

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**VIBRAÇÕES NATURAIS EM UM SISTEMA DE INTERAÇÃO
VIGA-ÁGUA INCLUINDO O EFEITO DE ONDA DE
SUPERFÍCIE**

por

Neuri Elias Donin

Dissertação para a obtenção do Grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre
Março de 2003

**VIBRAÇÕES NATURAIS EM UM SISTEMA DE INTERAÇÃO
VIGA-ÁGUA INCLUINDO O EFEITO DE ONDA DE
SUPERFÍCIE**

por

Neuri Elias Donin

Engenheiro Civil, e Licenciado em Ciências - Habilitação em Matemática

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAp, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Vibrações, Controle e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. Vladimir Schuchman (UFRJ)

Prof. Dra. Inês Ferreira Moraes (UFSM)

Prof. Dra. Liliane Basso Barichello (PPGMAp/UFRGS)

Prof. Dra. Teresa Tsukazan de Ruiz (PPGMAp/UFRGS)

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Coordenador do PPGMAp

Porto Alegre, Março de 2003

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este estudo gostaria de agradecer àqueles que, durante todo esse processo, de uma forma ou outra contribuíram para a sua realização.

À URI - Universidade Regional Integrada câmpus de Frederico Westphalen, e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela oportunidade.

Ao Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen pela orientação, incentivo, discussões, e pelo apoio no desenvolvimento e na conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Germán Ramón Canahualpa Suazo pela frutífera discussão e apoio durante a realização deste trabalho.

Aos colegas, amigos, e familiares, pelas discussões, carinho, e incentivo de todos os momentos.

Aos meus Pais, Pedro e Olga Donin (in memoriam) pelos ensinamentos e incentivo durante todos os dias que estivemos juntos.

À todos aqueles, cujo os nomes aqui não constam, mas que de alguma forma estiveram sempre presentes torcendo por este momento.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo o estudo modal de um sistema estrutura-fluido, modelado pela equação de Euler-Bernoulli, para uma viga elástica, sujeita a pressão da água, e por ondas de superfície livre.

O sistema acoplado possui condições de contorno para o domínio sólido (viga fixa-livre), para o domínio fluido (impermeabilidade e rigidez inferior), com ondas de superfície, e de interface fluido-estrutura (condições de continuidade na deflexão, ângulo de rotação, força de corte interno e momento de curvatura).

Para determinar as vibrações livres da pressão e deslocamento no seco e no molhado, utiliza-se o método espectral para eliminar a dependência oscilatória temporal e concentrar-se na determinação dos modos através do estudo de problemas de contornos espaciais.

Os modos podem ser calculados com o uso da base clássica de Euler ou da base dinâmica gerada pela resposta impulso.

Foram feitas simulações para um material específico, e apresentados os resultados obtidos.

ABSTRACT

TITLE: “NATURAL VIBRATIONS IN A BEAM-WATER INTERACTION SYSTEM INCLUDING SURFACE WAVE EFFECT”

This work has as objective a modal study of a fluid-structure system modeled by the Euler-Bernoulli equation of an elastic beam, subject to water pressure.

The coupled system has boundary conditions for the solid domain (cantilever beam), for the fluid domain (impermeability and lower stiffness), with surface waves, and for the fluid-structure interface (continuity conditions on deflection, ..., bending moment and shear force).

In order to determine free vibrations for the pressure and wet and dry displacements, it is used the spectral method to eliminate the oscillatory time-dependence and to concentrate on the determination of the modes through the treatment of spatial-boundary problems.

The modes can be calculated by using the Euler basis classic or dynamical basis generated by the impulse response.

Simulations were made for a specific material, and the results presented.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.0.1	Sistemas hidrotérmicos	1
1.1	Breve Resenha Histórica do Problema	2
1.2	Objetivos do Trabalho	5
2	MODELAGEM MATEMÁTICA	8
2.1	Apresentação do Problema	8
2.1.1	Análise estrutural do Modelo	8
2.1.2	Carregamento da estrutura - Ações	9
2.1.3	Sistema Viga Flexível-Água Compressível	9
2.2	Equações Governantes	10
2.2.1	Domínio Fluido	10
2.2.2	Condições de Contorno do Domínio Fluido	11
2.2.3	Domínio Sólido	12
2.2.4	Definições e simbologia dos esforços e Momentos	12
2.2.5	Condições de Contorno do Domínio Sólido	13
2.2.6	Interface de Interação sólido-fluido	14
3	ANÁLISE MODAL DA PRESSÃO	15

3.1	Solução Espectral para a Pressão	15
3.1.1	Autofunções Verticais	17
3.1.2	Autofunções Horizontais	18
3.1.3	A Condição de Sommerfeld	19
3.1.4	A Expansão Espectral da Componente Espacial da Pressão	21
4	CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS	22
4.1	Deslocamento Molhado - U_1	23
4.1.1	O Caso Homogêneo	25
4.1.2	Base Espectral Clássica	26
4.1.3	Base Dinâmica	27
4.1.4	Resolução da equação modal	28
4.1.5	Solução Particular Não Homogênea	29
4.2	Deslocamento Seco - U_2	31
4.3	Interface	33
4.4	Relação de Ortogonalidade dos Modos de Vibração	34
4.5	Condições de Contorno	38
4.6	Cálculo Matricial dos Coeficientes	44
4.7	Solução de Pressão Constante, $\Omega^2 = 0$	47
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	49

5.1	As Frequências Características	54
5.2	Os Modos de Vibração	54
5.3	Resultados Gráficos	58
6	CONCLUSÕES	60

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	<i>Esquema de uma barragem genérica</i>	2
Figura 2.1	<i>Esforços</i>	9
Figura 2.2	<i>Carregamento</i>	10
Figura 2.3	<i>Esquema do sistema viga-água</i>	11
Figura 5.1	<i>Gráficos da Equação Característica</i>	56
Figura 5.2	<i>Gráficos dos Primeiros Modos para valores “padrão” dos parâmetros, $\nu = 0.5$ e $\Gamma = 3.0$</i>	57

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 5.1	<i>Valores de n_1 para a primeira freqüência β_1</i>	51
Tabela 5.2	<i>Valores de n_1 para a segunda freqüência β_2</i>	51
Tabela 5.3	<i>Valores de n_1 para a terceira freqüência β_3</i>	51
Tabela 5.4	<i>Valores aproximados da primeira freqüência β_1</i>	53
Tabela 5.5	<i>Valores aproximados da segunda freqüência β_2</i>	53
Tabela 5.6	<i>Valores aproximados da terceira freqüência β_3</i>	53

LISTA DE SÍMBOLOS

$p(x, y, t)$	pressão hidrodinâmica
x	posição horizontal
y	posição vertical
t	tempo
l	altura da água
H	altura da barragem
F	espessura da barragem
EJ	rigidez flexural da barragem
ρ_s	massa específica da barragem
ρ_f	massa específica da água
c	velocidade do som na água
$u_1(y, t)$	deslocamento da parte molhada da barragem
$u_2(y, t)$	deslocamento da parte seca da barragem
$X(x)$	autofunção horizontal para a pressão
$Y(y)$	autofunção vertical para a pressão
Ω	freqüência característica do sistema
λ	parâmetro do autofunção horizontal
κ	parâmetro do autofunção vertical
$P(x, y)$	componente espacial da pressão
G_n	constante numérica
$U_1(y)$	componente espacial do deslocamento molhado
$U_2(y)$	componente espacial do deslocamento seco
$\bar{U}_1(\xi)$	deslocamento adimensionalizado da parte molhada
$\bar{U}_2(\xi)$	deslocamento adimensionalizado da parte seca
$\phi_i(\xi)$	funções de base para o deslocamento molhado adimensionalizado
$\hat{\phi}_i(\xi)$	funções de base para o deslocamento seco adimensionalizado

$h(\xi)$	resposta impulsiva do deslocamento adimensionalizado
β	freqüência característica adimensionalizada
C	vetor das constantes numéricas do deslocamento adimensionalizado molhado
D	vetor das constantes numéricas do deslocamento adimensionalizado seco
R_{ij}	componentes da matriz \mathbf{R}
ν	parâmetro do nível da água
γ	parâmetro da espessura da parede

1 INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico de um sistema flexível de interação de viga-água é examinado. O sistema acoplado está sujeito a uma condição de limite imperturbado no infinito do domínio da água e a uma condição de perturbação de superfície linear na superfície livre. As equações regentes que descrevem o comportamento do sistema são analisadas usando o método de separação de variáveis e as suas soluções são apresentadas. A equação de autovalores da vibração natural do sistema de viga-água é deduzida e são obtidas soluções exatas para cada combinação de condições de fronteira. Os cálculos mostram que para a condição imperturbado no infinito, no domínio da água, as frequências naturais do sistema dinâmico acoplado são mais baixas que as da viga seca flexível, indicando que a influência da água na viga tem o efeito de uma massa adicional. Mais adiante é mostrado que a perturbação de onda de superfície livre tem um papel mais importante na determinação de características de vibração na região de frequências baixas do sistema acoplado e que a compressibilidade do fluido é mais influente a frequências mais altas. A relação de ortogonalidade das formas de vibração natural do sistema de interação de fluido-estrutura acoplado é deduzido e o caso do sistema acoplado sujeito a condição de radiação no infinito proposta por Sommerfeld [17] é discutido.

1.0.1 *Sistemas hidrotérmicos*

A operação de sistemas hidrotérmicos tem sido extensivamente estudada em seus aspectos teóricos, práticos e computacionais [2, 6, 8, 14].

Pode-se indagar qual a melhor maneira de se operar uma usina, e se a proposição de tipo de material escolhido, seção usada, condições de contorno, etc... é a melhor decisão em termos de estabilidade, rendimento e por que não dizer de custo final da obra.

A figura [1.1] mostra um esquema de uma barragem que vai servir para movimentar a turbina e um gerador de energia elétrica; neste caso o estudo começaria por determinar as frequências naturais da estrutura e também do sistema acoplado, que serviriam para a Engenharia desenvolver seus projetos complementares e orçamentos.

Figura 1.1 *Esquema de uma barragem genérica*

1.1 Breve Resenha Histórica do Problema

Na engenharia de irrigação e de plataformas marítimas, uma represa, ou uma torre cercada por água normalmente é simplificada em análises como uma viga ou uma estrutura de coluna ao determinar suas respostas estáticas ou dinâmicas. Então o problema de interação viga-água flexível é significativo nestes ramos da engenharia.

Em 1933 Westergaard [22] primeiro investigou a pressão hidrodinâmica em uma represa rígida durante terremotos, embora é ignorado o efeito de ondas de superfície neste estudo clássico. Os resultados de Westergaard [22], 1933, revelaram que a magnitude da pressão hidrodinâmica depende da frequência de excitação.

Em 1967 Chopra [1] deduziu uma solução analítica da pressão hidrodinâmica em uma represa rígida vertical e mostrou que as soluções de Westergaard [22] só são válidas se a frequência de excitação for menor que a frequência fundamental do reservatório. Ele estendeu a teoria para investigar a pressão hidrodinâmica que é o resultado de movimentos não só horizontais e verticais mas incluindo também a influência de ondas de superfície livre. Chopra [1] concluiu que a contribuição associada de perturbação de onda de superfície livre é pequena.

Em 1978 Chwang [3] apresentou uma solução exata da pressão hidrodinâmica em uma represa rígida com um lado inclinado contra a correnteza de declive constante mas desprezando a compressibilidade do fluido no reservatório.

Em 1986 Liu [11] estendeu o trabalho de Chwang [3] para obter uma solução exata para um dique inclinado rígido que represa um reservatório de forma triangular.

Em 1990 Xing e Price [23] reexaminaram a influência de ondas de superfície livre nas pressões hidro-dinâmicas experimentadas por represas durante um terremoto. Foi assumido que este estímulo causou uma vibração sinusoidal horizontal na represa e uma vibração sinusoidal vertical em cima de uma região de solo prescrito dentro do reservatório. Para isso foi mostrado que as duas condições de limite de superfície livre produzem só diferenças pequenas nos valores das frequências naturais.

Nas investigações previamente descritas, a elasticidade (E) ou flexibilidade da estrutura não foi considerada. A inclusão deste efeito complica o problema significativamente. Então, para simplificar este problema dinâmico, os efeitos de ondas de superfície livre ou a compressibilidade do fluido ou ambos são freqüentemente desprezados.

Assumindo uma condição imperturbado no infinito no domínio de água, as vibrações acopladas entre uma estrutura de coluna flexível e água inclusive os

efeitos de perturbação de onda de superfície e a compressibilidade do fluido foi estudado por Goto e Toki [7], 1965, Liaw e Chopra [12], 1974, e Zhu, Weng e Wu [26], 1989.

Estas investigações mostraram que a influência de ondas de superfície livre é de maior importância ao comportamento dinâmico de um sistema de viga-água longo-fino, considerando que o efeito da compressibilidade do fluido é a influência mais dominante para um sistema de viga-água curto-grosso.

Em uma análise hidrodinâmica, a condição de radiação no infinito no domínio da água tem um papel importante na determinação das características de comportamento do fluido. Desenvolvendo soluções exatas das cargas hidrodinâmicas em represas rígidas estimuladas por vibrações horizontais e verticais, Xing e Price [23], 1990, concluíram que no infinito no domínio de água o n -ésimo componente da resposta da pressão dinâmica, no caso de estímulo horizontal satisfaz a condição imperturbado se a n -ésima frequência natural do reservatório for mais alta que a frequência de estímulo ou a condição de radiação se for menor que a frequência de estímulo. Então, se a frequência de estímulo for mais alta que a frequência fundamental do reservatório, os componentes da resposta de pressão dinâmica são uma combinação de dois tipos: um satisfazendo a condição imperturbado e outro, satisfazendo a condição de radiação, ambos no infinito. Porém, estas conclusões são associadas com estruturas rígidas pois as distorções das estruturas foram excluídas. É interessante notar que Chopra [1], 1967, concluiu que as soluções clássicas de Westergaard [23], 1933, só são válidas se a frequência de estímulo for menor que a frequência fundamental do reservatório que no contexto da discussão prévia implica que as soluções estão relacionadas à condição imperturbado ou de perturbação zero no infinito no domínio fluido.

