VOZES DIVERSAS DIFERENTES SABERES

Salão UFRGS 2018 CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO

SALÃO DE INICIACAO CIENTIFICA XXX SIC

15 A 19 OUTUBRO CAMPUS DO VALE

UFRGS PROPESQ

Passeios Aleatórios e Redes Elétricas

Aluno: Lucas da Rocha Schwengber
Orientador: Ricardo Misturini

Introdução

Passeios Aleatórios e Redes Elétricas a princípio parecem assuntos desconexos. Porém é possível estabelecer uma rica analogia entre eles (ver [1]). Esta analogia pode ser usada para simplificar diversos problemas envolvendo passeios aleatórios e a versão discreta da teoria do potencial.

Redes

Definição 1.1: Uma **rede** é um grafo não-orientado composto por um conjunto finito de **vértices** $\mathcal{X}$ e um conjunto de **arestas** E entre estes vértices às quais são associados pesos não-negativos $c(x,y) = c(y,x)$, com $\{x,y\} \in E$, que são denominados condutâncias. O recíproco da condutância $r(x,y) = c(x,y)^{-1}$ é denominad resistência.

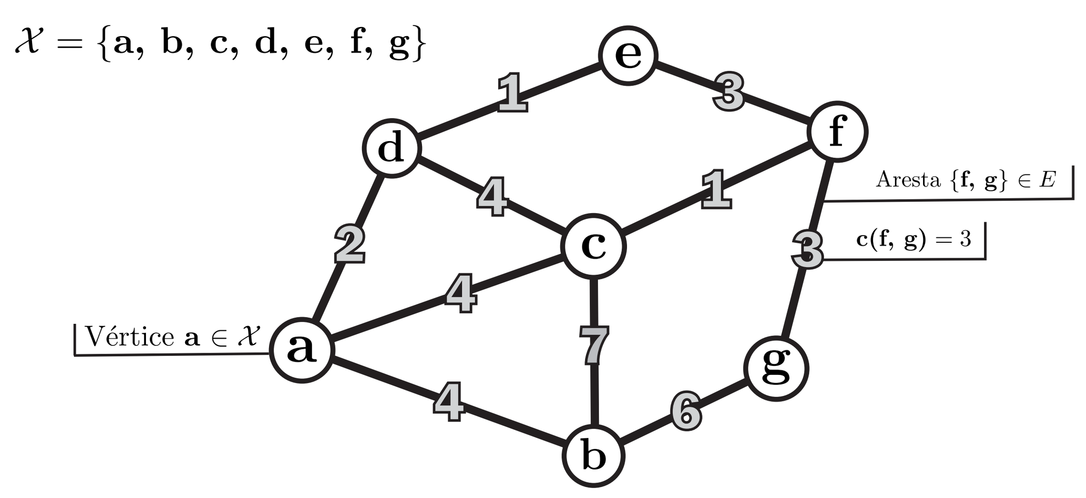


Fig. 1: Exemplo de rede com condutâncias

Passeios Aleatórios Baseados em Redes

A partir de uma **rede** podemos definir um passeio aleatório em $\mathcal{X}$, representado por uma sequência aleatória (X_n) de elementos de $\mathcal{X}$, que a cada etapa evolui segundo as probabilidades de transição $p(x,y)$ dadas por:

$$p(x,y) = \frac{c(x,y)}{C(x)},$$

onde $C(x) = \sum_{y\sim x} c(x,y)$, ou seja, a soma de todas as condutâncias associadas ao vértice x.

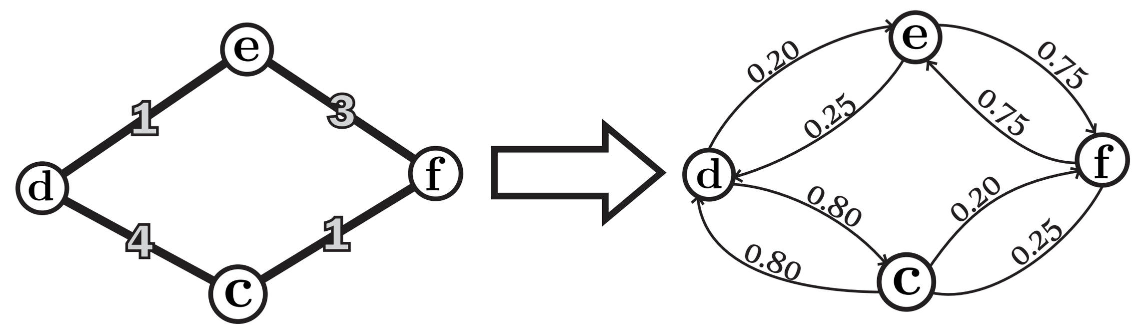


Fig. 2: Conversão de rede em passeio

Funções Harmônicas

Definição: Uma função $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ é dita harmônica em $D \subseteq \mathcal{X}$ se:

$$h(x) = \sum_{y\in\mathcal{X}} p(x,y)h(y), \text{ para todo } x \in D.$$

Isso quer dizer que para todo $x \in D$, o valor de $h(x)$ é uma média ponderada dos valores que a função assume nos pontos ligados a x.

