

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA E RELAÇÕES INTERNACIONAIS**

KLAUS BÖESCH

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM OTIMIZAÇÃO DINÂMICA

Porto Alegre

2018

KLAUS BÖESCH

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM OTIMIZAÇÃO DINÂMICA

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo

Porto Alegre

2018

CIP - Catalogação na Publicação

Böesch, Klaus

Análise de sensibilidade em otimização dinâmica /
Klaus Böesch. -- 2018.

77 f.

Orientador: Jorge Paulo de Araújo.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade
de Ciências Econômicas, Curso de Ciências Econômicas,
Porto Alegre, BR-RS, 2018.

1. Análise de sensibilidade. 2. Dinâmica
comparativa. 3. Otimização dinâmica. 4. Teorema do
envelope. 5. Metodologia primal-dual. I. Araújo,
Jorge Paulo de, orient. II. Título.

KLAUS BÖESCH

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM OTIMIZAÇÃO DINÂMICA

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Aprovado em: Porto Alegre, 3 de dezembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo – Orientador
UFRGS

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Griebeler
UFRGS

Prof. Dr. Sabino da Silva Pôrto Júnior
UFRGS

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao Professor Jorge Araújo pelas orientações ao longo deste trabalho, cujas contribuições foram muito importantes para sua realização, pois o tema abordado não é algo trivial para o nível de graduação. Porém, suas contribuições iniciaram já na definição do tema, ao apresentar-me as teorias de Cálculo Variacional e Controle Ótimo em Tópicos Especiais em Economia Matemática.

Agradeço também aos Professores Marcelo Griebeler e Sabino Pôrto por aceitarem participar da banca examinadora deste trabalho, os quais também contribuíram, mesmo que de forma indireta para a realização do trabalho, através das disciplinas do Mestrado em Economia Aplicada.

Agradeço ainda a todos os Professores e Professoras da Faculdade de Ciências Econômicas que de alguma forma contribuíram para minha formação como Economista ao longo dos últimos anos.

E como não poderia deixar de fazer, agradeço aos meus familiares e, em especial, aos meus pais, por todo apoio que me deram ao longo desta trajetória no Curso de Ciências Econômicas e na vida.

RESUMO

Neste trabalho é apresentada a metodologia primal-dual dinâmica introduzida por Michael Caputo em 1988 e generalizada em 1990, para problemas não-autônomos de controle ótimo, em tempo fixo e finito. Esta metodologia permite a realização de dinâmica comparativa e a caracterização de propriedades qualitativas do problema em análise, resultados estes que dificilmente são obtidos com outras abordagens. O resultado dinâmico apresentado recorre à técnica empregada por Eugene Silberberg em seu artigo de 1974, que é apresentada com a finalidade de tornar completa a exposição da abordagem dinâmica. É também apresentado um exemplo de aplicação do Teorema do Envelope Dinâmico para um problema intertemporal da firma competitiva extratora de recursos renováveis, produzindo resultados análogos aos resultados “clássicos” do problema estático. A metodologia primal-dual dinâmica de Caputo é então empregada para a realização de análise de sensibilidade em um problema dinâmico de extração de recursos exauríveis em monopólio, apresentado por Harold Hotelling em seu artigo de 1931. A aplicação do Teorema do Envelope Dinâmico produziu bons resultados para a análise de sensibilidade do problema, que foram validados por uma abordagem alternativa. No entanto, a caracterização das propriedades qualitativas para o problema analisado apesar de apresentar as relações de simetria e reciprocidade esperadas, não apresentou uma matriz de derivadas parciais de segunda ordem bem definida, uma vez que a função de lucro utilizada pode não ser considerada “bem-comportada”, não atendendo os requisitos para uma análise qualitativa bem caracterizada do problema.

Palavras-chave: Dinâmica comparativa. Análise de sensibilidade. Otimização dinâmica. Teorema do envelope. Metodologia primal-dual.

ABSTRACT

This work presents the dynamic primal-dual methodology introduced by Michael Caputo in 1988 and generalized in 1990, in the context of general nonautonomous optimal control problems. This methodology provides comparative dynamic results and a characterization of qualitative properties of the problem under analysis which are not derivable by other methodologies. The dynamic result presented is the exact intertemporal equivalent of primal-dual approach employed by Eugene Silberberg in 1974, which will be presented in order to complete the demonstration of dynamic results. A Dynamic Envelope Theorem application example of an intertemporal problem of the competitive renewable resources extracting firm is also presented, providing equivalent results of the static optimization problem. Caputo's dynamic primal-dual methodology is then applied in a dynamic problem of exhaustible resources extracting firm in monopolistic competition, presented by Harold Hotelling in 1931. The application of Dynamic Envelope Theorem provided good comparative dynamics results that were validated through an alternative approach. However, the characterization of the qualitative properties of the problem, despite presenting the expected symmetry and reciprocity relations, did not presented a well-defined matrix of cross partials, since the profit function employed may not be considered "well-behaved" not meeting the necessary definiteness requirements for a well-characterized qualitative analysis of the problem.

Keywords: Comparative dynamics. Sensitivity analysis. Dynamic optimization. Envelope theorem. Primal-dual methodology.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Comportamento da função de demanda inversa.	39
Gráfico 2 - Comportamento do lucro da firma em função da quantidade.	40
Gráfico 3 - Comportamento da variável de estado $x(t, T)$ sem restrições.	44
Gráfico 4 - Comportamento da variável de controle $q(t, T)$ sem restrições.	44
Gráfico 5 - Comportamento da variável q em função da variável x	48
Gráfico 6 - Comportamento das variáveis $q(t)$, $p(t)$, $\pi(t)$, $m(t)$ e $x(t)$	58
Gráfico 7 - Variação de J^* em resposta à variação marginal de K	59
Gráfico 8 - Variação J^* em resposta à variação de K	60
Gráfico 9 - Variação de J^* em resposta à variação de δ	61
Gráfico 10 - Variação de J^* em resposta à variação de x_0	62
Gráfico 11 - Variação de J^* em resposta à variação de T , para $T < T^0$	63
Gráfico 12 - Variação de J^* em resposta à variação de T , para $T \geq T^0$	63
Gráfico 13 - Valores de $x(T)$, $q(T)$, J e T_1 em função de T escolhido.	64

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	TEOREMAS DO ENVELOPE.....	12
2.1	TEOREMA DO ENVELOPE ESTÁTICO.....	12
2.1.1	O teorema estático.....	12
2.1.2	A metodologia primal-dual.....	16
2.2	TEOREMA DO ENVELOPE DINÂMICO.....	17
2.2.1	A versão variacional	18
2.2.2	O Teorema do Envelope de Caputo	20
2.3	AS DERIVADAS DE SEGUNDA ORDEM	26
3	UM EXEMPLO DE EXTRAÇÃO DE RECURSOS RENOVÁVEIS	32
4	MONOPÓLIO DE UM RECURSO EXAURÍVEL.....	38
4.1	A EXTRAÇÃO ÓTIMA DO RECURSO EXAURÍVEL EM MONOPÓLIO.....	40
4.2	AS PROPRIEDADES DE ENVELOPE DO PROBLEMA	49
4.3	VALIDAÇÃO DAS DERIVADAS DE PRIMEIRA ORDEM.....	52
4.4	UM EXERCÍCIO NUMÉRICO	57
5	PROPRIEDADES QUALITATIVAS DO PROBLEMA	66
5.1	VERIFICAÇÃO DAS DERIVADAS DE SEGUNDA ORDEM.....	68
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
	REFERÊNCIAS.....	76

1 INTRODUÇÃO

O estudo formal referente à análise de sensibilidade estática começa em 1947, com o livro “Foundations of Economic Analysis” de Paul Samuelson. O Teorema do Envelope é parte do que Samuelson chamou de estática comparativa e é apresentado por Samuelson no Capítulo 3 “The Theory of Maximizing Behavior”, na seção intitulada “Displacement of quantity maximized”. Resultados semelhantes aos do Teorema do Envelope apareceram em outros trabalhos em economia, alguns deles conhecidos como Lema de Hotelling, Lema de Shephard e Identidade de Roy, aparecendo também já no final da década de 1880, em um livro de Rudolf Auspitz e Richard Lieben intitulado “*Untersuchungen über die Theorie des Preises* (Investigações sobre a teoria dos preços)”, onde os autores utilizaram o que é hoje conhecido como Teorema do Envelope. Desde sua formalização por Samuelson a metodologia de estática comparativa não teve mudanças substanciais, até o artigo de Eugene Silberberg de 1974, onde neste trabalho Silberberg estende a metodologia primal-dual, oferecendo uma derivação alternativa e certa generalização do Teorema do Envelope, sendo uma abordagem “mais simples e mais elegante”. Além disso, Silberberg mostra que propriedades qualitativas de qualquer problema de maximização sujeito a restrições podem ser resumidas em uma matriz positiva-semidefinida sujeita a restrições, demonstrando que todos os resultados de estática comparativa das teorias da firma e do consumidor são casos especiais desta caracterização mais geral.

Um dos primeiros autores a tratar das derivadas da função valor-ótimo em relação aos parâmetros exógenos em um problema dinâmico, ou seja, análise de sensibilidade em otimização dinâmica, foi Hajime Oniki, no artigo “Comparative dynamics (sensitivity analysis) in optimal control theory” de 1973. LaFrance e Barney apresentam as versões dinâmicas da Identidade de Roy, do Lema de Hotelling e da Equação de Slutsky em seu artigo “The envelope theorem in dynamic optimization” de 1991.

Michael Caputo em seu artigo “How to do comparative dynamics on the back of an envelope in optimal control theory” de 1990 apresenta o Teorema do Envelope Dinâmico através da metodologia primal-dual dinâmica, que segundo ele é o equivalente intertemporal aos resultados apresentados por Silberberg. De acordo com Caputo (1990), na época em que o artigo foi escrito haviam três possíveis abordagens

para a realização de dinâmica comparativa. A primeira delas, no caso de problemas de horizonte infinito, consiste em analisar o comportamento do problema no estado estacionário, supondo que no longo prazo (quando $t \rightarrow +\infty$) o sistema atinge a estabilidade, então recorre-se à linearização do sistema de equações diferenciais e analisam-se as perturbações em relação ao estado estacionário.