Em ambas análises de domínio de tempo bi e tridimensionais de interações de fluido-estrutura, Tsai e Lee [18], 1990, Lee e Tsai [19], 1991, Tsai, Lee e Ketter [20], 1990, e Tsai, Lee e Yeh [21], 1990, desenvolveram um eficiente método

no domínio do tempo semi-analítico para expressar a condição de radiação na região de campo distante do domínio do fluido. Lee e Tsai [13] conseguiram uma solução exata no domínio do tempo que leva em conta a condição de radiação do domínio do fluido e a deformação da estrutura usando o método da transformada de Laplace. Eles examinaram a análise no domínio do tempo da resposta forçada de sistemas de viga-água estimuladas por acelerações de solo contra a correnteza e a favor da correnteza na direção horizontal. Uma condição de perturbação de superfície livre zero foi assumida, mas eles não discutiram o comportamento das características da vibração natural dos sistemas. Porém, eles apresentaram uma seleção de resultados de vibração livre do domínio de água, as quais necessariamente não são as características fundamentais dos sistemas de interação de fluido-estrutura, e então eles usaram esta informação para avaliar a pressão hidro-dinâmica.

Do ponto de vista de mecânica do contínuo, é necessário que o sistema de interação fluido-estrutura seja considerado como um sistema dinâmico total dentro da análise dinâmica. Então, como foi discutido por Xing e Price [24], 1991, e Xing, Price, e Du [25], 1996, existem características de vibração natural (isto é, frequências e modos) e estes dependem das suposições inerentes no modelo matemático, (isto é, estrutura rígida ou flexível) e as condições de fronteira que impuseram na estrutura (fixo, livre, etc), a perturbação de superfície livre e a condição de fronteira no infinito no domínio do fluido. Xing et al [25], 1996, apresentaram uma seleção de resultados numéricos para uma gama extensa de sistemas de interação de fluido-estrutura e mostraram a importância do componente de análise de vibração natural dentro da análise dinâmica global para determinar respostas de movimento forçado.

1.2 **Objetivos do Trabalho**

Neste trabalho, a atenção é focalizada na determinação de vibrações naturais para um sistema dinâmico acoplado viga-água sujeito a várias condições de

contorno com o propósito de avaliar a influência sobre variados efeitos, tais como, viga seca, viga molhada, a imposição de uma perturbação de onda de superfície zero ou permitindo que ondas se gerem na superfície livre, e a imposição de uma condição imperturbado no infinito no domínio do fluido. Uma solução exata para cada caso é obtida usando-se o método espectral para o equacionamento evolutivo e o método de separação de variáveis para os problemas estacionários. Os exemplos numéricos apresentados provêm de uma comparação dos efeitos da perturbação de onda de superfície livre e compressibilidade de fluido nas características dinâmicas naturais do sistema interagindo sujeito à condição imperturbado na infinidade. Eles realçam a importância de cada efeito em relação às frequências naturais do sistema interagido dinâmico acoplado fluido-viga.

A seguir, faz-se uma breve descrição dos capítulos que formam este trabalho;

No capítulo 1 é descrito uma breve resenha histórica do problema apresentado, suas considerações ao longo dos tempos e das pessoas que estudaram tal caso; seus objetivos que são a determinação das vibrações naturais para o sistema dinâmico.

No capítulo 2 é descrito o modelo físico do sistema acoplado viga-água. São relacionadas e enunciadas as equações diferenciais parciais governantes para o domínio sólido, domínio fluido, e de interação, bem como todas as condições de contorno, de continuidade destes domínios e da interface entre os dois domínios. A modelagem matemática adotada é a de Euler-Bernoulli pela eficiência simbólica neste estudo.

No capítulo 3, análise modal da pressão, é desenvolvida a metodologia de separação de variáveis com o objetivo da obtenção das componentes horizontais e verticais da pressão, e as componentes transversais dos deslocamentos da barragem. Com este procedimento, e logo após a adimensionalização das equações de Euler-

Bernoulli resultantes, permite a obtenção da equação característica, cujas raízes fornecem aproximações numéricas das frequências e possibilitam o cálculo simbólico das formas modais; é apresentado ainda a condição de Sommerfeld e a expansão espectral da componente espacial da pressão.

No capítulo 4, é efetuado o cálculo dos deslocamentos nas regiões molhada e seca utilizando-se para isso as bases clássicas e dinâmica; neste mesmo capítulo é introduzido uma discussão sobre a relação de ortogonalidade dos modos de vibração, além de uma discussão de uma solução de pressão constante para $\Omega^2 = 0$.

No capítulo 5, são apresentados os resultados numéricos para uma suposição de barragem com seção, altura, altura molhada, densidades, e outras características definidas.

No capítulo 6, o capítulo final, apresentam-se as conclusões pertinentes ao trabalho.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 Apresentação do Problema

2.1.1 Análise estrutural do Modelo

A estrutura é do tipo fixa-livre, ou seja uma viga em balanço com engaste na origem zero, na base da barragem; o engaste não permite deslocamentos em nenhuma das três direções dos eixos $x, y, e z$, ao contrário da extremidade superior, onde haverá a maior flexa (deflexão). O grau de estaticidade revela que os esforços desta estrutura, que são momento fletor, força cortante interna, e reações verticais e horizontais, podem ser encontradas pelas equações da estática, quais sejam: somatório de forças e momento fletor em relação a um ponto de origem zero, na base da barragem. Tal dedução é conseguida porque o modelo apresentado é do tipo isostático; no caso de modelos hipostáticos ou hiperestáticos a resolução deve ser tratada diferente. A viga em questão é tratada como uma viga elástica, ou seja, existe uma proporcionalidade entre tensão e deformação, não podendo as suposições de carregamento ultrapassar a fase elástica do material escolhido. Por ocasião do deslocamento da barragem, em função dos carregamentos dinâmicos, serão apresentadas flexas e ângulos que corresponderão às deflexões e giros da estrutura.

Observação 1: As reações da viga em balanço serão encontradas considerando-se o princípio de superposição de efeitos sempre que os esforços não excederem a fase elástica-linear do material.

Observação 2: No caso em questão o peso próprio não provocará reação do tipo momento fletor na base da estrutura, pois o eixo y coincide com o centro de gravidade da peça, que é a componente vertical da mesma.

Na fig. [2.1] são apresentados os gráficos de momento fletor (M), esforço cortante (C), e de deslocamentos (f) que identificam o deslocamento e o giro da

estrutura fixa-livre, além do esquema das reações para um carregamento de pressão hidro-dinâmica e de ondas de superfície;

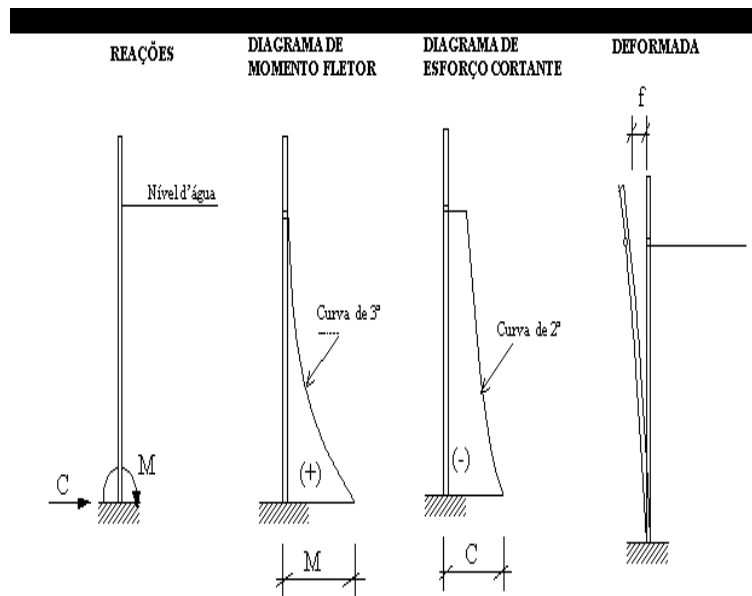


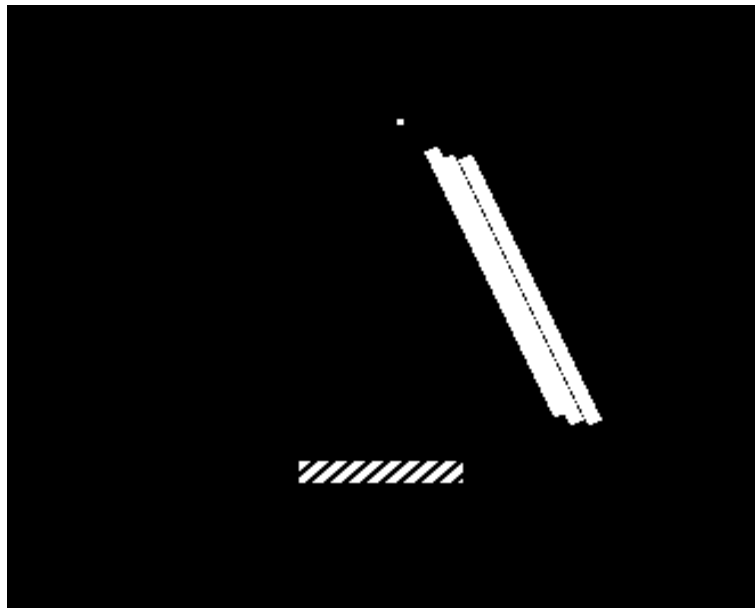
Figura 2.1 *Esforços*

2.1.2 Carregamento da estrutura - Ações

A viga em balanço receberá dois tipos de carregamentos dinâmicos: o primeiro de forma concentrada na altura l molhada da estrutura em função das ondas de superfície, e o segundo em função da pressão, dada pela equação da onda, em forma de carregamento distribuído triangular caracterizando o empuxo da água; para efeitos de cálculos de reações a resultante da pressão localiza-se no terço médio de l ;

2.1.3 Sistema Viga Flexível-Água Compressível

Neste capítulo é considerado um sistema acoplado *viga flexível-água* representado por um sistema cartesiano bi-dimensional com coordenadas de origem zero na intersecção da linha central da viga e o chão horizontal do reservatório; é

Figura 2.2 *Carregamento*

assumindo que a água é compressível, não viscosa, seu movimento anti-rotacional, e o reservatório é de profundidade média l ; a viga uniforme flexível é de altura H ($H > l$); a altura molhada l , de largura F e de espessura unitária perpendicular ao plano $0-xy$. A rigidez fletora e a densidade de massa são denotados respectivamente por EJ e ρ_s , onde E representa o módulo de elasticidade de Young e J o momento de inércia com respeito ao eixo transversal da viga; ρ_f e c representam a densidade de massa e a velocidade do som na água.

2.2 Equações Governantes

2.2.1 Domínio Fluido

Proveniente da mecânica do contínuo, sabe-se que a viga sustenta esforços de pressão, compressão, momentos fletores, de cisalhamento, entre outros. Diante de pequenas perturbações, a equação linearizada que descreve a pressão dinâmica $p(t, x, y)$, originada pela ação da água, é dada pela equação da onda:

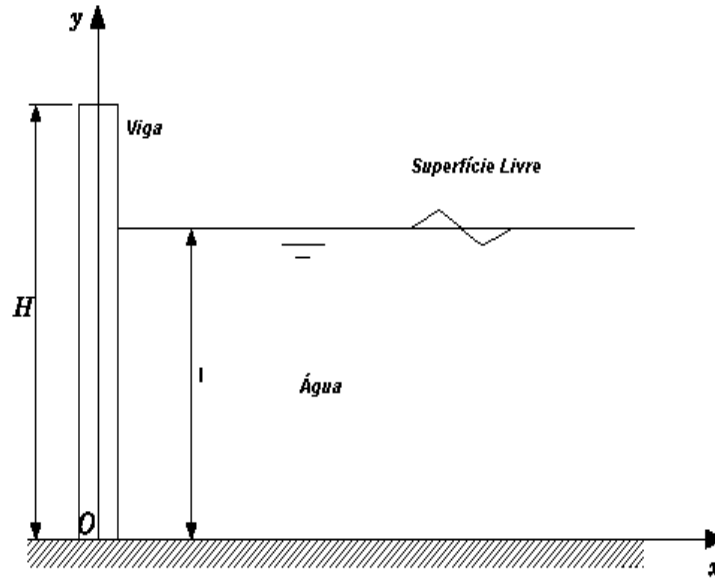


Figura 2.3 Esquema do sistema viga-água

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (2.1)$$

A abrangência da equação da onda, acima, é válida para $0 < x < \infty$, e $0 < y < l$.

