VOZES DIVERSAS DIFERENTES SABERES
SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA XXX SIC
15 A 19 OUTUBRO CAMPUS DO VALE

Otimização no Setor Agropecuário sob a Ótica de um Problema de Transporte

Vilmar Mário Oro Boff

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Prédio 43-111 - Agronomia Porto Alegre - RS - BRASIL CEP: 91509-900
Vilmarboff1@gmail.com

Resumo

Desde os primórdios da humanidade, o setor agropecuário sempre fora altamente modernizado e otimizado. Em vista de acompanhar essa trajetória, o presente trabalho tem como finalidade a aplicação de técnicas de programação linear, em particular, as aplicadas ao problema de transporte, tais que resolvam questões relevantes no assunto como: quem deverá produzir cada insumo? E a quais quantidades?

Dessa forma, com o aparato matemático em mãos, analisa-se um pequeno caso com dados reais e dele derivam-se interpretações econômicas importantes, passando pelo Princípio das Vantagens Comparativas e pela identificação dos preços sombra.

Por fim,o problema é resolvido e sua solução será apresentada pelo método do Simplex e semelhante. O ferramental computacional utilizado inclui o software Scilab.

1. Introducão

O problema de transporte, proposto por F. L. Hitchcook[1] e resolvido por ele mesmo em 1941, é um nicho de uma teoria intitulada de Programação Linear, onde temos como objetivo maximizar uma combinação linear de elementos sujeitos a restrições do mesmo tipo. Para a resolução dessa classe de problemas, foi desenvolvido o Metódo do Simplex por George Dantzig[2], em 1947.

Assim sendo, o presente trabalho tem como objetivo usar as técnicas citadas acima em busca de uma maior comprensão da dinâmica da produção agropecuária mundial, uma vez tendo sido introduzida por Samuelson[3]. Faz-se então uma simulação com dados reais em um pequeno caso, submetido a algumas hipóteses.

2. Acerca do Problema de Transporte

Programação Linear

É a área da otimização que empenha-se em encontrar soluções ótimas - maximizantes ou minimizantes - para funções objetivo lineares sujeitas a restições lineares. Simbolicamente, para um problema de programação linear na forma padrão, dados os vetores $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, procuramos um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{cases} \min_x c^\top x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Problema de Transporte
Pertencente a teoria de Programação Linear, o problema de transporte consiste na otmimização na distribuição dos suprimentos de uma fábrica a seus pontos de distribuição.

Dessa maneira, suponha que uma empresa possui três fábricas (origens) e deseja transportar seus produtos para seus 5 pontos de distribuição (destinos). Defina c_{ij} como sendo o custo de transportar uma unidade da produção da fábrica i para o ponto j, seja também s_i a produção total da fábrica i em um dado espaço de tempo e d_j a quantidade requerida pelo ponto j nesse intervalo. Esses custos e essas quantidades podem ser expressas resumidamente na tabela 1.

Tabela 1: *Problema de Transporte*

	Origem 1	Origem 2	Origem 3	Demanda
Destino 1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	d_1
Destino 2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	d_2
Destino 3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	d_3
Destino 4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	d_4
Destino 5	c_{51}	c_{52}	c_{53}	d_5
Capacidade	s_1	s_2	s_3	$\sum_i s_i = \sum_j d_j$

Naturalmente, a quantidade x_{ij} transportada das fábricas não pode exceder a capacidade de produção da mesma. Nesse problema, em particular, consideraremos que todas os produtos estão sendo distribuídos. Logo, teremos

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = s_i. \tag{2}$$

Por outro lado, a demanda em cada ponto de distribuição deve ser minimamente satisfeita. De maneira semelhante ao visto acima, deve ser satisfeita a relação

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = d_j. \tag{3}$$

Portanto, o problema central consiste em minimizar o custo toal, dado por

$$\min_x \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{5} c_{ij} x_{ij}. \tag{4}$$

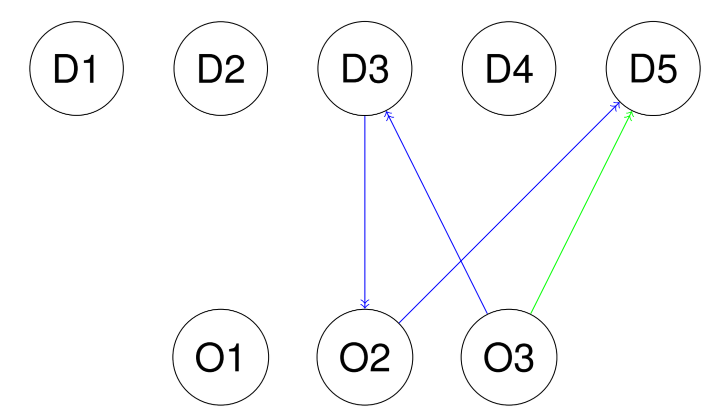
Note que o problema de transporte pode ser escrito na forma padrão de um programa linear.