A segunda possível abordagem foi introduzida por Oniki (1973), e consiste na aplicação do Teorema de Peano para derivar um sistema de equações diferenciais variacional equivalente, então a solução deste sistema fornece a dinâmica comparativa, porém, dificilmente encontra-se solução na forma fechada. Este método permite avaliar o impacto de mudanças no conjunto de parâmetros em torno da vizinhança de um conjunto de parâmetros fixos ao longo de toda a trajetória das variáveis, e não apenas na vizinhança do estado estacionário, como a primeira abordagem. Quando há duas ou mais variáveis de estado, torna-se muito difícil extrair propriedades qualitativas utilizando-se as duas primeiras abordagens.

A terceira abordagem para dinâmica comparativa foi introduzida por Caputo (1988), para problemas não-autônomos de cálculo variacional, onde a metodologia proposta é o equivalente intertemporal da metodologia primal-dual apresentada por Silberberg (1974). Caputo (1990) generaliza estes resultados, apresentando a metodologia primal-dual no contexto de problemas de controle ótimo não-autônomos e de horizonte de tempo fixo e finito, então os resultados do trabalho de Caputo (1988) podem ser obtidos como um caso particular desta abordagem mais geral. Além disso, é possível verificar mudanças em um conjunto inicial de parâmetros que afetam toda a trajetória das variáveis de estado, controle e coestado do problema.

O objetivo deste trabalho é realizar a análise de sensibilidade em um problema de controle ótimo utilizando o Teorema do Envelope Dinâmico apresentado por Caputo. Para isso vamos utilizar um problema de maximização de lucros em monopólio, que pode ser considerado um problema não muito “bem-comportado”, se comparado ao problema da firma competitiva, por exemplo. O problema escolhido tem solução fechada, que pode ser facilmente obtida, o que facilita a comparação dos resultados do Teorema do Envelope Dinâmico com outros métodos de realização de análise de sensibilidade, então os resultados obtidos podem ser validados.

No segundo capítulo deste trabalho apresentamos o Teorema do Envelope Estático e o Teorema do Envelope Dinâmico além de comentar brevemente as origens destes resultados, também tratamos das derivadas de segunda ordem. No terceiro capítulo reproduzimos um exemplo apresentado por Caputo, do problema intertemporal de maximização de lucro da firma competitiva, onde são verificadas também as propriedades qualitativas do problema e fornecidas interpretações econômicas sobre os resultados.

No quarto capítulo analisamos um problema de maximização de lucro da firma extratora de recursos exauríveis em monopólio, apresentado por Hotelling como um problema de Cálculo Variacional em seu artigo “The economics of exhaustible resources” de 1931. Hotelling comenta que a abordagem econômica teórica do equilíbrio estático é inadequada para tratar o problema de uma indústria cuja manutenção indefinida de uma taxa de produção estável é uma impossibilidade física e que, desta forma, está sujeita a declinar. E ainda, Hotelling afirma que problemas envolvendo recursos exauríveis não podem evitar a abordagem de Cálculo Variacional incluindo ainda “as mais recentes pesquisas neste ramo da matemática”. Apresentamos então o problema proposto por Hotelling como um problema de Controle Ótimo, utilizando o Princípio do Máximo para sua solução e obtendo as trajetórias ótimas das variáveis do problema, além da função valor-ótimo para o lucro em forma fechada. Nas seções seguintes aplicamos o Teorema do Envelope Dinâmico ao problema obtendo as derivadas de primeira ordem da função valor-ótimo e validamos estes resultados. Após, apresentamos algumas simulações da análise de sensibilidade do problema, verificando numericamente e graficamente os resultados obtidos. No quinto e último capítulo analisamos as propriedades qualitativas do problema através da verificação matriz formada com as derivadas de segunda ordem da função valor-ótimo.

2 TEOREMAS DO ENVELOPE

Neste capítulo apresentaremos o Teorema do Envelope Estático e Teorema do Envelope Dinâmico. Além disso, comentamos brevemente as origens destes resultados. A apresentação do Teorema do Envelope Estático será feita com o objetivo de tornar completa a exposição de seu equivalente dinâmico.

O resultado dinâmico que empregamos, exposto no artigo “How to do comparative dynamics on the back of an envelope in optimal control theory” de Michael Caputo (1990), recorre à técnica utilizada por Eugene Silberberg no artigo “A revision of comparative statics methodology in economics, or, how to do comparative statics on the back of an envelope” (1974).

Na primeira seção deste capítulo apresentamos brevemente a exposição de Silberberg (1974) para o Teorema do Envelope Estático, na segunda seção apresentamos a exposição de Caputo (1990) para o Teorema do Envelope Dinâmico e na terceira e última seção tratamos das derivadas de segunda ordem.

2.1 TEOREMA DO ENVELOPE ESTÁTICO

2.1.1 O teorema estático

No século XX, a história deste teorema começa com o livro “Foundations of economic analysis” de 1947 de Paul Samuelson, segundo o autor “para que a análise seja útil ela tem que fornecer informações a respeito do modo em que nossas quantidades de equilíbrio irão variar como resultado das variações dos parâmetros tomados como dados independentes” (1974, p. 257). Esta afirmação de Samuelson é mais geral que o Teorema do Envelope, que trata apenas de uma quantidade de equilíbrio que é aquela que resulta de um processo de minimização ou maximização.

O Teorema do Envelope é parte do que Samuelson chamou de estática comparativa. Este teorema é apresentado por Samuelson no Capítulo 3 “The Theory of Maximizing Behavior”, na seção intitulada “Displacement of quantity maximized”. Nesta seção Samuelson aborda a questão das derivadas em relação ao parâmetro exógeno α da função $z(\alpha)$, obtida pelo processo de maximização de uma função $z = f(x_1, \dots, x_n; \alpha)$, nas variáveis de escolha x_1, \dots, x_n .

Se $x^*(\alpha) = \begin{bmatrix} x_1^*(\alpha) \\ \vdots \\ x_n^*(\alpha) \end{bmatrix}$ é um máximo local de

$$z(\alpha) = \max f(x_1, \dots, x_n, \alpha),$$

então

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x^*(\alpha), \alpha).$$

Samuelson comenta que uma expressão similar também pode ser obtida no caso de uma maximização restrita:

$$z(\alpha) = \max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n, \alpha),$$

sujeito a

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n, \alpha) &\leq 0, \\ &\vdots \\ g_f(x_1, \dots, x_n, \alpha) &\leq 0, \\ h_1(x_1, \dots, x_n, \alpha) &\geq 0, \\ &\vdots \\ h_e(x_1, \dots, x_n, \alpha) &\geq 0. \end{aligned}$$

A razão pela qual chamar tais resultados de “Teorema do Envelope”, Samuelson justifica dizendo que “esta é a familiar relação de tangência entre o envelope de uma família de curvas e as curvas que o tocam” (1974, p. 34).

Atualmente, sabemos que não foi Samuelson o primeiro a empregar um dos resultados que chamamos de “Teorema do Envelope”:

No final da década de 1880, Rudolf Auspitz e Richard Lieben usaram o que é hoje conhecido como Teorema do Envelope, apesar de não chamá-lo por este nome, ou qualquer outro nome. Eles o fizeram em seis ocasiões diferentes em seu livro *Untersuchungen über die Theorie des Preises* [Investigações sobre a teoria dos preços], publicado em 1889 [...] (SCHMIDT, 2004, p. 103).

As metodologias de estática comparativa praticamente não tiveram mudanças desde sua formalização por Samuelson. Em 1972, Silberberg apresentou uma maneira alternativa de obter o Teorema do Envelope, “mais simples e elegante”,

através de um procedimento que chamou de “problema primal-dual” (SILBERBERG, 1974), que vamos apresentar abaixo.

Consideramos o seguinte problema de maximização de uma função $f(x, \alpha)$

$$\max f(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad (2.1)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0, \\ &\vdots \\ g_r(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde as variáveis de escolha do problema são:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

e as variáveis exógenas do problema são:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Representando $g(x, \alpha)$ por:

$$g(x, \alpha) = \begin{bmatrix} g_1(x, \alpha) \\ \vdots \\ g_r(x, \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ \vdots \\ g_r(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

supomos que os gradientes $\nabla g_1(x, \alpha), \dots, \nabla g_r(x, \alpha)$ sejam linearmente independentes, ou seja, exigimos que matriz g_x tenha posto igual a r , onde:

$$g_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x, \alpha) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(x, \alpha) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x, \alpha) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_n}(x, \alpha) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Se x^* é um máximo local ou um máximo global para f , dadas as restrições $g_1(x, \alpha) = 0, \dots, g_r(x, \alpha) = 0$, então:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*, \alpha) &= (-\lambda_1^*) \nabla g_1(x^*, \alpha) + \cdots + (-\lambda_r^*) \nabla g_r(x^*, \alpha) \\ g_1(x^*, \alpha) &= 0, \dots, g_k(x^*, \alpha) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, dado o Lagrangeano

$$\mathcal{L}(x, \alpha) = f(x, \alpha) + \lambda(\alpha)'g(x, \alpha), \quad (2.5)$$

onde:

$$\lambda(\alpha)'g(x, \alpha) = [\lambda_1(\alpha), \dots, \lambda_r(\alpha)] \begin{bmatrix} g_1(x, \alpha) \\ \vdots \\ g_r(x, \alpha) \end{bmatrix},$$

em que $\lambda(\alpha)'$ é o transposto do vetor

$$\lambda(\alpha) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\alpha) \\ \vdots \\ \lambda_r(\alpha) \end{bmatrix}.$$

As condições de primeira ordem se traduzem como

$$\mathcal{L}_x = f_x + \lambda'g_x = 0, \quad g = 0, \quad (2.6)$$

onde:

$$\mathcal{L}_x = \nabla \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad f_x = \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

g_x conforme definido em (2.4) e $g = g(x, \alpha)$ de acordo com (2.3).

Se a forma quadrática \mathcal{L}_{xx} for negativa-semidefinida nas restrições $g_1(x) = 0, \dots, g_r(x) = 0$, então x^* é um máximo global para \mathcal{L} em (2.5), dadas as restrições, ou seja,

$$f(x) + \lambda'g(x) \leq f(x^*) + \lambda'^*g(x^*)$$

e como $g(x) = g(x^*) = 0$, então:

$$f(x) \leq f(x^*)$$

e, portanto, x^* é um máximo global para f na restrição $g(x) = 0$.