2.2.2 Condições de Contorno do Domínio Fluido

Na superfície livre, considera-se que há perturbações de ondas, governada pela equação:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \left(\frac{1}{g} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad y = l \quad (2.2)$$

O fundo do reservatório considera-se impermeável e rígido (não tem deformação), de modo que $y = 0$ e $\frac{\delta p}{\delta y} = 0$; no domínio da água é assumido que a perturbação de pressão na água não é transmitida para o infinito quando $x \rightarrow \infty$;

isto é, há uma condição imperturbado governada pela equação

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(t, x, y) = 0 \quad (2.3)$$

2.2.3 Domínio Sólido

A equação de movimento que governa as *vibrações transversais* da viga submergida, tratada simplesmente como uma viga de Euler-Bernoulli é dada pela equação diferencial não homogênea de quarta ordem:

$$\rho_s F \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} = -p(0, y, t), \quad 0 < y < l \quad (2.4)$$

E para a porção seca em ar da mesma é dada pela equação diferencial homogênea de quarta ordem

$$\rho_s F \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u_2}{\partial y^4} = 0, \quad l < y < H \quad (2.5)$$

2.2.4 Definições e simbologia dos esforços e Momentos

$u_1(l, t)$, (deflexão ou deslocamento na parte molhada da barragem)

$u_2(l, t)$, (deflexão ou deslocamento na parte seca da barragem)

$\frac{\partial u_1}{\partial y}(l, t)$, (giro da parte molhada da barragem)

$$\frac{\partial u_2}{\partial y}(l, t), \quad (\text{giro da parte seca da barragem})$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(l, t), \quad (\text{momento fletor na parte molhada da barragem})$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}(l, t), \quad (\text{momento fletor na parte seca da barragem})$$

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3}(l, t), \quad (\text{força de cisalhamento na parte molhada da barragem})$$

$$\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}(l, t), \quad (\text{força de cisalhamento na parte seca da barragem})$$

2.2.5 Condições de Contorno do Domínio Sólido

A configuração do sistema é concebida para ser base fixa e extremidade superior livre ou comumente chamada de viga em balanço;

Em $y = 0$ (base fixa)

$$u_1(0, t) = 0 \quad (2.6)$$

e

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(0, t) = 0 \quad (2.7)$$

Em $y = H$, (extremidade superior livre)

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}(H, t) = 0 \quad (2.8)$$

e

$$\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}(H, t) = 0 \quad (2.9)$$

Na interface, entre o molhado e a porção seca da viga, a deflexão, o ângulo de rotação, a força de corte interno (esforço cortante) e o momento de curvatura (Momento fletor) da viga devem estar contínuos. Isto é satisfeito quando:

$$u_1(l, t) = u_2(l, t), \quad (\text{deflexão}) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(l, t) = \frac{\partial u_2}{\partial y}(l, t), \quad (\text{giro}) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(l, t) = \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}(l, t), \quad (\text{momento fletor}) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3}(l, t) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}(l, t), \quad (\text{força de cisalhamento}) \quad (2.13)$$

2.2.6 Interface de Interação sólido-fluido

Na interface de interação de fluido-estrutura, em $x = 0$, e $0 < y < l$ a pressão p na água e o deslocamento u_1 da seção da viga molhada satisfaz a relação:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] = -\rho_f \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right]. \quad (2.14)$$

3 ANÁLISE MODAL DA PRESSÃO

3.1 Solução Espectral para a Pressão

A pressão hidrodinâmica da água, satisfaz a equação da onda

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \quad (3.1)$$

que, considerando o operador Laplaciano

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \nabla^2, \quad (3.2)$$

pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p. \quad (3.3)$$

No método espectral procura-se soluções exponenciais no tempo $e^{\lambda t}$, procura-se então oscilações que resultam em exponenciais complexas $e^{i\Omega t}$,

$$p(t, x, y) = e^{i\Omega t} P(x, y), \quad (3.4)$$

e conduz para o problema estacionário

$$\nabla^2 P(x, y) = - \left(\frac{\Omega}{c} \right)^2 P(x, y). \quad (3.5)$$

Aplicando o método de separação de variáveis, supõe-se que

$$P(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.6)$$

e então:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = - \left(\frac{\Omega}{c} \right)^2 \quad (3.7)$$

Assim, para certas constantes λ e κ , tem-se

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2, \quad (3.8)$$

e

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\kappa^2 \quad (3.9)$$

ou, equivalentemente

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (3.10)$$

e

$$Y'' + \kappa^2 Y = 0 \quad (3.11)$$

com λ , κ , e Ω sendo constantes reais que satisfazem

$$\lambda^2 = \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 - \kappa^2. \quad (3.12)$$

Das condições de contorno

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, l) = \frac{\Omega^2}{g} P(x, l) \quad \text{e} \quad P(\infty, y) = 0 \quad (3.13)$$

decorre que

$$Y'(0) = 0, \quad (3.14)$$

$$Y'(l) - \frac{\Omega^2}{g} Y(l) = 0, \quad (3.15)$$

e

$$X(\infty) = 0, \quad (3.16)$$

respectivamente.

3.1.1 Autofunções Verticais

Para determinar a dependência vertical de pressão deve-se obter soluções não nulas do problema de contorno

$$Y''(y) + \kappa^2 Y(y) = 0 \quad (3.17)$$

com as condições de contorno:

$$Y'(0) = 0, \quad Y'(l) - \frac{\Omega^2}{g} Y(l) = 0. \quad (3.18)$$

Resolvendo a equação acima tem-se duas soluções: ki , e $-ki$; logo a solução geral de (3.17) é dada por

$$Y(y) = C_1 \cos(\kappa y) + C_2 \sin(\kappa y) \quad (3.19)$$

derivando $Y(y)$ temos

$$Y'(y) = -C_1 \kappa \sin(\kappa y) + C_2 \kappa \cos(\kappa y) \quad (3.20)$$

Das condições de contorno

$$Y'(0) = 0, \quad \text{e} \quad Y'(l) - \frac{\Omega^2}{g} Y(l) = 0 \quad (3.21)$$

obtém-se o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa \sin(\kappa y) - \frac{\Omega^2}{g} \cos(\kappa y) & \kappa \cos(\kappa y) - \frac{\Omega^2}{g} \sin(\kappa y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Para se obter soluções não nulas, o determinante do sistema deve ser nulo, ou seja, $\det(\Delta) = 0$, isto é, κ deve ser raiz da equação característica:

$$-\kappa \left(-\kappa \sin(\kappa y) - \frac{\Omega^2}{g} \cos(\kappa y) \right) = 0 \quad (3.23)$$

cujas soluções são $\kappa = 0$, ou satisfazem

$$-\kappa \sin(\kappa y) - \frac{\Omega^2}{g} \cos(\kappa y) = 0 \quad (3.24)$$

ou

$$\tan(\kappa l) = -\frac{\Omega^2}{\kappa g}. \quad (3.25)$$

A autofunção vertical $Y(y)$ pode ser escrita como

$$Y_n(y) = \cos(\kappa_n y), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.26)$$

onde κ_n satisfaz a equação

$$\tan(\kappa_n l) = -\frac{\Omega^2}{\kappa_n g} \quad (3.27)$$

cujos valores aproximados estão dados pela estimativa [25]

$$\kappa_n \in \left\langle \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}, \quad \frac{n\pi}{l} \right\rangle. \quad (3.28)$$

3.1.2 Autofunções Horizontais

Para determinar a dependência horizontal da pressão, deve-se obter soluções não nulas da equação

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (3.29)$$

sujeito a condição:

$$X(\infty) = 0. \quad (3.30)$$

A condição de contorno limite exclui automaticamente que λ seja real, pois neste caso a solução geral

$$X_x = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) \quad (3.31)$$

não tem limite quando $x \rightarrow \infty$. Assim do fato que κ é real, tem-se que λ deve ser puramente imaginário .

Fazendo $\lambda = i\lambda_0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, têm-se uma solução do tipo:

$$X(x) = c_1 e^{i(i\lambda_0)x} + c_2 e^{-i(i\lambda_0)x} \quad (3.32)$$

Então:

$$X(x) = c_1 e^{-\lambda_0 x} + c_2 e^{\lambda_0 x} \quad (3.33)$$

Se $\lambda_0 > 0$, então para $X(\infty) = 0$, C_2 deve ser zero.

Se $\lambda_0 < 0$, então para $X(\infty) = 0$, C_1 deve ser zero.

Tanto para $\lambda_0 > 0$ quanto para $\lambda_0 < 0$ a solução geral será:

$$X_n(x) = e^{-\lambda_n x}, \quad (\text{autofunção horizontal}) \quad (3.34)$$

3.1.3 A Condição de Sommerfeld

Para resolver problemas de radiação em um domínio no infinito, Sommerfeld [17], 1949, propôs uma condição de radiação no infinito. Fisicamente, isto representa um distúrbio na água propagando-se na direção positiva de x sem nenhuma

onda refletida. Então para uma onda de pressão na forma de função harmônica de tempo $p = P(x, y)e^{-i\Omega t}$ associada com o parâmetro Ω , a condição de radiação correspondente é expressada por

$$p = P(x, y)e^{-i\Omega t}, \quad P_x - i\lambda P = 0, \quad x \rightarrow \infty \quad (3.35)$$

onde Ω e λ são necessariamente dois parâmetros reais não negativos associados com a onda e $P_x = \frac{\partial P}{\partial x}$. Pelo fato que a equação de onda (2.1) é uma equação de valor real, a forma conjugada complexa (representada por um asterisco subscrito) $p^*(x, y, t)$ da pressão complexa $p(x, y, t)$ deve também ser uma solução da equação (1). Então a condição de radiação correspondente a esta solução conjugada $p^*(x, y, t)$ satisfaz as expressões

$$p^*(x, y, t) = P^*(x, y)e^{i\hat{\Omega}t}, \quad P_x^* + i\hat{\lambda}P^* = 0, \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.36)$$

Segue que, para a função $p(x, y, t) = P(x, y)e^{-i\hat{\Omega}t} = X(x)Y(y)T(t)$ satisfazendo a condição de radiação no infinito, a função $X(x)$ satisfaz a equação

$$(X' - i\hat{\lambda}X) = 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{caso de radiação.} \quad (3.37)$$

e das equações

$$T(t) = At + B, \quad \Omega = 0, \quad (3.38)$$

$$T(t) = ae^{i\Omega t} + be^{-i\Omega t}, \quad \Omega \neq 0, \quad (3.39)$$

$$X(x) = Qx + S, \quad \lambda = 0, \quad (3.40)$$

$$X(x) = qe^{i\lambda x} + se^{-i\lambda x}, \quad \lambda \neq 0, \quad (3.41)$$

e (3.37), as funções de $T(t)$ e $X(x)$ satisfazendo a equação (3.35) (coeficientes constantes negligenciados) são da forma

$$X(x)T(t) = 1, \quad \hat{\Omega} = 0 = \hat{\lambda}, \quad X(x)T(t) = e^{i\lambda x - \hat{\Omega}t}, \quad \hat{\Omega} > 0, \quad \hat{\lambda} \geq 0. \quad (3.42)$$

3.1.4 A Expansão Espectral da Componente Espacial da Pressão

A componente espacial da pressão pode ser escrita como $P_n(x, y) = e^{-\lambda_n x} \cos(\kappa_n y)$, sendo $e^{-\lambda_n x}$ a autofunção horizontal, e $\cos(\kappa_n y)$ a autofunção vertical.

Portanto, pelo princípio de superposição linear tem-se

$$P(x, y) = \sum_{n=n_1}^{\infty} G_n e^{-\lambda_n x} \cos(\kappa_n y) \quad (3.43)$$

onde n_1 deve ser o menor inteiro que satisfaz a desigualdade

$$\lambda_n^2 = \kappa_n^2 - \frac{\Omega^2}{c^2} > 0 \quad (3.44)$$

onde tem-se a estimativa, [25]

$$\kappa_n \in \left\langle \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}, \quad \frac{n\pi}{l} \right\rangle. \quad (3.45)$$

4 CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS

Neste capítulo, procede-se a calcular os deslocamentos $U_1(y)$ e $U_2(y)$ da viga elástica molhada e seca, respectivamente.

A região molhada, válida no intervalo $0 < y < l$, representada pela equação de Euler-Bernoulli

$$\rho_s F \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} = -p(0, y, t) \quad (4.1)$$

A região seca, válida no intervalo $l < y < H$, representada pela equação de Euler-Bernoulli

$$\rho_s F \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u_2}{\partial y^4} = 0 \quad (4.2)$$

Usando o método espectral

$$u_1(y, t) = U_1(y)e^{i\Omega t} \quad (4.3)$$

$$u_2(y, t) = U_2(y)e^{i\Omega t} \quad (4.4)$$

Obtêm-se para a região molhada:

$$EJU_1^4(y) - \rho_s F\Omega^2 U_1(y) = -X(0)Y(y) \quad (4.5)$$

e para a região seca:

$$EJU_2^4(y) - \rho_s F\Omega^2 U_2(y) = 0 \quad (4.6)$$

4.1 Deslocamento Molhado - U_1

Substituindo a pressão

$$p(t, x, y) = e^{i\Omega t} P(x, y) = e^{i\Omega t} \sum_{n=n_1}^{\infty} G_n e^{-\lambda_n x} \cos(\kappa_n y) \quad (4.7)$$

na equação na região molhada, para $0 < y < l$ tem-se

$$EJ \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \rho_s F \Omega^2 U_1 = -P(0, y) \quad (4.8)$$

com $u_1 = e^{i\Omega t} U_1(y)$, e

$$EJ \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \rho_s F \Omega^2 U_1 = - \sum_{n=n_1}^{\infty} G_n e^{-\lambda_n x} \cos(\kappa_n y). \quad (4.9)$$

Definindo as quantidades adimensionais

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\Omega}{\Omega_b}, & \bar{\kappa}_n &= \kappa_n H & \xi &= \frac{y}{H}, & y &= \xi H, & \nu &= \frac{l}{H}, \\ \gamma &= \frac{\rho_f H}{\rho_s F}, & \bar{\lambda}_n &= H \lambda_n, & \bar{\lambda}_n^2 &= \bar{\kappa}_n^2 - \frac{\beta^4}{\bar{c}^2}, & \bar{c} &= \frac{c}{\Omega_b H} \end{aligned} \quad (4.10)$$

a equação para o deslocamento $U_1(y)$ pode ser escrita como

$$EJU_1^{(4)}(y) - \rho_s F \Omega^2 U_1(y) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} G_n e^{-\lambda x} \cos(\kappa_n y) \quad (4.11)$$

Reescrevendo tem-se:

$$EJU_1^{(4)}(\xi H) - \rho_s F \Omega^2 U_1(\xi H) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} G_n e^{-\lambda x} \cos(\kappa_n \xi H) \quad (4.12)$$

Como $e^{-\lambda x}$ com $x = 0$ é igual a 1, tem-se:

$$\bar{U}_1(\xi) = U_1(\xi H), \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{U}_1(\xi) = H U_1'(\xi H) \quad (4.13)$$

Logo:

$$\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \bar{U}_1(\xi) = H^4 U_1^{(4)}(\xi H) \quad (4.14)$$

Então:

$$\frac{E J U_1^{(4)}(\xi)}{H^4} - \rho_s F \Omega^2 \bar{U}_1(\xi) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} G_n \cos(\bar{\kappa}_n \xi) \quad (4.15)$$

Multiplicando toda a equação por $\frac{H^4}{EJ}$, resulta:

$$U_1^{(4)}(\xi) - \frac{\rho_s F \Omega^2 \bar{U}_1(\xi) H^4}{EJ} = - \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{G_n H^4 \cos(\bar{\kappa}_n \xi)}{EJ} \quad (4.16)$$

Fazendo:

$$\beta^4 = \frac{\rho_s F \Omega^2 H^4}{EJ} \quad (4.17)$$

$$A_n = \frac{G_n H^4}{EJ} \quad (4.18)$$

tem-se:

$$\bar{U}_1^{(4)}(\xi) - \beta^4 \bar{U}_1(\xi) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} A_n \cos(\bar{\kappa}_n \xi) \quad (4.19)$$

com $0 < \xi < \nu$

Como

$$\beta^2 = \frac{\Omega}{\Omega_b}, \quad (4.20)$$

então

$$\beta^4 = \frac{\Omega^2}{\Omega_b^2}, \quad (4.21)$$

e fazendo

$$\frac{\rho_s F \Omega^2 H^4}{EJ} = \frac{\Omega^2}{\Omega_b^2} \quad (4.22)$$

Logo:

$$\Omega_b = \sqrt{\frac{EJ}{\rho_s F H^4}} \quad (4.23)$$

Assim $\lambda_n^2 = \kappa_n^2 - \frac{\Omega^2}{c^2} > 0$ torna-se a condição de que n_1 é o menor inteiro n tal que

$$\beta^4 < \frac{c^2}{\Omega_b^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \quad (4.24)$$

Usando padrões adimensionais

$$y = \xi, \quad 0 = 0, \quad H = 1, \quad l = \nu H \quad (4.25)$$

para um deslocamento espacial na parte molhada da barragem.

