

Introdução

Resumo: Processos industriais geram dados acerca de inúmeras variáveis de interesse correlacionadas. Buscando um monitoramento mais robusto de tais processos, gráficos de controle baseados em técnicas estatísticas multivariadas foram desenvolvidos. Destacam-se os gráficos de controle baseados nas estatísticas de Qui-Quadrado (χ^2) e da Variância Generalizada (W). Estas estatísticas permitem um monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias das variáveis a cada nova amostra do processo em curso. Este trabalho apresenta um estudo por simulação para investigar o poder de detecção dos gráficos χ^2 e W . A partir de um processo simulado com 4 variáveis e uma estrutura de covariância, descontroles são impostos tanto no vetor de médias quanto na matriz de covariâncias do processo sob controle.

Carta de controle Qui-Quadrado (χ^2)

Considere p -características correlacionadas medidas simultaneamente compondo amostras p -variadas de tamanho m . Supõe-se que estas características seguem uma distribuição p -dimensional multivariada normal com vetor de médias $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ e matriz de covariância Σ , sendo μ_i a média para a i -ésima característica e Σ uma matriz consistindo de variâncias e covariâncias das p -características, onde os elementos da diagonal principal são as variâncias de x 's e os elementos fora da diagonal principal são as covariâncias. O monitoramento futuro de vetores p -variados de tamanho m é dado por:

$$\chi_p^2 = (\bar{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) \sim \chi_{p,\alpha}^2$$

onde χ_p^2 segue uma distribuição Qui-Quadrado com p graus de liberdade e representa a distância quadrada padronizada, p -dimensional, entre um vetor de observações \bar{x} e o vetor de médias do processo μ . A raiz quadrada χ_p é conhecida como *distância de Mahalanobis* (Johnson & Wichern, 1998).

Carta de controle para variabilidade do processo (W)

Considere novamente um conjunto de observações p -variadas geradas de uma distribuição normal p -variada com vetor de médias μ e matriz de covariâncias Σ . A carta de controle da Variância Generalizada é empregada para detectar mudanças na estrutura de covariâncias dos dados. Esta carta se constitui numa extensão multivariada da carta de controle univariada da variância *Carta de Controle S^2* . (Montgomery, 2007) descreve a estatística para monitorar a estrutura de covariâncias de futuras amostras baseada no determinante de matrizes de covariância, como se segue:

$$W_i = -pn + p \ln(n) - n \ln(|A_i|/|\Sigma|) + \text{tr}(\Sigma^{-1} A_i) \sim \chi_{\alpha, p(p+1)/2}^2$$

onde W_i segue uma distribuição Qui-Quadrado com $p(p+1)$ graus de liberdade, $A_i = (n-1)S_i$, S_i é a matriz de covariância amostral da i -ésima amostra de tamanho m e tr é o operador de traço.

Metodologia

Consideramos um processo simulado sob controle com quatro variáveis. Suponha que os dados seguem uma distribuição normal 4-variada com vetor de médias μ e a matriz das covariâncias Σ dados por:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.07 & 0.05 \\ 0.9 & 1 & 0.04 & 0.03 \\ 0.07 & 0.04 & 1 & 0.9 \\ 0.05 & 0.03 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

Os descontroles são realizados para três casos distintos: (I) monitoramento do processo simulando o descontrole em duas variáveis altamente correlacionadas; (II) monitoramento do processo simulando o descontrole em duas variáveis fracamente correlacionadas; (III) monitoramento simulando o descontrole em duas variáveis altamente correlacionadas com outra variável que apresenta fraca correlação.

Descontroles no vetor de médias para cada caso:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ caso (I)} \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_4 \end{bmatrix} \text{ caso (II)} \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ 0 \\ \mu_4 \end{bmatrix} \text{ caso (III)}$$

onde $\mu_1 = \mu_2 = \mu_4 = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.2, 1.4, \dots, 2.4, 2.6, 2.8, 3$.

Descontroles na matriz de covariância para cada caso:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & 0.07 & 0.05 \\ \rho_{21} & 1 & 0.04 & 0.03 \\ 0.07 & 0.04 & 1 & 0.9 \\ 0.05 & 0.03 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \text{ caso (I)} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.07 & \rho_{14} \\ 0.9 & 1 & 0.04 & 0.03 \\ 0.07 & 0.04 & 1 & 0.9 \\ \rho_{41} & 0.03 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \text{ caso (II)}$$

onde $\rho_{12} = \rho_{21} = 0.6, 0.62, 0.64, 0.66, 0.68, 0.7, 0.72, \dots, 0.9, 0.92, 0.94, 0.96, 0.98$ e $\rho_{14} = \rho_{41} = -0.13, -0.11, -0.09, -0.07, -0.05, -0.03, -0.01, \dots, 0.17, 0.19, 0.21, 0.23, 0.25$.

O limites de controle de ambas as cartas foram obtidos com probabilidade de alarme falso de $\alpha = 0.05$.

