sistema geral de equações que descrevem o escoamento de um fluido incompressível fica sendo:

Equações dinâmicas ou de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \Omega v + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu\Delta u = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \Omega u + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \nu\Delta v = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + g + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \nu\Delta w = 0$$

Equação da continuidade

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

onde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$; e as quatro incógnitas sao u, v, w e p.

II.6 — EQUAÇÕES BÁSICAS DO ESCOAMENTO: CONCLUSÕES

Procurou-se apresentar neste capítulo uma visão global e sucinta de como foram obtidas as equações diferenciais que representam o escoamento de fluidos viscosos tanto compressíveis como incompressíveis.

Foi intenção mostrar que os fenômenos de transporte, tais como trocas de quantidade de movimento, energia e massa, são fenômenos intrinsecamente relacionados e que uma completa representação do escoamento deve considerar, simultânea e acopladamente, os princípios de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia.

Entretanto as equações obtidas dos princípios fundamentais apresentam termos com profunda dependência da natureza do fluido. Para resolvê-los torna-se necessário o estabelecimento de equações constitutivas adicionais com estreita relação com a natureza do fluido.

As equações constitutivas foram divididas em equações de estado e leis de fluxo. Estas se preocupam em definir expressões para os fluxos de quantidade de movimento por atrito e de calor por condução. Para fluidos naturais, as leis de fluxo mais utilizadas por serem mais simples e apresentarem bons resultados, são a lei de Stokes/Newton para a viscosidade e a lei de Fourier para o calor. Estas leis são lineares e os coeficientes que surgem são em geral admitidos constantes.

Definidas as leis de fluxo, a obtenção das equações de estado (para a massa específica e energia interna) se torna fundamental para que o sistema de equações fique determinado. Entretanto, devido a inter-relaçao dos processos dinâmicos e térmicos as equações de estado são complexas de se obter. Mas isto se torna simples se o fluido for incompressível.

Com a incompressibilidade há uma simplificação significativa das equações do sistema geral, mas desvincula totalmente (ou quase) a parte dinâmica (mecânica) da térmica. Assim, bastam somente as equações mecânicas (as três dinâmicas e a da continuidade) para descrever o escoamento, tendo como incógnitas as componentes de velocidade e a pressão, que deixa de ser uma variável termodinâmica, passando a funcionar como uma variável posicional mecânica.

III — MODELOS HIDRODINÂMICOS

III.1 — INTRODUÇÃO

Costumam ser chamados de modelos hidrodinâmicos aque les modelos matemáticos que utilizam as equações da continuida- de e dinâmicas (ou de Navier-Stokes). São modelos bastante em- pregados no estudo de escoamentos de cursos d'água naturais, principalmente quando há regimes turbulentos e não permanentes. Estudos mais precisos dos escoamentos de rios, lagos e mares são feitos através de modelos hidrodinâmicos.

A elaboração de um modelo matemático a partir das e- quações diferenciais básicas do escoamento, apresentadas no ca- pítulo anterior, deve sempre iniciar pela análise do sistema a ser simulado. Possibilidades de utilização de outras metodolo- gias alternativas de estudo, como modelos físicos e analógicos, devem ser avaliadas. Inclusive não deve ser descartada uma ação conjunta ou complementar do modelo matemático com estes outros.

Um modelo matemático que simula um sistema hidrodinâ mico de maneira eficiente considera na sua elaboração as peculi aridades do escoamento e o comportamento conjunto do binômio e- conomia-precisão das metodologias disponíveis. Geralmente, mode los complexos são capazes de apresentar resultados mais precisos, mas em contrapartida os custos de elaboração e execução em computador são maiores. Um modelo complexo apresenta ainda freqüentes dificuldades operacionais de execução e dados de entrada numerosos e nem sempre obtidos com a precisão oferecida pelo modelo. Um modelo simplificado, ao contrário de um complexo, apresenta a vantagem de um menor custo de elaboração, mas pode comprometer na precisão dos resultados.

A formulação de modelos matemáticos hidrodinâmicos eficientes respeita, por outro lado, a individualidade de cada sistema de escoamento. Não é de surpreender, portanto, o fato de existir um grande número de modelos hidrodinâmicos com as mais diversas características.

A rigor, cada escoamento exigiria um tipo próprio de modelo, adaptado às suas condições hidráulicas. Na prática, este enfoque é impensável para escoamentos naturais e os modelos existentes, mesmo sendo em grande número, enquadram-se em certos padrões que possibilitam classificá-los.

Uma das classificações usuais separa os modelos hidrodinâmicos em **modelos de regime permanente** e **modelos de regime não permanente.**

Os regimes de escoamento naturais são geralmente não permanentes e os modelos hidrodinâmicos utilizados para representá-los podem ser divididos em **modelos de tempo real** e **modelos integrados no tempo** (ref. 46).

Modelos hidrodinâmicos de tempo real utilizam as e-quações instantâneas do escoamento enquanto que os modelos integrados empregam estas mesmas equações integradas no tempo. A integração no tempo é necessária quando é desejada a representação do escoamento sem as variabilidades ocasionadas pelas perturbações com escalas de tempo inferiores à da integração. É o caso dos escoamentos turbulentos que são predominantes na natureza. Na verdade, as equações instantâneas apresentadas no capítulo II são capazes de descrever tanto escoamentos laminares como turbulentos, pois fornecem resultados a cada instante de tempo e um fenômeno como a turbulência, que possui escalas de tempo pequenas mas finitas, poderia, teoricamente, ser reproduzido por elas.

A **turbulência**, segundo Hinze (1959), caracteriza a-queles escoamentos irregulares onde as diversas grandezas físicas comportam flutuações aleatórias, em relação ao tempo e ao espaço, em torno de valores médios estatísticos.Essas irregularidades são características essenciais da turbulência e são conseqüências das flutuações aleatórias temporais em cada ponto do espaço. Tais flutuações em um escoamento turbulento não se restringem somente às componentes de velocidade, afetando também as outras variáveis do sistema.

Em simulações de escoamentos naturais turbulentos por modelos matemáticos geralmente não há interesse em conhecer os valores das variáveis afetadas por flutuações turbulentas. O que geralmente interessa é a influência das flutuações aleatórias turbulentas do ponto de vista de um **escoamento médio esta-**

tístico. As equações diferenciais do escoamento médio estatístico são obtidas pela integração no tempo das equações diferenciais básicas do escoamento, onde a turbulência é interpretada como uma perturbação.

III.2 — INTEGRAÇÃO NO TEMPO DAS EQUAÇÕES BÁSICAS

A integração no tempo das equações instantâneas do escoamento apresentadas no capítulo anterior conduz, como já referido, às equações do escoamento médio estatístico. Dependendo da escala de tempo utilizada na integração, os escoamentos médios têm naturezas diferentes, havendo um tipo de escoamento médio para cada escala de tempo. Escoamentos turbulentos podem ser representados por escoamentos médios estatísticos se as escalas de tempo de integração forem suficientemente reduzidas. Para se proceder à integração é necessário caracterizar antes o escoamento turbulento.

De acordo com a natureza aleatória da turbulência, o escoamento turbulento instantâneo pode ser caracterizado como um escoamento onde, em cada ponto do espaço e cada instante de tempo, existem distribuições de probabilidades correspondentes às variáveis dependentes do sistema. Por exemplo, para a componente de velocidade $u(x, y, z, t)$ corresponderia uma distribuição de probabilidades $f(u(x_0, y_0, z_0, t_0))$ no ponto "x_0, y_0, z_0"

e instante "t_o". A média de $u(x_o, y_o, z_o, t_o)$ segundo esta distribuição, entretanto, não representa a média desta componente de velocidade correspondente ao escoamento médio estatístico no instante "t_o". A média de $u(x_o, y_o, z_o, t_o)$ correspondente ao escoamento médio estatístico seria aquela obtida na forma de uma **média conjunta**, com base em infinitos "experimentos". Isto é, as condições impostas ao escoamento teriam que ser reproduzidas identicamente inúmeras vezes, com a mesma memória, para que, com as médias das distribuições, relativas aos "experimentos", no ponto "x_o, y_o, z_o, t_o", fosse obtida uma distribuição das várias médias de $u(x_o, y_o, z_o, t_o)$. A média desta distribuição seria, então, a média conjunta $\bar{u}(x_o, y_o, z_o, t_o)$ do escoamento médio estatístico (Pritchard, 1973).

Nas bases colocadas acima, o escoamento médio temporal estatístico não passa de uma abstração teórica nascida da natureza aleatória da turbulência. Quanto a escoamentos turbulentos naturais, então, torna-se realmente impraticável a obtenção de tal média estatística, pela impossibilidade de estabelecimento das distribuições de probabilidade "experimentais", referidas anteriormente.

O procedimento comum no sentido de contornar o problema é admitir a hipótese de que no ponto "x_o, y_o, z_o" a distribuição das médias de uma variável em "t_o" (ou das médias das distribuições dos inúmeros "experimentos" em "t_o") é igual em forma (ver figura III.1) às distribuições (supostas iguais entre si) dos instantes de tempo vizinhos a "t_o". É esta hipótese que permite escrever uma variável instantânea como a soma de sua mé dia temporal (média conjunta) e uma flutuação turbulenta, procedimento comumente utilizado na bibliografia especializada.

Por exemplo, as componentes de velocidade afetadas por flutuações turbulentas são representadas por:

$$u = \bar{u} + u'$$
$$v = \bar{v} + v'$$
$$w = \bar{w} + w'$$

onde a barra identifica a média temporal e o apóstrofo, a flutuação turbulenta.

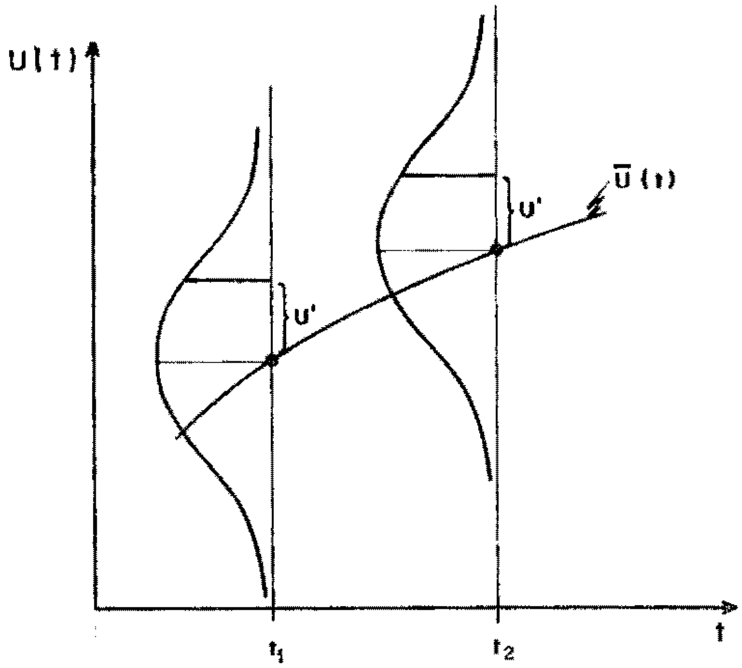

Figura III.1 — Distribuições das médias de velocidade

As equações do escoamento médio estatístico são obtidas, segundo a hipótese apresentada, pela integração, em cada instante "t_o", das equações básicas do escoamento entre os limites $(t_o - \Delta t)$ a $(t_o + \Delta t)$. Variando-se a escala de tempo "Δt" obter-se-iam diferentes escoamentos médios.

A integração no tempo pode ser visualizada, observando-se um gráfico típico de uma variável com perturbações turbulentas, como mostra a figura III.2.

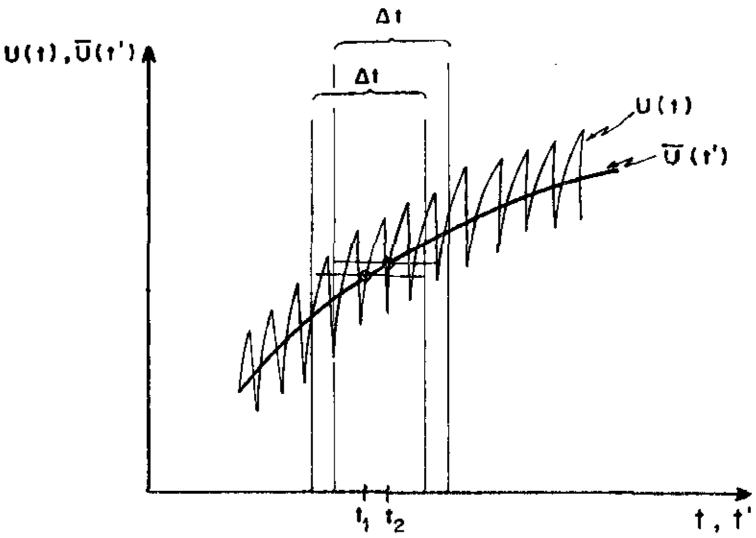

Figura III.2 — Flutuações turbulentas de velocidade

Na figura acima "u(t)" é a variável sujeita a perturbações turbulentas e "ū(t')" representa a média conjunta (média estatística). Segundo a hipótese adotada a média conjunta é definida por

$$\bar{u}(t') = \frac{1}{\Delta t} \int_{t' - \Delta t/2}^{t' + \Delta t/2} u(t)\,dt$$

Nesta expressão ambas as variáveis "t" e "t'" representam o tempo, apesar de possuirem interpretações diferentes. A variável "t'" identifica o ponto médio do intervalo "Δt" onde se dá a integração de "u(t)", com "t" variando de $(t' - \Delta t/2)$ a $(t' + \Delta t/2)$. Portanto, "t" e "t'" variam independentemente no processo de integração. Isto é importante no momento da integração quando é utilizada a regra de Leibniz.

A regra de Leibniz se refere a integraçao de uma derivada $\partial f(r,s)/\partial s$, em "r", cujos limites de integração "a" e "b" são dependentes de "s". A expressão matemática desta regra é:

$$\int_{a(s)}^{b(s)} \frac{\partial f(r,s)}{\partial s}\, dr = \frac{\partial}{\partial s} \int_{a(s)}^{b(s)} f(r,s)\, dr + f(a,s)\frac{\partial a}{\partial s} - f(b,s)\frac{\partial b}{\partial s}$$

Procedendo-se a integração no tempo das equações básicas do escoamento definidas no capítulo anterior chega-se(ver abaixo) às equações do escoamento médio de um fluido imcompressível na superfície da Terra. São elas:

Equações dinâmicas

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \Omega\bar{v} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \nu\Delta\bar{u} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{u'u'} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{v'v'} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'} =$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \Omega\bar{u} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \nu\Delta\bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{v'u'} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{v'v'} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{v'w'}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + g + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \nu\Delta\bar{w} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{w'u'} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{w'v'} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{w'w'}$$

Equação da continuidade

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

onde u', v', w' são as flutuações turbulentas das variáveis u, v, w, as componentes da velocidade.

O sistema de equações do escoamento médio temporal estatístico difere formalmente do sistema de equação do escoamento instantâneo pelo aparecimento de termos com flutuações turbulentas advindos da integração no tempo dos termos não lineares.

Deste modo, a turbulência faz aparecer nas equações do escoamento médio tensões de natureza aparente que devem ser resolvidas para que o sistema de equação médias fique matematicamente determinado. Este sistema de equações, generalizado para qualquer "Δt" de integração, constitui-se no ponto de partida para elaboração de modelos eulerianos de simulação de escoamentos hídricos incompressíveis, naturais ou artificiais, turbulentos ou laminares. Deve-se ressaltar, entretanto, que o intervalo de discretização numérica do tempo dos modelos matemáticos, devido à natureza ainda diferencial das equações integradas, não guarda nenhuma relação com o intervalo (ou escala) de tempo de integração. A escala de integração influirá somente na formulação das tensões aparentes, de acordo com a escala de tempo do fenômeno (turbulência, marés, etc.) considerado.

III.3 — A TURBULÊNCIA E O ESCOAMENTO MÉDIO TEMPORAL

A turbulência sob o ponto de vista do escoamento médio é uma perturbação aleatória, rotacional, tridimensional, difusiva, dissipativa, não linear e com diversas escalas de tempo e espaço. Todos estes aspectos da turbulência estão implícitos nas equações integradas no tempo através das tensões aparentes com flutuações turbulentas.

O aspecto mais importante da turbulência na sua influência sobre o escoamento médio é, sem dúvida, a dissipação de energia, cujo processo influi diretamente nas outras características. Neste processo de dissipação parte da energia do escoamento médio é transferida pela turbulência das maiores para as menores escalas espaciais, onde há transformação em calor pela ação das tensões viscosas. É a chamada **cascata de energia**. Como somente as maiores escalas espaciais interagem com o escoamento médio e a dissipação de energia ocorre nas menores escalas (as da viscosidade), a taxa de dissipação de energia é comandada pelo movimento de grande escala e não pela viscosidade que tem apenas um papel terminal.

Esta característica da "cascata de energia" é importante porque os principais efeitos da turbulência no escoamento médio (transporte de massa e de quantidade de movimento) podem ser avaliados nas grandes escalas espaciais. Isto é as tensões aparentes podem ser avaliadas partindo-se de hipóteses que se utilizam de características do escoamento médio.

III.4 — MODELAÇÃO DA TURBULÊNCIA

As tensões aparentes que surgem nas equações dinâmicas integradas no tempo são conhecidas por tensões de Reynolds. A modelação das tensões turbulentas de Reynolds é realizada geralmente com base no uso do conceito de "viscosidade turbulenta", na definição de escalas de espaço e tempo turbulentas e na consideração de transporte de grandezas da turbulência.

O conceito de "viscosidade turbulenta" foi introduzido por Boussinesq no final do século passado e se constituiu na primeira tentativa conhecida de tratar a turbulência. Esta hipótese parte de uma analogia entre os fenômenos da viscosidade e turbulência. Ambos os fenômenos proporcionam trocas de partículas de fluido com quantidades de movimento diferentes cujo efeito no escoamento toma a forma de tensões. A diferença fundamental reside no fato de que a viscosidade, por ser um fenômeno que ocorre a nível molecular é uma propriedade do fluido, enquanto que a turbulência, por envolver partículas macroscópicas, é um fenômeno dependente também do escoamento.

A diferença, por analogia, de relações lineares como as de Newton e Stokes para a viscosidade, para as tensões de Reynolds, resulta no estabelecimento de um coeficiente "η" de viscosidade turbulenta, variável no tempo e no espaço e com natureza tensorial. Este tensor "η" será o coeficiente linear, análogo ao "μ" da viscosidade, que relacionará o tensor das tensões de Reynolds com o tensor das deformações do escoamento médio temporal. O tensor "η" para evitar desenvolvimentos mais complexos costuma ser reduzido a um escalar, o que não interfere no fato de continuar a ser variável no tempo e no espaço.

Considerando-se estes aspectos as tensões de Reynolds, segundo a analogia de Boussinesq, são dadas por:

Tensões normais

$$\rho\overline{u'u'} = \rho\frac{2}{3}K + 2\eta\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right)$$

$$\rho\overline{v'v'} = \rho\frac{2}{3}K + 2\eta\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right)$$

$$\rho\overline{w'w'} = \rho\frac{2}{3}K + 2\eta\frac{\partial\bar{w}}{\partial z} - \frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right)$$

Tensões tangenciais

$$\rho\overline{u'v'} = \rho\overline{v'u'} = \eta\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)$$

$$\rho\overline{u'w'} = \rho\overline{w'u'} = \eta\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)$$

$$\rho\overline{v'w'} = \rho\overline{w'v'} = \eta\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)$$

onde $2K = \overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}$ é a energia cinética por unidade de massa das flutuações turbulentas. "2K" é um invariante escalar. A quantidade "$\rho\frac{2}{3}K$" é um escalar e funciona como se fosse uma pressão. Para que a analogia entre as tensões viscosas e turbulentos seja total e formal, geralmente considera-se esta pressão aparente como parte integrante da pressão termodinâmica "$\bar{p}$", que é uma incógnita do sistema.

Com a utilização do conceito de "viscosidade turbulenta" o problema transfere-se para a definição, por algum método dos valores de "η".

A modelação da turbulência com respeito às escalas de espaço e tempo geralmente considera, no máximo, uma escala de velocidade (representando o tempo) e uma escala espacial. A escala de velocidade invariavelmente é dada pela raiz quadrada da metade da energia cinética das flutuações turbulentas, ou seja, "$\sqrt{K}$". A escala espacial "L" é função do escoamento.

O transporte de grandezas turbulentas, considerado em alguns modelos, tenta reproduzir o caráter difusivo da turbulência. As grandezas preferidas estão vinculadas às escalas de velocidade (tempo) e espaço. A grandeza correspondente à escala de velocidade geralmente é a semi-energia cinética "K" das flutuações turbulentas. No que se refere à escala espacial existem várias grandezas que poderiam ser transportadas como a freqüência, a vorticidade e a dissipação das flutuações turbulentas. Quando não é utilizado o conceito de viscosidade turbulenta podem ser transportadas as próprias tensões de Reynolds.

A classificação de modelos de turbulência realizada por Rodi (1978) tem por base o número de equações de transporte de grandezas turbulentas. Assim há modelos com nenhuma equação, com uma equação e com duas equações de transporte.

Os modelos com **nenhuma equação** utilizam predominentemente o conceito de "viscosidade turbulenta" e se resumem em avaliar apenas o coeficiente "η", diretamente, sem a utilização de equações de transporte de grandezas turbulentas. Quando "η" é admitido constante, como na simulação de alguns escoamentos de grandes corpos d'água, deixa de haver na realidade a modelação da turbulência e a utilização de "η" se justificaria apenas em razão de estabilidade numérica. Para considerar "η" variável o procedimento comum é a adaptação da teoria do "comprimento de mistura" de Prandtl ao escoamento.

Pela teoria de Prandtl o coeficiente "η" de velocidade de turbulenta assume a seguinte expressão:

$$\eta = \rho \ell^2 \frac{\partial u}{\partial z}$$

onde ρ = massa específica;

ℓ = comprimento de mistura; e

$\frac{\partial u}{\partial z}$ = gradiente vertical de velocidade

Os modelos com **uma equação** de transporte consideram geralmente a equação de transporte da energia cinética turbulenta. No caso dos modelos que se valem do conceito de viscosidade turbulenta, o coeficiente "η" é avaliado com base no valor de "K", fornecido pela equação de transporte da escala de velocidade de "$\sqrt{K}$", e de uma escala espacial. No caso de modelos que não utilizam "η", as tensões de Reynolds são avaliadas diretamente em função dos valores transportados de "$\sqrt{K}$".

Os modelos de turbulência com **duas equações** de transporte avaliam, além do transporte da escala de velocidade de "$\sqrt{K}$", o transporte de uma escala espacial. As grandezas que incorporam uma escala espacial e que são geralmente empregadas para transporte são a vorticidade, a freqüência e a dissipação correspondentes às flutuações turbulentas. Quando há isotropia local na turbulência a grandeza de dissipação "ε" é mais fácil de ser definida. A isotropia local geralmente acontece em um estado pleno de turbulência com números de Reynolds altos. Os modelos que se utilizam de uma equação de transporte para a semi-energia cinética "K" e outra para a dissipação "ε" costumam ser denominados de modelos **K-ε** de turbulência.

Os modelos classificados por Rodi (1978) estão voltados principalmente para a simulação de escoamentos tipo camada limite e de escoamento em dutos livres e forçados com atrito onde o cálculo em detalhe da turbulência muitas vezes se faz necessário. Na simulação de escoamentos naturais a utilização de modelos de turbulência não é freqüente. Geralmente a modelação da turbulência em modelos hidrodinâmicos é realizada mais detalhadamente somente quando é desejado um cálculo mais preciso da dispersão de poluentes, de perfis salinos e de temperatura.

Para modelos exclusivamente hidrodinâmicos (sem transporte de solutos) a turbulência não precisa ser caracterizada em detalhe porque geralmente interessa apenas a sua influência na dissipação de energia. Por isso uma formulação com nenhuma equação de transporte de grandezas turbulentas é suficiente para a maioria dos modelos hidrodinâmicos. Por outro lado, em modelos hidrodinâmicos com transporte de massa seria interessante a consideração, além do caráter dissipativo, o caráter difusivo da turbulência. A formulação do tipo dos modelos K-ε de turbulência seria capaz de avaliar a difusividade turbulenta, ainda que incipientemente, nos modelos com transporte de massa. Na prática tal procedimento se torna difícil porque, além da dificuldade de formular as equações de K e ε, estas devem ser resolvidas em conjunto as equações hidrodinâmicas e a equação de transporte de massa o que aumentaria consideravelmente o custo e tempo dos cálculos.

III.5 — DIMENSÕES ESPACIAIS CONSIDERADAS NOS MODELOS HIDRODINÂMICOS

Quanto às dimensões espaciais os modelos hidrodinâmicos podem ser classificados em modelos adimensionais, unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. Os modelos **adimensionais** simulam apenas balanços de massa e são aplicados principalmente em reservatórios. Já os modelos uni, bi e tridimensionais podem representar, além do balanço de massas, o balanço das quantidades de movimento. Os **unidimensionais** são capazes de avaliar estes balanços somente por sobre um eixo, reproduzindo velocida des médias perpendiculares de seções transversais. Os modelos **bidimensionais** reproduzem velocidades com duas componentes em um plano de espaço. Por fim, os modelos **tridimensionais** têm representados as três componentes de velocidade nas três dimensões do espaço.

As equações do item III.2 representam o escoamento na superfície terrestre segundo as três dimensões do espaço. Serão aqui, por isso, denominadas de **equações completas**. Os modelos verdadeiramente tridimensionais utilizariam estas equações completas, enquanto que os modelos uni e bidimensionais necessitam de integração no espaço. Para se chegar às equações básicas dos modelos uni e bidimensionais são realizadas integração de todas as equações segundo os eixos coordenados menos importantes e feitos algumas simplificações físicas nestes eixos.

Para um modelo unidimensional de aplicação em rios as equações são integradas horizontalmente e verticalmente em eixos perpendiculares ao eixo do canal. As simplificações físicas geralmente são a desconsideração de efeitos dinâmicos laterais e verticais, com exceção da gravidade e pressão.

Os modelos bidimensionais se utilizam das equações básicas integradas em um dos três eixos coordenados, aquele onde fenômenos dinâmicos são desprezados. Na simulação de cursos d'água na superfície terrestre os modelos bidimensionais podem ser horizontais ou verticais. Nos bidimensionais horizontais a integração é feita na vertical segundo o eixo da aceleração da gravidade, desprezando os termos de inércia e atrito neste eixo.

A aplicação de modelos bidimensionais horizontais na superfície terrestre é realizada para simulação de oceanos, estuários de rios, lagos, etc. que são corpos d'água onde as dimensões horizontais predominam sobre a vertical. Nos modelos bidimensionais verticais a integração é feita lateralmente de maneira a se obter a simulação de perfil de um curso d'água. Geralmente tais modelos são utilizados na simulação da intrusão salina em estuários marinhos.

Os modelos realmente tridimensionais não integram no espaço as equações completas. Mas, podem, entretanto, desprezar efeito dinâmicos verticais na simulação de um escoamento na superfície terrestre. A utilização de modelos numéricos tridimensionais verdadeiros é rara devido à grande capacidade computacional requerida e problemas numéricos da discretização espacial. Geralmente quando são necessários simulações de escoamentos hídricos em três dimensões são utilizados modelos ditos tridimensionais mas que se valem de artifícios para não discretizarem as equações completas. Um exemplo é o modelo de diferenças finitas de Leendestre (1971) onde o corpo d'água é dividido em várias camadas horizontais, sendo a camada superior a única com espessura variável no tempo devido às alterações da superfície livre. Em cada camada são utilizadas as equações do escoamento integradas na espessura segundo a vertical. A interação entre as camadas é realizada pela equação da continuidade, envolvendo a componente vertical de velocidade que não é nula. São desprezados neste modelo efeitos inerciais e de atrito verticais.

III.6 — MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES DOS MODELOS HIDRODINÂMICOS: GENERALIDADES

Os métodos mais utilizados no tratamento numérico das equações diferenciais que representam escoamentos fluidos são os métodos das diferenças finitas, dos elementos finitos e das características.

O método das **diferenças finitas** aproxima as derivadas parciais das equações diferenciais por quocientes de diferenças de valores das variáveis tomados em pontos discretos do espaço-tempo de cálculo. Dependendo da forma como foram obtidas as equações de diferenças, o esquema numérico pode ser explícito ou implícito. No esquema explícito as variáveis incógnitas têm seus valores definidos, em cada ponto do espaço, em função dos valores conhecidos dos intervalos de tempo anteriores. Quando isto não acontece o esquema é implícito e resultam, então, sistemas de equações algébricas onde as variáveis incógnitas são resolvidas simultaneamente a cada intervalo de tempo, geralmente em uma linha do espaço com condições de contorno definidas. Os sistemas de equações algébricas dos esquemas implícitos são geralmente integrados por métodos correntes de solução de sistemas de equações lineares ou não lineares, conforme o caso.

O método dos **elementos finitos** considera valores nodais das variáveis e funções básicas contínuas para resolver as equações diferenciais em regiões definidas (elementos finitos) do espaço, sendo a integração no tempo realizada a intervalos discretos por métodos numéricos convencionais.

O método das **características** enfoca o espaço de cálculo das equações diferenciais por planos ou linhas características, que são caminhos por onde as perturbações se propagam no espaço e no tempo.

Destes três métodos aquele mais extensamente utilizado é o método das diferenças finitas que oferece uma facilidade de manuseio superior às dos demais métodos. A representação de escoamentos uni, bi ou tridimensionais é alcançada sem dificuldades através de equações de diferenças de um esquema numérico em diferenças finitas. Com os métodos dos elementos finitos e das características a representação matemática do escoamento é feita com maior dificuldade. O método das características foi aplicado com sucesso a escoamentos unidimensionais mas a sua extensão a domínios bi e tridimensionais é, quando possível, bastante complexa. O método dos elementos finitos, entretanto, já é de aplicação comum no estudo de escoamentos bidimensionais onde a possibilidade de utilização de elementos com tamanhos diversos, para representação mais fiel de contornos físicos irregulares ou complexos, é um dos pontos a favor.

O método das diferenças finitas, por estar sendo utilizado há mais tempo, possui o aspecto positivo de ter metodologias de análise numérica (avaliação de estabilidade e precisão de esquemas) pesquisadas em profundidade, ainda que somente para equações diferenciais lineares ou linearizadas. No que se refere aos esquemas explícitos ou implícitos, a análise de estabilidade indica serem mais estáveis estes últimos, aceitando intervalos de tempo de cálculo maiores, motivo pelo qual de têm a preferência dos pesquisadores, mesmo dispendendo maior tempo de máquina para serem resolvidos, comparados com os métodos explícitos. Para a modelação bidimensional Weare (1976), inclusive, salientou que a solução do sistema de três equações de diferenças implícitas tem tempo de solução equivalente à formulação análoga por elementos finitos, método normalmente acusado de dispender tempo significativo na representação de escoamento. Na prática, entretanto, a formulação por diferenças finitas do escoamento bidimensional é realizada com a divisão do intervalo de tempo em duas partes iguais, sendo resolvido em cada uma delas um sistema composto pela equação da continuidade e por uma equação dinâmica. Desta forma há uma redução significativa no tempo de cálculo.

III.7 — MODELOS HIDRODINÂMICOS: CONCLUSÕES

Neste capítulo foi visto que, na elaboração de um modelo hidrodinâmico, é importante a integração no tempo das equações diferenciais do escoamento, quando pretende-se considerar a influência de fenômenos com escalas de tempo inferiores às do escoamento simulado. Estes fenômenos são geralmente considerados como perturbações a um escoamento médio temporal. No caso da turbulência, o efeito das perturbações tomam a forma de tensões de atrito de natureza aparente, conhecidas por tensões de Reynolds.

As equações diferenciais que descrevem o escoamento incompressível, quando integradas no tempo, transformam-se formalmente nas mesmas equações diferenciais, apenas com a adição de termos de atrito, contendo tensões aparentes. Se as tensões aparentes representam o efeito da turbulência, elas podem ser definidas com base na cascata de energia, envolvendo equações de transporte de escalas de tempo e espaço (Rodi, 1978). Entretanto, por razões de simplicidade, é geralmente feita a analogia direta entre os fenômenos da turbulência e viscosidade (ambas provocam trocas de quantidade de movimento), surgindo o conceito de viscosidade turbulenta.

As dimensões espaciais de um modelo hidrodinâmico, elaborado a partir das equações temporais, são fixadas principalmente em função da conformação geométrica do corpo d'água, cujo escoamento é intenção reproduzir. As dimensões espaciais não significativas, com respeito ao escoamento, são eliminadas através de integração espacial das equações do movimento, em conjunto com algumas simplificações de ordem física. Nos modelos bidimensionais horizontais, empregados na simulação de lagos e oceanos, a eliminação da direção vertical advém da integração vertical, do fundo à superfície, de todas as equações diferenciais e da desconsideração de efeitos dinâmicos verticais, permanecendo a influência da pressão e gravidade.

Após definido o sistema de equaçoes diferenciais do modelo, tem lugar a esquematização numérica. O método de discretização das equações geralmente está entre os métodos de diferenças finitas, dos elementos finitos e das características. A preferência, freqüentemente, recai sobre o método das diferenças finitas que, ainda hoje, oferece maiores facilidades na definição de esquemas numéricos, além de ser o mais amplamente estudado. Dentre os esquemas de diferenças finitas, os esquemas implícitos são preferíveis aos explícitos, quando opta-se por maior estabilidade numérica sem a preocupação com a maior complexidade computacional. Para modelos bidimensionais geralmente são utilizados esquemas implícitos simplificados, como o ADI adaptado por Leendertse (1967), que dispendem menos tempo no computador.

IV — EQUAÇÕES DIFERENCIAIS BÁSICAS DOS MODELOS HIDRODINÂMICOS BIDIMENSIONAIS HORIZONTAIS

IV.1 — INTRODUÇÃO

As equações diferenciais básicas do movimento nas quais se baseiam os modelos matemáticos de simulação de escoamentos bidimensionais têm origem em simplificações nas equações gerais do escoamento, integradas no tempo, apresentadas no capítulo anterior. O procedimento para obtenção das equações básicas, a partir das equações gerais do escoamento médio temporal, envolve considerações de ordem física e matemática.

Matematicamente, para que o escoamento seja representado somente no plano horizontal, há necessidade de integração do sistema de equações gerais (equação da continuidade e equações dinâmicas integradas no tempo) na direção vertical do espaço físico tridimensional. Desta forma, todas as variáveis do sistema serão bidimensionais com domínio restrito ao plano horizontal "XOY".

Da integração vertical das quatro equações do sistema surgem as seguintes variáveis bidimensionais: as componentes de velocidade médias na vertical, "U(x,y), V(x,y) e W(x,y)"; as pressões médias na vertical, "$P(x,y)$", da superfície d'água, "$p_s(x,y)$", e do fundo, "$p_f(x,y)$"; a profundidade "$H(x,y)$"; os termos de correção da inércia devidos a perfis verticais de velocidades não constantes, "$\langle U'U' \rangle$, $\langle U'V' \rangle$, $\langle V'V' \rangle$, $\langle U'W' \rangle$ e $\langle V'W' \rangle$"; e as tensões tangenciais no fundo e na superfície d'água, "$\tau_{f,x}$, $\tau_{f,y}$, $\tau_{f,z}$, $\tau_{s,x}$, $\tau_{s,y}$ e $\tau_{s,z}$".

Entre todas estas variáveis, identifica-se como as incógnitas do sistema as componentes de velocidade "U, V e W" e a profundidade "H". A pressão na superfície "p_s" é uma condição externa ao escoamento e "P" e "p_f" são pressões dependentes da profundidade e do campo de velocidades. As tensões "$\tau_{s,x}$, $\tau_{s,y}$ e $\tau_{s,z}$" na superfície d'água são também imposições externas, mas as tensões no fundo "$\tau_{f,x}$, $\tau_{f,y}$ e $\tau_{f,z}$", dependem do escoamento e do fluido (no caso, da água). Já os termos de correção da inércia $\langle U'U' \rangle$, $\langle U'V' \rangle$, $\langle V'V' \rangle$, $\langle U'W' \rangle$ e $\langle V'W' \rangle$ dependem dos perfis verticais de velocidades.

As considerações de ordem física para a determinação matemática do sistema, portanto, direcionam-se no sentido de estabelecer relações para as variáveis que dependem das quatro incógnitas.

A seguir será mostrado o resultado da integração vertical das equações diferenciais do escoamento médio temporal, com as considerações de ordem física que produzem um sistema de equações diferenciais determinado para representar o escoamento bidimensional.

IV.2 — INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO MÉDIO TEMPORAL NA VERTICAL

A integração vertical é realizada no sentido positivo do eixo "OZ" que aponta para cima na superfície terrestre. Os limites de integração são a superfície do leito (o fundo) e a superfície livre do corpo d'água.

Na realização da integração é admitido um plano de referência arbitrário, abaixo do qual estão colocadas profundidades fixas (representando a superfície irregular do fundo) e acima, os níveis d'água variáveis de acordo com o escoamento (figura IV.1).

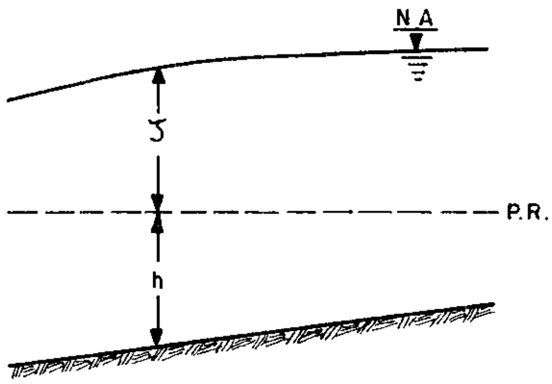

Figura IV.1 — Perfil vertical de integração

Representando as profundidades fixas por "h" e os níveis d'água por "ζ", a integração vertical será efetivada pela aplicação às equações temporais do seguinte operador integral:

$$\langle f \rangle = \int_{-h}^{\zeta} f \, dz$$

onde "f" é uma variável qualquer.

O resultado da integração vertical das equações da página 49 é apresentado, termo a termo, nos itens subseqüentes, com algumas observações onde se fizeram necessárias.

IV.2.1 — Equações dinâmicas integradas na vertical

Integração dos termos de inércia

Equação dinâmica OX

$$\left\langle \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial (HU)}{\partial t} + \frac{\partial (HUU)}{\partial x} + \frac{\partial (HUV)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\langle U'U'\rangle + \frac{\partial}{\partial y}\langle U'V'\rangle$$

Equação dinâmica OY

$$\left\langle \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial (HV)}{\partial t} + \frac{\partial (HUV)}{\partial x} + \frac{\partial (HVV)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\langle U'V'\rangle + \frac{\partial}{\partial y}\langle V'V'\rangle$$

Equação dinâmica OZ

$$\left\langle \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial (HW)}{\partial t} \quad \frac{\partial (HUW)}{\partial x} \quad \frac{\partial (HVW)}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial x}\langle U'W'\rangle \quad \frac{\partial}{\partial y}\langle V'W'\rangle$$

Na integração vertical, acima indicada, os perfis verticais das três componentes de velocidade não são constantes. De acordo com o esquema dos três perfis verticais (figura IV.2) as componentes de velocidade em um ponto qualquer são dadas por:

$$\bar{u} = U + U'$$

$$\bar{v} = V + V'$$

$$\bar{w} = W + W'$$

onde "U, V e W" são as médias verticais das componentes de velocidade temporais "$\bar{u}$, $\bar{v}$ e $\bar{w}$", e "U', V' e W'" são as flutuações em torno das médias.

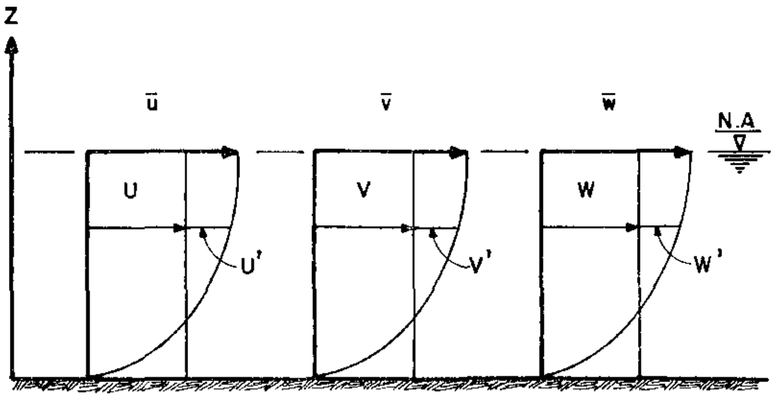

Figura IV.2 — Perfis das componentes de velocidade

Integração dos termos de gravidade e de Coriolis

Equação dinâmica OX

$$\langle -\Omega\bar{v} \rangle = -\Omega HV$$

Equação dinâmica OY

$$\langle +\Omega\bar{u} \rangle = +\Omega HU$$

Equação dinâmica OZ

$$\langle g \rangle = gH$$

Integração dos termos de pressão

Equação dinâmica OX

$$\left\langle \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial (HP)}{\partial x} + p_f \frac{\partial (-h)}{\partial x} - p_s \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$$

Equação dinâmica OY

$$\left\langle \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial (HP)}{\partial y} + p_f \frac{\partial (-h)}{\partial y} - p_s \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)$$

Equação dinâmica OZ

$$\left\langle \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right\rangle = \frac{1}{\rho}\left(p_s - p_f \right)$$

onde "P" é a média vertical da pressão termodinâmica temporal "$\bar{p}$", "p_f" é a pressão no fundo e "p_s" é a pressão da superfície livre (pressão atmosférica).

Integração dos termos de atrito e turbulência

Equação dinâmica OX

$$\left\langle -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(N \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(N \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(N \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] \right\rangle =$$

$$-\frac{1}{\rho}\left[\varepsilon H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \tau_{s,x} - \tau_{f,x} \right]$$

Equação dinâmica OY

$$\left\langle -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(N\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(N\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)\right]\right\rangle =$$

$$\left\langle -\frac{1}{\rho}\left[\varepsilon H\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y2}\right)+\tau_{s,y}-\tau_{f,y}\right]\right.$$

Equação dinâmica OZ

$$\left\langle -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(N\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(N\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right)\right]\right\rangle =$$

$$-\frac{1}{\rho}\left[\varepsilon H\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\tau_{s,z}+\tau_{f,z}\right]$$

onde "ε" é a média vertical do coeficiente de viscosidade turbulenta "N", "$\tau_{s,x}$, $\tau_{s,y}$, $\tau_{s,z}$" são tensões tangenciais na superfície livre e "$\tau_{f,x}$, $\tau_{f,y}$, $\tau_{f,z}$" são tensões tangenciais no fundo. Nas integrações verticais, acima indicadas, foram desprezados termos com produtos de derivadas e derivadas segundas. O coeficiente "N" é o coeficiente "η" do item III.3, somado do coeficiente "μ" da viscosidade.

IV.2.2 — Equação da continuidade integrada na vertical

$$\left\langle \frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right\rangle = \frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial(HU)}{\partial x}+\frac{\partial(HV)}{\partial y}$$

onde "ζ" é o nível d'água acima do plano de referência.

IV.2.3 — Sistema de equações integradas na vertical

O sistema de equações diferenciais gerais do escoamento integradas na vertical, segundo os resultados mostrados nos itens anteriores, apresenta-se da seguinte forma:

Equação da continuidade

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (HU)}{\partial x} + \frac{\partial (HV)}{\partial y} = 0$$

Equações dinâmicas

$$\frac{\partial (HU)}{\partial t} + \frac{\partial (HUU)}{\partial x} + \frac{\partial (HUV)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \langle U'U' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle U'V' \rangle - \Omega HV +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (HP)}{\partial x} + p_f \frac{\partial (-h)}{\partial x} - p_s \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] - \frac{1}{\rho} \left[\varepsilon H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \tau_{s,x} - \tau_{f,x} \right] = 0$$

$$\frac{\partial (HV)}{\partial t} + \frac{\partial (HUV)}{\partial x} + \frac{\partial (HVV)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \langle U'V' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle V'V' \rangle + \Omega HU +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (HP)}{\partial y} + p_f \frac{\partial (-h)}{\partial y} - p_s \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] - \frac{1}{\rho} \left[\varepsilon H \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \tau_{s,y} - \tau_{f,y} \right] = 0$$

$$\frac{\partial (HW)}{\partial t} + \frac{\partial (HUW)}{\partial x} + \frac{\partial (HVW)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \langle U'W' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle V'W' \rangle + gH +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left[p_s - p_f \right] - \frac{1}{\rho} \left[\varepsilon H \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \tau_{s,z} - \tau_{f,z} \right] = 0$$

As quatro incógnitas deste sistema de quatro equações diferenciais são "ζ" (ou "H"), "U", "V" e "W", mas a presença de variáveis ainda não definidas em função destas quatro torna o sistema matematicamente indeterminado. Para se atingir a determinação são realizadas considerações de ordem física que buscam estabelecer relações para as diversas variáveis em função da profundidade e das componentes de velocidade "H", "U", "V" e "W". Assim, geralmente, como distribuição vertical das pressões, considera-se a equação da hidrostática. Para as tensões tangenciais no fundo, a formulação baseada na fórmula de Chezy, do movimento permanente uniforme, é a mais utilizada. E os coeficientes de atrito e perfis de velocidade, por sua vez, podem ser definidos por uma teoria de turbulência como a de Prandtl.

Relação hidrostática para as pressões na vertical

A simplificação física que conduz à hidrostaticidade das pressões na vertical e que permite, portanto, obter uma relação simples entre pressões e profundidades, é a desconsideração dos efeitos dinâmicos verticais da inércia e atrito. Com esta simplificação a equação dinâmica vertical reduz-se para:

$$gH + \frac{1}{\rho}\left(p_s - p_f\right) = 0$$

Isolando-se "p_f" fica:

$$p_f = p_s + \rho g H ; \qquad (H = \zeta + h)$$

A equação acima é uma equação hidrostática. Relaciona a pressão no fundo "p_f" com a pressão na superfície "p_s" e a profundidade "H", sem envolver as componentes de velocidade.

A introdução da equação hidrostática nos termos de pressão das equações dinâmicas horizontais modifica-os para:

Termo de pressão simplificado da equação dinâmica OX

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(HP)}{\partial x} + p_f\frac{\partial(-h)}{\partial x} - p_f\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right] = \frac{1}{\rho}\left(H\frac{\partial p_s}{\partial x} + \rho g H\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)$$

Termo de pressão simplificado da equação dinâmica OY

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(HP)}{\partial y} + p_f\frac{\partial(-h)}{\partial y} - p_s\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] = \frac{1}{\rho}\left(H\frac{\partial p_s}{\partial y} + \rho g H\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

Expressões para as tensões de atrito no fundo

A relação entre as tensões tangenciais de atrito no fundo e o escoamento costuma ser definida com base na relação quadrática obtida com a fórmula das velocidades de Chézy e a expressão geral das tensões superficiais, ambas relativas ao movimento permanente uniforme.

A expressão vetorial para a relação quadrática, acima referida, das tensões no fundo, é dada por:

$$\tau = \rho g \frac{\vec{V} \, | \vec{V} |}{C^2}$$

onde "τ" representa as tensões tangenciais no fundo, "$\vec{V}$" é o vetor velocidade média na vertical, "C" é o coeficiente de atrito de Chézy, e "ρ" e "g" são a massa específica e a aceleração da gravidade, respectivamente.

Decompondo a expressão vetorial nas duas direções ortogonais horizontais, surgem duas expressões escalares:

$$\tau_{f,x} = \rho g \frac{U \sqrt{U^2 + V^2}}{C^2}$$

e

$$\tau_{f,y} = \rho g \frac{V \sqrt{U^2 + V^2}}{C^2}$$

onde "$\tau_{f,x}$" e "$\tau_{f,y}$" são as tensões no fundo segundo os eixos OX e OY, respectivamente, e "U" e "V" são as componentes de velocidade horizontais, já definidas anteriormente.

As relações escalares apresentadas, integradas às equações dinâmicas horizontais, constituem-se nos termos que representam o atrito no fundo, sendo o coeficiente de Chézy o parâmetro de ajuste destes termos.