2.1.2 A metodologia primal-dual

Sejam:

$$x^* = x^*(\alpha), \quad (2.7)$$

$$\lambda^* = \lambda^*(\alpha), \quad (2.8)$$

substituindo (2.7) em $f(x, \alpha)$ obtemos a função de máximo dada por:

$$\phi(\alpha) = f(x^*(\alpha), \alpha). \quad (2.9)$$

Considerando o problema primal-dual que consiste em minimizar $\phi(\alpha) - f(x, \alpha)$, sujeito a restrição $g(x, \alpha) = 0$. Neste problema não temos variáveis exógenas, então o problema primal-dual fica:

$$\min_{(x, \alpha)} [\phi(\alpha) - f(x, \alpha)], \quad (2.10)$$

sujeito a

$$g(x, \alpha) = 0, \quad (2.11)$$

e a minimização é feita sobre

$$(x, \alpha) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

O Lagrangeano do problema primal-dual é:

$$\mathcal{L}^* = \phi(\alpha) - f(x, \alpha) - \lambda' g(x, \alpha), \quad (2.12)$$

cujas condições primeira ordem são:

$$\mathcal{L}_x^* = -f_x - \lambda' g_x = 0, \quad (2.13)$$

$$\mathcal{L}_\alpha^* = \phi_\alpha - f_\alpha - \lambda' g_\alpha = 0, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{L}_\lambda^* = -g = 0, \quad (2.15)$$

que é o resultado para as condições necessárias de primeira ordem do problema primal-dual apresentado por Silberberg (1974, p. 161). Isolando ϕ_α na equação (2.14) obtemos:

$$\phi_\alpha = f_\alpha + \lambda' g_\alpha. \quad (2.16)$$

O resultado obtido em (2.16) é o conhecido Teorema do Envelope. Temos ainda que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_i}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) &= \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(x_1^*, \dots, x_n^*, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ &+ \lambda_1^*(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_i}(x_1^*, \dots, x_n^*, \alpha_1, \dots, \alpha_m) + \dots \\ &+ \lambda_r^*(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \frac{\partial g_r}{\partial \alpha_i}(x_1^*, \dots, x_n^*, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.2 TEOREMA DO ENVELOPE DINÂMICO

Aparentemente, o primeiro autor a tratar das derivadas da função valor-ótimo em relação aos parâmetros exógenos de um problema dinâmico foi Hajime Oniki, no artigo “Comparative dynamics (sensitivity analysis) in optimal control theory” (1973). A este trabalho seguiram-se artigos de Benveniste e Scheinkman em 1979 e Seierstad em 1981/82, segundo Karl-Gustav Löfgren no artigo “A brief history of envelope theorems in economics: static and dynamics” (2014). O artigo de Caputo que analisamos é de 1990.

Antes de apresentar o resultado de Caputo, apresentamos as condições de primeira ordem para o problema que trataremos na sua forma variacional, ou seja, consideramos a existência de soluções interiores à região viável, excluindo a existência de soluções de canto para a função controle $u(t)$. Ressaltamos que o tratamento de Caputo implicitamente faz esta suposição.

2.2.1 A versão variacional

Consideremos o seguinte problema:

$$\min/\max \int_0^T f(x(t), u(t), t) dt, \quad (2.18)$$

sujeito a

$$x'(t) = g(x(t), u(t), t), \quad (2.19)$$

$$h(x(t), u(t), t) = 0, \quad (2.20)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.21)$$

digamos que $u^*(t)$ e $x^*(t)$ satisfazem o problema acima, então:

$$\lambda(t)[g(x^*(t), u^*(t), t) - x^{*'}(t)] = 0,$$

$$\mu(t)h(x^*(t), u^*(t), t) = 0,$$

para funções $\lambda(t)$ e $\mu(t)$ arbitrariamente escolhidas.

Como:

$$\int_0^T \lambda(t)x^{*'}(t) dt = \lambda(t)x^*(t)|_0^T - \int_0^T \lambda'(t)x^*(t) dt, \quad (2.22)$$

integrando por partes, então:

$$\begin{aligned} \int_0^T f^* dt &= \int_0^T [f^* + \lambda(g^* - x^{*'}) + \mu h^*] dt \\ &= \int_0^T (f^* + \lambda g^* - \lambda x^{*'} + \mu h^*) dt, \end{aligned}$$

onde $f^* = f(x^*(t), u^*(t), t)$, $g^* = g(x^*(t), u^*(t), t)$ e $h^* = h(x^*(t), u^*(t), t)$.

Substituindo (2.22) no resultado anterior temos:

$$\int_0^T f^* dt = \int_0^T (f^* + \lambda g^* + \lambda' x^* + \mu h^*) dt - \lambda(T)x^*(T) + \lambda(0)x^*(0). \quad (2.23)$$

Seja $k(t)$ um desvio, ou seja, uma função fixa e consideremos $u^* + ak(t)$, onde $a \in \mathbb{R}$. E seja $y(t, a)$ a variável de estado gerada pelo problema inicial se considerarmos as restrições:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t}(t, a) &= g(y(t, a), u^*(t) + ak(t), t) \\ h(y(t, a), u^*(t) + ak(t), t) &= 0 \\ y(0, a) &= x_0\end{aligned}$$

Seja:

$$J(a) = \int_0^T f(y(t, a), u^*(t) + ak(t), t) dt,$$

então,

$$J(a) = \int_0^T (f + \lambda g + \lambda' y + \mu h) dt - \lambda(T)y(T, a) + \lambda(0) \underbrace{y(0, a)}_{=x_0},$$

como u^* e x^* são as funções que minimizam ou maximizam J em $a = 0$, então $J'(0) = 0$.

Mas,

$$\begin{aligned}J'(0) &= \int_0^T \left[f_x \frac{\partial y}{\partial a} + f_u k + \lambda g_x \frac{\partial y}{\partial a} + \lambda g_u k + \lambda' \frac{\partial y}{\partial a} + \mu h_x \frac{\partial y}{\partial a} + \mu h_u k \right] dt \\ &\quad - \lambda(T) \frac{\partial y}{\partial a}(T, a).\end{aligned}$$

Escolhemos λ e μ de modo que sejam soluções do problema:

$$\begin{aligned}f_x + \lambda g_x + \mu h_x + \lambda' &= 0, \\ \lambda(T) &= 0\end{aligned}$$

e então:

$$J'(0) = \int_0^T (f_u + \lambda g_u + \mu h_u) k dt = 0.$$

Como isto vale para todo desvio, então:

$$f_u + \lambda g_u + \mu h_u = 0,$$

obtemos assim as chamadas condições de primeira ordem para um ótimo interior

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) + \mu(t) \frac{\partial h}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) + \mu(t) \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) = -\lambda'(t), \quad (2.25)$$

$$\lambda(T) = 0.$$

Normalmente, definimos o Hamiltoniano deste problema como:

$$H(x, u, \lambda, t) = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t) \quad (2.26)$$

e o Lagrangeano como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, u, \lambda, \mu, t) &= H(x, u, \lambda, t) + \mu h(x, u, t) \\ &= f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t) + \mu h(x, u, t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

e, portanto, as condições de primeira ordem do Lagrangeano em (2.27) se expressam como:

$$\mathcal{L}_u = f_u + \lambda g_u + \mu h_u = 0, \quad (2.28)$$

$$\mathcal{L}_\mu = h = 0. \quad (2.29)$$

E a condição

$$\mathcal{L}_x = f_x + \lambda g_x + \mu h_x = -\lambda', \quad \lambda(T) = 0. \quad (2.30)$$

Ou ainda

$$\mathcal{L}_u = H_u + \mu h_u = 0,$$

$$\mathcal{L}_x = H_x + \mu h_x = -\lambda', \quad \lambda(T) = 0.$$

Este último resultado pode ser encontrado, sem demonstração em Léonard e Long (1992, p. 193).

2.2.2 O Teorema do Envelope de Caputo

Nosso interesse no artigo de Caputo (1990) está no emprego da metodologia primal-dual para obter o Teorema do Envelope no contexto dinâmico.

O problema que tratamos é:

$$\max \int_0^T f(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) dt \quad (2.31)$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
 x'_1(t) &= g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) \\
 &\quad \vdots \\
 x'_n(t) &= g_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) \\
 h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) &= 0 \\
 &\quad \vdots \\
 h_k(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) &= 0 \\
 x_1(0) &= x_{01} \\
 &\quad \vdots \\
 x_n(0) &= x_{0n},
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Para o qual adotamos uma notação mais adequada:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, & x_0 &= \begin{bmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix}, & u(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, & \alpha &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}, \\
 g(x(t), u(t), t; \alpha) &= \begin{bmatrix} g_1(x(t), u(t), t; \alpha) \\ \vdots \\ g_n(x(t), u(t), t; \alpha) \end{bmatrix}, \\
 h(x(t), u(t), t; \alpha) &= \begin{bmatrix} h_1(x(t), u(t), t; \alpha) \\ \vdots \\ h_k(x(t), u(t), t; \alpha) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

onde α é um conjunto de parâmetros exógenos. Então o problema é reformulado como:

$$V(\alpha) = \max \int_0^T f(x(t), u(t), t; \alpha) dt,$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= g(x(t), u(t), t; \alpha), \\
 h(x(t), u(t), t; \alpha) &= 0, \\
 x(0) &= x_0.
 \end{aligned}$$

Como sabemos, as funções de controle $u^*(t)$ ótimas maximizam o Hamiltoniano associado ao problema.

