

ANÁLISE COMPARATIVA DO GRAU DE PRECISÃO DE ESQUEMAS DE QUADRATURAS PARA A FORMULAÇÃO DE ORDENADAS DISCRETAS DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE RADIATIVO

Ana Carolina Bof (a), Prof. Dr. Pedro H. A. Konzen (b), Prof. Dr. Fábio Souto de Azevedo (b)

(a) Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul

(b) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística - Porto Alegre, RS, CEP 91501-970

{acbof6@gmail.com, pedro.konzen@ufrgs.br, fabio.azevedo@ufrgs.br}

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, buscamos comparar esquemas de quadraturas sobre a esfera unitária (assumindo simetria nas coordenadas η e ξ) em problemas de transporte tridimensionais. Para tanto, discutimos sobre princípios fundamentais para a construção de tais quadraturas, como positividade dos pesos, invariância sobre rotações, entre outras. Também, buscamos analisar o erro dos esquemas de quadratura e a comparação entre quadraturas de pesos iguais, do tipo de Lebedev, de construção geométrica e de construção via quadraturas iteradas, aplicadas a problemas de transporte unidimensionais.

Assim, foi feita uma análise comparativa do grau de precisão dos esquemas de quadraturas estudados, assumindo-se uma tolerância máxima de 10^{-7} .

CONTEXTO

Consideramos a equação de transporte radiativo, estacionária, em um meio cinza [6]:

$$\Omega \cdot \nabla I(r, \Omega, \nu) + (\sigma + \kappa)I(r, \Omega, \nu) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{S^2} I(r, \Omega', \nu) d\Omega' + \kappa Q, \Omega \in S^2,$$

onde $I = I(r, \Omega, \nu)$ denota a intensidade radiativa associada à frequência ν em um ponto r do domínio, $S^2 := \{\Omega = (\mu, \eta, \xi); \mu^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1\}$ denota a esfera unitária e Q é uma fonte externa. Uma das técnicas mais empregadas para o estudo numérico desta equação é o chamado método de ordenadas discretas, o qual consiste em aproximar o termo integral por uma quadratura numérica apropriada e, então, expandir a equação do transporte em um sistema de equações diferenciais parciais nas direções discretas Ω_i definidas pela quadratura. Mais especificamente, para problemas com geometria cartesiana unidimensional, a formulação de ordenadas discretas da equação de transporte é:

$$\mu \frac{dI_i}{dx} + (\sigma + \kappa)I_i = \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{j=0}^{N-1} I_j w_j + \kappa Q, i = 0, 1, \dots, N-1,$$

onde $\{(\mu_i, w_i)\}_{i=0}^{N-1}$ é o conjunto de pontos e pesos da quadratura numérica, N é a ordem da quadratura e $I_i := I(x, \mu_i, \nu)$. Desta forma, a formulação de ordenadas discretas depende da quadratura escolhida impactando na precisão da solução obtida [2,3].

Considera-se que uma dada quadratura $\sum_{i=1}^m \mu_i w_i$ tem grau de precisão n quando

$$2\pi \left| \int_{-1}^1 \mu^k d\mu - \sum_{i=1}^m \mu_i^k w_i \right| < TOL, \quad \forall k \leq n$$

onde TOL é a tolerância desejada.

QUADRATURAS ANALISADAS

Para a comparação, analisamos quadraturas comumente usadas em problemas multidimensionais, a saber, as quadraturas: Legendre-Chebyshev triangular [5], Legendre-Chebyshev quadrangular [1], Tesselation [7] e SRAP_N [4].

Para cada uma das quadraturas em questão, desenvolvemos códigos computacionais para a construção e implementação das mesmas e obtivemos os resultados esperados. A seguir temos exemplos de imagens geradas pelos códigos desenvolvidos. (*)

