Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

IDEAIS FECHADOS E PRIMOS EM ANÉIS DE POLINÔMIOS E EXTENSÕES LIVRES CENTRALIZANTES

Dissertação de Mestrado

THAÍSA JACINTHO MÜLLER

Porto Alegre, 05 de março de 2010

Dissertação submetida por Thaísa Jacintho Müller* , como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero

Banca examinadora:
Prof. Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero (IM - UFRGS, ORIENTADOR)
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Wagner de Oliveira Cortes (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos (IME - USP)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela oportunidade de realização deste curso.

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Matemática, por todos os ensinamentos ao longo de algum tempo de convivência. De maneira muito especial ao meu orientador, professor Miguel Ferrero, por todo o empenho, incentivo, dedicação e paciência demonstrados durante a realização deste trabalho.

À secretária Rosane, por sua constante disposição em resolver todos os problemas, sempre com um sorriso no rosto.

Às duas pessoas que muito me incentivaram e apoiaram desde a graduação, que despertaram o meu interesse pela Álgebra e, acima de tudo, que me fizeram acreditar que tudo daria certo no final: minhas agora colegas Neda Gonçalves e Vera Bauer.

A todos os amigos que conquistei durante a realização do curso e que, de alguma maneira, se tornaram fundamentais na superação das dificuldades do dia-a-dia. Entre todos eles, gostaria de destacar aqui alguns para os quais tenho motivos específicos para agradecer:

Aos outros três integrantes do "quadrado mágico de Variável Complexa", Andrea, Rene e Diego Chaves, pelo companheirismo nos estudos, provando que "a união faz a força". Ao Rene e à Carol pela parceria nos seminários e eventos de Álgebra. E ao Diego Chaves também pelas horas de conversas descontraídas, pelo apoio, amizade e confiança, e pela ajuda com o seu ótimo inglês.

Aos colegas de área Thaísa, Daiana, Saradia, Laerte, Leandro, Bárbara e demais "paquitas", por estarem sempre dispostos a ajudar.

Ao Ricardo e à Maira, grandes "companheiros na luta pela resolução das EDO´s".

Ao Rodrigo, à Juliana, à Juliane e à Lucinéia, sempre sorridentes e dispostos a conversar, parceiros para todas as horas.

Ao Nicolau, pela companhia agradável e divertida em muitos momentos. E também à Miriam, pelos mesmos motivos e pelas ajudas nas disciplinas que fizemos juntas.

Ao Carlos, pela amizade, paciência e empenho em resolver meus problemas com o Latex, especialmente na preparação da apresentação.

Ao Diego Lieban, pela parceria mais do que constante, por dividir comigo muitos momentos alegres ou tristes e por todo o apoio psicológico sempre que eu precisei.

À Pati K. K., que com seu jeitinho calmo e sereno, é sempre uma companhia muito agradável (principalmente na hora de ir para casa).

À Pati Guidolin, que se mostrou uma grande amiga, sempre disposta a ouvir, aconselhar e ajudar.

Ao Diego Marcon e ao Patropy que, mesmo longe nos últimos tempos, são grandes companheiros em muitas horas, e têm a grande capacidade de alegrar mesmo os momentos mais complicados.

Por fim, mas não menos importante, agradeço à minha família, especialmente meu pai Ricardo, minha mãe Marilene, meu irmão Thiago e minha vó Vera, que dividiram comigo todas as etapas da realização deste curso e a quem dedico este trabalho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos ideais primos de anéis de polinômios e extensões livres centralizantes. Sejam R um anel primo, T o anel de quocientes de Martindale de R e C o centróide estendido de R. Mostramos que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os ideais primos R-disjuntos de $R[x]$, o conjunto de todos os ideais primos T-disjuntos de $T[x]$ e o conjunto de todos os polinômios mônicos de $C[x]$. Na sequência, apresentamos um resultado inédito: dado R um anel qualquer, encontramos um anel comutativo A tal que existe uma correspondência biunívoca entre os ideais primos de $A[x]$ e os ideais primos de $R[x]$. Por fim, dada $S = R[E]$ uma extensão livre centralizante do anel R com base E, mostramos que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os ideais primos P de $R[E]$ com $P \cap R = 0$, o conjunto de todos os ideais primos P^* de $T[E]$ com $P^* \cap T = 0$ e o conjunto de todos os ideais primos de $C[E]$. Trabalhamos, na verdade, com uma classe mais geral que os ideais primos, que são os ideais fechados, os quais são definidos ao longo do trabalho.

Abstract

In this work, we study prime ideals in polynomial rings and free centred extensions. Let R be a prime ring, T the Martindale ring of quocients of R and C the extended centroid of R. We show that there exists a one-to-one correspondence between the set of all the R-disjoint prime ideals of $R[x]$, the set of all the R-disjoint prime ideals of $T[x]$ and the set of all the monic polynomials of $C[x]$. In sequence, we present an unpublished result: let R be a ring, we find a commutative ring A such that there exists a one-to-one correspondence between the prime ideals of $A[x]$ and the prime ideals of $R[x]$. We also consider a free centred extension $S = R[E]$ of the ring R with basis E. We show that there exists a one-to-one correspondence between the set of all prime ideals P of $R[E]$ where $P \cap R = 0$, the set of all prime ideals P^* of $T[E]$ where $P^* \cap T = 0$ and the set of all the prime ideals of $C[E]$. We work, in fact, with a more general class of ideals called closed ideals, that we will define in the text.

Índice

Introdução **1**

1 Pré-requisitos **3**

1.1 Conceitos Básicos 4

1.2 Anel de Quocientes de Martindale 5

1.3 Ideais Primos em Anéis Comutativos de Polinômios 7

2 Ideais Primos em Anéis de Polinômios **9**

2.1 Ideais Principais Fechados 10

2.2 Extensão e Contração de Ideais Principais Fechados 17

2.3 Um Resultado Inédito 23

3 Ideais Primos e Fechados em Extensões Livres Centralizantes **28**

3.1 Ideais Fechados 29

3.2 Extensão e Contração de Ideais Primos e Fechados 35

Referências Bibliográficas **43**

Introdução

Nesta dissertação, apresentamos alguns estudos sobre ideais primos em anéis de polinômios e extensões livres centralizantes. Temos como objetivo principal estabelecer correspondências biunívocas entre ideais primos dos anéis envolvidos.

Para isso, iniciamos o trabalho, no Capítulo 1, apresentando alguns resultados necessários para o embasamento da teoria que segue. Este capítulo está dividido em três seções: na primeira, encontram-se algumas definições e resultados básicos envolvendo anéis e ideais primos. Na segunda, construímos o anel de quocientes de Martindale Q a partir de um anel primo R e apresentamos algumas de suas propriedades. Na terceira, mostramos que, dados um domínio de integridade R com corpo de frações K e uma indeterminada x, existe uma correspondência biunívoca entre os ideais primos de $R[x]$ que são contraídos a 0 em R e os ideais primos de $K[x]$.

Para o capítulo 2, tomamos como principal referência o trabalho de M. Ferrero [4], cuja motivação foi analisar a validade de alguns resultados conhecidos para ideais primos em anéis comutativos, quando trabalhamos com um anel não comutativo. O mais importante deles é o que encontra-se citado no parágrafo anterior. Introduzimos, então, o conceito de *ideal principal fechado* em anéis de polinômios sobre anéis primos. A partir desta definição e de algumas propriedades que demonstramos com base nela, tomamos R um anel primo, Q o anel de quocientes de Martindale de R e C o centróide estendido e caracterizamos os ideais fechados através de extensão e contração de ideais de $R[x]$, $Q[x]$ e $C[x]$. O principal resultado deste capítulo nos diz que, dados R um anel primo, T um anel de quocientes de R e C o centróide estendido, existe uma correspondência biunívoca, via contração, entre o conjunto de todos os ideais principais fechados de $R[x]$, o conjunto de todos os ideais principais fechados de $T[x]$ e o conjunto de todos os polinômios mônicos de $C[x]$. A partir daí, podemos caracterizar os ideais primos T-disjuntos de $T[x]$ como sendo os ideais da forma $Q[x]f_0 \cap T[x]$, para algum polinômio mônico irredutível $f_0 \in C[x]$.

Finalizando o Capítulo 2, apresentamos um resultado inédito, mostrando que, dado um anel R qualquer, é possível encontrar um anel comutativo A tal que existe uma correspondência biunívoca entre os ideais primos de $R[x]$ e os ideais primos de $A[x]$.

Já no Capítulo 3, nos baseamos no que foi apresentado por M. Ferrero em [5]. Estudamos os ideais primos R-disjuntos e fechados de $S = R[E]$, onde S é uma extensão livre centralizante do anel primo R. Caracterizamos o fecho $[I]$ de um ideal R-disjunto I de S e definimos um ideal fechado como sendo aquele para o qual $I = [I]$. Então, provamos que dado um ideal primo R-disjunto P de S, P é fechado.

Finalmente, a partir desses resultados, obtemos a desejada correspondência biunívoca entre os ideais fechados de $R[E]$ e de $T[E]$ e os ideais de $C[E]$, associando cada ideal fechado I de $R[E]$ com um ideal fechado I^* de $T[E]$, se $I^* \cap R[E] = I$ e $I^* = Q[E]K \cap T[E]$, onde $K \lhd C[E]$. Depois, provamos que existe também uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os ideais primos P de $R[E]$ com $P \cap R = 0$, o conjunto de todos os ideais primos P^* de $T[E]$ com $P^* \cap T = 0$ e o conjunto de todos os ideais primos de $C[E]$.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste primeiro capítulo, introduzimos algumas definições e resultados básicos necessários para o desenvolvimento da teoria que segue.

Ao longo desta dissertação, estaremos considerando R um anel associativo com unidade e $R[x]$ o anel de polinômios sobre R. Se f é um polinômio de $R[x]$, usaremos a notação ∂f para indicar o grau de f.

O ideal de R gerado por um subconjunto A de R será denotado por $\langle A \rangle_R$. Além disso, se $R \subseteq S$ é uma extensão de anéis, então R e S têm a mesma unidade.

Por C_R denotaremos o centro de R, ou seja, $C_R = \{x \in R \mid xy = yx, \forall y \in R\}$.

Usaremos a notação $I \lhd R$ para indicar que I é um ideal de R (ideal bilateral). Diremos que um ideal não nulo P de $R[x]$ é R-disjunto se $P \cap R = 0$.

Por fim, salientamos que neste capítulo algumas demonstrações serão omitidas por serem imediatas ou por se encontrarem nas referências citadas no fim do trabalho. (grande parte delas encontra-se em [10] e [7])

1.1 Conceitos Básicos

Definição 1.1.1. *Um ideal P de um anel R é dito um* ideal primo *se, dados dois ideais quaisquer I e J de R tais que $IJ \subseteq P$, temos $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$.*

Teorema 1.1.2. *Seja P um ideal do anel R. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) P é um ideal primo;

(ii) Se $a, b \in R$, com $\langle a \rangle_R \langle b \rangle_R \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$;

(iii) Se $a, b \in R$ com $aRb \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$;

(iv) Se I e J são ideais à esquerda (direita) de R, então $IJ \subseteq P$ implica $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$;

(v) Dados dois ideais I e J de R tais que $I \supseteq P$ e $J \supseteq P$, se $IJ \subseteq P$ então $I = P$ ou $J = P$.

Usaremos a notação $P \lhd' R$ para indicar que P é um ideal primo de R.

Definição 1.1.3. *Dizemos que um anel R é* primo *se $\langle 0 \rangle_R$ é um ideal primo.*

Em vista da definição de ideal primo e do Teorema 1.1.2, temos diferentes condições, cada uma delas equivalente à condição de que R é um anel primo. Em particular, um anel R é um anel primo se e somente se vale uma das (e portanto as duas) seguintes condições equivalentes:

1) Se I e J são ideais de R tais que $IJ = 0$, então $I = 0$ ou $J = 0$.

2) Se $a, b \in R$ são tais que $aRb = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Proposição 1.1.4. *Se R é um anel primo, então o anel de polinômios $R[x]$ também é primo.*

Demonstração: Sejam $f, g \in R[x]$ não-nulos. Então, $f = f' + ax^n$ e $g = g' + bx^m$, onde $\partial f' < n$, $\partial g' < m$ e $a, b \in R \setminus \{0\}$. Como R é primo, segue da condição

(2) acima que existe $r \in R$ tal que $arb \neq 0$. Além disso, também temos que $frg = f'rg' + f'rbx^m + ax^nrg' + arbx^{n+m}$ e $\partial(f'rg' + f'rbx^m + ax^nrg') < m + n$, daí podemos concluir que $frg \neq 0$, ou seja, $fR[x]g \neq 0$. Logo, $R[x]$ é primo. ■

Se P é um ideal primo não nulo do anel de polinômios $R[x]$ então podemos supor que $P \cap R = 0$, pois caso contrário podemos fatorar R como $\overline{R} = R/(P \cap R)$ e P como $\overline{P} = P/(P \cap R)[x]$, e portanto $\overline{R}$ será um anel primo e $\overline{P}$ será um ideal primo de $\overline{R}[x]$ com $\overline{P} \cap \overline{R} = 0$. Assim, para estudar os ideais primos de $R[x]$, iremos considerar apenas o caso em que R é primo e $P \cap R = 0$.

