

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**VIBRAÇÕES NATURAIS EM UM SISTEMA DE INTERAÇÃO
VIGA-ÁGUA**

por

Beatriz Regina Conterno Getelina

Dissertação para a obtenção do Grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre

Junho de 2002

VIBRAÇÕES NATURAIS EM UM SISTEMA DE INTERAÇÃO VIGA-ÁGUA

por

Beatriz Regina Conterno Getelina
Bacharel em Matemática

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAp, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Vibrações, Controle e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr.

Prof. Dr.

Prof. Dr.

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Coordenador do PPGMAp

Porto Alegre, Junho de 2002

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre o comportamento dinâmico de sistemas flexíveis com interação viga-água. Especificamente, é escolhida uma barragem freqüentemente encontrada em problemas de engenharia de irrigação e represas. O modelo matemático utilizado para descrever tal fenômeno tem como variáveis principais a pressão hidrodinâmica e os deslocamentos horizontais da barragem. Uma vez formuladas as equações governantes de tal sistema, que resultam em uma equação de onda para a pressão e uma equação de Euler-Bernoulli para os deslocamentos, é utilizada a técnica de separação de variáveis para proceder à sua solução. Por simplicidade, assumiu-se que no modelo não havia o efeito de onda da superfície livre. Primeiro, foi resolvida a equação para a pressão, sendo calculadas as suas componentes temporais e espaciais. Depois, foi resolvida a equação de Euler-Bernoulli junto com a condição de interface. Foram feitas simulações para um material específico, e apresentados os resultados conseguidos. No final do trabalho são enunciadas as conclusões pertinentes.

ABSTRACT

TITLE: “NATURAL VIBRATIONS IN A BEAM-WATER INTERACTION SYSTEM”

In this work is presented a survey about the dynamical behaviour of flexible water-beam interaction systems. Specifically, it is chosen a rigid dam, frequently founded in irrigation engineering. The mathematical model used to describe such a phenomenon has as its main variables the hydrodynamic pressure and the horizontal displacements of the dam. Once formulated the governing equations of such a system, resulting into a wave equation for pressure and a Euler-Bernoulli equation for the displacements, it is used the separation of variables method to proceed to their solution. By simplicity, it was assumed that there was not any free-surface wave effect. First, it was solved the equation for pressure, being calculated their temporal and spatial components. After, it was solve the Euler-Bernoulli equation together with the interface condition. There were made simulations for a specific material, and were presented the obtained results. At the final of this work, they were claimed the proper conclusions.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Resenha Bibliográfica	2
2	MODELAGEM DO SISTEMA DE INTERAÇÃO VIGA-ÁGUA	6
2.1	Equações Governantes	6
2.1.1	Domínio Fluido	7
2.1.2	Condições de Contorno do Domínio Fluido	7
2.1.3	Domínio Sólido	8
2.1.4	Condições de Contorno para o Domínio Sólido	8
2.1.5	Condições de Continuidade para o Domínio Sólido	9
2.1.6	Interface da Interação Sólido-Fluido	9
3	CÁLCULO MODAL	10
3.1	Análise Modal da Pressão	10
3.1.1	Autofunções Verticais	11
3.1.2	Autofunções Horizontais	13
3.1.3	Montagem da Parte Espacial da Pressão	14
3.2	Cálculo dos Deslocamentos	14
3.2.1	Deslocamento da parte molhada - U_1	14

3.2.2	Deslocamento Seco - U_2	15
3.2.3	Condição de Interface da Interação Sólido-Fluido	16
3.3	Equações Adimensionalizadas para os Deslocamentos	16
4	RESULTADOS SIMBÓLICOS	24
5	CONCLUSÕES	28

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	<i>Sistema acoplado de interação viga-água</i>	6
Figura 4.1	<i>Gráficos dos Primeiros Modos para valores “padrão” dos parâmetros</i> <i>ν e γ</i>	26
Figura 4.2	<i>Gráficos da Equação Característica</i>	27

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.1	<i>Valores de n_1 para a primeira freqüência ω_1</i>	24
Tabela 4.2	<i>Valores de n_1 para a segunda freqüência ω_2</i>	25
Tabela 4.3	<i>Valores de n_1 para a terceira freqüência ω_3</i>	25

1 INTRODUÇÃO

Na engenharia marítima e de irrigação, uma estrutura tal como uma plataforma marítima, uma represa ou uma torre cercada por água geralmente é representada analiticamente como uma viga ou uma estrutura de coluna quando o objetivo é determinar suas respostas estáticas ou dinâmicas. Então o problema de interação viga-flexível-água é significativo nestes ramos da engenharia.

Este trabalho tem como objetivo o estudo modal de um sistema estrutura-fluido modelado por uma viga elástica de Euler-Bernoulli e pela equação da onda para a pressão d'água.

A atenção é focalizada em soluções exatas da vibração natural para um sistema dinâmico viga-água acoplado e unificado.

O sistema acoplado está sujeito a condições :

- de contorno para o domínio sólido (viga fixa-livre),
- de contorno para o domínio fluido (impermeabilidade e rigidez inferior, livre de ondas de superfície), e
- de interface fluido-estrutura (condições de continuidade na deflexão, ângulo de rotação, força de corte interno e momento de curvatura).

Para determinar as vibrações livres da pressão e deslocamento na parte seca e molhada, utiliza-se o método espectral para eliminar a dependência oscilatória temporal e concentrar-se na determinação dos modos através do estudo de problemas de contornos espaciais.

No capítulo 2 descreve-se o modelo físico do sistema de interação viga-água. São enunciadas as equações diferenciais parciais governantes bem como as diversas condições de contorno, de continuidade no domínio sólido e fluido e de in-

terface entre os dois domínios. O modelo matemático adotado é o de Euler-Bernoulli pela sua simplicidade.

No capítulo 3 é detalhada a metodologia espectral (ou de separação de variáveis) para a obtenção das componentes horizontais e verticais da pressão, e as componentes transversais dos deslocamentos da barragem. Este procedimento, após a adimensionalização das equações de Euler-Bernoulli resultantes, permite a obtenção da equação característica cujas raízes fornecem o cálculo numérico das freqüências e o cálculo simbólico das formas modais.