Apresentação do sistema de equações matematicamente determinado

Introduzindo-se a equação da continuidade nas equações dinâmicas, dividindo-se todos os membros pela profundidade "H", e desprezando-se os termos de correção de inércia (não significativos em escoamentos turbulentos) e a variação espacial da pressão atmosférica, o sistema de equações matematicamente determinado, com a inclusão das relações hidrostática e das tensões no fundo, apresenta-se da seguinte forma:

Equação da continuidade

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (HU)}{\partial x} + \frac{\partial (HV)}{\partial y} = 0$$

Equações dinâmicas

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} - \Omega V + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + g\frac{U\sqrt{U^2+V^2}}{C^2 H} - \frac{1}{\rho}\varepsilon\Delta U - \frac{\tau_{s,x}}{\rho H} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + \Omega U + g\frac{\partial \zeta}{\partial y} + g\frac{V\sqrt{U^2+V^2}}{C^2 H} - \frac{1}{\rho}\varepsilon\Delta V - \frac{\tau_{s,y}}{\rho H} = 0$$

onde as três incógnitas são as componentes horizontais de velocidade, "U" e "V", e o nível d'água acima do plano de referência, "ζ". As demais variáveis e coeficientes, já definidos anteriormente como as três incógnitas, representam o seguinte: "H" (=h +ζ) é a profundidade, "g" é a aceleração da gravidade, "ρ" é a massa específica do fluido, "C" é o coeficiente de atrito com o fundo, de Chèzy, "ε" é o coeficiente de atrito lateral, "Ω" é o parâmetro de Coriolis e "$\tau_{s,x}$" é a tensão tangencial na superfície livre do líquido na direção OX e "$\tau_{s,y}$", na direção OY. "Δ" é o operador de Laplace no plano horizontal XOY.

IV.3 — EQUAÇÕES DIFERENCIAIS BÁSICAS DOS MODELOS HIDRODINÂMICOS BIDIMENSIONAIS HORIZONTAIS: CONCLUSÕES

Neste capítulo foi exposto que as equações diferenciais dos modelos bidimensionais horizontais são geralmente obtidas da integração vertical, do fundo à superfície, das quatro equações (continuidade e três dinâmicas) do escoamento médio temporal definido no Capítulo III. Do processo de integração verti cal resultam novamente quatro equações, mas a definição da relação hidrostática para descrever as pressões elimina efeitos dinâmicos verticais, restando então a equação da continuidade e as duas equações dinâmicas horizontais. As incógnitas deste sistema de três equações são as componentes horizontais de velocidade e o nível d'água.

As equações dinâmicas integradas na vertical, com a desconsideração de termos de correção de inércia e da variação espacial da pressão atmosférica, possui termos representativos da inércia, do escoamento por gravidade, da influência da rotação terrestre (Coriolis), do atrito do fluido com o fundo, do atrito lateral e da ação dos ventos (tensões na superfície livre). Os três primeiros termos desta lista têm definição teórica precisa e o último é uma imposição externa ao corpo d'água. Os termos restantes, de atrito com o fundo e lateral, relacionam-se intimamente com o escoamento, mas dependem significativamente dos contornos do sistema, o que dificulta a dedução de expressões teóricas gerais. Para o termo de atrito lateral, a simplificação principal é a consideração de um coeficiente de atrito para cada ponto do plano horizontal com seu valor definido em função apenas das características do escoamento no ponto. A expressão geral para o termo de atrito com o fundo é, por sua vez, determinada a partir de uma generalização da expressão quadrática, válida para o movimento permanente uniforme, obtida com a utilização da fórmula de Chézy para as velocidades.

O coeficiente de Chézy, de atrito com o fundo, e o coeficiente de atrito lateral, presentes nos termos que representam estes fenômenos, são parâmetros de ajuste dos modelos bidimensionais horizontais. Sob certas circunstâncias estes parâmetros podem ser tomados como constantes, mas o fato de possuírem natureza vinculada à turbulência indica ser mais correto considerá-los variáveis, em função do escoamento. Ambos os coeficientes podem ter uma formulação, dependente do escoamento, baseada no perfil de velocidades turbulento de Prandtl.

V — MODELO BIDIMENSIONAL HORIZONTAL COM ESQUEMA DE LEENDERTSE

V.1 — INTRODUÇÃO

O modelo matemático elaborado por Leendertse (1967) para simulação de escoamentos bidimensionais, sem estratificação vertical, foi pioneiro em apresentar um esquema numérico capaz de resolver as equações horizontais completas (págs. 76 e 77), obedecendo condições de estabilidade e precisão nao muito rigorosas.

O esquema numérico concebido por Leendertse é um esquema em diferenças finitas que se vale da malha de cálculo defasada de Platzman (1959) e de uma adaptação ao plano horizontal da filosofia do método implícito de integração por caminhos alternados (ADI em inglês). O resultado é um esquema onde as questões de diferenças encontram-se, em grande parte, centradas no espaço e no tempo, o que contribui para apresentar maior estabilidade e precisão numéricas. Computacionalmente, o esquema de Leendertse é também eficaz porque resolve apenas matrizes tridiagonais.

Na avaliação do esquema numérico Leendertse realizou uma análise de estabilidade baseada no método de Von Neumann e apresentou uma original análise de dissipação e deformação de ondas. Com estas análises foram balisados critérios de estabilidade e precisão em função da discretização numérica e de características do escoamento.

V.2 — MALHA DE CÁLCULO

A definição da malha de cálculo horizontal é o passo inicial para a obtenção das equações bidimensionais em diferenças finitas, pois ficam definidos os locais das variáveis incógnitas — as componentes horizontais de velocidade, "U" e "V", e o nível d'água acima do plano de referência, "ζ" —, e das profundidades conhecidas, abaixo do plano de referência, "h".

Para esquemas numéricos em diferenças finitas a malha de cálculo é geralmente composta por células iguais e retangulares. No modelo apresentado neste capítulo identifica-se cada célula ou quadrícula da malha horizontal de Platzman (ver Figura V.1) pelos seus lados superior e direito, considerando-se o eixo OX como das abscissas e o eixo OY como das ordenadas. Ao lado direito da quadrícula está associada a componente de velocidade "U", com sentido positivo segundo eixo OX, e ao lado superior está associada a componente "V", com sentido positivo segundo o eixo OY. O nível d'água "ζ" está alocado no centro da quadrícula e a profundidade "h" no canto superior direito.

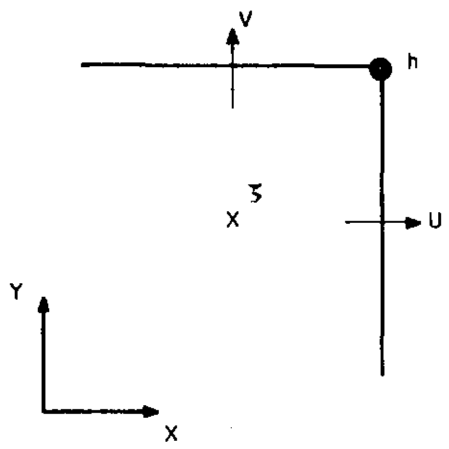

Figura V.1 — Quadrícula da malha de cálculo

O contorno físico que cada um dos lados de uma quadrícula pode representar tem três possibilidades: contorno fechado, contorno aberto interno ao corpo d'água e contorno aberto limítrofe do corpo d'água. Pelo contorno fechado não há transferência de massa ao contrário do que acontece nos contornos abertos. O arranjo dos três tipos de contorno produz nove espécies de quadrículas, mostradas na figura abaixo.

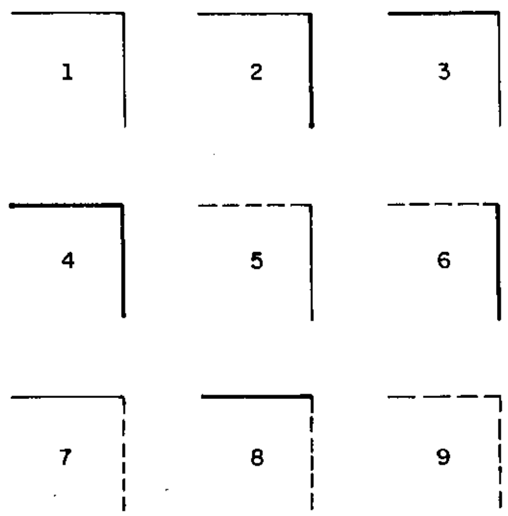

Figura V.2 — Contornos das quadrículas

Os códigos de contorno (1 a 9) sao importantes na delimitação do corpo d'água na malha de cálculo, havendo possibilidade, inclusive, de representação de ilhas, istmos e outras conformações irregulares. A malha de cálculo, que é retangular para efeito computacional, engloba todo o recorte irregular do corpo d'água, como pode ser visto no exemplo da Figura V.3.

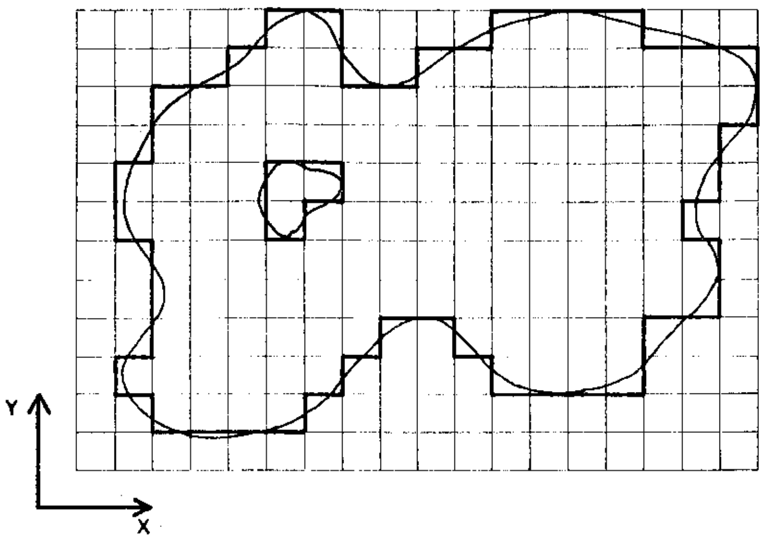

Figura V.3 — Representação de um corpo d'água

V.3 — EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS

O esquema numérico de Leendertse, como já mencionado, de propagação de ondas de pequena amplitude relativa no plano horizontal, é uma adaptação do método implícito de integração ADI com a discretização espacial dada pela malha numérica de Platzman.

No esquema ADI de Leendertse cada intervalo de tempo é sub-dividido em dois semi-intervalos, sendo resolvido um sistema de equações formado pela equação da continuidade e pela equação dinâmica respectiva, para cada uma das linhas, no primeiro semi-intervalo, e para cada uma das colunas, no segundo semi-intervalo. Deste modo, há uma "varredura" do espaço de cálculo, resolvendo-se primeiro todas as linhas e depois todas as colunas, a cada intervalo de tempo.

Da formulação do esquema numérico as matrizes que surgem, associadas a cada linha e a cada coluna, são do tipo tri-diagonal o que permite uma solução mais rápida em computador.

A seguir serão apresentadas as equações de diferenças finitas segundo o método de Leendertse, correspondentes às equações bidimensionais definidas no capítulo anterior.

Equações em diferenças finitas pelo esquema de Leendertse

Tendo em vista a malha de cálculo genérica da figura abaixo, as equações em diferenças finitas, termo a termo, correspondentes aos dois semi-intervalos, são as apresentadas a seguir.

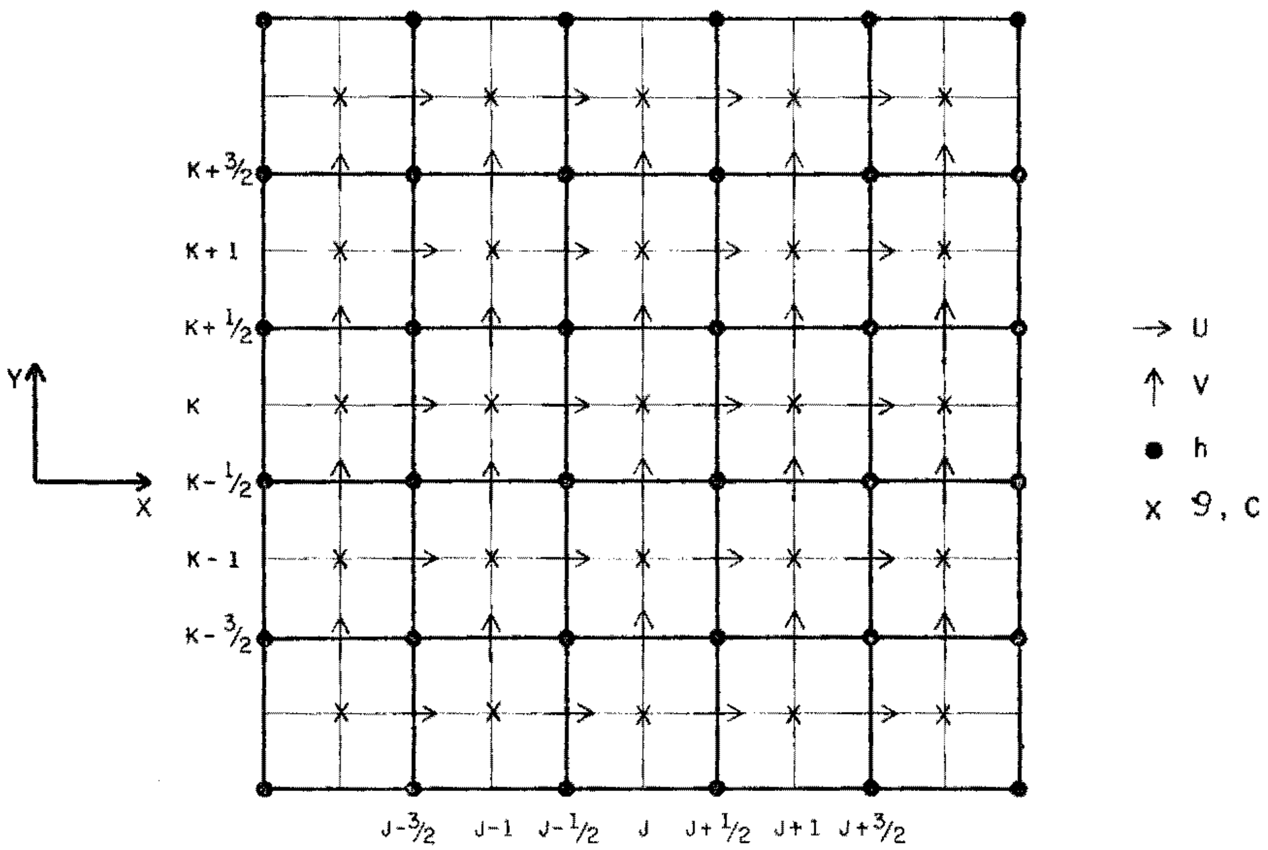

Figura V.4 — Malha defasada de Platzman (1959)

Primeiro semi-intervalo de tempo (n, n+1/2)

Equação da continuidade

a) Termo "$\frac{\partial\zeta}{\partial t}$": avaliado pela diferença de níveis (ζ) do ponto (j,k), do início e fim do semi-intervalo de tempo, dividida pelo valor do semi-intervalo (t/2).

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} \cong \frac{2}{\Delta t}\left(\zeta_{j,k}^{n+1/2} - \zeta_{j.k}^{n}\right)$$

b) O termo "$\frac{\partial(HU)}{\partial x}$": sabendo-se que $H = h + \zeta$, este termo é aproximado pela diferença dos valores da soma $(hU + \zeta U)$, nos pontos $(j+1/2,k)$ e $(j-1/2,k)$ dividida pelo comprimento (ΔX).

$$\frac{\partial(HU)}{\partial x} = \frac{\partial(hU + \zeta U)}{\partial x} \cong \frac{1}{\Delta x}\left[(hU)_{j+1/2,k} - (hU)_{j-1/2,k} + \right.$$

$$\left. + (\zeta U)_{j+1/2,k} - (\zeta U)_{j-1/2,k}\right]$$

A definição das expressões dos produtos acima indicados é feita da seguinte forma:

i) O produto $(hU)_{j+1/2,k}$ é obtido pela média das profundidades (h), dos pontos $(j+1/2,\ k-1/2)$ e $(j+1/2,\ k+1/2)$, multiplicada pela componente de velocidade (U) do ponto $(j-1/2,k)$. Esta componente (U) se referirá ao fim do semi-intervalo, nível $(n+1/2)$ de tempo.

$$(hU)_{j+1/2,k} \cong \frac{1}{2}\left(h_{j+1/2,\ k+1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2}\right) U^{n+1/2}_{j+1/2,k}$$

ii) O produto $(hU)_{j-1/2,k}$ é obtido de forma análoga ao anterior

$$(hU)_{j-1/2,k} \cong \frac{1}{2}\left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j-1/2,\ k+1/2}\right) U^{n+1/2}_{j-1/2,k}$$

iii) O produto $(\zeta U)_{j+1/2,k}$ é avaliado pela média dos níveis (ζ), dos pontos (j,k) e $(j+1,k)$, multiplicada pelo valor da componente (U) do ponto (j+1/2,k). Esta componente de velocidade (U) se referirá ao fim do semi-intervalo, nível (n+1/2) de tempo, e os níveis d'água (ζ) corresponderá ao início do semi-intervalo, nível (n) de tempo.

$$(\zeta U)_{j+1/2,k} \cong \frac{1}{2}\left(\zeta^{n}_{j,k} + \zeta^{n}_{j+1,k}\right) U^{n+1/2}_{j+1/2,k}$$

iv) E o produto $(\zeta U)_{j-1/2,k}$ é avaliado de forma análoga a anterior.

$$(\zeta U)_{j-1/2,k} \cong \frac{1}{2}\left(\zeta^{n}_{j-1/2,k} + \zeta^{n}_{j,k}\right) U^{n+1/2}_{j-1/2,k}$$

Definidas as expressões destes produtos, a expressão final da derivada "$\frac{\partial(HU)}{\partial x}$" se apresenta da seguinte forma

$$\frac{\partial(HU)}{\partial x} \cong \frac{1}{2\Delta x}\left[\left(h_{j+1/2,k-1/2} + h_{j+1/2,k+1/2} + \zeta^{n}_{j,k} + \zeta^{n}_{j+1,k}\right) U^{n+1/2}_{j+1/2,k} - \left(h_{j-1/2,k-1/2} + h_{j-1/2,k+1/2} + \zeta^{n}_{j-1,k} + \zeta^{n}_{j,k}\right) U^{n+1/2}_{j-1/2,k}\right]$$

c) Termo "$\frac{\partial(HV)}{\partial y}$": a expressão aproximada para este termo é obtida de forma semelhante à do termo "$\frac{\partial(HU)}{\partial x}$". Sabendo-se que $H = h + \zeta$, a derivada em questão é aproximada pela diferença dos valores de soma $(hV + \zeta V)$, nos pontos $(j,k-1/2)$ e (j,k+1/2), dividida pelo comprimento (Δy).

$$\frac{\partial(HV)}{\partial y} = \frac{(hV + \zeta V)}{\partial y} \cong \frac{1}{\Delta y}\left[(hV)_{j,k+1/2} - (hV)_{j,k-1/2} + \right.$$

$$\left. + (\zeta V)_{j,k+1/2} - (\zeta V)_{j,k-1/2}\right]$$

A definição das expressões dos produtos acima indicados é feita da seguinte forma:

i) O produto $(hV)_{j,k+1/2}$ é avaliado pela média das profundidades (h), dos pontos (j-1/2, k+1/2) e (k+1/2, k+1/2), multiplicada pela componente de velocidade (V) do ponto (j,k+1/2). Esta componente (V) corresponde ao início do semi-intervalo de tempo, nível (n).

$$(hV)_{j,k+1/2} \cong \frac{1}{2}\left(h_{j-1/2,k+1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2}\right) V^{n}_{j,k+1/2}$$

ii) O produto $(hV)_{j,k-1/2}$ é obtido de forma análoga ao de cima

$$(hV)_{j,k-1/2} \cong \frac{1}{2}\left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k-1/2}\right) V^{n}_{j,k-1/2}$$

iii) O produto $(\zeta V)_{j,k+1/2}$ é aproximado pela média dos níveis (ζ), dos pontos (j,k) e (j,k+1), multiplicada pela componente (V) de velocidade, do ponto (j,k+1/2). Esta componente (V) e os níveis (ζ) correspondem ao início do semiintervalo de tempo, nível (n).

$$(\zeta V)_{j,k+1/2} \cong \frac{1}{2}\left(\zeta^{n}_{j,k} + \zeta^{n}_{j,k+1}\right) V^{n}_{j,k+1/2}$$

iv) E o produto $(\zeta V)_{j,k+1/2}$ é avaliado de forma semelhante ao de cima

$$(\zeta V)_{j,k-1/2} \cong \frac{1}{2}\left(\zeta^{n}_{j,k+1} + \zeta^{n}_{j,k}\right) V^{n}_{j,k-1/2}$$

Com as expressões destes produtos definidas é possível apresentar a forma final da expressão que aproxima "$\frac{\partial(HV)}{\partial y}$"

$$\frac{\partial(HV)}{\partial y} \cong \frac{1}{2\Delta y}\left[\left(h_{j-1/2,\ k+1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2} + \zeta^{n}_{j,k} + \zeta^{n}_{j,k+1}\right) V^{n}_{j,k+1/2} - \left(n_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k-1/2} + \zeta^{n}_{j,k-1} + \zeta^{n}_{j,k}\right) V^{n}_{j,k-1/2}\right]$$

Expressos todos os termos da equação da continuidade em diferenças finitas, a equação completa, válida para o semi-intervalo de tempo (n, n+1/2), é dada por

$$\frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+1/2}_{j,k} - \zeta^{n}_{j,k}\right) + \frac{1}{2\Delta x}\left[\left(h_{j+1/2,k-1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2} + \zeta^{n}_{j,k} + \zeta^{n}_{j+1,k}\right) U^{n+1/2}_{j+1/2,k} - \left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j-1/2,\ k-1/2} + \zeta^{n}_{j-1,k} + \zeta^{n}_{j,k}\right) U^{n+1/2}_{j-1/2,k}\right] +$$

$$\frac{1}{2\Delta y}\left[\left(h_{j-1/2,\ k+1/2} + h_{j+1/2,\ h+1/2} + \zeta^{n}_{j,k} + \zeta^{n}_{j,k+1}\right) V^{n}_{j,k+1/2} - \left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k-1/2} + \zeta^{n}_{j,k-1} + \zeta^{n}_{j,k}\right) V^{n}_{j,k-1/2}\right] = 0$$

Isolando-se as variáveis incógnitas, ou seja aquelas correspondentes ao nível (n+1/2) de tempo, a equação acima pode ser reescrita como

$$-r_{j-1/2}\, U^{n+1/2}_{j-1/2,k} + \zeta^{n+1/2}_{j,k} + r_{j+1/2}\, U^{n+1/2}_{j+1/2,k} = A^{n}_{j,k}$$

onde:

$$r_{j-1/2} = \frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j-1/2,\ k+1/2} + \zeta^{n}_{j-1,k} + \zeta^{n}_{j,k}\right)$$

$$r_{j+1/2} = \frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(h_{j+1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2} + \zeta^{n}_{j,k} + \zeta^{n}_{j-1,k}\right)$$

$$A^{n}_{j,k} = \zeta^{n}_{j,k} + \frac{\Delta t}{2\Delta y}\Bigg[\left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k-1/2} + \zeta^{n}_{j,k+1} + \zeta^{n}_{j,k}\right) V^{n}_{j,k-1/2}$$

$$- \left((h_{j-1/2,\ k+1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2} + \zeta^{n}_{j,k} + \zeta^{n}_{j,k+1}\right) V^{n}_{j,k+1/2}\Bigg]$$

Equação dinâmica OX

a) Termo "$\frac{\partial U}{\partial t}$": avaliado pela diferença dos valores da componente (U), do ponto (j+1/2,k) nos níveis de tempo (n+1/2) e (n-1/2), dividida pelo intervalo de tempo (Δt).

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{1}{\Delta t}\left(U^{n+1/2}_{j+1/2,k} - U^{n-1/2}_{j+1/2,k}\right)$$

b) Termo "$U\frac{\partial U}{\partial x}$": neste termo, a derivada "$\frac{\partial U}{\partial x}$" é aproximada pela diferença dos valores da componente de velocidade (U), dos pontos (j-1/2,k) e (j+3/2,k), dividida pela distância que é (2ΔX). Esta derivada é feita para o nível (n-1/2). Está no nível de tempo (n+1/2) o valor da componente (U), do ponto (j+1/2,k), que multiplica a derivada.

$$U\frac{\partial U}{\partial x} \cong U^{n+1/2}_{j+1/2,k}\ \frac{1}{2\Delta x}\left(U^{n-1/2}_{j+3/2,k} - U^{n-1/2}_{j-1/2,k}\right)$$

c) Termo "$V\frac{\partial U}{\partial y}$": a derivada "$\frac{\partial U}{\partial y}$" deste termo é avaliada pela diferença dos valores da componente (U), dos pontos (k+1/2, k+1) e (j+1/2, k-1), dividida pela distância (2Δy). O nível de tempo para cálculo desta derivada é (n-1/2). E a componente de velocidade (V) que multiplica a derivada é obtida pela média ($\bar{\bar{V}}$) dos valores correspondentes aos quatro pontos(j,k-1/2), (j,k+1/2), (j+1, k+1/2) e (j+1, k-1/2) no nível de tempo (n).

$$V\frac{\partial U}{\partial y} \cong \bar{\bar{V}}\ \frac{1}{2\Delta y}\left(U^{n-1/2}_{j+1/2,\ k+1} - U^{n-1/2}_{j+1/2,\ k-1}\right)$$

onde

$$\bar{\bar{V}} = \frac{1}{4}\left(V^{n}_{j,k-1/2} + V^{n}_{j,k+1/2} + V^{n}_{j+1,\ k+1/2} + V^{n}_{j+1,\ k-1/2}\right)$$

d) Termo "ΩV": a componente (V) de velocidade, que é multiplicada pela constante (Ω) de Coriolis, é aproximada pela média de quatro pontos já referida anteriormente.

$$\Omega V \simeq \Omega \bar{\bar{V}}$$

e) Termo "$g\frac{\partial\zeta}{\partial x}$": a derivada "$\frac{\partial\zeta}{\partial x}$", correspondente ao ponto (j+1/2,k), é avaliada pela média dos seus valores nos níveis de tempo (n+1/2) e (n-1/2). Cada um destes dois valores é obtido pela diferença de níveis (ζ), dos pontos (j+1,k) e(j,k), dividida pelo comprimento (Δx).

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{j+1/2,k} \simeq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^{n+1/2}_{j+1/2,k} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^{n-1/2}_{k+1/2,k}\right]$$

onde

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^{n+1/2}_{j+1/2,k} \cong \frac{1}{\Delta x}\left(\zeta^{n+1/2}_{j+1,k} - \zeta^{n+1/2}_{j,k}\right)$$

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^{n-1/2}_{j+1/2,k} \cong \frac{1}{\Delta x}\left(\zeta^{n-1/2}_{j,1,k} \quad \zeta^{n-1/2}_{j,k}\right)$$

Em conseqüência a forma final do termo "$g\frac{\partial\zeta}{\partial x}$" será:

$$g\frac{\partial\zeta}{\partial x} \cong \frac{g}{2\Delta x}\left(\zeta^{n+1/2}_{j+1,k} - \zeta^{n+1/2}_{j,k} + \zeta^{n-1/2}_{j+1,k} - \zeta^{n-1/2}_{j,k}\right)$$

f) Termo "$g\,\frac{\sqrt{U^2+U^2}}{C^2H}\,U$" : o módulo da velocidade horizontal no ponto (j+1/2,k) dada pela raiz quadrada terá a componente (U), do ponto (j+1/2,k), tomada no nível de tempo (n-1/2) e terá a componente (V) avaliada pela média de quatro pontos já referida anteriormente.

$$\sqrt{U^2 + V^2} \cong \sqrt{\left(U_{j+1/2,k}^{n-1/2}\right)^2 + \bar{\bar{V}}^2}$$

O tirante d'água $H = h + \zeta$ será calculado com base nas aproximações da profundidade (h) e do nível (ζ) no ponto (j+1/2,k). O nível d'água (ζ) corresponde ao estágio de tempo (n).

$$H \cong (h)_{j+1/2,k} + (\zeta)_{j+1/2,k}^{n}$$

A profundidade (h) no ponto (j+1/2,k) será calculada pela média dos valores nos pontos (j+1/2, k+1/2) e (j+1/2, k-1/2), notada por ($\bar{h}^y$).

$$(h)_{j+1/2,k} \quad \bar{h}^y = \frac{1}{2}\left(h_{j+1/2,\ k+1/2} + h_{j+1/2,\ k-1/2}\right)$$

E o nível $(\zeta)^n$ no ponto (j+1/2,k) será obtido da média dos valores nos pontos (j,k) e (j+1,k), cuja notação é $(\bar{\zeta}^x)^n$.

$$(\zeta)_{j+1/2,k}^{n} \quad \left(\bar{\zeta}^x\right)^n = \frac{1}{2}\left(\zeta_{j+1,k}^{n} + \zeta_{j,k}^{n}\right)$$

O coeficiente (C) de Chézy cujos valores na malha estão situados nos mesmos nós que os níveis (ζ) é definido para o ponto (j+1/2,k) de forma semelhante. O nível de tempo é (n)

$$(C)^{n}_{k+1/2,k} \approx \left(\bar{C}^{x}\right)^{n} = \left(\frac{1}{2}\; C^{n}_{j+1,k} + C^{n}_{j,k}\right)$$

Por fim, a componente de velocidade (U), que multiplica o módulo da velocidade horizontal, será avaliada pela média dos valores no ponto (j+1/2,k) correspondentes aos níveis de tempo (n+1/2) e (n-1/2).

Com tudo isso a expressão final do termo de fricção será

$$g\,\frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 H}\,U \cong g\,\frac{\left[\left(U^{n-1/2}_{j+1/2,k}\right)^2 + \bar{\bar{V}}^2\right]^{1/2}}{\left(\left(\bar{C}^{x}\right)^{n}\right)^2 \left(\bar{h}^{y} + \left(\bar{\zeta}^{x}\right)^{n}\right)} \cdot \frac{1}{2}\left(U^{n+1/2}_{j+1/2,k} + U^{n-1/2}_{j+1/2,k}\right)$$

g) Termo "$\frac{W_x}{\rho H}$": a única variável presente neste termo é o tirante (H) que será calculado conforme o termo anterior.

$$\frac{W_x}{\rho H} \cong \frac{W_x}{\rho\left(\bar{h}^{y} + \left(\bar{\zeta}^{x}\right)^{n}\right)}$$

h) Termo "$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$": a derivada segunda "$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$" do ponto (j+1/2,k) é avaliada por

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U^{n-1/2}_{j+3/2,k} - 2\,U^{n-1/2}_{j+1/2,k} + U^{n-1/2}_{j-1/2,k}}{(\Delta x)^2}$$

E a derivada segunda "$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$" no mesmo ponto é, analogamente dada por:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U^{n-1/2}_{j+1/2,\,k+1} - 2\,U^{n-1/2}_{j+1/2,k} + U^{n-1/2}_{j+1/2,\,k-1}}{(\Delta y)^2}$$

Definidos todos os termos em diferenças finitas da equação dinâmica OX, válida para o semi-intervalo de tempo (n, n+1/2), a sua expressão final é a seguinte:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(U^{n+1/2}_{j+1/2,k} - U^{n-1/2}_{j+1/2,k}\right) + U^{n+1/2}_{j+1/2,k}\,\frac{1}{2\Delta x}\left(U^{n-1/2}_{j+3/2,k} - U^{n-1/2}_{j-1/2,k}\right)$$

$$+ \bar{\bar{V}}\,\frac{1}{2\Delta y}\left(U^{n-1/2}_{j+1/2,\,k+1} - U^{n-1/2}_{j+1/2,\,k-1}\right) - \Omega\bar{\bar{V}} + \frac{g}{2\Delta x}\left(\zeta^{n+1/2}_{j+1,k} - \zeta^{n+1/2}_{j,k} +\right.$$

$$\left. + \zeta^{n-1/2}_{j+1,k} - \zeta^{n-1/2}_{j,k}\right) + g\,\frac{\left[\left(U^{n-1/2}_{j+1/2,k}\right)^2 + \bar{\bar{V}}^2\right]^{1/2}}{\left(\left(\bar{C}^x\right)^n\right)^2\left(\bar{h}^y + \left(\bar{\zeta}^x\right)^n\right)} \cdot \frac{1}{2}\left(U^{n+1/2}_{j+1/2,k} + U^{n-1/2}_{j+1/2,k}\right) -$$

$$- \frac{W_x}{\rho\left(\bar{h}^y + \left(\bar{\zeta}^x\right)^n\right)} - \varepsilon\left[\frac{U^{n-1/2}_{j+3/2,k} - 2\,U^{n-1/2}_{j-1/2,k} + U^{n-1/2}_{j-1/2,k}}{(\Delta x)^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{U^{n-1/2}_{j+1/2,\,k+1} - 2\,U^{n-1/2}_{j-1/2,k} + U^{n-1/2}_{j+1/2,\,k-1}}{(\Delta y)^2}\right] = 0$$

Expressando a equação acima em função das variáveis incógnitas, aquelas no estágio de tempo (n+1/2), ela assume a seguinte forma

$$- r_j \zeta^{n+1/2}_{j,k} + r'_{j+1/2} U^{n+1/2}_{j+1/2,k} + r_{j+1} \zeta^{n+1/2}_{j+1,k} = B^{n}_{j+1/2,k}$$

onde $$r_j = r_{j-1} = \frac{g\Delta t}{2\Delta x}$$

$$r'_{j+1/2} = 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(U^{n-1/2}_{j+3/2} - U^{n-1/2}_{j-1/2,k} \right) +$$

$$+ \frac{g\Delta t}{2} \frac{\left[\left(U^{n-1/2}_{j+1/2,k} \right)^2 + \bar{\bar{V}}^2 \right]^{1/2}}{\left(\left(\bar{C}^{x} \right) n \right)^2 \left(\bar{h}^{y} + \bar{\zeta}^{x} \right)}$$

$$B^{n}_{j+1/2,k} = U^{n-1/2}_{j+1/2,k} + \bar{\bar{V}} \left[\Omega\Delta t - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left(U^{n-1/2}_{j+1/2,\ k+1} - U^{n-1/2}_{j+1/2,\ k-1} \right) \right]$$

$$= \frac{g\Delta t}{2} U^{n-1/2}_{j+1/2,k} \frac{\left[\left(U^{n-1/2}_{j+1/2,k} \right)^2 + \bar{\bar{V}}^2 \right]^{1/2}}{\left(\left(\bar{C}^{x} \right) n \right)^2 \left(\bar{h}^{y} + \bar{\zeta}^{x} \right)} + \frac{\Delta t W_x}{\rho \left(\bar{h}^{y} + \bar{\zeta}^{x} \right)} +$$

$$+ \varepsilon\Delta t \left[\frac{U^{n-1/2}_{j+3/2,k} - 2\, U^{n-1/2}_{j+1/2,k} + U^{n-1/2}_{j-1/2,k}}{(\Delta x)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{U^{n-1/2}_{j+1/2,\ k+1} - 2\, U^{n-1/2}_{j+1/2,k} + U^{n-1/2}_{j+1/2,\ k-1}}{(\Delta y)^2} \right]$$

Segundo semi-intervalo de tempo (n+1/2, n)

Equação da continuidade

a) Termo "$\frac{\partial \zeta}{\partial t}$": avaliado pela diferença de níveis (ζ) do ponto (j,k), no início e fim do semi-intervalo de tempo, dividida pelo valor do semi-intervalo ($\Delta t/2$)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cong \frac{2}{\Delta t}\left(\zeta_{j,k}^{n+1} - \zeta_{j,k}^{n+1/2}\right)$$

b) Termo "$\frac{\partial (HU)}{\partial x}$": como no primeiro semi-intervalo, este termo será avaliado por

$$\frac{\partial (HU)}{\partial x} = \frac{\partial (hU) + \zeta U)}{\partial x} \cong \frac{1}{\Delta x}\Big[(hU)_{j-1/2,k} - (hU)_{j-1/2,k} + $$

$$+ (\zeta U)_{j+1/2,k} - (\zeta U)_{j-1/2,k}\Big]$$

Mas as expressões dos produtos acima indicados são dadas como a seguir:

i) O produto $(hU)_{j-1/2,k}$ é obtido pela média das profundidades (h), dos pontos (j+1/2, k-1/2) e (j+1/2, k+1(2), multiplicada pela componente (U) de velocidade do ponto (j+1/2, k) e referida ao nível de tempo (n+1/2), início do segundo semi-intervalo.

$$(hU)_{j+1/2,k} \cong \frac{1}{2}\left(h_{j+1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2}\right) U^{n+1/2}_{j+1/2,k}$$

ii) O produto $(hU)_{j-1/2,k}$ é calculado de maneira análoga

$$(hU)_{j-1/2,k} \cong \frac{1}{2}\left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j-1/2,\ k+1/2}\right) U^{n+1/2}_{j-1/2,k}$$

iii) O produto $(\zeta U)_{j+1/2,k}$ é aproximado pela média dos níveis (ζ), dos pontos (j,k) e (j+1,k), multiplicada pela componente (U) do ponto (j+1/2,k). Esta componente (U) e os níveis (ζ) correspondem ao início do segundo semi-intervalo de tempo, nível (n+1/2).

$$(\zeta U)_{j+1/2,k} = \frac{1}{2}\left(\zeta^{n+1/2}_{j,k} + \zeta^{n+1/2}_{j+1,k}\right) U^{n+1/2}_{j+1/2,k}$$

iv) E por fim o produto $(\zeta U)_{j-1/2,k}$ é calculado da mesma forma

$$(\zeta U)_{j-1/2,k} = \frac{1}{2}\left(\zeta^{n+1/2}_{j-1,k} + \zeta^{n+1/2}_{j,k}\right) U^{n+1/2}_{j-1/2,k}$$

Com os produtos definidos a expressão final da derivada "$\frac{\partial U}{\partial x}$" possui a seguinte forma

$$\frac{\partial(HU)}{\partial x} \cong \frac{1}{2\Delta x}\left[\left(h_{j+1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2} + \zeta^{n+1/2}_{j,k} + \zeta^{n+1/2}_{j+1,k}\right) U^{n+1/2}_{j+1/2,k} - \left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j-1/2,\ k+1/2} + \zeta^{n+1/2}_{j-1,k} + \zeta^{n+1/2}_{j,k}\right) U^{n+1/2}_{j-1/2,k}\right]$$

c) Termo "$\frac{\partial(HV)}{\partial y}$": da mesma forma que no primeiro semi-intervalo de tempo, este termo será avaliado, partindo-se da expressão dada por

$$\frac{\partial(HV)}{\partial y} = \frac{\partial(hV + \zeta V)}{\partial y} \quad \frac{1}{\Delta y} \left[(hV)_{j,k+1/2} - (hV)_{j,k-1/2} + \right.$$

$$\left. + (\zeta V)_{j,k+1/2} - (\zeta V)_{j,k-1/2} \right]$$

onde

i) O produto $(hV)_{j,k+1/2}$ é calculado pela média das profundidades (h), dos pontos (j-1/2, k+1/2) e (j+1/2, k+1/2), multiplicada pela componente de velocidade (V) do ponto (j,k+1/2). Esta componente (V) ao fim do segundo semi-intervalo, nível de tempo (n+1).

$$(hV)_{j,k+1/2} \cong \frac{1}{2} \left(h_{j-1/2,\ k+1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2} \right) V^{n+1}_{j,k+1/2}$$

ii) O produto $(hV)_{j,k-1/2}$ é obtido de forma semelhante

$$(hV)_{j,k-1/2} \cong \frac{1}{2} \left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k-1/2} \right) V^{n+1}_{j,k-1/2}$$

iii) O produto $(\zeta V)_{j,k+1/2}$ é estimado pela média dos níveis (ζ), dos pontos (j,k) e (j,k+1), multiplicada pela componente (V) do ponto (j,k+1/2). Com os níveis d'água (ζ) referidos ao nível de tempo (n+1/2) e a componente (V) correspondendo ao fim do intervalo de tempo, (n+1).

$$(\zeta V)_{j,k+1/2} \cong \frac{1}{2}\left(\zeta_{j,k}^{n+1/2} + \zeta_{j,k+1}^{n+1/2}\right) V_{j,k+1/2}^{n+1}$$

iv) E o produto $(\zeta V)_{j,k+1/2}$ é obtido de maneira análoga

$$(\zeta V)_{j,k-1/2} \cong \frac{1}{2}\left(\zeta_{j,k}^{n+1/2} + \zeta_{j,k-1}^{n+1/2}\right) V_{j,k-1/2}^{n+1}$$

Definidos os quatro produtos a expressão final do termo "$\frac{\partial(HV)}{\partial y}$" da equação da continuidade, no segundo semi-intervalo de tempo, fica sendo

$$\frac{\partial(HV)}{\partial y} \cong \frac{1}{2\Delta y}\left[\left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2} + \zeta_{j,k}^{n+1/2} + \zeta_{j,k+1}^{n+1/2}\right) V_{j,k+1/2}^{n+1} - \left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k-1/2} + \zeta_{j,k}^{n+1/2} + \zeta_{j,k-1}^{n+1/2}\right) V_{j,k-1/2}^{n+1}\right]$$

Com todos os termos da equação da continuidade na forma de diferenças finitas, é possível apresentar agora a equação completa, válida para o segundo semi-intervalo de tempo (n+1/2, n+1), dada pela expressão a seguir.

$$\frac{2}{\Delta t}\left(\zeta^{n+1}_{j,k} - \zeta^{n+1/2}_{j,k}\right) + \frac{1}{2\ x}\left[\left(h_{j+1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2} +\right.\right.$$

$$\left. + \zeta^{n+1/2}_{j,k} + \zeta^{n+1/2}_{j+1,k}\right) U^{n+1/2}_{j+1/2,k}$$

$$\left.- \left(h_{j-1/2,\ k-1,2} + h_{j-1,2,\ k+1/2} + \zeta^{n+1/2}_{j-1,k} + \zeta^{n+1/2}_{j,k}\right) U^{n+1/2}_{j-1/2,k}\right] +$$

$$\frac{1}{2\Delta y}\left[\left(h_{j-1/2,\ k+1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2} + \zeta^{n+1/2}_{j,k} + \zeta^{n+1/2}_{j,k+1}\right) V^{n+1}_{j,k+1/2}\right.$$

$$\left.- \left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k-1/2} + \zeta^{n+1/2}_{j,k} + \zeta^{n+1/2}_{j,k+1}\right) V^{n+1}_{j,k-1/2}\right] = 0$$

Isolando-se as variáveis incógnitas, ou seja aquelas correspondentes ao nível (n+1) de tempo, é possível apresentar a equação acima da seguinte forma compacta:

$$-r_{k-1/2}\, V^{n+1}_{j,k-1/2} + \zeta^{n+1}_{j,k} + r_{k+1/2}\, V^{n+1}_{j,k+1/2} = A^{n+1/2}_{j,k}$$

onde

$$r_{k-1/2} = \frac{t}{4\Delta y}\left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k-1/2} + \zeta^{n+1/2}_{j,k} + \zeta^{n+1/2}_{j,k-1}\right)$$

$$r_{k+1/2} = \frac{\Delta t}{4\Delta y}\left(h_{j-1/2,\ k+1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2} + \zeta^{n+1/2}_{j,k} + \zeta^{n+1/2}_{j,k+1}\right)$$

$$A^{n+1/2}_{j,k} = \zeta^{n+1/2}_{j,k} + \frac{\Delta t}{4\Delta x}\left[\left(h_{j-1/2,\ k-1/2} + h_{j-1/2,\ k+1/2} + \right.\right.$$

$$\left. + \zeta^{n+1/2}_{j-1,k} + \zeta^{n+1/2}_{j,k}\right) U^{n+1/2}_{j-1/2,k} -$$

$$\left. - \left(h_{j+1/2,\ k-1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2} + \zeta^{n+1/2}_{j,k} + \zeta^{n+1/2}_{j+1,k}\right) U^{n+1/2}_{j-1/2,k}\right]$$

Equação dinâmica OY

a) Termo "$\frac{\partial V}{\partial t}$": avaliado pela diferença dos valores da componente (V), do ponto (j,k+1/2), nos níveis de tempo (n+1) e (n), dividida pelo intervalo de tempo (Δt).

$$\frac{\partial V}{\partial t} \cong \frac{1}{\Delta t}\left(V^{n+1}_{j,k+1/2} - V^{n}_{j,k+1/2}\right)$$

b) Termo "$U\frac{\partial V}{\partial x}$": neste termo a derivada "$\frac{\partial V}{\partial x}$" é calculada pela diferença dos valores da componente (V), dos pontos (j+1, k+1/2) e (j-1, k+1/2), dividida pela distância ($2\Delta x$). O nível de tempo para cálculo desta derivada é (n). Já a componente (U) que multiplica a derivada é obtida pela média ($\bar{\bar{U}}$) dos valores correspondentes aos quatro pontos (j-1/2,k), (j-1/2, k+1), (j+1/2, k+1) e (j+1/2,k) no nível de tempo (n+1/2).

$$U\frac{\partial V}{\partial x} \cong \bar{\bar{U}}\,\frac{1}{2\Delta x}\left(V^{n}_{j+1,\ k+1/2} - V^{n}_{j-1,\ k+1/2}\right)$$

onde

$$\bar{\bar{U}} = \frac{1}{4}\left(U^{n+1/2}_{j-1/2,k} + U^{n+1/2}_{j-1/2,\ k+1} + U^{n+1/2}_{j+1/2,\ k+1} + U^{n+1/2}_{j+1/2,k}\right)$$

c) O termo "$V\frac{\partial V}{\partial y}$": a derivada "$\frac{\partial V}{\partial y}$" deste termo é aproximada pela diferença dos valores da componente (V) de velocidade, dos pontos (j, k+3/2) e (j, k-1/2), dividida pela distância que é (2Δy). O nível de tempo para cálculo desta derivada é (n). Por outro lado a componente (V) que multiplica a derivada é tomada no nível de tempo (n+1), e está localizada no ponto (j, k+1/2)

$$V\frac{\partial V}{\partial y} \cong V^{n+1}_{j,k+1/2}\ \frac{1}{2\Delta y}\left(V^{n}_{j,k+3/2} - V^{n}_{j,k-1/2}\right)$$

d) Termo "ΩU": neste termo a componente U que multiplica a constante de Corolis (Ω) é calculada pela média de quatro pontos já definidos anteriormente

$$\Omega U \cong \Omega\bar{\bar{U}}$$

e) Termo "$g\frac{\partial \zeta}{\partial y}$": a derivada "$\frac{\partial \zeta}{\partial y}$" corresponde ao ponto (j,k+1/2) e é avaliada pela média dos seus valores nos níveis de tempo (n+1) e (n). Cada um destes dois valores é obtido pela diferença de níveis (ζ), dos pontos (j,k+1) e (j,k), dividida pelo comprimento (Δy).