Definição 1.1.5. *Um anel R é* simples *se seus únicos ideais são os triviais, ou seja,* 0 *e* R.

1.2 Anel de Quocientes de Martindale

Nesta seção, teremos como base as ideias encontradas em [8], § 14, e [2], capítulo 2.

Sejam R um anel primo não necessariamente com unidade e $\mathcal{U}$ a coleção de todos os ideais não nulos de R. Podemos observar que, se $I, J \in \mathcal{U}$ então $IJ \in \mathcal{U}$ e $I \cap J \in \mathcal{U}$. Se $I \lhd R$ diremos que $f : I \to R$ é um R-homomorfismo à direita se f é aditiva e $f(ar) = f(a)r$, para cada $a \in I$, $r \in R$. No que segue, consideraremos ideais $I \in \mathcal{U}$ e R-homomorfismos à direita $f : I \to R$.

Vamos denotar por Ω o conjunto de todos os pares (I, f) onde $I \in \mathcal{U}$ e $f : I \to R$ é um R-homomorfismo à direita.

Em Ω, definiremos a seguinte relação de equivalência:

Se $(I, f), (J, g) \in \Omega$, diremos que (I, f) é equivalente a (J, g) $((I, f) \sim (J, g))$, se existir um ideal não nulo $H \subseteq J \cap I$ tal que $f|_H = g|_H$. É fácil ver que esta é uma relação de equivalência e que pode ser definida de maneira equivalente como: $(I, f) \sim (J, g)$ se e somente se $f|_{I \cap J} = g|_{I \cap J}$.

Denotaremos por Q o conjunto quociente $\Omega / \backsim$ e por $[I, f]$ a classe de equivalência de (I, f), onde $(I, f) \in \Omega$.

Podemos, ainda, dotar Q de uma estrutura de anel definindo as seguintes operações de adição e multiplicação, de forma que $R \subseteq Q$:

Definição 1.2.1. *Sejam $[I, f], [J, g] \in Q$. Definimos a* soma *e o* produto *em Q por:*
(i) $[I, f] + [J, g] = [I \cap J, f + g]$, onde $f + g : I \cap J \to R$ é definida de maneira natural: $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, para todo $a \in I \cap J$.
(ii) $[I, f] \cdot [J, g] = [JI, f \circ g]$, onde $f \circ g : JI \to R$ é definida por $(f \circ g)(a) = f(g(a))$ para cada $a \in JI$ ($f \circ g$ está bem definida, pois $g(JI) \subseteq I$).

Na verdade, é fácil ver que as duas operações estão bem definidas e que, com elas, Q é um anel com unidade. Além disso, $[R, 0] = 0_Q$ e $[R, Id_R] = 1_Q$.

O anel Q definido acima é denominado *anel de quocientes à direita de Martindale de R*. De forma análoga, podemos definir o anel de quocientes à esquerda de Martindale de R (basta usar, no item (ii) anterior, IJ e $g \circ f$).

Vejamos, agora, como R pode ser mergulhado em Q:

Se $a \in R$, denotaremos por a_e a multiplicação à esquerda por a, ou seja, temos uma função $a_e : R \to R$ definida por $a_e(x) = ax$ para cada $x \in R$. Então $[R, a_e]$ é um elemento de Q, o qual denotaremos simplesmente por a_e. A aplicação $\Psi : R \to Q$ definida por $\Psi(a) = a_e$ para cada $a \in R$, é um homomorfismo injetor de anéis. Isto permite identificar R com sua imagem $\Psi(R)$ em Q. Utilizando esta identificação, podemos supor $R \subseteq Q$ e, para cada $a \in R$, escrever $a_e = a$.

Proposição 1.2.2. *Sejam R um anel primo e Q o anel de quocientes à direita de*

Martindale de R. Então:

(i) $R \subseteq Q$;

(ii) Se $I \in \mathcal{U}$ *e* $f : I \to R$ *é um* R*-homomorfismo à direita, então existe* $q \in Q$ *tal que* $f(r) = qr,\ \forall r \in I$;

(iii) Para quaisquer $q_1, q_2, ..., q_n \in Q$ *existe* $I \in \mathcal{U}$ *tal que* $q_i I \subseteq R$ *para cada* $i = 1, ..., n$;

(iv) Se $qI = 0$ *para algum* $q \in Q$ *onde* $I \in \mathcal{U}$*, então* $q = 0$.

O centro de Q é chamado o *centróide estendido de R*, e é denotado por C. Pela proposição anterior, $q \in C$ se e somente se $qr = rq$ para cada $r \in R$.

O anel gerado por R e C é igual a RC, e chamado *fecho central de R.*

Um subanel de Q que contém R é chamado *anel de quocientes à direita de R.* Claramente RC é um anel de quocientes à direita de R.

Proposição 1.2.3. *Sejam R um anel primo e Q o anel de quocientes à direita de Martindale de R. Então:*

(i) Todo anel de quocientes de R também é primo;

(ii) $q \in C$ *se e somente se existe um ideal não-nulo* I *de* R *e um* R*-homomorfismo bilateral* $f : I \to R$ *tais que* $f(r) = qr, \quad \forall r \in I$;

(iii) C *é um corpo.*

1.3 Ideais Primos em Anéis Comutativos de Polinômios

Nosso objetivo, nesta seção, é apresentar o teorema que serviu de motivação para [4]. Tal resultado pode ser encontrado em [6] e é o seguinte:

Teorema 1.3.1. *Seja R um domínio de integridade com corpo de frações K, e seja x uma indeterminada. Então existe uma correspondência biunívoca entre os ideais primos de $R[x]$ que são contraídos a 0 em R e os ideais primos de $K[x]$.*

Antes de demonstrar este teorema, faremos algumas considerações:

Seja S um subconjunto multiplicativamente fechado de R. Vamos assumir que $0 \notin S$, pois sabemos que se $0 \in S$ então $R_S = S^{-1}R = 0$.

Lema 1.3.2. *Sejam A um anel e S um subconjunto multiplicativamente fechado de A. (Sabemos que se I é um ideal de A então $I_S = S^{-1}I$ é um ideal de $A_S = S^{-1}A$). Então as seguintes afirmações são válidas:*
(i) $I_S = (1)$ se e somente se $I \cap S \neq \emptyset$;
(ii) Os ideais primos de A_S estão em correspondência bijetiva ($p \leftrightarrow p_S$) com os ideais primos de A tais que $p \cap S = \emptyset$.

Demonstração: A demonstração do item (ii) pode ser encontrada em [1], Proposição 3.11 (iv). Então, vamos demonstrar apenas o item (i):

Suponhamos que $I_S = (1)$. Então, existem $x \in S$, $y \in I$ tais que $\frac{y}{x} = 1$, ou seja, $x = y$. Logo, $I \cap S \neq \emptyset$.

Reciprocamente, se $I \cap S \neq \emptyset$, existe $x \in I \cap S$. Então, $x \in I$ e $x \in S$, logo $\frac{x}{x} = 1 \in I_S$. Portanto, $I_S = (1)$. ■

Agora, podemos demonstrar o Teorema 1.3.1:

Demonstração: Seja S o conjunto dos elementos não nulos de R. Assim, S é um subconjunto multiplicativamente fechado de R tal que $0 \notin S$. Além disso, $R_S = K$ e $R_S[x]$ é, naturalmente, $K[x]$. De acordo com o Lema 1.3.2, os ideais primos P_S de $K[x] = R_S[x]$ estão em correspondência biunívoca com os ideais primos P de $R[x]$ tais que $P \cap S = \emptyset$. Mas $S = R \setminus \{0\}$, e como P é um ideal temos que $0 \in P$. Logo, $P \cap S = \emptyset$ equivale a $P \cap R = \{0\}$. ■

Capítulo 2

Ideais Primos em Anéis de Polinômios

Neste capítulo, estaremos seguindo o trabalho desenvolvido em [4], o qual tem por objetivo estudar os ideais primos de anéis de polinômios sobre um anel primo R, não necessariamente comutativo.

Vamos começar introduzindo algumas notações e terminologias. Conforme já foi mencionado acima, o anel R é, exceto quando dito em contrário, sempre um anel primo.

Por C_R denotaremos o centro de R e simplesmente por C o centróide estendido de R. Se I é um ideal R-disjunto de $R[x]$, denotaremos por $\tau(I)$ o ideal de R que consiste do zero e de todos os coeficientes líderes dos polinômios de grau mínimo de I. Se $f \in R[x]$, ∂f denota o grau de f e $lc(f)$ o coeficiente líder de f. Finalmente, definimos a minimalidade de I por $Min(I) = Min\{\partial f : 0 \neq f \in I\}$.

2.1 Ideais Principais Fechados

Seja R um anel primo e denotemos por

$$\Gamma_R = \{f \in R[x] : arf = fra, \text{ para todo } r \in R\}, \text{ onde } a = lc(f)$$

Para $f \in \Gamma_R$ com $a = lc(f)$, consideramos

$$[f]_R = \{g \in R[x] : \text{existe } 0 \neq H \lhd R \text{ tal que } gHa \subseteq R[x]f\}$$

Iremos omitir o R subescrito quando este estiver claro no contexto.

Começaremos, então, com o seguinte lema:

Lema 2.1.1. *Seja $f \in \Gamma$ com $\partial f \geqslant 1$. Então, $[f]$ é um ideal R-disjunto de $R[x]$ que contém f como um polinômio de grau mínimo.*

Demonstração: É fácil ver que $[f]$ é um ideal de $R[x]$. De fato, pela definição de $[f]$ temos que $[f] \subseteq R[x]$. Além disso, $0 \in [f]$ e, se $g \in [f]$, $c \in R$, basta mostrar que $gc, gx \in [f]$ (analogamente, provamos para cg e xg, e todos os polinômios serão combinações desses). Como $g \in [f]$, existe $0 \neq H \lhd R$ tal que $gHa \subseteq R[x]f$, onde $a = lc(f)$. Mas então $gxHa \subseteq R[x]f$ (o mesmo para cH). Logo, podemos afirmar que $gx, gc \in [f]$. Como $fra = arf \in R[x]f$, para todo $r \in R$ (onde $a = lc(f)$), temos $f \in [f]$. De fato, basta ver que $fRa = aRf \subseteq R[x]f$.

Vamos mostrar, agora, que f tem grau mínimo em $[f]$:

Se $\partial g < \partial f$ com $\partial f = n$ e $g \in [f]$, existe $0 \neq H \lhd R$ tal que $gHa \subseteq R[x]f$. Para $h \in H$, existe $k = x^m b_m + ... + b_0$, com $gha = kf$. Mas $\partial gha < n$ e $\partial kf \geq n$ então, para que a igualdade seja verdadeira, devemos ter $b_m a = 0$. Além disso, para todo $r \in R$, $ghara = kfra = karf$.

Suponhamos, por indução, que $b_i a = 0$ para $i = m, ..., m - s + 1$. Então, pela relação anterior, temos que $b_{m-s} ara = 0$ para todo $r \in R$. Daí segue que $b_{m-s} a = 0$

(já que R é primo). Logo, $b_i a = 0$ para $i = 0, ..., m$ e portanto $gHaRa = 0$. Como $R[x]$ é primo, segue que $g = 0$.

Por fim, como $\partial f \geq 1$ e f tem grau mínimo em $[f]$, é claro que $[f] \cap R = 0$. ■

Lema 2.1.2. *Suponhamos que f e f' estão em Γ. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) $[f] \subseteq [f']$
(ii) $f \in [f']$

Demonstração: Claramente (i) implica (ii). De fato, se $[f] \subseteq [f']$, como já vimos no lema anterior que $f \in [f]$, segue que $f \in [f']$.

Reciprocamente, se $f \in [f']$ e $g \in [f]$, existem ideais não nulos H e H' de R tais que $fHa' \subseteq R[x]f'$ e $gH'a \subseteq R[x]f$ onde $a = lc(f)$ e $a' = lc(f')$. Então $gH'aHa' \subseteq R[x]fHa' \subseteq R[x]f'$. Além disso, $0 \neq H'aH \lhd R$, pois $H'a$ e H são ideais à esquerda de R com $H'a \neq 0$, porque se $H'a = 0$ teríamos $aH'a = 0$, o que é um absurdo. Daí segue que $g \in [f']$. Logo, $f \in [f']$ implica que $[f] \subseteq [f']$. ■

A partir deste lema, obtemos facilmente o seguinte corolário:

Corolário 2.1.3. *Suponhamos que f e f' estão em Γ. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) $[f] = [f']$
(ii) $f \in [f']$ *e* $f' \in [f]$
(iii) $fra' = arf'$ *e* $a'rf = f'ra$ *para todo* $r \in R$, *onde* $a = lc(f)$ *e* $a' = lc(f')$

Demonstração: Podemos ver facilmente que $(i) \Leftrightarrow (ii)$, diretamente do Lema 2.1.2.