Se o Hamiltoniano do problema é:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t; \alpha) = f(x(t), u(t), t; \alpha) + \lambda(t)' g(x(t), u(t), t; \alpha),$$

onde

$$\lambda(t)'g(x(t), u(t), t, \alpha) = \lambda_1(t)g_1(x(t), u(t), t; \alpha) + \dots + \lambda_n(t)g_n(x(t), u(t), t; \alpha)$$

e $\lambda(t)'$ indica o transposto do vetor

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{bmatrix},$$

então

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t; \alpha) \geq \max_{u(t)} H(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t; \alpha),$$

para o problema

$$\max \int_0^T f(x(t), u(t), t; \alpha) dt,$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(x(t), u(t), t; \alpha), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Portanto, podemos formular o problema proposto por Caputo (1990) como:

$$\max \int_0^T f(x(t), u(t), t; \alpha) dt,$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(x(t), u(t), t; \alpha), \\ h(x(t), u(t), t; \alpha) &= 0, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

como um problema de maximização restrita, cujo Lagrangeano associado é:

$$\mathcal{L} = H(x(t), u(t), \lambda(t), t; \alpha) + \mu(t)' h(x(t), u(t), t; \alpha),$$

onde

$$\mu(t)' h(x(t), u(t), t, \alpha) = \mu_1(t) h_1(x(t), u(t), t; \alpha) + \dots + \mu_k(t) h_k(x(t), u(t), t; \alpha)$$

$$\text{e } \mu(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \vdots \\ \mu_k(t) \end{bmatrix}.$$

Como vimos anteriormente em (2.28)-(2.30), as condições de primeira ordem para este problema se expressam como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u &= f_u(x(t), u(t), t; \alpha) + \lambda(t)' g_u(x(t), u(t), t; \alpha) \\ &\quad + \mu(t)' h_u(x(t), u(t), t; \alpha) = 0, \\ \mathcal{L}_\mu &= h(x(t), u(t), t; \alpha) = 0, \\ \mathcal{L}_x &= f_x(x(t), u(t), t; \alpha) + \lambda(t)' g_x(x(t), u(t), t; \alpha) \\ &\quad + \mu(t)' h_x(x(t), u(t), t; \alpha) = -\lambda'(t), \end{aligned}$$

$$\text{onde, } \lambda'(t) = \begin{bmatrix} \lambda'_1(t) \\ \vdots \\ \lambda'_n(t) \end{bmatrix} \text{ e } \lambda(T) = 0.$$

Escolhendo-se um conjunto fixo de parâmetros exógenos $\beta^0 = \begin{bmatrix} \beta_1^0 \\ \vdots \\ \beta_s^0 \end{bmatrix}$, onde

$\beta^{0'} \equiv (\alpha^{0'}, T^0, x_0^{0'})$ e $s = r + n + 1$, obtém-se:

$$x^*(t; \beta^0), \quad u^*(t; \beta^0), \quad \lambda^*(t; \beta^0), \quad \mu^*(t; \beta^0),$$

que são as funções ótimas de x , u , λ e μ , dado o conjunto de parâmetros β^0 .

Se

$$J^*(\beta^0) = \int_0^T f(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) dt, \quad (2.33)$$

então o problema primal-dual será:

$$\max_{\alpha} \int_0^T f(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) dt - J^*(\beta^0), \quad (2.34)$$

sujeito a

$$x^{*'}(t; \beta^0) = g(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha), \quad (2.35)$$

$$h(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) = 0, \quad (2.36)$$

$$x^*(0; \beta^0) = x_0, \quad (2.37)$$

que é um problema sem parâmetros exógenos, que nos permite aplica as técnicas estáticas que apresentamos na seção anterior.

O Lagrangeano associado ao problema primal-dual é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^T f(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) dt - J^*(\beta^0) \\ &\quad + \lambda^*(t; \beta^0)' (g(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) - x^{*'}(t; \beta^0)) \\ &\quad + \mu^*(t; \beta^0)' (h(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha)) \\ &= \int_0^T [f(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) \\ &\quad + \lambda^*(t; \beta^0)' (g(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) - x^{*'}(t; \beta^0)) \\ &\quad + \mu^*(t; \beta^0)' (h(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha))] dt - J^*(\beta). \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} - \int_0^T \lambda(t; \beta^0)' x^{*'}(t; \beta^0) dt &= -\lambda(T; \beta^0)' x^*(T; \beta^0) \\ &\quad + \lambda(0; \beta^0)' x^*(0; \beta^0) \\ &\quad + \int_0^T \lambda'(t; \beta^0)' x^*(t; \beta^0) dt. \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima na expressão anterior, resulta em:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^T [f(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) \\ &\quad + \lambda^*(t; \beta^0)' g(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) \\ &\quad + \mu^*(t; \beta^0)' h(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) \\ &\quad + \lambda^{*'}(t; \beta^0)' x^*(t; \beta^0)] dt \\ &\quad - \lambda^*(T; \beta^0)' x^*(T; \beta^0) + \lambda^*(0; \beta^0)' x^*(0; \beta^0) \\ &\quad - J^*(\beta). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Então, derivando o Lagrangeano em (2.38) em relação a α temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha = & \int_0^T [f_\alpha(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) \\ & + \lambda^*(t; \beta^0)' g_\alpha(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) \\ & + \mu^*(t; \beta^0)' h_\alpha(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) dt] - J_\alpha^*(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, como J^* é obtido quando $\beta = \beta^0$, J_α^* se expressa como:

$$J_\alpha^*(\beta) = \int_0^T \underbrace{[f_\alpha + (\lambda^*)' g_\alpha + (\mu^*)' h_\alpha]}_{L_\alpha} dt. \quad (2.39)$$

Onde L é o Lagrangeano do problema primal e L_α é a derivada do Lagrangeano em relação ao parâmetro α .

Como:

$$J^*(\beta) = \int_0^T f(x^*(t; \beta^0), u^*(t; \beta^0), t; \alpha) dt,$$

derivando J^* em relação a T obtemos J_T^* :

$$J_T^*(\beta) = f(x^*(T; \beta), u^*(T; \beta), T; \alpha). \quad (2.40)$$

E ainda como $x^*(0, \beta^0) = x_0$, derivando o Lagrangeano em (2.38) em relação a x_0 temos:

$$\mathcal{L}_{x_0} = \lambda^*(0, \beta^0)' - J_{x_0}^*(\beta) = 0,$$

então, isolando $J_{x_0}^*$ temos:

$$J_{x_0}^*(\beta) = \lambda(0, \beta)'. \quad (2.41)$$

Os resultados obtidos em (2.39)-(2.41) são apresentados em Caputo (1990, p. 668) como o Teorema do Envelope Dinâmico.

2.3 AS DERIVADAS DE SEGUNDA ORDEM

A partir do método primal-dual de Silberberg (1974), obtivemos na primeira seção o Teorema do Envelope:

$$\phi_\alpha = f_\alpha + \lambda(\alpha)' g_\alpha \quad (2.42)$$

Nesta seção obteremos as derivadas de segunda ordem de ϕ . Para que possamos obter estas derivadas, escreveremos as derivadas de primeira ordem em (2.42), no Teorema do Envelope, de uma forma mais explícita.

Se derivarmos ϕ em relação à α_i então temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_i}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) &= \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(x_1^*(\alpha), \dots, x_n^*(\alpha), \alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ &+ \lambda_1(\alpha) \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_i}(x_1^*(\alpha), \dots, x_n^*(\alpha), \alpha_1, \dots, \alpha_m) + \dots \\ &+ \lambda_r(\alpha) \frac{\partial g_r}{\partial \alpha_i}(x_1^*(\alpha), \dots, x_n^*(\alpha), \alpha_1, \dots, \alpha_m), \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$ e $\lambda(\alpha)'$ indica o transposto do vetor $\lambda(\alpha) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\alpha) \\ \vdots \\ \lambda_r(\alpha) \end{bmatrix}$, logo

$\lambda(\alpha)' g_{\alpha_i}(x^*(\alpha), \alpha)$ está notando o produto escalar dado por:

$$\lambda_1(\alpha) \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_i}(x^*(\alpha), \alpha) + \dots + \lambda_r(\alpha) \frac{\partial g_r}{\partial \alpha_i}(x^*(\alpha), \alpha) \quad (2.44)$$

Se indicarmos genericamente uma derivada $\partial \phi / \partial \alpha_i$ por ϕ_α então podemos usar a expressão mais condensada como em (2.42), onde:

$$g_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial \alpha} \end{bmatrix},$$

Da expressão da derivada $\partial \phi / \partial \alpha_i$ podemos obter $\partial^2 \phi / \partial \alpha_j \partial \alpha_i$, onde, por comodidade, omitiremos o ponto de aplicação $(x^*(\alpha), \alpha)$. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_j \partial \alpha_i} &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial \alpha_i} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_j \partial \alpha_i} \\
&+ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_j} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_i} + \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_k \partial \alpha_i} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial \alpha_j \partial \alpha_i} \right) + \dots \\
&+ \frac{\partial \lambda_r}{\partial \alpha_j} \frac{\partial g_r}{\partial \alpha_i} + \lambda_r \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_r}{\partial x_k \partial \alpha_i} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial^2 g_r}{\partial \alpha_j \partial \alpha_i} \right)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Portanto, podemos expressar as $m \times m$ derivadas $\partial^2 \phi / \partial \alpha_j \partial \alpha_i$ como:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_m \partial \alpha_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_m} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_m} & \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_m^2} \end{bmatrix}_{m \times m} = \\
&\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial \alpha_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \alpha_m} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial \alpha_m} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial \alpha_m} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_m} \end{bmatrix}_{n \times m} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m \partial \alpha_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_m} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_m} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m^2} \end{bmatrix}_{m \times m} + \\
&\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \alpha_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_m} & \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_m} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \alpha_m} \end{bmatrix}_{m \times r} \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_r}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \lambda_r}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial \lambda_r}{\partial \alpha_m} \end{bmatrix}_{m \times r} + \\
&\lambda_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2 \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_n \partial \alpha_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial \alpha_m} & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2 \partial \alpha_m} & \dots & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_n \partial \alpha_m} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_m} \end{bmatrix}_{n \times m} \\
&+ \dots +
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_r \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g_r}{\partial x_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 g_r}{\partial x_2 \partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial^2 g_r}{\partial x_n \partial \alpha_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g_r}{\partial x_1 \partial \alpha_m} & \frac{\partial^2 g_r}{\partial x_2 \partial \alpha_m} & \cdots & \frac{\partial^2 g_r}{\partial x_n \partial \alpha_m} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_m} \end{bmatrix}_{n \times m} \\
& + \lambda_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g_1}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 g_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial^2 g_1}{\partial \alpha_m \partial \alpha_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_m} & \frac{\partial^2 g_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_m} & \cdots & \frac{\partial^2 g_1}{\partial \alpha_m^2} \end{bmatrix}_{m \times m} \\
& + \lambda_r \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g_r}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 g_r}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial^2 g_r}{\partial \alpha_m \partial \alpha_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g_r}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_m} & \frac{\partial^2 g_r}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_m} & \cdots & \frac{\partial^2 g_r}{\partial \alpha_m^2} \end{bmatrix}_{m \times m}
\end{aligned}$$