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{j,k+1/2} \approx \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^{n+1}_{j,k+1/2} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^{n}_{j,k+1/2}\right]$$

onde

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^{n+1}_{k+1/2} \cong \frac{1}{\Delta y}\left(\zeta^{n+1}_{j,k+1} - \zeta^{n+1}_{j,k}\right)$$

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^{n} \cong \frac{1}{\Delta y}\left(\zeta^{n}_{j,k+1} - \zeta^{n}_{j,k}\right)$$

E assim o termo "$g\frac{\partial\zeta}{\partial y}$" tem a seguinte forma

$$g\,\frac{\partial\zeta}{\partial y} \approx g\,\frac{1}{2\Delta y}\left(\zeta^{n+1}_{j,k+1} - \zeta^{n+1}_{j,k} + \zeta^{n}_{j,k+1} - \zeta^{n}_{j,k}\right)$$

f) Termo "$g\,\frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2H}\,V$": o módulo da velocidade horizontal no ponto ($j,k+1/2$) dada pela raiz quadrada tem a componente (V) do ponto ($j,k+1/2$) tomada no nível de tempo (n) e a componente (U) avaliada pela média de quatro pontos ($\bar{\bar{U}}$).

$$\sqrt{U^2 + V^2} \quad \sqrt{\bar{\bar{U}}^2 + \left(V^n_{j,k+1/2}\right)^2}$$

O tirante d'água $H = h + \zeta$ será calculado com base nos valores aproximados da profundidade (h) e do nível (ζ) para o ponto (j,k+1/2). O nível d'água (ζ) corresponde ao nível de tempo (n+1/2).

$$H \cong (h)_{j,k+1/2} + (\zeta)^{n+1/2}_{j,k+1/2}$$

A profundidade (h) no ponto (j,k+1/2) será calculada pela média dos valores nos pontos (j-1/2, k+1/2) e (j+1/2, k+1/2), notada por ($\bar{h}^{x}$).

$$(h)_{j,k+1/2} \cong \bar{h}^{x} = \frac{1}{2}\left(h_{j-1/2,\ k+1/2} + h_{j+1/2,\ k+1/2}\right)$$

E o nível $(\zeta)^{n+1/2}$ no ponto (j,k+1/2) será obtido da média dos valores nos pontos (j,k) e (j,k+1), notada por $(\bar{\zeta}^{y})^{n+1/2}$

$$(\zeta)^{n+1/2}_{j,k+1/2} \cong \left(\bar{\zeta}^{y}\right)^{n+1/2} \cong \frac{1}{2}\left(\zeta^{n+1/2}_{j,k} + \zeta^{n+1/2}_{j,k+1}\right)$$

O coeficiente (C) de Chèzy cujos valores na malha estão situados nos mesmos nós que os níveis (ζ) é definido para o ponto (j,k+1/2) de forma semelhante. O nível de tempo é (n+1/2)

$$(C)^{n+1/2}_{j,k+1/2} \cong \left(\bar{C}^{y}\right)^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(C^{n+1/2}_{j,k} + C^{n+1/2}_{j,k+1}\right)$$

Por fim, a componente de velocidade (V), que multipli ca o módulo da velocidade horizontal, será avaliada pela média dos valores no ponto (j,k+1/2) correspondentes aos níveis de tempo (n+1) e (n).

Assim a expressão final do termo de função será

$$g\,\frac{\sqrt{U^2+V^2}}{C^2H}\,V = g\,\frac{\sqrt{\bar{\bar{U}}^2+\left(V^n_{j,k+1/2}\right)^2}}{\left(\left(\frac{-y}{C}\right)^{n+1/2}\right)^2\left(\frac{-x}{h}+\left(\frac{-y}{\zeta}\right)^{n+1/2}\right)}\;.$$

$$.\;\frac{1}{2}\left(V^{n+1}_{j,k+1/2}+V^{n}_{j,k+1/2}\right)$$

g) Termo "$\frac{Wy}{\rho H}$": neste termo o tirante d'água é avaliado como no termo anterior.

$$\frac{Wy}{\rho H}\quad\frac{Wy}{\rho\left(\frac{-x}{h}+\left(\frac{-y}{\zeta}\right)^{n+1/2}\right)}$$

h) Termo "$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$": a derivada segunda "$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$" é aproximada por

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\quad\frac{V^n_{j+1,\,k+1/2}-2\,V^n_{j,k+1/2}+V^n_{j-1,\,k+1/2}}{(\Delta x)^2}$$

E a outra derivada segunda é dada, analogamente, por:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\quad\frac{V^n_{j,k+1/2}-2\,V^n_{j,k+1/2}+V^n_{j,\,k-1/2}}{(\Delta y)^2}$$

Definidos todos os termos da equação dinâmica da direção [OY] em diferentes finitas, a equação completa, válida para o segundo semi-intervalo de tempo (n+1/2, n+1), se apresenta como abaixo

$$\frac{1}{\Delta t}\left(V^{n+1}_{j,k+1/2} - V^{n}_{j,k+1/2}\right) + \bar{\bar{U}}\,\frac{1}{2\ x}\left(V^{n}_{j+1,\ k+1/2} - V^{n}_{j-1,\ k+1/2}\right)$$

$$+ V^{n+1}_{j,k+1/2}\ \frac{1}{2\Delta y}\left(V^{n}_{j,k+3/2} - V^{n}_{j,k-1/2}\right) + \Omega\bar{\bar{U}} + \frac{g}{2\Delta y}\left(\zeta^{n+1}_{j,k+1} - \zeta^{n+1}_{j,k} +\right.$$

$$\left. + \zeta^{n}_{j,k+1} - \zeta^{n}_{j,k}\right) + g\ \frac{\sqrt{\bar{\bar{U}}^{2} + (V^{n}_{j,k+1})^{2}}}{\left(\left(\overline{C}^{y}\right)^{n+1/2}\right)^{2}\left(\overline{h}^{x} + \left(\overline{\zeta}^{y}\right)^{n+1/2}\right)}\ .$$

$$.\ \frac{1}{2}\left(V^{n+1}_{j,k+1/2} + V^{n}_{j,k+1/2}\right) - \frac{Wy}{\rho\left(\overline{h}^{x} + \left(\overline{\zeta}^{y}\right)^{n+1/2}\right)} -$$

$$- \varepsilon\left[\frac{V^{n}_{j-1,\ k+1/2} - 2\,V^{n}_{j,k+1/2} + V^{n}_{j-1,\ k+1/2}}{(\Delta x)^{2}} +\right.$$

$$\left. + \frac{V^{n}_{j,k+3/2} - 2\,V^{n}_{j,k+1/2} + V^{n}_{j,k-1/2}}{(\Delta y)^{2}}\right] = 0$$

Expressando esta equação acima em função das variáveis incógnitas, aquelas no nível de tempo (n+1), ela assume a seguinte forma compacta:

$$-r_k\, \zeta^{n+1}_{j,k} + r'_{k+1/2}\, V^{n+1}_{j,k+1/2} + r_{k+1}\, \zeta^{n+1}_{j,k+1} = B^{n+1/2}_{j,k+1/2}$$

onde

$$r_k = r_{k+1} = \frac{g\Delta t}{2\Delta y}$$

$$r'_{k+1/2} = 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta y}\left(V^{n}_{j,k+3/2} - V^{n}_{j,k-1/2}\right) + \frac{g\Delta t}{2}\, \frac{\sqrt{\bar{\bar{U}}^{2} + \left(V^{n}_{j,k+1/2}\right)^{2}}}{\left(\left(\bar{k}^{y}\right)^{n+1/2}\right)^{2}\left(\bar{h}^{x} + \left(\bar{\zeta}^{y}\right)^{n+1/2}\right)}$$

$$B^{n+1/2}_{j,k+1/2} = V^{n}_{j,k+1/2} - \bar{\bar{U}}\left[\Omega\Delta t + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(V^{n}_{j+1,\, k+1/2} - V^{n}_{j-1,\, k+1/2}\right)\right]$$

$$- g\,\frac{\Delta t}{2}\, V^{n}_{j,k+1/2}\, \frac{\sqrt{\bar{\bar{U}}^{2} + \left(V^{n}_{j,k+1/2}\right)^{2}}}{\left(\left(\bar{C}^{y}\right)^{n+1/2}\right)^{2}\left(\bar{h}^{x} + \left(\bar{\zeta}^{y}\right)^{n+1/2}\right)} + \frac{\Delta t W y}{\rho\left(\bar{h}^{x} + \left(\bar{\zeta}^{y}\right)^{n+1/2}\right)}$$

$$+ \varepsilon\Delta t\left[\frac{V^{n}_{j+1,\, k+1/2} - 2\,V^{n}_{j,k+1/2} + V^{n}_{j-1,\, k+1/2}}{(\Delta x)^{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{V^{n}_{j,k+3/2} - 2\,V^{n}_{j,k+1/2} + V^{n}_{j,k-1/2}}{(\Delta y)^{2}}\right]$$

V.4 — SISTEMAS DE EQUAÇÕES DAS LINHAS E COLUNAS

As equações em diferenças finitas apresentadas no item anterior referem-se a pontos genéricos da malha de cálculo. As equações do primeiro semi-intervalo de tempo estão definidas em uma linha genérica "k" nos pontos sucessivos (j,k) e (j+1/2,k), correspondendo o primeiro ponto à equação da continuidade e o segundo à equação dinâmica OX. Analogamente, as equações do segundo semi-intervalo de tempo, definidas em uma coluna genérica "j", referem-se aos pontos (j,k) e (j,k+1/2), sendo o primeiro ponto correspondente à equação da continuidade e o subseqüente referente à equação dinâmica OY.

A extensão da definição, sucessiva e alternada, de equações da continuidade e dinâmicas a todos os pontos das linhas e colunas da malha de cálculo é que gera sistemas de equações lineares, cada qual correspondendo a uma linha ou coluna de cálculo.

A seguir são apresentados os sistemas de equações lineares, gerais, associados a linhas e colunas.

Sistema de equações para uma linha genérica "k"

O sistema geral de equações lineares gerado pela definição sucessiva e alternada das equações da continuidade e dinâmica OX em todos os nós da linha genérica "k" é dado por:

PONTO		EQUAÇÃO
J	CONT.	$-r_{J-1/2}\, U^{n+1/2}_{J-1/2} + \zeta^{n+1/2}_{J} + r_{J+1/2}\, U^{n+1/2}_{J+1/2} = A^{n}_{J}$
J+1/2	DIN.	$-rJ\, \zeta^{n+1/2}_{J} + r'_{J+1/2}\, U^{n+1/2}_{J+1/2} + r_{J+1}\, \zeta^{n+1/2}_{J+1} = B^{n}_{J+1/2}$
J+1	CONT.	$-r_{J+1/2}\, U^{n+1/2}_{J-1/2} + \zeta^{n+1/2}_{J+1/2} + r_{J+3/2}\, U^{n+1/2}_{J+3/2} = A^{n}_{J+1}$
I-1/2	DIN.	$-r_{I-1}\, \zeta^{n+1/2}_{I-1} + r'_{I-1/2}\, U^{n+1/2}_{I-1/2} + r_{I}\, \zeta^{n+1/2}_{I} = B^{n}_{I-1/2}$
I	CONT.	$-r_{I-1/2}\, U^{n+1/2}_{I-1/2} + \zeta^{n+1/2}_{I} + r_{I+1/2}\, U^{n+1/2}_{I+1/2} = A^{n}_{I}$

onde "$U^{n+1/2}$" e "$\zeta^{n+1/2}$" são incógnitas, "r" representa coeficientes lineares, e "A^n" e "B^n" constituem os elementos independentes. Os índices contendo "J" e "I" identificam pontos no início e no fim da linha "k". Os índices superiores "n" e "n+1/2" identificam os limites inferior e superior do primeiro semi-intervalo do intervalo de tempo.

Em termos matriciais o sistema de equações acima pode ser escrito como:

$$A \,.\, X^t = B$$

onde A = matriz tridiagonal dos coeficientes "r";

B = matriz coluna dos elementos independentes "A^n" e "B^n";

X^t = matriz linha transposta (ou matriz coluna) das incógnitas "$U^{n+1/2}$" e "$\zeta^{n+1/2}$".

O conteúdo destas matrizes consta da página seguinte.

Na malha de cálculo a disposição das variáveis envolvidas no sistema de equações de uma linha está representada abaixo:

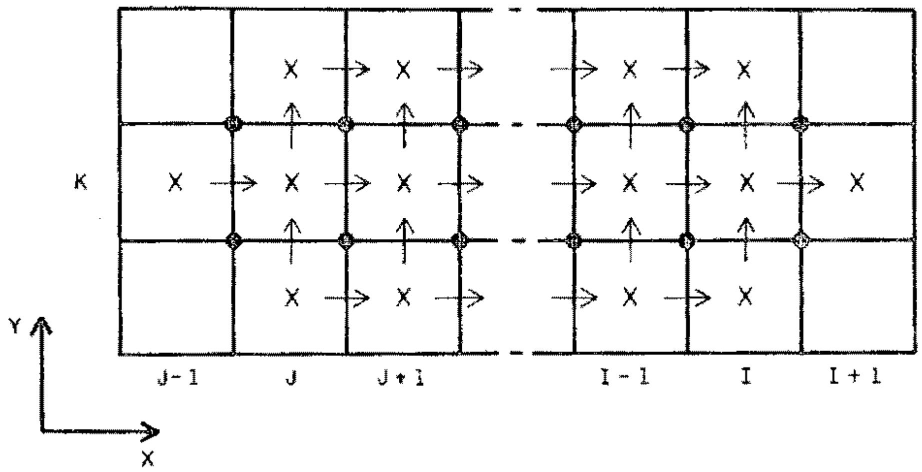

Figura V.5 — Posição das variáveis de uma linha

Com a especificação de **condições de contorno** nos extremos da linha o sistema geral é particularizado e torna-se possível resolvê-lo. Como as condições de contorno nos dois extremos da linha podem ser de dois tipos, velocidades "U" ou níveis "ζ", existem quatro tipos de linha de cálculo, a que correspondem quatro sistemas de equações diferentes.

SISTEMA GERAL DE EQUAÇÕES PARA UMA LINHA GENÉRICA "K"

MATRIZ **A**

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & -r_{J-1/2} & 1 & r_{J+1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & -r_J & r'_{J+1/2} & r_{J+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & -r_{J+1/2} & 1 & r_{J+3/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & -r_{J+1} & r'_{J+3/2} & r_{J+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{J+3/2} & 1 & r_{J+5/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r_{I-3/2} & 1 & r_{I-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r_{I-1} & r'_{I-1/2} & r_I & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -r_{I-1/2} & 1 & r_{I+1/2} & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{array}\right]
$$

MATRIZ **B**

$$
\left[\begin{array}{c}
\cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_J^n \\ B_{J+1}^n \\ A_{J+1}^n \\ B_{J+3/2}^n \\ A_{J+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{I-1}^n \\ B_{I-1/2}^n \\ A_I^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot
\end{array}\right]
$$

MATRIZ **X**

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccc}
\cdots & U_{J-1/2} & \zeta_J & U_{J+1/2} & \zeta_{J+1} & U_{J+3/2} & \zeta_{J+2} & U_{J+5/2} & \cdots & U_{I-3/2} & \zeta_{I-1} & U_{I-1/2} & \zeta_I & U_{I+1/2} & \cdots
\end{array}\right]^{n+1/2}
$$

Os quatro tipos de condições de contorno para uma li nha são:

	Condição de contorno	
Tipo	início	fim
1	U	U
2	U	ζ
3	ζ	U
4	ζ	ζ

As condições de contorno, por definição, são conhecidas em todos os instantes de tempo. Por isso passam a integrar a matriz coluna "B", dos elementos independentes, como parte dos termos extremos (topo e base). As matrizes dos quatro sistemas determinados gerais, correspondentes aos quatro tipos de contorno das linhas, estão nas páginas seguintes, onde já estão incorporadas as mudanças promovidas pela introdução das condições de contorno.

Sistema de equações para uma coluna genérica "j"

Com a aplicação alternada e sucessiva das equações da continuidade e dinâmica OY a todos os nós de uma coluna genérica "j", o sistema que surge para ser resolvido no segundo semi-intervalo de tempo, tem a seguinte forma geral:

PONTO	EQUAÇÃO	
K	CONT.	$-r_{k-1/2}\,V^{n+1}_{k-1/2} + \zeta^{n+1}_{k} + r_{k+1/2}\,V^{n+1}_{k+1/2} = A^{n+1/2}_{k}$
K+1/2	DIN.	$-r_{k}\,\zeta^{n+1}_{k} + r'_{k+1/2}\,V^{n+1}_{k+1/2} + r_{k+1}\,\zeta^{n+1}_{k+1} = B^{n+1/2}_{k+1/2}$
K+1	CONT.	$-r_{k+1/2}\,V^{n+1}_{k+1/2} + \zeta^{n+1}_{k+1} + r_{k+3/2}\,V^{n+1}_{k+3/2} = A^{n+1/2}_{k+1}$
L-1/2	DIN.	$-r_{L-1}\,\zeta^{n+1}_{L-1} + r'_{L-1/2}\,V^{n+1}_{L-1/2} + r_{L}\,\zeta^{n+1}_{L} = B^{n+1/2}_{L-1/2}$
L	CONT.	$-r_{L-1/2}\,V^{n+1}_{L-1/2} + \zeta^{n+1}_{L} + r_{L+1/2}\,V^{n+1}_{L+1/2} = A^{n+1/2}_{L}$

onde "V^{n+1}" e "ζ^{n+1}" são incógnitas, "r" representa coeficientes lineares, e "$A^{n+1/2}$" e "$B^{n+1/2}$" constituem os elementos independentes. Os índices contendo "K" e "L" identificam pontos no início e no fim da coluna "j". Os índices superiores "n+1/2" e "n+1" identificam os limites inferior e superior do segundo semi-intervalo de tempo.

A expressão matricial do sistema de equações acima apresentado para uma coluna é análoga à da linha:

$$A \,.\, X^{t} = B$$

SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA LINHA COM CONTORNO "VELOCIDADE-VELOCIDADE"

MATRIZ **A**

$$
\begin{bmatrix}
1 & r_{J+1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-r_J & r'_{J+1/2} & r_{J+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -r_{J+1/2} & 1 & r_{J+3/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -r_{J+1} & r'_{J+3/2} & r_{J+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -r_{J+3/2} & 1 & r_{J+5/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r_{I-3/2} & 1 & r_{I-1/2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r_{I-1} & r'_{I-1/2} & r_I \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -r_{I-1/2} & 1
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **B**

$$
\begin{bmatrix}
A_J^n + r_{J-1/2}\, U_{J-1/2}^{n+1/2} \\
B_{J+1/2}^n \\
A_{J+1}^n \\
B_{J+3/2}^n \\
A_{J+2}^n \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
A_{I-1}^n \\
B_{I-1/2}^n \\
A_I^n - r_{I+1/2}\, U_{I+1/2}^{n+1/2}
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **X**

$$
\begin{bmatrix}
\zeta_J & U_{J+1/2} & \zeta_{J+1} & U_{J+3/2} & \zeta_{J+2} & U_{J+5/2} & \cdots & U_{I-3/2} & \zeta_{I-1} & U_{I-1/2} & I
\end{bmatrix}^{n+1/2}
$$

$$
\text{CONDIÇÕES DE CONTORNO}
\begin{cases}
\text{ESQ} \rightarrow U_{J-1/2}^{n+1/2} \\
\text{DIR} \rightarrow U_{I+1/2}^{n+1/2}
\end{cases}
$$

SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA LINHA COM CONTORNO "VELOCIDADE-NÍVEL"

MATRIZ **A**

$$
\begin{bmatrix}
1 & r_{J+1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-r_J & r'_{J+1/2} & r_{J+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -r_{J+1/2} & 1 & r_{J+3/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -r_{J+1} & r'_{J+3/2} & r_{J+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -r_{J+3/2} & 1 & r_{J+5/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r_{I-3/2} & 1 & r_{I-1/2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r_{I-1} & r'_{I-1/2}
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **B**

$$
\begin{bmatrix}
A_J^n + r_{J-1/2}\, U_{J-1/2}^{n+1/2} \\
B_{J+1/2}^n \\
A_{J+1}^n \\
B_{J+3/2}^n \\
A_{J+2}^n \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
A_{I-1}^n \\
B_{I-1/2}^n - r_I\, U_I^{n+1/2}
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **X**

$$
\begin{bmatrix}
\zeta_J & U_{J+1/2} & \zeta_{J+1} & U_{I+3/2} & \zeta_{J+2} & U_{J+5/2} & \cdots & U_{I-3/2} & \zeta_{I-1} & U_{I-1/2}
\end{bmatrix}^{n+1/2}
$$

$$
\text{CONDIÇÕES DE CONTORNO} \quad \begin{cases} \text{ESQ} \rightarrow U_{J-1/2}^{n+1/2} \\ \text{DIR} \rightarrow \zeta_I^{n+1/2} \end{cases}
$$

SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA LINHA COM CONTORNO "NÍVEL-NÍVEL"

MATRIZ A

$$
\begin{bmatrix}
r'_{J+1/2} & r_{J+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-r_{J+1/2} & 1 & r_{J+3/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -r_{J+1} & r'_{J+3/2} & r_{J+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -r_{J+3/2} & 1 & r_{J+5/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r_{I-3/2} & 1 & r_{I-1/2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & -r_{I-1} & r'_{I-1/2}
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ B

$$
\begin{bmatrix}
B^{n}_{J+1/2} + r_J \, U_J^{n+1/2} \\
A^{n}_{J+1} \\
B^{n}_{J+3/2} \\
A^{n}_{J+2} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
A^{n}_{I-1} \\
B^{n}_{I-1/2} - r_I \, U_I^{n+1/2}
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ X

$$
\begin{bmatrix}
U_{J+1/2} & \zeta_{J+1} & U_{J+3/2} & \zeta_{J+2} & U_{J+5/2} & \cdots & U_{I-3/2} & \zeta_{I-1} & U_{I-1/2}
\end{bmatrix}^{n+1/2}
$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO $\begin{cases} \text{ESQ} \rightarrow \zeta_J^{n+1/2} \\ \text{DIR} \rightarrow \zeta_I^{n+1/2} \end{cases}$

SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA LINHA COM CONTORNO "NÍVEL-VELOCIDADE"

MATRIZ **A**

$$
\begin{bmatrix}
r'_{J+1/2} & r_{J+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-r_{J+1/2} & 1 & r_{J+3/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -r_{J+1} & r'_{J+3/2} & r_{J+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -r_{J+3/2} & 1 & r_{J+5/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r_{I-3/2} & 1 & r_{I-1/2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r_{I-1} & r'_{I-1/2} & r_I \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -r_{I-1/2} & 1
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **B**

$$
\begin{bmatrix}
B^n_{J+1/2} + r_J \, U^{n+1/2}_J \\
A^n_{J+1} \\
B^n_{J+3/2} \\
A^n_{J+2} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
A^n_{I-1} \\
B^n_{I-1/2} \\
A^n_I - r_{I+1/2} \, U^{n+1/2}_{I+1/2}
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **X**

$$
\begin{bmatrix}
U_{J+1/2} & \zeta_{J+1} & U_{J+3/2} & \zeta_{J+2} & U_{J+5/2} & \cdots & U_{I-3/2} & \zeta_{J-1} & U_{I-1/2} & \zeta_I
\end{bmatrix}^{n+1/2}
$$

$$
\text{CONDIÇÕES DE CONTORNO} \begin{cases} \text{ESQ} \rightarrow \zeta^{n+1/2}_J \\ \text{DIR} \rightarrow U^{n+1/2}_{I+1/2} \end{cases}
$$

onde A = matriz tridiagonal dos coeficientes "r";

B = matriz coluna dos elementos independentes "$A^{n+1/2}$" e "$B^{n+1/2}$"; e

X^t = matriz linha transporta (ou matriz coluna) das incógnitas "V^{n+1}" e "ζ^{n+1}"

As matrizes "A", "B" e "X" são apresentadas na página seguinte.

As variáveis que são utilizadas no sistema de equações de uma coluna têm situação, na malha de cálculo, mostrada abaixo:

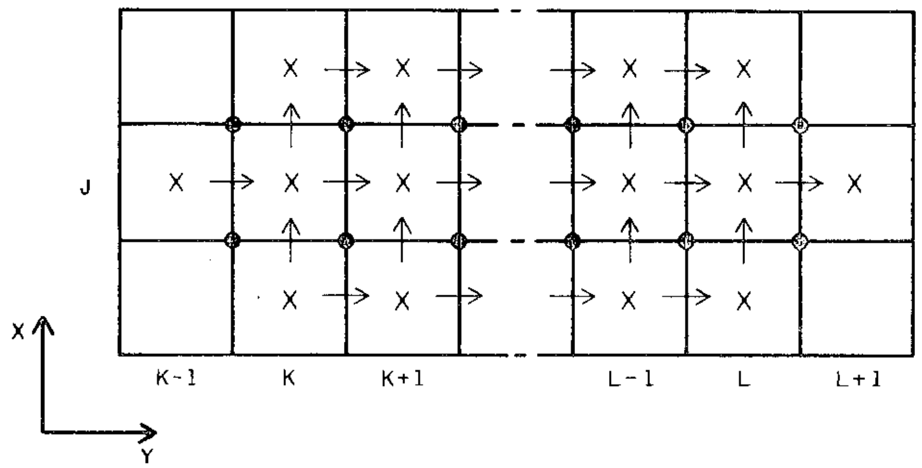

Figura V.6 — Posição das variáveis de uma coluna

A semelhança do que acontece com as linhas, as **condições de contorno** nos extremos das colunas podem ser velocidades "V" ou níveis "ζ", havendo então quatro tipos de colunas de cálculo. A cada uma das colunas de cálculo corresponde um sistema de equações diferente.

SISTEMA GERAL DE EQUAÇÕES PARA UMA COLUNA GENÉRICA "j"

MATRIZ **A**

$$
\begin{bmatrix}
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & -r_{K-1/2} & 1 & r_{K+1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & -r_K & r'_{K+1/2} & r_{K+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & -r_{K+1/2} & 1 & r_{K+3/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & -r_{K+1} & r'_{K+3/2} & r_{K+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{K+3/2} & 1 & r_{K+5/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r_{L-3/2} & 1 & r_{L-1/2} & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r_{L-1} & r'_{L-1/2} & r_L & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -r_{L-1/2} & 1 & r_{L+1/2} & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **B**

$$
\begin{bmatrix}
\cdot \\ \cdot \\ \cdot \\
A_K^{n+1/2} \\
B_{K+1/2}^{n+1/2} \\
A_{K+1}^{n+1/2} \\
B_{K+3/2}^{n+1/2} \\
A_{K+2}^{n+1/2} \\
\cdot \\ \cdot \\ \cdot \\
A_{L-1/2}^{n+1/2} \\
B_L^{n+1/2} \\
A_L^{n+1/2} \\
\cdot \\ \cdot \\ \cdot
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **X**

$$
\begin{bmatrix}
\cdots & V_{K-1/2} & \zeta_K & V_{K+1/2} & \zeta_{K+1} & V_{K+3/2} & \zeta_{K+2} & V_{K+5/2} & \cdots & V_{L-3/2} & \zeta_{L-1} & V_{L-1/2} & \zeta_L & V_{L+1/2} & \cdots
\end{bmatrix}^{n+1}
$$

Os quatro tipos de condições de contorno para uma coluna são:

	Condição de contorno	
Tipo	início	fim
1	V	V
2	V	ζ
3	ζ	V
4	ζ	ζ

As matrizes dos quatro sistemas de equações, particularizados para os quatro tipos de condições de contorno que uma coluna pode ter, são mostradas nas páginas seguintes.

Definida a forma das matrizes tridiagonais para cada tipo de contorno de linha ou de coluna, a mecânica de solução do escoamento em um intervalo de tempo resolve as matrizes, como já foi indicado no início deste capítulo, de modo a proporcionar uma "varredura" no plano de cálculo. No primeiro semi-intervalo de tempo, as matrizes tridiagonais correspondentes às linhas são resolvidas sucessivamente, uma a uma. No segundo semi-intervalo é a vez das matrizes tridiagonais das colunas serem resolvidas, também uma a uma. Ao final de cada intervalo de tempo resulta então um campo de velocidades "U" e "V" e outro de níveis "ζ".

A resolução individual de uma matriz tridiagonal, is to é, de um sistema de equações lineares tridiagonal é comumente resolvida pelo método de eliminação de Gauss. No programa computacional do modelo bidimensional objeto desta dissertação utilizou-se o algoritmo de Thomas.

SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA COLUNA COM CONTORNO "VELOCIDADE-VELOCIDADE"

MATRIZ **A**

$$
\begin{bmatrix}
1 & r_{K+1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-r_K & r'_{K+1/2} & r_{K+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -r_{K+1/2} & 1 & r_{K+3/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -r_{K+1} & r'_{K+3/2} & r_{K+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -r_{K+3/2} & 1 & r_{K+5/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r_{L-3/2} & 1 & r_{L-1/2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r_{L-1} & r'_{L-1/2} & r_L \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -r_{L+1/2} & 1
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **B**

$$
\begin{bmatrix}
A_J^{n+1/2} + r_{J+1/2}\, U_{J-1/2}^{n+1} \\
B_{K+1/2}^{n+1/2} \\
A_{K+1}^{n+1/2} \\
B_{K+3/2}^{n+1/2} \\
A_{K+2}^{n+1/2} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
A_{L-1}^{n+1/2} \\
B_{L-1/2}^{n+1/2} \\
A_L^{n+1/2} - r_{L+1/2}\, U_{L+1/2}^{n+1}
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **X**

$$
\begin{bmatrix}
\xi_K & V_{K+1/2} & \xi_{K+1} & V_{K+3/2} & \xi_{K+2} & V_{K+5/2} & \cdots & V_{L-3/2} & \xi_{L-1} & V_{L-1/2} & \xi_L
\end{bmatrix}^{n+1}
$$

$$
\text{CONDIÇÕES DE CONTORNO} \quad \begin{cases} \text{ESQ} \rightarrow V_{K-1/2}^{n+1} \\ \text{DIR} \rightarrow V_{L+1/2}^{n+1} \end{cases}
$$

SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA COLUNA COM CONTORNO "VELOCIDADE-NÍVEL"

MATRIZ **A**

$$
\begin{bmatrix}
1 & r_{K+1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-r_K & r'_{K+1/2} & r_{K+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -r_{K+1/2} & 1 & r_{K+3/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -r_{K+1} & r'_{K+3/2} & r_{K+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -r_{K+3/2} & 1 & r_{K+5/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r_{L-3/2} & 1 & r_{L-1/2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r_{L-1} & r'_{L-1/2}
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **B**

$$
\begin{bmatrix}
A_K^{n+1/2} + r_{K-1/2}\, U_{J-1/2}^{n+1} \\
B_{K+1/2}^{n+1/2} \\
A_{K+1}^{n+1/2} \\
B_{K+3/2}^{n+1/2} \\
A_{K+2}^{n+1/2} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
A_{I-1}^{n+1/2} \\
B_{L-1/2}^{n+1/2} - r_L\, U_L^{n+1}
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **X**

$$
\begin{bmatrix}
\zeta_J & V_{K+1/2} & \zeta_{K-1} & V_{K+3/2} & \zeta_{K+2} & V_{K+5/2} & \cdots & V_{L-3/2} & \zeta_{L-1} & V_{L-1/2}
\end{bmatrix}^{n+1}
$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO $\begin{cases} \text{ESQ} \rightarrow V_{K-1/2}^{n+1} \\ \text{DIR} \rightarrow \zeta_L^{n+1} \end{cases}$

SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA COLUNA COM CONTORNO "NÍVEL-VELOCIDADE"

MATRIZ **A**

$$
\begin{bmatrix}
r'_{K+1/2} & r_{K+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-r_{K+1/2} & 1 & r_{K+3/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -r_{K+1} & r'_{K+3/2} & r_{K+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -r_{K+3/2} & 1 & r_{K+5/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r_{I-3/2} & 1 & r_{I-1/2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r_{I-1} & r'_{I-1/2} & r_I \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -r_{I-1/2} & 1
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ B

$$
\begin{bmatrix}
B^{n+1/2}_{K+1/2} + r_K\, U^{n+1}_K \\
A^{n+1/2}_{K+1} \\
B^{n+1/2}_{K+3/2} \\
A^{n+1/2}_{K+2} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
A^{n+1/2}_{L-1} \\
B^{n+1/2}_{L-1/2} \\
A^{n+1/2}_{L} - r_{L+1/2}\, U^{n+1}_{L+1/2}
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **X**

$$
\begin{bmatrix}
V_{K+1/2} & \zeta_{K+1} & V_{K+3/2} & \zeta_{K+2} & V_{K+5/2} & \cdots & V_{L-3/2} & \zeta_{L-1} & V_{L-1/2} & \zeta_L
\end{bmatrix}^{n+1}
$$

$$
\text{CONDIÇÕES DE CONTORNO}
\begin{cases}
\text{ESQ} \rightarrow \zeta^{n+1}_{K} \\
\text{DIR} \rightarrow V^{n+1}_{L-1/2}
\end{cases}
$$

SIETEMA DE EQUAÇÕES PARA COLUNA COM CONTORNO "NÍVEL-NÍVEL"

MATRIZ **A**

$$
\begin{bmatrix}
r_{K+1/2} & r_{K+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-r_{K+1/2} & 1 & r_{K+3/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -r_{K+1} & r'_{K+3/2} & r_{K+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -r_{K+3/2} & 1 & r_{K+5/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r_{L-3/2} & 1 & r_{L-1/2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r_{L-1} & r'_{L-1/2}
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **B**

$$
\begin{bmatrix}
B^{n+1/2}_{K+1/2} + r_K U^{n+1}_K \\
A^{n+1/2}_{K+1} \\
B^{n+1/2}_{K+3/2} \\
A^{n+1/2}_{K+2} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
A^{n+1/2}_{L-1} \\
B^{n}_{L-1/2} - r_L U^{n+1}_L
\end{bmatrix}
$$

MATRIZ **X**

$$
\begin{bmatrix} V_{K+1/2} & \zeta_{K+1} & V_{K+3/2} & \zeta_{K+2} & V_{K+5/2} & \cdots & V_{L-3/2} & \zeta_{L-1} & V_{L-1/2} \end{bmatrix}^{n+1}
$$

$$
\text{CONDIÇÕES DE CONTORNO} \begin{cases} \text{ESQ} \rightarrow \zeta^{n+1}_K \\ \text{DIR} \rightarrow \zeta^{n+1}_L \end{cases}
$$

V.5 — EFEITOS DA DISCRETIZAÇÃO NUMÉRICA

A avaliação de um esquema numérico de um modelo matemático é realizada com a análise comparativa entre as equações diferenciais originais e as correspondentes equações do esquema numérico, envolvendo aspectos de consistência, convergência, estabilidade e acuracidade. Nos esquemas em diferenças finitas as equações numéricas são equações algébricas de diferenças decorrentes da discretização espacial e temporal.

A diferença entre equações diferenciais e equações de diferenças, com intervalos de tempo e espaço tendendo a zero, traduz um problema de **consistência**. Uma equação de diferenças é consistente com uma equação diferencial se o erro de truncamento (diferença entre a equação diferencial e a equação de diferenças) tende a zero quando os intervalos de tempo e espaço também seguem esta mesma tendência.

O erro de truncamento presente nas equações de diferenças é responsável pelas discrepâncias encontradas entre as soluções exatas das equações diferenciais e as soluções exatas das respectivas equações de diferenças. Estas discrepâncias, também chamadas de erros de truncamento (ou de discretização) das soluções, constituem um problema de **convergência**. Mesmo pa ra equações consistentes o problema de convergência das soluções existe, em maior ou menor grau, porque o erro de truncamento faz parte das equações de diferenças. É considerada convergente a equação de diferenças que tiver solução tendendo para a solução da equação diferencial respectiva, quando os intervalos de tempo e espaço da discretização tendem a zero.

A solução de equações de diferenças de um esquema numérico envolve sempre algum processo numérico de cálculo. A diferença encontrada entre a solução numérica e a solução exata de uma equação de diferenças, o erro numérico, geralmente ocorre por falhas de arredondamento introduzidas pelos cálculos digitais em computador. Os erros numéricos constituem-se em uma fonte de perturbações que podem, assim como outras causas, provocar instabilidades no desenvolvimento dos cálculos.

A análise de **estabilidade** numérica preocupa-se em estabelecer condições sob as quais as perturbações de qualquer natureza, introduzidas nos cálculos, não se amplificam. Quando os erros se amplificam no decorrer do tempo as soluções tornam-se precárias e os cálculos podem ser interrompidos devido às grandes oscilações. As condições de estabilidade variam de esquema para esquema, mas, em geral, os esquemas de diferenças finitas implícitos estão sujeitos a condições menos rigorosas que os explícitos. Estas condições envolvem relações entre os intervalos de tempo e espaço e características de ondas propagadas.

Para um esquema numérico, se as equações de diferenças são consistentes e as soluções numéricas são estáveis, geralmente estas são também convergentes (Lax & Richtmeyer, 1956, ref. 40). Com isso a análise de convergência torna-se dispensável.

O efeito global dos aspectos relativos a um esquema numérico, de consistência, convergência e estabilidade, pode ser avaliado através de um exame da precisão do esquema. A precisão é medida pela diferença entre a solução exata da equação diferencial e a solução numérica da equação de diferenças, abrangendo, por isso, o problema da convergência. Entretanto, os indicadores numéricos de avaliação de esquemas numéricos geralmente têm origem na análise de estabilidade. Estes indicadores resumem aspectos da discretização espacial e temporal e das características do escoamento e servem para orientar a aplicação prática dos modelos matemáticos numéricos. No caso de modelos matemáticos com esquemas implícitos esta orientação, muitas vezes, diz respeito somente à busca de melhor precisão para as soluções porque as condições exigidas para uma precisão razoável geralmente são mais rigorosas do que as requeridas pela estabilidade numérica. Os esquemas implícitos podem ser estáveis e, ao mesmo tempo, imprecisos.

A investigação da estabilidade e precisão de esquemas numéricos pode ser realizada pela **análise teórica** ou por **testes práticos**. Na verdade, ambos são complementares. A análise teórica de estabilidade e precisão numéricas só é possível quando as equações diferenciais do modelo são lineares. Quando há termos não lineares nas equações o modelo deve, com mais razão, ser testado na prática, seguindo, entretanto, orientação baseada em resultados obtidos teoricamente com esquemas análogos de equações lineares. Leendertse (1967) realizou os dois tipos de investigação e fim de avaliar os efeitos da discretização numérica do esquema ADI por ele adaptado ao escoamento bidimensional com superfície livre.

Ao adotar um esquema numérico do tipo ADI, Leendertse (1967) procurou uma representação em diferenças finitas mais precisa e estável possível que tivesse maior economia no tempo de cálculo. A economia de tempo foi obtida com a adaptação da filosofia do método ADI à malha de Platzman (1959) e com a formulação de equações de diferenças que resultassem em sistemas lineares de equações com matrizes tridiagonais associadas individualmente a linhas ou colunas da malha. Sistemas lineares com matrizes tridiagonais têm rápida solução computacional. A maior precisão, por sua vez, foi prevenida com a adoção de formas, o máximo possível, centradas no tempo e no espaço, tendo em vista, entretanto, as restrições impostas pelo objetivo de chegar a sistemas tridiagonais lineares. Como resultado, todos os termos das equações de diferenças estão centrados no espaço mas não estão perfeitamente centrados no tempo os termos convectivos (termos de inércia não lineares) e os termos de rugosidade (que também são não lineares) das equações dinâmicas.

Os termos convectivos são bastante importantes na reprodução do campo de velocidades, mas se não forem convenientemente discretizados constituem-se em fonte de instabilidades nos esquemas numéricos. Os termos convectivos transferem energia das maiores para as menores escalas espaciais, na chamada "cascata de energia" (cap. II), e a malha numérica discreta, não permitindo reproduzir este fenômeno em escalas da ordem de grandeza das células, provoca instabilidades na solução por acúmulo de energia. Segundo Phillips (1959) a transferência de energia é bruscamente interrompida na escala equivalente a duas células da malha o que equivale à distância "ΔX" (ou Δy) da malha empregada por Leendertse (1967). Mais especificamente, as instabilidades são geradas pelo acúmulo de energia das ondas com comprimento de onda iguais ou menores que esta escala de "corte" dada por Phillips (1959). Ondas com tais características não podem ser propagadas pela malha, perturbando o escoamento das maiores escalas espaciais. Tais perturbações podem entretanto, ser amenizadas e controladas por processos de dissipação de energia nas escalas espaciais menores. Leendertse (1967) abordou este problema embutindo na discretização numérica dos termos convectivos um "filtro numérico", um dos meios possíveis, segundo Ramming e Kowalik (1981), de dissipação de energia de fontes instabilizadoras. Desta forma o filtro numérico empregado por Leendertse é capaz de amenizar também instabilidades com origem até no contorno irregular do fundo. É interessante ressaltar, ainda, que a dissipação de energia com origem na discretização espacial e temporal é uma característica freqüente dos esquemas numéricos. Como a identificação precisa da origem de tal dissipação é difícil, ou mesmo impossível, genericamente a causa é referida como "viscosidade numérica". A viscosidade numérica pode ser entendida como o resultado da atuação de inúmeros filtros numéricos embutidos não intencionalmente nas equações. Por isso é um assunto complexo, conforme pode ser visto em Roache (1972).

Quanto à representação do termo de rugosidade (atrito com o fundo) que é não linear a análise de Leendertse(1967) foi inconclusiva porque sua atuação é bastante peculiar, podendo ser fonte de instabilidades e, ao mesmo tempo, ser um termo estabilizador. Desta forma não é possível estabelecer com certeza uma discretização que seja melhor que as outras.

Estas considerações sobre as representações numéricas dos termos não lineares são importantes porque as análises teóricas fornecem resultados somente para equações sem termos não lineares. Os possíveis efeitos, mesmo sendo qualitativos e individuais, dos termos não lineares é que vão balisar a importância dos resultados obtidos de análises teóricas com equações lineares.

A análise teórica dos efeitos da discretização numérica realizada por Leendertse (1967) baseou-se inicialmente em esquemas numéricos de diferenças finitas explícitas e implícitas de sistemas lineares unidimensionais. A avaliação da estabilidade numérica seguiu a metodologia de Von Neumann e a acuracidade foi analisada segundo avaliação de **deformação de onda.** A análise de deformação de onda, idealizada por Leendertse (1967), introduz o conceito de **fator de propagação** como a razão complexa da amplitude e fase da onda propagada numericamente em relação à onda física, no tempo necessário para que a on da física percorra um comprimento de onda. O **módulo** desta razão mede a relação entre as amplitudes enquanto que o **argumento** mede o defasamento entre as ondas. O defasamento tem estreita relação com a razão das celeridades das ondas calculada e física.

A análise de esquemas implícitos incondicionalmente estáveis para um sistema de equações lineares unidimensionais, sem termo de rugosidade, com respeito à deformação de onda, fornece como resultado que, para o esquema centrado, a amplitude da onda calculada é conservada e, para o esquema progressivo, há um decaimento com o passar do tempo. Com respeito às celeridades, ambos os esquemas atrasam a onda, isto é, as ondas calculadas são propagadas com celeridades inferiores à real. A magnitude dos achatamentos (caso só do esquema progressivo) e dos atrasos das ondas (nos dois esquemas) podem ser visualizados nas figuras V.7 e V.9 que foram apresentadas por Leendertse (1967). Estas figuras mostram o grau de deformação de uma onda calculada em função de relação "$\lambda/\Delta X$" (comprimento da onda física simulada pelo tamanho da célula) e do número de Courant $(\Delta t/\Delta x)\sqrt{gh}$, que expressa o número de células da malha de cálculo percorridas em um intervalo de tempo na propagação da onda. Quanto maiores os valores de "$\lambda/\Delta X$" e menores os de "$(\Delta t/\Delta x)\sqrt{gh}$" melhor é a representação da propagação de onda por modelos numéricos. A orientação principal destes gráficos de deformação de ondas é que para valores de "$\lambda/\Delta X$" menores que 10, a onda será pobremente representada mesmo para números de Courant menores que a unidade.