Por outro lado, sabemos que $arf = fra$ e que $a'rf' = f'ra'$, e vamos supor que vale (ii). Então, $arf' - fra' = 0$, pois $lc(arf') = ara'$ e $lc(fra') = ara'$. Analogamente, podemos mostrar que $a'rf = f'ra$.

Reciprocamente, suponhamos que vale (iii). Como $fra' = arf'$, temos que $fra' \in R[x]f'$ para todo $r \in R$, e portanto $f \in [f']$. Da mesma forma, $f' \in [f]$. ■

Para obtermos nosso primeiro resultado importante, precisamos da seguinte definição:

Definição 2.1.4. *Um ideal I de $R[x]$ é dito* principal fechado *se existe $f \in \Gamma$ tal que $[f] = I$.*

Teorema 2.1.5. *Sejam R um anel primo e I um ideal R-disjunto de $R[x]$. Então existe um menor ideal principal fechado $[I]$ de $R[x]$ que contém I. Além disso, $[I] = [f]$ para algum polinômio f de I de grau mínimo.*

Demonstração: Seja f um polinômio de grau mínimo n em I com $lc(f) = a$. Então, $fra = arf$ para todo $r \in R$ (pois $f \in I$, que é um ideal bilateral), e portanto $f \in \Gamma$. Se $g \in I$ e $\partial g = n$, temos $gra - brf \in I$, para todo $r \in R$, onde $b = lc(g)$. Logo, como n é o grau mínimo em I, temos $gra = brf \in R[x]f$, para todo $r \in R$, e então $g \in [f]$.

Suponhamos, por indução, que para $g \in I$ com $\partial g \leq m - 1$ temos $gHa \subseteq R[x]f$ para $H = RaR \cdots aR$ (onde R aparece $m-n$ vezes). Assim, $g \in [f]$ e tomemos $k \in I$ tal que $\partial k = m$ e $lc(k) = c$. Para $r \in H$, consideramos $k_r = kra - x^{m-n}crf \in I$. Sabemos que $\partial kra = m$ e $\partial x^{m-n}crf = m$. Além disso, $c = lc(k)$ e $a = lc(f)$, logo $\partial k_r \leq m - 1$, $k_r Ha \subseteq R[x]f$ e daí segue facilmente que $kRaHa \subseteq R[x]f$ (basta olhar a definição de k_r). Isto completa a prova por indução, e portanto $I \subseteq [f]$.

Agora, suponhamos que $I \subseteq [f']$ para algum $f' \in \Gamma$. Como $f \in I$, temos que $[f] \subseteq [f']$ pelo Lema 2.1.2. Logo, $[f]$ é o menor ideal principal fechado de $R[x]$ que contém I. Assim, a prova está completa. ■

Definição 2.1.6. *Para um ideal R-disjunto I de $R[x]$, o ideal $[I]$ definido no Teorema 2.1.5 será chamado o* ideal principal fechado associado a I.

Pelo Teorema 2.1.5, um ideal R-disjunto I de $R[x]$ é principal fechado se e somente se $I = [I]$. Mais geralmente, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.1.7. *Seja I um ideal R-disjunto de $R[x]$. Então, $[I]$ é o maior ideal J de $R[x]$ que contém I e que satifaz $Min(J) = Min(I)$. Em particular, $[I]$ é o único ideal principal fechado de $R[x]$ que contém I e satisfaz $Min([I]) = Min(I)$.*

Demonstração: É claro que $Min([I]) = Min(I)$. De fato, temos que: $I \lhd R[x]$, $[f] = \{g \in R[x] : \text{existe } 0 \neq H \lhd R \text{ tal que } gHa \subseteq R[x]f\}$, $a = lc(f)$ e $I = [f]$ para $f \in I$ de grau mínimo. Além disso, $Min(I) = \partial f$ e $Min([I]) = Min([f]) = \partial f$ pois, pelo Lema 2.1.1, f é polinômio de grau mínimo de $[f]$.

Suponhamos que J é um ideal de $R[x]$ com $Min(J) = Min(I) = n$ e $J \supseteq I$. Se $f \in I$ e $\partial f = n$ então $f \in J$, e portanto $J \subseteq [J] = [f] = [I]$, pelo Teorema 2.1.5.

Assim, mostramos que $[I]$ é realmente o maior ideal de $R[x]$ que contém I e satisfaz a condição dada. Mas, no Teorema 2.1.5, já mostramos que $[I]$ é o menor ideal principal fechado de $R[x]$ que contém I. Logo, $[I]$ é o único ideal em tais condições. ∎

Se $0 \neq r \in R$ então $r \in \Gamma$ pois, para qualquer $s \in R$, temos $rsr = rsr$, já que $lc(r) = r$, e temos claramente que $[r] = R[x]$. De fato, pelo que já foi visto, temos $[r] = \{g \in R[x] : \text{existe } 0 \neq H \lhd R \text{ tal que } gHr \subseteq R[x]r\}$. Então, precisamos encontrar um ideal H tal que $gHr \subseteq R[x]r$. Basta tomarmos, por exemplo, $H = R$ e veremos que qualquer polinômio g de $R[x]$ está em $[r]$.

Assim, se I é um ideal de $R[x]$ tal que $I \cap R \neq 0$, definimos $[I] = R[x]$. Desta forma também teremos que $[I] = [f]$ para algum polinômio f de I de grau mínimo, bastando tomar $f = r \in I \cap R$. Também vamos usar $[0] = 0$. Assim, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.1.8. *Sejam I e J ideais de $R[x]$. Então:*

(i) $[[I]] = [I]$

(ii) *Se* $I \subseteq J$ *então* $[I] \subseteq [J]$

(iii) $[[I] + [J]] = [I + J]$

Demonstração: (i) Consideremos $I \lhd R[x]$. Sabemos que $[I] = [f]$, para algum polinômio $f \in I$ de grau mínimo. Mas $[f]$, por sua vez, é um ideal de $R[x]$, então $[[f]] = [g]$ para algum polinômio g de $[f]$ de grau mínimo. Então, podemos tomar $f = g$ e segue que $[[f]] = [f]$, ou seja, $[[I]] = [I]$.

(ii) Temos que $[I] = [f]$, para $f \in I$ de grau mínimo e $[J] = [g]$, para $g \in J$ de grau mínimo. Além disso, se $I \subseteq J$ então $f \in J$. Se f for de grau mínimo em J, segue diretamente que $[f] = [g]$, e portanto $[I] = [J]$. Por outro lado, se f não for de grau mínimo em J, como $I \subseteq J$ temos $f \in J$, logo $f \in [J]$ e daí $[f] \subseteq [J]$.

(iii) Como $I + J \subseteq [I] + [J]$ e $[I] + [J] \subseteq [I + J]$, o resultado segue diretamente do Corolário 2.1.7. ■

Sejam R um anel primo e P um ideal R-disjunto de $R[x]$. Vamos mostrar que P é primo se e somente se P é maximal no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[x]$. Apresentamos, a seguir, uma justificativa para este fato que é baseada no método usado em [3]. Para outra demonstração, ver [11].

Lema 2.1.9. *Sejam* R *um anel e* $0 \neq I \lhd R[x]$. *Dados* $f \in I$, *com* $\partial f = Min(I) = n$, $lc(f) = a$, $g \in I$, *com* $\partial g = m$, $lc(g) = b$ *e* $r_1, ..., r_t$ *elementos arbitrários de* R, *existe* $k \in R[x]$ *com* $\partial k \leq m - n$, *tal que, para qualquer* $y \in R$, $kyf = gr_t a \cdots ar_1 aya$.

Demonstração: (por indução em $m - n$)

Vamos supor que $m - n = 0$ e tomar $k = bsar_t \cdots ar_1 a$.

Então, $kyf - gsar_t \cdots r_1 aya = 0$, pois caso contrário este seria um elemento de I com grau menor do que o mínimo. Logo, $kyf = gsar_t \cdots r_1 aya$.

Agora, vamos supor que o resultado é valido para $m - n - 1$ e vamos mostrar que também vale para $m - n$.

Tomemos $gr_{m-n}a - br_{m-n}x^{m-n}f \in I$. Temos que $\partial(gr_{m-n}a - br_{m-n}x^{m-n}f) < m$. Então, pela hipótese de indução, segue que $kyf = (gr_{m-n}a - br_{m-n}x^{m-n}f) \cdots ar_1aya$, ou seja, $(k + br_{m-n}ax^{m-n} \cdots ar_1a)yf = gr_{m-n}a \cdots ar_1ar_0a$. Logo, basta escolher $k' = k + br_{m-n}ax^{m-n} \cdots ar_1a$ e segue o resultado. ∎

Lema 2.1.10. *Sejam R um anel primo e P um ideal primo R-disjunto de $R[x]$. Se I é um ideal R-disjunto de $R[x]$ com $P \subseteq I$ então $P = I$.*

Demonstração: Consideremos $g \in P$, com $\partial g = Min(P) = m$, $lc(g) = b$ e $f \in I$ com $\partial f = Min(I) = n \leq m$ (pois $I \supseteq P$) e $lc(f) = a$. Pelo Lema 2.1.9, sabemos que existe $k \in R[x]$, com $\partial k \leq m - n$, tal que, para qualquer $r_0 \in R$, $kr_0f = gr_{m-n}a \cdots ar_1ar_0a \in P$. Então, $kR[x]f \subseteq P$. Mas P é um ideal primo, então sabemos que $k \in P$ ou $f \in P$. Por outro lado, $\partial k \leq m - n < m$, ou seja, $k \notin P$. Logo, $f \in P$. O resto segue por indução. ∎

Teorema 2.1.11. *Sejam R um anel primo e P um ideal R-disjunto de $R[x]$. Então P é primo se e somente se P é maximal no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[x]$.*

Demonstração: Supondo que P é um ideal primo, segue diretamente do Lema 2.1.10 que P é maximal no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[x]$.

Reciprocamente, suponhamos que P é um ideal maximal no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[x]$. Consideremos A, B ideais de $R[x]$ tais que $A \supseteq P$, $B \supseteq P$ e $AB \subseteq P$. Então, $(A \cap R)(B \cap R) \subseteq P \cap R = 0$, logo $A \cap R = 0$ ou $B \cap R = 0$, já que R é primo. Mas P é maximal no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[x]$ e estamos supondo que $A \supseteq P$ e $B \supseteq P$. Então, se $A \cap R = 0$ segue que $A = P$, e se $B \cap R = 0$, que $B = P$. Logo, P é primo, de acordo com o Teorema 1.1.2. ∎

A partir daí, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.1.12. (i) *Todo ideal primo R-disjunto de $R[x]$ é principal fechado.*
(ii) *Um ideal principal fechado é primo se e somente se é maximal no conjunto de todos os ideais principais fechados de $R[x]$.*

Demonstração: Para a parte (ii), basta usarmos a parte (i) e o resultado acima. Vamos, então, provar a parte (i):

Seja P um ideal primo tal que $P \cap R = 0$. Sabemos que $P \subseteq [P]$. Mas, pelo que já provamos, P é maximal, então é necessário que $P = [P]$, ou seja, P é principal fechado. ■

Para anéis simples, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1.13. *Seja R um anel simples. Então, todo ideal não nulo de $R[x]$ é principal fechado. Além disso, se I é um ideal não-nulo de $R[x]$ então $I = R[x]f$ para algum polinômio mônico $f \in C_R[x]$, onde C_R é o centro de R.*

Demonstração: Seja I um ideal não trivial de $R[x]$. Então, $I \cap R = 0$ e $\tau(I) = R$. Logo, podemos escolher um polinômio f de grau mínimo em I que é mônico. Como $f \in \Gamma$, já que f tem grau mínimo em I, temos $f \in C_R[x]$. Suponhamos que $g \in [f]$. Então, $gR \subseteq R[x]f$ e portanto $g \in R[x]f$. Assim, $[f] \subseteq R[x]f \subseteq I \subseteq [f]$. ■

Corolário 2.1.14. *Seja R um anel simples. Então existe uma correspondência um a um, via contração, entre o conjunto de todos os ideais (respectivamente, ideais primos) de $R[x]$ e o conjunto de todos os ideais (respectivamente, ideais maximais) de $C_R[x]$.*

Demonstração: Pelo Teoreoma 2.1.13, cada ideal I de $R[x]$ tem um único correspondente $R[x]f$. Para a correspondência entre ideais primos e maximais, basta usarmos o Corolário 2.1.12 observando, pelo Teorema 2.1.13, que todo ideal de $R[x]$ é principal fechado. ■

Observação 2.1.15. Pelo Teorema 2.1.13, vemos que quando R é um anel simples então todo ideal principal fechado é um ideal principal (usando a terminologia conhecida) e reciprocamente.

Porém, quando o anel não é simples, existem ideais principais que não são principais fechados. Como exemplo, consideremos o ideal $I = 2x\mathbb{Z}[x]$ (que é principal) e $[I] = x\mathbb{Z}[x]$, onde $\mathbb{Z}$ é o anel dos inteiros (o qual não é um anel simples).

