VOZES DIVERSAS DIFERENTES SABERES
SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA
XXX SIC
15 A 19 OUTUBRO
CAMPUS DO VALE
UFRGS PROPESQ

Otimização Ergódica e o cálculo numérico de sub-ações calibradas

Orientador: Artur Oscar Lopes
Bolsista: Hermes Hofmeister Ferreira

Queremos apresentar métodos que desenvolvemos para encontrar as soluções V (ditas sub-ações calibradas) e $m(A)$ das equações do tipo

$$\max_{T(y)=x} [A(y)+V(y)] = V(x)+m(A)$$

Onde $T: I \to I$ é uma transformação expansiva em um intervalo I que possui ramos inversos τ_1, τ_2 e A é uma função conhecida, em geral com a condição de ser Holder. O interesse é o valor $m(A)$ e a medida maximizante dados por

$$m(A) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_\sigma} \left\{ \int A d\mu \right\}$$

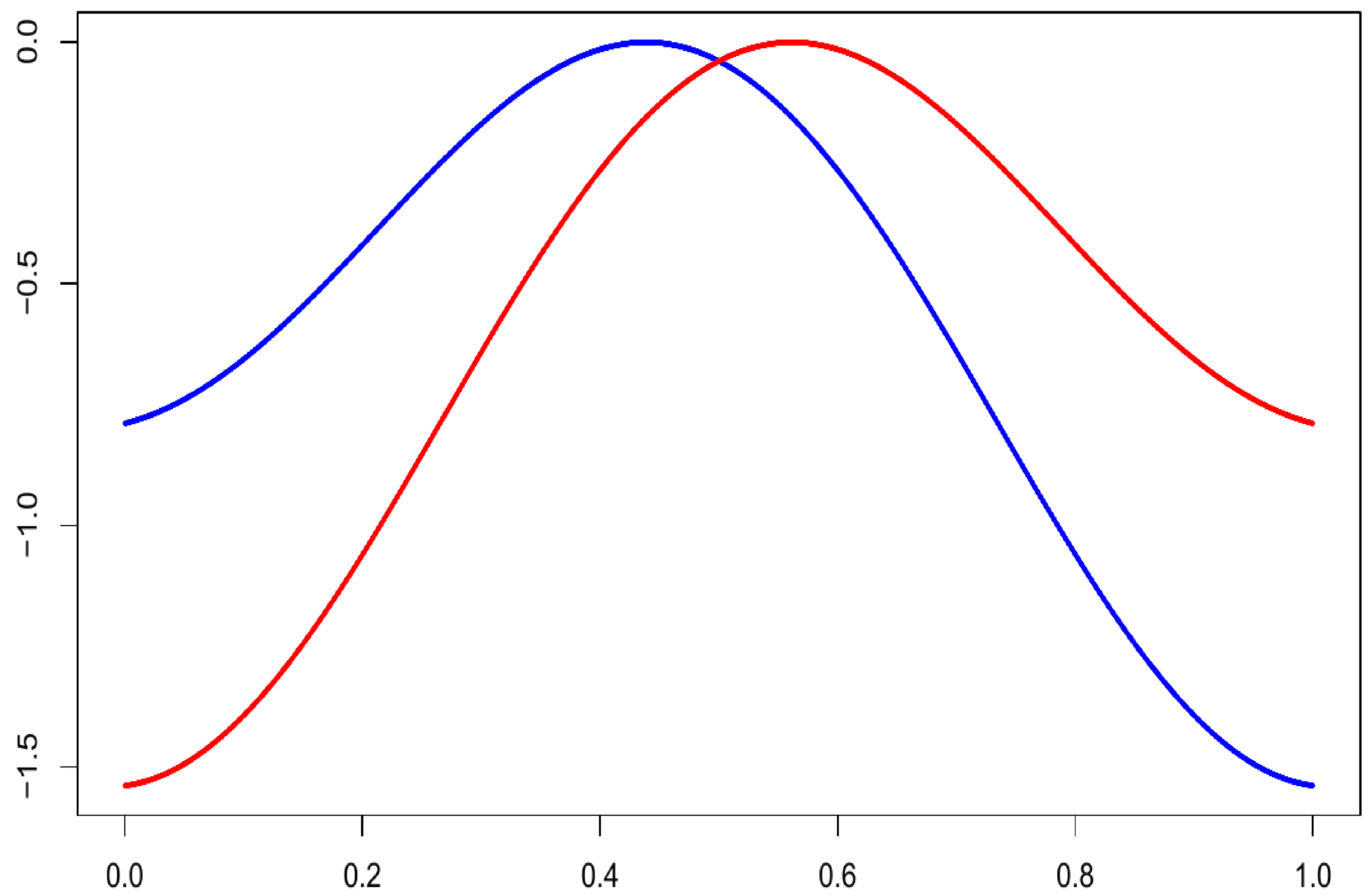
Onde μ percorre o conjunto $\mathcal{M}_\sigma$ das probabilidades invariantes para T. Propomos um algoritmo que aproxima numéricamente as soluções V e $m(A)$ da equação para funções A genéricas através de iterações de uma contração no espaço das funções contínuas em I. Também queremos mostrar que a partir da solução numérica aproximada é possível intuir qual sistema de equações devemos considerar com o fim de encontrar a solução exata em diversos casos.

As soluções V, nos casos estudados, podem ser descritas da forma
$V(x) = \max\{V_1(x), ..., V_n(x)\}$ e disto obtemos um sistema conforme a solução numérica, da forma

$$V_k(x) + m(A) = V_{j_k}(\tau_{r_k}(x)) + A(\tau_{r_k}(x)),$$

$$k, j_k \in \{1, ..., n\}, r_k \in \{1, 2\}$$

Que nos fornece as soluções $m(A)$ e V.



Exemplo: Na figura acima, $A(x) = \sin^2(2\pi x)$, $T(x) = 2x\mathrm{mod}(1)$, $\tau_1(x) = \frac{x}{2}$, $\tau_2(x) = \frac{x+1}{2}$ Onde em azul é o ramo dominado por τ_2 na expressão $\max_{T(y)=x}[A(y)+V(y)]$ e em vermelho é o ramo dado por τ_1, onde é V nosso candidato à solução obtido pelo algoritmo. Agora, os cálculos numéricos sugerem que se o trecho analítico vermelho for chamado de $V_2(x)$ e o azul de $V_1(x)$, E se

$$V(x) = \max[V_1(x), V_2(x)]$$

é a sub-ação para A, então

$$V_2(x) + \hat{m}(A) = V_1(\tau_1(x)) + A(\tau_1(x))$$

e também

$$V_1(x) + \hat{m}(A) = V_2(\tau_2(x)) + A(\tau_2(x))$$

Substituindo V_2 em função de V_1 obtem-se

$$V_1(x) - V_1(\tau_1(\tau_2(x))) = A(\tau_2(x)) + A(\tau_1(\tau_2(x))) - 2\hat{m}(A)$$

Onde a notação $\hat{m}(A)$ serve para indicar que $\hat{m}(A)$ é somente um candidato para o valor de $m(A)$. Mostramos que a solução deste sistema, fornece a expressão exata da sub-ação do problema, pela observação de que $\tau_1 \circ \tau_2$ possui um ponto fixo.