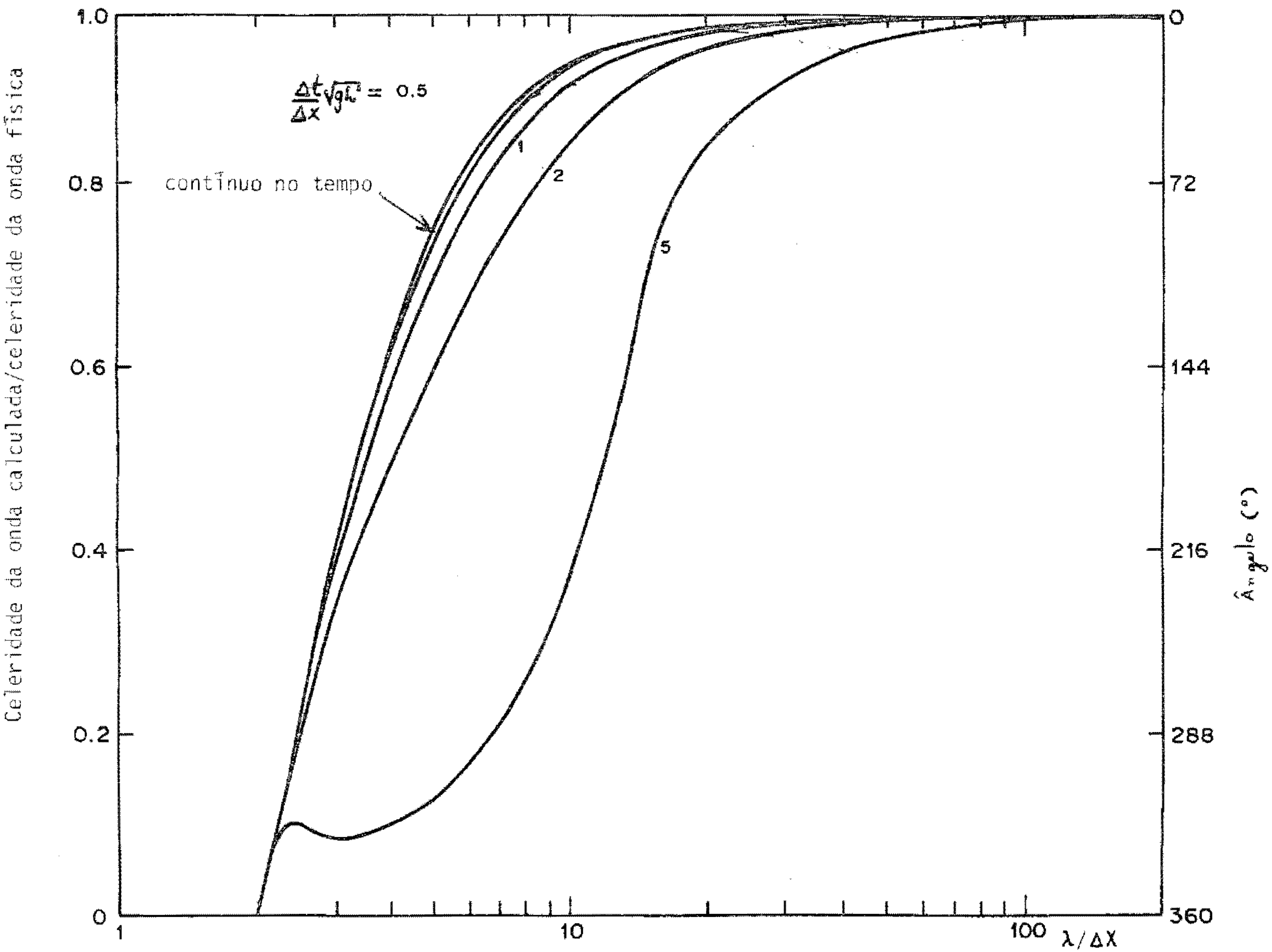

Figura V.7 — Deformação de onda no esquema centrado implícito (Leendertse, 1967)

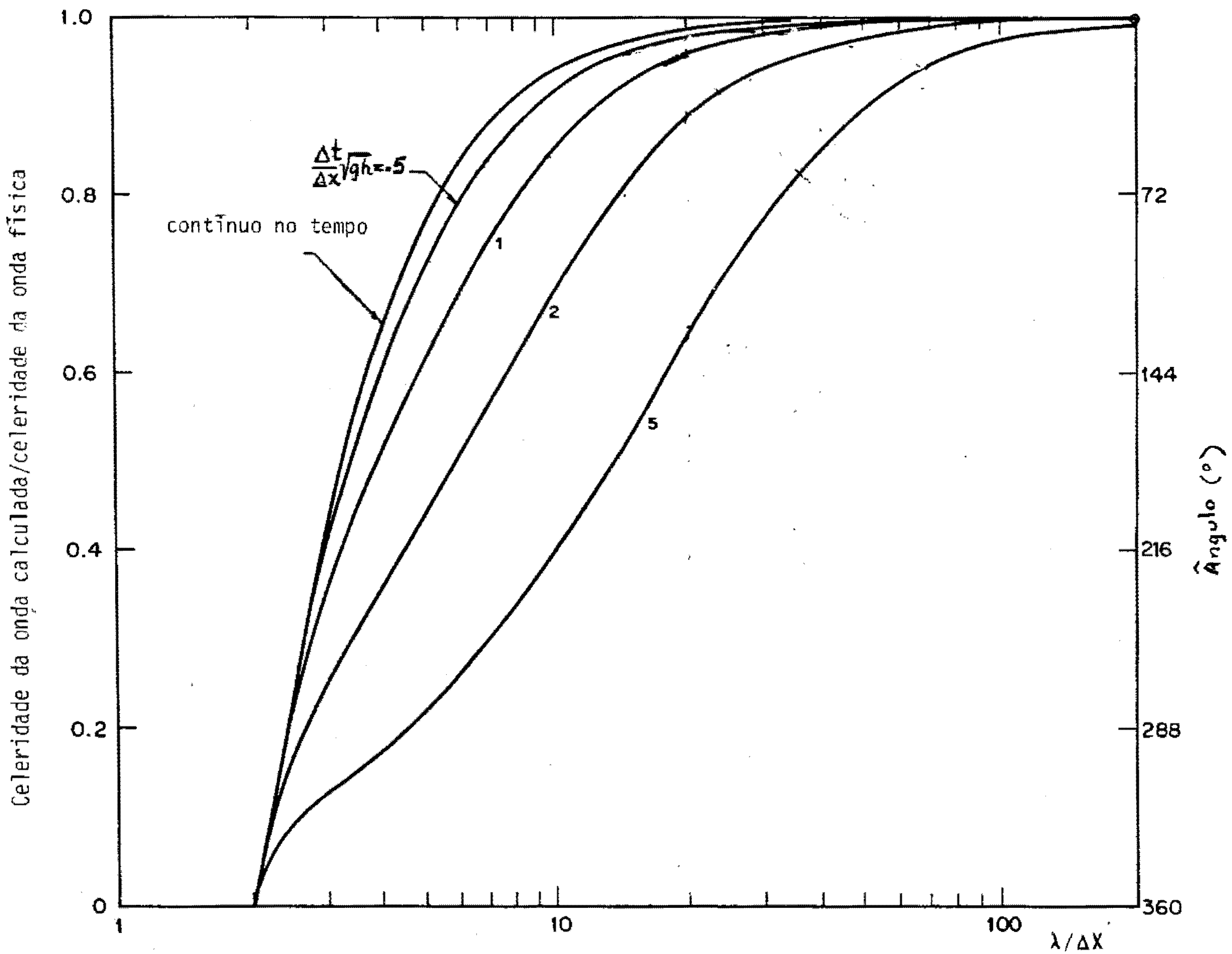

Figura V.8 — Defasamento de onda no esquema progressivo implícito (leendertse, 1967)

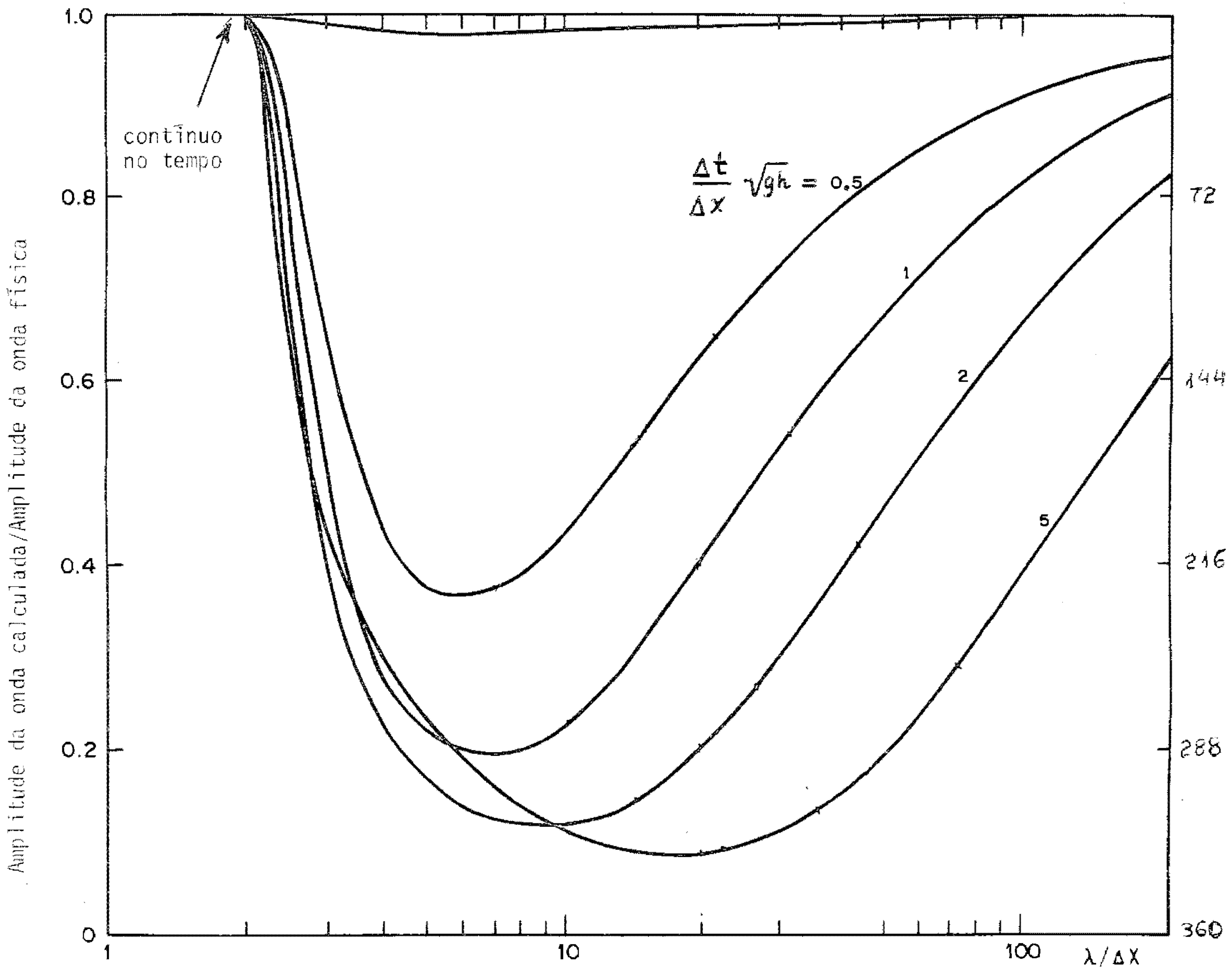

Figura V.9 — Achatamento de onda no esquema progressivo implícito (leendertse, 1967)

Por outro lado, quando a representação espacial da onda é mais precisa ($\lambda/\Delta X$ maior que 50) não há atraso significativo da onda calculada, mesmo para números de Courant altos da ordem de cinco. Entretanto, não há garantias com relação à conservação da amplitude (caso do esquema progressivo). É interessante constatar nas figuras que a celeridade das ondas calculadas é zero para $\lambda \leq 2\Delta X$.

Com a introdução de um termo linear de rugosidade na equação dinâmica, a análise de deformação de ondas, com os mesmos esquemas numéricos, fornece resultados significativamente diferentes dos anteriores. O esquema centrado que não provocava alterações na amplitude da onda, por exemplo, passa a aumentar a amplitude (figuras V.10 e V.11). Esta amplificação é bastante significativa para números de Courant maiores que cinco e "$\lambda/\Delta X$" menores que 100. Leendertse (1967) constatou também que o ajuste do coeficiente de rugosidade linear para que a onda calculada não tenha a amplitude alterada e nem se atrase, é impossível. Assim, uma onda calculada, com celeridade ajustada igual a da onda física que quer representar, terá forçosamente sua amplitude aumentada.

A extensão da análise de deformação de onda ao caso bidimensional é bastante complexa pela infinidade de direções que os vetores de velocidade podem assumir no plano horizontal. Afim de contornar este problema matemático admite-se como indicativos válidos para o caso bidimensional, os resultados obti-

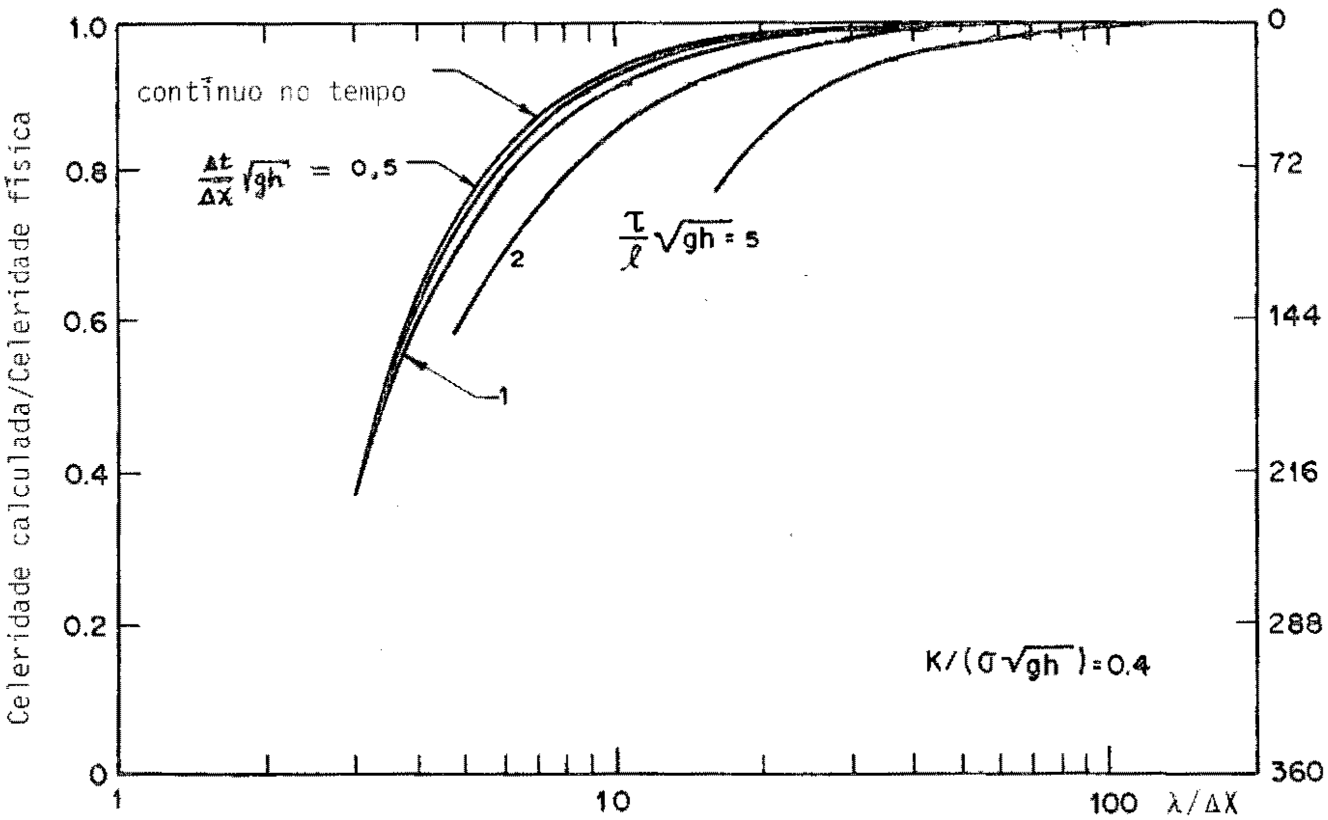

Figura V.10 — Defasamento no esquema centrado implícito com rugosidade linear (Leendertse, 1967)

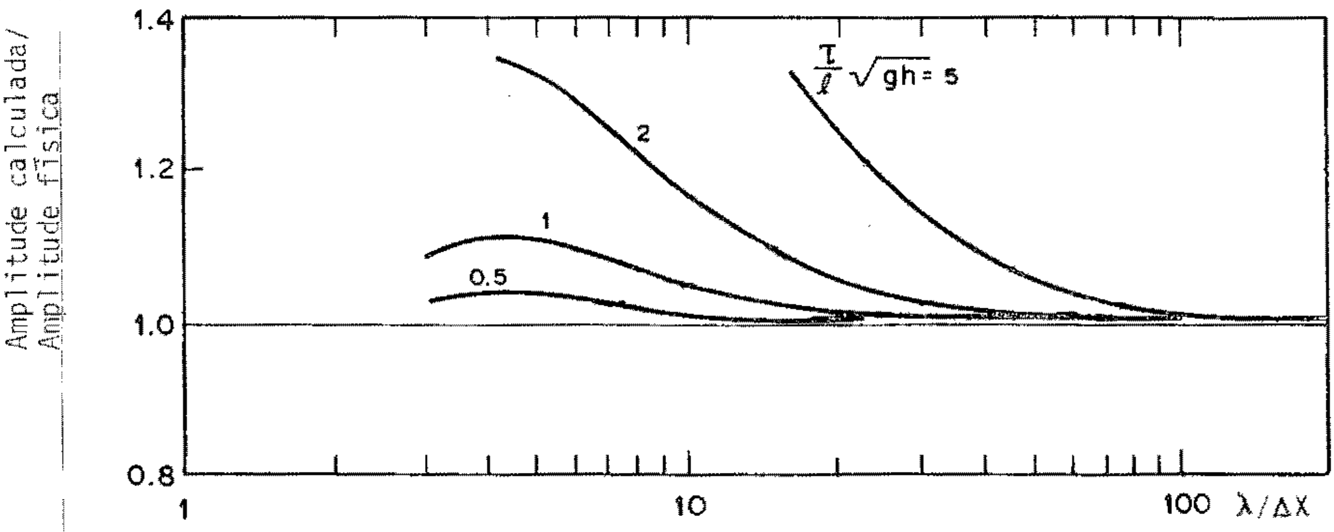

Figura V.11 — Amplificação de onda no esquema centrado implícito com rugosidade linear (Leendertse, 1967)

V.6 — DADOS DE ENTRADA E SAÍDA DO MODELO COMPUTACIONAL

Para a utilização prática do modelo bidimensional descrito neste capítulo foi desenvolvido um programa computacional na linguagem FORTRAN, adaptado ao computador Burroughs B6700 da UFRGS. O programa encontra-se gravado em fita magnética.

Os dados de entrada que o modelo bidimensional necessita são divididos em duas categorias: dados fixos e dados de evento. Os dados fixos são aqueles referentes à geometria tridimensional do leito do corpo d'água em estudo, isto é, a sua forma e localização em planta e as profundidades relativas a um plano de referência. Os dados de evento, como o próprio nome deixa implícito, constituem-se nas condições de contorno de um determinado evento, que são níveis e/ou velocidades, em pontos definidos, e ventos agindo na superfície livre.

Na forma como foi concebido o modelo o primeiro passo para promover a simulação de escoamentos de um corpo d'água bidimensional é a adaptação de uma malha com células retangulares (item V.2) que o abranja na sua totalidade em planta. Os lados "ΔX" e "Δy" das células quanto menores melhor representam os contornos (bordas), mas a definição dos tamanhos é realizada, geralmente, mais em função da memória disponível dos computadores do que em função de considerações relativas a acuracidade e precisão dos resultados. De uma maneira geral, entretanto, deve-se procurar um tamanho de quadrícula que, além de bem representar o contorno físico, seja capaz de proporcionar correntes compatíveis com os dados de campo disponíveis e com a utilização posterior em planejamento. Como precaução às distorções numéricas as células devem ter lados com menos de 20% (item V.5) dos comprimentos de ondas paralelas típicas.

A malha de cálculo que abrange o corpo d'água tem sempre a forma retangular, por razões computacionais. Por isso, na representação de corpos d'água com contorno irregular, várias quadrículas não terão qualquer cálculo desenvolvido sobre elas. No "desenho" do contorno geral a malha de cálculo deve ser ajustada compatibilizando o fato de que as quadrículas são definidas por apenas dois dos quatro lados (item V.2). A conjunção dos contornos individuais de todas as quadrículas é que forma o contorno geral do corpo d'água. No modelo, um vetor unidimensional com os códigos das quadrículas define este contorno.

Para direcionamento do cálculo em uma malha retangular com um contorno irregular definido em seu interior o modelo computacional faz uso de sub-linhas e sub-colunas. Uma sub-linha/sub-coluna de cálculo é um trecho de linha/coluna em cujos extremos há quadrículas com condições de contorno pré-estabelecidas. Desta forma uma linha/coluna geral da malha pode conter várias sub-linhas/sub-colunas de cálculo. É a cada sub-linha e sub-coluna, portanto, que vai corresponder um sistema de equações e respectiva matriz tridiagonal para solucionar, em cada intervalo de tempo (item V.4). Por isso, as sub-linhas e sub-colunas são individualmente identificadas conforme a localização na malha geral. Os vetores de identificação das sub-linhas e sub-colunas em conjunto com o vetor dos códigos de contorno de todas as quadrículas da malha esgotam a representação horizontal do corpo d'água.

Após adaptada a malha horizontal de cálculo devem ser definidos os dados verticais: as profundidades. Na cartografia a forma em planta de um corpo d'água é ditada por um espelho d'água cuja cota geralmente é a referência zero para definição das profundidades. A cota do espelho d'água é única se ele for horizontal, isto é, se as perpendiculares em todos os pontos são paralelos ao eixo da aceleração da gravidade nestes mesmos pontos. Para o modelo bidimensional, o plano de referência é, por facilidade, freqüentemente coincidente com o plano horizontal de referência zero (para as profundidades) na cartografia disponível.

Na malha de cálculo os valores das profundidades são locados nos cantos superiores direitos das quadrículas (item V.2). Estes valores devem ser obtidos por interpolação, considerando a área de influência de cada valor que é uma quadrícula. A entrada dos dados de profundidade obtidos é feita, para o modelo desenvolvido, através de um vetor ("array" unidimensional).

Com respeito à orientação da malha de cálculo como um todo os dados necessários são a latitude média e a orientação (ângulo sentido horário) relativa ao norte geográfico. São estes dados que permitem o cálculo do coeficiente de Cariolis (cap. II) e a decomposição do vetor velocidade do vento segundo os eixos horizontais "XOY" da malha.

Os pontos onde as condições de contorno de níveis e/ou velocidades (dados eventuais) se fazem presentes são definidos em conjunto com a adaptação da malha de cálculo. A identificação das sub-linhas e sub-colunas condições de contorno é realizada da mesma forma que as sub-linhas e sub-colunas normais. A diferença é que às quadrículas das sub-linhas e sub-colunas condições de contorno são alocados, em cada intervalo de tempo de cálculo, valores conhecidos de velocidade, ou nível, conforme for a opção e o evento.

É interessante ressaltar que, respeitados os limites de memória disponível em computador, tempo de processamento e condições físicas do problema, a forma de representação do leito do corpo d'água no modelo computacional permite reproduzir qualquer recorte em planta e qualquer comunicação com sistemas externos (condições de contorno). É possível a representação de ilhas, estirões e outras conformações compatíveis com a escala espacial da malha. A limitação que persiste é a imutabilidade do recorte, não havendo reprodução de possíveis alagamentos das margens.

Além das variáveis velocidade e nível condições de contorno, a outra variável do tipo eventual é o vetor velocidade do vento que é considerada no modelo como variável concen -

trada. Desta forma, a cada intervalo de tempo, há apenas um vetor velocidade do vento agindo em todo o plano de cálculo. No modelo computacional desenvolvido os dados de vento são representados por velocidades e respectivos sentidos de destino (ângulos em relação ao norte geográfico, sentido horário). Um vento na direção oeste-leste tem ângulo de 90^0 por este critério.

Os dados básicos de saída previstos no programa computacional e que permitem avaliar o ajuste e desempenho do modelo bidimensional são os valores de nível e das componentes de velocidade em todas as quadrículas de cálculo do corpo d'água, em cada intervalo de tempo. Os vetores velocidade em cada quadrícula podem ser visualizados com a opção de impressão, via impressora comum, de um mapa de correntes onde aparece também o contorno do corpo d'água.

O modelo também tem opções de cálculo de trajetórias de partículas de fluido situadas inicialmente em qualquer quadrícula e intervalo de tempo. Da mesma forma estão previstas opções de cálculo de vazões em qualquer seção previamente identificada.

V.7 — PARÂMETROS DE AJUSTE DO MODELO COMPUTACIONAL

Os parâmetros de ajuste do modelo computacional são definidos em função da formulação empregada para os termos de atrito das equações bidimensionais (cap. IV). Nas equações apresentadas os termos de atrito compreendem os fenômenos de arraste da superfície livre pela ação dos ventos e de resistência ao escoamento oferecida pela superfície do leito e pelo próprio fluido.

A formulação da força de arrasto devido ao vento tem origem em fórmula geral da Mecânica dos Fluidos. Por unidade de área, é dada por:

$$\vec{W} = \rho_a \, C_{10} \, | \vec{V}_{10} | \, \vec{V}_{10}$$

onde ρ_a = massa específica do ar ($\simeq$ 1,205 Kg/m³)

$\vec{V}_{10}$ = vetor velocidade do vento 10 m acima da superfície livre

C_{10} = coeficiente de arrasto (adimensional)

As componentes "W_x" e "W_y" segundo os eixos da malha de cálculo estão presentes nas equações do item V.3. Na solução por linhas e colunas do esquema multioperacional (item V.4) a componente "W_x" deve ser definida no primeiro semi-intervalo de tempo e a componente "W_y", no segundo semi-intervalo. As expressão destas componentes são:

$$W_x = \rho_a \, C_{10} \, | \vec{V}_{10} |^2 \operatorname{sen} \Theta \quad \text{e}$$

$$W_y = \rho_a \, C_{10} \, | \vec{V}_{10} |^2 \cos \Theta$$

com $\Theta = \Theta_W - \Theta_M$

onde Θ = ângulo do vetor velocidade do vento em relação ao eixo OY da malha de cálculo, sentido horário

Θ_W = análogo ao anterior mas em relação ao norte geográfico

Θ_M = ângulo do eixo OY da malha de cálculo em relação ao norte geográfico, sentido horário.

A velocidade "$\vec{V}_{10}$" do vento é padronizada, sendo medida a 10 m de altura acima da superfície livre para evitar perturbações de camada limite. Sendo conhecido o vento e a massa específica do ar a força de arrasto calculada é dependente do coeficiente de arrasto "C_{10}" admitido. O coeficiente "C_{10}" é, portanto, um parâmetro de ajuste para o atrito do vento com a superfície livre. Entretanto não é usual a variação deste coeficiente para calibração do modelo a determinado evento porque sua sensibilidade é bem menor que a de coeficientes de atrito com o fundo.

A expressão para o coeficiente de arrasto "C_{10}" no modelo bidimensional apresentado neste capítulo foi apresentada por Ramming e Kowalik (1981) e é devida a Garrat. Foi escolhida por ser proveniente de ampla pesquisa em oceanos e apresentar uma relação de dependência com a velocidade do vento. É dada por:

$$C_{10} = (0{,}75 + 0{,}067 \mid \vec{V}_{10} \mid)/1000; \; \bar{V}_{10} \text{ em m/s.}$$

As tensões de atrito lateral e de atrito com o fundo nas equações de item V.3 contêm respectivamente os coeficientes "ε" e "C". Para uso no modelo as expressões destes coeficientes foram definidas com base no "perfil turbulento" de velocidades de Prandtl. Com o perfil de Prandtl admitido tais expressões envolvem relações com profundidades e velocidades (caso específico do coeficiente de atrito lateral). Desta forma consegue-se coeficientes variáveis no tempo e no espaço, que é um comportamento mais próxima da realidade. Deve-se alertar, entretanto, que expressões baseadas no perfil de Prandtl estão sujeitas às mesmas restrições de generalização da teoria desenvolvida por tal autor. Na verdade, a variabilidade espacial e temporal obtida para os coeficientes de atrito lateral e com o fundo é uma decorrência matemática da aplicação da teoria de Prandtl a escoamentos não permanentes nos diversos pontos do plano de cálculo. Isto é, os coeficientes são calculados ponto a ponto, independentemente, em função apenas de grandezas locais, variáveis no tempo.

As expressões, acima referidas, para os coeficientes de atrito lateral e de atrito com o fundo (coeficiente de Chèzy) são as seguintes(ref.16):

$$\varepsilon = \frac{\rho K}{6C} \sqrt{g} \; \sqrt{U^2 + V^2} \; H \text{ (coef. de atrito lateral)}$$

$$C = \frac{\sqrt{g}}{K} \left(\ell n \frac{H}{z_o} - 1 \right) \quad \text{(coef. de Chèzy)}$$

onde as grandezas ainda não definidas neste capítulo são:

K = parâmetro de Von Karman

z_o = parâmetro de Prandtl

Para inclusão nas equações em diferenças finitas (item V.3) foram utilizadas as seguintes expressões:

Primeiro semi-intervalo de tempo (n, n + 1/2)

$$\varepsilon = \frac{K}{6C} \sqrt{g} \left[\left(U^{n-1/2}_{j+1/2,k} + \bar{\bar{V}}^2 \right) \right]^{1/2} \left(\bar{\bar{h}}^x + \bar{\bar{\zeta}}^x \right)$$

$$C = \frac{\sqrt{g}}{K} \quad \ell n \left[\left(\left(\bar{\bar{h}}^x + \bar{\zeta}^y \right) / z_o - 1 \right) \right]$$

onde $\quad \bar{\bar{h}}^x = \frac{1}{6} \left(h_{j-1/2,k} + h_{j+1/2,k} + h_{k+3/2,k} + h_{j-1/2,k-1} + h_{j+1/2,k-1} + h_{j+3/2,k-1} \right)$

Segundo semi-intervalo de tempo (n+1/2, n+1)

$$\varepsilon = \frac{\rho K}{6C}\sqrt{g}\left[\bar{\bar{U}}^{2} + \left(V^{n}_{j,k+1/2}\right)^{2}\right]^{1/2}\left(\bar{\bar{h}}^{y} + \bar{\zeta}^{y}\right)$$

$$C = \frac{\sqrt{g}}{K}\left[\ell n\left(\left(\bar{\bar{h}}^{y} + \bar{\zeta}^{y}\right)/z_{o} - 1\right)\right]$$

onde $\bar{\bar{h}}^{y} = \frac{1}{6}\left(h_{j-1/2,k-1} + h_{j-1/2,k} + h_{j-1/3,k+1} +\right.$

$$\left. + h_{j+1/2,k-1} + h_{j+1/2,k} + h_{j+1/3,k+1}\right)$$

As demais variáveis estão definidas no item V.3.

O parâmetro "z_o" é, no perfil turbulento de velocidades de Prandtl, uma medida da ordem de grandeza da espessura da camada limite, isto é, uma medida muito pequena que é afetada pela natureza do fundo.

O parâmetro "K" de Von Karman na teoria de Prandtl é um coeficiente linear adimensional que estipula a dimensão do "comprimento de mistura" em função da proximidade de uma parede rígida (cap. III). O "comprimento de mistura" é um conceito básico na teoria de turbulência de Prandtl e dá uma idéia do grau de turbulência que pode se estabelecer em um determinado ponto do fluido. Para água sem impurezas o valor de "K" é 0,4. Com sedimentos em suspensão este valor diminui.

Estes aspectos relativos à natureza dos coeficientes na teoria original de Prandtl são úteis para o balisamento de suas ordens de grandeza. A utilização destes coeficientes na formulação bidimensional e a posterior discretização numérica podem fazer divergir os valores empiricamente definidos em calibração dos valores medidos, ou definidos teoricamente, sob a ótica da teoria de Prandtl. Convém, portanto, utilizar estes últimos apenas como referência básica para o processo de calibração.

Devido à natureza empírica inerente dos parâmetros "K" e "z_0" do modelo bidimensional é aceitável o procedimento de fixar um valor para um dos parâmetros, deixando apenas o outro como variável de ajuste. Com um único parâmetro conseguem-se ajustes mais rápidos. Naturalmente que, tornar um ou outro parâmetro constante, significa escolher entre duas opções diferentes para formulação dos coeficientes de atrito lateral e atrito com o fundo. O fato destes coeficientes serem mais sensíveis às variações do parâmetro "K" de Von Karman pode ser um indicativo de qual opção escolher.

V.8 — MODELO BIDIMENSIONAL HORIZONTAL COM ESQUEMA DE LEENDERTSE: CONCLUSÕES

Neste capítulo procurou-se descrever em detalhe o processo de construção de um modelo matemático hidrodinâmico bidimensional com o esquema de diferenças finitas de Leendertse (1967), apresentando diversos aspectos conceituais e numéricos que orientam a sua utilização prática.

O esquema multioperacional concebido por Leendertse compatibiliza a malha numérica defasada de Platzman (1959) com um esquema tipo ADI para intencionalmente produzir apenas sistemas tridiagonais lineares para resolver. Desta forma, estando as equações em diferenças finitas centradas no espaço e no tempo (com exceção em relação ao tempo dos termos convectivos e de atrito com o fundo), o esquema numérico resultante é significativamente econômico e estável, sendo, por isso, um dos mais apropriados para representação de escoamentos bidimensionais.

Os aspectos numéricos que merecem destaque no modelo dizem respeito à análise de deformação de ondas idealizada por Leendertse (1967) para sistemas de equações lineares, mas que fornece indicações valiosas para obtenção de respostas mais acuradas, com base em relações entre intervalos de tempo, espaço e comprimento de onda. A presença de termos não lineares (termos convectivos e de atrito com o fundo) nas equações diferenciais e a bidimensionalidade certamente tornam mais complexas as análises de deformação. Entretanto, o caráter implícito e centrado no espaço das equações bidimensionais em diferenças finitas permitem inferir um comportamento aproximado ao de equações lineares, donde provêm indicações quanto a estabilidade e acuracidade.

O programa computacional elaborado na linguagem FORTRAN para o modelo bidimensional tem como características principais a flexibilidade de representação de um "recorte" qualquer do corpo d'água (a forma em planta) e a utilização do perfil turbulento de velocidades de Prandtl para a definição de coeficientes de atrito lateral e com o fundo (coeficiente de Chézy) variáveis no tempo e no espaço. Como parâmetros de ajuste resultam, então, os conhecidos "K" de Von Karman e "z_0" de Prandtl (cap. III), cujos significados físicos, ordem de grandeza e faixas de variação estão bem definidos para muitas situações práticas.

VI — APLICAÇÃO DO MODELO BIDIMENSIONAL AO RIO GUAÍBA

VI.1 — INTRODUÇÃO

O rio Guaíba é um dos mananciais de água doce mais importantes do sistema costeiro lagunar do Rio Grande do Sul, principalmente devido a localização da capital, Porto Alegre, em suas margens.

Na verdade, o "rio" Guaíba é um **lago** que se situa entre o chamado delta do Jacuí e a lagoa dos Patos, o mais extenso corpo d'água do sistema lagunar. O complexo hídrico do delta do Jacuí, situado logo a montante do rio Guaíba, é uma rede de canais naturais formada pela contribuição dos rios Jacuí, Caí, Sinos e Gravataí.

Por ter características eminentemente bidimensionais, o rio Guaíba constitui-se em um corpo d'água onde a aplicação de um modelo bidimensional pode ajudar no conhecimento do seu regime hidrodinâmico. Portanto, a aplicação ao rio Guaíba do modelo bidimensional desenvolvido nos capítulos anteriores, além de servir de exemplo, procura mostrar que esta técnica pode se tornar importante no gerenciamento futuro de suas águas.

VI.2 — ASPECTOS GERAIS DO ESCOAMENTO NO RIO GUAÍBA

O sistema costeiro lagunar a que pertence o rio Guaíba é parte integrante da bacia hidrográfica de Sudeste. A bacia de Sudeste (fig. VI.1) é responsável pela drenagem de cerca de 147.000 Km² do Rio Grande do Sul e 30.000 Km² do Uruguai, estando situada entre os paralelos 50º e 55º oeste e latitudes 28º e 35º sul. O rio Guaíba nesta bacia hidrográfica recebe contribuição dos rios Jacuí, Caí, Sinos e Gravataí que drenam uma área total de 82.000 Km². Aproximadamente 90% desta contribuição provém somente do rio Jacuí.

O rio Guaíba, a lagoa dos Patos e a lagoa Mirim são os corpos d'água bidimensionais que, interligados, formam o sistema costeiro lagunar da bacia de Sudeste (fig. VI.2). O rio Guaíba tem superfície de aproximadamente 468 Km² e profundidade média de 4 m. As lagoas dos Patos e Mirim possuem áreas em torno de 10.000 e 4.200 Km² e profundidades médias da ordem de 7 m. A lagoa dos Patos tem localização intermediária neste sistema, estando ligada ao norte, pelo estreito de Itapoã, ao rio Guaíba, e ao sul está unida, pelo canal de São Gonçalo, à lagoa Mirim.

O regime hidrodinâmico deste sistema lagunar, no qual o Guaíba está inserido, é bastante complexo tanto na época de estiagem como na época de cheias.

No período das cheias, maio a outubro, a lagoa dos Patos recebe em média 3.000 m³/s (ver fig. VI.3) do rio Guaíba,

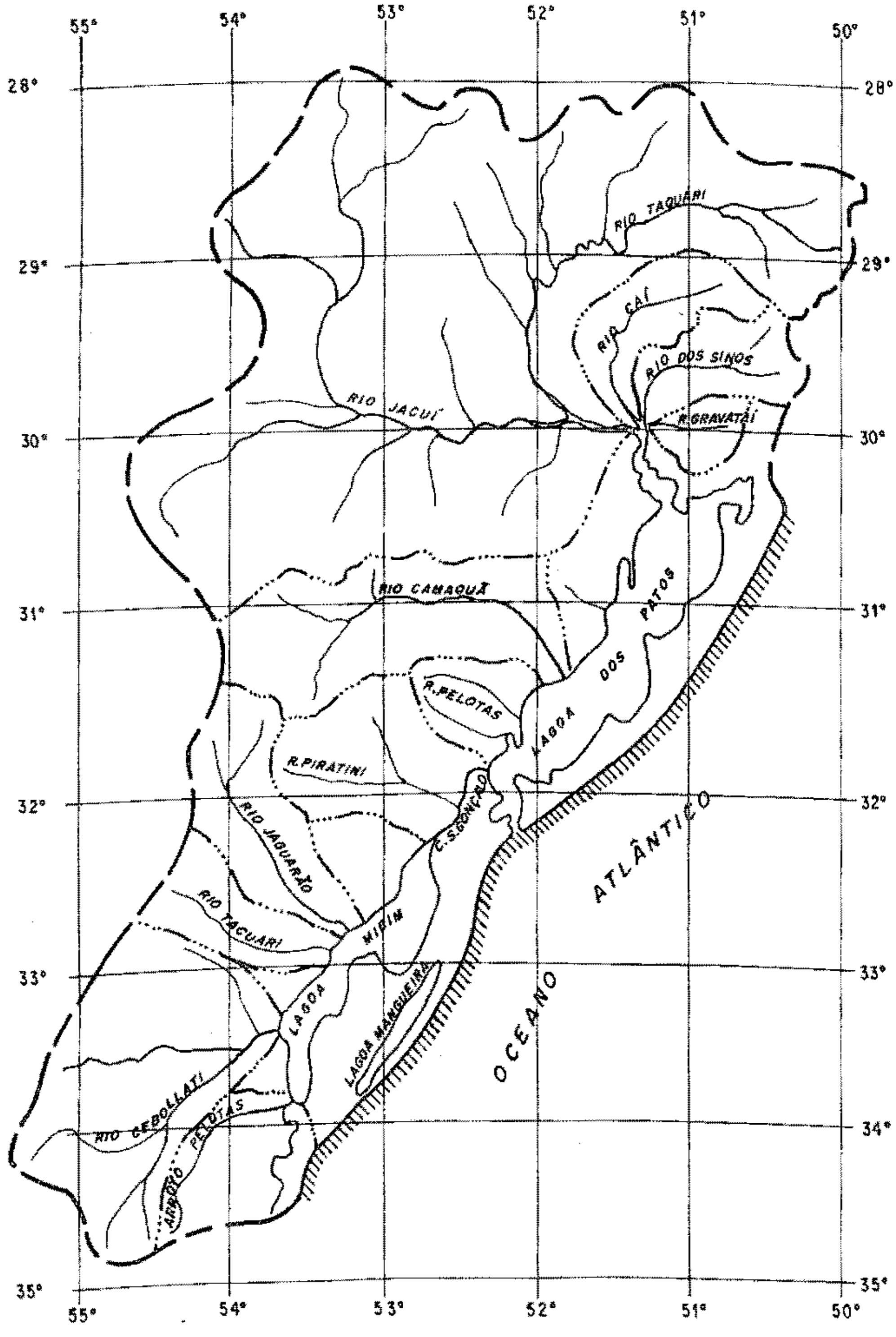

Figura VI.1 — Bacia de sudeste

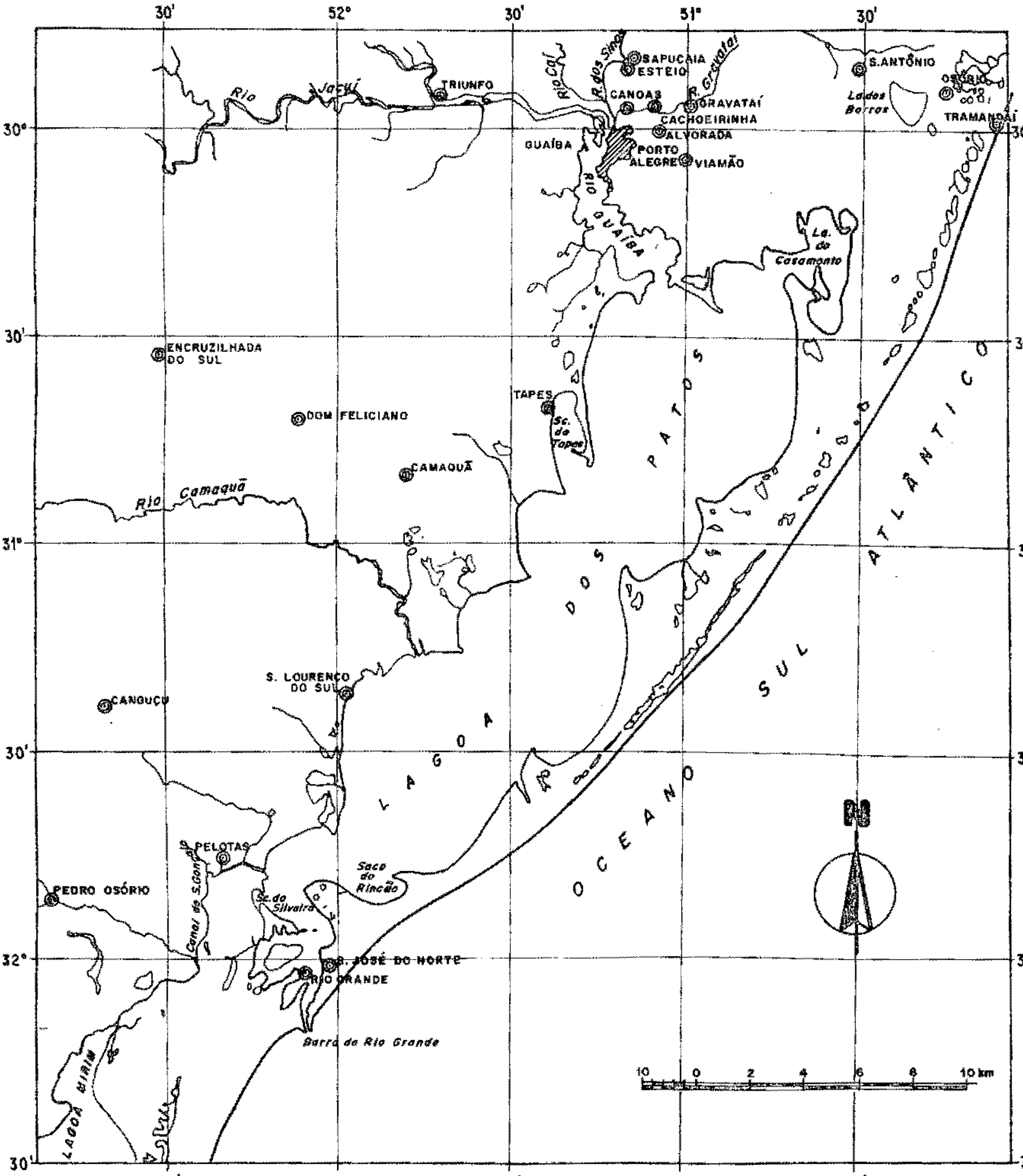

Figura VI.2 — Sistema costeiro lagunar/RS

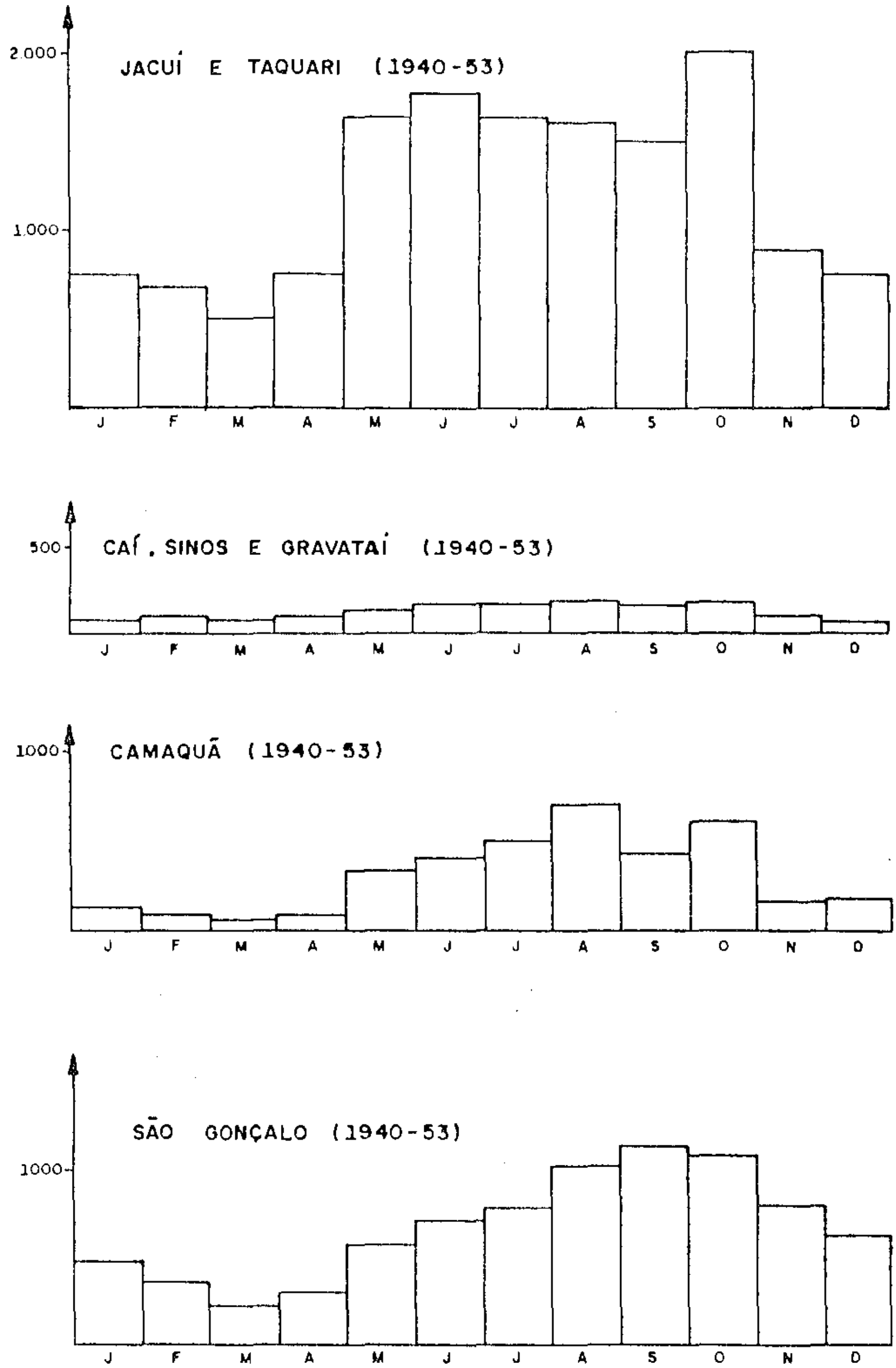

Figura VI.3 — Contribuições médias mensais à Lagoa dos Patos em m³/s (Bordas et alii, 1984) rio Camaquã e canal de São Gonçalo (lagoa Mirim), tendo como única saída para o Atlântico, o canal do Norte. Em certos eventos de cheia o escoamento na parte sul da lagoa dos Patos pode se tornar crítico pelo acúmulo de águas, por represamento, de cheias da lagoa Mirim.

No período de estiagem, novembro a abril, a contribuição média de 800 m^3/s à lagoa dos Patos não deixa transparecer os problemas que podem ocorrer em decorrência do regime hidrodinâmico do sistema lagunar, principalmente no que se refere à possibilidade de salinização de águas das lagoas dos Patos e Mirim e à perturbação da circulação das águas do rio Guaíba (fig. VI.4). Esta perturbação se manifesta, em seu efeito, mais significativamente nos fenômenos localizados de inversão de correntes, onde escoamentos se processam em sentidos diferentes do proporcionado pela gravidade, podendo inclusive atingir o delta do Jacuí e o baixo curso de seus quatro formadores.

Em que pese a ausência de estudos consolidados das relações de causa e efeito dos diversos fatores que intervêm no escoamento do rio Guaíba, as informações disponíveis indicam ser de grande importância a influência exercida pela ação dos ventos. Entretanto, a falta de uma rede suficientemente densa de aparelhos registradores de velocidades e direções dos ventos, ao longo das margens do rio Guaíba e lagoa dos Patos, impede que sejam estabelecidas correlações efetivas entre ventos e níveis d'água observados nas estações linigráficas existentes.

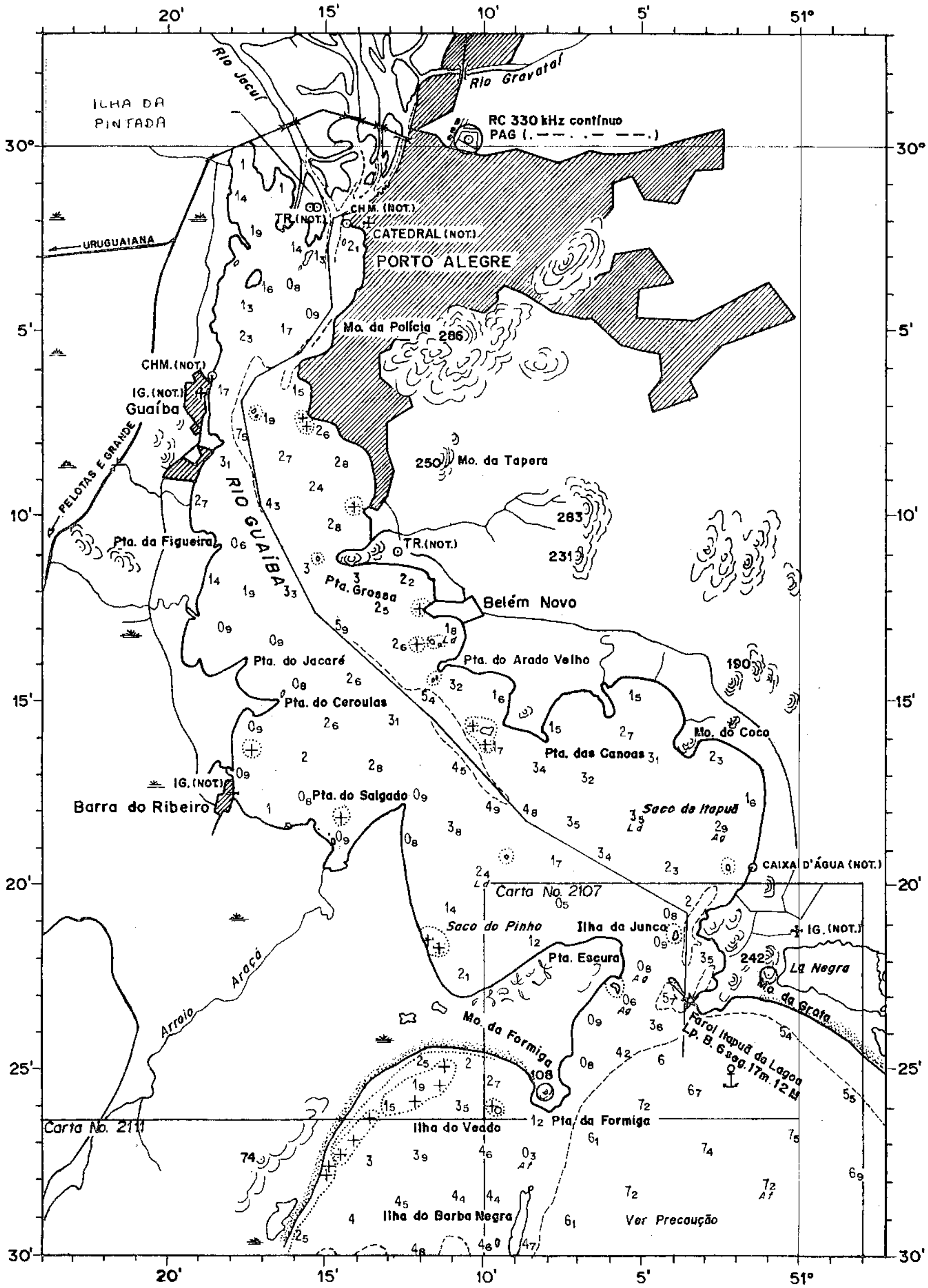

Figura VI.4 — Rio Guaíba

No relatório nº 6 DMAE/IPH (1978), o vento é apresentado como um "fator aleatório" de elevação ou abaixamento dos níveis d'água na seção Ilha da Pintada (Ponta da Cadeia), em contraposição a outro fenômeno que teria características regulares: a "seiche" do Guaíba. Seiche, entendida aqui como oscilação própria, regular, do nível d'água em lagos e baías tem origem, principalmente, meteorológica e sísmica.