Então, não podemos usar simplesmente o nome *ideal principal*. Agora, temos uma aplicação que associa a qualquer ideal I o ideal $[I]$ com as propriedades do Corolário 2.1.8. Este fato nos dá a ideia de que o nome principal fechado é um nome adequado.

Observação 2.1.16. É fácil ver que todo ideal R-disjunto de $R[x]$ é principal fechado se e somente se R é simples. De fato, se R tem um ideal próprio H então $xH[x]$ é R-disjunto mas não principal fechado, já que $[xH[x]] = xR[x]$.

2.2 Extensão e Contração de Ideais Principais Fechados

Nesta seção, exceto quando dito em contrário, denotamos por R um anel primo e por Q o anel de quocientes de Martindale de R. Como já vimos no capítulo 1, seu centro C é o centróide estendido de R.

Um anel de quocientes à direita de R é um subanel de Q contendo R. Denotaremos aqui por T.

Temos como principal objetivo, nesta seção, provar o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1. *Sejam R um anel primo e T um anel de quocientes à direita de R. Então existe uma correspondência um a um entre:*

(i) O conjunto de todos os ideais principais fechados de $R[x]$;

(ii) O conjunto de todos os ideais principais fechados de $T[x]$;

(iii) O conjunto de todos os polinômios mônicos de $C[x]$, onde C é o centróide estendido de R.

Além disso, esta correspondência associa $[f]_R$ com $[f']_T$ e $f_0 \in C[x]$ no caso em que $[f']_T \cap R[x] = [f]_R$ e $Q[x]f_0 \cap T[x] = [f']_T$.

A prova deste teorema é consequência do seguinte lema e do Corolário 2.2.3.

Antes de enunciar tal lema, observemos que, dado um anel qualquer R, vale o algoritmo da divisão em $R[x]$, ou seja, dados dois polinômios $f, g \in R[x]$, com g mônico, existem polinômios $q, r \in R[x]$ tais que $f = qg + r$.

Lema 2.2.2. *Se $f \in \Gamma_T$, então existe um único polinômio mônico $f_0 \in C[x]$ tal que $[f]_T = Q[x]f_0 \cap T[x]$.*

Demonstração: Sejam $I = [f]_T \cap R[x]$ e $n = Min(I)$. Então, é fácil ver que $Min([f]_T) = n$. De fato, temos que $Min([f]_T) \leq Min(I)$, pois $I \subseteq [f]_T$. Por outro lado, dado $g \in [f]_T$ com $\partial g = Min([f]_T)$, pela Proposição 1.2.2 (iii), sabemos que existe um ideal não nulo J de R tal que $0 \neq gJ \subseteq R[x]$. Assim, $gJ \subseteq I$ e portanto $Min([f]_T) = \partial g \geq Min(I)$.

Agora, consideremos $b \in \tau(I)$. Sabemos que existe um único polinômio $h = x^n b + x^{n-1}b_{n-1} + ... + b_0 \in I$. De fato, se tomarmos $h' = bx^n + ... + b'_1 x + b'_0 \in I$, temos $h - h' \in I$ e $\partial(h - h') < n$, isto é, $h - h' = 0$ e $h = h'$. Como o polinômio associado a cada coeficiente líder é único, podemos definir aplicações $\alpha_i : \tau(I) \to R$ dadas por $\alpha_i(b) = b_i$, que são homomorfismos de R-bimódulos bem definidos. Então, pela Proposição 1.2.3 (ii), existe $c_i \in C$ tal que $b_i = \alpha_i(b) = c_i b = bc_i$, para qualquer $i = 0, 1, ..., n-1$.

Vamos escolher um polinômio $f_1 \in I$ com $\partial f_1 = n$ e $lc(f_1) = a$, ou seja, $f_1 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + ax^n$. Desta forma, podemos observar que $f_1 = f_0 a = af_0$, onde

$f_0 = x^n + x^{n-1}c_{n-1} + ... + c_0 \in C[x]$.

De fato, temos $\sum_{i=0}^{n-1} ac_i x^i + ax^n = f_1 = \sum_{i=0}^{n-1} c_i a x^i + ax^n$. Como f_0 é mônico, $Min(f_0 Q[x] \cap T[x]) = n = Min([f]_T)$. Para ver isto, basta tomarmos $0 \neq J \triangleleft R$ tal que $f_0 J \subseteq R[x]$, e daí segue que, dado $0 \neq j \in J$, temos $f_0 j \in f_0 Q[x] \cap T[x]$ e $\partial f_0 j = n$. E n é o menor possível em $Q[x]f_0$, já que $\partial f_0 = n$. Daí segue que $Min(f_0 Q[x] \cap T[x]) = n$, e já sabemos que $n = Min[f]_T$. Agora, se $g \in [f]_T = [f_1]_T$ então existe um ideal não nulo H de T com $gHa \subseteq T[x]f_1 \subseteq Q[x]f_0$. Sejam $p, r \in Q[x]$ tais que $g = pf_0 + r$, onde $\partial r < n$. Para $h \in H$, temos $gha = (pf_0 + r)ha$, e portanto $rha = gha - phaf_0 \in Q[x]f_0$. Mas $\partial rha < n$ e n é o menor possível, logo $rha = 0$ e daí $r = 0$, pois T é primo. Então $g \in Q[x]f_0 \cap T[x]$, já que $g = pf_0$, e portanto $[f]_T \subseteq Q[x]f_0 \cap T[x]$. Além disso, $[f]_T = Q[x]f_0 \cap T[x]$ pelo Corolário 2.1.7.

Resta, então, provar a unicidade de f_0. Sabemos que $[f]_T = Q[x]f_0 \cap T[x]$ e portanto $\partial f_0 = Min[f]_T$. Por outro lado, se g_0 é um polinômio mônico de $C[x]$ tal que $Q[x]g_0 \cap T[x] = [f]_T$ então $\partial g_0 = n = Min[f]_T = \partial f_0$, $\partial(f_0 - g_0) < n$, pois f_0 e g_0 são mônicos, e existe um ideal não nulo K de R com $(f_0 - g_0)K \subseteq [f]_T$. Logo, $(f_0 - g_0)K = 0$ e temos $f_0 = g_0$. ■

Usando o Lema 2.2.2, obtemos facilmente o seguinte corolário:

Corolário 2.2.3. *Seja I um ideal T-disjunto de $T[x]$. Então I é principal fechado se e somente se $I = Q[x]f_0 \cap T[x]$, para algum polinômio mônico $f_0 \in C[x]$.*

Demonstração: Seja $I \triangleleft T[x]$ tal que $I \cap T = 0$. Suponhamos que I é principal fechado, ou seja, $I = [f]_T$ para algum $f \in \Gamma_T$. Então, pelo Lema 2.2.2, existe um único polinômio mônico $f_0 \in C[x]$ tal que $Q[x]f_0 \cap T[x] = [f]_T$.

Reciprocamente, suponhamos que $I = Q[x]f_0 \cap T[x]$ para algum polinômio mônico $f_0 \in C[x]$. Agora, consideremos o ideal principal fechado $[I]_T$. Novamente pelo Lema 2.2.2, temos que $[I]_T = Q[x]g_0 \cap T[x]$, com $g_0 \in C[x]$. Mas sabemos que $Min(I) = Min([I]_T)$, logo $\partial f_0 = \partial g_0$. Além disso, como $I \subseteq [I]_T$, temos que existe um ideal não nulo J de R tal que $(f_0 - g_0)J = 0$. De fato, como no Lema anterior, $\partial(f_0 - g_0) < n$, já que $\partial f_0 = \partial g_0$ e ambos são mônicos, portanto existe um ideal não nulo J de R com $(f_0 - g_0)J \subseteq [I]_T$ e daí $(f_0 - g_0)J = 0$. Logo, $f_0 = g_0$, ou seja, $I = [I]_T$, e segue que I é principal fechado. ∎

Agora, podemos demonstrar o Teorema 2.2.1:

Demonstração: Em primeiro lugar, observemos que podemos estabelecer uma correspondência, através de uma função ψ, entre o conjunto dos ideais principais fechados de $T[x]$ e o conjunto dos polinômios mônicos de $C[x]$ como segue: a cada ideal $J = [f]_T$ associamos o único $f_0 \in C[x]$ mônico, conforme o Lema 2.2.2, tal que $J = Q[x]f_0 \cap T[x]$, ou seja, $\psi(J) = f_0$. Esta função ψ independe de f, pois se $[f]_T = J = [f']_T$ então, pelo Lema 2.2.2, temos que $Q[x]f_0 \cap T[x] = [f]_T = [f']_T = Q[x]f'_0 \cap T[x]$ e portanto $f_0 = f'_0$. Por outro lado, é fácil ver que ψ é injetiva, já que se J_1 e J_2 são ideais principais fechados de $T[x]$ tais que $\psi(J_1) = \psi(J_2) = f_0$, então $J_1 = Q[x]f_0 \cap T[x] = J_2$. E também é sobrejetiva, pois dado f_0 polinômio mônico de $C[x]$, o Corolário 2.2.3 garante que $J = Q[x]f_0 \cap T[x]$ é um ideal principal fechado de $T[x]$ e portanto $\psi(J) = f_0$.

Agora, tomando $T = R$ no que acabamos de provar, temos a correspondência entre o conjunto dos ideais principais fechados de $R[x]$ e o conjunto dos polinômios mônicos de $C[x]$. Por fim, podemos especificar a correspondência entre o conjunto dos ideais principais fechados de $R[x]$ e o conjunto dos ideais principais fechados de $T[x]$. Para cada $[f]_R$ temos um único correspondente $[f]_T$ tal que $[f]_T \cap R[x] = [f]_R$, onde $[f]_T = Q[x]f_0 \cap T[x]$ e $[f]_R = Q[x]f_0 \cap R[x]$. ∎

Observação 2.2.4. Podemos observar também que existe uma correspondência biunívoca entre os polinômios mônicos de $C[x]$ e os ideais fechados de $C[x]$, que são exatamente aqueles gerados por tais polinômios mônicos, isto é, dado $f_0 \in C[x]$ mônico, associamos f_0 com o ideal fechado $[f_0]$.

Observação 2.2.5. Suponhamos que T contém o fecho central RC de R e que $f_0 \in C[x]$. Então, $Q[x]f_0 \cap T[x] = f_0T[x]$. De fato, dado $g = \sum_{l=0}^{s} a_l x^l \in Q[x]f_0 \cap T[x]$, temos $g = qf_0$ com $q = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in Q[x]$. Considerando $f_0 = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j + x^n$ e igualando os coeficientes segue que $q \in T[x]$, pois $RC \subseteq T$. Então, $g = qf_0 = f_0q \in f_0T[x]$. Por outro lado, se $g \in Q[x]f_0$ então $g \in T[x]f_0$ e também $g \in T[x]$, pois $C[x] \subseteq T[x]$. Logo, $g \in Q[x]f_0 \cap T[x]$. Neste caso fica claro, pelo Corolário 2.2.3, que os ideais principais fechados de $T[x]$ são os ideais do tipo $T[x]f$, onde f é um polinômio mônico satisfazendo $T[x]f = fT[x]$.

Combinando os resultados anteriores com o Corolário 2.1.12 obtemos facilmente os seguintes corolários:

Corolário 2.2.6. *Sejam R um anel primo e T um anel de quocientes à direita de R. Um ideal T-disjunto P de $T[x]$ é primo se e somente se $P = Q[x]f_0 \cap T[x]$, para algum polinômio mônico irredutível $f_0 \in C[x]$.*

Demonstração: Seja P um ideal primo T-disjunto de $T[x]$. Então, pelo Corolário 2.1.12 (i), segue que P é principal fechado e daí, pelo Corolário 2.2.3, sabemos que existe $f_0 \in C[x]$ mônico tal que $P = Q[x]f_0 \cap T[x]$. Agora suponhamos, por absurdo, que f_0 não é irredutível. Então existem $g_1, g_2 \in C[x]$ mônicos tais que $f_0 = g_1g_2$, e consideraremos $\partial g_1 < \partial f_0$. Tomando $I_1 = Q[x]g_1 \cap T[x]$ temos $P \subseteq I_1$. Mas como P é maximal e R-disjunto, pois é primo por hipótese, segue que $P = I_1$, logo $\partial g_1 = \partial f_0$, o que é uma contradição.

Por outro lado, se $P = Q[x]f_0 \cap T[x]$ com $f_0 \in C[x]$ mônico e irredutível, sabemos que P é um ideal principal fechado. Para mostrar que P é primo, pelo Corolário 2.1.12 (ii), basta mostrar que P é maximal no conjunto dos ideais principais fechados de $T[x]$.