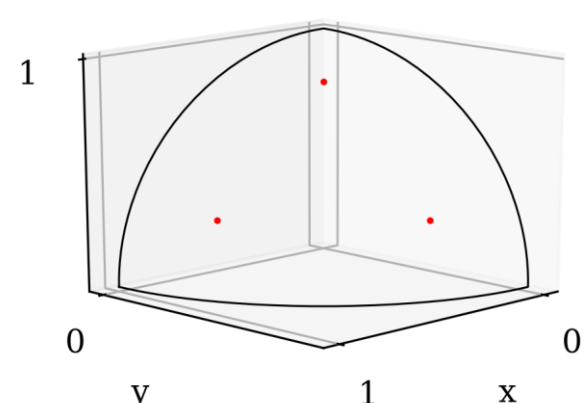


Figura 1: LCTQ, N=4

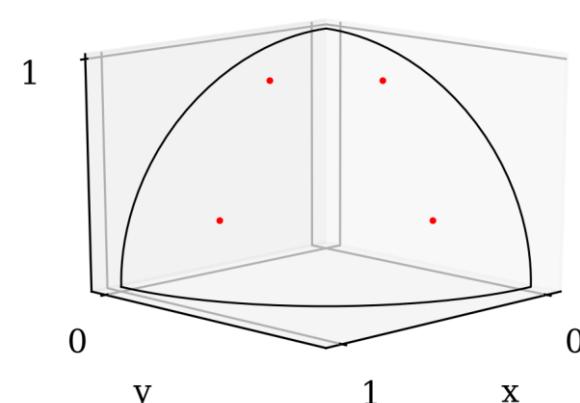


Figura 2: LCQQ, N=4

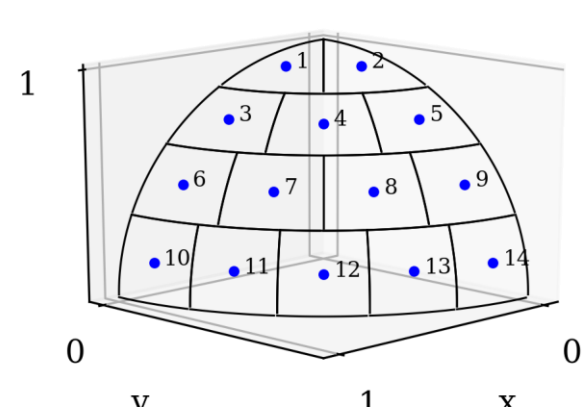


Figura 3: SRAP, N=4

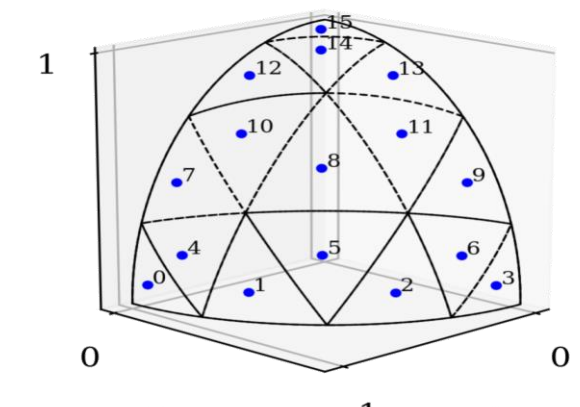


Figura 4: Tesselation, N=4

RESULTADOS

Fizemos, então a comparação entre as quadraturas estudadas e a quadratura de Gauss-Legendre, que é tomada como parâmetro por ter resultados conhecidos e precisos.

As tabelas abaixo indicam os erros de cada quadratura para uma dada ordem N , aumentando-se o expoente k da integração. Os dados em vermelho representam uma extrapolação da tolerância de 10^{-7} estabelecida.

Tabela 1: Comparação dos erros das quadraturas para N=2

N = 2	k	LCQQ	LCTQ	SRAP	Tesselation	Gauss-Legendre	Exact value
	0	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	1.26e+01
	1	0.00e+00	0.00e+00	3.33e-16	2.78e-16	0.00e+00	0.00e+00
	2	1.78e-15	1.78e-15	1.91e-02	8.88e-16	0.00e+00	4.19e+00
	3	0.00e+00	0.00e+00	1.11e-16	1.67e-16	0.00e+00	0.00e+00
	4	1.12e+00	1.12e+00	8.60e-03	1.42e-01	1.12e+00	2.51e+00
	5	0.00e+00	0.00e+00	1.66e-16	1.64e-16	0.00e+00	0.00e+00
	6	1.33e+00	1.33e+00	8.60e-04	2.79e-01	1.33e+00	1.80e+00
	7	0.00e+00	0.00e+00	2.89e-17	3.30e-17	0.00e+00	0.00e+00
	8	1.24e+00	1.24e+00	2.26e-04	3.56e-01	1.24e+00	1.40e+00
	9	0.00e+00	0.00e+00	1.01e-19	6.00e-17	0.00e+00	0.00e+00

