VOZES DIVERSAS
DIFERENTES SABERES

Salão UFRGS 2018 CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO

SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA XXX SIC

15 A 19 OUTUBRO CAMPUS DO VALE

UFRGS PROPESQ

Algoritmos de Localização de Autovalores de Grafos

Guilherme Simon Torres

Orientador: Vilmar Trevisan
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Introdução

A **teoria espectral dos grafos** é a área da **teoria dos grafos** interessada em determinar relações entre as propriedades estruturais de um grafo e o espectro de matrizes associadas a ele, como a matriz de adjacência e a matriz laplaciana.

Espectro de um Grafo	É o conjunto de todos os autovalores de determinada representação matricial do grafo.

O problema é que nem sempre é fácil encontrar os autovalores de um grafo, o que nos motiva a encontrar maneiras de utilizar propriedades específicas de algumas classes de grafos para obter, através de algoritmos, a distribuição de seu espectro. O objetivo deste trabalho é estudar alguns desses algoritmos, cuja principal vantagem é operar em tempo O(n), e suas aplicações, que oferecem resultados teóricos interessantes sobre os espectros dessas classes de grafos.

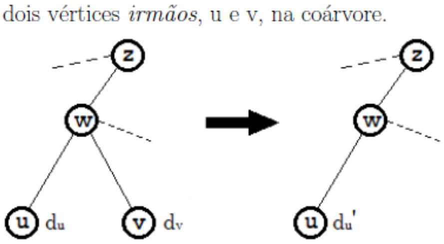
Aqui, trabalharemos com a matriz de adjacência.

Cografos

Os cografos podem ser definidos recursivamente da seguinte maneira:

- um vértice isolado é um cografo; e
- $\cup$ e $\otimes$ entre cografos é um cografo.

Podemos associar a cografos uma estrutura chamada *coárvore*, um grafo árvore em que as folhas são os vértices do cografo e os demais vértices são os operadores $\cup$ e $\otimes$. Dado um $c \in \mathbb{R}$, o algoritmo começa associando a cada vértice do cografo o valor $-c$. A cada passo, são localizados dois vértices *irmãos*, u e v, na coárvore.



Então, os valores de um ou de ambos são modificados de acordo com os valores d_u e d_v e com o operador w, que pode ser $\cup$ ou $\otimes$.

O algoritmo acaba quando não há mais nenhum par de vértices irmãos na coárvore. Ao fim da execução, é retornada uma sequência de números, cujas quantidades de números positivos, nulos e negativos determina quantos autovalores maiores, iguais ou menores do que c o grafo G possui.

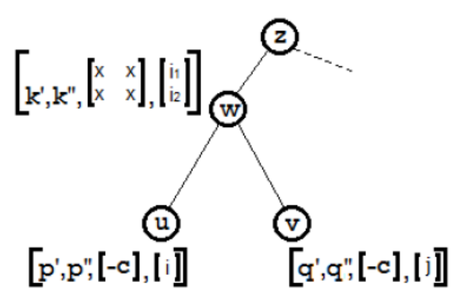
Analisando a execução do algoritmo em alguns casos especiais é possível obter uma fórmula fechada que quantifica quantos autovalores positivos e nulos o cografo tem.

Grafos com Clique-Width pequeno

Podemos decompor qualquer grafo G em uma expressão composta pelas seguintes operações:

- $i(v)$ cria um vértice v com rótulo i;
- $\eta(i,j)$ une todos vértices com rótulo i a todos vértices com rótulo j;
- $\rho(i,j)$ muda todos os rótulos i para j; e
- $\oplus$ une dois grafos sem alterá-los.

O clique-width k de G é o menor número de rótulos necessários para construir G utilizando as operações acima. A sequência de operações que gera um grafo G é a k-expressão de G. Através de uma modificação dessas operações, podemos obter uma árvore binária em que as folhas são os operadores $i(v)$ e os demais vértices representam o operador $\oplus_{S,L,R}$, que é equivalente às outras três operações. Dado um $c \in \mathbb{R}$, queremos saber quantos autovalores de G são maiores, menores ou iguais a c.



O algoritmo opera na árvore em pós-ordem. A cada passo, analisa-se uma submatriz de $A - cI$, sendo A a matriz de adjacência de G. Ao operar em uma folha, é criada uma *k-box*, que contém informações sobre a submatriz em que se está operando. Ao operar em uma não-folha, as *k-box* de ambos os filhos são combinadas e processadas para formar outra *k-box*. As linhas diagonalizadas são removidas do processo, e o algoritmo repete essas operações até chegar à raíz da árvore. Como no algoritmo para cografos, ao final da execução o algoritmo retorna uma sequência de valores que indicam quantos autovalores maiores, menores ou iguais a c o grafo G possui.

Referências

1. **WEST. D.B.** *Introduction to Graph Theory*, Pearson Education, Singapura, 2001.

2. **JACOBS, D.P., TREVISAN, V., TURA, F.** *Eigenvalue location in cographs*, Discrete Applied Mathematics, vol. 245, pp. 220-235, 2018

3. **FÜRER, M., HOPPEN, C., JACOBS, D.P., TREVISAN, V.** *Eigenvalue Location in Graphs of Small Clique-width*. Submetido, 2017