No rio Guaíba, a oscilação aproximadamente regular dos níveis com período em torno de 24 horas foi detectada pela primeira vez por Azevedo (1945) em linigramas de um posto limigráfico localizado em Porto Alegre. A existência deste fenômeno, sem dúvida, é um fator significativo na gênese das correntes de escoamento do rio Guaíba. Entretanto, as causas desta "seiche" do Guaíba ainda não foram satisfatoriamente estudadas.

Azevedo (1945) aventou a hipótese de que a causa das oscilações regulares de nível no Guaíba, com 24 horas de período, seria a seiche binodal da lagoa dos Patos (com 7,5 m de profundidade média e 185 Km de extensão) propagada de jusante pelo estreito de Itapoã. Entretanto esta hipótese fica prejudicada porque Azevedo, como observou Rosauro (1982), incorreu em erro ao calcular o período da referida seiche, duplicando o período da seiche uninodal (12 h), quando deveria reduzí-lo a metade. Tentando resgatar a hipótese de Azevedo (1945), Rosauro (1982), com a ajuda de formulário para bacias de geometria simples, deduzido por Chrystal (1905) e reunido por Wilson (1964), sugere que uma seiche de 24 h de período na lagoa dos Patos poderia ser gerada pela seiche uninodal teórica (período entre 16 e 19 h, segundo o referido formulário) "corrigida" pela ação da conformação irregular do leito. Mesmo com a plausibilidade desta hipótese, a caracterização de oscilações de nível no Guaíba como decorrência de seiche da lagoa dos Patos só poderá ser encaminhada com a comprovação efetiva da existência deste fenômeno e de sua regularidade, o que ainda nenhum estudo realizou.

Desta forma, o diagnóstico de causas como a ação direta dos ventos e oscilações do tipo seiche, e a avaliação quantitativa da contribuição isolada, no efeito combinado de um mesmo fenômeno de variação de níveis, devem ser encarados com algum cuidado. No rel. nº 6 DMAE/IPH (1978) este tipo de procedimento foi utilizado para explicar qual parcela da elevação ou abaixamento de níveis d'água na seção Ponta da Cadeia (Ilha da Pintada), em diversos eventos, tem origem na ação dos ventos (estação Ilha Mauá, DEPRC, extinta) ou na "seiche". Na tabela a seguir são apresentados resultados contidos no referido relatório:

Tab. VI.1 — Variações de nível por vento e seiche

EVENTO	DATA	H (cm) PTA CADEIA	VENTO ILHA MAUÁ			AMPLITUDE SEICHE (cm)	H PTA CADEIA POR AÇÃO DO VENTO (cm)
			DIR.	V(Km/h)	DUR. (h)		
1	04/01/77	+ 26	SE	30-50	5	12	14
2	24/01/77	+ 24	SO	20	6	12	12
3	02/02/77	+ 43	SO	>20	5	16	27
4	27/03/77	+ 34	SE	30-50	2	15	19
5	07/04/77	- 66	NE/NO	<20	48	-14	-52
6	15/06/77	+ 40	SE	10-25	3	6	34
7	15/07/77	+ 44	SO	20-30	12	5	39

A sobreposição de variações de nível por ação do vento e seiche somente será aceitável quando for comprovada a incapacidade do vento produzir oscilações próprias e que as oscilações regulares de nível no Guaíba são efetivamente decorrentes de uma oscilação própria da lagoa dos Patos (oscilações próprias com a massa d'água do rio Guaíba teriam, para períodos de 24 h, amplitudes desprezíveis).

Os diversos estudos que se depararam com as variações regulares de nível no rio Guaíba mencionam a hipótese da seiche da lagoa dos Patos se propagando pelo Guaíba, justificando sua provável existência com base nas variações normais diárias da pressão atmosférica. Estas variações excitariam a seiche uninodal da lagoa dos Patos, com período de 24 h, que, atingindo o Guaíba, provocaria a oscilação dos níveis d'água , a conhecida "seiche" do Guaíba. A amplitude da "seiche" do Guaíba (ver tab. VI.2) seria maior no verão (águas baixas) porque não há significativas perturbações de montante (grandes cheias) e porque as amplitudes de variação diária de pressão atmosférica são maiores nesta época (correlação com a temperatura média diária).

Tab. VI.2 — Amplitudes mais freqüentes das seiches (1976/77)

MÊS	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
AMPL. (cm)	16	16	15	14	13	6	5	5	6	12	16	18

Fonte: Relatório nº 6, DMAE/IPH (1978)

Contudo, os mesmos fenômenos meteorológicos dados como causas do aparecimento de seiches podem ser correlacionados com a gênese de ventos. O potencial da ação dos ventos fica patente pela grande superfície exposta do Guaíba, 468 Km², um "fetchs" atingindo até 40 Km. Isto, aliado ao fato de ter uma profundidade média de apenas 4 m, torna o rio Guaíba particularmente sensível a ação do vento.

O propalado caráter aleatório dos ventos pode não ser exato. É sabido que os ventos (fig. VI.5) que ocorrem na região do rio Guaíba são predominantemente do quadrante sul (sentido oposto ao do escoamento por gravidade) e possuem regime diário aproximadamente regular, soprando com mais intensidade nos períodos da tarde e da noite em relação à manhã, comportamento que pode ser correlacionado com as oscilações aproximadamente regulares dos níveis do Guaíba, principalmente no verão. Neste caso, o vento poderia ser causa da "seiche" sem deixar de ser, ao mesmo tempo, um importante fator no represamento e inversão de escoamentos (um fenômeno diferente da "seiche").

Pelos aspectos abordados, verifica-se que o escoamento no rio Guaíba é condicionado, entre outras causas, por fatores meteorológicos ainda não bem definidas. Mesmo que se considere a ação conjunta do vento e da pressão atmosférica como os principais agentes dos fenômenos meteorológicos, a análise não se simplifica, pelo contrário, há maior dificuldade, porque, muito mais que a hidráulica, a meteorologia convive com pertur

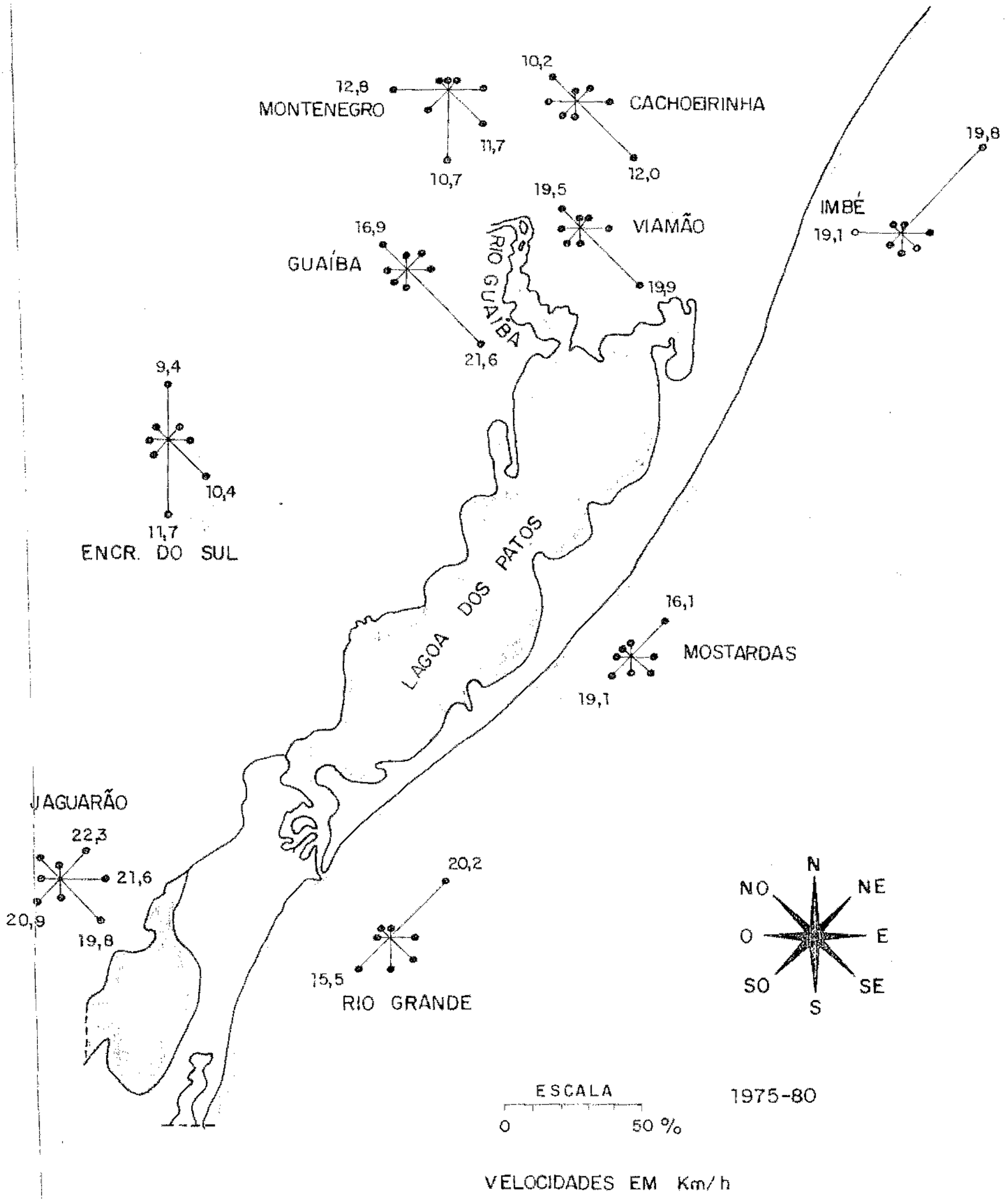

FIGURA VI.5 FREQUÊNCIA DOS VENTOS NO SISTEMA GUAÍBA-LAGOA DOS PATOS (BORDAS ET ALLI, 1984) bações aleatórias. Em outras palavras, sem uma rede de anemógrafos, barógrafos e termógrafos atuando em conjunto com uma rede de linígrafos, ambas suficientemente densas, fornecendo dados, não será possível estabelecer, com a devida exatidão, a correntologia do rio Guaíba e lagoa dos Patos.

Considerando todos estes aspectos, a aplicação do modelo matemático bidimensional ao rio Guaíba, se restringe em demonstrar a adequabilidade e capacidade de tal modelo de reproduzir escoamentos com base nos dados disponíveis.

VI.3 — DADOS FIXOS DO MODELO BIDIMENSIONAL DO RIO GUAÍBA

O desenvolvimento de modelos bidimensionais com esquemas em diferenças finitas para estudo da hidrodinâmica do rio Guaíba e lagoa dos Patos teve início no começo desta década no Instituto de Pesquisas Hidráulicas da UFRGS, IPH, sob as formas de pesquisa aplicada (Grupo de Pesquisa da Hidrodinâmica da Poluição) e pesquisa acadêmica a nível de mestrado (caso desta dissertação).

O objetivo principal, nesta última, é demonstrar o domínio da técnica de simulação matemática de escoamentos bidimensionais, desde a dedução do sistema de equações diferenciais até a elaboração e aplicação, ao caso específico do rio Guaíba, de um programa computacional de aplicação geral.

Os dados fixos utilizados para a representação do rio Guaíba no modelo bidimensional foram os mesmos definidos pelo grupo de pesquisa do IPH, (Casalas, 1984). A malha retangular de cálculo estabelecida por este grupo possui 1170 células quadradas de 1 Km^2, reunidas em 26 linhas e 45 colunas, onde apenas 468 das células representam o rio Guaíba. Na figura VI.6 é apresentada a malha de cálculo com os códigos de contorno (ver cap. V) de cada quadrícula que dão forma ao Guaíba.

As profundidades médias correspondentes a cada quadrícula foram estabelecidas com base no levantamento realizado pela Diretoria de Hidrografia e Navegação do Ministério da Marinha em 1964. As profundidades, tomadas abaixo do espelho d'água (plano de referência) do citado levantamento, estão na figura VI.7, onde os valores referem-se aos cantos superiores direitos de cada quadrícula.

Para definir a localização e a orientação da malha de cálculo na superfície terrestre foi fixada a latitude média de 30º sul e o ângulo de 242º (sentido horário) entre o eixo OY da malha e o norte geográfico.

Na malha de cálculo do Guaíba são condições de contorno a seção Itapoã, representada pela sub-coluna que vai da linha 8 à linha 11 da coluna 1, e a seção da Ilha da Pintada (ou Ponta da Cadeia), representada pela sub-coluna unitária da coluna 40 na linha 10 (ver fig. VI.6).

As sub-linhas e sub-colunas de cálculo decorrentes da adaptação da malha bidimensional e da definição dos locais

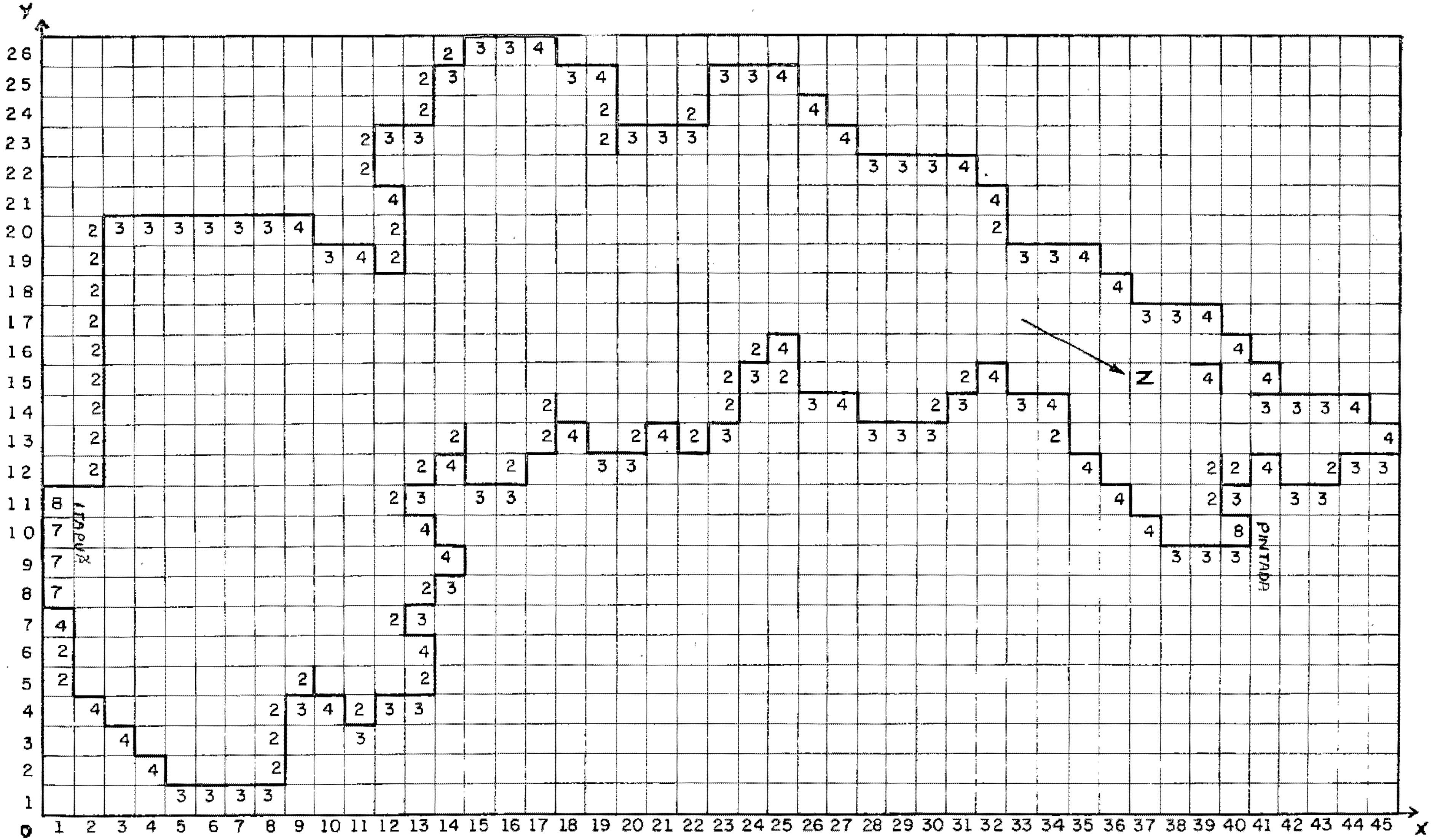

Figura VI.6 — Malha do rio Guaíba e códigos de contorno (em branco, código = 1)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
26														-0,5			-0,5						
25													-0,5		1,5	2,0	1,9		-0,5			-0,2	0,5
24													-0,2	1,9	1,4	1,8	2,0	1,2	1,2			1,0	0,9
23												-0,3		0,7	1,2	2,0	2,0	1,4	0,5		2,5	0,4	1,6
22											2,0	0,3	1,0	0,9	1,5	2,0	2,0	1,9	0,9	1,8	2,0	0,6	1,5
21											-0,2	2,0	1,5	1,8	2,1	2,2	2,4	2,4	2,4	0,7	2,6	0,8	3,0
20			0,5	1,0	1,5	1,0	0,2	-0,2	-1,0			0,8	2,1	2,4	2,4	2,3	2,4	2,6	2,4	0,7	3,0	3,0	3,1
19		1,5	2,2	2,6	2,7	2,9	3,3	3,0	2,5	0,9	-0,5	0,5	2,1	2,1	2,6	2,7	2,2	2,6	2,5	0,8	3,5	4,0	4,4
18		2,0	2,8	3,0	3,2	3,3	3,1	2,2	3,1	2,8	1,0	0,4	2,0	2,7	3,0	3,0	2,8	2,8	2,6	3,0	5,0	6,0	4,5
17		2,1	3,1	1,0	3,1	3,2	2,8	3,1	3,6	2,9	3,5	2,0	0,5	1,5	2,2	3,7	3,8	4,1	4,8	6,0	4,8	3,0	2,8
16			3,0	2,9	3,0	3,2	2,3	3,4	3,8	3,9	3,8	3,8	2,9	2,0	4,5	4,4	5,0	5,2	3,5	3,8	3,0	2,7	3,0
15		-0,5	1,5	2,9	2,8	3,2	2,4	3,4	3,7	4,1	4,5	4,0	4,6	6,0	7,0	6,1	5,0	3,4	3,0	2,9	2,5	2,9	2,8
14		-0,5	1,5	3,1	2,8	3,2	3,6	3,9	4,5	4,5	6,9	7,5	6,2	6,0	4,5	3,2	2,0	3,0	2,0	3,1	3,0	2,6	
13			2,2	0,7	1,0	1,8	3,9	4,8	6,0	4,5	3,7	3,5	3,0	0,2	3,2	3,2	1,5	1,5	2,0	-0,5	0,5	2,0	-0,5
12		1,0	1,3	3,5	3,0	4,2	4,8	4,2	4,0	3,4	3,3	3,1	0,8	2,0	2,9	1,8	-0,5		1,0	-0,5	-0,5	-0,5	
11	0,5	1,5	2,5	3,6	3,8	4,0	4,8	4,0	3,6	3,4	3,4	1,0	-0,5	-0,5	1,2	-0,3							
10	2,0	1,5	1,5	3,2	5,0	4,5	3,4	3,4	3,4	3,2	3,0	2,0											
9	2,0	3,0	1,7	3,5	3,4	3,4	3,4	3,4	3,2	3,2	2,8	2,2	2,0	-0,5									
8	8,0	6,0	2,5	2,4	3,2	3,4	3,5	3,4	3,2	3,0	3,0	2,2	2,0	-0,5									
7	7,0	1,8	2,0	3,0	3,5	3,4	3,3	3,3	3,3	2,9	2,9	-0,8	-0,3										
6	5,0	2,9	3,5	3,5	3,5	3,2	3,3	3,3	3,0	2,4	2,4	2,3	0,2										
5	2,0	3,5	2,9	2,7	2,9	3,0	3,4	3,4	2,0	2,4	2,3	2,0	-0,4										
4		1,5	3,0	2,8	2,9	3,1	3,4	3,0	-1,0	2,5	2,0		-0,5										
3		-0,5	2,0	2,2	3,0	3,0	3,0	3,0		-0,5	-0,5												
2			-0,5	1,2	1,6	1,5	2,0																
1				-0,5			-0,5	-1,0															

	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
26																						
25	0,8	-0,5																				
24	1,2		-0,5																			
23	0,9	1,2	1,0	-0,5																		
22	1,8	1,9	1,4	0,3	-0,2	1,4		-0,5														
21	3,0	1,9	1,8	0,6	0,7	3,0	3,0	2,8	-0,6													
20	3,0	2,6	2,6	1,5	1,0	3,4	3,3	3,3	-0,2													
19	4,5	4,0	4,0	4,5	6,0	4,5	3,0	3,0		1,8		-0,9										
18	4,5	3,0	3,6	3,4	3,2	4,5	5,0	8,0	8,0	6,0	4,0	1,8	-0,2									
17	4,2	2,0	3,4	2,9	2,7	2,6	2,5	3,0	2,5	3,5	5,5	3,0	1,5	2,0	0,5	-0,3						
16		3,0	2,9	2,8	2,4	2,5	2,4	2,8	1,9	2,5	3,0	4,0	4,0	2,2	1,3	1,4	-0,2					
15	-0,5	3,9	3,4	2,9	2,6	2,3	2,5	3,0	1,0	3,0	5,5	5,0	2,5	2,2	1,2	0,5	0,5					
14				2,8	2,3	2,7	2,0		-0,5		-0,5	8,5	1,5	1,2	1,0	1,0	1,0					
13					1,9	1,9	-0,5					9,5	2,5	1,0	0,8	0,8	1,9	3,9	1,5	1,2	-0,4	
12											-0,5	1,0	8,0	4,5	4,0	1,0	1,4		1,9	1,5	1,5	
11												-0,8	1,0	4,0	8,0	0,9		-0,5	1,6	-0,2	-0,2	
10													-0,3	1,0	3,5	7,5	6,0			0,5		
9														-0,5	3,5	5,5	7,8					
8																						
7																						
6																						
5																						
4																						
3																						
2																						
1																						

Figura VI.7 — Rio Guaíba, profundidades abaixo do plano de referência com condição de contorno externa têm as características mostradas nos quadros VI.1 e VI.2, onde há, inclusive, a indicação da ordem da matriz tridiagonal correspondente.

Há um total de 49 sub-linhas com matrizes tridiagonais de ordens variando de 1 até 73 com média de 18. Coincidentemente, surgiram também 49 sub-colunas, mas com matrizes tridiagonais com ordens entre 1 e 37 e média também de 18. O número total de matrizes a resolver, 98, com ordem média de 18, dá idéia do volume de cálculo necessário em cada intervalo de tempo, segundo a mecânica de cálculo apresentada no capítulo V.

QUADRO VI.1 — RIO GUAÍBA — SUB-LINHAS DE CÁLCULO

ORDEM DE CÁLCULO	LINHA GERAL	COLUNA INICIAL	COLUNA FINAL	CONTORNO	ORDEM DA MATRIZ TRIDIAGONAL
1	2	4	8	U-U	7
2	3	3	8	U-U	9
3	4	2	8	U-U	11
4	4	10	11	U-U	1
5	5	1	9	U-U	15
6	5	9	13	U-U	7
7	6	1	13	U-U	23
8	7	1	12	U-U	21
9	8	1	13	$(\zeta\text{-U})^1$	24
10	9	1	14	$(\zeta\text{-U})^1$	26
11	10	1	13	$(\zeta\text{-U})^1$	24
12	10	37	40	$(\text{U-}\zeta)^2$	4
13	11	1	12	$(\zeta\text{-U})^1$	22
14	11	36	39	U-U	5
15	12	2	13	U-U	21

continua

continuação

ORDEM DE CÁLCULO	LINHA GERAL	COLUNA INICIAL	COLUNA FINAL	CONTORNO	ORDEM DA MATRIZ TRIDIAGONAL
16	12	14	16	U-U	3
17	12	35	39	U-U	7
18	12	39	40	U-U	1
19	12	41	43	U-U	3
20	13	2	14	U-U	23
21	13	14	17	U-U	5
22	13	18	20	U-U	3
23	13	21	22	U-U	1
24	13	34	45	U-U	21
25	14	2	17	U-U	29
26	14	17	23	U-U	11
27	14	27	30	U-U	5
28	14	34	44	U-U	19
29	15	2	23	U-U	41
30	15	25	31	U-U	11
31	15	32	39	U-U	13
32	15	39	41	U-U	3
33	16	2	24	U-U	43
34	16	25	40	U-U	29
35	17	2	39	U-U	73
36	18	2	36	U-U	67
37	19	2	11	U-U	17
38	19	12	35	U-U	45
39	20	2	9	U-U	13
40	20	12	32	U-U	39
41	21	12	32	U-U	39
42	22	11	31	U-U	39
43	23	11	19	U-U	15
44	23	19	27	U-U	15
45	24	13	19	U-U	11

continua

Continuação

ORDEM DE CÁLCULO	LINHA GERAL	COLUNA INICIAL	COLUNA FINAL	CONTORNO	ORDEM DA MATRIZ TRIDIAGONAL
46	24	22	26	U-U	7
47	25	13	29	U-U	11
48	25	22	25	U-U	5
49	26	14	17	U-U	5

1 — Se a condição de contorno em Itapoã for velocidade e contorno muda para (U-U) e a ordem da matriz aumenta uma unidade.

2 — Se a condição de contorno em Pintada for velocidade o contorno muda para (U-U) e a ordem da matriz aumenta uma unidade.

QUADRO VI.2 — RIO GUAÍBA — SUB-COLUNAS DE CÁLCULO

ORDEM DE CÁLCULO	COLUNA GERAL	LINHA INICIAL	LINHA FINAL	CONTORNO	ORDEM DA MATRIZ TRIDIAGONAL
1	2	4	11	V-V	13
2	3	3	20	V-V	33
3	4	2	20	V-V	35
4	5	1	20	V-V	37
5	6	1	20	V-V	37
6	7	1	20	V-V	37
7	8	1	20	V-V	37
8	9	4	20	V-V	31
9	10	4	19	V-V	29
10	11	3	19	V-V	31

continua

Continuação

ORDEM DE CÁLCULO	COLUNA GERAL	LINHA INICIAL	LINHA FINAL	CONTORNO	ORDEM DA MATRIZ TRIDIAGONAL
11	12	4	18	V-V	27
12	12	21	23	V-V	3
13	13	4	6	V-V	3
14	13	7	10	V-V	5
15	13	11	23	V-V	23
16	14	8	9	V-V	1
17	14	12	25	V-V	25
18	15	11	26	V-V	29
19	16	11	26	V-V	29
20	17	12	26	V-V	27
21	18	13	25	V-V	23
22	19	12	25	V-V	25
23	20	12	23	V-V	21
24	21	13	23	V-V	19
25	22	12	23	V-V	21
26	23	13	25	V-V	23
27	24	15	25	V-V	19
28	25	16	25	V-V	17
29	26	14	24	V-V	19
30	27	14	23	V-V	17
31	28	13	22	V-V	17
32	29	13	22	V-V	17
33	30	13	22	V-V	17
34	31	14	22	V-V	15
35	32	15	21	V-V	11
36	33	14	19	V-V	9
37	34	14	19	V-V	9
38	35	12	19	V-V	13
39	36	11	18	V-V	13
40	37	10	17	V-V	13

continua

continuação

ORDEM DE CÁLCULO	COLUNA GERAL	LINHA INICIAL	LINHA FINAL	CONTORNO	ORDEM DA MATRIZ TRIDIAGONAL
41	38	9	17	V-V	15
42	39	9	15	V-V	11
43	39	15	17	V-V	3
44	40	11	16	V-V	9
45	41	12	14	V-V	3
46	41	14	15	V-V	1
47	42	11	14	V-V	5
48	44	12	14	V-V	3
49	45	12	13	V-V	1

VI.4 — SIMULAÇÃO COM EVENTOS TEÓRICOS E REAIS

VI.4.1 — Deformação de onda teórica

As simulações de escoamento com o modelo bidimensional estruturado para o rio Guaíba foram precedidas por uma análise experimental de deformação de onda com o intuito de estabelecer relações entre o coeficiente de ajuste do modelo, o parâmetro "K" de Von Karman, e as características de onda e da discretização numérica.

O primeiro experimento teórico consistiu na simulação de uma onda senoidal (seiche), com amplitude (≡ metade da distância entre pico e vale) de 10 cm e período de 24 h, propagando-se, sem deformação, de uma extremidade a outra (fechada) de um canal retangular de 45 Km de extensão e profundidade média de repouso de 4 m. A representação do canal para a simulação numérica foi feita com 45 quadrículas de 1 Km x 1 km, as mesmas dimensões definidas para as do modelo do Guaíba. As características da onda acima apresentada têm também ordem de grandeza aproximada às do fenômeno "seiche" do rio Guaíba.

A expressão matemática empregada para a excitação senoidal do nível d'água na extremidade aberta do canal foi:

$$\zeta = a \text{ sen } (wt - \pi/2) + a + \zeta_o$$

onde

ζ = nível d'água acima do plano de referência;

a = amplitude;

w = freqüência angular; e

ζ_o = nível d'água de repouso, acima do plano de referência.

A expressão gráfica desta excitação pode ser vista na fig. VI.8.

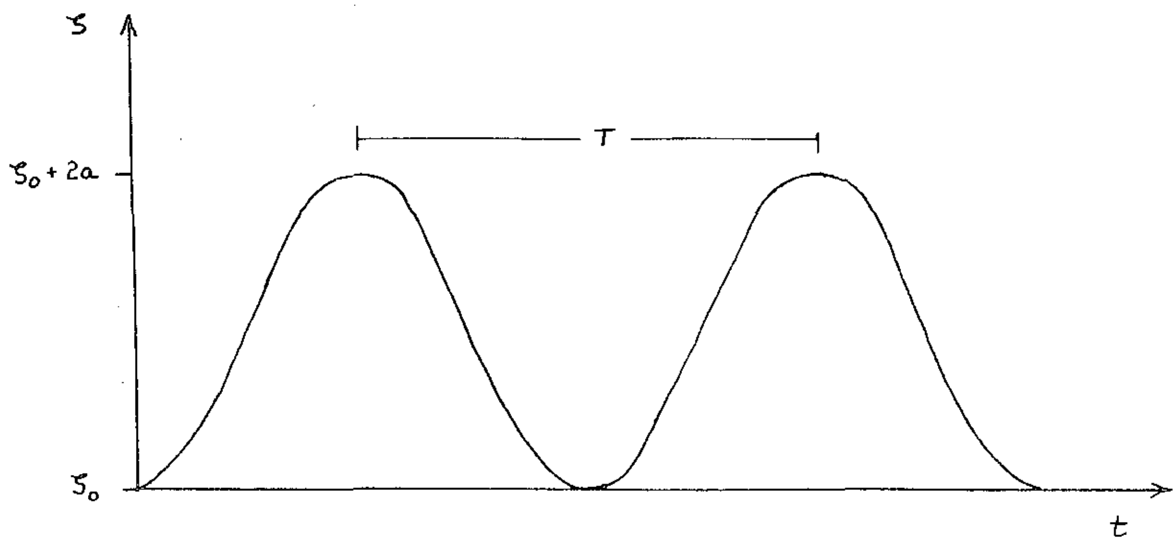

Figura VI.8 — Seiche teórica

Esta senóide, matematicamente, é uma solução geral, para a seção de início de propagação (x = 0), do sistema de equações:

$$\frac{\partial(HU)}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$

onde a solução geral correspondente, para qualquer ponto "x", é:

$$\zeta = a \frac{\cos KL\ (x/L-1)}{\cos KL} \operatorname{sen} (w [t - L/c] - \pi/2) + a + \zeta_0$$

$$U = - \frac{ac}{H} \frac{\operatorname{sen} Kl\ (x/l-1)}{\cos KL} \cos (w [t - L/c] - \pi/2)$$

sendo ζ = nível d'água acima do plano de referência;

U = velocidade

H = profundidade

c = celeridade da onda (= $\sqrt{gH_0}$, H_0 = profundidade de repouso)

a = amplitude da onda

w = freqüência angular (= $2\pi/T$, T = período)

K = número de onda (= $2\pi/\lambda$, λ = comprimento de onda)

L = comprimento do canal

ζ_0 = nível d'água de repouso, acima do plano de referência

Para a onda do teste foram empregados os seguintes valores:

a = 10 cm

c = 6,3 m/s (= $\sqrt{gH_0}$, H_0 = 4 m)

W = 1/13.751 s^{-1} (= $2\pi/T$, T = 24 h)

λ = 544 Km (= cT)

K = 1/86.631 m^{-1} (= $2\pi/\lambda$)

L = 45 Km

ζ_0 = 0,53 m

Com estes valores a expressão da senóide em $x = 0$ torna-se:

$$\zeta(0,t) = 0,1 \text{ sen } (t/3,82 - \pi/2) + 0,63$$

sendo o nível dado em metros e o tempo em horas.

Na outra extremidade do canal, $x = L$ (= 45 Km), os valores de nível decorrentes da excitação em $x = 0$ são os mesmos deste local, mas atrasados em duas horas que é o tempo de translação aproximado da onda (= L/c):

$$\zeta(L,t) = \zeta(0,t + L/c)$$

Assim como os níveis, as velocidades são importantes para a avaliação do desempenho do esquema numérico. As velocidades teóricas para $x = 23$ Km (aproximadamente o meio do canal) tem, para a onda em questão, a seguinte expressão:

$$U\ (L/2,t) = 4{,}558 \cos \frac{t-2{,}00}{3{,}82} - \pi/2$$

com as velocidades dadas em "cm/s" e o tempo, em horas.

Com estas expressões de níveis e velocidades, uma propagação de 50 horas, partindo do repouso, produz os seguintes resultados teóricos:

Tempo (h)	$\zeta(0,t)$(m)	$\zeta(45,t)$(m)	U(23,t)(cm/s)
0 e 24	0,530	0,530 a 0,543	0,00 e -2,28
1 e 25	0,533	0,530 e 0,533	0,00 e -1,18
2 e 26	0,543	0,530	0,00
3 e 27	0,559	0,533	1,18
4 e 28	0,580	0,543	2,28
5 e 29	0,604	0,559	3,22
6 e 30	0,630	0,580	3,95

Tempo (h)	$\zeta(0,t)(m)$	$\zeta(45,t)(m)$	U(23,t)(cm/s)
7 e 31	0,656	0,604	4,40
8 e 32	0,680	0,630	4,56
9 e 33	0,701	0,656	4,40
10 e 34	0,717	0,680	3,95
11 e 35	0,727	0,701	3,22
12 e 36	0,730	0,717	2,28
13 e 37	0,727	0,727	1,18
14 e 38	0,717	0,730	0,00
15 e 39	0,701	0,727	-1,18
16 e 40	0,680	0,717	-2,28
17 e 41	0,656	0,701	-3,22
18 e 42	0,630	0,680	-3,95
19 e 43	0,604	0,656	-4,40
20 e 44	0,580	0,630	-4,56
21 e 45	0,559	0,604	-4,40
22 e 46	0,543	0,580	-3,95
23 e 47	0,533	0,559	-3,22
48	0,530	0,543	-2,28
49	0,530	0,533	-1,18
50	0,530	0,530	0,00

Aplicando-se, então, a variação de níveis, via modelo matemático, da primeira coluna (seção x = 0, aberta), ao canal discretizado por 45 quadrículas de 1 Km x 1 Km, avaliou-se o comportamento dos níveis d'água na extremidade oposta (seção x = 45 Km, fechada) e das velocidades no meio do canal (seção x = 23 Km), comparando-os com os resultados teóricos (segunda e terceira colunas acima).

O intervalo de tempo empregado, Δt = 15 min, conduz a um número de Courant alto ($c\Delta t/\Delta x$ = 5,8), mas o fato da onda simulada ser bem representada pela malha de cálculo ($\lambda/\Delta x' >> 100$), $\Delta x' = \Delta x/2$ na malha do modelo) torna pouco provável a ocorrência de perturbações significativas com origem na discretização numérica.

Com a definição das características da onda e do intervalo de tempo foram realizadas seis simulações, fazendo o coeficiente de "rugosidade", K, de Von Karman assumir os valores de 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 e 1,1. Os resultados numéricos em comparação com os resultados teóricos de níveis e velocidades podem ser vistos nas figuras VI.9 a VI.20. Nestas figuras convencionou-se chamar de Ilha da Pintada a seção fechada x = L do canal retangular.

Antes das conclusões serem apresentadas, face aos resultados obtidos, convém lembrar que os resultados teóricos de níveis e velocidades são provenientes de um sistema de equações simplificado, onde inexiste, inclusive, um termo de atrito com o fundo. Entretanto, mesmo com tal origem, estes resultados teóricos podem servir de base comparativa para os resultados numéricos produzidos pelo modelo com esquema de Leendertse (que utiliza termos não lineares convectivos e de atrito com o fundo). A razão é que o fenômeno simulado não muda na sua essência: é uma onda propagando-se de uma extremidade a outra de um canal, sem deformação. Como o esquema de Leendertse aplicado às equações completas do escoamento considera os efeitos dos termos não lineares, não há sentido em se esperar me-