Tabela 2: Comparação dos erros das quadraturas para N=6

N = 6	k	LCQQ	LCTQ	SRAP	Tesselation	Gauss-Legendre	Exact value
	0	5.33e-15	3.55e-15	1.60e-14	2.84e-14	0.00e+00	1.26e+01
	1	4.79e-16	5.55e-17	7.95e-16	1.55e-16	5.23e-16	0.00e+00
	2	3.55e-15	4.44e-15	4.10e-04	1.24e-14	8.88e-16	4.19e+00
	3	5.53e-17	1.56e-16	2.71e-16	1.22e-16	0.00e+00	0.00e+00
	4	2.66e-15	4.58e-03	2.03e-03	1.07e-02	1.33e-15	2.51e+00
	5	2.89e-17	8.26e-17	6.25e-17	5.75e-17	8.72e-17	0.00e+00
	6	1.33e-15	8.97e-04	3.18e-03	1.41e-02	1.11e-15	1.80e+00
	7	7.33e-17	8.31e-17	1.52e-16	7.43e-17	0.00e+00	0.00e+00
	8	1.33e-15	3.69e-03	3.59e-03	1.54e-02	6.66e-16	1.40e+00
	9	7.18e-17	3.13e-17	2.76e-17	1.74e-16	0.00e+00	0.00e+00
	10	6.66e-16	5.02e-03	3.73e-03	1.59e-02	6.66e-16	1.14e+00
	11	1.27e-16	1.06e-18	5.07e-17	2.04e-16	0.00e+00	0.00e+00
	12	3.14e-03	7.71e-03	3.75e-03	1.61e-02	4.64e-03	9.67e-01
	13	1.94e-17	5.69e-17	3.88e-18	6.00e-17	0.00e+00	0.00e+00
	14	1.05e-02	1.39e-02	3.70e-03	1.60e-02	1.50e-02	8.38e-01

Pela análise dos resultados, podemos tirar algumas conclusões:

- 1) A quadratura de Legendre-Chebyshev quadrangular se compara em precisão à quadratura de Gauss-Legendre e é, então, a quadratura mais confiável dentre as estudadas;
- 2) Aumentando-se a ordem N de 2 para 6 já vemos um aumento significativo da precisão das quadraturas.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos ao CNPq pela bolsa PIBIC de Iniciação Científica.

¹ D.G. Cacuci, Handbook of Nuclear Engineering, Springer, New York, 2010.

² B. Hunter and Z. Guo, Numerical smearing, ray effect, and angular false scattering in radiation transfer computation, International Journal of Heat and Mass Transfer 81 (2015), 63–74.

³ R. Koch and R. Becker, Evaluation of quadrature schemes for the discrete ordinates method, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer 84 (2004), 423–435.

⁴ B.-W. Li, Q. Yao, X.-Y. Cao, and K.-F. Cen, A New Discrete Ordinates Quadrature Scheme for Three-Dimensional Radiative Heat Transfer, Journal of Heat Transfer-transactions of The Asme - J HEAT TRANSFER, 1998, pp. 514–518.

⁵ G. Longoni and A. Haghghat, Development of new quadrature sets with the ordinate splitting technique, Proceedings the 2001 American Nuclear Society International Meeting on Mathematical Methods for Nuclear Applications (M&C 2001), Salt Lake City, UT (2001).

⁶ M.F. Modest, Radiative heat transfer, Elsevier, New York, 2013.

⁷ C. Thurgood, A. Pollard, and H.A. Becker, The TN Quadrature Set for the Discrete Ordinates Method, Journal of Heat Transfer-transactions of The Asme - J HEAT TRANSFER, 1995, pp. 1068–1070.

* Estes códigos podem ser encontrados em <https://github.com/acbof/Transport>