Seja $I \lhd T[x]$ principal fechado tal que $P \subseteq I \neq T[x]$. Então, $I = Q[x]g_0 \cap T[x]$ para algum $g_0 \in C[x]$ mônico. Consideremos $q, r \in T[x]$ tais que $f_0 = qg_0 + r$, com $r = 0$ ou $\partial r < \partial g_0$, e um ideal não nulo J de R tal que $f_0 J \subseteq R[x]$ e $qg_0 J \subseteq R[x]$. Então, $rJ = f_0 J - qg_0 J \subseteq I$. Como $Min(I) = \partial g_0$ e $\partial r < \partial g_0$, temos $rJ = 0$, logo $r = 0$. Daí segue que $f_0 = qg_0$, com $q \in T[x]$. Igualando os coeficientes, temos que $q \in C[x]$. Mas como f_0 é irredutível em $C[x]$, devemos ter $q = 1$. Logo, $f_0 = g_0$ e portanto $P = I$. Assim, P é maximal no conjunto dos ideais principais fechados de $T[x]$. ■

Corolário 2.2.7. *Sejam R um anel primo e T um anel de quocientes à direita de R. Então existe uma correspondência biunívoca entre:*

(i) O conjunto de todos os ideais primos R-disjuntos de $R[x]$;

(ii) O conjunto de todos os ideais primos T-disjuntos de $T[x]$;

(iii) O conjunto de todos os ideais maximais de $C[x]$.

Além disso, esta correspondência associa o ideal primo P de $R[x]$ com o ideal P' de $T[x]$ e o ideal maximal M de $C[x]$ tais que $P' \cap R[x] = P$ e $P' = Q[x]M \cap T[x]$.

Demonstração: Basta observarmos as correspondências do Teorema 2.2.1. Sabemos que todo ideal primo R-disjunto ou T-disjunto é um ideal principal fechado, associado com um polinômio mônico irredutível de $C[x]$. Assim, já temos a correspondência entre (i) e (ii). Além disso, os polinômios mônicos de $C[x]$, que pelo Teorema 2.2.1 estão associados aos ideais primos T-disjuntos de $T[x]$, são irredutíveis pelo Corolário 2.2.6. Por fim, também sabemos que polinômios irredutíveis de $C[x]$ estão em correspondência biunívoca com ideais maximais de $C[x]$. ■

2.3 Um Resultado Inédito

O objetivo desta seção é mostrar que, dado um anel R qualquer, é possível encontrar um anel comutativo A tal que os ideais primos de $R[x]$ correspondam com os ideais primos de $A[x]$.

De acordo com o que já foi visto, sabemos que os ideais primos R-disjuntos de $R[x]$ estão em correspondência biunívoca com os ideais primos de $C[x]$, onde C é o centróide estendido de R, conforme já utilizado nas seções anteriores.

Para resolver este problema, vamos tomar $P \lhd' R[x]$, onde $P \cap R = L_P$ (e L_P não é necessariamente nulo). Além disso, consideremos $\overline{R} = R/P \cap R$ e $C_{\overline{R}} = C_P$, com C_P indicando o centróide estendido de $\overline{R}$.

Assim, temos que $(R/L)[x] \simeq R[x]/L[x]$. Por fim, seja $A = \prod\limits_{L \in Spec(R)} C_L$, onde $Spec(R)$ representa o conjunto de todos os ideais primos de R.

O anel A definido acima é claramente comutativo, pois é produto direto dos centróides estendidos de cada $\overline{R}$, e sabemos que o centróide estendido é um corpo. Basta, então, mostrar que para este anel A existe, de fato, uma correspondência biunívoca entre ideais primos de $R[x]$ e ideais primos de $A[x]$. Neste sentido, iniciaremos com o seguinte resultado:

Lema 2.3.1. *Seja* $A = \prod\limits_{i \in \Lambda} A_i$*, onde cada* A_i *é um anel comutativo e* Λ *é um conjunto qualquer de índices. Então,* $A[x] \simeq \prod\limits_{i \in \Lambda} (A_i[x])$*.*

Demonstração: Sabemos que os elementos de A são da forma $a = (a_i)_{i \in \Lambda}$, onde $a_i \in A_i$ para todo $i \in \Lambda$, e vamos mostrar que a função

$$\begin{aligned} \varphi : A[x] &\to \prod_{i \in \Lambda} (A_i[x]) \\ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j &\rightsquigarrow \left(\sum_{j=0}^{n} a_{j,i} x^j \right)_{i \in \Lambda} \end{aligned}$$

é um isomorfismo, onde $a_j = (a_{j,i})_{i\in\Lambda}$.

Em primeiro lugar, observemos que esta aplicação está bem definida, uma vez que a cada elemento de $A[x]$ corresponde um único elemento de $\prod\limits_{i\,\in\,\Lambda}(A_i[x])$.

Agora, consideremos dois elementos quaisquer de $A[x]$. Podemos representá-los por $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $\sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ tomando, por exemplo, $b_j = 0$ quando for necessário.

Assim, com alguns cálculos simples, observamos que:

(i) $\varphi\left(\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j + \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j\right) = \varphi\left(\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j\right) + \varphi\left(\sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j\right)$

Por outro lado, também temos que:

(ii) $\varphi\left(\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j \cdot \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j\right) = \varphi\left(\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \cdot \varphi\left(\sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j\right)$

De fato, supondo (i) é suficiente provarmos que

$$\varphi(a_j x^j \cdot b_l x^l) = \varphi(a_j x^j) \cdot \varphi(b_l x^l)$$

Para isto, basta vermos que

$\varphi(a_j x^j \cdot b_l x^l) = \varphi(a_j b_l x^{j+l}) = (a_{j,i} b_{l,i} x^{j+l})_{i\in\Lambda} = (a_{j,i} x^j)_{i\in\Lambda} \cdot (b_{l,i} x^l)_{i\in\Lambda} =$

$= \varphi(a_j x^j) \cdot \varphi(b_l x^l)$

Além disso,

(iii) φ é injetiva

Suponhamos que o elemento $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j \in A[x]$ é tal que $\varphi\left(\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j\right) = 0$, ou seja, $\left(\sum\limits_{j=0}^{n} a_{j,i} x^j\right)_{i\in\,\Lambda} = 0$. Para que isto aconteça, devemos ter $a_{j,i} = 0$, $\forall i \in \Lambda$, isto é, $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j = \sum\limits_{j=0}^{n} (a_{j,i})_{i\in\,\Lambda} x^j = 0$. Logo, φ é injetiva.

(iv) *φ é sobrejetiva*

Considerando um elemento qualquer $\left(\sum_{j=1}^{n} b_{j,i}x^j\right)_{i\in\Lambda}$ de $\prod_{i\,\in\,\Lambda}(A_i[x])$, basta tomarmos cada $b_{j,i}$ para formar um elemento $a_j = (b_{j,i})_{i\in\Lambda}$ de A, de forma que dado um elemento de $\prod_{i\,\in\,\Lambda}(A_i[x])$ temos um correspondente $\sum_{j=1}^{n} a_jx^j \in A[x]$ de tal forma que $\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} a_jx^j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{j,i}x^j\right)_{i\,\in\,\Lambda}$. Logo, φ é sobrejetiva.

De (i), (ii), (iii) e (iv), φ é um isomorfismo. ■

Lema 2.3.2. *Considerando o anel A do lema anterior, temos:*
(i) Se J é um ideal primo de A, então existe i_0 tal que $J = \prod_{i\in\Lambda} J_i$, onde $J_i = A_i$ se $i \neq i_0$ e $J_{i_0} \lhd' A_{i_0}$.
(ii) Se todos os $A_i's$ são corpos, então qualquer ideal de $A[x]$ é principal.

Demonstração: (i) Inicialmente observemos que, se estivermos trabalhando com um anel que é produto direto, como é o caso de A, todos os ideais são da forma $J = \prod_{i\in\Lambda} J_i$, onde cada J_i é um ideal de cada anel componente do produto direto ([10], exercício 1 da página 57). Além disso, sabemos que

$$J \lhd' A \Leftrightarrow A/J \text{ é um anel primo}$$

Agora, dado $i_0 \in \Lambda$, consideremos

$$J = \prod_{i\in\Lambda} J_i, \text{ onde } J_i = A_i \text{ se } i \neq i_0 \text{ e } J_{i_0} \lhd' A_{i_0}$$

Em primeiro lugar, observemos que este J é um ideal primo pois, neste caso, temos:

$$A/J \simeq \prod_{i\in\Lambda} B_i, \text{ onde } B_i = 0 \text{ se } i \neq i_0 \text{ e } B_{i_0} = A_{i_0}/J_{i_0}$$

Assim, A/J é um anel primo, pois B_{i_0} é primo.

Agora, para provar que estes são os únicos ideais primos de A, vamos considerar um ideal

$J = \prod_{i \,\in\, \Lambda} J_i$, com $J_i = A_i$, se $i \in \Omega$, e $J_i \lhd' A_i$, se $i \in \gamma$, onde Ω e γ são dois conjuntos disjuntos e tais que $\Omega \cup \gamma = \Lambda$

Neste caso, temos que

$$A/J = \prod_{i \,\in\, \Lambda} B_i, \text{ onde } B_i = 0, \text{ se } i \in \Omega, \text{ e } B_i = A_i/J_i, \text{ se } i \in \gamma$$

Mas este anel não é primo, uma vez que possui dois ideais não nulos cujo produto é zero. Para ver isto, basta tomarmos

$$I_1 = \prod_{i \in \Lambda} I_i, \text{ onde } I_i = 0 \text{ para } i \neq i_0 \text{ e } I_{i_0} \lhd A_{i_0}/J_{i_0}$$
$$I_2 = \prod_{i \in \Lambda} I_i, \text{ onde } I_i = 0 \text{ para } i \neq i_1 \text{ e } I_{i_1} \lhd A_{i_1}/J_{i_1}$$

Assim, temos que $I_1 I_2 = 0$ com $I_1 \neq 0$ e $I_2 \neq 0$.

(ii) Sabemos, do Lema 2.3.1, que $A[x] \simeq \prod_{i \in \Lambda}(A_i[x])$. Supondo que os $A_i's$ são todos corpos, temos que se J_i é um ideal de $A_i[x]$ então J_i é principal. Além disso, os ideais de $A[x]$ são todos da forma $J = \prod_{i \in \Lambda} J_i$, onde J_i é ideal de $A_i[x]$. Sendo assim, cada J_i é um ideal principal, e portanto J é principal. De fato, se $J_i = f_i A_i[x],\ f_i \in A_i[x]$, então J é o ideal principal gerado por $(f_i)_{i \in \Lambda}$. ■

A partir desses lemas, obtemos facilmente o seguinte corolário:

Corolário 2.3.3. *Considerando* $A[x] = \prod_{L \in Spec(R)} C_L[x]$, *temos que se* P' *é um ideal primo de* $A[x]$ *então existe* i_0 *tal que* $P' = (D_i)_{i \in \Omega}$, *onde* $\Omega = Spec(R)$, $D_j = C_{L_j}[x]$, *se* $i \neq i_0$ *e* $D_{i_0} \lhd' C_{L_{i_0}}[x]$.

Por fim, podemos provar o seguinte teorema, que é o resultado mais importante desta seção:

Teorema 2.3.4. *Existe uma correspondência biunívoca entre os ideais primos de $R[x]$ e os ideais primos de $A[x]$.*

Demonstração: Queremos mostrar que existe uma correspondência biunívoca entre os ideais primos de $R[x]$ e os ideais primos de $\displaystyle\prod_{L\in Spec(R)} C_L[x]$.

Para isso, consideremos $P \lhd' R[x]$ de forma que $P \cap R = L \lhd' R$. A este P, vamos associar $P^* \lhd' \displaystyle\prod_{L\in Spec(R)} C_L[x]$. Mas já sabemos, pelo Corolário 2.3.3, que P^* é da forma $P^* = \left(\displaystyle\prod_{F\in\,\Omega} J_F\right)$, onde $J_F = C_F[x]$, para $F \in \Omega$, exceto para $F = L$, pois neste caso $J_L = P_0 \lhd' C_L[x]$.

Resta provar que esta correspondência é biunívoca.

De fato, a cada $P \lhd' R[x]$ podemos associar um único $P_0 \lhd' C_L[x]$, de acordo com o que foi mostrado em [4]. Daí segue diretamente que a correspondência é um a um, encerrando a demonstração do teorema. ■

Capítulo 3

Ideais Primos e Fechados em Extensões Livres Centralizantes

Para este capítulo, teremos como base o que foi apresentado em [5]. Inicialmente, chamamos a atenção para as notações e terminologias que serão usadas ao longo do capítulo.

Mais uma vez, o anel R será considerado, exceto quando dito em contrário, um anel primo.

Denotaremos uma extensão livre centralizante por $S = R[E]$, onde $E = (e_i)_{i\in\Omega}$ é uma base R-centralizante, isto é, $S = \sum_{i\in\Omega} \oplus Re_i$, $xe_i = e_i x$ para quaisquer $x \in R$, $i \in \Omega$, e existe $i_0 \in \Omega$ tal que $e_{i_0} = 1$. Então, qualquer $a \in S = R[E]$ pode ser escrito como uma soma finita unívoca $a = \sum_{i\in\Omega} a_i e_i$, onde $a_i \in R$. O e-ésimo coeficiente de a será denotado por $a(e)$, isto é, para o elemento a dado acima, temos $a(e_i) = a_i$, para todo $i \in \Omega$. O *suporte de a* será definido por $supp(a) = \{e \in E : a(e) \neq 0\}$.