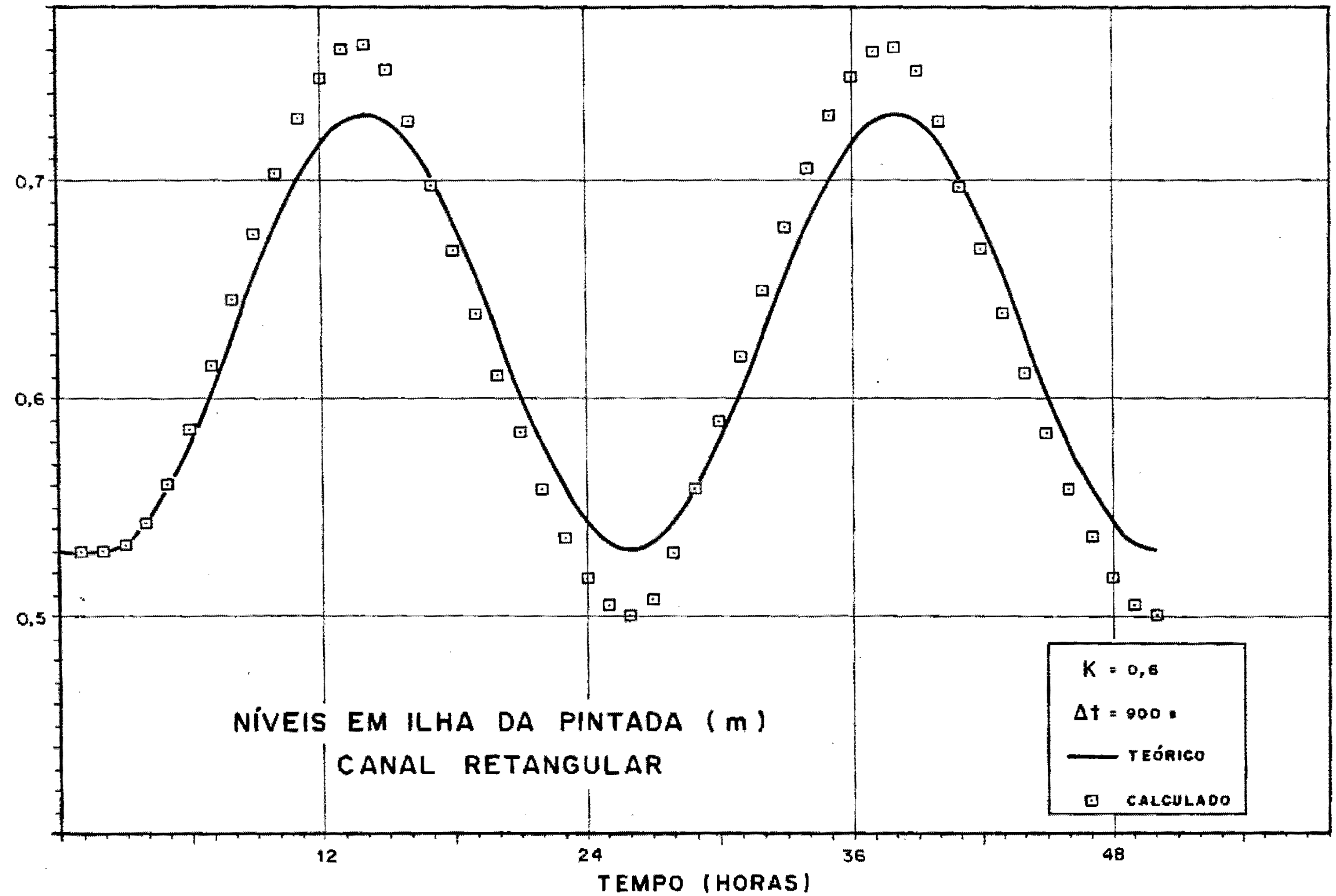

Figura VI.9 — Seiche no canal retangular, K = 0,6, níveis

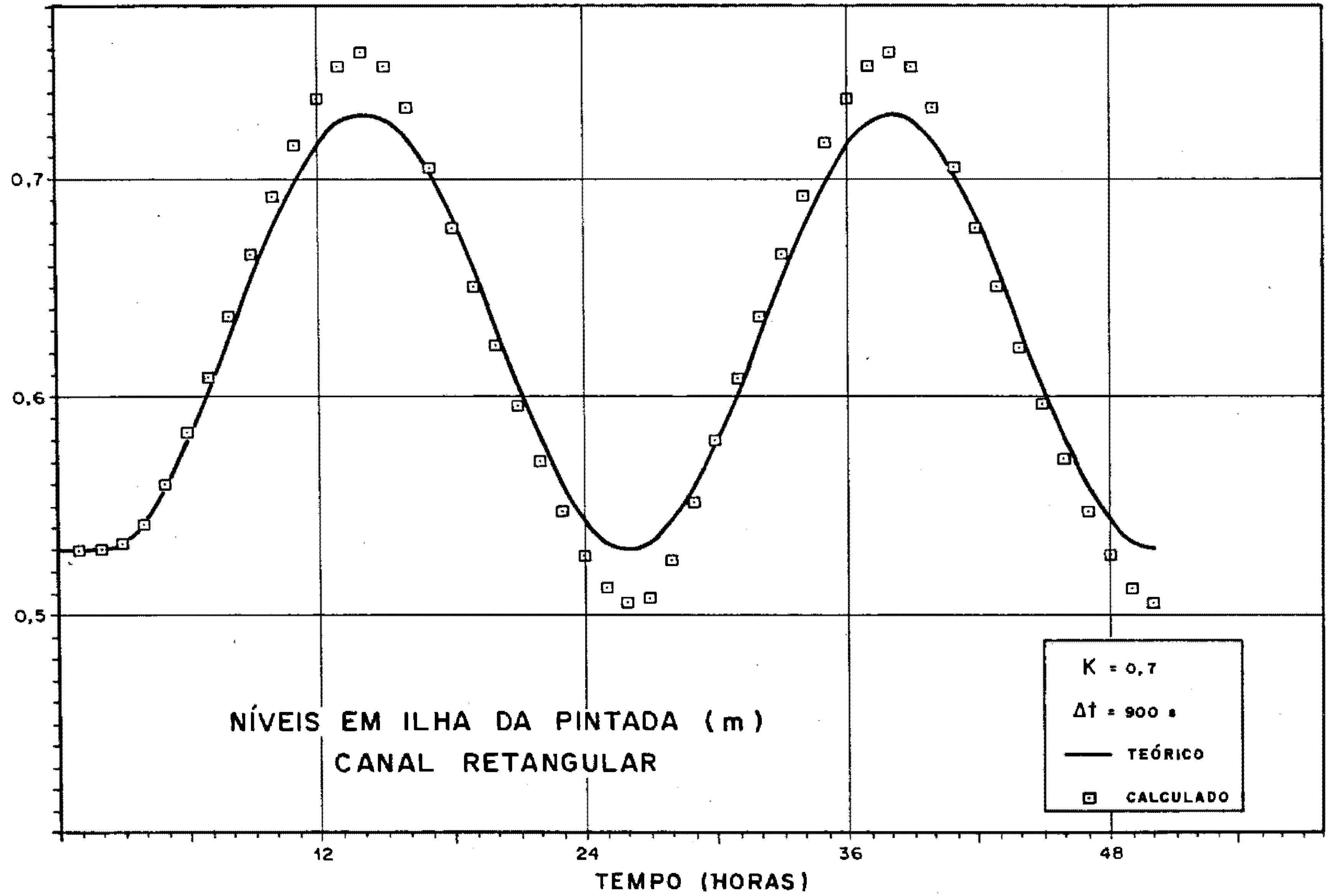

Figura VI.10 — Seiche no canal retangular, K = 0,7, níveis

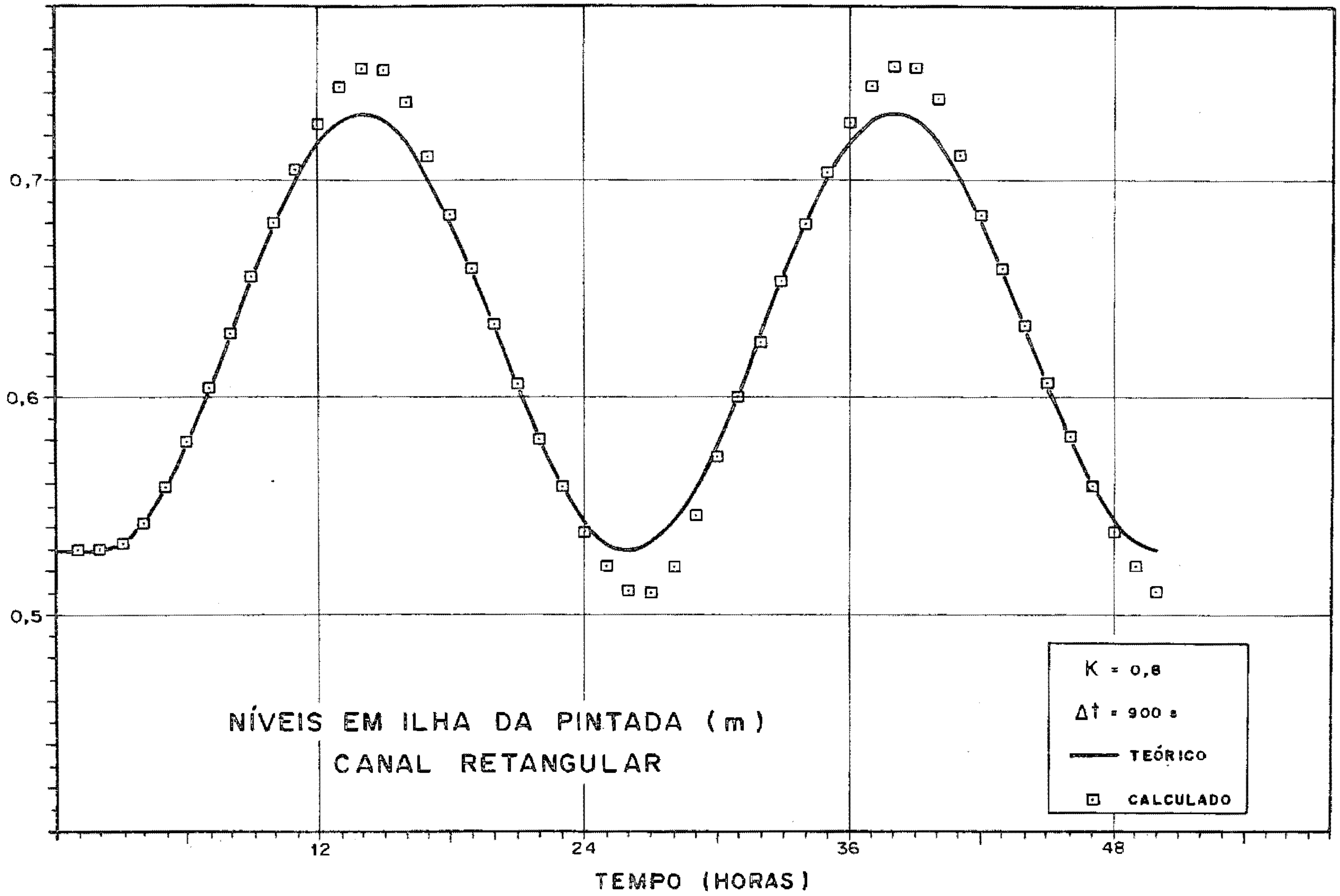

Figura VI.11 — Seiche no canal retangular, K = 0,8, níveis

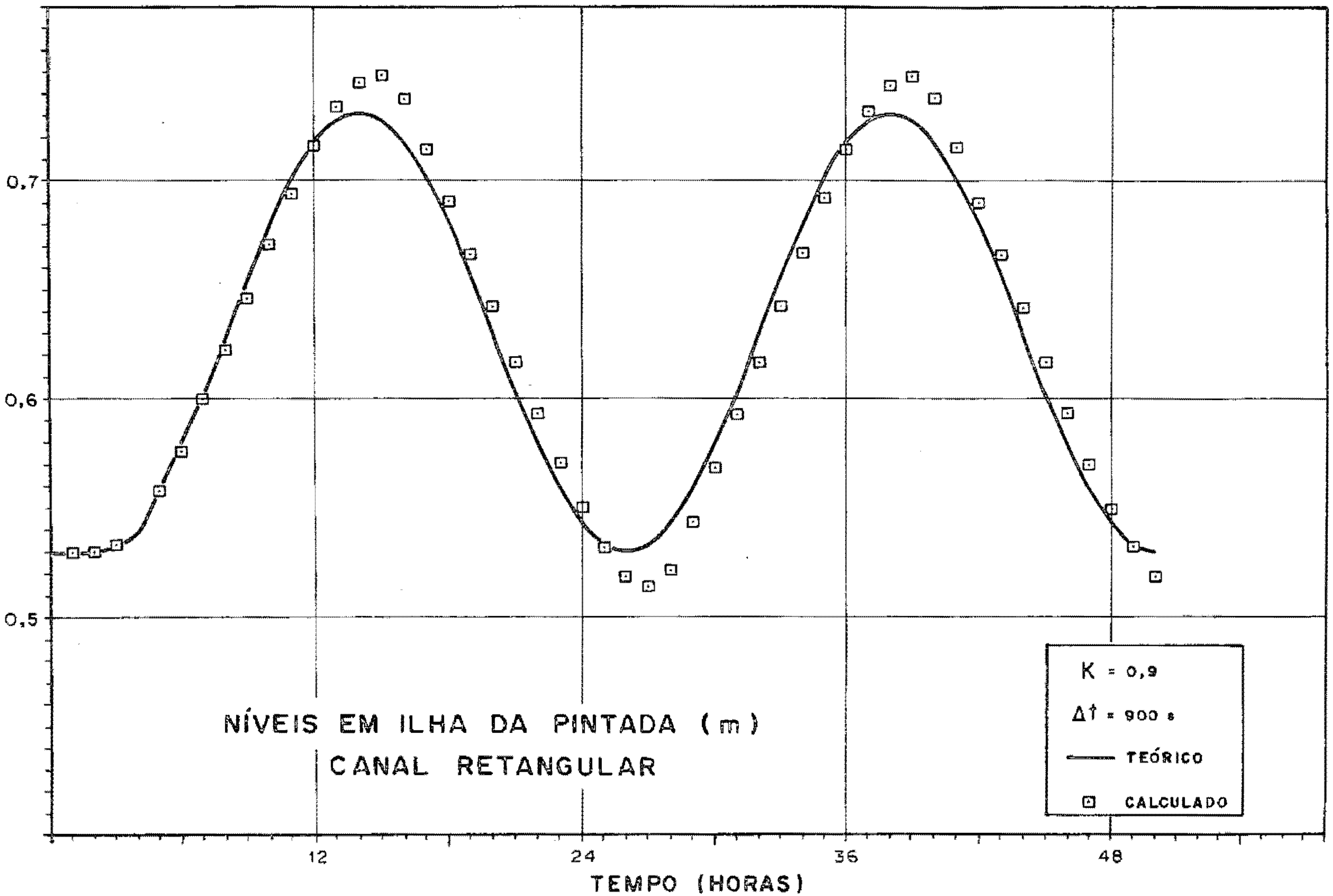

Figura VI.12 — Seiche no canal retangular, K = 0,9, níveis

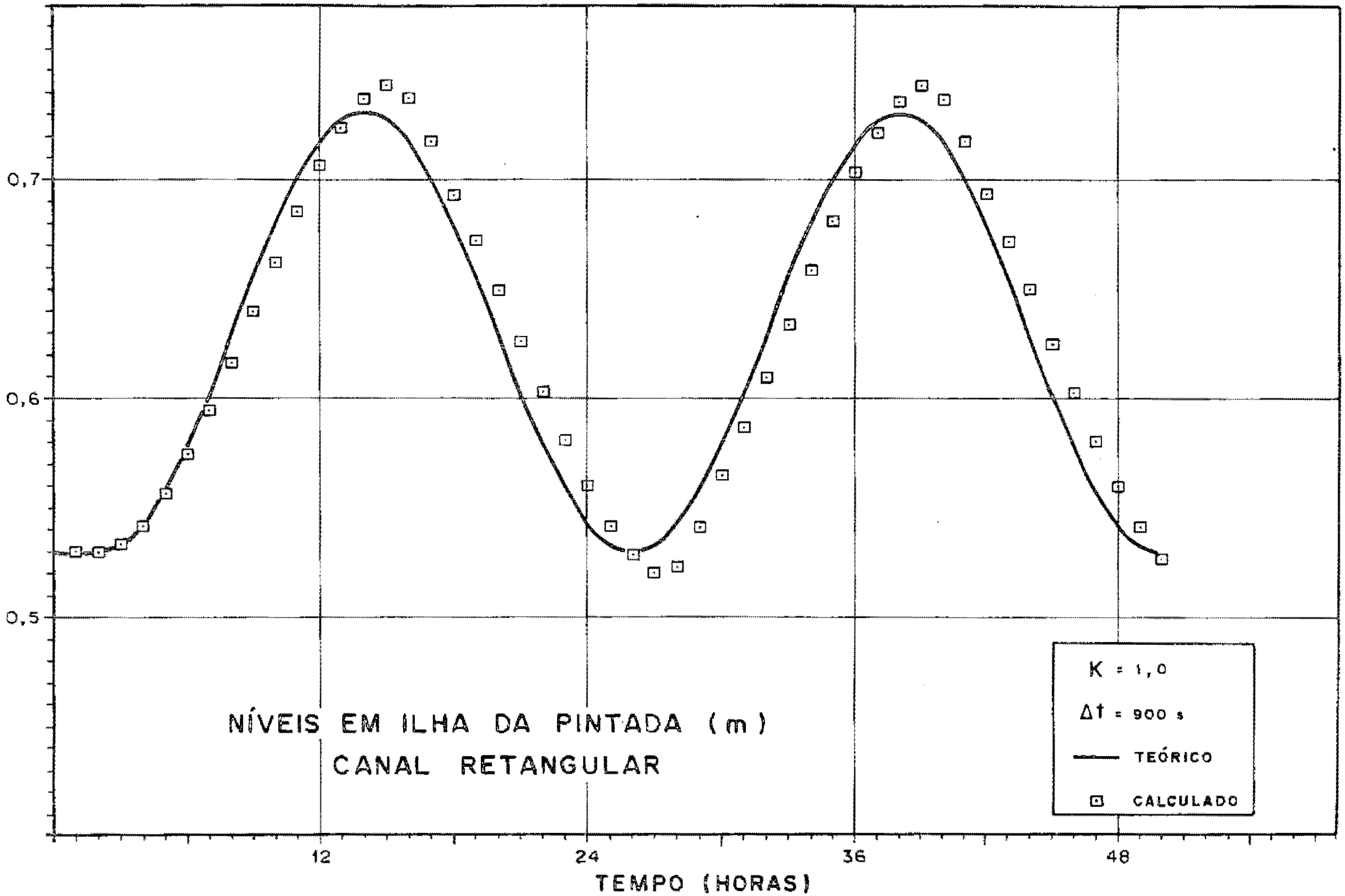

Figura VI.13 — Seiche no canal retangular, K = 1,0, níveis

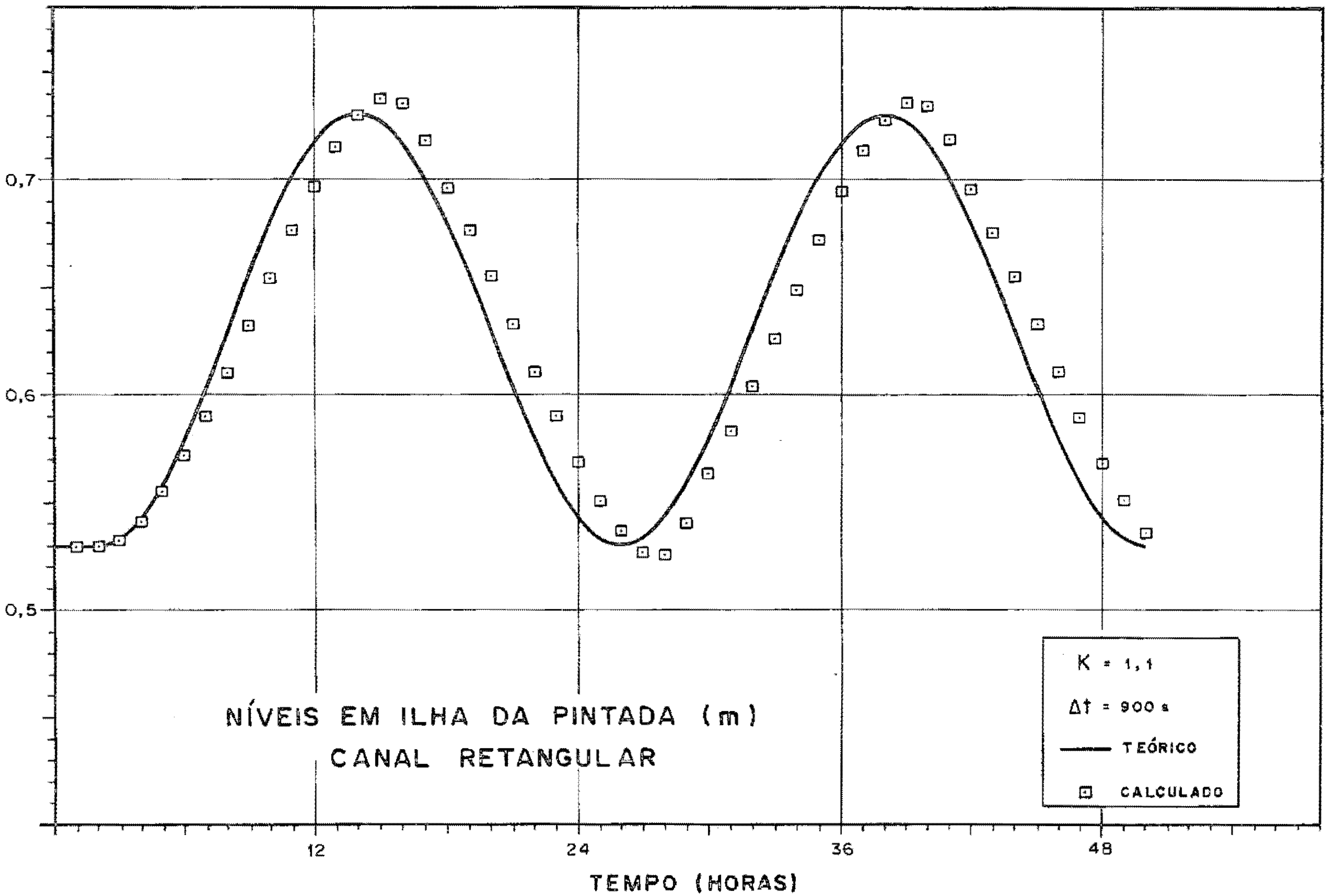

Figura VI.14 — Seiche no canal retangular, K = 1,1, níveis

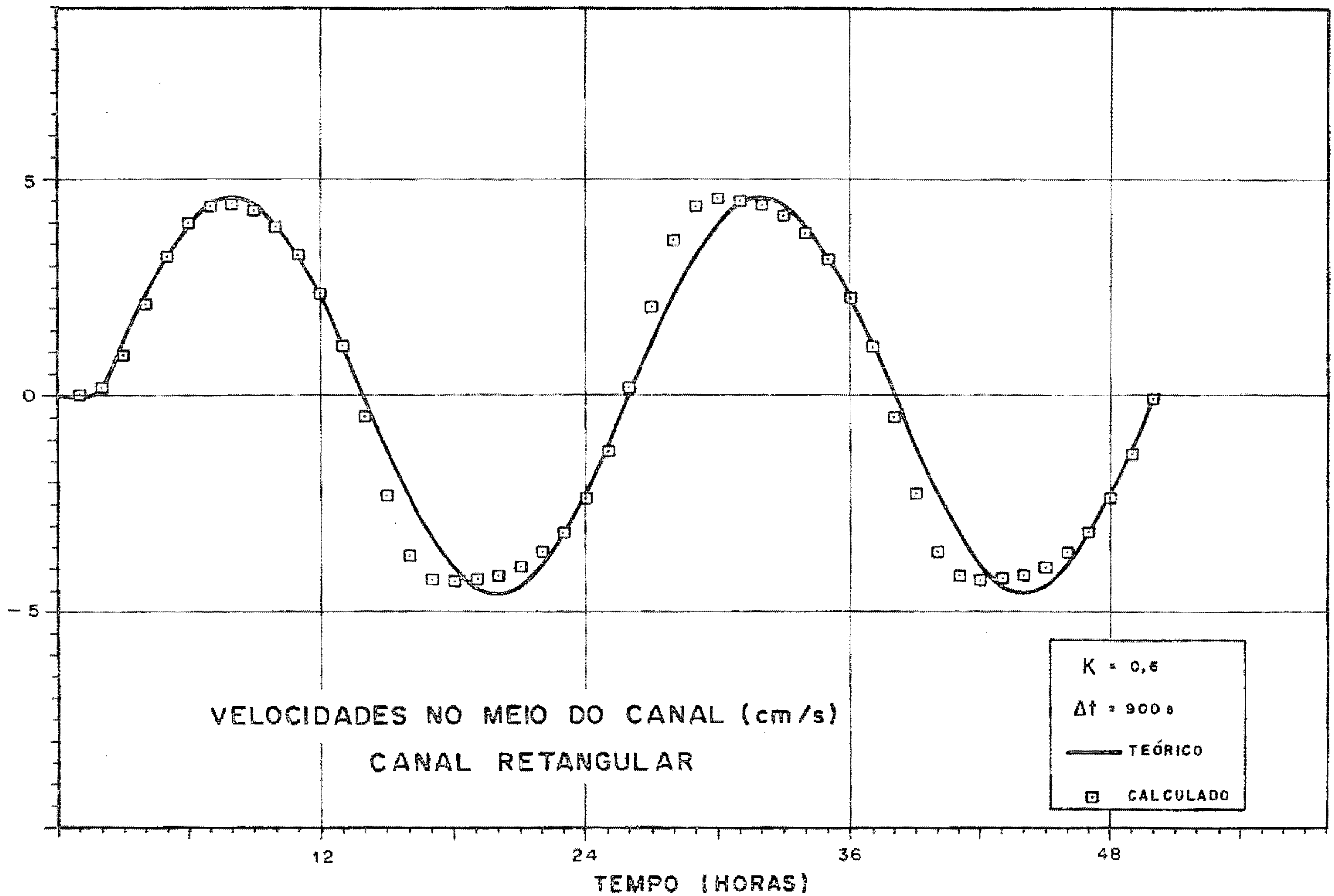

Figura VI.15 — Seiche no canal retangular, K = 0,6, velocidades

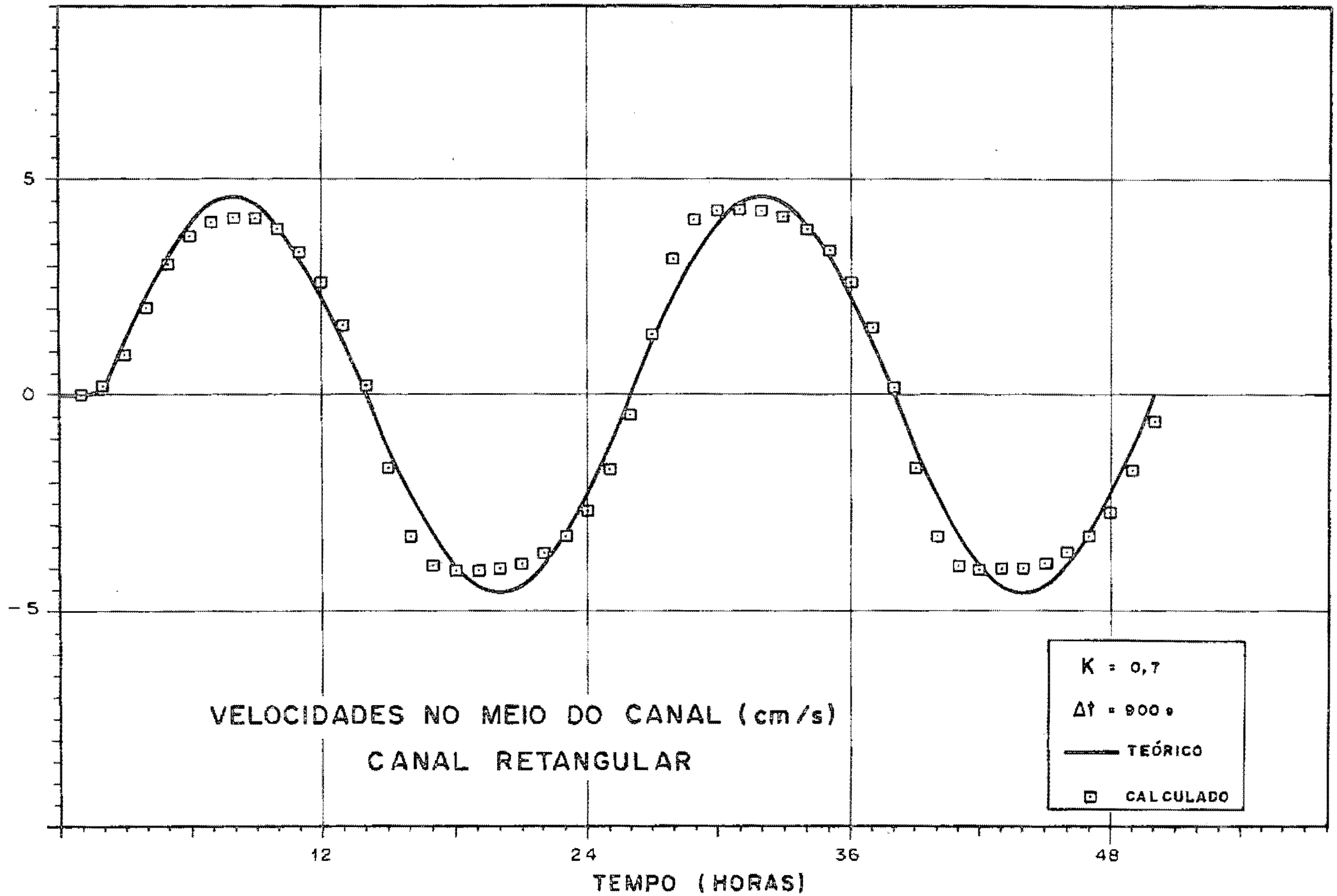

Figura VI.16 — Seiche no canal retangular, K = 0,7, velocidades

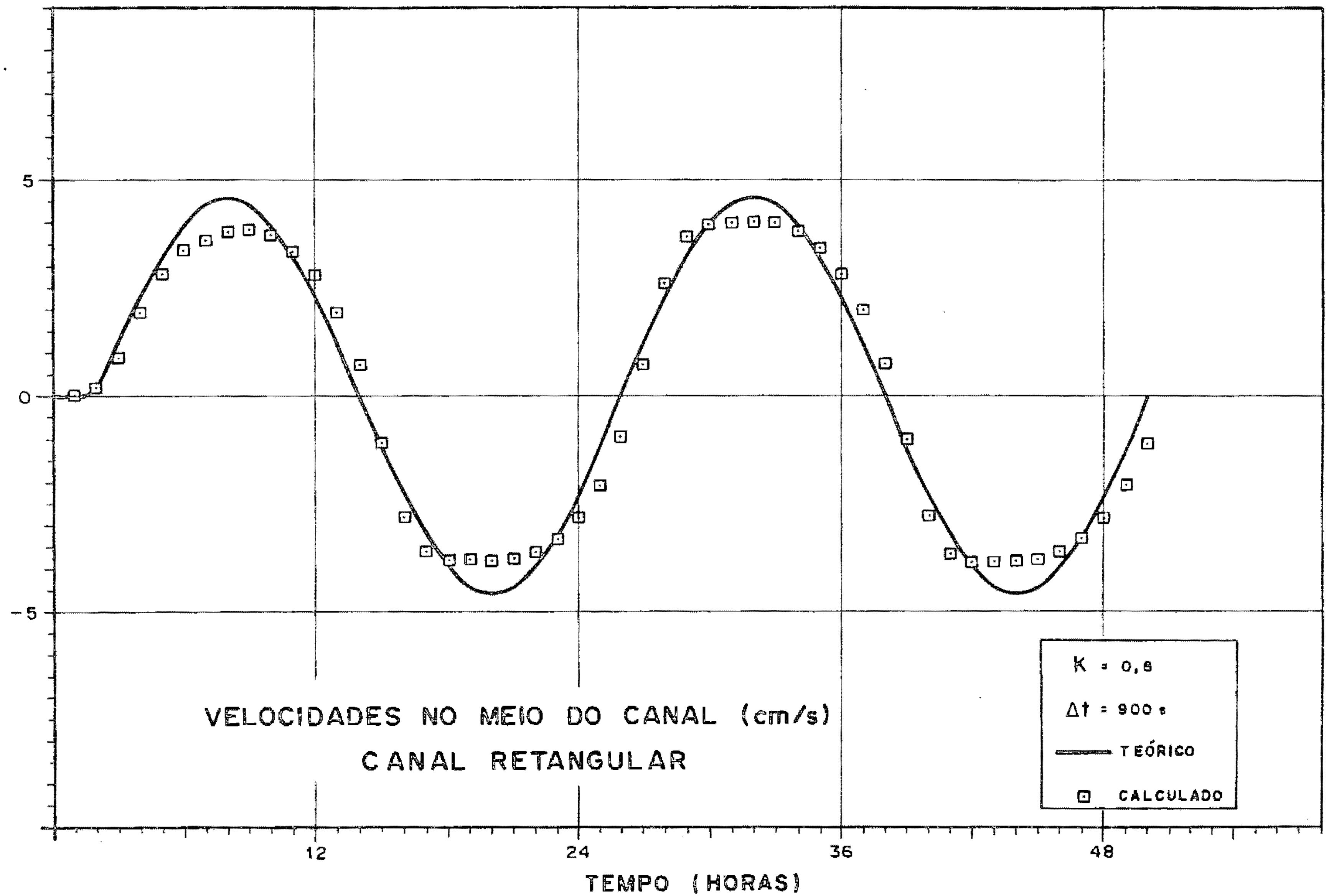

Figura VI.17 — Seiche no canal retangular, K = 0,8, velocidades

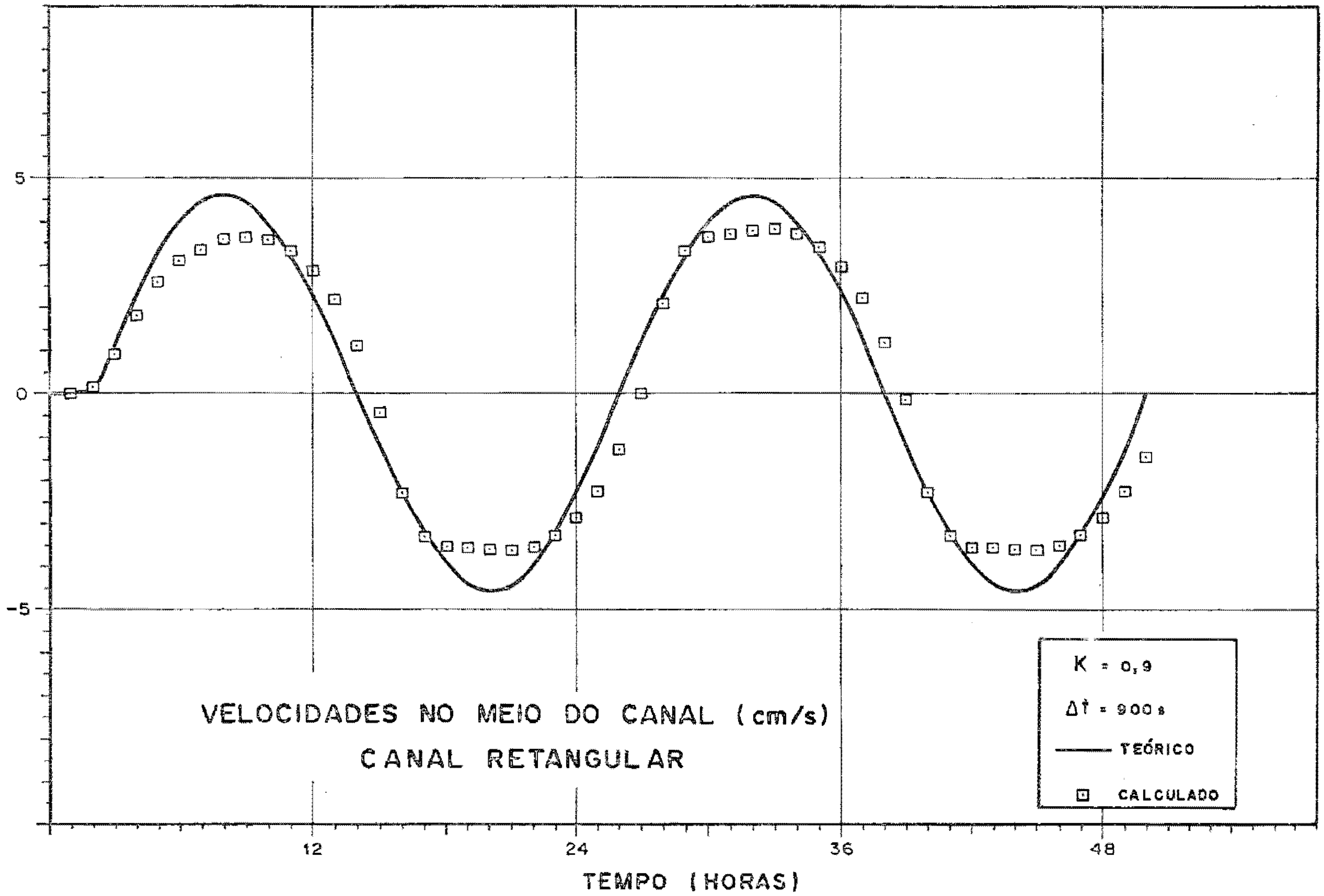

Figura VI.18 — Seiche no canal retangular, K = 0,9, velocidades

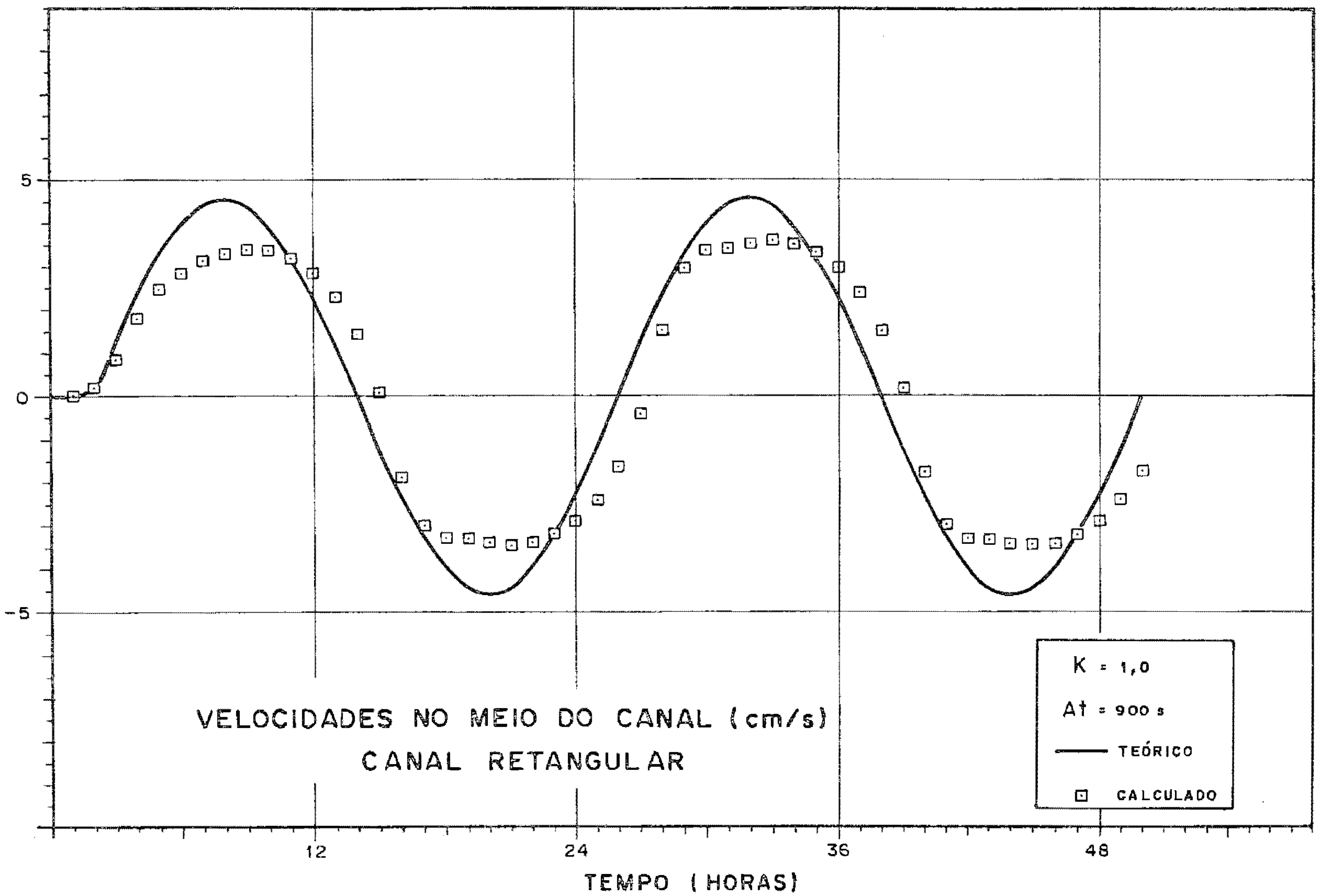

Figura VI.19 — Seiche no canal retangular, K = 1,0, vèlocidades

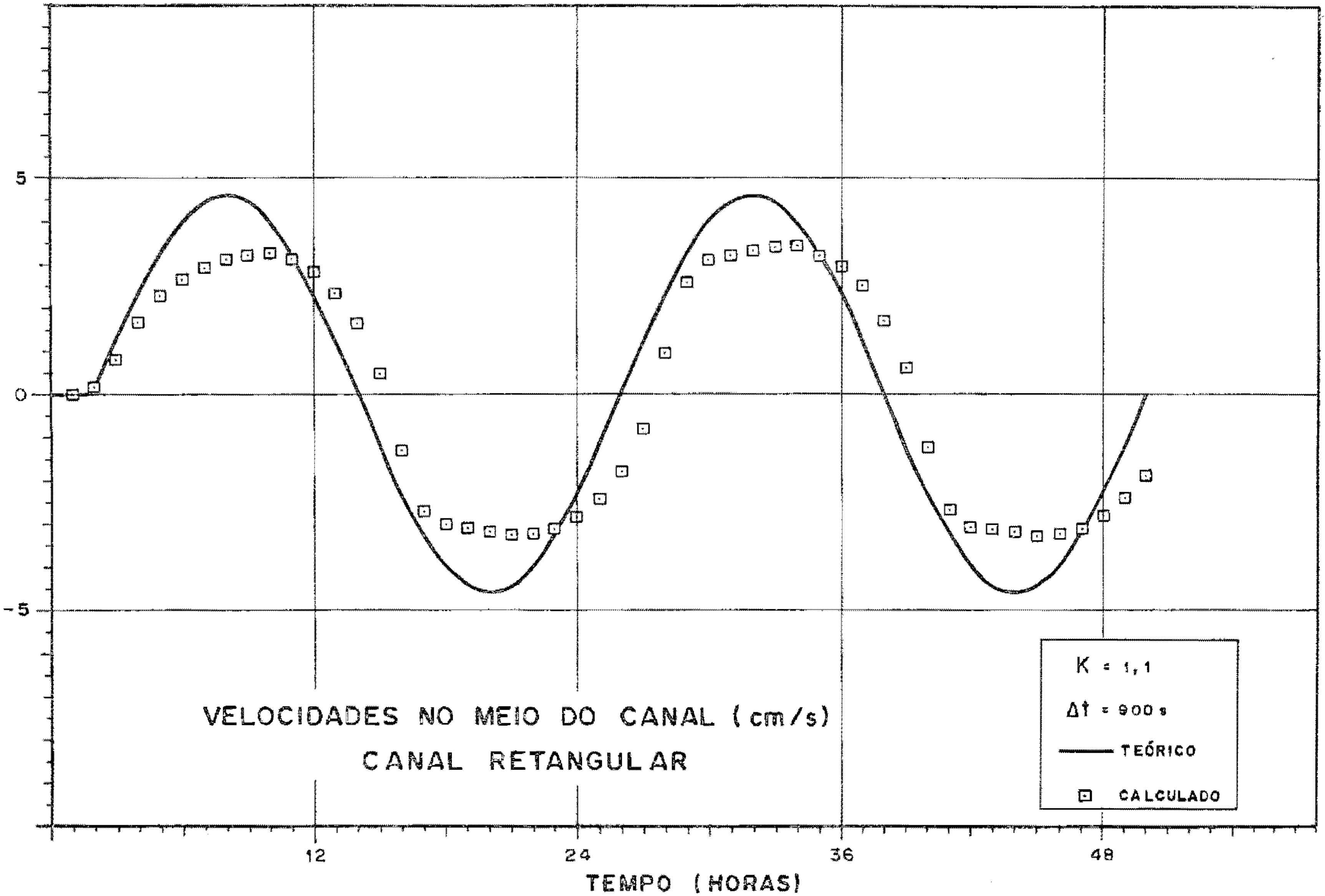

Figura VI.20 — Seiche no canal retangular, K = 1,1, velocidades

lhores resultados, para a simulação do evento em questão, com a anulação do coeficiente "K". É provável que este procedimento tenha efeito oposto, pela instabilização numérica da simulação.

Feitas estas considerações, a observação dos resultados das simulações realizadas para o canal retangular, permitiu constatar que:

a) O esquema numérico utilizado (Leendertse) possibilita a reprodução de uma oscilação senoidal propagando-se de uma extremidade a outra do canal.

b) As velocidades são melhor reproduzidas pelo modelo quando as oscilações de nível calculadas apresentam defasamento mínimo em relação às oscilações teóricas (casos de K = 0,6 a 0,8). Nestes casos as senóides dos níveis calculados apresentam-se amplificadas.

c) Senóides de níveis calculados equivalentes, em amplitude, às senóides teóricas são obtidas com aumento da rugosidade (K = 0,9 a 1,1). Entretanto há um defasamento horário significativo (onda calculada atrasada em relação à teórica) com prejuízo da acuracidade da senóide das velocidades, que tem amplitude diminuída.

Estes resultados estão de acordo com a análise numérica de deformação de onda de Leendertse vista no capítulo anterior. Pelos valores adotados de tamanho de quadrícula, inter valo de tempo e comprimento de onda não é possível creditar à discretização numérica o fato de haver amplificação da senóide dos níveis quando não há defasamento horário da onda calculada. Segundo Leendertse (1967), tal amplificação acontece em alguns esquemas numéricos implícitos (item V.5). Nestes casos é importante o papel do termo de rugosidade. É possível, portanto, admitir que as amplificações das senóides dos níveis calculados são respostas normais, inerentes ao esquema numérico do modelo. Inclusive, esta amplificação incorporada à senóide parece não se alterar mesmo quando a simulação é estendida por mais tempo.

A deformação da onda ocasionada pelo esquema numérico, por amplificação dos níveis calculados, no caso de defasamento mínimo de horário, em relação aos níveis teóricos, é uma constatação bastante importante na orientação do uso do modelo. Neste sentido, para a simulação bidimensional no rio Guaíba de um fenômeno análogo, a conclusão principal decorrente dos experimentos com o canal retangular é que a reprodução do campo de velocidades será provavelmente mais acurada na medida em que a celeridade da onda calculada se aproximar da real.

A simulação, no modelo estruturado para o rio Guaíba, da propagação da mesma onda aplicada ao canal retangular, no sentido Itapoã-Ilha da Pintada (esta, fechada), revelou que o coeficiente de "rugosidade", K, deve ter valor entre 0,2 e 0,4 para ajuste da celeridade. Nas figuras VI.21 a VI.24 podem ser vistos os resultados das simulações para K = 0,2; 0,4; 0,6 e 0,8.

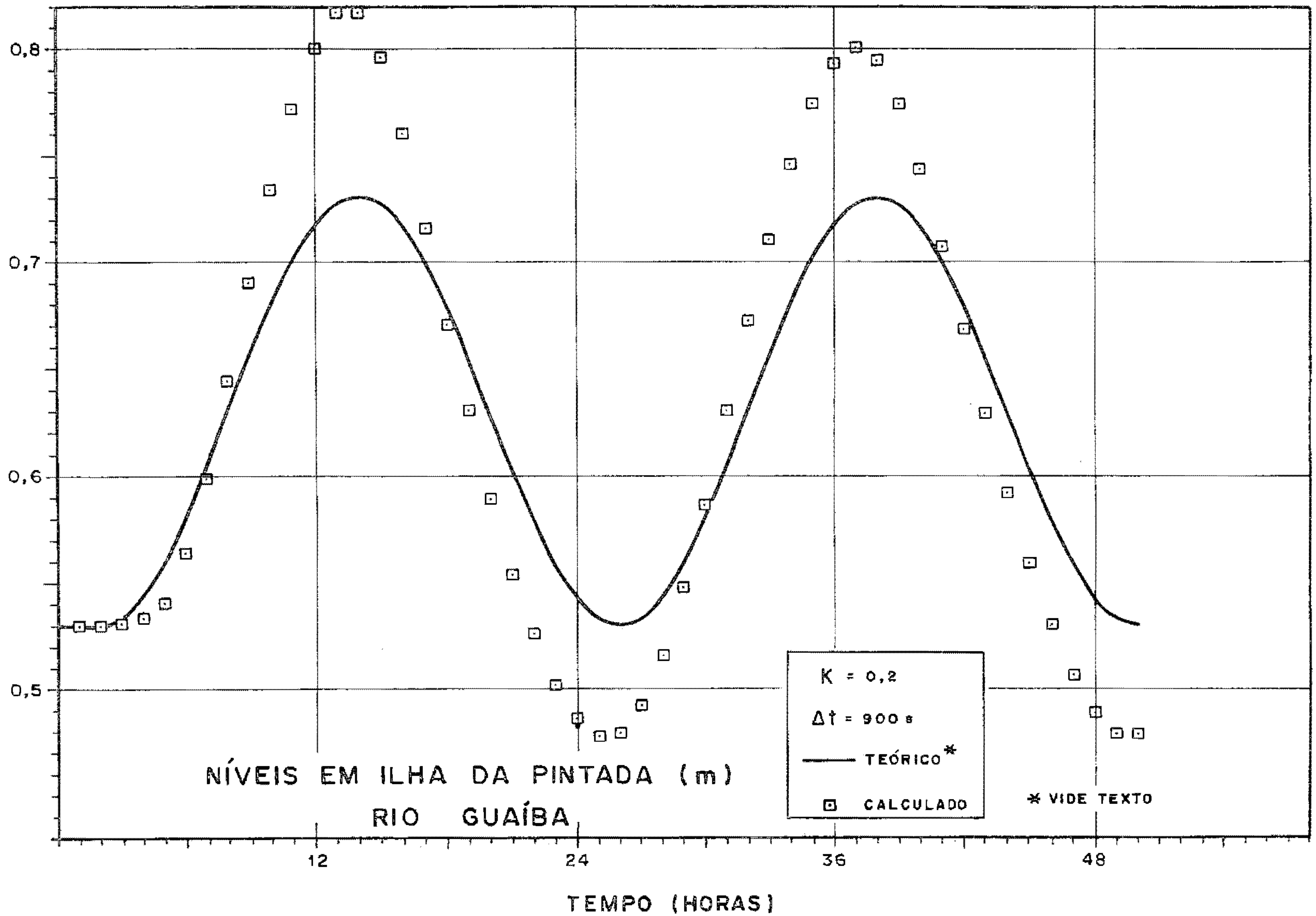

Figura VI.21 — Seiche no Guaíba, K = 0,2, níveis

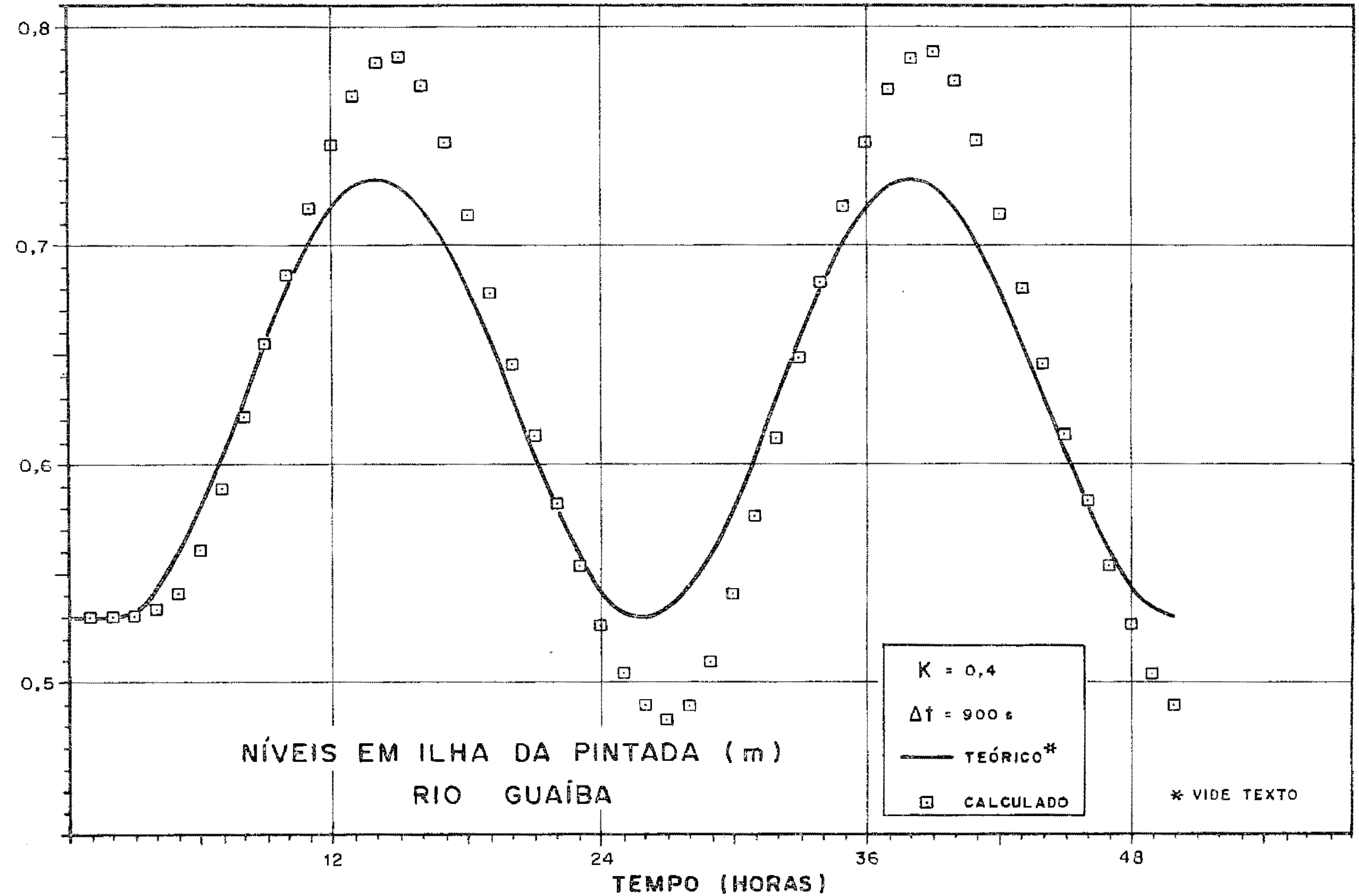

Figura VI.22 — Seiche no Guaíba, K = 0,4, níveis

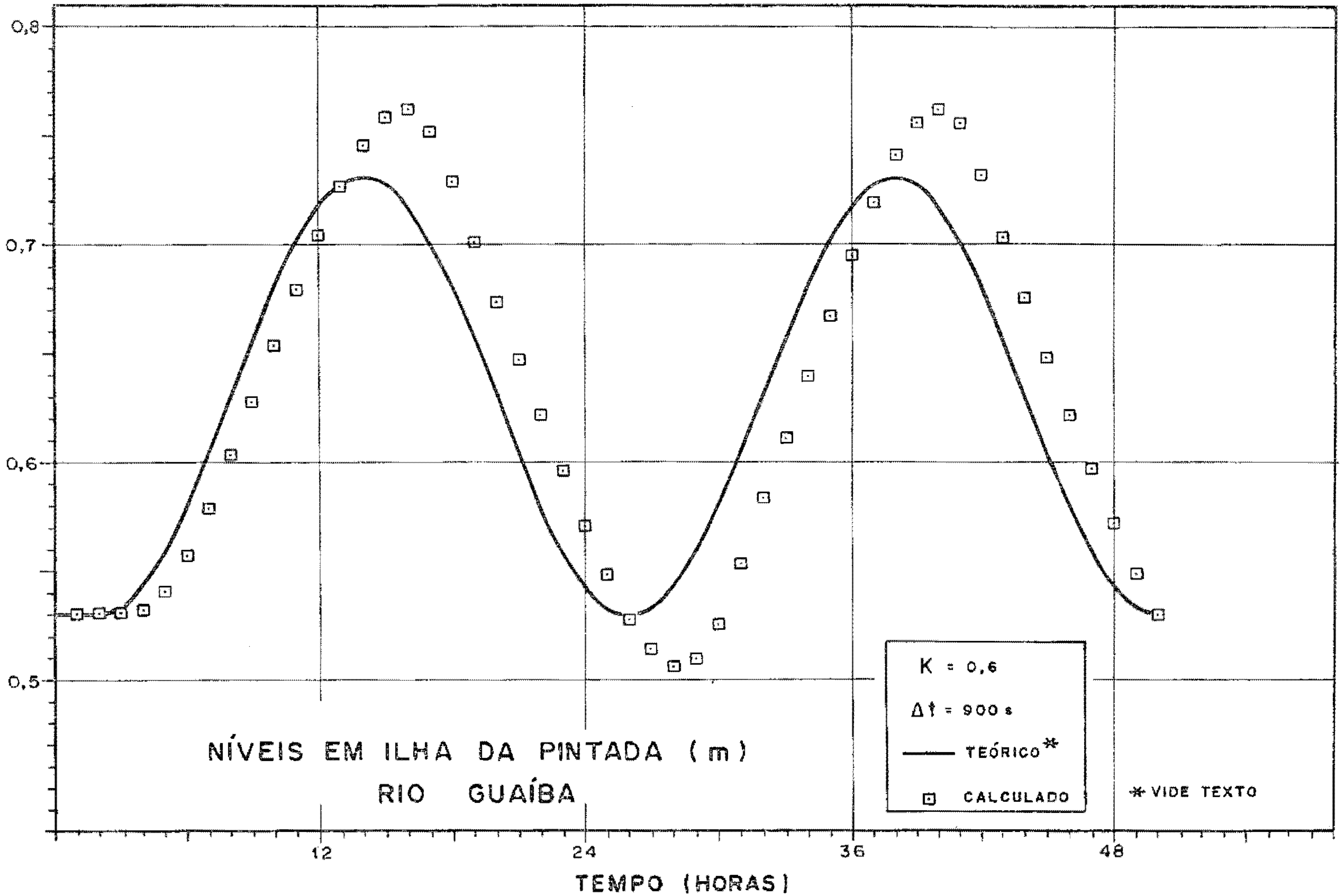

Figura VI.23 — Seiche no Guaíba, K = 0,6, níveis

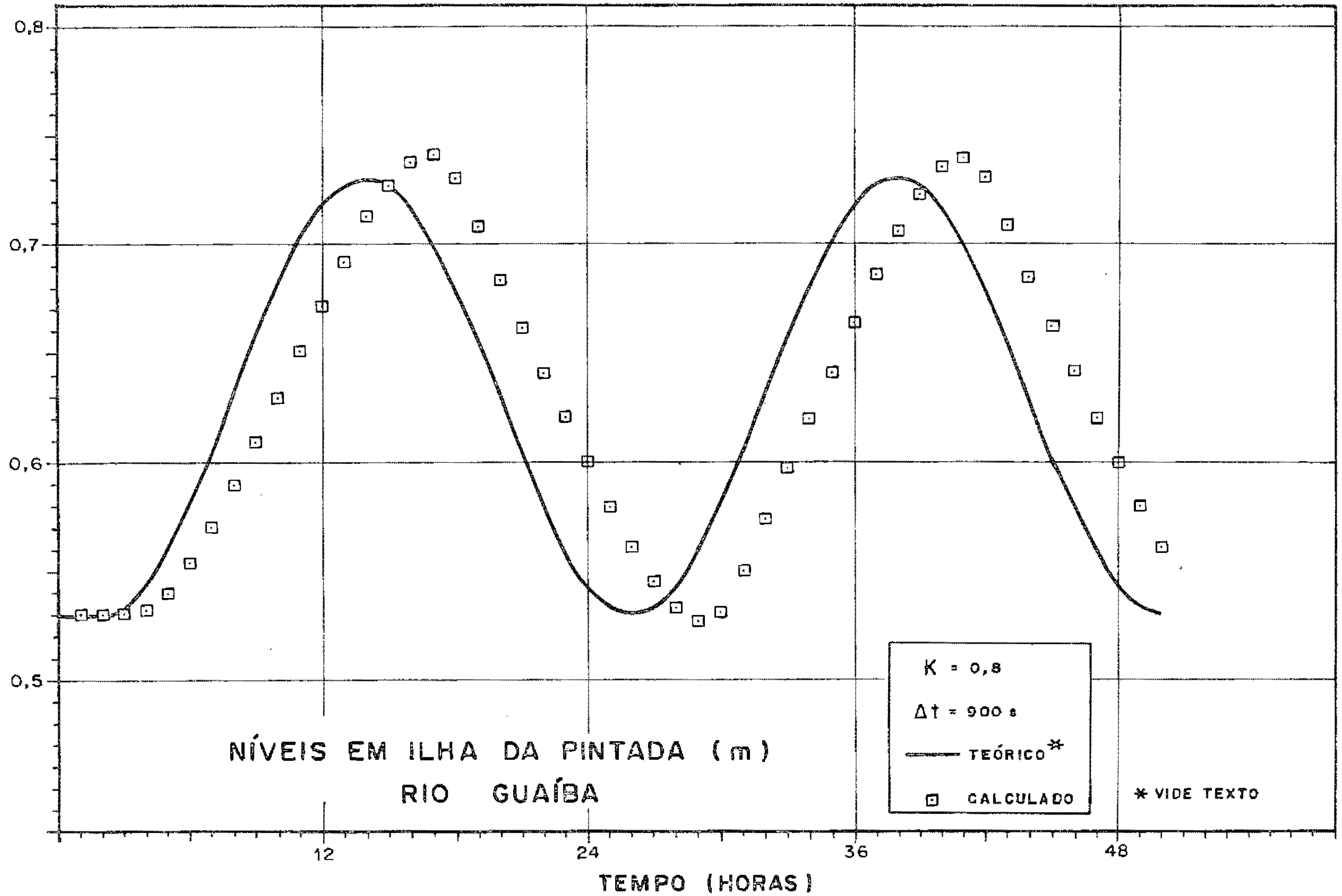

Figura VI.24 — Seiche no Guaíba, K = 0,8, níveis

VI.4.2 — Simulação com eventos reais

Para uma **efetiva** calibração do modelo bidimensional do rio Guaíba, seriam necessários dados de níveis e/ou vazões nas seções de contorno (Ilha da Pintada e Itapoã), velocidades e direções dos ventos em toda extensão do rio Guaíba e velocidades e direções de corrente em diversos pontos do lago. Estas medidas teriam que ser, naturalmente, simultâneas.