Segue que

$$\bar{U}_1(\xi) = \bar{U}_1^h(\xi) + \bar{U}_1^p(\xi) \quad (4.26)$$

onde $\bar{U}_1^h(\xi)$ é a solução homogênea geral da equação (4.19), e $\bar{U}_1^p(\xi)$ é a solução particular não homogênea da equação (4.19).

4.1.1 O Caso Homogêneo

Para o estudo da equação homogênea é conveniente discutir duas bases de funções: uma clássica, comumente utilizada, e outra dinâmica, satisfazendo condições iniciais normalizadas.

Da teoria de equações diferenciais, a solução da equação linear homogênea $\bar{U}_1^4(\xi) - \beta^4 \bar{U}_1(\xi) = 0$ é dada por

$$\bar{U}_1 = c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + c_3 \Phi_3 + c_4 \Phi_4 = \Phi_c, \quad (4.27)$$

onde $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ é uma base de soluções. Aqui

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4], \quad c^t = [c_1 c_2 c_3 c_4] \quad (4.28)$$

4.1.2 Base Espectral Clássica

A equação característica da equação diferencial linear ordinária

$$\bar{U}_1^4(\xi) - \beta^4 \bar{U}_1(\xi) = 0 \quad (4.29)$$

é dada por

$$\lambda^4 - \beta^4 = 0. \quad (4.30)$$

Esta equação possui as raízes

$$\lambda_1 = \beta, \quad \lambda_2 = -\beta, \quad \lambda_3 = \beta i, \quad \lambda_4 = -\beta i \quad (4.31)$$

Portanto a solução geral é dada por

$$\bar{U}_1(\xi) = c_1 \sin(\beta\xi) + c_2 \cos(\beta\xi) + c_3 \sinh(\beta\xi) + c_4 \cosh(\beta\xi) \quad (4.32)$$

com relação á base espectral clássica

$$\Phi_1(\xi; \beta) = \sin(\beta\xi), \quad \Phi_2(\xi; \beta) = \cos(\beta\xi), \quad \Phi_3(\xi; \beta) = \sinh(\beta\xi), \quad \Phi_4(\xi; \beta) = \cosh(\beta\xi) \quad (4.33)$$

4.1.3 Base Dinâmica

A solução de

$$\bar{U}_1^4(\xi) - \beta^4 \bar{U}_1(\xi) = 0 \quad (4.34)$$

pode ser escrita em termos da base $[h(\xi), h'(\xi), h''(\xi), h'''(\xi)]$, como

$$\bar{U}_1(\xi) = c_1 h(\xi) + c_2 h'(\xi) + c_3 h''(\xi) + c_4 h'''(\xi), \quad (4.35)$$

onde

$$h^{iv}(\xi) - \beta^4 h(\xi) = 0 \quad (4.36)$$

sujeito a condições normalizadas (denominadas também como condições iniciais impulsivas)

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, \quad h'''(0) = 1. \quad (4.37)$$

Aqui a solução $h(\xi)$ é definida como a *resposta impulso* ou a *solução dinâmica*. Observa-se que, pelas condições iniciais de $h(x)$, o Wronskiano de $h(x)$ e suas derivadas até terceira ordem é não nulo. Mais precisamente,

$$\det \begin{bmatrix} h(0) & h'(0) & h''(0) & h'''(0) \\ h'(0) & h''(0) & h'''(0) & h^{iv}(0) \\ h''(0) & h'''(0) & h^{iv}(0) & h^v(0) \\ h'''(0) & h^{iv}(0) & h^v(0) & h^{vi}(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta^4 h(0) \\ 0 & 1 & \beta^4 h(0) & \beta^4 h'(0) \\ 1 & \beta^4 h(0) & \beta^4 h'(0) & \beta^4 h''(0) \end{bmatrix} = 1.$$

Assim, h, h', h'', h''' constituem um base de soluções.

Denotando

$$\Phi_1(\xi; \beta) = h(\xi; \beta) = \frac{1}{2} \frac{[-\sin(\beta\xi) + \sinh(\beta\xi)]}{\beta^3} \quad (4.38)$$

$$\Phi_2(\xi; \beta) = h'(\xi; \beta) = \frac{1}{2} \frac{[-\cos(\beta\xi) + \cosh(\beta\xi)]}{\beta^2} \quad (4.39)$$

$$\Phi_3(\xi; \beta) = h''(\xi; \beta) = \frac{1}{2} \frac{[\sin(\beta\xi) + \sinh(\beta\xi)]}{\beta} \quad (4.40)$$

$$\Phi_4(\xi; \beta) = h'''(\xi; \beta) = \frac{1}{2} [\cos(\beta\xi) + \cosh(\beta\xi)] \quad (4.41)$$

4.1.4 Resolução da equação modal

Resolvendo a equação:

$$\bar{U}_1^{(4)}(\xi) - \beta^4 \bar{U}_1(\xi) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} A_n \cos(\bar{\kappa}_n \xi) \quad (4.42)$$

válida para $0 < \xi < \nu$ ou seja $0 < \xi < 1$ tem-se que a solução homogênea satisfaz

Usando a base dinâmica

$$\Phi_1 = h(\xi), \quad \Phi_2 = h'(\xi), \quad \Phi_3 = h''(\xi), \quad \Phi_4 = h'''(\xi) \quad (4.43)$$

onde

$$h^{(4)} - \beta^4 h = 0 \quad (4.44)$$

com as condições iniciais impulsivas

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0, \quad h''(0) = 0, \quad eh'''(0) = 1 \quad (4.45)$$

A forma funcional de $h = h(\xi)$ é dada por

$$h(\xi) = \frac{\sinh(\beta\xi) - \sin(\beta\xi)}{2\beta^3}. \quad (4.46)$$

4.1.5 Solução Particular Não Homogênea

Uma solução particular não homogênea da equação

$$\bar{U}_1^4(\xi) - \beta^4 \bar{U}_1(\xi) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} A_n \cos(\bar{\kappa}_n \xi) \quad (4.47)$$

pode ser calculada individualmente mediante a equação

$$V^4 - \beta^4 V = A_n \cos(\bar{\kappa}_n \xi) \quad (4.48)$$

cuja solução é dada por:

$$V = \left[\frac{A_n}{\bar{\kappa}_n^4 - \beta^4} \right] \cos(\bar{\kappa}_n \xi). \quad (4.49)$$

Assim, pelo princípio de superposição linear, a solução particular é

$$\bar{U}_1(p)(\xi) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} F_n \cos(\bar{\kappa}_n \xi) \quad (4.50)$$

onde:

$$F_n = \frac{A_n}{\bar{\kappa}_n^4 - \beta^4} \quad (4.51)$$

onde A_n , e F_n são constantes desconhecidas

$$F_n = \frac{A_n}{\kappa_n^4 - \beta_n^4}. \quad (4.52)$$

Utilizando o fato que

$$\int_0^L \cos(\kappa_m y) \cos(\kappa_n y) dy = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ Q_n, & m = n \end{cases} \quad (4.53)$$

decorre

$$Q_n \left(\frac{\Omega^2 \rho_f}{\kappa_n^4 - \beta_n^4} + \lambda_n \right) A_n = S_n C \quad (4.54)$$

onde

$$S_n = -\Omega^2 \rho_f \int_0^y \Phi(y) \cos(\kappa_n y) dy \quad (4.55)$$

ou

$$S_n = -\Omega^2 \rho_f \left[\int_0^y \Phi_1(y) \cos(\kappa_n y) dy + \dots + \int_0^y \Phi_4(y) \cos(\kappa_n y) dy \right] \quad (4.56)$$

Portanto

$$A_n = \frac{S_n C}{Q_n \left(\left(\frac{\Omega^2 \rho_f}{\kappa_n^4 - \beta_n^4} \right) + \lambda_n \right)} \quad (4.57)$$

Assim

$$U_1(y) = \left[\Phi(y) + \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{S_n \cos(\kappa_n y)}{Q_n (\Omega^2 \rho_f + (\kappa_n^4 - \beta_n^4) \lambda_n)} \right] C \quad (4.58)$$

ou, de forma compacta

$$U_1(y) = \Psi(y) C \quad (4.59)$$

sendo $\Psi = \Phi + r$ onde Φ é a solução homogênea da equação, e r é a solução particular não homogênea da equação.

Adimensionalizando resulta:

$$U_1(\xi) = \left[\Phi(\xi) + \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{S_n \cos(\bar{\kappa}_n \xi)}{Q_n \left(\beta_n^4 \Omega_b \rho_f + \left(\frac{\bar{\kappa}_n^4}{H^4} - \beta_n^4 \right) \frac{\lambda_n}{H} \right)} \right] C \quad (4.60)$$

$$U_1(\xi) = \Psi(\xi) C \quad (4.61)$$

onde C são as constantes $[C_1, C_2, C_3, C_4]^t$.

A solução $U_1(\xi)$ satisfazendo a equação

$$\bar{U}_1^4(\xi) - \beta^4 \bar{U}_1(\xi) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} A_n \cos(\bar{\kappa}_n \xi) \quad (4.62)$$

é expressada na forma de série:

$$\bar{U}_1 = \sum_{j=1}^4 D_j \Phi_j(\xi) + \sum_{n=n_1}^{\infty} F_n \cos(\bar{\kappa}_n \xi) \quad (4.63)$$

4.2 Deslocamento Seco - U_2

Para o deslocamento na parte seca tem-se somente $U_2 = U_2^h(y)$ que é a solução homogênea da equação.

Na equação da região seca, para $l < y < H$ tem-se

$$EJU_2^{(4)} - \rho_s F \Omega^2 U_2 = 0, \quad l < y < H \quad (4.64)$$

$$u_2(y, t) = U_2(y) e^{i\Omega t} \quad (4.65)$$

Usando os mesmos padrões adimensionais definidos anteriormente tem-se:

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\Omega}{\Omega_b}, & \bar{\kappa}_n &= \kappa_n H & \xi &= \frac{y}{H}, & y &= \xi H, & \nu &= \frac{l}{H}, \\ \gamma &= \frac{\rho_f H}{\rho_s F}, & \bar{\lambda}_n &= H \hat{\lambda}_n, & \bar{\lambda}_n^2 &= \bar{\kappa}_n^2 - \frac{\beta^4}{\bar{c}^2}, & \bar{c} &= \frac{c}{\Omega_b H} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Assim

$$\bar{U}_2(\xi) = U_2(\xi H), \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{U}_2(\xi) = H U_2'(\xi H) \quad (4.67)$$

Logo:

$$\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \bar{U}_2(\xi) = H^4 U^{(4)}_2(\xi H) \quad (4.68)$$

Então:

$$\frac{EJ \bar{U}_2^{(4)}(\xi)}{H^4} - \rho_s F \Omega^2 \bar{U}_2(\xi) = 0 \quad (4.69)$$

Multiplicando toda a equação por $\frac{H^4}{EJ}$ tem-se:

$$\bar{U}_2^{(4)}(\xi) - \frac{\rho_s F \Omega^2 \bar{U}_2(\xi) H^4}{EJ} = 0 \quad (4.70)$$

Como $\beta^2 = \frac{\Omega}{\Omega_b}$, e fazendo

$$\beta^4 = \frac{\rho_s F H^4}{EJ} \Omega^2, \quad (4.71)$$

resulta

$$\Omega_b = \sqrt{\frac{EJ}{\rho_s F H^4}} \quad (4.72)$$

Assim:

$$\bar{U}_2^{(4)}(\xi) - \beta^4 \bar{U}_2(\xi) = 0 \quad (4.73)$$

para $\nu < \xi < 1$.

Usando a base dinâmica

$$\hat{\Phi}_1 = h(\xi), \quad \hat{\Phi}_2 = h'(\xi), \quad \hat{\Phi}_3 = h''(\xi), \quad \hat{\Phi}_4 = h'''(\xi) \quad (4.74)$$

onde, pela definição anterior

$$h(\xi) = \frac{\sinh(\beta\xi) - \sin(\beta\xi)}{2\beta^3}. \quad (4.75)$$

tem-se para a solução homogênea

$$\bar{U}_2(\xi) = D_1 h(\xi) + D_2 h'(\xi) + D_3 h''(\xi) + D_4 h'''(\xi) \quad (4.76)$$

ou de forma compacta

$$\bar{U}_2(\xi) = \hat{\Phi}(\xi) D \quad (4.77)$$

onde $D = [D_1, D_2, D_3, D_4]^t$; e

$$\beta^4 = \frac{\rho_s F \Omega^2 H^4}{EJ} \quad (4.78)$$

$$\Omega_b = \sqrt{\frac{EJ}{\rho_s F H^4}} \quad (4.79)$$

Concluí-se pelo parágrafo anterior

$$\bar{U}_2 = \sum_{j=5}^8 D_j \hat{\Phi}_j(\xi). \quad (4.80)$$

4.3 Interface

Das Condições de interface sólido-fluido

$$\rho_f \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad 0 < \xi < \nu, \quad (4.81)$$

tem-se para

$$u_1 = e^{i\hat{\Omega}t} \bar{U}_1(\xi), \quad (4.82)$$

$$p = e^{i\hat{\Omega}t} \bar{P}(x, \xi) \quad (4.83)$$

que

$$-\rho_f \hat{\Omega}^2 \bar{U}_1(\xi) + \frac{\partial \bar{P}}{\partial x}(0, \xi) = 0 \quad (4.84)$$

onde, por superposição linear, tem-se na forma adimensional

$$\bar{P}(x, \xi) = \sum_{n=n_1}^{\infty} G_n e^{-\lambda_n x} \cos(\bar{\kappa}_n \xi). \quad (4.85)$$