Se I é um ideal R-disjunto de S, um elemento não nulo $a \in I$ será dito de *suporte mínimo* de I se para todo $b \in I$ com $supp(b) \subsetneq supp(a)$ temos $b = 0$.

Denotaremos por $M(I)$ o conjunto de todos os elementos de suporte mínimo de I. A minimalidade de I é definida por $Min(I) = \{supp(a) : a \in M(I)\}$.

Para $\Gamma \in Min(I)$ e $e \in \Gamma$, vamos denotar por $\Theta_{\Gamma,e}(I)$ o ideal de R definido por $\Theta_{\Gamma,e}(I) = \{x \in R : \text{existe } b \in I \text{ com } supp(b) = \Gamma \text{ e } b(e) = x\} \cup \{0\}$.

3.1 Ideais Fechados

Ao longo desta seção, R é um anel primo. Para um ideal R-disjunto I de S, definimos

$$[I]_R = \{b \in S : \text{existe } 0 \neq H \lhd R \text{ tal que } bH \subseteq I\}$$

Iremos omitir o R subescrito quando estiver claro no contexto. Começaremos com o seguinte resultado:

Lema 3.1.1. *Seja I um ideal R-disjunto de S. Então $[I]$ é um ideal R-disjunto de S que satisfaz $I \subseteq [I]$ e $Min([I]) = Min(I)$.*

Demonstração: É fácil ver que $[I]$ é um ideal de S que contém I e que $[I]$ é R-disjunto. De fato, se $[I] \cap R \neq 0$, temos que para algum $0 \neq b \in R$, existe $0 \neq H \lhd R$ tal que $bH \subseteq I$. Como I é R-disjunto, temos que $b = 0$, pois R é primo.

Agora, resta mostrar que $Min(I) = Min([I])$.

Suponhamos que $\Gamma \in Min(I)$. Então, existe $0 \neq a \in M(I)$ de forma que $supp(a) = \Gamma$. Além disso, $a \in [I]$, pois $a \in M(I) \subseteq I \subseteq [I]$. Agora, seja $b \in I$ tal que $supp(b) \subsetneq \Gamma$. Então, existe um ideal não nulo H de R tal que $bH \subseteq I$. Como $supp(bx) \subseteq supp(b) \subsetneq \Gamma$ para todo $x \in H$, segue que $bH = 0$, pois Γ é um suporte mínimo em I, então como $supp(bx) \subsetneq \Gamma$, temos $bx = 0$. Logo, $b = 0$, já que R é primo. Assim, $a \in M([I])$ e portanto $\Gamma \in Min([I])$.

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma \in Min([I])$. Então, existe $a \in M([I])$ tal que $supp(a) = \Gamma$. Além disso, $a \in [I]$, pois $M([I]) \subseteq [I]$. Da mesma forma que no caso anterior, temos que para qualquer $x \in H$, $supp(ax) \subseteq supp(a)$.

Como $a \in M([I])$ e $ax \in I \subseteq [I]$ para cada $x \in H$, segue que $supp(ax) = supp(a)$ ou $supp(ax) = \emptyset$, ou seja, $ax = 0$. Mas como R é primo, $aH \neq 0$, e portanto existe $x \in H$ tal que $ax \neq 0$ e $supp(ax) = supp(a) = \Gamma$. Assim, $\Gamma \in Min(I)$, logo $Min(I) = Min([I])$. ■

Definição 3.1.2. *Um ideal R-disjunto I de S é dito* fechado *se $[I] = I$.*

Teorema 3.1.3. *Para um ideal R-disjunto I de S, $[I]$ é o maior ideal J de S que contém I e satisfaz $Min(J) = Min(I)$. Além disso, $[I]$ é fechado e também é o menor ideal fechado de S que contém I. Em particular, $[I]$ é o único ideal fechado de S que contém I e satisfaz $Min([I]) = Min(I)$.*

Demonstração: Seja J um ideal R-disjunto de S com $I \subseteq J$ e $Min(J) = Min(I)$. Vamos tomar $\Gamma = \{e_1, ..., e_n\} \in Min(J)$ e escolher $0 \neq a = a_1e_1 + ... + a_ne_n \in I$ com $supp(a) = \Gamma$. Se $b = b_1e_1 + ... + b_ne_n \in J$ temos $bxa_1 - b_1xa \in J$, para todo $x \in R$, e $supp(bxa_1 - b_1xa) \subsetneq \Gamma$. Assim, $bxa_1 - b_1xa = 0$, pois $\Gamma \in Min(J)$, e portanto $bxa_1 = b_1xa$. Mas $b_1xa \in I$, então $bxa_1 \in I$. Daí segue que $bRa_1R \subseteq I$. Consequentemente, existe um ideal não nulo $H = Ra_1R$ de R tal que $bH \subseteq I$, para todo $b \in J$ com $supp(b) = \Gamma$. Isto mostra que $b \in [I]$.

Agora suponhamos que $\Gamma = \{e_1, ..., e_t\}$ é um subconjunto finito de E. Usaremos indução para provar que existe $0 \neq H \lhd R$ tal que $bH \subseteq I$ para qualquer $b \in J$ com $supp(b) \subseteq \Gamma$. De fato, se $t = 1$ a afirmação segue da primeira parte, pois daí certamente teremos $\Gamma \in Min(J)$. Assim, podemos supor que $t > 1$ e que existe $c \in M(I)$ com $supp(c) \subsetneq \Gamma$, digamos, $c = c_1e_1 + ... + c_ne_n$, $n < t$. Mas, pela hipótese de indução, existe um ideal não nulo F de R tal que $dF \subseteq I$ para todo $d \in J$ com $supp(d) \subseteq \{e_2, ..., e_t\}$. Seja $b = b_1e_1 + ... + b_te_t \in J$. Se $b_1 \neq 0$, tomamos

$d_x = bxc_1 - b_1xc \in J$, $x \in R$. Como $supp(d_x) \subseteq \{e_2, ..., e_t\}$ temos, pela hipótese de indução, que $d_xF \subseteq I$, e consequentemente $bxc_1F \subseteq I$. O mesmo vale se $b_1 = 0$ pois, neste caso, $supp(b) \subseteq \{e_2, ..., e_t\}$ e daí pelo que foi feito acima temos $d_xF \subseteq I$ com $d_x = bxc_1$. Logo, $bRc_1F \subseteq I$ e portanto $b \in [I]$, de onde segue que $J \subseteq [I]$. A primeira parte, então, está demonstrada.

Agora, pelo Lema 3.1.1, temos que $Min(I) = Min([I]) = Min([[I]])$ e então, pela primeira parte deste teorema e sabendo que $I \subseteq [I] \subseteq [[I]]$, temos $[I] = [[I]]$, isto é, $[I]$ é fechado. Além disso, se L é um ideal fechado com $I \subseteq L \subseteq [I]$ e $b \in [I]$ então $bH \subseteq I \subseteq L$, para $0 \neq H \lhd R$. Logo, $b \in [L] = L$, já que L é fechado, e então $L = [I]$. Assim, $[I]$ é o menor possível. Mas já vimos que também é o maior possível, logo $[I]$ é o único ideal que satisfaz as condições deste teorema. ■

Observação 3.1.4. É fácil ver que todo ideal primo R-disjunto de S é fechado.

Demonstração: Sejam P um ideal primo R-disjunto de S e $b \in [P]$. Então, existe $0 \neq H \lhd R$ tal que $bH \subseteq P$ e portanto $bHS \subseteq P$. Como S é uma extensão livre centralizante de R, segue que $HS \lhd S$. De fato, claramente temos que $0 \in HS$ e que HS é fechado com relação à subtração e multilplicação. Agora, tomando $h\sum_i r_ie_i \in HS$ e $e \in S$, temos que $eh\sum_i r_ie_i = he\sum_i r_ie_i \in HS$, e portanto $HS \lhd S$.

Por outro lado, como $HS \nsubseteq P$, temos que $b \in P$, pois P é primo. Daí segue que $P = [P]$.

Observação 3.1.5. Podemos definir I de maneira dual:

$$[I]' = \{b \in S : \text{existe } 0 \neq H \lhd R \text{ tal que } Hb \subseteq I\}$$

É possível provar, como antes, que $[I]'$ é o maior ideal J de S que contém I e satisfaz $Min(J) = Min(I)$. Daí segue que $[I]' = [I]$, pelo Teorema 3.1.3.

Corolário 3.1.6. *Sejam I e J ideais R-disjuntos de S e seja L um ideal de S.*

(i) Se $I \subseteq J$ então $[I] \subseteq [J]$

(ii) Se $I \subseteq J$ e $Min(I) = Min(J)$ então $[I] = [J]$

(iii) Se I é fechado, $L \supseteq I$ e $Min(L) = Min(I)$ então $I = L$

Demonstração: (i) Se $I \subseteq J$, como sabemos que $J \subseteq [J]$, temos que $I \subseteq [J]$. Mas $[J]$ é um ideal fechado, e já vimos que $[I]$ é o menor ideal fechado que contém I. Logo $[I] \subseteq [J]$.

(ii) Sabemos que $I \subseteq J \subseteq [J]$ e $Min([J]) = Min(J) = Min(I)$. Logo $[I] = [J]$, pelo Teorema 3.1.3.

(iii) Segue de (ii). ■

Sabemos que um ideal primo R-disjunto do anel de polinômios $R[x]$ não é necessariamente gerado por seus polinômios de grau mínimo (mesmo tomando R um domínio comutativo). Mas já mostramos, no Capítulo 2, que um ideal primo R-disjunto e, mais geralmente, um ideal fechado I, é determinado por apenas um dos polinômios de grau mínimo de I. De fato, se f é tal polinômio e a é seu coeficiente líder, temos:

$$I = [f] = \{g \in R[x] : \text{existe } 0 \neq H \lhd R \text{ com } gHa \subseteq R[x]f\}$$

Agora, provaremos que o fecho $[I]$ de um ideal R-disjunto I de S é também determinado por $M(I)$. Para isto, consideremos

$$\bar{I} = \{b \in S : \text{existe } 0 \neq H \lhd R \text{ com } bH \subseteq SM(I)\}$$

e

$$\bar{\bar{I}} = \{b \in S : \text{existe } 0 \neq H \lhd R \text{ com } bH \subseteq RM(I)\}$$

Corolário 3.1.7. *Seja I um ideal R-disjunto de S. Então* $[I] = \bar{I} = \bar{\bar{I}}$.

Demonstração: É claro que $\bar{\bar{I}} \subseteq \bar{I} \subseteq [I]$, pois $RM(I) \subseteq SM(I) \subseteq I$. Agora, queremos mostrar as inclusões contrárias.

Seja $a \in [I]$ com $supp(a) \in Min(I)$. Então, $bH \subseteq I$ para todo $b \in [I]$ com $supp(b) = supp(a)$, onde $0 \neq H \lhd R$. Daí segue que $bH \subseteq M(I) \cup \{0\} \subseteq RM(I)$. De fato, dados $b = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$ e $h \in H$, temos $bh = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i h = \sum_{i=1}^{n} b_i h e_i \in I$. Assim, $bh = 0$ ou $supp(bh) \subseteq supp(b)$ e portanto $bh \in M(I)$. Logo, $b \in \bar{\bar{I}}$.

Da mesma maneira que na prova do Teorema 3.1.3, podemos mostrar que para qualquer subconjunto finito Γ de E existe $0 \neq F \lhd R$ tal que $cF \subseteq RM(I)$, para todo $c \in [I]$ com $supp(c) \subseteq \Gamma$. Daí segue que $[I] \subseteq \bar{\bar{I}}$ e a prova está completa. De fato, como $\bar{\bar{I}} \subseteq \bar{I} \subseteq [I]$ e $[I] \subseteq \bar{\bar{I}}$, os conjuntos são todos iguais. ■

Observação 3.1.8. Seja I um ideal R-disjunto do anel de polinômios $R[x]$ e $f \in I$ um polinômio de I de grau mínimo. Então o fecho $[I]$ de I como foi definido aqui é igual a $[f]$ definido no capítulo anterior.

Demonstração: Seja $g \in [f]$. Então existe $0 \neq H \lhd R$ tal que $gHa \subseteq R[x]f \subseteq I$ pois $f \in I$, onde $a = lc(f)$. Consequentemente, $gHaR \subseteq I$ e portanto $g \in [I]$. Logo, $[f] \subseteq [I]$. Além disso, sabendo que $Min([I]) = Min(I)$, e que $[I]$ é o único ideal principal fechado de $R[x]$ que satisfaz essa condição, segue diretamente que $[f] = [I]$. ■

Como consequência imediata dos resultados anteriores, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.1.9. (i) $[I] \subseteq [J]$ *se e somente se* $M(I) \subseteq [J]$

(ii) $[I] = [J]$ *se e somente se* $M(I) \subseteq [J]$ *e* $M(J) \subseteq [I]$

Demonstração: Para a parte (ii), basta aplicar duas vezes a parte (i) (para I e para J). Vamos, então, demonstrar (i):

$\Rightarrow$) Como $M(I) \subseteq I \subseteq [I] \subseteq [J]$, segue diretamente que $M(I) \subseteq [J]$.