Campanhas de campo com tal volume de dados, apesar dos esforços do DNAEE e do IPH, ainda não puderam ser realizadas, o que dificulta a calibração segura de um modelo matemático. Entretanto, com os dados de algumas campanhas realizadas é possível obter resultados preliminares satisfatórios. Inclusive, a experiência adquirida com a modelação matemática, com os dados disponíveis, pode ajudar no planejamento de novas campanhas de aquisição de dados.

As campanhas de campo mais completas, no que se refere a dados quantitativos do escoamento no rio Guaíba, foram as realizadas em 12/12/82 e 30/03/83 pelo IPH e DNAEE (refs. 12 e 27), em períodos considerados de águas baixas e médias, respectivamente. Estas campanhas incluíram medições de vazão na seção da Ilha da Pintada e acompanhamento de flutuadores com simultâneas medições locais de velocidade e direção dos ventos. Dados de nível em Itapoã e Ilha da Pintada foram registrados por linígrafos do DNAEE. Um resumo destas duas campanhas é mostrado nos quadros VI.3 e VI.4.

Para as simulações do escoamento nestes dois dias, com o modelo bidimensional, as condições de contorno estabelecidas foram níveis, tanto em Ilha da Pintada como Itapoã (ver figs. VI.25 e VI.26, e quadros VI.3 e VI.4), possibilitando a comparação das vazões medidas na seção da Ilha da Pintada com as calculadas. Os valores das vazões medidas devem ser interpretados com cuidado porque, dadas as dimensões da seção transversal, foram obtidos de medições que duraram de uma a duas horas. A seção da Ilha da Pintada une dois corpos d'água de com-

Quadro VI.3 — Campanha de 12/12/82

HORA	NÍVEIS (m) ACIMA DO PLANO DE REFERÊNCIA		VAZÕES(m^3/s)[1]	VENTO[2]		FLUTUADORES[3]	
	PINTADA	ITAPOÃ	PINTADA	V(m/s)	Dir.	F1	F2
0:00	0,55	0,52	-	(0,0)	(-)		
2:00	0,54	0,53	841	(2,0)	(N)		
4:00	0,56	0,54	646	(2,0)	(N)		
6:00	0,57	0,55	378	(2,0)	(N)		
8:00	0,59	0,56	650	(2,0)	(N)		
10:00	0,59	0,56	631	2,0	N	*	*
12:00	0,59	0,56	563	2,0	N	*	*
14:00	0,57	0,55	663	(4,0)	(E)	*	*
16:00	0,58	0,55	652	6,0	S	*	*
18:00	0,65	0,57	207	6,0	S	*	*
20:00	0,66	0,57	136	6,0	S	*	*
22:00	0,80	0,55	804	(6,0)	(S)		
24:00	0,65	0,53	213	(6,0)	(S)		

1. Vazões medidas durante intervalo de aproximadamente uma hora, anteriores à hora indicada.
2. Vento junto ao flutuador F1. Entre parêntesis valores estimados para fins de simulação.
3. Lançamento dos flutuadores às 10:15. Recolhimento de F1 às 19:30 e de F2 às 19:00.

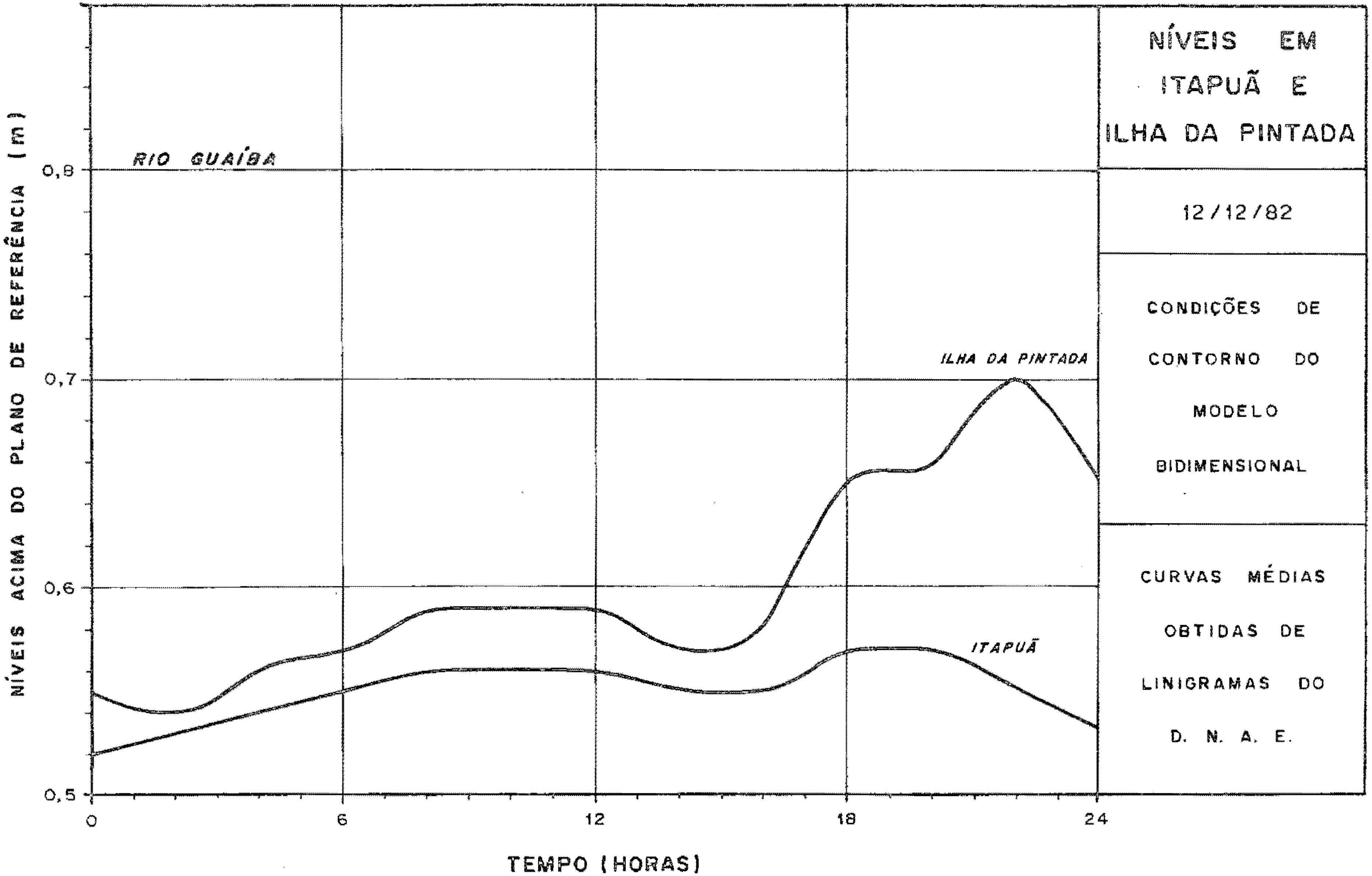

Figura VI.25 — Condições de contorno (níveis) em 12/12/82

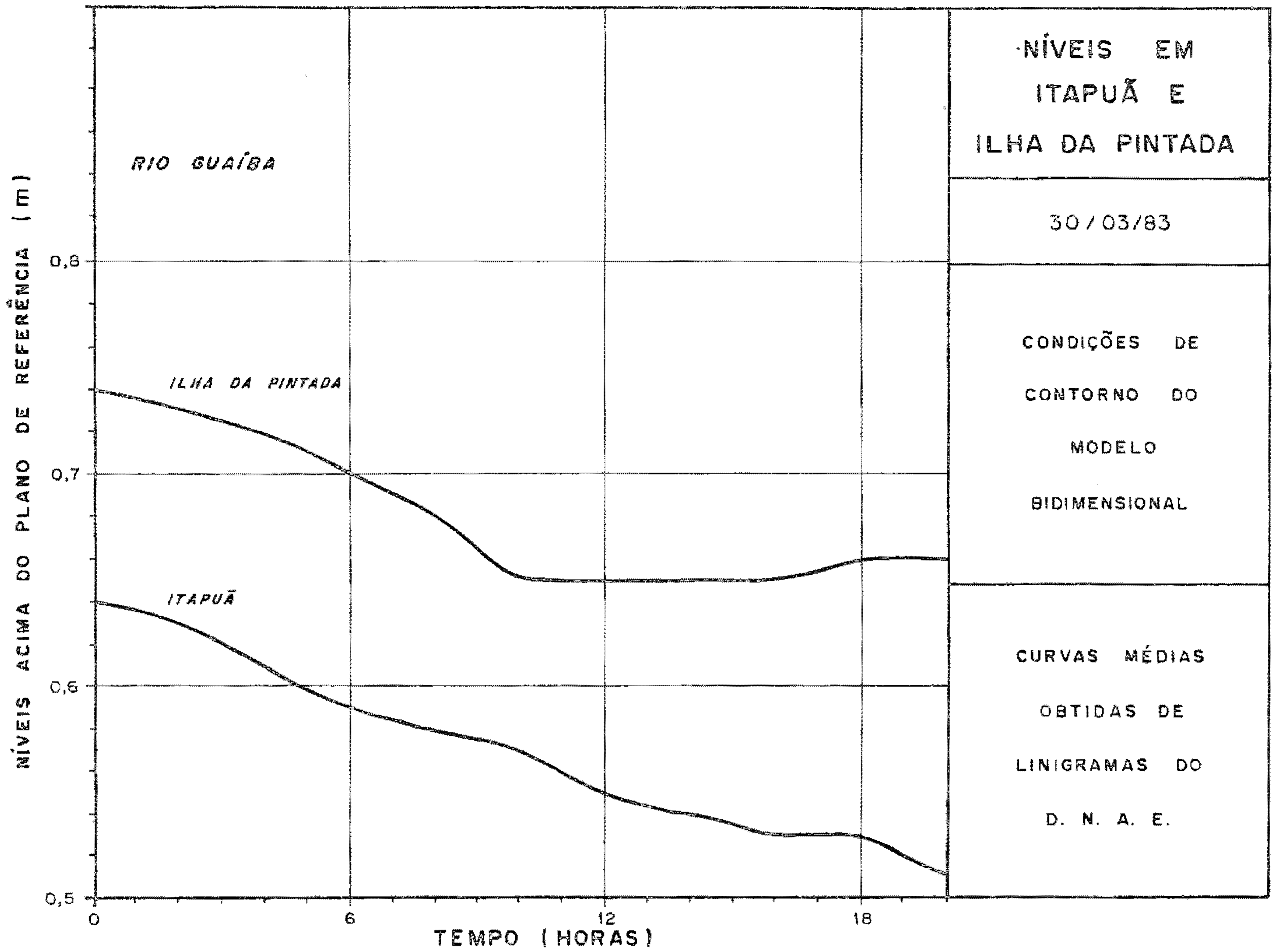

Figura VI.26 — Condições de contorno (níveis) em 30/03/83

Quadro VI.4 — Campanha de 30/03/83

HORA	NÍVEIS (m) ACIMA DO PLANO DE REFERÊNCIA		VAZÕES(m^3/s)[1]	VENTO[2]		FLUTUADORES[3]	
	PINTADA	ITAPOÃ	PINTADA	V(m/s)	Dir.	F1	F2
0:00	0,74	0,64	-	(2,0)	(E)		
2:00	0,73	0,63	973	(2,0)	(E)		
4:00	0,72	0,61	1023	(2,0)	(E)		
6:00	0,70	0,59	1154	(2,0)	(E)		
8:00	0,68	0,58	1171	2,0	SE	*	*
10:00	0,65	0,57	1353	4,0	SE	*	*
12:00	0,66	0,55	1020	5,0	SE	*	*
14:00	0,65	0,54	757	6,0	SE	*	*
16:00	0,65	0,53	748	6,5	SE	*	*
18:00	0,66	0,51	-	7,5	SE		
20:00	0,66	0,51	-	(0,0)	(-)		
22:00	0,65	0,51	-	(0,0)	(-)		
24:00	0,66		-	(0,0)	(-)		

1. Vazões medidas e, intervalos de tempo de cerca de uma hora, posteriores à hora indicada.
2. Vento junto ao flutuador F2. Entre parêntesis, valores estimados para fins de simulação.
3. Lançamento de F1 às 8:00 a F2 às 8:45. Recolhimento de F1 às 15:15 e do F2 às 17:00.

plexo regime hidrodinâmico, onde já foram detectadas variações horárias de até 300 m^3/s (ref. 11).

As primeiras simulações com os dados de 12/12/82 e 30/03/83 foram realizadas para testar a sensibilidade do escoamento ao vento. Aplicando-se os níveis observados em Pintada e Itapoã foram calculados os escoamentos (Δt = 900s) para três valores de "K" de rugosidade crescente (0,3; 0,6 e 0,9), com e sem o vento observado. Os resultados para os dois eventos podem ser vistos nas figuras VI.27 e VI.28. Nestas figuras nota-se que o escoamento é bastante sensível aos ventos fortes do quadrante sul, com redução na vazão na seção da Ilha da Pintada de cerca de 70%. Este resultado é compatível com a importância qualitativa creditada ao vento no escoamento do rio Guaíba e indica ser fundamental sua consideração na conformação do mapa de correntes.

Nas simulações com intenção de ajuste foi tentada a calibração com o evento de 30/03/83 (águas médias) e realizada a verificação com o evento de 12/12/82. A referência considerada para aferição foram as vazões na seção Ilha da Pintada. Devido as incertezas inerentes às medições horárias foram consideradas dois valores médios de vazão em cada evento: um correspondente ao período com ventos fracos e outro, ao dos ventos fortes (≥ 5 m/s). Para o evento de 30/03/83 estes valores são, respectivamente, 1116 m^3/s (2:00 às 13:00 horas) e 753 m^3/s (14:00 às 17:00 horas). Em 12/12/82 estas vazões foram 628 m^3/s (1:00 às 16:00 horas) e 340 m^3/s (17:00 às 24:00 horas), respectivamente.

No evento de 30/03/83, o parâmetro "K" que melhor reproduziu as vazões acima referidas assumiu valor igual a 0,35, conforme pode ser visto na figura VI.29, onde também estão presentes os resultados das simulações com os valores de 0,3; 0,6 e 0,9. Procedendo-se a simulação do evento de 12/12/82 (fig. VI.30) com K = 0,35, as vazões calculadas apresentaram-se superiores às médias observadas de 628 m^3/s e 340 m^3/s, com maior

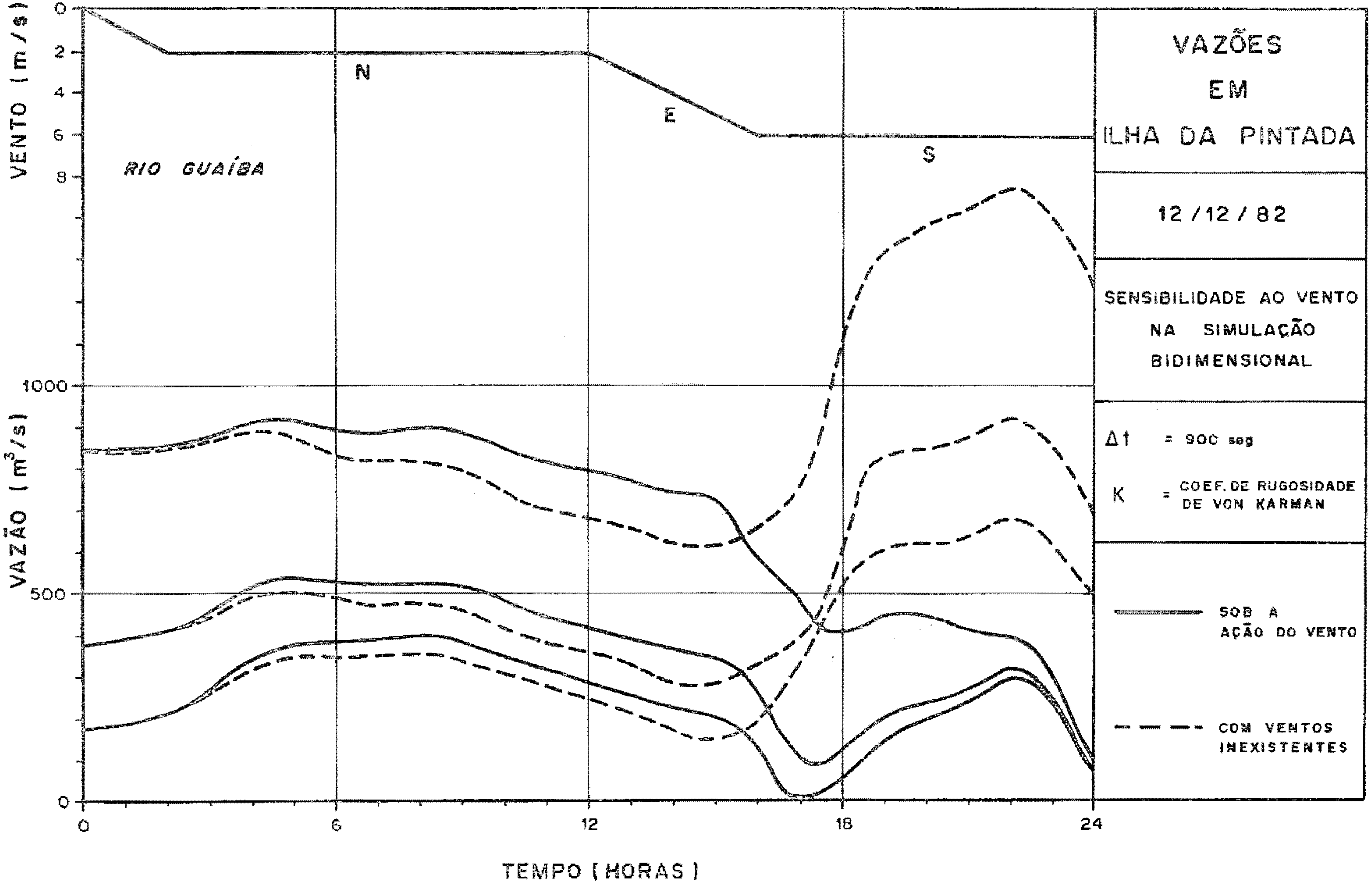

Figura VI.27 — Sensibilidade ao vento em 12/12/82

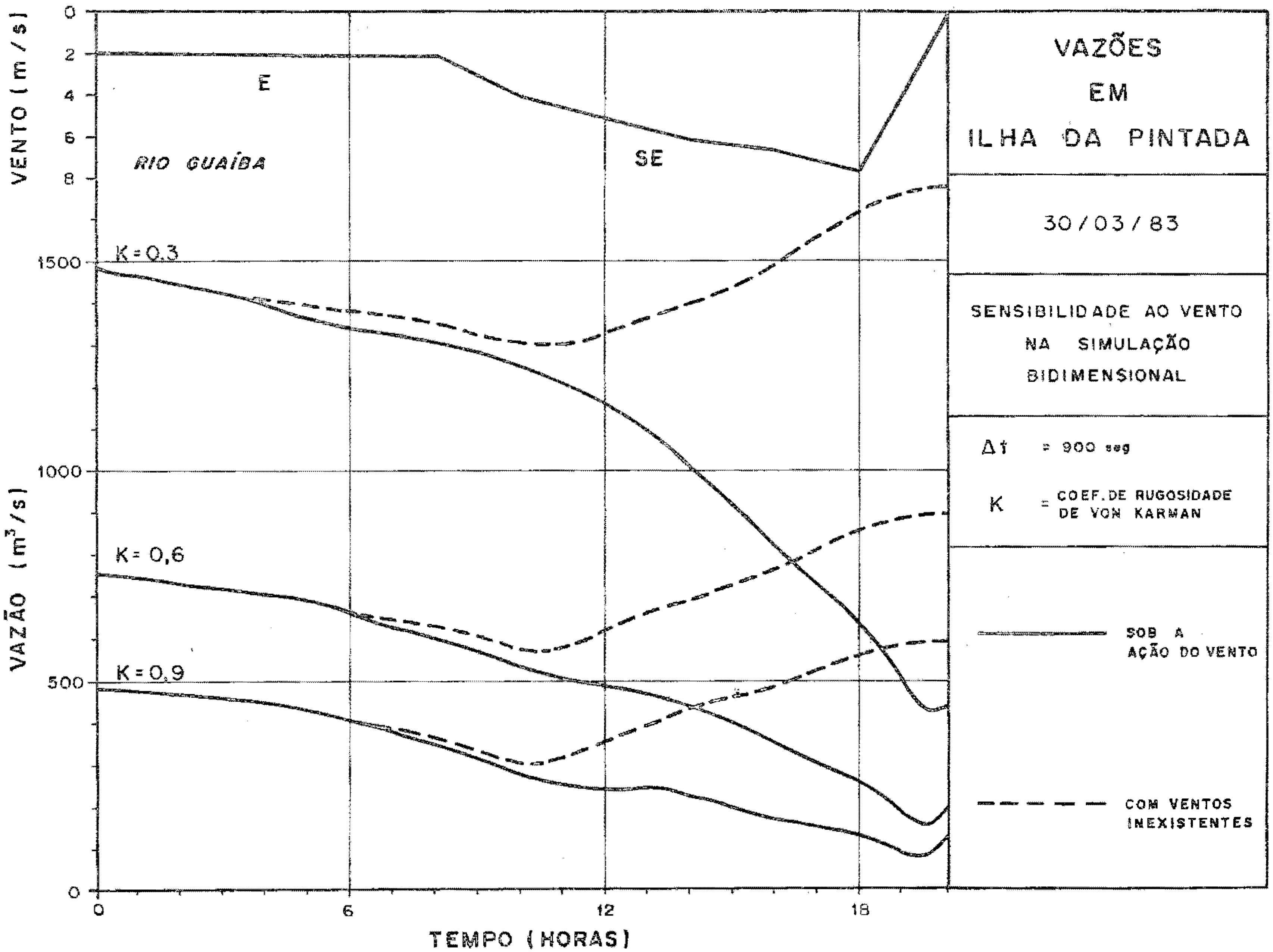

Figura VI.28 — Sensibilidade ao vento em 30/03/83

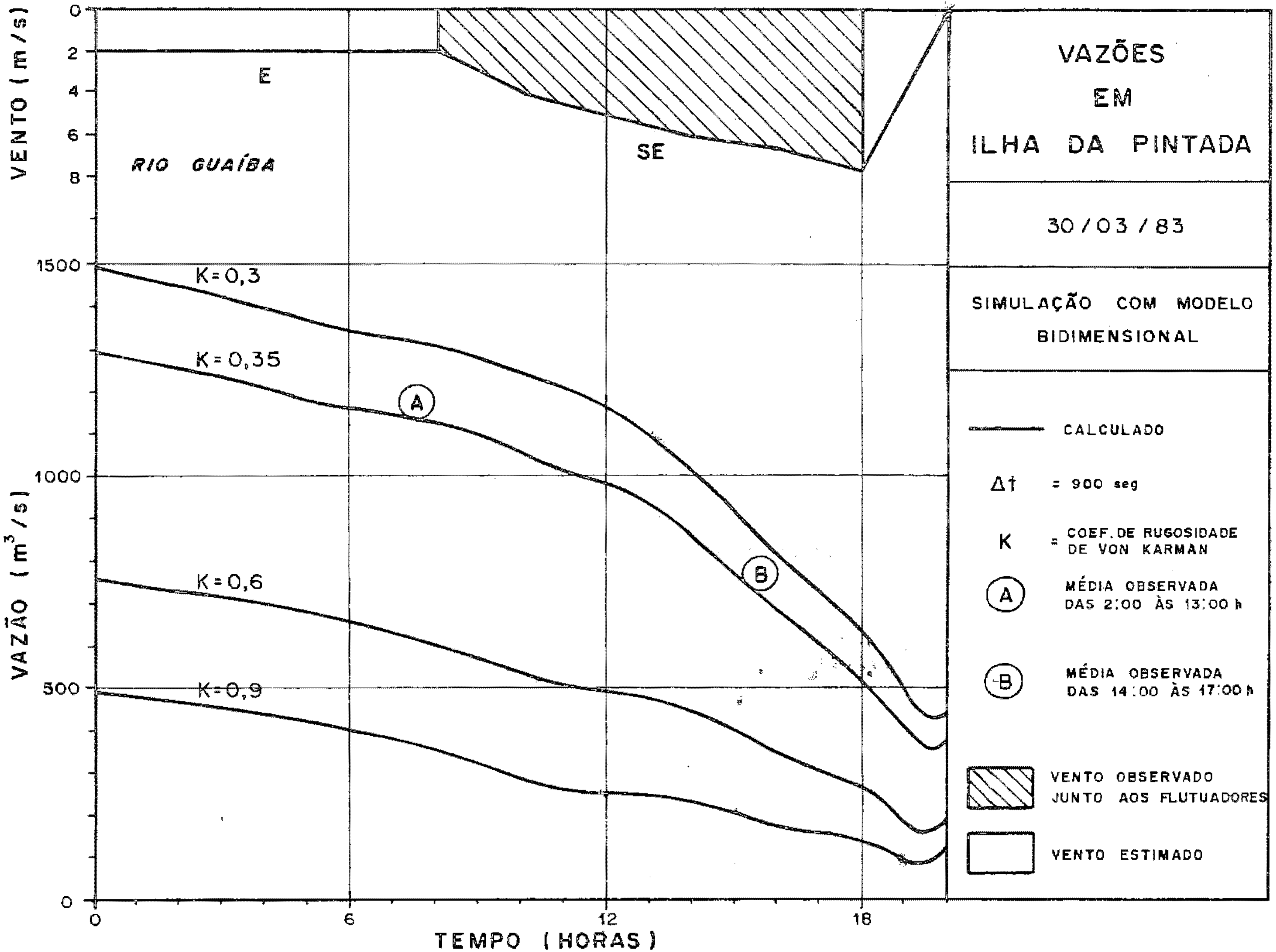

Figura VI.29 — Vazões em Ilha da Pintada em 30/03/83

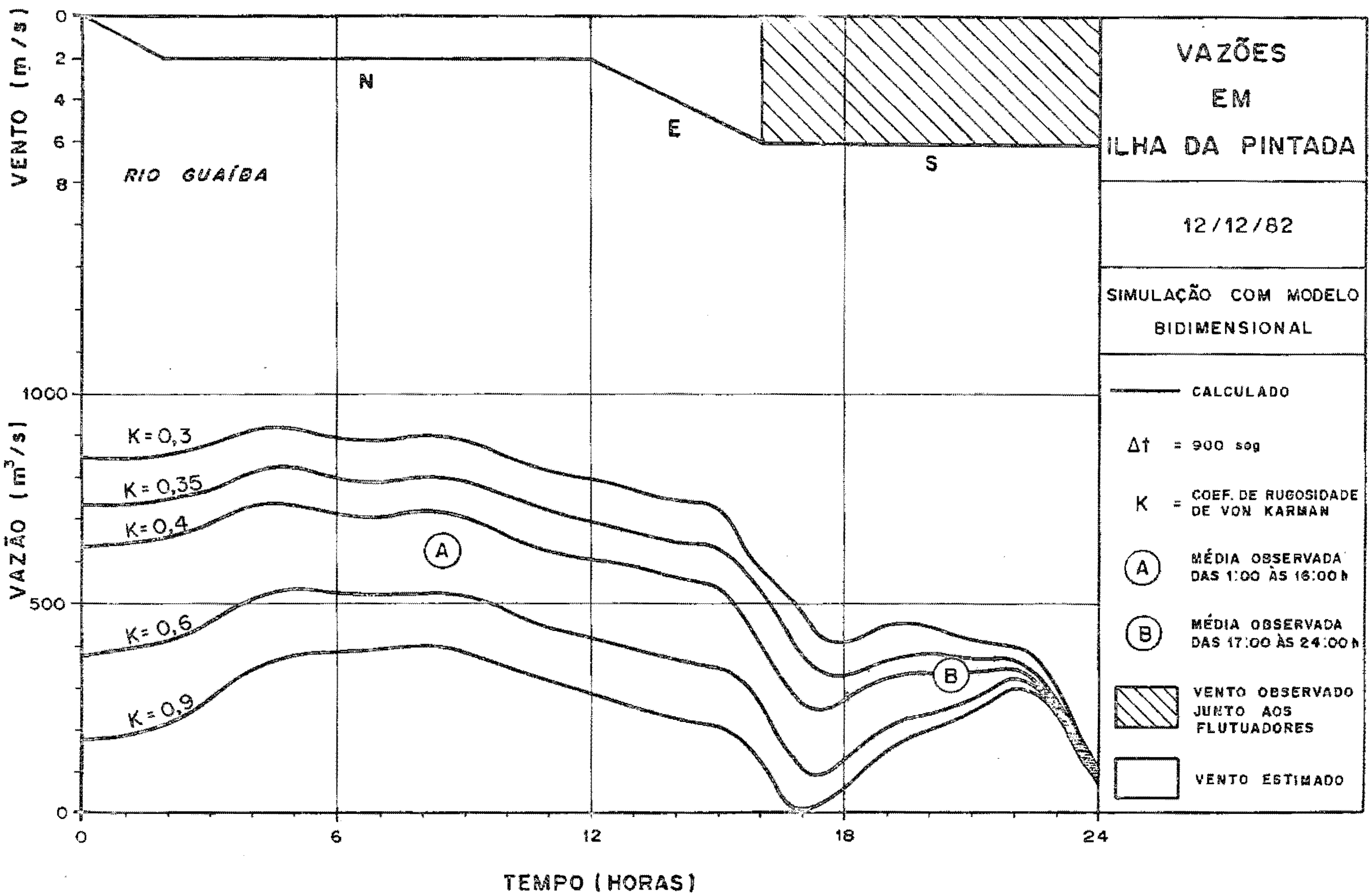

Figura VI.30 — Vazões em Ilha da Pintada em 12/12/82 diferença para a primeira. Simulando-se com K = 0,4 (maior rugosidade) a situação melhora, mas a vazão calculada no período de ventos fracos é ainda superior à observada. Provavelmente a causa desta diferença seja uma estimativa imperfeita do vento neste período.

Mesmo que se considere o valor de K = 0,35 como representativo, em função das vazões observadas na seção Ilha da Pintada, a aferição do modelo somente seria completa se os mapas das correntes calculadas (figs. VI.31 a VI.34) pudessem ser comparadas com velocidades e direções de escoamento medidas por correntógrafos, simultaneamente, em vários locais do rio Guaíba. Foram tentadas aferições com base nos dados dos flutuadores, mas, devido aos resultados incongruentes obtidos, chegou-se à conclusão, como já se suspeitava, de que as trajetórias observadas dos flutuadores nas duas campanhas não servem para aferir as velocidades horizontais calculadas pelo modelo. Enquanto estas representam médias verticais, o movimento dos flutuadores, em que pese a utilização de velas submersas, é basicamente regido pelas correntes próximas da superfície que, por sua vez, são profundamente dependentes da ação local e imediata dos ventos. É típica a forma em "S" do perfil vertical de velocidades de um ponto sob a ação do vento. Assim, os flutuadores sob a ação da parte superior deste "S" respondem muito mais às variações rápidas do vento do que às lentas variações das velocidades horizontais, médias na vertical. Além disso, a escala do modelo (menor dimensão igual a 1 Km) é muito ampla em relação a das trajetórias dos flutuadores que percorreram poucos quilômetros.

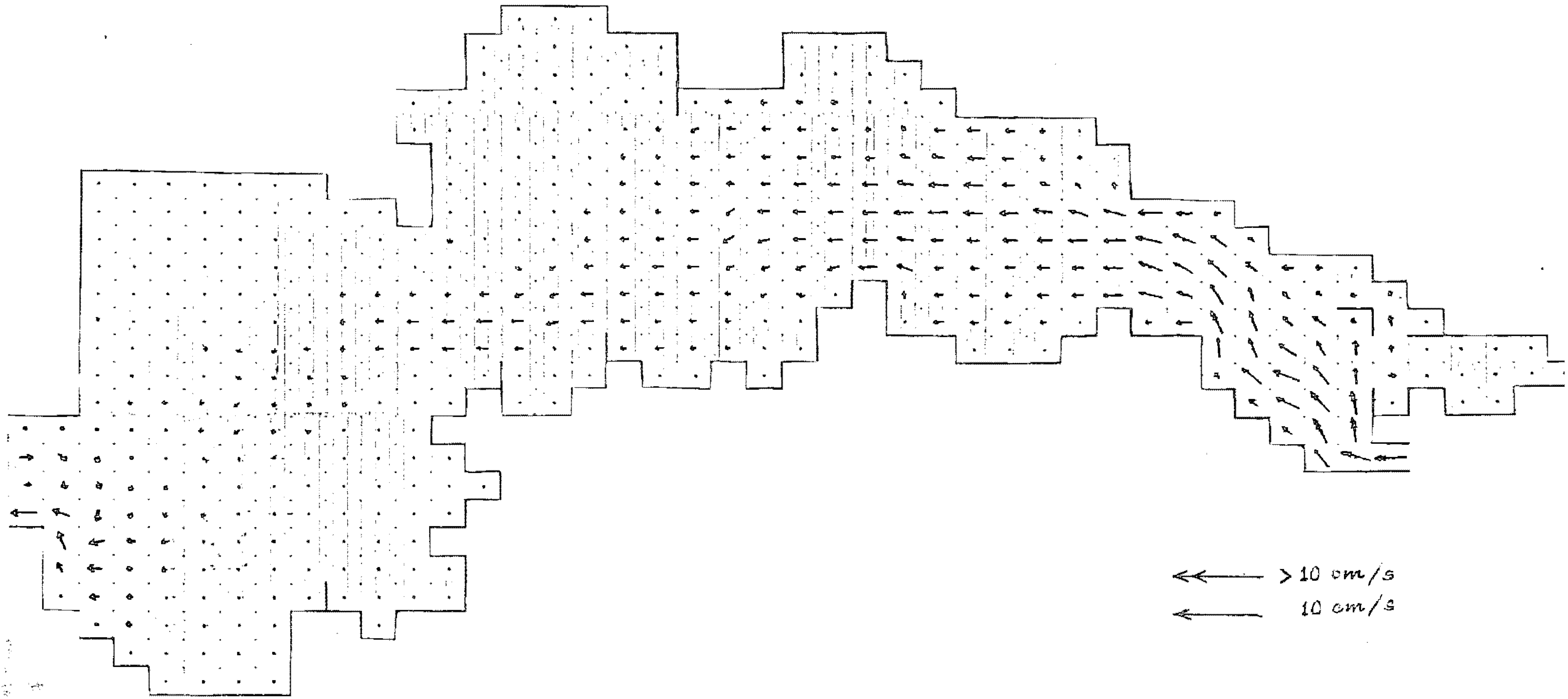

Figura VI.31 — Rio Guaíba, velocidades às 06 h de 12/12/82, K = 0,35

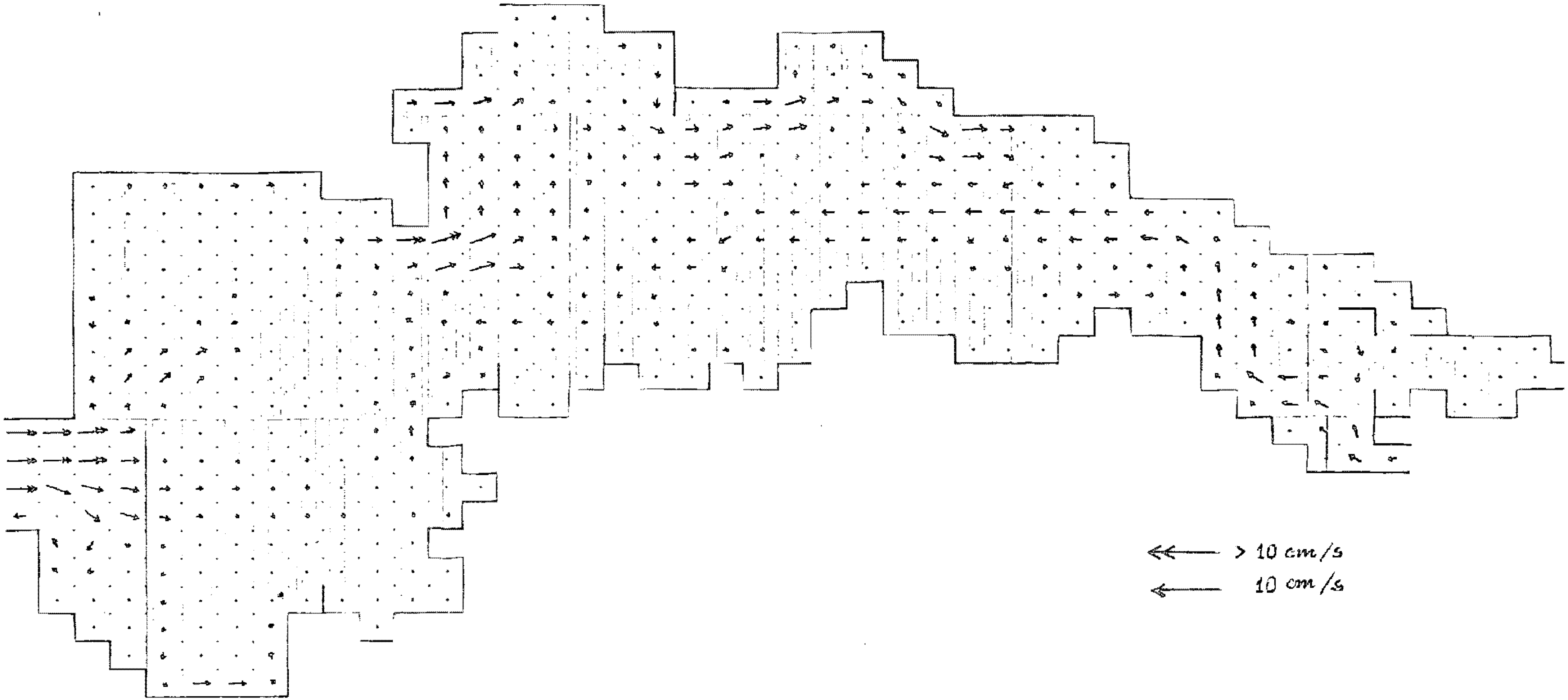

Figura VI.32 — Rio Guaíba, velocidades às 18 h de 12/12/82, K = 0,35

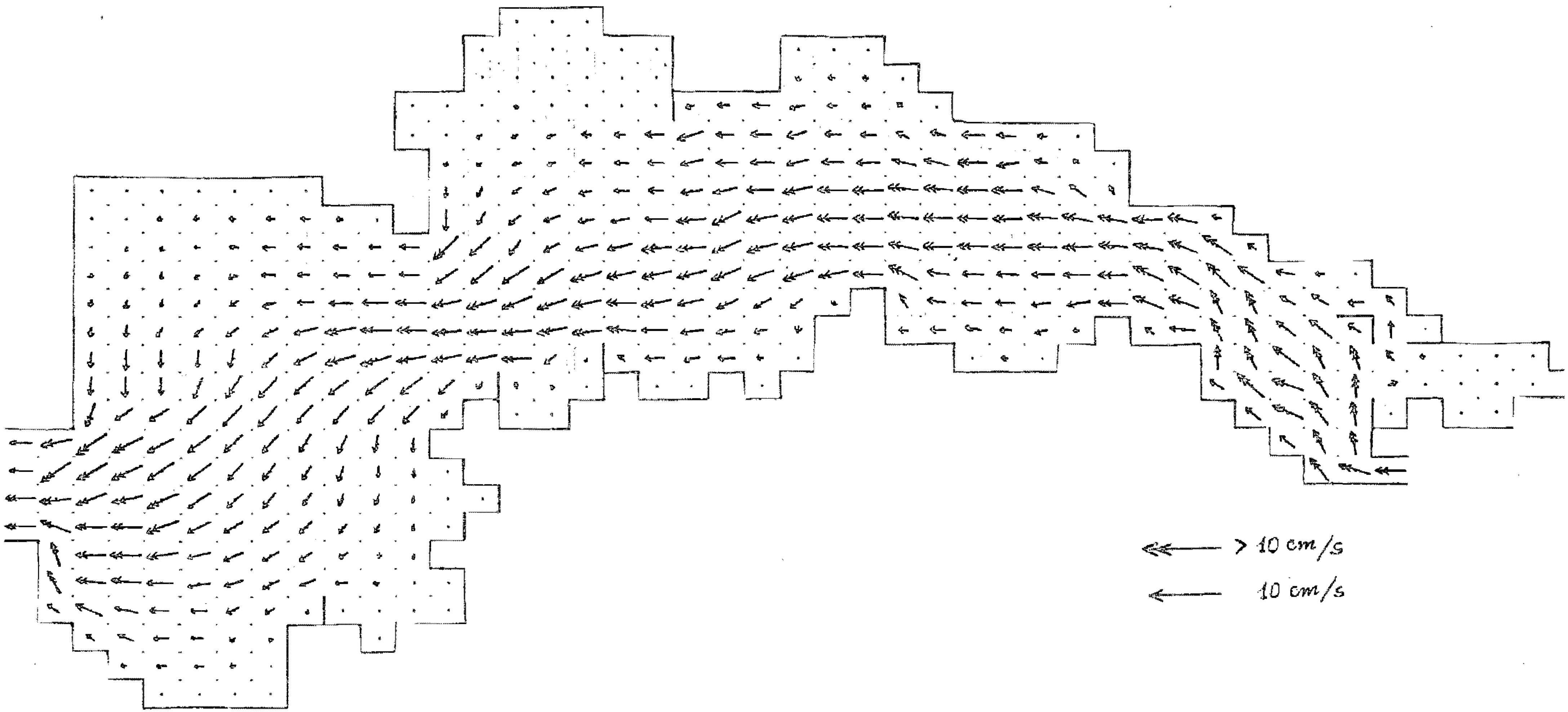

Figura VI.33 — Rio Guaíba, velocidades às 06 h de 30/03/83, K = 0,35

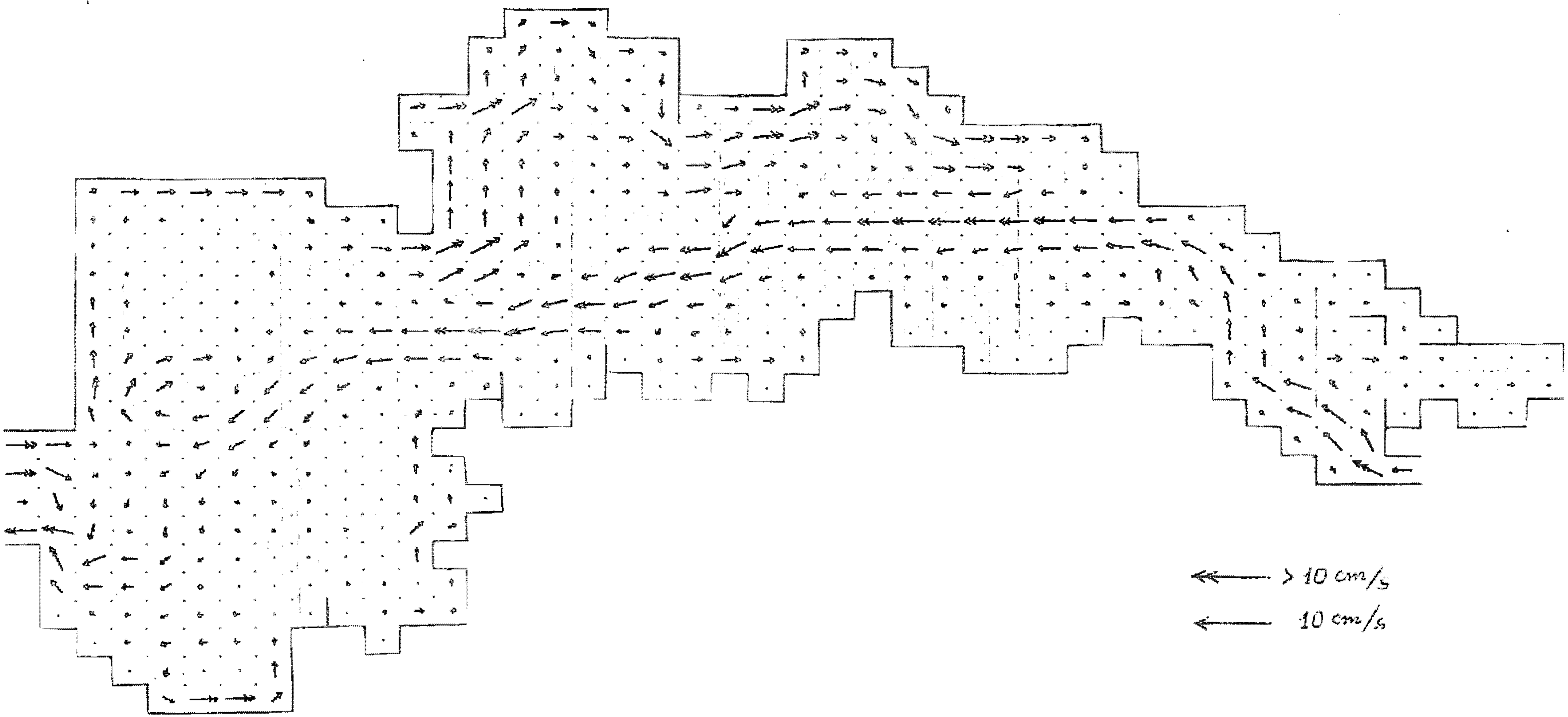

Figura VI.34 — Rio Guaíba, velocidades às 18 h de 30/03/83, K = 0,35

No contexto da extensa massa dágua do Guaíba a ação do vento com suas alterações de intensidade são incapazes, em geral de promover alterações radicais no sentido principal do fluxo, em um curto espaço de tempo (ver figs. VI.27 e VI.28) . Deve-se creditar esta ação mais as oscilações de nível d'água como a seiche (ver item subseqüente), que tem celeridade em torno de 6 m/s. Deste modo, é pouco provável que as trajetórias dos flutuadores nos ventos de 12/12/82 e 30/03/83 sejam decorrentes das variações do campo das velocidades horizontais, médias na vertical.