Usando os mesmos padrões dimensionais definidos anteriormente:

$$\beta^2 = \frac{\hat{\Omega}}{\Omega_b}, \quad \bar{\kappa}_n = \kappa_n H, \quad \xi = \frac{y}{H}, \quad y = \xi H, \quad (4.86)$$

$$\nu = \frac{l}{H}, \quad \gamma = \frac{\rho_f H}{\rho_s F}, \quad \bar{\lambda}_n = H \lambda_n, \quad \bar{\lambda}_n^2 = \bar{\kappa}_n^2 - \frac{\beta^4}{\bar{c}^2}, \quad \bar{c} = \frac{c}{\Omega_b H}$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}(0, \xi) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} G_n \lambda_n e^{-\lambda_n x} \cos(\bar{\kappa}_n \xi) \quad (4.87)$$

Sabe-se que

$$\Omega_b = \sqrt{\frac{EJ}{\rho_s F H^4}} \quad (4.88)$$

Fazendo-se

$$A_n = \frac{G_n H^4}{EJ}. \quad (4.89)$$

Assim decorre:

$$\bar{U}_1(\xi) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{A_n \bar{\lambda}_n}{\gamma \beta^4} \cos(\bar{\kappa}_n \xi). \quad (4.90)$$

4.4 Relação de Ortogonalidade dos Modos de Vibração

A solução $p(x, y, t)$ para a pressão é suposta da forma $p(x, y, t) = e^{i\Omega t} P(x, y)$, enquanto que as expressões para os deslocamentos molhado, $u_1(y, t)$, e seco, $u_2(y, t)$, são $u_1(y, t) = e^{i\Omega t} U_1(y)$ e $u_2(y, t) = e^{i\Omega t} U_2(y)$, como mostrado nas seções 4.1 e 4.2. A substituição das expressões anteriores nas equações governantes

da pressão produz

$$\frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\Omega^2}{c^2} P(x, y) = 0, \quad (4.91)$$

sujeito às condições

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\left(\frac{1}{g}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad y = h, \quad (4.92)$$

$$P(x, y) = 0, \quad (4.93)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x, y) = 0. \quad (4.94)$$

De maneira análoga, pode ser deduzido um conjunto de equações satisfeitas pelas funções conjugadas $p^*(x, y, t) = e^{-i\Omega^* t} P^*(x, y)$, $u_1^*(y, t) = e^{-i\Omega^* t} U_1^*(y)$, $u_2^*(y, t) = e^{-i\Omega^* t} U_2^*(y)$, com todas as quantidades complexas substituídas pelas quantidades conjugadas correspondentes.

Se Ω_n^2 e Ω_m^{2*} são duas freqüências características diferentes, então as correspondentes funções da pressão e deslocamento, $P_n(x, y)$, $U_{1,n}(y)$, $U_{2,n}(y)$, $P_m^*(x, y)$, $U_{1,m}^*(y)$, $U_{2,m}^*(y)$, satisfazem

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega_m^{2*} - \Omega_n^2}{c^2} \int_{\Gamma} P_n P_m^* d\Gamma + EJ\rho_f \int_0^l (U_{1,m}^* U_{1,n}^{(4)} \Omega_m^{2*} - U_{1,n} U_{1,m}^{*(4)} \Omega_n^2) dy \\ & + EJ\rho_f \int_0^H (U_{2,m}^* U_{2,n}^{(4)} \Omega_m^{2*} - U_{2,n} U_{2,m}^{*(4)} \Omega_n^2) dy = \\ & \int_{\Gamma} \left[P_m^* \left(\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} \right) - P_n \left(\frac{\partial^2 P_m^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_m^*}{\partial y^2} \right) \right] d\Gamma \\ & + \rho_f \int_0^l [P_m^*(0, y) U_{1,n} \Omega_n^2 - P_n(0, y) U_{1,m}^* \Omega_m^{2*}] dy, \end{aligned} \quad (4.95)$$

onde Γ representa o domínio d'água com o seu contorno $\partial\Gamma$.

Para fins de simplificação, introduz-se a notação tensorial

$$()_{,ii} = ()_{,xx} + ()_{,yy} \quad (4.96)$$

e

$$()_{,i} = \frac{\partial ()}{\partial x_i}. \quad (4.97)$$

Utilizando o teorema de Green, que transforma uma integral sobre uma região bi-dimensional em uma integral de linha, segue que

$$\int_{\Gamma} [P_m^* P_{n,ii} - P_n P_{m,ii}^*] d\Gamma = \int_{\partial\Gamma} [P_m^* P_{n,i} - P_{m,i}^* P_n] \bar{n}_i ds, \quad (4.98)$$

e mediante a integração por partes, obtem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^l (U_{1,m}^* U_{1,n}^{(4)} \Omega_m^{2*} - U_{1,n} U_{1,m}^{*(4)} \Omega_n^2) dy &= (\Omega_m^{2*} - \Omega_n^2) \int_0^l U_{1,n}'' U_{1,m}^{*''} dy + \\ & [U_{1,m} U_{1,n}^{*'''} - U_{1,m}' U_{1,n}'' + U_{1,m}^{*'''} U_{1,n} - U_{1,m}^{*''} U_{1,n}']_0^l \end{aligned} \quad (4.99)$$

e

$$\begin{aligned} \int_l^H (U_{2,m}^* U_{2,n}^{(4)} \Omega_m^{2*} - U_{2,n} U_{2,m}^{*(4)} \Omega_n^2) dy &= (\Omega_m^{2*} - \Omega_n^2) \int_l^H U_{2,n}'' U_{2,m}^{*''} dy + \\ & [U_{2,m} U_{2,n}^{*'''} - U_{2,m}' U_{2,n}'' + U_{2,m}^{*'''} U_{2,n} - U_{2,m}^{*''} U_{2,n}']_l^H, \end{aligned} \quad (4.100)$$

e aplicando as condições de contorno para cada função tem-se que

$$\int_{\Gamma} [P_m^* P_{n,ii} - P_n P_{m,ii}^*] d\Gamma = \Theta_{m,n}(\infty) - \Theta_{m,n}(0), \quad (4.101)$$

e

$$\int_0^h (U_{1,m}^* U_{1,n}^{(4)} \Omega_m^{2*} - U_{1,n} U_{1,m}^{*(4)} \Omega_n^2) dy + \int_h^H (U_{2,m}^* U_{2,n}^{(4)} \Omega_m^{2*} - U_{2,n} U_{2,m}^{*(4)} \Omega_n^2) dy =$$

$$(\Omega_m^{2*} - \Omega_n^2) \left[\int_0^h U_{1,n}'' U_{1,m}^{*''} dy + \int_h^H U_{2,n}'' U_{2,m}^{*''} dy \right] \quad (4.102)$$

onde

$$\Theta_{mn}(x) = \int_0^h [P_m^*(x, y) P_{n,x}(x, y) - P_{m,x}^*(x, y) P_n(x, y)] dy, \quad (4.103)$$

$$\Theta_{mn}(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Theta_{mn}(x). \quad (4.104)$$

A substituição das equações (4.98)-(4.104) na equação (4.95), produz

$$(\Omega_m^{2*} - \Omega_n^2) \left\{ \frac{1}{c^2} \int_{\Gamma} P_n P_m^* d\Gamma + EJ\rho_f \left[\int_0^l U_{1n}'' U_{1m}^{*''} dy + \int_l^H U_{2n}'' U_{2m}^{*''} dy \right] \right\} = \Theta_{mn}(\infty). \quad (4.105)$$

Da equação (4.94) e a sua forma conjugada no caso não perturbado, segue que

$$\Theta_{mn}(\infty) = 1.$$

Para a equação (4.105) com $m = n$, segue que

$$\Omega_m^{2*} = \Omega_n^2,$$

implicando que Ω^2 é um número real. De maneira similar, fica comprovado que, para cada número real Ω^2 ,

$$[\kappa^2 - (\kappa^2)^*] \int_0^l Y Y^* dy = 0, \quad (4.106)$$

e portanto κ^2 é um número real. Assim, λ^2 é um número real.

Para duas frequências diferentes ($m \neq n$), tem-se a seguinte relação de ortogonalidade da vibração natural

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \int_{\Gamma} P_n P_m^* d\Gamma + EJ\rho_f \left[\int_0^l U_{1n}'' U_{1m}^{*''} dy + \int_l^H U_{2n}'' U_{2m}^{*''} dy \right] = 0, \quad m \neq n.} \quad (4.107)$$

A última igualdade indica uma relação de ortogonalidade funcional entre a pressão hidrodinâmica e o momento fletor da barragem.

4.5 Condições de Contorno

A seguir, enumeram-se as condições de contorno dos deslocamentos e as condições de continuidade na interface.

Condições de Contorno dos deslocamentos: Usando os padrões adimensionais anteriores tem-se:

$$y = \xi, \quad H = 1, \quad l = \nu \quad (4.108)$$

Para os deslocamentos, tem-se as seguintes condições de contorno

- **Molhado**

$$U_1(0) = 0 \quad \bar{U}_1(0) = 0 \quad (4.109)$$

$$U_1'(0) = 0 \quad \bar{U}_1'(0) = 0 \quad (4.110)$$

- **Seco**

$$U_2''(H) = 0 \quad \bar{U}_2''(1) = 0 \quad (4.111)$$

$$U_2'''(H) = 0 \quad \bar{U}_2'''(1) = 0 \quad (4.112)$$

- **Interface**

$$U_1(l) = U_2(l) \quad \bar{U}_1(\nu) = \bar{U}_2(\nu) \quad (4.113)$$

$$U_1'(l) = U_2'(l) \quad \bar{U}_1'(\nu) = \bar{U}_2'(\nu) \quad (4.114)$$

$$U_1''(l) = U_2''(l) \quad \bar{U}_1''(\nu) = \bar{U}_2''(\nu) \quad (4.115)$$

$$U_1'''(l) = U_2'''(l) \quad \bar{U}_1'''(\nu) = \bar{U}_2'''(\nu) \quad (4.116)$$

Na interface são satisfeitas condições de continuidade para o deslocamento, o giro, o momento fletor e a força de cisalhamento, obtendo-se:

$$\bar{U}_1(\nu) = \bar{U}_2(\nu) \longrightarrow \Psi(\nu)C = \hat{\Phi}(\nu)D \quad (4.117)$$

$$\bar{U}_1'(\nu) = \bar{U}_2'(\nu) \longrightarrow \Psi'(\nu)C = \hat{\Phi}'(\nu)D \quad (4.118)$$

$$\bar{U}_1''(\nu) = \bar{U}_2''(\nu) \longrightarrow \Psi''(\nu)C = \hat{\Phi}''(\nu)D \quad (4.119)$$

$$\bar{U}_1'''(\nu) = \bar{U}_2'''(\nu) \longrightarrow \Psi'''(\nu)C = \hat{\Phi}'''(\nu)D \quad (4.120)$$

Reescrevendo as condições de contorno e as condições de continuidade acima tem-se:

$$\Psi(0) = 0 \quad (4.121)$$

$$\Psi'(0) = 0 \quad (4.122)$$

$$\hat{\Phi}''(1)D = 0 \quad (4.123)$$

$$\hat{\Phi}'''(1)D = 0 \quad (4.124)$$

$$\Psi(\nu)C - \hat{\Phi}(\nu)D = 0 \quad (4.125)$$

$$\Psi'(\nu)C - \hat{\Phi}'(\nu)D = 0 \quad (4.126)$$

$$\Psi''(\nu)C - \hat{\Phi}''(\nu)D = 0 \quad (4.127)$$

$$\Psi'''(\nu)C - \hat{\Phi}'''(\nu)D = 0 \quad (4.128)$$

que origina um sistema linear homogêneo de 8 equações com 8 incógnitas da forma

$$RD = 0 \quad (4.129)$$

onde R é uma matriz de ordem 8 e D um vetor de constantes c_j, ed_j dados por $D = [c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4]^t$.

Para conseguir soluções não nulas de tal sistema linear é preciso que

$$\det(R) = 0 \quad (4.130)$$

pois de outro modo, só seriam obtida a solução trivial. Tal igualdade é denominada *equação característica* do problema.

De forma análoga e de acordo com os resultados enunciados na seção anterior, tem-se que os deslocamentos horizontais podem ser expressos, como

$$\bar{U}_1(\xi) = \sum_{j=1}^4 \left(\Phi_j(\xi) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n(\xi) \right) c_j, \quad (4.131)$$

e

$$\bar{U}_2(\xi) = \sum_{j=1}^4 \hat{\Phi}_j(\xi) d_j, \quad (4.132)$$

Na determinação dos vetores de constantes c_j e d_j

$$c_j = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

e

$$d_j = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}, \quad (4.134)$$

é preciso utilizar as quatro condições de contorno e as quatro condições de continuidade, pois existem oito incógnitas a serem determinadas.