Principio da Unicidade: Se duas funções $g, h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ coincidem em um conjunto $A \subsetneq \mathbb{R}$ e são harmônicas em $(\mathcal{X} - A)$ então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

Probabilidade de Absorção

Dado um passeio aleatório em $\mathcal{X}$ como definido inicialmente, escolhemos dois subconjuntos disjuntos $A, B \subset \mathcal{X}$ e iniciamos o passeio em um $x \in \mathcal{X}$ qualquer. Qual a probabilidade de que o passeio chegue em um vértice de A antes de chegar em um de B?

Seja $H_D = \min\{n \geq 0 \,|\, X_n \in D\}$. Se definirmos a função $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \mathbb{P}\left[H_A < H_B \,|\, X_0 = x\right],$$

é possível mostrar que f é solução do seguinte Problema de Dirichlet:

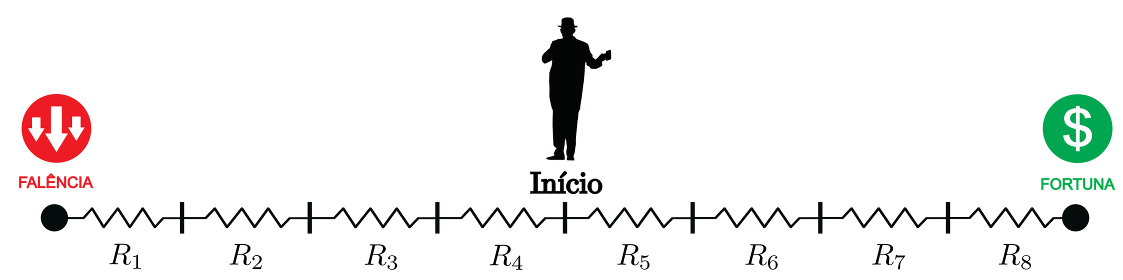
$$\begin{cases} f(a) = 1, \text{ se } a \in A \\ f(b) = 0, \text{ se } b \in B \\ f \text{ é harmônica em } \mathcal{X} - (A \cup B). \end{cases}$$

Analogamente, considerando a rede de condutâncias associada a este passeio, a função $v(x)$ que associa a cada nó x da rede sua voltagem ao aplicarmos voltagens de $v(a) = 1$ volt para todo $a \in A$ e $v(b) = 0$ volts para todo $b \in B$, além de possuir as mesmas condições de contorno por definição, também será harmônica em $\mathcal{X} - (A \cup B)$ em decorrência das Leis de Kirchoff e Ohm. Pelo princípio da unicidade, segue que $v(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

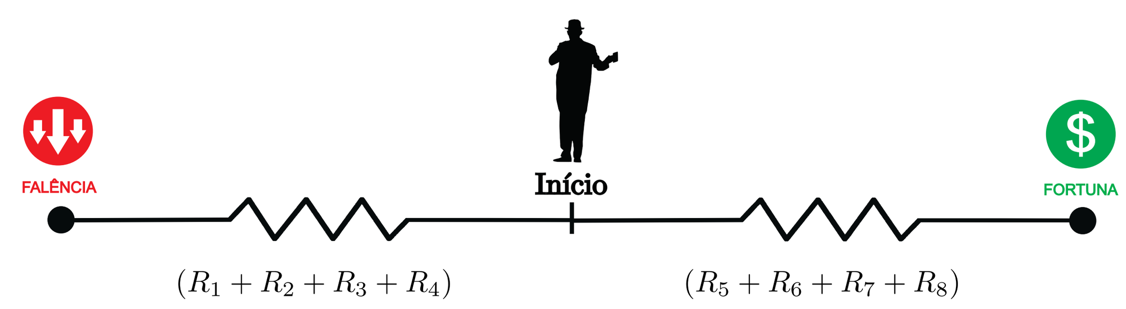
Aplicações

Esta analogia possibilita uma abordagem alternativa no clássico problema da ruína do jogador, utilizando a conhecida técnica de redução de redes:

As resistências em série se somam.



$$P_{\text{Início}} := \mathbb{P}\left[H_{\text{Fortuna}} < H_{\text{Falência}} \,|\, X_0 = \text{Início}\right] = ?$$



$$P_{\text{Início}} = \frac{c(Fortuna, Incio)}{C(Incio)} = \frac{\frac{1}{R_5+R_6+R_7+R_8}}{\frac{1}{R_1+R_2+R_3+R_4}+\frac{1}{R_5+R_6+R_7+R_8}}$$

Fig. 3: Redução de redes aplicada ao problema da ruína do jogador

Referências

[1] P. G. Doyle and J. Snell: *Random walks and electric networks* (1984)

[2] D.A. Levin, Y. Peres and E.L. Wilmer: *Markov chains and mixing times* (2010)