$\Leftarrow$) Suponhamos que $M(I) \subseteq [J]$. Pelo corolário anterior, segue que $[I] \subseteq [J]$, já que $[I] = \bar{I} = \bar{\bar{I}}$ para $\bar{I}$ e $\bar{\bar{I}}$ definidos anteriormente. ■

Podemos observar que o centralizador de R em S é um subanel $V_S(R)$ de S e é igual a $C_R[E]$, onde C_R é o centro de R. Para um anel simples, temos:

Teorema 3.1.10. *Seja R um anel simples. Então todo ideal de S é fechado e gerado por elementos de $C_R[E]$.*

Demonstração: Seja I um ideal não nulo de S. Então $I \cap R = 0$ e tomando $b \in [I]$ temos necessariamente $bR \subseteq I$, pois R é simples, e então $b \in I$. Logo, I é fechado.

Agora, consideremos $N = C_R[E] \cap M(I)$. Vamos provar que $I = SN = RN$.

Sejam $a = a_1e_1 + ... + a_ne_n \in M(I)$ e $\Gamma = \{e_1, ..., e_n\} = supp(a)$. Então, como $\Theta_{\Gamma,e_1}(I) \lhd R$ e R é simples, temos $\Theta_{\Gamma,e_1}(I) = R$, e portanto obtemos um elemento $a' \in M(I)$ com $supp(a') = \Gamma$ e $a'(e_1) = 1$. Daí segue facilmente que $a' \in C_R[E]$ e $a = a(e_1)a' \in RN$. Consequentemente, $M(I) \subseteq RN$, pois $a \in M(I)$.

Por outro lado, se b é um elemento de I, pelo Corolário 3.1.7, podemos afirmar que $b \in RM(I) \subseteq RN$, então $I \subseteq RN \subseteq SN \subseteq I$. Logo, $I = SN = RN$ e, pela definição de N, temos que I é gerado por elementos de $C_R[E]$. ■

Corolário 3.1.11. *Seja R um anel simples. Então existe uma correspondência um a um, via contração, entre o conjunto de todos os ideais de S e o conjunto de todos os ideais de $C_R[E]$. Esta correspondência preserva ideais primos.*

Demonstração: Seja I um ideal de S. Então, $I \cap C_R[E]$ é um ideal de $C_R[E]$ e $I \supseteq R(I \cap C_R[E]) \supseteq R(M(I) \cap C_R[E]) = I$. Logo, $I = R(I \cap C_R[E])$.

Agora, seja K um ideal de $C_R[E]$. Temos que RK é um ideal de S, e provaremos que $RK \cap C_R[E] = K$. A partir deste fato, a correspondência um a um é imediata. Claramente, temos que $K \subseteq RK \cap C_R[E] = K_1$, pois K é ideal de $C_R[E]$ e $K \subseteq RK$.

Vamos tomar uma base $(v_j)_{j\in\Lambda}$ de K sobre C_R e assumir que existe $v \in K_1$ de modo que $V = \{v_j : j \in \Lambda\} \cup \{v\}$ é um conjunto C_R - independente. Já que $R[E] \simeq R \otimes_{C_R} C_R[E]$, V é também um subconjunto R-independente de $R[E]$. Mas $v \in RK$, pois $v \in K_1 = RK \cap C_R[E]$, e então $v = \sum_t x_t k_t$, $x_t \in R$, $k_t \in K$. Escrevendo cada k_t como combinação linear de elementos v_j obtemos uma relação do tipo $v = \sum_{j\in\Lambda} \left(\sum_t x_t c_{jt} \right) v_j$, $c_{jt} \in C_R$. Daí segue que V não é um conjunto R-independente, uma contradição.

A correspondência entre ideais primos seguirá do Teorema 3.2.7. ∎

3.2 Extensão e Contração de Ideais Primos e Fechados

Nesta seção, R é novamente um anel primo, $S = R[E]$ é uma extensão livre centralizante de R, Q é o anel de quocientes de Martindale de R, T é um anel de quocientes de R e C o centróide estendido de R. Para as propriedades básicas que serão necessárias aqui, usaremos as Proposições 1.2.2 e 1.2.3.

Como o centralizador de R em S é um subanel $V_S(R) = C_R[E]$, $Q \otimes_{C_R} C_R[E]$ é um anel contendo Q e S. Também $Q \otimes_{C_R} C_R[E]$ é uma extensão livre centralizante de Q com a mesma base E, identificando e com $1 \otimes e$, para cada $e \in E$. Denotaremos esta extensão por $Q[E]$. Consequentemente, podemos considerar $S = R[E] \subseteq Q[E]$ e também $C[E] = C \otimes_{C_R} C_R[E] = V_{Q[E]}(Q) \subseteq Q[E]$.

Finalmente, se T é um anel de quocientes de R, $T[E]$ é um subanel de $Q[E]$.

Lema 3.2.1. *Sejam I um ideal R-disjunto de S, $\Gamma \in Min(I)$ e $e \in \Gamma$. Então existe um único elemento $m_{\Gamma,e} \in C[E]$ tal que para todo $a \in I$ com $supp(a) = \Gamma$, temos $a = m_{\Gamma,e} a(e) = a(e) m_{\Gamma,e}$. Além disso, $supp(m_{\Gamma,e}) = \Gamma$ e $m_{\Gamma,e}(e) = 1$.*

Demonstração: Consideremos $J = \Theta_{\Gamma,e}(I) \lhd R$ e $\Gamma = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, onde $e_1 = e$. Se $x \in J$ então existe um único $a = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in I$ com $x_1 = x$ e $x_i \in R$, $i = 1, 2, ..., n$. Assim, a aplicação $\alpha_i : J \to R$, definida por $\alpha_i(x) = x_i$, é uma aplicação bem definida de R-bimódulos. Logo, existe $c_i \in C$ com $c_i x = x_i$, para $i = 1, 2, ..., n$, onde $c_1 = 1$, pois sabemos que $\alpha_i(x) = c_i x$.

Vamos considerar agora $m_{\Gamma,e} = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$. Vemos facilmente que $m_{\Gamma,e}$ satisfaz as requeridas condições. De fato, temos: $m_{\Gamma,e} \in C[E]$, pois $c_i \in C$, $supp(m_{\Gamma,e}) = \Gamma$ e $m_{\Gamma,e}(e) = c_1 = 1$, pois $e = e_1$. Além disso, dado $a \in I$ com $supp(a) = \Gamma$, temos que $m_{\Gamma,e}a(e) = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i x = \sum_{i=1}^{n} c_i x e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = a$. Analogamente, $a(e)m_{\Gamma,e} = a$ e assim a prova está completa. ■

Dado um ideal R-disjunto de S, denotaremos por $M_C(I)$ o conjunto de todos os elementos $m_{\Gamma,e}$ construídos no Lema 3.2.1, onde $\Gamma \in Min(I)$ e $e \in \Gamma$. Então $M_C(I) \subseteq C[E]$, e para todo $m \in M_C(I)$ temos que m é do tipo $m_{\Gamma,e}$, isto é, para qualquer $a \in I$ tal que $supp(a) = \Gamma$ segue que $a = m_{\Gamma,e}a(e) = a(e)m_{\Gamma,e}$. Assim, tomando $H = \Theta_{\Gamma,e}(I)$ e dado $x \in H$, por definição de $\Theta_{\Gamma,e}$, existe $b \in I$ tal que $supp(b) = \Gamma$ e $b(e) = x$. Logo, $m_{\Gamma,e}x = xm_{\Gamma,e} = b \in I$, portanto $mH = Hm \subseteq I$.

A seguir, apresentamos um lema que define um processo de divisão em nosso presente caso.

Primeiramente, consideremos T um anel de quocientes à direita de R e seja I um ideal T-disjunto de $T[E]$. Um elemento $0 \neq b \in Q[E]$ é dito um *resto módulo I* se para todo $a \in I$ com $supp(a) \subsetneq supp(b)$ temos $a = 0$.

Seja I um ideal T-disjunto de $T[E]$. Denotemos por $[I]_T$ o ideal definido como no início da seção anterior para $T = R$ e tomemos $I_0 = I \cap R[E]$. Então I_0 é claramente um ideal não nulo R-disjunto de $R[E]$ e $Min(I_0) = Min(I)$. Também $M_C(I_0)$ é definido como antes. Usando esta notação, temos:

Lema 3.2.2. *Com a notação acima, seja $b \in Q[E]$. Então existem elementos $q_i \in Q$, $m_i \in M_C(I_0)$, $i = 1, 2, ..., m$ e $r \in Q[E]$ tais que $b = \sum_{i=1}^{n} q_i m_i + r$, onde $r = 0$ ou r é um resto módulo I. Além disso, se $b \in T[E]$, podemos escolher $q_i \in TC$ e $r \in TC[E]$.*

Demonstração: Se b é um resto módulo I, não há o que provar. De fato, neste caso basta tomarmos, por exemplo, $q_i = 0$ para qualquer i e teremos $b = r$.

Suponhamos que b não é um resto módulo I. Consideremos $\Gamma = supp(b)$ e $|\Gamma| = t$, onde $|\Gamma|$ representa a cardinalidade do conjunto Γ. Então existe $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, com $\Gamma_1 \neq \emptyset$, tal que $\Gamma_1 \in Min(I) = Min(I_0)$. Tomemos $e_1 \in \Gamma_1$ e vamos escrever $m_1 = m_{\Gamma_1, e_1} \in M_C(I_0)$. Assim, $c_1 = b - b(e_1)m_1$ satisfaz $c_1(e_1) = b(e_1) - b(e_1) = 0$, pois $m_1(e_1) = 1$, e então $|supp(c_1)| \leq t - 1$.

Se c_1 for um resto módulo I, a demonstração está pronta pois, neste caso, temos $b = b(e_1)m_1 + c_1$ e basta tomar $q_1 = b(e_1)$. Se não, repetimos o argumento começando com c_1. Continuando desta maneira, obtemos $q_1 = b(e_1)$, $q_2, ..., q_j$ em T, $m_1, ..., m_j$ em $M_C(I_0)$ tais que $|supp(c_j)| \leq t - j$, onde $c_j = b - \sum_{i-1}^{j} q_i m_i$. Agora fica claro que este processo termina quando algum c_n é zero ou é um resto módulo I. Observemos, ainda, que se $b \in T[E]$ então $b(e_1) \in T \subseteq TC$ e $m_1 \in TC[E]$, pois $c_1 = b - b(e_1)m_1$ e sabemos que $b \in T[E]$, $b(e_1) \in T \subseteq TC$ e $m_1 \in C[E]$. Por indução, obtemos que $q_i \in TC$, $i = 1, 2, ..., n$, e então $r \in TC[E]$. ■

Lema 3.2.3. *Usando a mesma notação anterior, temos:*

(i) $b \in QM_C(I_0)$ se e somente se existe um ideal não nulo J de R tal que $bJ \subseteq I_0$

(ii) $Q[E]M_C(I_0) = QM_C(I_0)$ é um ideal de $Q[E]$

Demonstração: (i) Suponhamos que $b \in QM_C(I_0)$, ou seja, pelo que vimos no lema anterior, $b = \sum_{i=1}^{n} q_i m_i$, $q_i \in Q$, $m_i \in M_C(I_0)$, $i = 1, ..., n$. Então existem ideais não nulos F e H de R tais que $q_i F \subseteq R$ e $m_i H \subseteq I_0$, $i = 1, ..., n$. Logo, $bFH \subseteq I_0$ e FH é um ideal não nulo de R.

Reciprocamente, vamos escrever $b = \sum_{j=1}^{t} q'_j m'_j + r$, onde $q'_j \in Q$, $m'_j \in M_C(I_0)$, $j = 1, ..., t$ e $r = 0$ ou r é um resto módulo m. Suponhamos que existe um ideal não nulo J de R com $bJ \subseteq I_0$. Também temos $\left(\sum_{j=1}^{t} q'_j m'_j\right) J' \subseteq I_0$ para um ideal não nulo J' de R, como visto anteriormente. Então, $r(J \cap J') \subseteq I_0$, pois $r = b - \sum_{j=1}^{t} q'_j m'_j$, e portanto $r = 0$. Logo, $b \in QM_C(I_0)$.

(ii) Sejam $e \in E$, $m \in M_C(I_0)$ e $q \in Q$. Então, existe um ideal não nulo H de R tal que $emH \subseteq eI_0 \subseteq I_0$ e $meH = mHe \subseteq I_0 e \subseteq I_0$, uma vez que $eH = He$, pois e é elemento da base centralizante. Pelo item anterior, temos que $em, me \in QM_C(I_0)$, já que $emH \subseteq I_0$ e $meH \subseteq I_0$. Assim, $qem, meq \in QM_C(I_0)$ e, por distributividade, obtemos $Q[E]M_C(I_0) \subseteq QM_C(I_0)$. Como a inclusão contrária é trivial, temos $Q[E]M_C(I_0) = QM_C(I_0)$. O resto é imediato. ■

Corolário 3.2.4. *Com a mesma notação anterior, temos:*
(i) $[I]_T$ *coincide com o conjunto de todos os* $b \in T[E]$ *para os quais existe um ideal não nulo* J *de* R *com* $bJ \subseteq I_0$
(ii) $[I]_T = Q[E]M_C(I_0) \cap T[E]$

Demonstração: Seja $b \in T[E]$ e suponhamos que existe um ideal não nulo J de R com $bJ \subseteq I_0$. Então $b \in QM_C(I_0) \cap T[E] = Q[E]M_C(I_0) \cap T[E]$, pelo Lema 3.2.3.