No capítulo 4 são mostrados os principais resultados numéricos e simbólicos para descrever o comportamento dinâmico da viga para determinados valores dos parâmetros envolvidos.

No capítulo 5 são proferidas as conclusões pertinentes.

1.1 Resenha Bibliográfica

O problema foi abordado previamente por diversos autores:

- Westergaard, 1933, primeiro investigou a pressão hidrodinâmica em uma represa rígida durante terremotos, embora fosse ignorado o efeito de ondas de superfície neste estudo clássico. Os resultados de “Westergaard” revelaram que a magnitude da pressão hidrodinâmica depende da freqüência de excitação.
- Chopra, 1967, Deduziu uma solução analítica da pressão hidrodinâmica em uma represa rígida vertical e mostrou que os resultados de “Westergaard” só são válidos se a freqüência de excitação for menor que a freqüência fundamental do reservatório. Ele estendeu a teoria para investigar a pressão hidrodinâmica que é o resultado de movimentos no solo horizontais e verticais incluindo a influência de ondas de superfície

livre. Ele concluiu que a contribuição associada de perturbação de onda de superfície livre é pequena.

- Chwang, 1978 apresentou uma solução exata da pressão hidrodinâmica em uma represa rígida com um lado inclinado contra a correnteza de declive constante mas desprezando a compressibilidade do fluido no reservatório.
- Liu, 1986, estendeu o trabalho de Chwang, 1978, para obter uma solução exata para um dique inclinado rígido que represa um reservatório de forma triangular.
- Xing e Price, 1990, reexaminaram a influência de ondas de superfície livre nas pressões hidro-dinâmicas experimentadas por represas durante um terremoto. Foi assumido que esta excitação causa uma vibração sinusoidal horizontal na represa e uma vibração sinusoidal vertical em cima de uma região prescrita do solo dentro do reservatório. Foi mostrado que as duas condições de contorno de superfície livre produzem só diferenças pequenas nos valores das freqüências naturais.

Nas pesquisas previamente descritas, a elasticidade ou flexibilidade da estrutura não foi considerada. A inclusão deste efeito complica o problema significativamente. Por tanto, para simplificar este problema dinâmico, os efeitos de onda da superfície livre ou a compressibilidade do fluido ou ambos são freqüentemente desprezados. Veja Zhu et al., 1988; Zhou, 1991.

Assumindo uma condição de não-perturbação no infinito no domínio d'água, as vibrações acopladas entre uma estrutura de coluna flexível e água incluindo os efeitos de perturbação de onda de superfície e a compressibilidade do fluido foram estudadas por Goto & Toki, 1965; Lia & Chopra, 1974; Zhu et al., 1989.

Estes estudos mostraram que a influência de ondas de superfície livre é de maior importância no comportamento dinâmico de um sistema viga-água longo e fino, enquanto que o efeito da compressibilidade do fluido tem a maior influência mais para um sistema de viga-água curto e grosso.

Em uma análise hidrodinâmica, a condição de radiação no infinito no domínio d'água tem um papel importante na determinação das características de comportamento do fluido. Desenvolvendo soluções exatas das cargas hidrodinâmicas em represas rígidas estimuladas por vibrações horizontais e verticais, Xing e Price, 1990, concluíram que na infinito no domínio d'água o n -ésimo componente da resposta de pressão dinâmica, no caso da excitação horizontal satisfaz a condição imperturbada se a n -ésima frequência natural do reservatório é maior que a frequência de excitação ou a condição de radiação se for menor que a frequência de excitação. Então, se a frequência de excitação for maior que a frequência fundamental do reservatório, os componentes da resposta de pressão dinâmica são uma combinação de dois tipos: Um satisfazendo a condição imperturbada e outro, satisfazendo a condição de radiação, ambos no infinito.

Porém, estas conclusões são associadas com estruturas rígidas, pois as distorções das estruturas foram excluídas.

É interessante notar que Chopra, 1967, concluiu que as soluções clássicas de Westergaard, 1933, só são válidas se a frequência de excitação for menor que a frequência fundamental do reservatório que, no contexto da discussão prévia, implica que as soluções se relacionam à condição imperturbado ou de perturbação zero no infinito no domínio fluido.

Em ambas análises do domínio do tempo em dois e três dimensões de interações de fluido-estrutura, Tsai & Lee, 1990, 1991; Lee & Tsai, 1991; Tsai et al., 1990; Tsai et al., 1990; desenvolveram um método eficiente semi-analítico no domínio do tempo para expressar a condição de radiação em regiões distantes do domínio

fluido. Lee & Tsai, 1991, deduziram uma solução exata no domínio do tempo que levava em conta a condição de radiação do domínio fluido e a deformação da estrutura usando o método da transformada de Laplace. Estudaram a análise transiente da resposta forçada de sistemas viga-água excitadas por acelerações no solo na direção horizontal contra a correnteza. Foi assumida uma condição de perturbação de superfície livre nula, mas não discutiram o comportamento característico da vibração natural do domínio d'água dos sistemas. Porém, apresentaram uma seleção de resultados sobre vibração livre do domínio d'água, que não são necessariamente as características fundamentais dos sistemas de interação fluido-estrutura, e então utilizaram esta informação para avaliar a pressão hidro-dinâmica.

Do ponto de vista da mecânica do contínuo, é necessário que um sistema de interação fluido-estrutura seja considerado como um sistema dinâmico total na análise dinâmica. Portanto, como discutido por Xing & Price, 1991; Xing et al., 1996, existem características de vibração natural, (isto é frequências e modo), e estes dependem das suposições inerentes no modelo matemático (isto é, estrutura rígida ou flexível), das condições de contorno impostas na estrutura (fixo, apoiada, etc.), da perturbação de superfície livre e da condição de contorno no infinito no domínio do fluido.

Xing et. al, 1991, 1996, apresentaram uma seleção de resultados numéricos para diversos sistemas de interação de fluido-estrutura e mostraram a importância do componente de análise de vibração natural dentro da análise dinâmica global para determinar respostas de movimento forçado.