Escrevendo a matriz $\partial^2 \phi / \partial \alpha_j \partial \alpha_i$ como $\phi_{\alpha\alpha}$ e escolhendo uma notação compatível para as matrizes anteriores, temos que:

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha\alpha} &= f_{\alpha x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + f_{\alpha\alpha} + g_\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \\
&+ \lambda_1 (g_1)_{\alpha x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \cdots + \lambda_r (g_r)_{\alpha x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\
&+ \lambda_1 (g_1)_{\alpha\alpha} + \cdots + \lambda_r (g_r)_{\alpha\alpha},
\end{aligned} \tag{2.47}$$

que pode ser reorganizada como:

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha\alpha} &= (f_{\alpha x} + \lambda_1 (g_1)_{\alpha x} + \cdots + \lambda_r (g_r)_{\alpha x}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\
&+ f_{\alpha\alpha} + \lambda_1 (g_1)_{\alpha\alpha} + \cdots + \lambda_r (g_r)_{\alpha\alpha} + g_\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha},
\end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha\alpha} - f_{\alpha\alpha} - \lambda_1 (g_1)_{\alpha\alpha} - \cdots - \lambda_r (g_r)_{\alpha\alpha} &= (f_{\alpha x} + \lambda_1 (g_1)_{\alpha x} + \cdots \\
&+ \lambda_r (g_r)_{\alpha x}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + g_\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}.
\end{aligned}$$

Na expressão primal-dual do problema:

$$\min \phi(\alpha) - f(x, \alpha)$$

sujeito a

$$g(x, \alpha) = 0,$$

definimos o Lagrangeano do problema como:

$$\mathcal{L}^* = \phi(\alpha) - f(x, \alpha) - \lambda' g(x, \alpha).$$

Se $(x^*(\alpha), \alpha)$ é um mínimo local para este problema primal-dual, então a derivada segunda do Lagrangeano \mathcal{L}^* associado ao problema necessariamente tem que ser positiva-semidefinida ou positiva-definida, isto é,

$$v' \mathcal{L}^{*''}(x^*(\alpha), \alpha) v \geq 0,$$

ou ainda

$$v' \mathcal{L}^{*''}(x^*(\alpha), \alpha) v > 0,$$

para todo vetor v tal que

$$\nabla(g_1)_{(x,\alpha)}(x^*(\alpha), \alpha) v = 0, \dots, \nabla(g_r)_{(x,\alpha)}(x^*(\alpha), \alpha) v = 0,$$

onde a notação $\nabla(g_e)_{(x,\alpha)}$ está indicando

$$\nabla(g_e)_{(x,\alpha)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_e}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_e}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_e}{\partial \alpha_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_e}{\partial \alpha_m} \end{bmatrix},$$

o gradiente em relação a todas as variáveis de escolha. A condição anterior se traduz em termos dos menores do Hessiano orlado

$$H = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{xx}^* & \mathcal{L}_{x\alpha}^* & g_x \\ \mathcal{L}_{\alpha x}^* & \mathcal{L}_{\alpha\alpha}^* & g_\alpha \\ g_x & g_\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

ou ainda

Desta forma,

$$\mathcal{L}_{\alpha\alpha}^* = \phi_{\alpha\alpha} - f_{\alpha\alpha} - \lambda_1(g_1)_{\alpha\alpha} - \dots - \lambda_r(g_r)_{\alpha\alpha}$$

e conclui-se que

$$\mathcal{L}_{\alpha\alpha}^* = (f_{\alpha x} + \lambda_1(g_1)_{\alpha x} + \dots + \lambda_r(g_r)_{\alpha x}) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + g_\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}. \quad (2.49)$$

Como $(x^*(\alpha), \alpha)$ é um mínimo, então $\mathcal{L}_{\alpha\alpha}^*$ é positiva-semidefinida ou positiva-definida. Portanto, podemos empregar esta condição de $\mathcal{L}_{\alpha\alpha}^*$ juntamente com a expressão (2.49), para obter condições sobre as derivadas $\partial x_k^*/\partial \alpha_i$ expressas na matriz:

$$\frac{\partial x^*}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_m} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

3 UM EXEMPLO DE EXTRAÇÃO DE RECURSOS RENOVÁVEIS

Para demonstrar o potencial de aplicação da metodologia primal-dual dinâmica, Caputo (1990) apresenta um modelo de extração de recursos renováveis em concorrência, que será reproduzido neste capítulo.

O problema de maximização de lucro da firma competitiva extratora de recursos renováveis ao longo do tempo é dado por:

$$J^*(\beta) \equiv \max \int_0^{+\infty} [pf(x, k, v, I) - w'v - qI]e^{-\delta t} dt, \quad (3.1)$$

sujeito a

$$\dot{x} = F(x) - f(x, k, v, I), \quad x(0) = x_0, \quad (3.2)$$

$$\dot{k} = I - \theta k, \quad k(0) = k_0, \quad (3.3)$$

onde:

$\beta' \equiv (p, w', q, \theta, \delta, k_0, x_0)$ é o vetor de parâmetros exógenos do problema;

x é o estoque instantâneo do recurso renovável;

k é o estoque instantâneo de capital da firma;

I é a taxa de investimento da firma;

v é o vetor de fatores de produção, com m fatores;

p é o preço de venda do produto/recurso renovável;

w' é o vetor de preços dos fatores de produção;

q é o preço do capital/investimento;

θ é a taxa de depreciação do capital;

δ é a taxa de desconto;

k_0 é o estoque inicial de capital;

x_0 é o estoque inicial do recurso renovável;

$f(x, k, v, I)$ é a função de produção da firma;

$F(x)$ é a taxa de geração do recurso renovável.

$\pi(x, k, v, I) = pf(x, k, v, I) - w'v - qI$ é lucro instantâneo da firma.

O problema é autônomo e de horizonte infinito, possui duas variáveis de estado (x, k) e $m + 1$ variáveis de controle (v, I) . Devido ao problema ter muitas variáveis (de estado, controle e coestado), Caputo (1990) comenta que a utilização de outras

técnicas de análise é de difícil implementação, ou até mesmo impossível em alguns casos, porém, a abordagem primal-dual dinâmica é diretamente aplicável, produzindo resultados muito interessantes do ponto de vista econômico. Para extrair as propriedades qualitativas do problema é feita uma série de suposições que, resumidamente, garantem que o problema tenha solução única e interior e que seja possível a caracterização das derivadas de segunda ordem da função valor-ótimo.

O Lagrangeano do problema será idêntico ao Hamiltoniano, pois não há restrições do tipo não diferencial, então o Lagrangeano é dado por:

$$\begin{aligned} L \equiv H = & e^{-\delta t} [pf(x, k, v, I) - w'v - qI] \\ & + \lambda_1 [F(x) - f(x, k, v, I)] \\ & + \lambda_2 [I - \theta k]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pelo Teorema do Envelope Dinâmico, as derivadas parciais de primeira ordem de $J^*(\beta)$, ou seja, da função lucro indireta neste problema, são obtidas diferenciando-se o Lagrangeano do problema com respeito aos parâmetros exógenos, mantendo as variáveis de estado, coestado, controle e multiplicadores de Lagrange fixos, então deve-se avaliar estas derivadas nas trajetórias ótimas das variáveis e, finalmente, integrar o resultado ao longo horizonte planejamento.

Seguindo os passos descritos acima, para o preço p temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= e^{-\delta t} f(x, k, v, I), \\ \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_* &= e^{-\delta t} f(x^*(t; \beta), k^*(t; \beta), v^*(t; \beta), I^*(t; \beta)), \\ &= e^{-\delta t} y^*(t; \beta). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para o preço dos fatores w_i temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial w_i} &= -e^{-\delta t} v_i, \\ \frac{\partial H}{\partial w_i} \Big|_* &= -e^{-\delta t} v_i^*(t; \beta). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para o preço do capital q temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q} &= -e^{-\delta t}I, \\ \frac{\partial H}{\partial q}\Big|_* &= -e^{-\delta t}I^*(t; \beta).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Para a taxa de desconto δ temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \delta} &= -te^{-\delta t}[pf(x, k, v, I) - w'v - qI], \\ \frac{\partial H}{\partial \delta}\Big|_* &= -te^{-\delta t}[pf(x^*(t; \beta), k^*(t; \beta), v^*(t; \beta), I^*(t; \beta)), \\ &\quad -w'v^*(t; \beta) - qI^*(t; \beta)] = -te^{-\delta t}\pi^*(t; \beta).\end{aligned}\tag{3.8}$$

E, finalmente, para a taxa de depreciação θ temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \theta} &= -\lambda_2 k, \\ \frac{\partial H}{\partial \theta}\Big|_* &= -\lambda_2^*(t; \beta)k^*(t; \beta),\end{aligned}\tag{3.9}$$

onde o símbolo $|_*$ indica que a derivada está sendo avaliada nas funções de trajetória ótima das variáveis de estado, controle e coestado.