Como a configuração estrutural da barragem é do tipo fixa-livre, portanto, na posição $\xi = 0$, o deslocamento e o giro são nulos, implicando que

$$\bar{U}_1(0) = 0, \quad (4.135)$$

$$\bar{U}'_1(0) = 0, \quad (4.136)$$

e na posição $\xi = 1$, o momento fletor e a força de cisalhamento são nulos, isto é,

$$\bar{U}_2''(1) = 0 \quad (4.137)$$

$$\bar{U}_2'''(1) = 0 \quad (4.138)$$

As condições de continuidade garantem a homogeneidade do deslocamento, giro, momento fletor e força de cisalhamento ao longo do comprimento da barragem e estão dadas por

$$\bar{U}_1(\nu) = \bar{U}_2(\nu), \quad (\text{deslocamento}), \quad (4.139)$$

$$\bar{U}'_1(\nu) = \bar{U}'_2(\nu), \quad (\text{giro}), \quad (4.140)$$

$$\bar{U}_1''(\nu) = \bar{U}_2''(\nu), \quad (\text{momento fletor}), \quad (4.141)$$

$$\bar{U}_1'''(\nu) = \bar{U}_2'''(\nu), \quad (\text{força de cisalhamento}). \quad (4.142)$$

Em forma de somatórios as equações necessárias para a resolução do sistema linear homogêneo podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\sum_{j=1}^4 \left(\Phi_j(0) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n(0) \right) c_j = 0, \quad (4.143)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left(\Phi_j'(0) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n'(0) \right) c_j = 0, \quad (4.144)$$

$$\sum_{j=1}^4 \hat{\Phi}_j''(1) d_j = 0, \quad (4.145)$$

$$\sum_{j=1}^4 \hat{\Phi}_j'''(1) d_j = 0, \quad (4.146)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left(\Phi_j(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n(\nu) \right) c_j - \sum_{j=1}^4 \hat{\Phi}_j(\nu) d_j = 0, \quad (4.147)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left(\Phi_j'(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n'(\nu) \right) c_j - \sum_{j=1}^4 \hat{\Phi}_j'(\nu) d_j = 0, \quad (4.148)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left(\Phi_j''(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n''(\nu) \right) c_j - \sum_{j=1}^4 \hat{\Phi}_j''(\nu) d_j = 0, \quad (4.149)$$

e

$$\sum_{j=1}^4 \left(\Phi_j'''(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n'''(\nu) \right) c_j - \sum_{j=1}^4 \hat{\Phi}_j'''(\nu) d_j = 0, \quad (4.150)$$

As oito equações anteriores podem ser escritas de maneira matricial:

$$R \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}_{8 \times 1} = [0]_{8 \times 1} \quad (4.151)$$

onde os elementos da matriz $\mathbf{R} = [R_{ij}]_{8 \times 8}$ estão definidos como segue

$$R_{1j} = \Phi_j(0) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n(0), \quad R_{2j} = \Phi_j'(0), \quad j = 1 : 4, \quad (4.152)$$

$$R_{3j} = \hat{\Phi}_{j-4}''(1), \quad R_{4j} = \hat{\Phi}_{j-4}'''(1), \quad j = 5 : 8, \quad (4.153)$$

$$R_{5j} = \begin{cases} \Phi_j(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n(\nu), & j = 1 : 4, \\ -\hat{\Phi}_{j-4}(\nu), & j = 5 : 8, \end{cases} \quad (4.154)$$

$$R_{6j} = \begin{cases} \Phi_j'(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n'(\nu), & j = 1 : 4, \\ -\hat{\Phi}_{j-4}'(\nu), & j = 5 : 8, \end{cases} \quad (4.155)$$

$$R_{7j} = \begin{cases} \Phi_j''(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n''(\nu), & j = 1 : 4, \\ -\hat{\Phi}_{j-4}''(\nu), & j = 5 : 8, \end{cases} \quad (4.156)$$

$$R_{8j} = \begin{cases} \Phi_j'''(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n'''(\nu), & j = 1 : 4, \\ -\hat{\Phi}_{j-4}'''(\nu), & j = 5 : 8, \end{cases} \quad (4.157)$$

onde

$$E_n = \frac{1}{I_n \left(\frac{-1}{\bar{\kappa}_n^4 - \beta^4} - \frac{\bar{\lambda}_n(\bar{\kappa}_n^4 - \beta^4)}{\gamma\beta^4} \right)} \quad (4.158)$$

e

$$I_{n,j} = \int_0^\nu \cos(\bar{\kappa}_n \xi) \phi_j(\xi) d\xi, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (4.159)$$

A matriz \mathbf{R} do sistema linear homogêneo (4.151) deve satisfazer a condição

$$\det(\mathbf{R}) = 0 \quad (4.160)$$

para poder obter soluções não nulas para o sistema.

A equação (4.160) é referida na literatura, Inman,[9, 10], 1994, como *equação característica* e as raízes β de tal equação são denominados os *autovalores* do

problema. A importância de tais autovalores é vital para a obtenção das frequências naturais do sistema, que é feita mediante a igualdade

$$\Omega = \beta^2 \Omega_b, \quad \Omega_b = \sqrt{\frac{EJ}{\rho_s F H^4}}. \quad (4.161)$$

Após o sistema linear (4.151) ser resolvido são obtidos valores das constantes $c_j, d_j, j = 1, 2, 3, 4$, que podem ser substituídos nas equações (4.131) e (4.132):

$$\bar{U}_1(\xi) = \sum_{j=1}^4 \left(\Phi_j(\xi) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n(\xi) \right) c_j, \quad (4.162)$$

e

$$\bar{U}_2(\xi) = \sum_{j=1}^4 \hat{\Phi}_j(\xi) d_j, \quad (4.163)$$

concluindo, então, o processo de cálculo simbólico dos modos $\bar{U}_1(\xi)$ e $\bar{U}_2(\xi)$.

Os cálculos simbólicos envolvidos para o cálculo do determinante $\det(\mathbf{R})$ são muito extensos, causando problemas de memória. Porém, uma maneira de contornar esta dificuldade é expandir na forma de Taylor as variáveis envolvidas, de maneira que os cálculos são reduzidos à operações entre polinômios em β . Este processo de expansão causa problemas de precisão, e para aliviar este problema, utilizou-se um número considerável de termos na expansão de Taylor.

4.6 Cálculo Matricial dos Coeficientes

Para a parte molhada, isto é, para $0 < \xi < l$, a base dinâmica está formada pelas seguintes funções

$$\Phi_1(\xi) = h(\xi) \quad (4.164)$$

$$\Phi_2(\xi) = h'(\xi) \quad (4.165)$$

$$\Phi_3(\xi) = h''(\xi) \quad (4.166)$$

$$\Phi_4(\xi) = h'''(\xi). \quad (4.167)$$

Para a parte seca, isto é, para $l < \xi < H$, podem ser usadas as seguintes funções, provenientes da base dinâmica:

$$\hat{\Phi}_1(\xi) = h(1 - \xi) \quad (4.168)$$

$$\hat{\Phi}_2(\xi) = h'(1 - \xi) \quad (4.169)$$

$$\hat{\Phi}_3(\xi) = h''(1 - \xi) \quad (4.170)$$

$$\hat{\Phi}_4(\xi) = h'''(1 - \xi) \quad (4.171)$$

Utilizando as condições de contorno acima tem-se o sistema linear 8×8

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(0) + r_1(0) & \Phi_2(0) + r_2(0) & \Phi_3(0) + r_3(0) & \Phi_4(0) + r_4(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_1'(0) + r_1'(0) & \Phi_2'(0) + r_2'(0) & \Phi_3'(0) + r_3'(0) & \Phi_4'(0) + r_4'(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_1''(1) & \Phi_2''(1) & \Phi_3''(1) & \Phi_4''(1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_1'''(1) & \Phi_2'''(1) & \Phi_3'''(1) & \Phi_4'''(1) \\ \Phi_1(\nu) + r_1(\nu) & \Phi_2(\nu) + r_2(\nu) & \Phi_3(\nu) + r_3(\nu) & \Phi_4(\nu) + r_4(\nu) & -\hat{\Phi}_1(\nu) & -\hat{\Phi}_2(\nu) & -\hat{\Phi}_3(\nu) & -\hat{\Phi}_4(\nu) \\ \Phi_1'(\nu) + r_1'(\nu) & \Phi_2'(\nu) + r_2'(\nu) & \Phi_3'(\nu) + r_3'(\nu) & \Phi_4'(\nu) + r_4'(\nu) & -\hat{\Phi}_1'(\nu) & -\hat{\Phi}_2'(\nu) & -\hat{\Phi}_3'(\nu) & -\hat{\Phi}_4'(\nu) \\ \Phi_1''(\nu) + r_1''(\nu) & \Phi_2''(\nu) + r_2''(\nu) & \Phi_3''(\nu) + r_3''(\nu) & \Phi_4''(\nu) + r_4''(\nu) & -\hat{\Phi}_1''(\nu) & -\hat{\Phi}_2''(\nu) & -\hat{\Phi}_3''(\nu) & -\hat{\Phi}_4''(\nu) \\ \Phi_1'''(\nu) + r_1'''(\nu) & \Phi_2'''(\nu) + r_2'''(\nu) & \Phi_3'''(\nu) + r_3'''(\nu) & \Phi_4'''(\nu) + r_4'''(\nu) & -\hat{\Phi}_1'''(\nu) & -\hat{\Phi}_2'''(\nu) & -\hat{\Phi}_3'''(\nu) & -\hat{\Phi}_4'''(\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando as funções definidas para as partes seca e molhada tem-se a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & 1 + r_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1' & r_2' & 1 + r_3' & r_4' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_1(\nu) + r_1(\nu) & \Phi_2(\nu) + r_2(\nu) & \Phi_3(\nu) + r_3(\nu) & \Phi_4(\nu) + r_4(\nu) & -\hat{\Phi}_1(\nu) & -\hat{\Phi}_2(\nu) & -\hat{\Phi}_3(\nu) & -\hat{\Phi}_4(\nu) \\ \Phi_1'(\nu) + r_1'(\nu) & \Phi_2'(\nu) + r_2'(\nu) & \Phi_3'(\nu) + r_3'(\nu) & \Phi_4'(\nu) + r_4'(\nu) & -\hat{\Phi}_1'(\nu) & -\hat{\Phi}_2'(\nu) & -\hat{\Phi}_3'(\nu) & -\hat{\Phi}_4'(\nu) \\ \Phi_1''(\nu) + r_1''(\nu) & \Phi_2''(\nu) + r_2''(\nu) & \Phi_3''(\nu) + r_3''(\nu) & \Phi_4''(\nu) + r_4''(\nu) & -\hat{\Phi}_1''(\nu) & -\hat{\Phi}_2''(\nu) & -\hat{\Phi}_3''(\nu) & -\hat{\Phi}_4''(\nu) \\ \Phi_1'''(\nu) + r_1'''(\nu) & \Phi_2'''(\nu) + r_2'''(\nu) & \Phi_3'''(\nu) + r_3'''(\nu) & \Phi_4'''(\nu) + r_4'''(\nu) & -\hat{\Phi}_1'''(\nu) & -\hat{\Phi}_2'''(\nu) & -\hat{\Phi}_3'''(\nu) & -\hat{\Phi}_4'''(\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como a quarta linha da matriz é de zeros pode-se eliminá-la, resultando

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & 1+r_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r'_1 & r'_2 & 1+r'_3 & r'_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Phi_1(\nu) + r_1(\nu) & \Phi_2(\nu) + r_2(\nu) & \Phi_3(\nu) + r_3(\nu) & \Phi_4(\nu) + r_4(\nu) & -\hat{\Phi}_1(\nu) & -\hat{\Phi}_2(\nu) & -\hat{\Phi}_3(\nu) & -\hat{\Phi}_4(1) \\ \Phi'_1(\nu) + r'_1(\nu) & \Phi'_2(\nu) + r'_2(\nu) & \Phi'_3(\nu) + r'_3(\nu) & \Phi'_4(\nu) + r'_4(\nu) & -\hat{\Phi}'_1(\nu) & -\hat{\Phi}'_2(\nu) & -\hat{\Phi}'_3(\nu) & -\hat{\Phi}'_4(1) \\ \Phi''_1(\nu) + r''_1(\nu) & \Phi''_2(\nu) + r''_2(\nu) & \Phi''_3(\nu) + r''_3(\nu) & \Phi''_4(\nu) + r''_4(\nu) & -\hat{\Phi}''_1(\nu) & -\hat{\Phi}''_2(\nu) & -\hat{\Phi}''_3(\nu) & -\hat{\Phi}''_4(1) \\ \Phi'''_1(\nu) + r'''_1(\nu) & \Phi'''_2(\nu) + r'''_2(\nu) & \Phi'''_3(\nu) + r'''_3(\nu) & \Phi'''_4(\nu) + r'''_4(\nu) & -\hat{\Phi}'''_1(\nu) & -\hat{\Phi}'''_2(\nu) & -\hat{\Phi}'''_3(\nu) & -\hat{\Phi}'''_4(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ D_1 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como a terceira linha da matriz é de zeros podemos eliminá-la, resultando:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & 1+r_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r'_1 & r'_2 & 1+r'_3 & r'_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_1(\nu) + r_1(\nu) & \Phi_2(\nu) + r_2(\nu) & \Phi_3(\nu) + r_3(\nu) & \Phi_4(\nu) + r_4(\nu) & -\hat{\Phi}_1(\nu) & -\hat{\Phi}_2(\nu) & -\hat{\Phi}_3(\nu) & -\hat{\Phi}_4(1) \\ \Phi'_1(\nu) + r'_1(\nu) & \Phi'_2(\nu) + r'_2(\nu) & \Phi'_3(\nu) + r'_3(\nu) & \Phi'_4(\nu) + r'_4(\nu) & -\hat{\Phi}'_1(\nu) & -\hat{\Phi}'_2(\nu) & -\hat{\Phi}'_3(\nu) & -\hat{\Phi}'_4(1) \\ \Phi''_1(\nu) + r''_1(\nu) & \Phi''_2(\nu) + r''_2(\nu) & \Phi''_3(\nu) + r''_3(\nu) & \Phi''_4(\nu) + r''_4(\nu) & -\hat{\Phi}''_1(\nu) & -\hat{\Phi}''_2(\nu) & -\hat{\Phi}''_3(\nu) & -\hat{\Phi}''_4(1) \\ \Phi'''_1(\nu) + r'''_1(\nu) & \Phi'''_2(\nu) + r'''_2(\nu) & \Phi'''_3(\nu) + r'''_3(\nu) & \Phi'''_4(\nu) + r'''_4(\nu) & -\hat{\Phi}'''_1(\nu) & -\hat{\Phi}'''_2(\nu) & -\hat{\Phi}'''_3(\nu) & -\hat{\Phi}'''_4(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde:

$$\Phi_1(\xi) = h(\xi), \quad \Phi_2(\xi) = h'(\xi), \quad \Phi_3(\xi) = h''(\xi), \quad \Phi_4(\xi) = h'''(\xi), \quad (4.172)$$

é a solução homogênea de $\bar{U}_1(\xi)$, e

$$r_1(\xi) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{A_n \lambda_n}{\gamma \beta^4} \cos(\kappa_n \xi) \quad (4.173)$$

é a solução particular de $\bar{U}_1(\xi)$;

$$\hat{\Phi}_1(\xi) = h(\xi), \quad \hat{\Phi}_2(\xi) = h'(\xi), \quad \hat{\Phi}_3(\xi) = h''(\xi), \quad \hat{\Phi}_4(\xi) = h'''(\xi), \quad (4.174)$$

é a solução homogênea de $\bar{U}_2(\xi)$,

Sendo

$$h(\xi) = \frac{\sinh(\beta\xi) - \sin(\beta\xi)}{2\beta^3}. \quad (4.175)$$

4.7 Solução de Pressão Constante, $\Omega^2 = 0$

Neste caso as únicas soluções possíveis para as funções $X(x), Y(y)eT(t)$ são dadas nas equações:

$$Y_n(y) = \cos(\kappa_n y), \quad X_n(x) = e^{-\lambda_n x} \quad (4.176)$$

$$\lambda_n^2 = \kappa_n^2 - \frac{\Omega^2}{c^2} \quad (4.177)$$

$$Y(y) = d, \quad X(x)T(t) = 1, \quad \Omega = 0 = \lambda, \quad \kappa = 0. \quad (4.178)$$