2 MODELAGEM DO SISTEMA DE INTERAÇÃO VIGA-ÁGUA

Com frequência, na engenharia de irrigação e de barragens e represas, faz-se necessário o estudo do comportamento dinâmico de estruturas verticais tendo em conta a interação sólido-fluido, envolvendo grandezas físicas tais como a pressão.

O tema de estudo deste trabalho é um sistema de interação viga-água conforme ilustrado na figura 2.1

Figura 2.1 *Sistema acoplado de interação viga-água*

2.1 Equações Governantes

Para a representação do sistema mostrado na figura 2.1 utilizamos um sistema cartesiano bi-dimensional xy com a origem 0 na intersecção da linha central da viga e o chão horizontal do reservatório. É assumido que a água é compressível, não viscosa, com movimento irrotacional, e o reservatório é de profundidade média h ; a viga uniforme flexível é de altura H ($H > h$); a altura molhada h , de largura F e de espessura unitária perpendicular ao plano $0 - xy$. A rigidez flexural e a massa específica são denotadas respectivamente por EI e ρ_s ; ρ_f e c representam a massa específica d'água e a velocidade do som na água, respectivamente.

Proveniente da mecânica do contínuo, sabe-se que a viga sustenta esforços de pressão, compressão, momentos fletores, cortantes, de cisalhamento, entre outros. Diante de pequenas perturbações, a equação linearizada que descreve a pressão dinâmica $p(t, x, y)$, originada pela ação da água, é dada pela equação da onda. Esta variável, bem como os deslocamentos $u_1(y, t)$, $0 < y < h$ e $u_2(y, t)$, $h < y < H$ na viga estão descritos nas subseções seguintes.

2.1.1 Domínio Fluido

A equação que governa a pressão hidrodinâmica é a equação de onda bidimensional

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

A abrangência da equação da onda, acima, é válida para $0 < x < \infty$, e $0 < y < h$.

2.1.2 Condições de Contorno do Domínio Fluido

Na superfície livre, considera-se que não há perturbações, ou seja,

$$p(x, y, t) = 0, \quad y = h, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (2.2)$$

O fundo do reservatório considera-se impermeável e rígido (não tem deformação), de modo que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (2.3)$$

No domínio d'água, é assumido que a perturbação de pressão na água não é transmitida para o infinito no domínio d'água. Então, existe uma condição de não-perturbação governada pela seguinte equação

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(t, x, y) = 0. \quad (2.4)$$

2.1.3 Domínio Sólido

A equação de movimento que governa as vibrações transversais da viga submergida é uma equação de Euler-Bernoulli não homogênea

$$EI \frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} + \rho_s F \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -p(0, y, t), \quad 0 < y < h, \quad (2.5)$$

que têm como carga a pressão hidrodinâmica na posição $x = 0$ distribuída ao longo do eixo vertical.

Cabe salientar que o modelo de Euler-Bernoulli consegue soluções bastante aproximadas das reais no caso que a viga seja longa e fina (razão de aspecto $< 1/10$) e para frequências naturais baixas. Neste modelo também são feitas simplificações sobre o efeito da inércia rotatória e o momento de deformação.

Para a parte seca da mesma, os deslocamentos horizontais estão governados pela equação homogênea de Euler-Bernoulli

$$EI \frac{\partial^4 u_2}{\partial y^4} + \rho_s F \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0, \quad h < y < H \quad (2.6)$$

devido à ausência de carga externa naquela parte da viga.

2.1.4 Condições de Contorno para o Domínio Sólido

A configuração do sistema é concebida para ter a base fixa e a extremidade superior livre ou comumente chamada de viga em balanço.

Em $y = 0$ tem-se a condição fixa:

$$u_1(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

enquanto que na extremidade superior $y = H$ tem-se a condição livre

$$\frac{\partial^2 u_2(H, t)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u_2(H, t)}{\partial y^3} = 0. \quad (2.8)$$

2.1.5 Condições de Continuidade para o Domínio Sólido

Na interface entre a parte molhada e a parte seca da viga, o deslocamento, o giro, a força de cisalhamento interno e o momento fletor da viga devem satisfazer condições de continuidade, isto é,

$$u_1(h, t) = u_2(h, t), \quad \text{para o deslocamento,} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u_1(h, t)}{\partial y} = \frac{\partial u_2(h, t)}{\partial y}, \quad \text{para o giro,} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 u_1(h, t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_2(h, t)}{\partial y^2}, \quad \text{para o momento fletor,} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^3 u_1(h, t)}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 u_2(h, t)}{\partial y^3}, \quad \text{para a força de cisalhamento interno.} \quad (2.12)$$

2.1.6 Interface da Interação Sólido-Fluido

Na interface de interação fluido-estrutura, a pressão $p(x, y, t)$ d'água e o deslocamento $u_1(y, t)$ da parte molhada da viga satisfaz a relação:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_f \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad x = 0, \quad 0 < y < h. \quad (2.13)$$

3 CÁLCULO MODAL

No capítulo anterior, são enumeradas três equações diferenciais parciais, (2.1), (2.5), (2.6), cujas incógnitas são a pressão hidrodinâmica $p(x, y, t)$ e os deslocamentos horizontais da estrutura, $u_1(y, t)$ e $u_2(y, t)$.

A técnica a ser utilizada para a determinação das funções enumeradas no parágrafo acima é o método de separação de variáveis ou espectral. Nas seções seguintes é mostrado em detalhe o procedimento para a resolução das equações diferenciais envolvidas.