Referências

Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (1998). Applied multivariate statistical analysis, printice-hall. Inc., Upper Saddle River, NJ.
Montgomery, D. C. (2007). *Introduction to statistical quality control*. John Wiley & Sons.

Resultados para carta χ^2

Observamos para o caso (I) que a detecção de descontroles cresce conforme o tamanho do descontrole imposto. Entretanto apresenta baixa sensibilidade de detecção, visto que o descontrole representa uma alteração na direção comum de variabilidade destas variáveis. No caso (II) observamos acentuada sensibilidade na detecção de descontroles comparado ao caso (I). Isto se deve a baixa correlação nas variáveis descontroladas, visto que esses descontroles estão em direções opostas as direções comuns de variabilidade. Dessa forma pequenas alterações são detectadas com frequência relativa alta. Observamos no caso (III) a boa sensibilidade da carta na detecção de descontroles. Notamos que a sensibilidade na detecção de pequenos descontroles é superior ao caso mostrado no caso (I) e inferior ao descrito no caso (II).

Tabela 1: Percentual médio (e desvio padrão) de amostras perturbadas identificadas pela carta χ^2 para cada caso.

Descontroles	caso (I)		caso (II)		caso (III)	
	média	desvio padrão	média	desvio padrão	média	desvio padrão
0.0	0.054	0.022	0.052	0.024	0.048	0.022
0.2	0.055	0.022	0.071	0.023	0.063	0.023
0.4	0.057	0.024	0.155	0.035	0.110	0.032
0.6	0.071	0.024	0.322	0.050	0.195	0.040
0.8	0.087	0.025	0.542	0.048	0.327	0.046
1.0	0.110	0.032	0.760	0.045	0.502	0.049
1.2	0.139	0.033	0.909	0.028	0.680	0.047
1.4	0.176	0.036	0.977	0.016	0.825	0.039
1.6	0.222	0.039	0.995	0.007	0.920	0.028
1.8	0.275	0.043	0.999	0.003	0.970	0.017
2.0	0.336	0.044	1	0	0.991	0.010
2.2	0.405	0.046	1	0	0.998	0.004
2.4	0.474	0.048	1	0	1	0
2.6	0.553	0.049	1	0	1	0
2.8	0.615	0.048	1	0	1	0
3.0	0.688	0.042	1	0	1	0

Resultados para carta W

Observamos para o caso (I) uma alta sensibilidade na detecção dos descontroles, visto que pequenas alterações em relação a correlação de referência ($\rho_{12} = 0.9$) já são detectadas em 100% dos casos. O caso (II) apresenta resultados semelhantes aos do caso (I), isto é, alta sensibilidade nas detecções dos descontroles impostos. Dessa forma, o grau da correlação de referência entre as variáveis descontroladas ($\rho_{12} = 0.9$ no caso (I) e $\rho_{14} = 0.05$ no caso (II)) não altera a alta sensibilidade da carta W .

Tabela 2: Percentual médio (e desvio padrão) de amostras perturbadas identificadas pela carta W para cada caso.

Descontroles	caso (I)		caso (II)		
	média	desvio padrão	média	desvio padrão	
0.60	1	0	-0.13	1	0
0.62	0.999	0.003	-0.11	1	0
0.64	0.998	0.004	-0.09	1	0
0.66	0.997	0.005	-0.07	0.991	0.009
0.68	0.994	0.008	-0.05	0.871	0.034
0.70	0.989	0.011	-0.03	0.593	0.048
0.72	0.974	0.016	-0.01	0.324	0.048
0.74	0.952	0.021	0.01	0.158	0.035
0.76	0.909	0.030	0.03	0.088	0.028
0.78	0.830	0.039	0.05	0.055	0.024
0.80	0.710	0.047	0.07	0.087	0.029
0.82	0.546	0.048	0.09	0.155	0.037
0.84	0.357	0.049	0.11	0.302	0.046
0.86	0.189	0.039	0.13	0.548	0.049
0.88	0.095	0.029	0.15	0.810	0.041
0.90	0.057	0.025	0.17	0.970	0.018
0.92	0.114	0.031	0.19	0.994	0.007
0.94	0.354	0.048	0.21	1	0
0.96	0.884	0.030	0.23	1	0
0.98	1	0	0.25	1	0

Considerações Finais

Este trabalho apresentou um estudo do desempenho das cartas de controle χ^2 e W . As cartas χ^2 e W são abordagens multivariadas clássicas para o monitoramento de médias e covariâncias, respectivamente.

Através de um estudo simulado utilizando quatro variáveis apresentando uma estrutura de covariância, exibindo correlações fortes e fracas, diferentes cenários foram investigados incluindo diversos descontroles impostos no vetor de médias e na matriz de covariâncias.

Em relação a carta χ^2 verificamos que descontroles impostos nas direções comuns de variabilidade são detectados com menos sensibilidade quando comparados aos descontroles impostos fora em direções alternativas às direções comuns. Já em relação a carta W verificamos a boa sensibilidade na detecção de descontroles independente do tamanho da correlação entre as variáveis no processo sob controle.