A equação na interface de interação expressa na equação

$$\rho_f \Omega^2 U_1(y) = X'(0)Y(y), \quad 0 < y < l. \quad (4.179)$$

reduz para $X'(0)Y(y) \equiv 0$, para a qual somente $\lambda_n = 0$ na equação

$$Y(y) = d, \quad X(x)T(t) = 1, \quad \Omega = 0 = \lambda, \quad \kappa = 0. \quad (4.180)$$

fornece uma solução não trivial. Isto representa uma solução de pressão de fluido constante e aparece apenas no caso de ondas superficiais livres e o limite de radiação na infinidade. Para esta solução de pressão constante, as condições de limite correspondentes são descritos pelas equações

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\left(\frac{1}{g}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad y = l \quad (4.181)$$

e

$$p(x, y, t) = P(x, y)e^{-i\Omega t}, \quad P_x - i\lambda P = 0, \quad x \rightarrow \infty \quad (4.182)$$

Para propósitos ilustrativos, deixe $F = 1$ e $d = 24EJ\hat{p}$ na equação

$$Y(y) = d, \quad X(x)T(t) = 1, \quad \Omega = 0 = \lambda, \quad \kappa = 0. \quad (4.183)$$

A substituição desta solução na equação

$$Y(y) = d, \quad X(x)T(t) = 1, \quad \Omega = 0 = \lambda, \quad \kappa = 0. \quad (4.184)$$

e $\hat{\Omega}^2 = 0$ nas equações

$$EJU_1^4 - \rho_s F \Omega^2 U_1 = -X(0)Y(y), \quad 0 < y < l \quad (4.185)$$

$$U_1(0) = 0, \quad U_1'(0) = 0; \quad (4.186)$$

$$EJU_2^4 - \rho_s F \Omega^2 U_2 = 0, \quad l < y < H \quad (4.187)$$

$$U_2''(H) = 0, \quad U_2'''(H) = 0; \quad (4.188)$$

resulta

$$U_1(y) = -\hat{p}y^4 + D_1y^3 + D_2y^2, \quad U_2(y) = D_3(\xi - 1) + D_4. \quad (4.189)$$

Além das equações

$$U_1(l) = U_2(l) \quad U_1'(l) = U_2'(l), \quad (4.190)$$

$$U_1''(l) = U_2''(l) \quad U_1'''(l) = U_2'''(l), \quad (4.191)$$

segue que

$$D_1 = 4\hat{p}l, \quad D_2 = -6\hat{p}l^2, \quad D_3 = -4\hat{p}l^3, \quad D_4 = \hat{p}l^3(l - 4H). \quad (4.192)$$

Este resultado descreve um modo de frequência zero da viga com pressão de fluido constante \hat{p} : isto é, uma solução estática.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Usando todas as formulações teóricas derivadas nos capítulos prévios, foram obtidos resultados numéricos que descrevem o comportamento dinâmico do sistema de interação viga-água proposto. Nestes cálculos, foi assumido que a densidade da água e a densidade da viga é $\rho_f = 1000 \text{ Kg/m}^3$ e $\rho_s = 2400 \text{ Kg/m}^3$, respectivamente. O módulo de elasticidade de Young E para o concreto é $E = 2.94 \times 10^{10} \text{ Pa}$ ou seja, $E = 2.94 \times 10^9 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$, considerando a aceleração da gravidade igual a $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, e a velocidade do som na água é $c = 1439 \text{ m/s}$. O momento de inércia J com respeito ao eixo transversal da viga é dado por

$$J = \frac{ba^3}{12} \quad (5.1)$$

onde b é a base da seção transversal e a a altura da seção transversal da viga. Supõe-se uma barragem, para efeitos de cálculos, com largura da base $F = 2,00\text{m}$, altura útil $H = 10,00\text{m}$, e onde l é a altura da água na mesma. Com os valores assumidos acima identifica-se uma viga longa e fina onde a equação de Euler-Bernoulli se adapta perfeitamente.

As frequências características do sistema acoplado são determinadas pelas soluções da equação (4.160):

$$\det(\mathbf{R}) = 0 \quad (5.2)$$

Neste caso, quando ondas da superfície livre estão presentes, os parâmetros κ_n necessários para a definição das função:

$$Y_n(y) = \cos(\kappa_n y) \quad (5.3)$$

satisfazendo a relação

$$\lambda_n^2 = \kappa_n^2 - \frac{\Omega^2}{c^2} > 0 \quad (5.4)$$

são dependentes da frequência natural Ω .

O efeito da inclusão de ondas de superfície livre dificulta a determinação dos κ_n , como raízes de $\tan(\kappa l) = -\frac{\Omega^2}{\kappa g}$; os mesmos não podem ser obtidos de forma exata, como é no caso de sem o efeito de ondas de superfície livre, pois tem-se um acoplamento com a frequência (κ, Ω) isto é, deve-se resolver o sistema acoplado

$$\tan(\kappa l) = -\frac{\beta^4 \Omega_b^2}{\kappa g} \quad (5.5)$$

e

$$\det(\mathbf{R}) = 0 \quad (5.6)$$

com o fato que $\kappa_n \in (n - \frac{1}{2}, n)\frac{\pi}{l}$.

Neste trabalho foram utilizados valores de β próximos dos encontrados por Xing, Price, e Du [25] com o intuito de obter os valores de n_1 que garantem $\kappa^2 - \frac{\Omega_b^2}{c^2} \beta^4 > 0$.

Uma maneira de abordar este problema é resolver a equação característica $\det(R) = 0$ para se obter os valores de β que são os autovalores e portanto das frequências naturais do sistema acoplado, Ω .

Deve ser observado que no caso de fluidos incompressíveis, onde a velocidade de som tende à infinito, as formulações disponíveis são deduzidas substituindo $\frac{1}{c}$ por 0 nas equações apresentadas em seções prévias.

	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$	$\gamma = 3.0$	$\gamma = 5.0$	$\gamma = 8.0$	$\gamma = 10.0$
$\nu = 0.5$	2	2	1	1	1	1
$\nu = 0.8$	3	2	1	1	1	1
$\nu = 1.0$	3	2	1	1	1	1

Tabela 5.1 Valores de n_1 para a primeira freqüência β_1

	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$	$\gamma = 3.0$	$\gamma = 5.0$	$\gamma = 8.0$	$\gamma = 10.0$
$\nu = 0.5$	7	4	2	2	1	1
$\nu = 0.8$	11	6	3	2	2	2
$\nu = 1.0$	14	7	3	2	2	2

Tabela 5.2 Valores de n_1 para a segunda freqüência β_2

	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$	$\gamma = 3.0$	$\gamma = 5.0$	$\gamma = 8.0$	$\gamma = 10.0$
$\nu = 0.5$	19	10	4	3	2	2
$\nu = 0.8$	30	16	6	4	3	2
$\nu = 1.0$	38	19	18	5	3	3

Tabela 5.3 Valores de n_1 para a terceira freqüência β_3

Uma vez calculado o valor de n_1 , procedeu-se a determinação numérica da frequência característica β . A estratégia utilizada neste caso, devido à dificuldade algébrica, foi a de conseguir as expansões truncadas da série de Taylor para cada termo envolvido no cálculo de determinante da matriz R cujos elementos estão definidos pelas equações (4.152)-(4.157). Isto permitiu o cálculo aproximado da frequência característica, pelos esquemas de Newton incluídos no Maple.

Os resultados para as frequências foram tabelados, dando diversos valores para os parâmetros γ e ν , como é mostrado nas tabelas 5.4, 5.5 e 5.6.

Uma comparação destes resultados indica que a água fornece um efeito de massa adicional no sistema. A frequência que corresponde a cada modo do sistema de viga-água diminui com a relação crescente $\frac{\nu}{\gamma}$. Esta conclusão reafirma os resultados matematicamente provados de Xing e Price, [25].

O comportamento observado pelas frequências é qualitativamente o mesmo que aparece na literatura, Xing et al., 1997. Porém, alguns resultados diferem numericamente. Este fato pode ser explicado porque aqui foi utilizada a série truncada de Taylor e por envolver quantidades muito grandes e muito pequenas, desde $\mathcal{O}(10^{40})$ até $\mathcal{O}(10^{-40})$, devidos aos parâmetros estruturais termos exponenciais, que compromete o desempenho numérico do microcomputador durante a simulação no Maple. Um tratamento mais refinado pode ser tentado, por exemplo, mediante a utilização de algoritmos específicos para este tipo de problemas, que envolvem aritmética baseada na teoria de números. Entretanto, este tipo de tratamento foge ao alcance deste trabalho, pois envolve a implementação de algoritmos muito sofisticados.

	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$	$\gamma = 3.0$	$\gamma = 5.0$	$\gamma = 8.0$	$\gamma = 10.0$
$\nu = 0.5$	1.87422	1.87364	1.86750	1.86309	1.85682	1.85289
$\nu = 0.8$	1.87225	1.85540	1.81653	1.78506	1.74240	1.71662
$\nu = 1.0$	1.86544	1.81266	1.76024	1.68324	1.59286	1.54422

Tabela 5.4 *Valores aproximados da primeira freqüência β_1*

	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$	$\gamma = 3.0$	$\gamma = 5.0$	$\gamma = 8.0$	$\gamma = 10.0$
$\nu = 0.5$	4.69368	4.69075	4.58141	4.57063	4.57346	4.52480
$\nu = 0.8$	4.69407	4.69404	4.69309	4.48716	4.44133	4.41371
$\nu = 1.0$	4.69325	4.68474	4.49643	4.47260	4.39540	4.34819

Tabela 5.5 *Valores aproximados da segunda freqüência β_2*

	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$	$\gamma = 3.0$	$\gamma = 5.0$	$\gamma = 8.0$	$\gamma = 10.0$
$\nu = 0.5$	7.85475	7.85475	7.85493	7.85305	7.66630	7.64715
$\nu = 0.8$	7.85030	7.84948	7.82713	7.77382	7.69166	7.40475
$\nu = 1.0$	7.85464	7.85347	7.82265	7.76564	7.42514	7.37966

Tabela 5.6 *Valores aproximados da terceira freqüência β_3*

5.1 As Freqüências Características

Os parâmetros envolvidos na elaboração das tabelas 5.4, 5.5 e 5.6 são $\nu = \frac{l}{H}$ e $\gamma = \frac{\rho_f H}{\rho_s F}$ que representam, respectivamente, o nível da água e a espessura da parede no protótipo adimensionalizado do modelo.

Mediante a observação dos resultados obtidos em tais tabelas, podem-se formular as seguintes afirmações:

- Se o parâmetro ν é mantido constante, isto é, se o nível da água é o mesmo, e se o parâmetro γ aumenta, isto é, se a espessura da parede da barragem diminui, então a freqüência característica da barragem diminui. Então, pode-se concluir que a diminuição da espessura da parede tem o mesmo efeito de uma massa adicional no extremo livre de uma viga engastada.
- Se o parâmetro γ é mantido constante, isto é, se a espessura da parede é a mesma, e se o parâmetro ν aumenta, isto é, se o nível da água aumenta, então a freqüência característica da barragem diminui. Então, pode-se concluir que o aumento no nível da água na barragem tem o mesmo efeito de uma massa adicional no extremo livre de uma viga engastada.

5.2 Os Modos de Vibração

Depois de ter calculado numericamente as três primeiras freqüências características para diversos valores dos parâmetros γ e ν , foi feita a montagem algébrica dos modos.

Inicialmente, o valor da freqüência é substituído na matriz R . Então, nesse momento tal matriz tem um valor numérico.

Então, resolve-se o sistema linear homogêneo

$$RD = 0. \tag{5.7}$$

A seguir, são montados os deslocamentos $U_1(y)$ e $U_2(y)$ mediante as fórmulas (4.162) em $0 < y < l$ e (4.163) em $l < y < H$.

Finalmente, as duas relações explícitas são juntadas para reproduzir os gráficos mostrados na figura (5.2), onde são calculados os três primeiros modos do sistema.