3.1 Análise Modal da Pressão

O método de separação de variáveis, leva à procura de soluções harmônicas para a pressão, isto é, soluções da forma

$$p(x, y, t) = e^{i\hat{\Omega}t} P(x, y) \quad (3.1)$$

conduz ao problema estacionário (equação de Poisson)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\hat{\Omega}^2}{c^2} P \quad (3.2)$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} P(x, h) &= 0 \\ \frac{\partial P(x, 0)}{\partial y} &= 0 \\ P(\infty, y) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aplicando novamente o método de separação de variáveis, supõe-se que

$$P(x, y) = X(x)Y(y). \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.2) obtém-se

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{\hat{\Omega}^2}{c^2}. \quad (3.5)$$

Assim, para certas constantes $\hat{\lambda}$ e κ , e juntando com os resultados a partir das condições de contorno (3.3) tem-se os seguintes dois problemas de contorno

$$\begin{cases} X''(x) + \hat{\lambda}^2 X(x) = 0, \\ X(\infty) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

e

$$\begin{cases} Y''(y) + \kappa^2 Y(y) = 0, \\ Y'(0) = 0, \quad Y(h) = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

sendo que as constantes envolvidas satisfazem a relação

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{\hat{\Omega}^2}{c^2} - \kappa^2. \quad (3.8)$$

3.1.1 Autofunções Verticais

A componente vertical de pressão, $Y(y)$, deve ser solução não nula do problema de contorno

$$\begin{cases} Y''(y) + \kappa^2 Y(y) = 0, \\ Y'(0) = 0, \quad Y(h) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

que é um problema de autovalor gerando as autofunções verticais. A solução geral da equação

$$Y''(y) + \kappa^2 Y(y) = 0 \quad (3.10)$$

é dada por

$$Y(y) = c_1 \cos(\kappa y) + c_2 \text{sen}(\kappa y), \quad (3.11)$$

e tem como derivada

$$Y'(y) = -c_1 \kappa \text{sen}(\kappa y) + c_2 \kappa \cos(\kappa y). \quad (3.12)$$

Das condições de contorno do problema (3.9) tem-se o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ \cos(\kappa h) & \sin(\kappa h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Para se obter soluções não nulas, o determinante do sistema deve ser nulo, isto é, κ deve ser raiz da equação

$$\kappa \cos(\kappa h) = 0. \quad (3.14)$$

As raízes de (3.14) são

$$\kappa_0 = 0, \quad \kappa_n = \frac{(2n-1)\pi}{2h}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

O valor $\kappa_0 = 0$ produz uma função nula, e portanto, pode ser desprezado.

Se $\kappa_n = \frac{(2n-1)\pi}{2h}$, $n = 1, 2, \dots$, o sistema linear (3.13) fica

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{(2n-1)\pi}{2h} \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

do qual resulta que $c_2 = 0$ e c_1 é um parâmetro livre. Portanto, a função $Y(y)$ tem a forma

$$Y_n(y) = \cos(\kappa_n y) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2h}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

que corresponde às autofunções verticais.

3.1.2 Autofunções Horizontais

Para determinar o componente horizontal da pressão, $X(x)$, deve-se encontrar soluções não nulas do problema de contorno

$$\begin{cases} X''(x) + \hat{\lambda}^2 X(x) = 0, \\ X(\infty) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

onde $\hat{\lambda}^2 = \frac{\hat{\Omega}^2}{c^2} - \kappa^2$ para cada valor de κ obtido anteriormente.

A condição de contorno no infinito exclui automaticamente que $\hat{\lambda}$ seja real, pois neste caso a solução geral teria a forma

$$X(x) = c_1 \cos(\hat{\lambda}x) + c_2 \text{sen}(\hat{\lambda}x) \quad (3.19)$$

a qual não tem limite quando $X = \infty$; assim $\hat{\lambda}$ deve ser puramente imaginário.

Escrevendo $\hat{\lambda} = i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, têm-se

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}. \quad (3.20)$$

Para $\lambda > 0$, deve ser escolhido $c_1 = 0$ e para $\lambda < 0$, deve ser escolhido $c_2 = 0$. Devido a este fato, sem perda de generalidade, pode-se afirmar que a autofunção horizontal $X_n(x)$ tem a forma

$$X_n(x) = e^{-\lambda_n x}, \quad \lambda_n = \kappa_n^2 - \frac{\hat{\Omega}^2}{c^2} > 0. \quad (3.21)$$

3.1.3 Montagem da Parte Espacial da Pressão

Combinando os resultados das equações (3.17) e (3.21), e aplicando o princípio de superposição das equações lineares, tem-se um desenvolvimento em séries para o componente espacial da pressão

$$P(x, y) = \sum_{n=n_1}^{\infty} G_n e^{-\lambda_n x} \cos(\kappa_n y) \quad (3.22)$$

com n_1 o menor inteiro que satisfaz a desigualdade

$$\lambda_n^2 = \kappa_n^2 - \frac{\hat{\Omega}^2}{c^2} > 0.$$

Na equação (3.22), os escalares G_n representam coeficientes a serem determinados.

3.2 Cálculo dos Deslocamentos

3.2.1 Deslocamento da parte molhada - U_1

Substituindo a equação (3.22) na equação (3.1) obtem-se

$$p(t, x, y) = e^{i\hat{\Omega}t} P(x, y) = e^{i\hat{\Omega}t} \sum_{n=n_1}^{\infty} G_n e^{-\lambda_n x} \cos(\kappa_n y). \quad (3.23)$$

Com o resultado da equação anterior, a equação governante para a porção molhada (2.5) toma a forma

$$EI \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \rho_s F \hat{\Omega}^2 U_1 = -P(0, y) \quad (3.24)$$

com

$$u_1(t, y) = e^{i\hat{\Omega}t} U_1(y)$$

Introduzindo o parâmetro

$$\beta^4 = \frac{\rho_s F \hat{\Omega}^2}{EI}$$

tem-se

$$U_1^{(iv)}(y) - \beta^4 U_1(y) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{G_n \cos k_n y}{EI} \quad (3.25)$$

para o deslocamento espacial na parte molhada da barragem.