Apesar das incertezas relativas às mediações de vento e vazão, as simulações dos eventos de 12/12/82 e 30/03/83 apresentam resultados coerentes com o conhecimento já adquirido sobre o rio Guaíba. Verificou-se, por exemplo, que as velocidades de escoamento calculadas situam-se na ordem de grandeza esperada, em torno de 5 cm/s em águas médias e baixas; que a ação dos ventos, principalmente os fortes (6 m/s), são fundamentais na representação do escoamento; e que os mapas de correnres (figs. VI.31 a VI.34) podem assumir diferentes configurações, onde o papel das condições de contorno (níveis d'água em Pintada e Itapoã) é predominante.

A principal constatação, entretanto, refere-se ao parâmetro de ajuste do modelo, o parâmetro "K" de Von Karman, cujo melhor valor de 0,35 está de acordo com os testes teórico-práticos do item anterior, sendo compatível, inclusive, com medições de campo realizadas em rios com sedimentos em suspensão (Einstein e Abdel Aal, 1972). O parâmetro K = 0,35 corresponde, no Guaíba, a coeficientes de Chézy da ordem de 65 (SI), valor semelhante ao utilizado por Blumberg (1977) na baía de Chesapeake/USA. O coeficiente de atrito lateral "ε" calculado no modelo pela teoria de Prandtl, como o coeficiente de Chézy, por sua vez, apresentou valores insignificantes. Isto é compatível com a escala do modelo (velocidades calculadas referentes a áreas horizontais de 1 Km^2 e profundidades em torno de apenas 4 m) que conduz a uma baixa resistência aos giros, significando não ser o atrito lateral a fonte de eventuais vórtices ou giros no mapa de correntes. A definição de valores para o coeficiente de atrito lateral, que é afetado pelo tamanho da malha e do intervalo de tempo de cálculo, em casos práticos, ainda é matéria controversa, conforme demonstram os estudos de Flokstra (1976) e Ponce (1981). De acordo com o trabalho deste último, os vórtices que aparecem nas figs. VI.32 e VI.34 provavelmente são decorrentes da conformação irregular do fundo.

VI.4.3 — Simulação de uma seiche com vento

Com o parâmetro K = 0,35, estimado a partir dos eventos de 12/12/82 e 30/03/83, procedeu-se a simulação, no rio Guaíba, de um escoamento produzido por uma oscilação do tipo seiche associada a um vento típico, com a intenção de verificar o comportamento das correntes.

A seiche imposta foi a mesma utilizada no item VI.4.1 com um vento de 6 m/s, soprando no sentido sul-norte. A fig. VI.35 , abaixo, mostra as condições de contorno de nível em Pintada e Itapoã e o vento, durante as 50 horas de simulação.

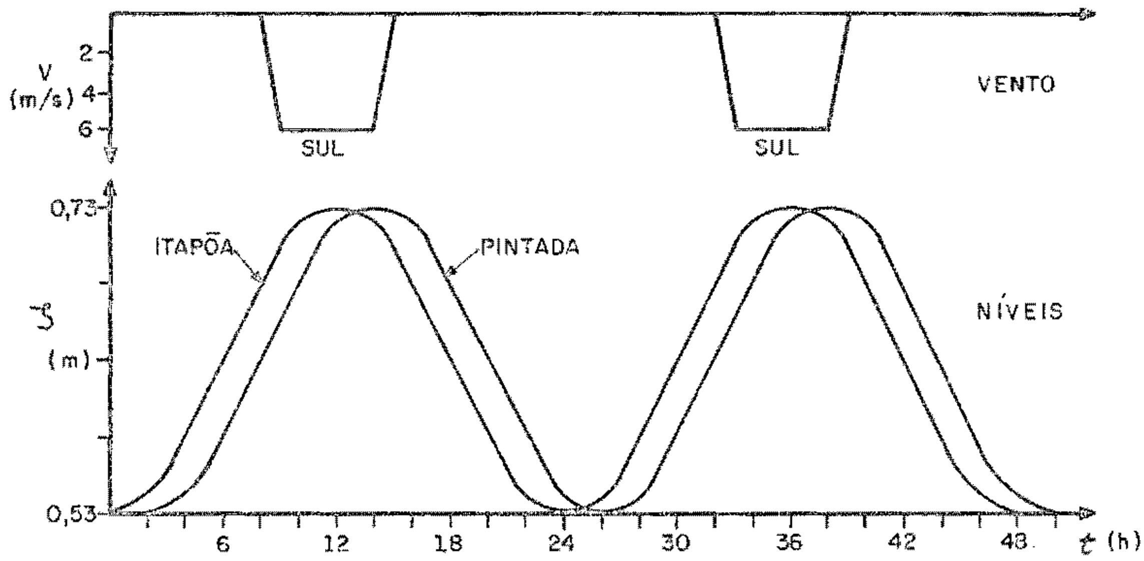

Figura VI.35 — Seiche com vento típico

Apesar de não ter recorrência definida, a propagação de uma oscilação de 20 cm acima de um nível médio, no sentido de jusante para montante (Itapoã-Pintada), com um vento sul de 6,0 m/s associado, deve ser considerada como um evento possível de acontecer em épocas de transição entre águas baixas e altas.

Os mapas de correntes das figs. VI.36 a VI.39 mostram os campos de velocidades calculados às 30, 36, 42 e 48 horas de simulação, representando um ciclo da seiche. Na seqüência das situações às 30 e 36 h vê-se claramente as velocidades decorrentes da propagação da seiche, com a completa inversão de correntes às 36 h. Das 36 às 42 h ocorre um fenômeno interessante de "esvaziamento" do Guaíba pelos seus dois extremos, espelhando a situação em que os níveis estão em baixa tanto na seção da Ilha da Pintada como em Itapoã. Nota-se que os fluxos de saída são equivalentes, apesar do gradiente de abaixamento ser maior em Itapoã (ver fig. VI.35). Provavelmente a ação do vento sul, favorável ao escoamento no sentido Itapoã-Pintada, colaborou para esta equivalência. A figura posterior, das 48 horas, mostra a tendência para o repouso, no nível inicial, das águas do Guaíba. Corresponderia ao início de um novo ciclo se a simulação fosse continuada.

Esta simulação com seiche e vento demonstra que a inversão total das correntes no Guaíba é um evento possível de acontecer, mas é preciso que haja uma oscilação de níveis com amplitude significativa, propagando-se de jusante para montante. E o tempo esperado para uma inversão deve ser equivalente ao período da onda. Quanto aos ventos do quadrante sul, mesmo fortes, sua ação parece apenas agravar o quadro composto pela seiche.

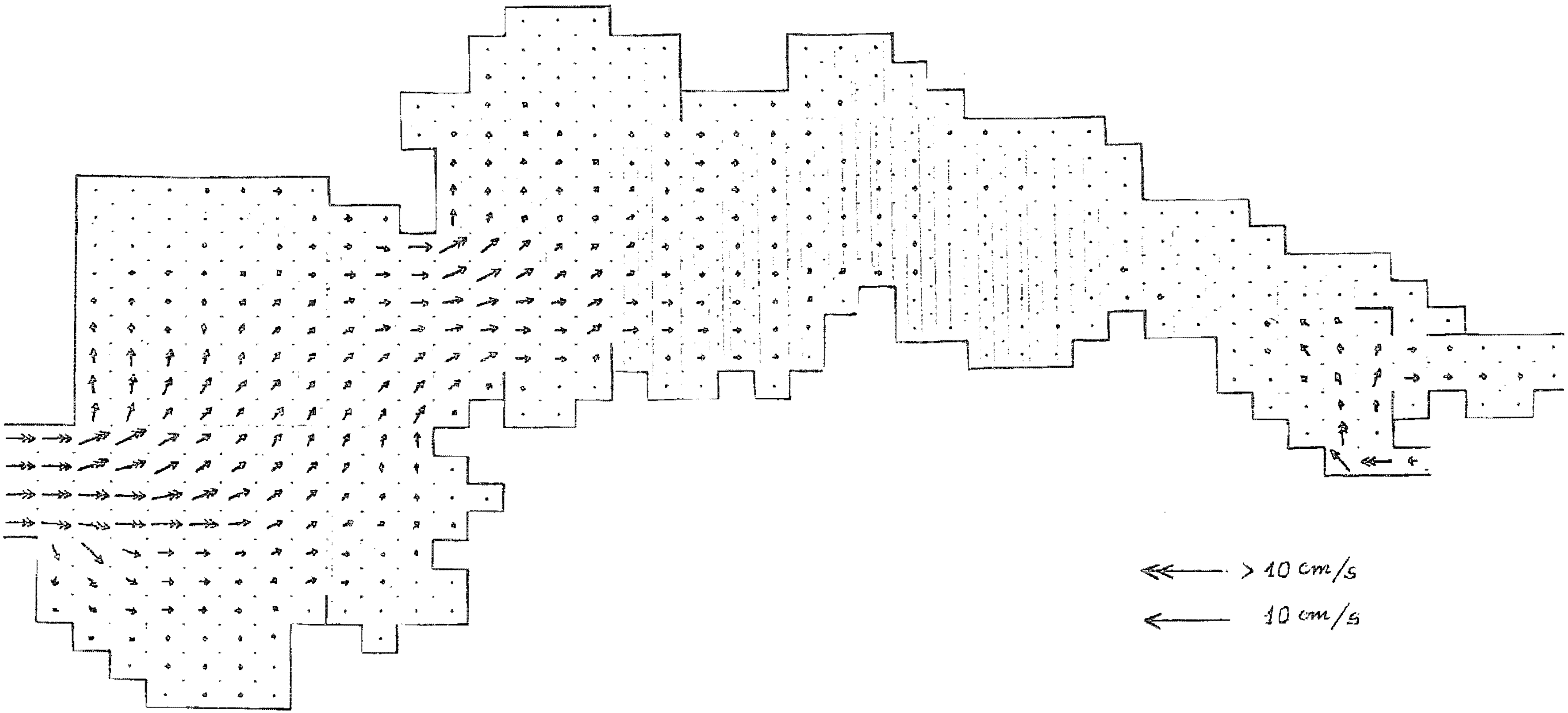

Figura VI.36 — Rio Guaíba, velocidades às 30 h de simulação de seiche com vento sul, K = 0,35

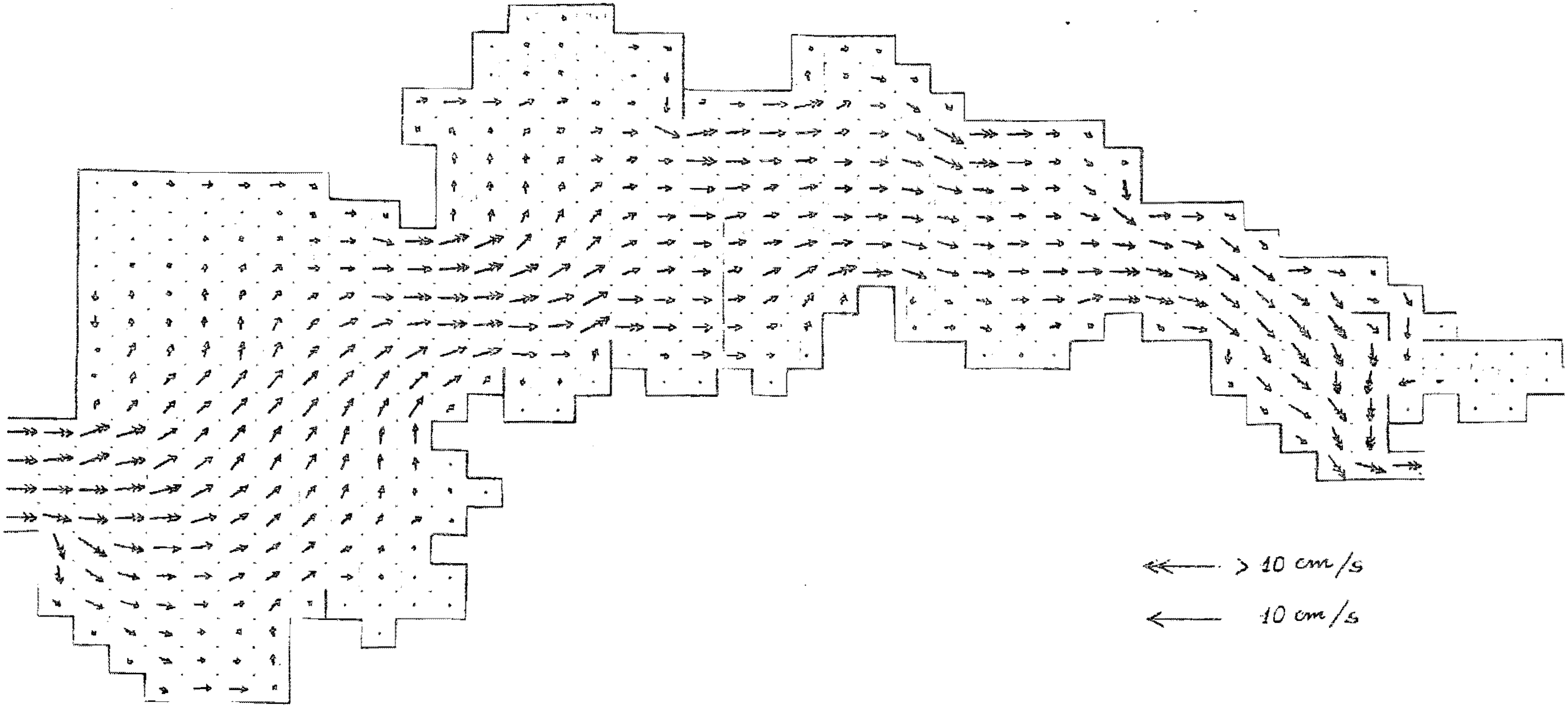

Figura VI.37 — Rio Guaíba, velocidades às 36 h de simulação de seiche com vento sul, K = 0,35

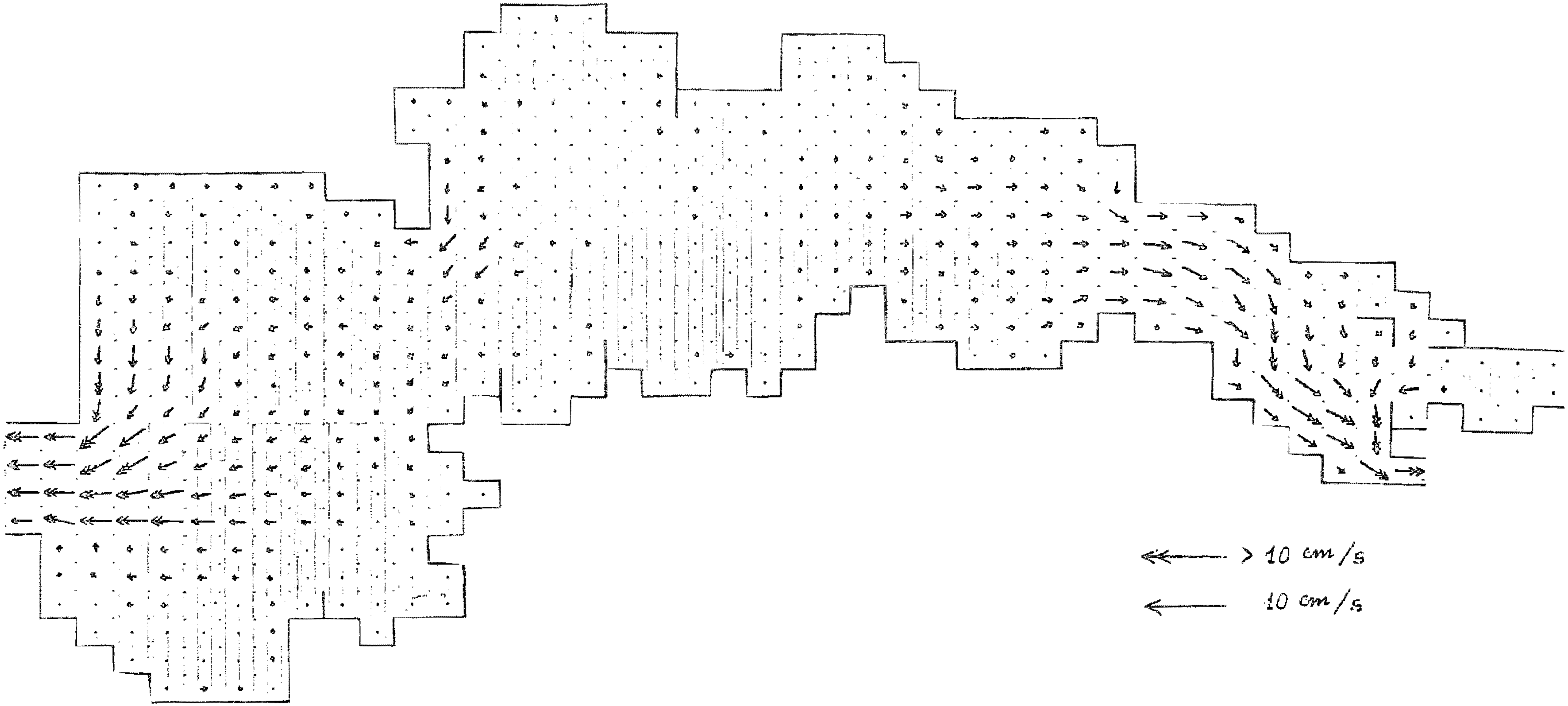

Figura VI.38 — Rio Guaíba, velocidades às 42 h de simulação de seiche com vento sul, K = 0,35

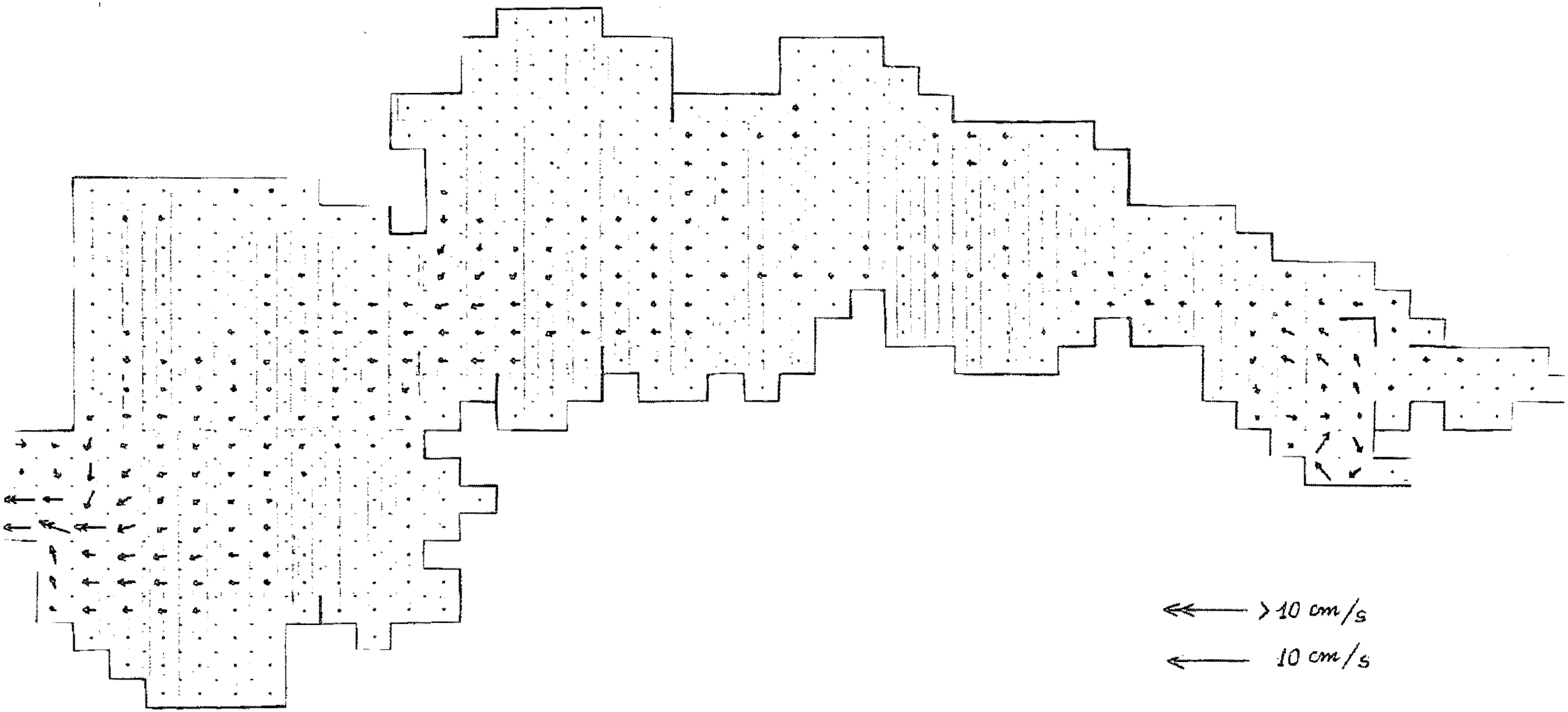

Figura VI.39 — Rio Guaíba, velocidades às 48 h de simulação de seiche com vento sul,
K = 0,35

VI.5 — APLICAÇÃO DO MODELO BIDIMENSIONAL AO RIO GUAÍBA: CONCLUSÕES

Neste capítulo foi estruturado o modelo bidimensional do rio Guaíba (um lago, na verdade) de acordo com a esquematização geral do programa computacional definida nos capítulos anteriores.

O modelo resultante, com 470 células quadradas úteis de 1 Km² e 98 matrizes tridiagonais para resolver em cada intervalo de tempo pelo esquema ADI, representa um corpo d'água com um escoamento complexo, que é profundamente afetado pelas condições de contorno nos seus extremos (Itapoã e Pintada) e pela ação dos ventos.

A execução deste modelo bidimensional do Guaíba foi precedida por uma análise de deformação de onda em um canal retangular. Este experimento, levado a efeito com o mesmo modelo computacional bidimensional, procurava o ajuste da celeridade da onda calculada à da onda teórica, para que o campo de velocidades fosse melhor representado. Este ajuste teve o efeito paralelo de amplificação dos níveis d'água, um fenômeno não de todo inesperado, já que a análise numérica de Leendertse(1967) prevê esta ocorrência em certos esquemas implícitos com termo de rugosidade presente.

Com o modelo do Guaíba foi repetido o mesmo experimento, detectando-se também a amplificação de níveis, característica importante para o uso do modelo. As simulações demonstraram que o ajuste das celeridades, que contribui para uma me lhor representação das velocidades horizontais, correspondia à faixa de 0,2 a 0,4 para o parâmetro "K", de Von Karman.

Tendo esta faixa de valores para "K" como uma referência, procedeu-se às simulações de eventos reais, com valores de vazão medidos na seção de contorno da Ilha da Pintada (12/12/82 e 30/03/83). Nestas similações ficou caracterizado o papel fundamental do vento e a sensibilidade do escoamento ao parâmetro "K". O melhor valor para este parâmetro, comparando-se vazões médias observadas e calculadas, ficou próximo a 0,35, que é um valor coerente com algumas medições em rios com sedimentos em suspensão (Einstein e Abdel-Aal, 1972) e com a faixa acima referida.

Apesar deste resultado promissor, não é possível considerá-lo como uma calibração efetiva do modelo. Seriam necessários dados concomitantes de correntologia, em diversas partes do Guaíba, para aferir os mapas de velocidade calculados, mesmo que estes tenham se mostrado compatíveis com os conhecimentos disponíveis atualmente.

Os resultados obtidos, contudo, serviram para demonstrar a inegável potencialidade do modelo bidimensional como instrumento de ajuda ao gerenciamento dos recursos hídricos de um lago como o rio Guaíba. Em relação a este aspecto seria interessante a busca de uma melhor harmonização entre as informações possíveis de serem obtidas pelo modelo bidimensional e os dados básicos de campo necessários à sua constante calibração.

VII — CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Nesta dissertação foi desenvolvido um modelo matemático capaz de reproduzir escoamentos horizontais não permanentes em corpos d'água bidimensionais com superfície livre. A seguir é feito um sumário das características principais do modelo, acompanhado de conclusões provenientes da sua aplicação ao rio Guaíba:

1) As equações diferenciais do modelo são resultantes da integração no tempo e no espaço (dimensão vertical) das equações gerais deduzidas para o escoamento de um fluido newtoniano incompressível, de densidade homogênea e constante, com base nas leis de conservação da massa e da quantidade de movimento.

2) Nas equações integradas, os fenômenos considerados incluem a inércia, a gravidade, a rotação terrestre e os atritos, na superfície livre (ventos), no fundo, e nas superfícies laterais do próprio fluido (resistência a vórtices). Estes dois últimos, vinculados à turbulência do escoamento.

3) Os fenômenos ondulatórios reproduzíveis pelo sistema de equações integradas (a equação da continuidade e as e-

quações dinâmicas horizontais) são do tipo de pequena amplitude relativa (long waves).

4) O esquema numérico empregado para solução do sistema de equações diferenciais integradas é o esquema multioperacional de diferenças finitas implícito de Leendertse (1967) que resolve, alternadamente, as linhas e as colunas da malha de cálculo, nos semi-intervalos de tempo sucessivos. A cada linha e a cada coluna de cálculo está associado um sistema linear tridiagonal com equações de diferenças centradas no espaço e no tempo (com exceção dos termos convectivos e de atrito com o fundo). A linearização nestes sistemas tridiagonais é compatível com a pequena variabilidade esperada das variáveis do escoamento (níveis d'água e velocidades horizontais, médias na vertical) decorrente de "long waves".

5) O modelo computacional desenvolvido está apto a simular escoamentos de corpos d'água bidimensionais com qualquer "recorte" em planta e com quaisquer localizações de condições de contorno externas (de nível ou velocidade). Na representação do corpo d'água considera, ainda, a presença de ilhas, estirões e outras conformações emersas compatíveis com a escala da malha de cálculo. As limitações que persistem são a imutabilidade do "recorte", sem possibilidade de reprodução de possíveis alagamentos das margens, e a representação uniforme do vento por um vetor válido para toda a superfície livre.

6) A malha de cálculo é constituída de células iguais e retangulares, sendo preferível o emprego de células quadra-

das ($\Delta x = \Delta y$) que não produzem distorções espaciais nos desenhos dos vetores velocidade. A dimensão (Δx) das quadrículas, a escala da malha de cálculo, além de ser adequada à representação das margens e do próprio escoamento, deve respeitar um valor máximo de 20% do comprimento de onda (λ) de uma onda típica, a fim de evitar problemas numéricos.

7) Para a definição de um valor de Δt (intervalo de tempo) compatível com a estabilidade e acuracidade numéricas é indicada a utilização dos resultados da análise de deformação de onda de Leendertse (1967), que relaciona os indicadores numéricos "$(\Delta t/\Delta x)\sqrt{gh}$" e "$\lambda/\Delta x$" com relações de celeridades e amplitudes de ondas calculadas e físicas, em alguns esquemas lineares implícitos. Em geral os resultados desta análise são menos conservadores que aqueles baseados apenas em números de Courant.

8) Os dados geométricos requeridos pelo modelo são as profundidades, abaixo de um plano de referência, e os códigos de contorno de cada quadrícula; os vetores código de posição na malha das sub-linhas e sub-colunas de cálculo; e os vetores códigos de posição e tipo das condições de contorno. São também necessários a latitude média de localização da malha e a orientação relativa ao norte geográfico.

9) Os parâmetros de ajuste do modelo são o "K" de Von Karman e "z_0" de Prandtl (ambos da teoria de turbulência deste último) e o coeficiente de atrito do vento com a superfície livre. Os parâmetros "K" e "z_0", válidos para toda a malha

de cálculo, definem, em função da profundidade, os coeficientes "C" de Chézy (do termo de atrito com o fundo) e de atrito lateral "ε" em cada quadrícula. O coeficiente de atrito na superfície livre tem, no modelo, a formulação empírica de Garrat (Ramming e Kowalik, 1980).

10) No modelo estruturado para o rio Guaíba a malha com 1170 células quadradas de 1 Km² (26 linhas e 45 colunas) representa com fidelidade o contorno das margens. A escala espacial Δx = 1 Km está adequada às oscilações típicas do rio Guaíba que são seiches com mais de 500 Km de comprimento de onda e 10 cm de amplitude. Estas dimensões permitiram a utilização de um intervalo de tempo Δt = 15 min (que conduz a um número de Courant alto) sem prejuízo significativo da estabilidade e acuracidade numéricas. Pelo alto valor da relação $\lambda/\Delta x$ é possível que o Δt possa assumir valores mais elevados ainda.

11) A deformação de onda, inerente à esquematização numérica implícita, com termo de rugosidade presente, prevista pela análise teórica de Leendertse (1967), foi detectada em experimentos em um canal retangular e no rio Guaíba onde foi simulada a propagação de uma seiche, com celeridade ajustada à da onda teórica. No Guaíba, a senóide dos níveis na Ilha da Pintada foi amplificada em cerca de 8%. A faixa de variação do parâmetro "K", para ajuste das celeridades no Guaíba (com z_0 fixado em 1 mm), ficou entre 0,2 e 0,4.

12) Na simulação de eventos reais no Guaíba, com aportes de vazão medidos na seção Ilha da Pintada (dias 12/12/

/82 e 30/03/83, águas baixas e médias, respectivamente), ficou patente a influência do vento no escoamento desta seção. Com níveis como condição de contorno em Itapoã e Ilha da Pintada, a redução calculada da vazão afluente nesta última, por ação de ventos fortes (~ 6 m/s) do quadrante sul, chegou a 70%.

13) Sem propriamente constituir-se em uma calibração, o melhor valor para "K", de 0,35, obtido nas simulações com os eventos reais, mostrou-se coerente com a faixa definida pelos experimentos com a seiche e com medições de campo em rios com sedimentos em suspensão. Este valor K = 0,35 corresponde a coeficientes de Chézy da ordem de 65 que são condizentes com simulações bidimensionais realizadas por outros autores em baías com pouca profundidade.

14) Com o valor de K = 0,35 a simulação de uma seiche associada a um vento forte do quadrante sul indica ser possível a inversão total das correntes no Guaíba, sendo esta situação possivelmente criada mais em função da onda que se propaga de jusante para montante do que em função do vento que teria o papel de um fator agravante importante.

15) Nas simulações efetuadas não foram notadas influências significativas das condições iniciais (velocidades nulas e níveis de um estado médio do Guaíba) por mais de 100 intervalos de tempo. Como precaução foram admitidos períodos de "adaptação" equivalentes aos dos eventos simulados.

16) As condições de contorno do tipo nível neste modelo bidimensional parecem ser mais apropriados quando a rela-

ção nível-vazão não é possível de ser aproximada a uma relação unívoca. Nestes casos a fixação de velocidades como condição de contorno em uma quadrícula, pela própria esquematização da solução por linhas e colunas, condiciona os níveis desta quadrícula (e das próximas), mais intensamente que uma perturbação vinda de quadrículas vizinhas. Desta forma torna-se impraticável a simulação de um fenômeno em que as velocidades variam para um mesmo nível d'água. Este é o caso das condições de contorno do Guaíba onde, para um mesmo nível d'água, é possível a passagem de uma extensa gama de vazões, afluentes e defluentes.

17) A aferição dos mapas de corrente com trajetórias de flutuadores não foi possível porque estes respondem mais às variações das correntes superficiais (afetadas pelo vento), enquanto que o modelo bidimensional calcula velocidades horizontais médias do fundo à superfície. Para uma efetiva aferição das correntes seriam necessáros dados de correntógrafos, de diversos locais, situados a profundidades representativas. Entretanto, mesmo sem aferição dos mapas de correntes mostraram-se coerentes com o conhecimento disponível, principalmente no que se refere à ordem de grandeza das velocidades e sua configuração.

Tendo em vista todo o desenvolvimento do modelo bidimensional e a sua aplicação ao rio Guaíba, as recomendações prendem-se mais ao desenvolvimento do potencial deste instrumento matemático no gerenciamento e conhecimento dos recursos hídricos do sistema costeiro lagunar do Rio Grande do Sul (principalmente, rio Guaíba e lagoa dos Patos).

Desta forma seria interessante que:

1) Houvesse mais campanhas de campo onde simultaneamente fossem medidos vazões nos contornos do sistema, velocidades e direções de vento em diversos locais (nas margens ou no interior), e principalmente, velocidades de corrente em vários pontos do corpo d'água. As campanhas devem caracterizar bem situações de inverno, verão e intermediárias.

2) Fosse estudado em profundidade o fenômeno das oscilações regulares de nível d'água do Guaíba (a "seiche") com a comprovação da sua origem na Lagoa dos Patos. Estudos estatísticos de níveis, ventos e pressões atmosféricas poderiam ser levados a efeito.

3) Dado o complexo regime hidrodinâmico dos sistemas Delta do Jacuí/Guaíba ou Delta do Jacuí/Guaíba/Lagoa dos Patos, fossem desenvolvidos modelos acoplados dos sub-sistemas para melhor simular escoamentos em locais sujeitos a grandes variações de escoamento como as seções de contorno do Guaíba (Itapoã e Ilha da Pintada).

4) Fosse desenvolvido um modelo bidimensional de transporte de massa para que fenômenos de poluição, como os que podem ocorrer nos despejos do arroio Dilúvio e rio dos Sinos, possam ser simuladas no rio Guaíba ou lagoa dos Patos. Naturalmente que são indispensáveis medições de campo de disper-

são de solutos.

Por fim, recomenda-se o uso criterioso do modelo bidimensional, principalmente em situações onde os dados de campo não são os ideais para uma calibração e verificação efetivas.

VIII — BIBLIOGRAFIA

1. ABBOTT, M.B.; DAMSGAARD, A. and RODENHUIS, G.S. System 21, Jupiter (A design system for two-dimensional nearly horizontal flows. **Journal of the Hydraulic Research**, Vol. 11, 1973. pp.1-28.

2. ABBOTT, M.B. Computational Hydraulics: A Short Pathology. **Journal of Hydraulic Research**. Delft, 1976, 5(2):96-117.

3. AZEVEDO, J.R. Influência das variações da pressão atmosférica sobre as oscilações do Guaíba. **Revista de Engenharia do Rio Grande do Sul**. Porto Alegre, dez, 1945, 1(3): 120-44.

4. BENQUÉ, J.P.; CUNGE, J.A.; FEUILLET, J.; HAUGUEL, A. and HOLLY, F.M. New Method for Tidal Current Computation. **Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division.** ASCE, Vol. 108, No. WW3, Aug., 1982. pp.396-417.

5. BLUMBERG, A.F. Numeral Tidal Model of Chesapeake Bay. **Journal of the Hydraulics Division**. ASCE, Vol. 103, No. HY1, Jan, 1977. pp.1-10.

6. BORDAS, M.P.; CASALAS, A.B., SILVEIRA, A.L.L. e GONÇALVES , M.R.R. Circulação e Dispersão em Sistemas Costeiros e Oceânicos - Caso da Lagoa dos Patos. Projeto CIRM/UFRGS. **II Simpósio** Brasileiro sobre Recursos do Mar. Rio de Janeiro, 14 a 19 de out. 1984. CIRM/UERJ.

7. CASALAS, A.B. Modelo Matemático de Correntologia do Estuário do Rio Guaíba. **Relatório** Interno IPH., 1984.

8. CHIANG, W.L. and LEE, J.J. Simulation of Large-Scale Circulation in Harbors. **Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division.** ADCE; Vol. 108, No. WW1, Feb., 1982. pp.17-31.

9. CHRYSTAL, G. On the hydrodynamical theory of seiches. Trans. Royal Society, Edinburgh, 41, 1905.

10. DAUBERT, A. and GRAFFE, O. **Quelques Aspects des Ecoulements Presque Horizontaux aux Deux Dimensions en Plan et Nom Permanents, Application aux Estuaries.** La Houille Blanche, Grenoble, France, Vol. 22, 1967. pp.847-860.

11. DMAE/IPH. Convênio UFRGS/DMAE para Estudo do Comportamento Hidráulico do Delta do Jacuí. **Relatório** parcial nº 6 e Relatório final, 1978.

12. DNAEE/1º Distrito. Bacia do Guaíba. Mecânica de Correntes do Guaíba. **Relatório** Síntese, dez., 1983.

13. DRONKERS, J.J. **Tidal Computations in Rivers and Coastal Waters.** John Wiley & Sons, Inc. New York, 1964.

14. _____. Tidal Computations for Rivers, Coastal Areas and Seas. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol.95 No. HY1, Jan, 1969. pp.29-77.

15. EINSTEIN e ABDEL-AAL, 1972. Variação do coeficiente K de Von Karman em função da suspensão. **Notas de aula** de Mecânica Fluvial, Curso de Mestrado, IPH, 1982.

16. FALCONER, A.A. Numerical Modelling of Tidal Circulation in Harbors. **Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division.** ASCE, Vol. 106, No. WW1, Feb., 1980. pp. 31-48.

17. FISCHER, H.B. Some Remarks on computer Modelling of Coastal Flows. **Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division.** ASCE, Bol. 102, No. WW4, Nov. 1976. pp.395-406.

18. FLOKSTRA, C. Generation of Two-Dimensional Horizontal Secondary Currents. **Reports** S 163-II, Delft Hidraulics Laboratory, Delft, The Netherlands, Jul, 1976.

19. GRUBERT, J.P. Numerical Computation of Two-Dimensional Flows. Journal **of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division.** ASCE, Vol. 102, No. WW1, Feb., 1976. pp.1-12.

20. HAMILTON, G.D.; SOILEAU, C.W. and STRUD, A.D. Numerical Modelling Study of Lake Pontchartrain. Journal **of** the **Waterway, Port, Coastal and Ocean Division.** ASCE, Vol. 108, No. WW1, Feb., 1982. pp.49-6.

21. HANSEN, W. Theorie zur Errechung des Wassersrandes and der Strömunger in Randmeeren nebst Anwendungen. Tellus, Vol. 8, 1956. pp.288-300.

22. HANSEN, W. Hydrodynamical Methods Applied to Oceanographic Problems. Proceedings of the Symposium on Mathematical--Hydrodynamical Methods of Physical Oceangraphy. Institut für Meereskunde der Universitat Hamburg, 1962.

23. HERZ, R. Circulação das Águas de Superfície da Lagoa dos Patos. Tese de Doutoramento, USP, São Paulo, 1977.

24. HINWOOD, J.B. and WALLIS, I.G. Classification of Models of Tidal Waters. **Journal of the Hydraulics Division**, ASCE, Vol. 101, No. HY10, October, 1975. pp.1315-1331.

25. _____. Review of Models of Tidal Waters. **Journal of the Hydraulics Division**. ASCE, Vol. 101, No. HY11, November, 1975. pp.1405-1421.

26. HINZE, O. **Turbulence**. Mc Graw Hill, New York, 1959.

27. IPH. **Relatório** das campanhas de campo de 12/12/82 e 30/03/83, 1982/83.

28. LEAN, G.H. and WEARE, T.J. Modelling Two Dimensional Circulating Flow. **Journal of the Hydraulics Division**. ASCE, Vol. 105, No. HY1, Jan. 1979, pp.17-26.

29. LEENDERTSE, J.J. Aspects of a Computational Model for Long-Period Water Wave Propagation. RM-5294-PR, Rand Corp., May, 1967.

30. _____. A Water Quality Simulation Model for Well Mixed Estuaries and Coastal Seas. Vol. 1. Principles of Computation, RM-6230-RC, Rand Corp., Feb., 1970.

31. LEENDERTSE, J.J. and GRITTON, E.C. A Water Quality Simulation Model for Well Mixed Estuaries and Coastal Seas. Vol. 2. Computation Procedures, R-708-NYC, Vol. 3. Iamaica Bay Simulation, R-709-NYC, Rand Corp., July, 1971.

32. LEENDERTSE, J.J.; ALEXANDER, R.C. and LIU, S.K. A Three Dimensional Model for Estuaries and Coastal Seas. Vol. 1. Principles of Computation, R-1417-OWRR, Rand Corp., Dec., 1973.

33. LIU, H. and PEREZ, H.J. Wind-Induced Circulation in Shallon Water. **Journal of the Hydraulics Division**, ASCE, Vol. 97, No. HY7, Jul, 1971, pp.923-935.

34. MASCH, F.D. et al. Numerical Model for the Simulation of Tidal Hydraulics in Shallow Irregular Estuaries. University of Texas, Hydraulics Engineering Laboratory Technical Report HYD-12-7104, 1971.

35. NIEMEYER, G. Long Wave Model Independent of Stability Criteria. **Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division**. ASCE, Vol. 105, No. WW1, Feb., 1979, pp.51-65.

36. PRITCHARDT, D.W. Lectures by D. Pritchardt. Nato Advanced Study Institute on Estuary Dinamics. Lisbon, June-July, 1973.

37. PHILLIPS, N.A. An Example of Non-Linear Computational Instability. The Atmosphere and Sea in Motion. Rockefeller Institute Press, New York, NY, 1959, pp.501-504.

38. PLATZMAN, G.W. A Numerical Computation of the Surge of 26 June 1954 on Lake Michigan. **Geophysics**. Vol. 6, No. 3--4, 1959. pp.407-438.

39. PONCE, V.M. and YABUSAKI, S.B. Modeling Circulation in Depth-Averaged Flow. **Journal of the Hydraulics Division**. ASCE, Vol. 107, No. HY11, Nov., 1981. pp.1501-1518.

40. RAMMING, H.G. and KOWALIK, Z. Numerical Modelling of Marine Hydrodynamics-Applications to Dynamic Physical Processes. **Elsevier Scientific Publishing Company**. Amsterdam, Oxford, New York, 1980. Elsevier Oceanography Senes, 26.

41. RICHTMEYER, R.D. and MORTON, K.W. **Difference methods for initial-value problems**. 2 ed. New York, Interscience. 405p. 1967.

42. ROACHE, P.J. **Computational Fluid Dynamics**. Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, 1972.

43. RODI, W. Turbulence Models and Their Application in Hydraulics. A **State of the Art Review**. IAHR, Jun, 1980. (Presented by the IAHR - Section on Fundamentals of Division II: Experimental and Mathematical Fluid Dynamics.

44. ROSAURO, N.M. Modelo Hidrodinâmico para rios e redes de canais naturais. Dissertação de Mestrado, IPH, 1979.

45. _____. A Finite Element Application to the Study of Seiches and Water Circulation in the Jacui Delta, Guaíba River and Patos Lagoon. Tranfer Report. University of Southampton. Faculty of Engineering and Applied Sciences. Dep. of Civil Eng., Sep., 1982.

46. SALOMON, J.C. Etude de L'Estuaire de la Seine. Université de Bretagne Occidantele, Mai, 1980.

47. SILVEIRA, R.L. Estudos Hidrológicos no Delta do Jacuí(RS) Visando ao Programa de Operação dos Modelos Analógico e Matemático de Simulação Hidráulica. Comunicação Técnica nº 1. Pesquisa Hidrológica (FINEP A) - IPH, Mar, 1980.

48. SPAULDING, M.L. and BEAUCHAMP, C.H. Modeling Tidal Circulation in Coastal Seas. Journal of Hydraulic Engineering. ASCE, Vol. 109, No. 1, Jan., 1983. pp.116-132.

49. TENNEKES, H. and LUMLEY, J.L. A **First Course in Turbulence**. MIT-Press, Cambridge, Mass., USA, 1972.

50. TUCCI, C.E.M. Hidraulic and Water Quality Model for a River Network. Thesis presented to Colorado State University, in 1978, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.

51. WANG, J.D. Real Time Flow in Unstratified Shallow Water. **Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division**. ASCE, Vol. 104, No. WW1, Feb., 1978. pp.53-68.

52. WEARE, T.J. Instability in Tidal Flow Computational Schemes. **Journal of the Hydraulics Division**. ASCE, Vol. 102, No. HY5, May, 1976. pp.569-580.

53. _____. Finite Element or Finite Difference Methods for the Two-Dimensional Shallow Water Equations? Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 7, 1976. pp.351-357.

54. WILSON, B.W. Seiches in: **Advances in Hydroscience**. V.T. Clow (editor), Academic Press:1-94, 1964.