3. Solução

Com base no método produzido por Dantzig[2], o problema de transporte pode ser resolvido pelo algoritmo do Simplex, descrito abaixo.

Primeiramente, desconsiderando os casos degenerados, podemos inferir uma solução inicial respeitando as restrições, essa chamada de *solução básica factível*. Por conseguinte, faz-se a análise das rotas não envolvidas, calculando o chamado *custo indireto*, que é definido como o preço executado na realocação de uma unidade da produção partindo de uma origem (fábrica) a um destinatário (ponto de distribuição), quando esse não tiver sido arbangido no trajeto inicialmente proposto.

O processo é ilustrado abaixo, sendo a rota em azul um possível itineráro alternativo quando desconsideramos a rota em verde.



Dando continuidade a esse procedimento, criamos uma tabela com os custos indiretos, permitindo assim a comparação com os custos diretos (dados pela tabela 1). Se o custo indireto em um ponto exceder ao custo direto, consideramos uma nova rota que inclui esse ponto. Iterando dessa forma, chegamos na solução.

Paralelamente, o método do Simplex nos dá esse resultado algebricamente, que seria uma mudança de base semelhante a Eliminação Gaussiana.

4. Aplicação em Dados Reais

Como visto acima, o Simplex carrega consigo um critério de decisão, fazendo com que o custo de transporte e a capacidade máxima permitida de cada localidade sejam o fator determinante para a escolha das quantidades a serem transportadas.

Escolha a qual corresponde com a dinâmica esperada da distribuição mundial dos elementos agropecuários quando analisada sob a ótica do Princípio das Vantagens Comparativas. Nela, os custos e capacidades de produção influenciam direta e unicamente na alocação dos recursos, garantindo a eficiência produtiva.

Prosseguindo desa maneira, a aplicação - inspirada ná análise feita por Robert Dorfman[3] - dá-se quando substituímos as origens e destinos das rotas pelos países e insumos produzidos, respectivamente.

Consequentemente, a demanda por produtos se torna a produção mundial do insumo no ano, bem como a capacidade produtiva do país transfigura-se numa relação entre a produção mundial e a porcentagem de área agricultável mundial que o país possui. Os custos pemanecem como os custos de produção de cada item agropecuário.

Para a aplicação, são feitas algumas hipóteses:

- São desprezadas possíves tarifas e taxas alfandegárias;
- Todos os países têm capacidades iguais para produzir qualquer produto apurado na amostra;
- O mercado é fechado dentre os países da análise;
- Pleno emprego dos fatores de produção analisados (terra).

Feitas as hipóteses, é gerada a tabela abaixo:

Tabela 2: *Obtida a partir de dados reais do ano de 2015. (Fonte: FAO[4]).*

	Austrália	China	Brasil	E.U.A.	Produção (10^6 ton)
Milho	247.9	432.4	138.1	142	740
Batata	401.9	381.5	424.1	193	323,2
Arroz (grão)	296.7	459.4	240.9	269	1010,6
Soja (grão)	268.1*	808.2	316.7	329	376,8
Cana de Açúcar	30.1	343.8	19	34	1886,9
Capacidade (10^6 ton)	1002,6	774,3	1448,5	1112,1	4337,5

*(*Dados referentes ao ano de 2006. Fonte: FAO).*

O problema é resolvido pelo método exposto na Seção 3, de maneira computacional pelo software *Scilab*.

Problema Dual e Preço-sombra
Com a solução do problema em mãos, passamos a olhar para o par dual associado. Nele, econtramos o preço sombra é a variação do valor objetivo da solução ótima quando relaxamos a restrição por uma unidade, podendo ser interpretado como o custo marginal de reforçar a restrição.

Na aplicação, podemos interpretar esses valores como sendo o custo gerado no acréscimo de uma unidade de capacidade produtiva num país ou, igualmente, no acréscimo do mesmo valor na produção mundial de um insumo. Além disso, os coeficientes atrelados a função objetivo desse novo problema são os multiplicadores de Lagrange no ponto da solução ideal.

5. Considerações Finais

Dado o conhecimento adquirido, inferimos que a teoria desenvolvida na área de Programação Linear possui uma utilidade prática na área da otimização do mercado agropecuário, expondo de maneira clara a dinâmica associada ao funcionamento do mercado e a alocação dos recursos quando supostas algumas condições.

Referências

[1] HITCHCOCK, F. L.. *The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities.* In: Koopmans, T. C., *Journal of Mathematics and Physics. Massachussets Institute of Technology*, 20 1941, p. 224-230.

[2] Dantzig, G. B.. *Application of the Simplex Metod to a Transportation Problem.* In: Koopmans, T. C., *Activity Analysis of Production and Allocation.* Nova Iorque: John Wiley & Sons Inc., 1951, p. 359-373.

[3] DORFMAN, Robert; SAMUELSON, Paul.; SOLOW, Robert. *Linear Programming & Economic Analysis.* Nova Iorque: McGraw-Hill Book Company Inc., 1958.

[4] Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO), URL: http://www.fao.org/faostat/en/#data Acesso em 08/09/2018.