3.2.2 Deslocamento Seco - U_2

Para o deslocamento na parte seca tem-se, u_2

$$EI \frac{\partial^4 u_2}{\partial y^4} + \rho_s F \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0, \quad l < y < H, \quad (3.26)$$

Pelo método espectral, supondo $u_2(y, t) = e^{i\omega t} U_2(y)$ tem-se

$$-\rho_s F \omega^2 U_2(y) + EI U_2^{(4)}(y) = 0 \quad (3.27)$$

ou

$$U_2^{(iv)}(y) - \beta^4 U_2(y) = 0. \quad (3.28)$$

3.2.3 Condição de Interface da Interação Sólido-Fluido

A equação para a interface de interação sólido-fluido descrita na equação (2.13) fica na forma

$$\rho_f \hat{\Omega}^2 U_1(y) = \sum_{n=n_1}^{\infty} G_n \lambda_n \cos(k_n y) \quad (3.29)$$

3.3 Equações Adimensionalizadas para os Deslocamentos

Para um melhor entendimento analítico e por conveniência numérica, são definidos os seguintes parâmetros adimensionais

$$\begin{aligned} \xi = \frac{y}{H}, \quad \nu = \frac{h}{H}, \quad \gamma = \frac{\rho_f H}{\rho_s F}, \quad \omega^2 = \frac{\hat{\Omega}}{\Omega_b}, \quad \bar{\kappa}_n = \kappa_n H, \\ \bar{\lambda}_n^2 = \bar{\kappa}_n^2 - \frac{\omega^4}{\bar{c}^2}, \quad \bar{c} = \frac{c}{\Omega_b H}, \quad \Omega_b = \sqrt{\frac{EJ}{\rho_s F H^4}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Definindo novas funções para os deslocamentos U_1 e U_2 mediante

$$\bar{U}_1(\xi) = U_1(H\xi), \quad \bar{U}_2(\xi) = U_2(H\xi), \quad (3.31)$$

são obtidas novas equações diferenciais a partir das equações (3.25) e (3.28):

$$\bar{U}_1^{(iv)}(\xi) - \omega^4 \bar{U}_1(\xi) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} A_n \cos(\bar{\kappa}_n \xi), \quad 0 < \xi < \nu, \quad (3.32)$$

$$\bar{U}_2^{(iv)}(\xi) - \omega^4 \bar{U}_2(\xi) = 0, \quad \nu < \xi < 1. \quad (3.33)$$

A equação da interface (3.29) permite afirmar que

$$\bar{U}_1(\xi) = - \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}_n A_n}{\gamma \omega^4} \cos(\bar{\kappa}_n \xi), \quad (3.34)$$

onde $A_n = \frac{G_n H^3}{EJ}$.

A solução geral da equação (3.32) tem a forma

$$\bar{U}_1(\xi) = \bar{U}_1^h(\xi) + \bar{U}_1^p(\xi) \quad (3.35)$$

onde $\bar{U}_1^h(\xi)$ é a solução homogênea geral e $\bar{U}_1^p(\xi)$ a solução particular não homogênea.

Assim

$$\bar{U}_1^h(\xi) = c_1 \phi_1(\xi) + \dots + c_4 \phi_4(\xi) = \Phi(\xi)C \quad (3.36)$$

onde

$$\Phi(\xi) = [\phi_1(\xi) \ \dots \ \phi_4(\xi)]$$

é uma base de funções linearmente independentes soluções da equação homogênea associada com (3.25) e $C = [c_1, c_2 \ \dots \ c_4]^t$ um vetor formado pelas constantes.

Uma base de funções para a equação diferencial homogênea associada à (3.25) é dada por

$$\phi_1(\xi) = \text{sen}(\omega\xi), \ \phi_2(\xi) = \text{cos}(\omega\xi), \ \phi_3(\xi) = \text{sinh}(\omega\xi) \ \text{e} \ \phi_4(\xi) = \text{cosh}(\omega\xi). \quad (3.37)$$

Uma solução particular não homogênea da equação

$$U^{(iv)}(\xi) - \beta^4 U(y) = G \cos(\kappa\xi)$$

é dada por

$$U(\xi) = \frac{G}{\kappa^4 - \beta^4} \cos(\kappa\xi).$$

Assim, pelo princípio de superposição linear,

$$\bar{U}_{1,p}(\xi) = \sum_{n=n_1}^{\infty} F_n \cos(\bar{\kappa}_n \xi), \quad (3.38)$$

onde

$$F_n = \frac{G_n}{\bar{\kappa}_n^4 - \omega^2}. \quad (3.39)$$

A solução geral para $\bar{U}_1(\xi)$ é dada por

$$\bar{U}_1(\xi) = \Phi(\xi)C + \sum_{n=n_1}^{\infty} F_n \cos(\bar{\kappa}_n \xi). \quad (3.40)$$

A solução geral para $\bar{U}_2(\xi)$ é dada por

$$\bar{U}_2(\xi) = d_1\psi_1(\xi) + d_2\psi_2(\xi) + d_3\psi_3(\xi) + d_4\psi_4(\xi) = \Psi(\xi)D, \quad (3.41)$$

sendo $\{\psi_j(\xi)\}_{j=1}^4$ uma base de funções.

Neste caso pode-se fazer

$$\psi_1(\xi) = \text{sen}(\omega(\xi-1)), \quad \psi_2(\xi) = \text{cos}(\omega(\xi-1)), \quad \psi_3(\xi) = \text{sinh}(\omega(\xi-1)) \text{ e } \psi_4(\xi) = \text{cosh}(\omega(\xi-1)). \quad (3.42)$$

Substituindo (3.40) em (3.34) e utilizando a ortogonalidade dos modos das funções $Y_n(\xi)$:

$$\int_0^\nu Y_n(\xi)Y_m(\xi)d\xi = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ I_n, & m = n \end{cases} \quad (3.43)$$

obtem-se o seguinte resultado

$$F_n = E_n \sum_{j=1}^4 c_j I_{n,j}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.44)$$

onde

$$E_n = \frac{1}{I_n \left(\frac{-1}{\bar{\kappa}_n^4 - \omega^4} - \frac{\bar{\lambda}_n(\bar{\kappa}_n^4 - \omega^4)}{\gamma\omega^4} \right)} \quad (3.45)$$

e

$$I_{n,j} = \int_0^\nu \cos(\bar{\kappa}_n \xi) \phi_j(\xi) d\xi, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (3.46)$$

Então tem-se que os deslocamentos horizontais podem ser expressos, a partir de (3.40) e (3.44), como

$$\bar{U}_1(\xi) = \sum_{j=1}^4 \left(\phi_j(\xi) \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n(\xi) \right) c_j, \quad (3.47)$$

e

$$\bar{U}_2(\xi) = \sum_{j=1}^4 \phi_j(\xi) d_j, \quad (3.48)$$

Para a determinação dos vetores de constantes

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

e

$$D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

é preciso utilizar as condições de contorno e de continuidade.