Integrando (3.5)-(3.9) ao longo do horizonte de tempo, que neste caso é de zero a infinito obtemos os seguintes resultados pelo Teorema do Envelope Dinâmico:

$$J_p^*(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} y^*(t; \beta) dt > 0, \tag{3.10}$$

$$J_{w_i}^*(\beta) = -\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} v_i^*(t; \beta) dt < 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{3.11}$$

$$J_q^*(\beta) = -\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} I^*(t; \beta) dt < 0, \tag{3.12}$$

$$J_\delta^*(\beta) = -\int_0^{+\infty} te^{-\delta t} \pi^*(t; \beta) dt < 0, \tag{3.13}$$

$$J_\theta^*(\beta) = -\int_0^{+\infty} \lambda_2^*(t; \beta) k^*(t, \beta) dt < 0, \tag{3.14}$$

Os resultados obtidos em (3.10)-(3.12) são análogos aos obtidos com o Teorema do Envelope Estático aplicado a um problema de maximização de lucros, no caso estático, ao derivar a função lucro em relação aos preços dos produtos e dos fatores de produção, obtém-se as funções de oferta líquida de bens. Este resultado é também conhecido como Lema de Hotelling, onde uma demonstração para o Lema de Hotelling pode ser vista em Varian (1992, p. 43). E versões dinâmicas da Identidade de Roy, do Lema de Hotelling e da Equação de Slutsky podem ser verificadas em LaFrance e Barney (1991). Conforme Caputo (1990) deve-se notar que os resultados obtidos pela aplicação do Teorema do Envelope dinâmico são funções descontadas cumulativas e não funções instantâneas como no caso estático.

Desta forma, o resultado obtido em (3.10) mostra que a derivada parcial da função valor ótimo J^* , em relação ao preço de mercado do recurso renovável p , tem como resultado a função cumulativa de oferta descontada. De forma semelhante os resultados obtidos em (3.11) e (3.12) indica que as derivadas de J^* com relação ao preço do i -ésimo fator de produção e com relação ao preço do bem de investimento, resultam no negativo das funções cumulativas de demanda descontada pelo i -ésimo fator e pelo bem de investimento, respectivamente, o sinal negativo, semelhante ao caso estático, pode ser interpretado como uma oferta líquida negativa.

O resultado obtido em (3.13) mostra que o aumento da taxa de desconto provoca uma redução na riqueza acumulada proporcional ao valor do fluxo de lucros acumulados descontados e ponderados pelo tempo em que os lucros foram obtidos. Por fim, (3.14) indica que um aumento na taxa de depreciação do estoque de capital θ , provoca uma redução na riqueza acumulada que é proporcional ao acumulado do valor presente do custo sombra de aquisição do capital, pois $\lambda_2^*(t; \beta)$ é o valor presente do preço sombra (em $t = 0$) de uma unidade de capital no tempo t .

Conforme Caputo (1990), os sinais das derivadas parciais de J^* de primeira ordem, obtidas em (3.10)-(3.14) são inequívocos, sendo este um dos motivos pelos quais “[...] o teorema do envelope dinâmico é poderoso e potencialmente muito útil em problemas de otimização dinâmica”. Além disso, como este problema é “bem comportado”, por suposição, atendendo as condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade de uma solução, sendo uma solução interior, é um problema de horizonte infinito, não existem restrições do tipo não diferencial, $\gamma' \equiv (p, w', q)$

aparece linearmente no integrando e não aparece nas equações de estado, $g_\gamma \equiv 0$, $g_t(x, u, t; \gamma) \equiv 0$, $\alpha' \equiv (\gamma', \delta)$, é na forma $f(x, u, t; \alpha) = e^{-\delta t} F(x, u, t; \alpha)$ com F convexa em $\gamma \forall \beta \in B(\beta^0; \varepsilon)$, então $J^* \in C^{(2)}$ e é convexa em no conjunto de parâmetros $\gamma \forall \beta \in B(\beta^0; \varepsilon)$, como enunciado no **Corolário 2** de Caputo (1990, p. 674). Por isso, a matriz $J_{\gamma\gamma}^*(\beta)$ é simétrica positiva-semidefinida e $C^{(0)} \forall B(\beta^0; \varepsilon)$, os elementos da diagonal da matriz $J_{\gamma\gamma}^*$ são não negativos, podendo ser derivados de (3.10)-(3.12), então:

$$J_{pp}^*(\beta) \equiv \frac{\partial}{\partial p} \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} y^*(t; \beta) dt \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{\partial y^*}{\partial p}(t; \beta) dt \geq 0 \quad (3.15)$$

$$J_{w_i w_i}^*(\beta) \equiv -\frac{\partial}{\partial w_i} \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} v_i^*(t; \beta) dt \equiv -\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{\partial v_i^*}{\partial w_i}(t; \beta) dt \geq 0, \quad (3.16)$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$J_{qq}^*(\beta) \equiv -\frac{\partial}{\partial q} \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} I^*(t; \beta) dt \equiv -\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{\partial I^*}{\partial q}(t; \beta) dt \geq 0 \quad (3.17)$$

De acordo com Caputo (1990) os resultados obtidos em (3.15)-(3.17) têm uma interpretação econômica interessante. A equação (3.15) revela que a função cumulativa de oferta descontada é não decrescente em p . Ou ainda, o impacto marginal descontado de um aumento em p é não negativo quando visto sobre todo o horizonte de planejamento da firma. De forma semelhante, (3.16) mostra que a função cumulativa de demanda descontada é não crescente em w_i . A interpretação para (3.17) é análoga. Este comportamento é análogo ao caso estático, uma vez que a demanda por fatores é não crescente em seu próprio preço, enquanto a oferta é não decrescente em seu próprio preço.

Caputo (1990) comenta ainda que é importante perceber que a otimização dinâmica não exige que a função de oferta $y^*(t; \beta)$ seja crescente no preço do produto para cada $t \in [0, +\infty)$, ou que as funções de demanda por fatores $v_i^*(t; \beta)$ e por bens de investimento $I^*(t; \beta)$ sejam decrescentes no próprio preço para cada $t \in [0, +\infty)$, em contraste com os modelos estáticos. Desta forma, um comportamento que de fato é consistente com as implicações da teoria econômica dinâmica pode parecer ser inconsistente com a teoria econômica estática.

Devido à simetria de $J_{\gamma\gamma}^*(\beta)$ teremos como resultado as seguintes condições de reciprocidade do modelo:

$$\begin{aligned} J_{pw_i}^*(\beta) &\equiv \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{\partial y^*}{\partial w_i}(t; \beta) dt, \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{\partial v_i^*}{\partial p}(t; \beta) dt \equiv J_{w_i p}^*(\beta), \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} J_{pq}^*(\beta) &\equiv \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{\partial y^*}{\partial q}(t; \beta) dt, \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{\partial I^*}{\partial p}(t; \beta) dt \equiv J_{p q}^*(\beta), \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} J_{w_i w_j}^*(\beta) &\equiv - \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{\partial v_i^*}{\partial w_j}(t; \beta) dt, \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{\partial I^*}{\partial w_i}(t; \beta) dt \equiv J_{q w_i}^*(\beta), \quad i \neq j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} J_{w_i q}^*(\beta) &\equiv - \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{\partial v_i^*}{\partial q}(t; \beta) dt, \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{\partial I^*}{\partial w_i}(t; \beta) dt \equiv J_{q w_i}^*(\beta), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.21)$$

De acordo com Caputo (1990), as relações de invariância acima não requerem que os impactos marginais descontados causados por perturbações nos parâmetros exógenos sejam iguais a cada ponto do horizonte de planejamento, mas sim sobre o horizonte de planejamento como um todo. Desta forma, as implicações da maximização estática de lucros implicam as relações de maximização de riqueza dadas em (3.18)-(3.21), mas o contrário não ocorre.

Caputo explica que a razão para a estrutura particular de simetria em (3.18)-(3.21) é exatamente análoga à do modelo estático de maximização de lucros, isto é, a invariância da função valor ótimo para a ordem de diferenciação (uma vez que J^* é $C^{(2)}$), e a natureza linear e conjugada na qual as variáveis de controle e parâmetros aparecem no integrando (na função objetivo no caso estático). O autor finaliza o exemplo comentando que tal caracterização qualitativa não seria possível de ser realizada utilizando-se outras abordagens para dinâmica comparativa, como linearização e equações diferenciais variacionais.

4 MONOPÓLIO DE UM RECURSO EXAURÍVEL

Neste capítulo será analisado um problema apresentado por Hotelling (1991), onde uma firma detém o monopólio da extração de um recurso mineral exaurível, devendo escolher uma taxa de extração do recurso ao longo do tempo, de modo a que maximizar seu lucro descontado. Como a firma é monopolista, irá se defrontar com a demanda de todo o mercado para o seu produto, neste caso, o preço do produto irá variar de acordo com a quantidade extraída/produzida.

O problema da firma consiste em maximizar o valor presente do lucro do proprietário da mina, com a restrição de que a quantidade de recursos extraídos da mina é finita:

$$J = \int_0^{+\infty} p(q)qe^{-\delta t} dt, \quad (4.1)$$

sujeito a

$$\int_0^{+\infty} qdt = x_0, \quad (4.2)$$

onde:

J é o valor presente do lucro;

q é a taxa de extração do recurso mineral exaurível;

$p(q)$ é o preço líquido do recurso extraído;

δ é a taxa de desconto da firma;

x_0 é o estoque inicial do recurso.

Este problema pode ser reescrito como um problema de controle ótimo da seguinte forma:

$$J^*(\beta) = \max \int_0^T \pi(q, x)e^{-\delta t} dt, \quad (4.3)$$

sujeito a

$$\dot{x} = -q, \quad x(0) = x_0 > 0, \quad x(T) = x_T \geq 0, \quad (4.4)$$

$$x(t) \geq 0, \quad (4.5)$$

$$q(t) \geq 0, \quad (4.6)$$

$$x_0 \geq \int_0^T q(t) dt, \quad (4.7)$$

onde:

$J^*(\beta)$ é o máximo do valor presente do lucro;

β é o conjunto de parâmetros exógenos do problema;

$q(t)$ é a taxa de extração do recurso exaurível – variável de controle;

$x(t)$ é o estoque do recurso natural na mina – variável de estado;

$p(q)$ é o preço líquido do recurso extraído;

δ – é a taxa de desconto da firma;

T – é o horizonte de tempo fixo da firma;