Por outro lado, se $b \in Q[E]M_C(I_0) \cap T[E]$, então $b = \sum_{i=1}^{n} q_i m_i$, onde $q_i \in TC$, $m_i \in M_C(I_0)$, $i = 1, ..., n$. De fato, pelo Lema 3.2.2, como $b \in T[E]$, podemos escolher $q_i \in TC$. Além disso, assim como na prova do Lema 3.2.3(i), podemos facilmente obter que $bH \subseteq I$ para um ideal não nulo H de T. Logo, $b \in [I]_T$.

Finalmente, se $b \in [I]_T$ obtemos também, como na prova do Lema 3.2.3(i), que $b \in QM_C(I_0)$. Então existe um ideal não nulo J de R com $bJ \subseteq I_0$. Isto completa a prova. ■

Agora, podemos obter um dos resultados mais importantes desta seção, que é a correspondência entre os ideais de $C[E]$ e os ideais fechados de $R[E]$ e de $T[E]$, para T um anel de quocientes à direita de R.

Teorema 3.2.5. *Sejam R um anel primo e T um anel de quocientes à direita de R. Então existe uma correspondência biunívoca entre:*

(i) O conjunto de todos os ideais fechados de $R[E]$

(ii) O conjunto de todos os ideais fechados de $T[E]$

(iii) O conjunto de todos os ideais de $C[E]$

Além disso, esta correspondência associa o ideal fechado I de $R[E]$ com o ideal fechado I^* de $T[E]$ e o ideal K de $C[E]$ se $I^* \cap R[E] = I$ e $I^* = Q[E]K \cap T[E]$.

Demonstração: Se J é um ideal fechado de $T[E]$ e $J_0 = J \cap R[E]$, então sabemos que $J = Q[E]M_C(J_0) \cap T[E]$ e $[J_0]_R = Q[E]M_C(J_0) \cap R[E] = J \cap R[E]$, pelo Corolário 3.2.4. Então, J_0 é fechado. Se J' é outro ideal fechado com $J_0 = J' \cap R[E]$, pelo mesmo corolário, temos $J' = Q[E]M_C(J_0) \cap T[E]$ e $[J_0]_R = Q[E]M_C(J_0) \cap R[E] = J' \cap R[E]$, logo $J = J'$.

Por outro lado, seja I um ideal fechado de $R[E]$. Então, $L = Q[E]M_C(I) \cap T[E]$ é um ideal de $T[E]$ e $L_0 = L \cap R[E] = [I]_R = I$, pois I é fechado. Novamente pelo Corolário 3.2.4, $[L] = Q[E]M_C(L_0) \cap T[E] = L$, logo L é fechado e satisfaz $L \cap R[E] = I$. Isto estabelece a correspondência entre (i) e (ii).

Para completar a prova, é suficiente mostrar a correspondência biunívoca entre (ii) e (iii) para $T = Q$.

Se I é um ideal fechado de $Q[E]$, então $I = Q[E]M_C(I_0)$, onde $I_0 = I \cap R[E]$. Então $I \cap C[E]$ é um ideal de $C[E]$, e como $M_C(I_0) \subseteq I \cap C[E]$, podemos concluir que $I \supseteq Q[E](I \cap C[E]) \supseteq Q[E]M_C(I_0) = I$. Consequentemente, $I = Q[E](I \cap C[E])$.

Reciprocamente, seja K um ideal de $C[E]$ e tomemos $J = Q[E]K$. Basta mostrarmos que $M_C(J_0) \subseteq K$ e então $[J] = Q[E]M_C(J_0) \subseteq Q[E]K = J$, e portanto

$[J] = J$, ou seja, J é um ideal fechado de $Q[E]$.

Suponhamos por absurdo que $M_C(J_0) \nsubseteq K$. Seja $m \in M_C(J_0)$ tal que $m \notin K$. Sabemos que $Q[E] = Q \otimes_C C[E]$. Consideremos $\{v_i\}_{i\in\Omega}$ uma base de K sobre C. Temos que $m \in C[E]$ e $\{v_i\}_{i\in\Omega} \cup \{m\}$ é um conjunto C-independente, pois $m \notin K$. Logo, $\{v_i\}_{i\in\Omega} \cup \{m\}$ é linearmente independente em $Q[E]$. Seja H tal que $mH \subseteq J = QK$. Portanto, para $h \in H$, existem $q_i \in Q$, com $i \in \Omega$, tais que $mh = \sum_{i\in\Omega} q_i v_i$. Consequentemente, temos que $\{v_i\}_{i\in\Omega} \cup \{m\}$ é linearmente dependente, o que é uma contradição. Logo, $M_C(J_0) \subseteq K$. ■

A correspondência do Teorema 3.2.5 preserva a propriedade de um ideal ser primo. Para ver isso, começaremos com o seguinte lema:

Lema 3.2.6. *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $R[E]$ é primo

(ii) $T[E]$ é primo

(iii) $C[E]$ é primo

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponhamos que $R[E]$ é um anel primo. Sejam A e B ideais de $T[E]$ tais que $AB = 0$. Sendo assim, temos que $(A \cap R[E])(B \cap R[E]) = 0$. Mas $A \cap R[E]$ e $B \cap R[E]$ são ideais de $R[E]$, então $A \cap R[E] = 0$ ou $B \cap R[E] = 0$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $A \cap R[E] = 0$ e vamos supor também que $A \neq 0$. Tomemos $0 \neq a \in A$. Então, $a = \sum a_i e_i$, $a_i \in T$, e, para cada i, existe um ideal não nulo H de R tal que $a_i H \subseteq R$. Vamos escolher $h \in H$, e daí temos $0 \neq ah = \sum a_i h e_i \in R[E]$. Logo, $A \cap R[E] \neq 0$ e portanto $T[E]$ é primo.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponhamos que $T[E]$ é primo e consideremos $A, B \lhd C[E]$ tais que $AB = 0$. Então temos que $T[E]AT[E]B = 0$, e portanto $T[E]A = 0$ ou $T[E]B = 0$.

Suponhamos que $T[E]A = 0$. Daí segue diretamente que $A = 0$. Da mesma forma, se $T[E]B = 0$, podemos concluir que $B = 0$. Logo, $C[E]$ é primo.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sejam A e B ideais de $R[E]$ com $AB = 0$ e suponhamos que $C[E]$ é primo. Então $A \cap R = 0$ ou $B \cap R = 0$, pois $A \cap R$ e $B \cap R$ são ideais de R tais que $(A \cap R)(B \cap R) = 0$ e R é um anel primo. Podemos assumir que $A \cap R = 0$ e $A \neq 0$, então $0 \neq M_C(A) \subseteq C[E]$.

Agora, vamos tomar $0 \neq a \in M_C(A)$ e escolher um ideal não nulo H de R com $Ha \subseteq A$. Consequentemente, $HaB = 0$, pois estamos supondo que $AB = 0$.

Se $B \cap R \neq 0$, obtemos facilmente que $a = 0$. Então, podemos assumir também que $B \cap R = 0$ e supor que $B \neq 0$. Neste caso, existe $0 \neq b \in M_C(B)$ e um ideal não nulo F de R com $bF \subseteq B$. Assim, $HaebF = 0$ e daí segue que $aeb = 0$, para todo $e \in E$.

Logo, $aC[E]b = 0$, o que contradiz o fato de $C[E]$ ser primo. Então $B = 0$ e a prova está completa. ■

Agora, obtemos o segundo resultado importante desta seção:

Teorema 3.2.7. *Seja R um anel primo e T um anel de quocientes à direita de R. Então a correspondência do Teorema 3.2.5 é uma correspondência um a um entre os seguintes conjuntos:*

(i) O conjunto de todos os ideais primos P de $R[E]$ com $P \cap R = 0$

(ii) O conjunto de todos os ideais primos P^* de $T[E]$ com $P^* \cap T = 0$

(iii) O conjunto de todos os ideais primos de $C[E]$

Demonstração: Pelo lema anterior, podemos considerar apenas ideais não nulos. Suponhamos que P é um ideal fechado de $R[E]$ e que P^* é um ideal fechado de $T[E]$ com $P^* \cap R[E] = P$.

Se P é um ideal primo de $R[E]$ e $A \supseteq P^*$, $B \supseteq P^*$ são ideais de $T[E]$ tais que $AB \subseteq P^*$, então $(A \cap R[E])(B \cap R[E]) \subseteq P$. Assim, ou $A \cap R[E] = P$ ou

$B \cap R[E] = P$, já que P é primo. Vamos assumir que $A \cap R[E] = P$. Como $Min(P^*) = Min(P) = Min(A \cap R[E]) = Min(A)$ e P^* é fechado, temos $A = P^*$. Logo, P^* é primo.

Reciprocamente, suponhamos que P^* é primo e consideremos A e B ideais de $R[E]$ com $A \supseteq P$, $B \supseteq P$ e $AB \subseteq P$. Sejam $a \in A$, $b \in [B]_R$ e H um ideal não nulo de R tal que $bH \subseteq B$. Então $abH \subseteq P$ e portanto $ab \in P$, porque P é fechado. Consequentemente, $A[B]_R \subseteq P$. Agora, se $A \nsubseteq P$, escolhemos $a \in A - P$.

Sejam B^* um ideal fechado de $T[E]$ com $B^* \cap R[E] = [B]_R$ e $c \in B^*$. Então existe um ideal não nulo F de R com $cF \subseteq B^* \cap R[E] = [B]_R$. Assim, $acF \subseteq P \subseteq P^*$ e temos $ac \in P^*$, pelo Corolário 3.2.4(i). Logo, $aB^* \subseteq P^*$, então $B^* \subseteq P^*$ e portanto $B = P$. Logo, P é primo.

Para provar a correspondência entre (ii) e (iii) é suficiente fazer o caso $T = Q$, como na prova do Teorema 3.2.5. Sejam K um ideal de $C[E]$ e $L = Q[E]K$. Já que $L \cap C[E] = K$, é claro que K é primo quando L é primo.

De fato, tomando A e B ideais de $C[E]$ tais que $A \supseteq K$, $B \supseteq K$ e $AB \subseteq K$, temos que $AQ[E]BQ[E] \subseteq KQ[E] = L$. Mas como estamos supondo que L é primo, temos que $AQ[E] = L$ ou $BQ[E] = L$, ou seja, $A = K$ ou $B = K$. Logo, K é primo.

Reciprocamente, suponhamos que K é primo e sejam A e B ideais de $Q[E]$ com $AB \subseteq L$. Como L é fechado vemos facilmente, como antes, que $A[B]_Q \subseteq L$. Se $M_C(A \cap R[E]) \subseteq K$, obtemos $[A]_Q = Q[E]M_C(A \cap R[E]) \subseteq L$, o que completa a prova.

Então podemos assumir que existe $m \in M_C(A \cap R[E]) - K$ e tomar H um ideal não nulo de Q com $mH \subseteq A$. Agora, $m([B]_Q \cap C[E])H = mH([B]_Q \cap C[E]) \subseteq L$. Logo, $m([B]_Q \cap C[E]) \subseteq L \cap C[E] = K$ e obtemos $[B]_Q \cap C[E] \subseteq K$, e portanto $[B]_Q = Q[E]([B]_Q \cap C[E]) \subseteq L$. Assim, a prova está completa. ■

Referências Bibliográficas

[1] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G., *"Introduction to Commutative Algebra"*, Addison - Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1969.

[2] Beidar, K. I.; Martindale, W. S.; Mikhalev, A. V., *"Rings with Generalized Identities"*, Marcel Dekker, New York, 1996.

[3] Ferrero, M.; Kishimoto, K., *On Differential Rings and Skew Polynomials*, Comm. Algebra, 13(2) (1985), 285-304.

[4] Ferrero, M., *Prime and Principal Closed Ideals in Polynomial Rings*, Journal of Algebra, 134 (1990), 45-59.

[5] Ferrero, M., *Closed and Prime Ideals in Free Centred Extensions*, Journal of Algebra, 148 (1992), 1-16.

[6] Kaplansky, I., *"Commutative Rings"*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1974.

[7] Lam, T. Y., *"A First Course in Noncommutative Rings"*, Springer-Verlag, 1991.

[8] Lam, T. Y., *"Lectures on Modules and Rings"*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1999.

[9] Lambek, J., *"Lectures on Rings and Modules"*, Chelsea Publishing Company, New York, NY, 1976.

[10] McCoy, N. H., *"The Theory of Rings"*, The Macmillan Company, New York, NY, 1964.

[11] Pearson, K. R.; Stephenson, W.; Watters, J. F., *Skew Polynomials and Jacobson Rings*, Proc. London Math. Soc., 42(1) (1981), 559-576.