A configuração estrutural da barragem é do tipo fixa-livre, portanto, o na posição $\xi = 0$, o deslocamento e o giro são nulos, implicando que

$$\bar{U}_1(0) = 0, \quad (3.51)$$

$$\bar{U}'_1(0) = 0, \quad (3.52)$$

e na posição $\xi = 1$, o momento fletor e a força de cisalhamento são nulos, isto é,

$$\bar{U}_2''(1) = 0 \quad (3.53)$$

$$\bar{U}_2'''(1) = 0 \quad (3.54)$$

As condições de continuidade garantem a homogeneidade do deslocamento, giro, momento fletor e força de cisalhamento ao longo do comprimento da barragem e estão dadas por

$$\bar{U}_1(\nu) = \bar{U}_2(\nu), \quad (\text{deslocamento}), \quad (3.55)$$

$$\bar{U}'_1(\nu) = \bar{U}'_2(\nu), \quad (\text{giro}), \quad (3.56)$$

$$\bar{U}_1''(\nu) = \bar{U}_2''(\nu), \quad (\text{momento fletor}), \quad (3.57)$$

$$\bar{U}_1'''(\nu) = \bar{U}_2'''(\nu), \quad (\text{força de cisalhamento}). \quad (3.58)$$

Reescrevendo as condições de contorno e de continuidade, (3.51)-(3.58), acima, consegue-se um sistema linear homogêneo de 8 equações com 8 incógnitas:

$$\sum_{j=1}^4 \left(\phi_j(0) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n(0) \right) c_j = 0, \quad (3.59)$$

$$\sum_{j=1}^4 \phi'_j(0) c_j = 0, \quad (3.60)$$

$$\sum_{j=1}^4 \psi_j''(1)d_j = 0, \quad (3.61)$$

$$\sum_{j=1}^4 \psi_j'''(1)d_j = 0, \quad (3.62)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left(\phi_j(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n(\nu) \right) c_j - \sum_{j=1}^4 \psi_j(\nu)d_j = 0, \quad (3.63)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left(\phi_j'(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n'(\nu) \right) c_j - \sum_{j=1}^4 \psi_j'(\nu)d_j = 0, \quad (3.64)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left(\phi_j''(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n''(\nu) \right) c_j - \sum_{j=1}^4 \psi_j''(\nu)d_j = 0, \quad (3.65)$$

e

$$\sum_{j=1}^4 \left(\phi_j'''(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n'''(\nu) \right) c_j - \sum_{j=1}^4 \psi_j'''(\nu)d_j = 0, \quad (3.66)$$

As oito equações anteriores podem ser escritas de maneira matricial:

$$[R_{ij}]_{8 \times 8} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}_{8 \times 1} = [0]_{8 \times 1} \quad (3.67)$$

onde os elementos da matriz $\mathbf{R} = [R_{ij}]_{8 \times 8}$ estão definidos como segue

$$R_{1j} = \phi_j(0) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n(0), \quad R_{2j} = \phi_j'(0), \quad j = 1 : 4, \quad (3.68)$$

$$R_{3j} = \psi_{j-4}''(1), \quad R_{4j} = \psi_{j-4}'''(1), \quad j = 5 : 8, \quad (3.69)$$

$$R_{5j} = \begin{cases} \phi_j(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n(\nu), & j = 1 : 4, \\ -\psi_{j-4}(\nu), & j = 5 : 8, \end{cases} \quad (3.70)$$

$$R_{6j} = \begin{cases} \phi_j'(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n'(\nu), & j = 1 : 4, \\ -\psi_{j-4}'(\nu), & j = 5 : 8, \end{cases} \quad (3.71)$$

$$R_{7j} = \begin{cases} \phi_j''(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n''(\nu), & j = 1 : 4, \\ -\psi_{j-4}''(\nu), & j = 5 : 8, \end{cases} \quad (3.72)$$

$$R_{8j} = \begin{cases} \phi_j'''(\nu) + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n'''(\nu), & j = 1 : 4, \\ -\psi_{j-4}'''(\nu), & j = 5 : 8, \end{cases} \quad (3.73)$$

A matriz \mathbf{R} do sistema linear homogêneo (3.67) deve satisfazer a condição

$$\det(\mathbf{R}) = 0 \quad (3.74)$$

para poder obter soluções não nulas para o sistema.

A equação (3.74) é referida na literatura como *equação característica* e as raízes ω de tal equação são denominados os *autovalores* do problema. A importância de tais autovalores é vital para a obtenção das frequências naturais do sistema, que é feita mediante a igualdade

$$\hat{\Omega} = \omega^2 \Omega_b, \quad \Omega_b = \sqrt{\frac{EJ}{\rho_s F H^4}}. \quad (3.75)$$

Após o sistema linear (3.67) ser resolvido são obtidos valores das constantes $c_j, d_j, j = 1, 2, 3, 4$, que podem ser substituídos nas equações (3.47) e (3.48):

$$\bar{U}_1(\xi) = \sum_{j=1}^4 \left(\phi_j(\xi) \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n I_{n,j} Y_n(\xi) \right) c_j,$$

e

$$\bar{U}_2(\xi) = \sum_{j=1}^4 \phi_j(\xi) d_j,$$

terminando então o processo de cálculo simbólico dos modos $\bar{U}_1(\xi)$ e $\bar{U}_2(\xi)$.

4 RESULTADOS SIMBÓLICOS

Utilizando a abordagem descrita no capítulo 3, são mostrados a seguir os resultados simbólicos obtidos para descrever o comportamento dinâmico do sistema viga-água.