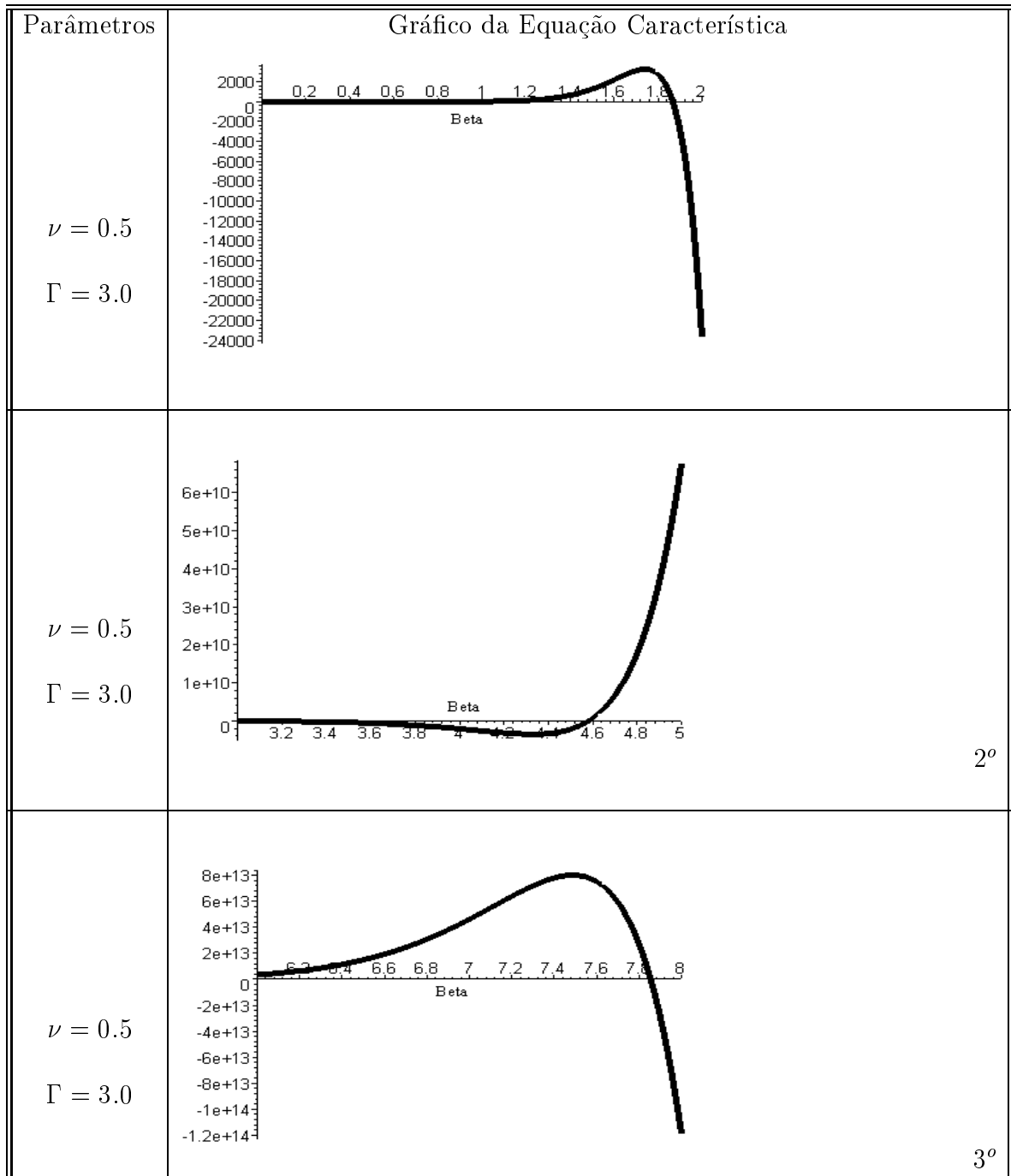


Figura 5.1 Gráficos da Equação Característica

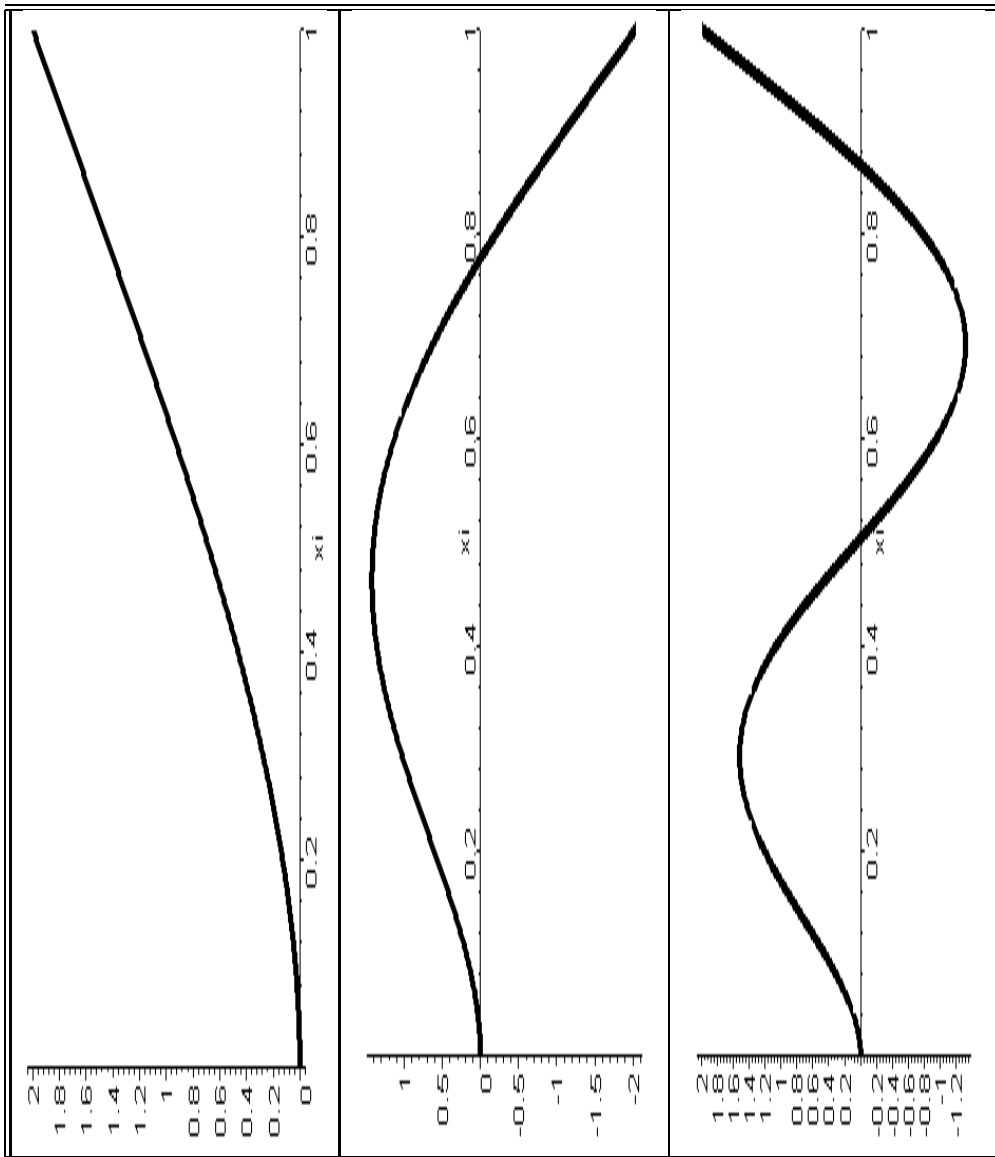


Figura 5.2 Gráficos dos Primeiros Modos para valores “padrão” dos parâmetros, $\nu = 0.5$ e $\Gamma = 3.0$

5.3 Resultados Gráficos

Na figura 5.1, são mostrados os gráficos da equação característica versus β . Pela simples observação de tais gráficos, pode-se obter valores aproximados das freqüências β , verificando-se a posição do eixo horizontal onde ocorre a interseção do gráfico com tal eixo.

Os gráficos obtidos na figura 5.2 correspondem qualitativamente aos modos de uma viga fixa-livre. Observa-se que o primeiro modo não corta o eixo vertical, o segundo corta uma vez tal eixo, e o terceiro corta duas vezes.

De maneira similar que na seção 5.1, os parâmetros envolvidos no cálculo simbólico dos modos, mostrados na figura 5.2 são ν e γ .

Neste caso, são mostrados os resultados gráficos só para os valores $\nu = 0.5$ e $\gamma = 3.0$. O comportamento qualitativo dos modos para os diversos valores desses parâmetros, enumerados nas tabelas 5.4, 5.5 e 5.6, é similar e por isso os gráficos não são mostrados.

Durante os cálculos, e em função dos resultados pode-se deduzir o seguinte:

- (i) Para uma suposta viga flexível, as freqüências naturais calculadas (correspondendo a freqüência da viga) do sistema acoplado é mais baixo que as freqüências naturais da viga seca. Porém, as freqüências naturais calculadas (correspondendo a freqüências do domínio de água) do sistema acoplado não é obviamente mudado. Mais adiante cálculos indicam que para um valor fixo de ν , um aumento em ν causa uma diminuição nos valores das freqüências naturais. Por isso, o efeito de água no sistema de viga-água é equivalente a uma massa adicional presa à viga (ou ação fluida em fase com a força de inércia).
- (ii) A perturbação de onda de superfície faz um papel mais dominante influenciando o comportamento dinâmico do sistema de interação de

viga-água acoplado para frequências baixas, enquanto que a compressibilidade do fluido é mais influente a frequências mais altas.

6 CONCLUSÕES

O comportamento dinâmico de um sistema de interação de viga-água flexível foi estudado, sujeito a condições de limite no infinito (isto é, perturbação nula no infinito), no domínio de água, e na superfície livre com influência das ondas.

A modelagem matemática que representa tal sistema fornece duas equações diferenciais parciais; uma não homogênea representando a parte molhada da viga, e a outra homogênea representando a parte seca, em ar, da viga proposta.

Foram analisadas as equações que descrevem o sistema usando o método espectral e o método de separação de variáveis.

A equação de autovalores das vibrações naturais do sistema acoplado foi derivada, obtendo-se a equação de autovalores para as vibrações verticais acoplada com a equação característica das frequências de oscilação.

Na resolução encontrou-se que a carga externa da equação de Euler-Bernoulli tem uma representação em série. Este fato implica na dificuldade de resolver simbolicamente tais equações, o que só é possível quando a série é truncada após um certo número de termos. Esse truncamento deve ser feito de tal maneira que não afete significativamente a precisão da solução real. Por isso, o uso de um software simbólico é de suma importância, pois ajustando o número de termos a serem considerados, consegue-se apreciar a variação entre as soluções aproximadas. Mediante experimentação direta com o software simbólico Maple, para o caso específico apresentado, pôde-se concluir que eram suficientes 10 termos da série, mas para garantir a precisão do resultado, foram considerados 30 termos.

Os cálculos envolvidos simbolicamente possuem quantidades muito grandes (de ordem 10^{40}) e muito pequenas (de ordem 10^{-40}), simultaneamente. No Maple, esta dificuldade foi contornada aumentando o número de casas significativas para 50.

O cálculo dos autovalores β foi obtido a partir de um determinante de uma matriz simbólica de ordem 8 chamada equação característica. Aqui, o principal problema foi o tamanho dos elementos da matriz que eram justamente somas parciais das séries.

Para trabalhos futuros, é sugerido o estudo numérico do problema mediante a utilização do método das diferenças finitas e do método de elementos finitos.

Neste problema também poderão ser feitas suposições para uma viga curta-grossa além de uma consideração para uma viga uniforme e rígida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. CHOPRA, A.K., “Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes”, *Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineers*. Vol. 93, pp. 205-223, 1967.
2. CHOWDHURY, B. H., e RAHMANN, S., “A Review of Recent Advances in Economic Dispatch”, *IEEE Transactions on Power Systems*, 5 (4), pp. 1248-1259, 1990.
3. CHWANG, A. T., “Hydrodynamic pressures on sloping dams during earthquakes”, *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 87, pp. 343-348, part 2: exact theory, 1978.
4. CLAEYSSSEN, J. C. R., e SODER, R. A., “A Dynamical basis for computing the modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams”. *Journal of Sound and Vibration.*, 2003. (a ser publicado).
5. CLAEYSSSEN, J. C. R., “On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using dynamical matrix solutions”. *Journal of Sound and Vibration.*, 140, 73-84, 1990.
6. COURANT, R. & HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics*. Interscience, New York, 1962.
7. GOTO, H. and TOKI, K. “Vibrational characteristics and seismic design of submerged bridge piers” *Kyoto University - Faculty Engineering - Memoirs*. Vol. 27, pp. 17-30, 1965.
8. HUNCAULT, M., e GALIANA, F. D., “A Survey of the Optimal Power Flow Literature, *IEEE Transactions on Power Systems*, 6 (2), pp. 762-770, 1991.

9. INMAN, D., "Vibration, with Control, Measurement, and Stability. Prentice Hall, Englewood Cliffs" , 1989.
10. INMAN, D., "Engineering Vibration. Prentice Hall, Englewood Cliffs", 1994.
11. LIU, P. L.-F., "Hydrodynamic pressures on rigid dams during earthquakes", *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 165, pp. 131-145, 1986.
12. LIAW, C. Y. and CHOPRA, A. K. "Dynamics of towers surrounded by water" *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Vol 3, pp. 33-49, 1974.
13. LEE, G. C. and TSAI, C. S. "Time-domain analyses of dam-reservoir system, I: exact solution". *Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineers*. Vol 117, pp. 1990-2006, 1991.
14. OHISHI, T., SOARES, S., e CARVALHO, M. F. H., "A Short Term Hydrothermal Scheduling Approach for Dominantly Hidro Systems", *IEEE Transactions On Power Systems*, 6 (2), pp. 637-643, 1991.
15. O'NEIL, PETER V., "Advanced Engineering Mathematics", *Wadsworth, Belmont*, 3rd Edition 1991.
16. PIPPARD, A. B. "The Physics of Vibrations". *London: Cambridge University Press*. Vol.1, 1978.
17. SOMMERFELD, A., *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York, 1949.
18. TSAI, C. S. and LEE, G. C. "Methods for the transient analysis of three dimensional dam-reservoir interactions". *Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineers*. Vol. 116, pp. 2151-2172, 1990.

19. TSAI, C. S. and LEE, G. C. “Time-domain analyses of dam-reservoir system II . : Substructure method.” *Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineers*. Vol. 117, pp. 2007-2026, 1991.
20. TSAI, C. S. and LEE, G. C. and KETTER, R. L. “A semi-analytical method for time-domain analyses of dam-reservoir interactions” *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. Vol 29, pp. 913-933, 1990.
21. TSAI, C. S. and LEE, G. C. and YEH, C. S. “Transient responses of 3-D Fluid structure interactions” . *Proceedings of Advances in Boundary Elements Methods in Japan and U.S.A. (C. A. Brebia and R. Shaw, editors). Transient responses of 3-D Fluid structure interactions*. Vol. 7, pp. 183-199, 1990.
22. WESTERGAARD, H. M., “Water pressures on dams during earthquakes” . **Transactions of the American Society of Civil Engineers**. Vol. 98, pp. 418-433, 1933.
23. XING, J. T. and PRICE, W. G., “Hydrodynamic Loadings on dams excited by horizontal and vertical vibrations” , *Proceedings of the International Conference on Vibration Problems in Engineering* (DU, Q. H. editor), Beijing: International Academic Publishers. Vol. 2, pp. 1001-1006, 1990.
24. XING, J. T. and PRICE, W. G. “A mixed finite element method for the dynamic analysis of coupled fluid-solid interaction problems” . *Proceedings of the Royal Society of London*. Vol. A 433, pp. 235-255, 1991.
25. XING, J. T., PRICE, W. G. and DU, Q. H. “Mixed finite element substructure-subdomain methods for the dynamic analysis of coupled fluid-solid interaction problems” . *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*. Vol A 354, pp. 259-295, 1996.

26. ZHU, Y. Z. and WENG and WU, J. “Vibration analysis of column partially submerged in water”, *Applied Mathematics and Mechanics*. Vol. 9, pp. 305-316, 1988.

27. ZHOU, D. “The characteristic of free vibration of cantilever beam acted by liquid on one side (in Chinese)” *Chinese Journal of Vibration Engineering*. Vol. 4, pp. 78-82, 1991.

28. ZHU, Y. Z., WENG and WU, J., “The coupled vibration between column and water considering the effects of surface wave and compressibility of water (in Chinese)”. *Acta Mechanica Sinica*. Vol. 21, pp. 657-667, 1989.