Nos cálculos feitos, supõe-se que a massa específica d'água é $\rho_f = 1000 \text{ Kg/m}^3$ e a massa específica da viga é $\rho_s = 2400 \text{ Kg/m}^3$. O módulo de elasticidade de Young é $E = 2.94 \times 10^{10} \text{ Pa}$ e a velocidade do som na água é $c = 1439 \text{ m/s}$.

As frequências naturais do sistema acoplado são determinadas mediante a resolução da equação (3.74). Como as ondas da superfície livre foram desprezadas, os parâmetros $\hat{\kappa}_n$ estão dados por (3.15) e são independentes da frequência natural $\hat{\Omega}$, e tais frequências podem ser calculadas pela equação característica (3.74)

A velocidade do som em um fluido incompressível tende a infinito, de modo que pode-se substituir $1/c$ por 0 nas equações do capítulo anterior, e assim obtém-se os resultados para a primeira frequência ω_1 . Veja a tabela 4.1

	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$	$\gamma = 3.0$	$\gamma = 5.0$	$\gamma = 8.0$	$\gamma = 10.0$
$\nu = 0.5$	2	2	2	2	2	2
$\nu = 0.8$	3	3	3	3	3	3
$\nu = 1.0$	4	4	4	4	4	4

Tabela 4.1 *Valores de n_1 para a primeira frequência ω_1*

Os resultados obtidos na tabela 4.1 foram calculados com séries truncadas em 10 termos, com auxílio do software simbólico Maple V5. Cada caso requer um tempo computacional de aproximadamente 180 segundos. Os valores das frequências foram obtidos mediante observação direta do gráfico da equação carac-

	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$	$\gamma = 3.0$	$\gamma = 5.0$	$\gamma = 8.0$	$\gamma = 10.0$
$\nu = 0.5$	9	9	9	9	9	9
$\nu = 0.8$	13	13	13	13	13	13
$\nu = 1.0$	17	17	17	17	17	17

Tabela 4.2 Valores de n_1 para a segunda frequência ω_2

	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$	$\gamma = 3.0$	$\gamma = 5.0$	$\gamma = 8.0$	$\gamma = 10.0$
$\nu = 0.5$	23	23	23	23	23	23
$\nu = 0.8$	36	36	36	36	36	36
$\nu = 1.0$	45	45	45	45	45	45

Tabela 4.3 Valores de n_1 para a terceira frequência ω_3

terística, devido à dificuldade em manipular simbolicamente a expressão algébrica para o cálculo numérico correspondente.

Os dados obtidos das simulações foram devidamente comparados com Xing, 1997. Pode-se apreciar uma aproximação de pelo menos uma casa decimal.

Na figura 4.2, são mostrados os gráficos da equação característica versus ω . A técnica para calcular os autovalores foi a de simples observação.

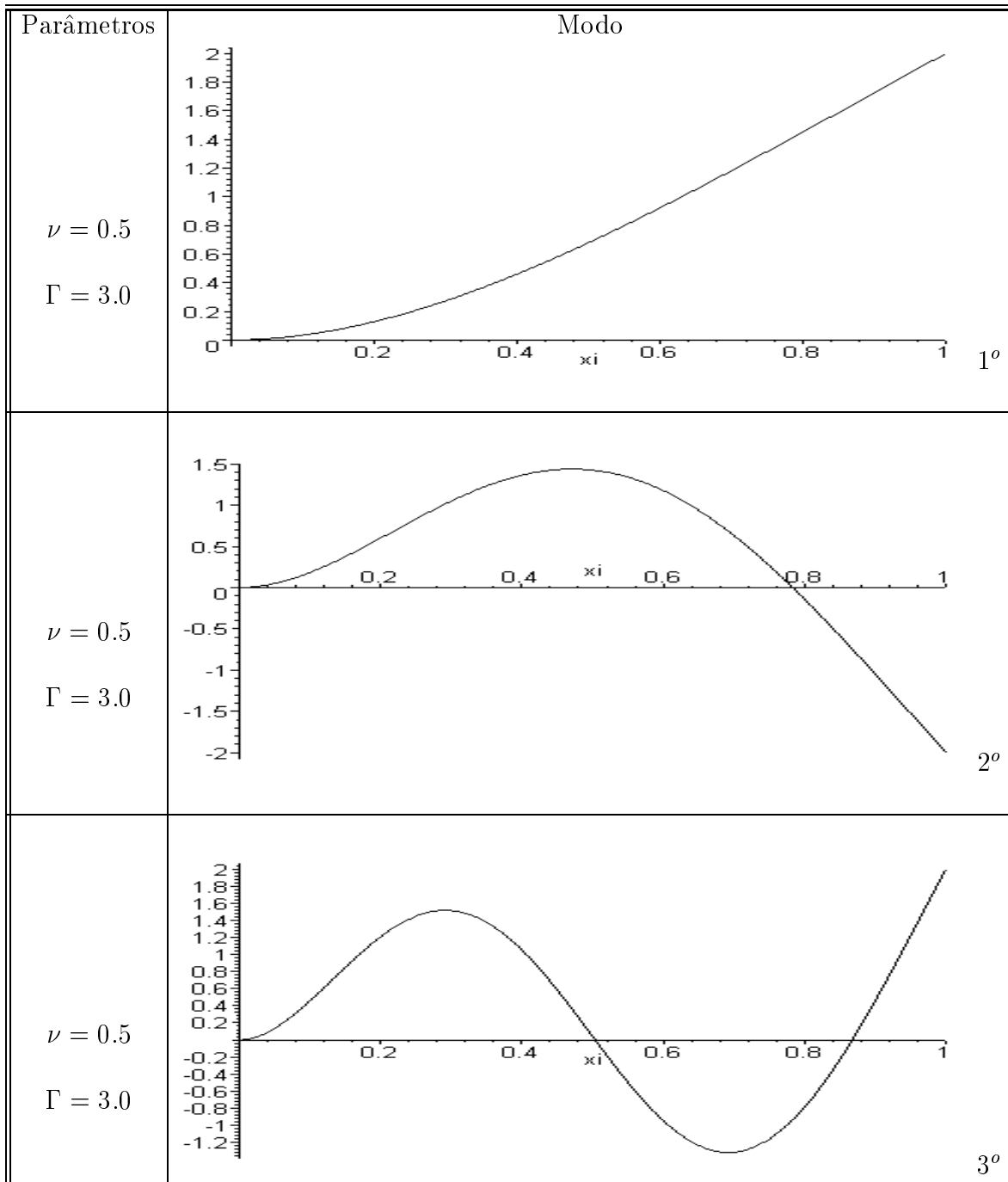


Figura 4.1 Gráficos dos Primeiros Modos para valores “padrão” dos parâmetros ν e γ

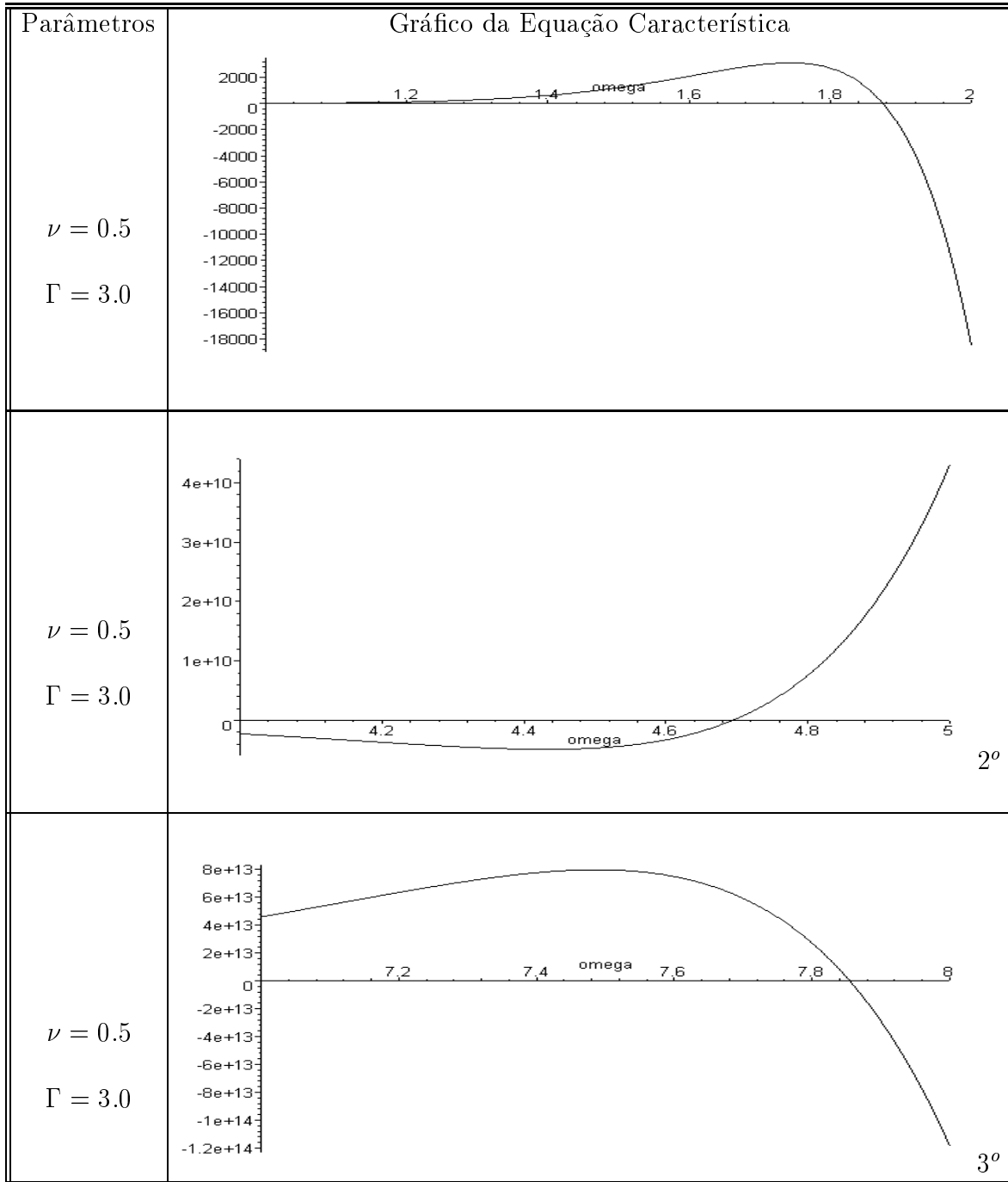


Figura 4.2 Gráficos da Equação Característica

5 CONCLUSÕES

Foi apresentado um estudo sobre o comportamento dinâmico de sistemas flexíveis com interação viga-água.

O modelo matemático que representa tal sistema fornece duas equações diferenciais parciais não homogêneas, isto é, que possuem cargas externas. Foi utilizada a técnica de separação de variáveis, encontrando-se como dificuldade principal o fato que a carga externa da equação de Euler-Bernoulli tem uma representação em série. Este fato implica na dificuldade de resolver simbolicamente tais equações, sendo possível só quando a série é truncada após um certo número de termos. Tal truncamento deve ser feito de tal maneira que não afete significativamente a precisão da solução real. Aqui, o uso de um software simbólico é de suma importância, pois ajustando o termo a ser truncado, consegue-se apreciar a variação entre as soluções aproximadas. Mediante experimentação direta com o Maple, para o caso específico apresentado, pôde-se concluir que eram suficientes 10 termos da série.

Outra dificuldade importante encontrada foi o cálculo dos autovalores ω . A equação característica resultava a partir de um determinante de uma matriz simbólica de tamanho 8. Aqui, o principal problema foi o tamanho dos elementos da matriz que eram justamente somas parciais das séries.

Este problema pode ser estudado incluindo o efeito de onda da superfície livre, tornando o cálculo simbólico dos modos mais difícil simbolicamente.

Também é sugerido o estudo numérico de tal problema.