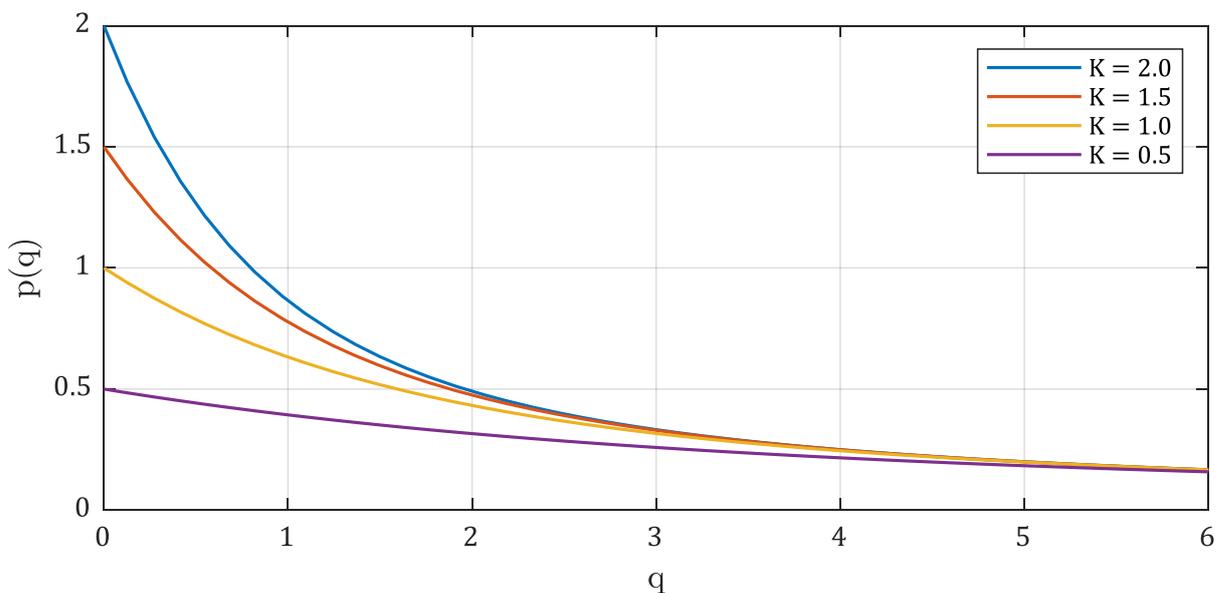
x_0 e x_T – são os estoques inicial e final do recurso exaurível.

Hotelling (1991) também propõe a seguinte função de demanda inversa:

$$p(q) = \frac{(1 - e^{-Kq})}{q}, \quad (4.8)$$

onde K é uma constante positiva. Para cada valor positivo de q a expressão é positiva e tem derivada negativa. E, conforme q se aproxima de zero, p se aproxima de K , por isto, conforme Dixon (2012), K é também chamado de preço de estrangulamento, como pode ser visto no Gráfico 1, para diferentes valores de K .

Gráfico 1 - Comportamento da função de demanda inversa.



Fonte: Elaboração própria (2018).

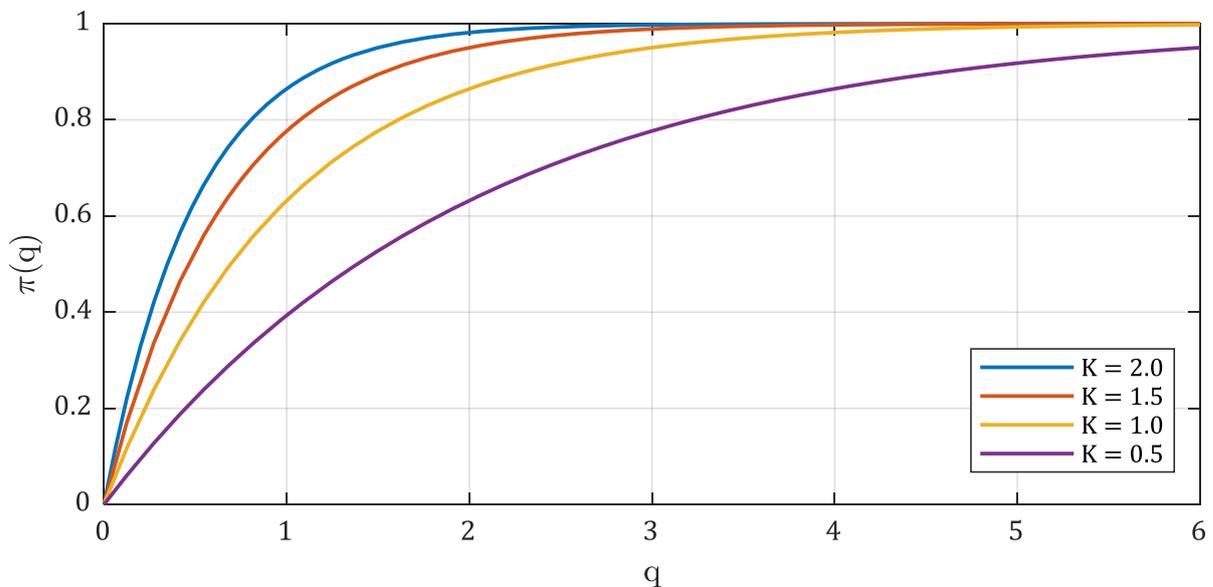
Hotelling (1991) demonstra o comportamento de $p(q)$ ao substituir a expansão de Taylor de e^{-Kq} em (4.8), obtendo $p(q) = K - K^2q/2! + K^3q^2/3! \dots$, tal que $p(0) = K$.

Considerando a função de demanda inversa apresentada em (4.8), o lucro em função da quantidade $\pi(q)$ fica:

$$\pi(q) = 1 - e^{-Kq}, \quad (4.9)$$

onde para valores grandes de q o lucro será unitário e zero para $q = 0$, como pode ser verificado no Gráfico 2, para diferentes valores de K .

Gráfico 2 - Comportamento do lucro da firma em função da quantidade.



Fonte: Elaboração própria (2018).

A seguir será apresentada a solução do problema de controle ótimo utilizando Princípio do Máximo e após serão analisadas as propriedades de envelope de J^* a partir do Teorema do Envelope Dinâmico.

4.1 A EXTRAÇÃO ÓTIMA DO RECURSO EXAURÍVEL EM MONOPÓLIO

Nesta seção vamos resolver o problema de controle ótimo apresentado em (4.3)-(4.7). O problema será resolvido com base nas teorias sobre controle ótimo e exemplos de Chiang (2000), Kamien e Schwartz (2012), Léonard e Long (1992), Caputo (2005) e no trabalho de Dixon (2012).

O Hamiltoniano de valor corrente que maximiza (4.3) com variável de coestado $m(t)$ é definido como:

$$\bar{H}(q(t), x(t), t, m) = \pi(q(t), x(t), t) - m(t)q(t), \quad (4.10)$$

onde a variável de coestado $m(t) = \lambda(t)e^{\delta t}$ é interpretada como o valor corrente do preço sombra do estoque do recurso não renovável ainda não extraído no instante t e $\lambda(t)$ é o preço sombra de valor presente do recurso.

As condições de primeira ordem, necessárias para que o problema tenha solução são dadas por:

$$\bar{H}_q = \pi_q - m(t) \leq 0, \quad q(t) \geq 0, \quad \bar{H}_q q(t) = 0 \quad (4.11)$$

$$\dot{x}(t) = -q(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \geq 0, \quad (4.12)$$

$$\dot{m}(t) = \delta m(t) - \bar{H}_x, \quad e^{-\delta T} m(T) \geq 0, \quad e^{-\delta T} m(T)x(T) = 0, \quad (4.13)$$

onde:

$$\bar{H}_q = \frac{\partial \bar{H}(q(t), x(t), t, m)}{\partial q}, \quad \pi_q = \frac{\partial \pi(q(t), x(t), t)}{\partial q},$$

$$\bar{H}_x = \frac{\partial \bar{H}(q(t), x(t), t, m)}{\partial x} = \pi_x = \frac{\partial \pi(q(t), x(t), t)}{\partial x}.$$

De (4.11) temos que como $q(t) \geq 0$, então para que $\bar{H}_q q(t) = 0$ seja satisfeito, \bar{H}_q deve ser igual a zero, portanto, $\pi_q = m(t)$. Derivando este resultado em relação a t , obtém-se $\dot{\pi}_q = \dot{m}(t)$. Dividindo a primeira equação de (4.13) por $m(t)$ e substituindo \bar{H}_x por π_x obtém-se:

$$\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = \delta - \frac{\pi_x}{m(t)} < \delta, \quad (4.14)$$

Conforme Caputo (2005), esta é a versão generalizada da regra de Hotelling, desta forma o lucro instantâneo da firma depende da taxa de extração, assim como da quantidade do estoque do recurso exaurível no solo. Caso $\pi_x = 0$, temos que $\dot{m}(t)/m(t) = \delta$.

Para resolver o problema de controle ótimo apresentado, será utilizada a função de demanda inversa proposta por Hotelling (1991), conforme (4.8), onde $p(q)$ é o

preço líquido do recurso. Desta forma obtém-se uma forma funcional para o lucro da firma:

$$\pi(q(t)) = p(q(t))q(t) = 1 - e^{-Kq(t)}. \quad (4.15)$$

Então temos que:

$$\pi_q = m(t) = Ke^{-Kq(t)} \quad (4.16)$$

$$\dot{\pi}_q = \dot{m}(t) = -K^2 \dot{q}(t)e^{-Kq(t)} \quad (4.17)$$

Substituindo (4.17) em (4.14) e ainda considerando que $\pi_x = 0$ temos:

$$\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = -K\dot{q}(t) = \delta.$$

Isolando $\dot{q}(t)$ no resultado acima obtemos $\dot{q}(t) = -\delta/K$ e de (4.12), temos ainda $\dot{x}(t) = -q(t)$, portanto:

$$\ddot{x}(t) = -\dot{q}(t) = \frac{\delta}{K}$$

Resolvendo esta equação diferencial temos:

$$x(t) = \frac{\delta}{2K}t^2 + C_1t + C_2$$

Utilizando as condições inicial e final de $x(t)$, resulta em:

$$x(t) = \frac{\delta}{K} \left\{ \frac{t^2}{2} - t \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2K(x_0 - x_T)}{\delta} \right) \frac{1}{T} + T \right] \right\} + x_0 \quad (4.18)$$

Como $q(t) = -\dot{x}(t)$, então derivando (4.18) em relação ao tempo e multiplicando por -1 temos:

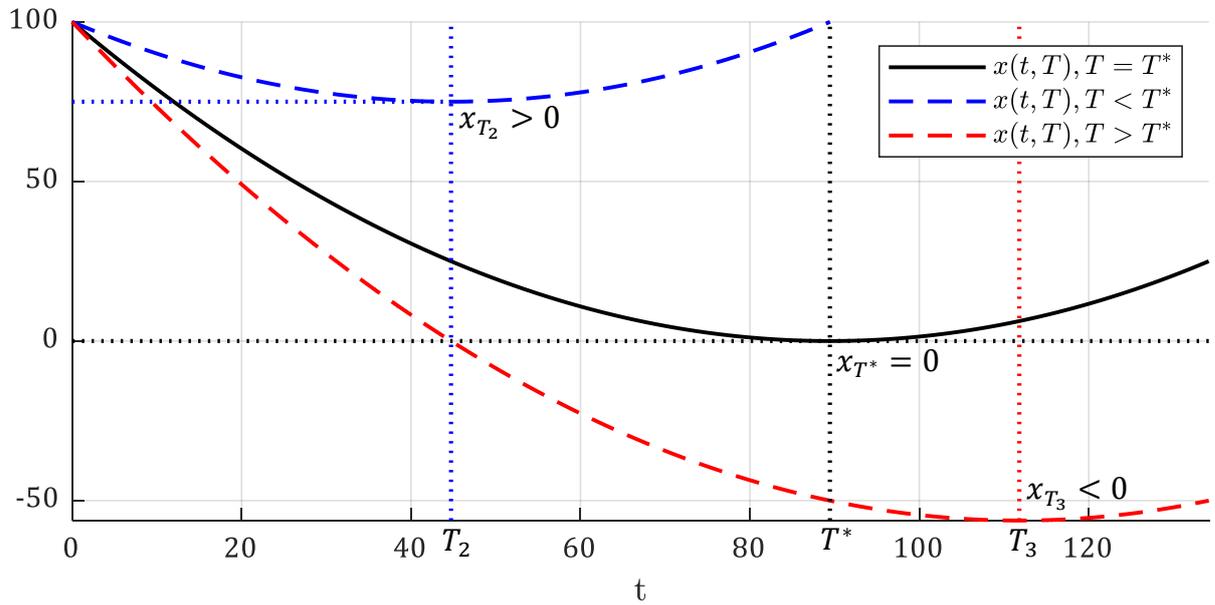
$$q(t) = \frac{\delta}{K} \left\{ -t + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2K(x_0 - x_T)}{\delta} \right) \frac{1}{T} + T \right] \right\} \quad (4.19)$$

Desta forma, o valor corrente do preço sombra $m(t)$ fica:

$$m(t) = \underbrace{Ke^{-\frac{\delta}{2} \left[\left(\frac{2K(x_0 - x_T)}{\delta} \right) \frac{1}{T} + T \right]}}_{m_0 = \lambda} e^{\delta t} = \lambda(t)e^{\delta t} \quad (4.20)$$

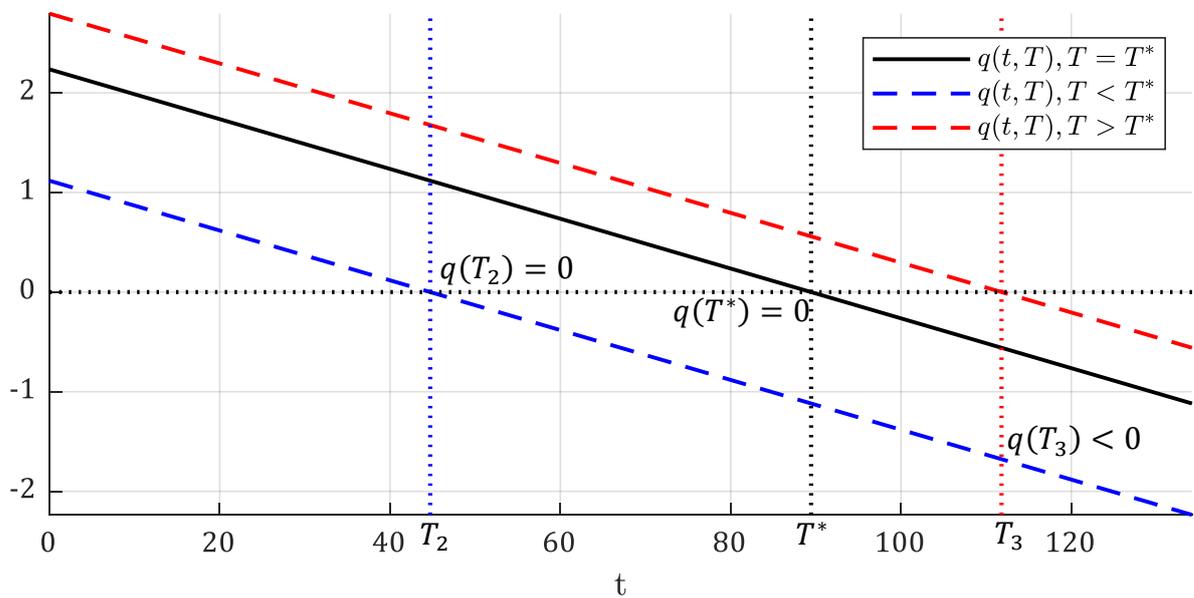
Os resultados obtidos em (4.18) e (4.19) são as soluções para o sistema de equações diferenciais formado por $\dot{q}(t) = -\delta/K$ e $\dot{x}(t) = -q(t)$. Estas são as soluções para o problema irrestrito, pois ainda não foram avaliadas nas restrições impostas ao problema, apresentadas em (4.5) e (4.6), onde exigem que $x(t) \geq 0$ e $q(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$. O Gráfico 3 e o Gráfico 4 apresentam o comportamento da variável de estado x e da variável de controle q dado um horizonte de extração T dos recursos. Como pode ser visto nos dois gráficos, há um horizonte de tempo T representado por T^* onde as condições $x(t) \geq 0$ e $q(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T^*]$ são respeitadas, representado pelas curvas em linha sólida, sendo que ao final do período tanto x quanto q são iguais a zero. Nos gráficos, são representados outros dois casos, no primeiro a firma escolhe um horizonte de tempo menor do que T^* , digamos $T_2 = T^*/2$. Neste caso ao final do período de extração T_2 , x será maior que zero e q será igual a zero, onde novamente as restrições do problema são respeitadas. Já no segundo caso, com $T_3 = 3T^*/2$, ao final do período de planejamento q será igual a zero e x será negativo, portanto a condição $x(t) \geq 0$ não é respeitada neste caso. Na verdade, a condição $x(t) \geq 0$ será satisfeita para escolhas de T entre zero e um certo T^* . No caso de escolhas de T maior que um certo T^* , o estoque de recursos x se esgotará antes do horizonte de tempo de finido pela empresa. Conforme observado no gráfico, escolhas de $T \in [0, T^*]$ farão com que a restrição $q(t) \geq 0$ seja atendida para todo $t \in [0, T]$, com $q(T) = 0$.

Gráfico 3 - Comportamento da variável de estado $x(t, T)$ sem restrições.



Fonte: Elaboração própria (2018).

Gráfico 4 - Comportamento da variável de controle $q(t, T)$ sem restrições.



Fonte: Elaboração própria (2018).

Como já vimos, o valor presente do lucro acumulado da firma é dado por:

$$J = \int_0^T (1 - e^{-Kq(t)})e^{-\delta t} dt$$

Antes de calcular o valor presente do lucro da empresa, vamos considerar a possibilidade de ocorrerem situações em que a empresa pode encerrar as operações antes do planejado. Uma das razões é que sua estimativa de estoque inicial de recursos x_0 tenha sido muito otimista, desta forma o estoque de recursos se esgotará antes do previsto, conforme o segundo caso analisado acima. Então o limite superior de integração utilizado será T_1 , podendo ser, a princípio, menor ou igual ao T escolhido pela firma. Assim, o valor presente do lucro da firma fica:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{T_1} (1 - e^{-Kq}) e^{-\delta t} dt \\
 &= \int_0^{T_1} \left(1 - e^{\delta \left[t - \frac{1}{2} \left(\frac{2K(x_0 - x_T)}{\delta} \right) \frac{1}{T} - \frac{1}{2} T \right]} \right) e^{-\delta t} dt \\
 &= \left[-\frac{e^{-\delta t}}{\delta} - t e^{-\delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2K(x_0 - x_T)}{\delta} \right) \frac{1}{T} + \frac{1}{2} T \right]} \right]_0^{T_1} \\
 J &= \frac{1}{\delta} \left\{ 1 - e^{-\delta T_1} - \delta T_1 e^{-\frac{\delta}{2} \left[\left(\frac{2K(x_0 - x_T)}{\delta} \right) \frac{1}{T} + T \right]} \right\} \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

A expressão obtida para J em (4.21) está em função de todos os parâmetros exógenos do problema, porém, ainda não nos dá o lucro máximo, sendo necessário aplicar as restrições do problema.

Para T finito temos que $e^{-\delta T} m(T) > 0$, então para que a condição $e^{-\delta T} m(T) x(T) = 0$ em (4.13) seja satisfeita, é necessário que $x(T) = x_T = 0$. A interpretação econômica para esta condição de transversalidade é de que para que se obtenha o valor máximo de J , ou o estoque de recursos se esgota no instante final T , ou o preço sombra será nulo, ou ambos, não sendo física ou economicamente viável prosseguir com a extração do recurso. Neste caso a condição de lucro máximo é que o estoque de recursos x se esgote exatamente ao final do período de extração. Desta forma, como x está sujeito à restrição, a condição de transversalidade sobre o Hamiltoniano fica $e^{-\delta T} \bar{H}(T) = 0$, onde:

$$\bar{H}(T) = \bar{H}(q(t), x(t), t, m)|_{t=T}.$$

Temos que para T finito, $e^{-\delta T} > 0$, como a condição $\bar{H}(T) = 0$ deve ser satisfeita, então:

$$\bar{H}(T) = 1 - e^{-Kq(T)} - m(T)q(T) = 0$$

Desta forma, a solução da equação acima é obtida quando $q(T) = 0$. Portanto, temos duas restrições que ainda devem ser satisfeitas para encontrar a solução do problema de controle ótimo, uma sobre $q(T)$ e outra sobre $x(T)$. Resolvendo a restrição para $q(T)$ temos que:

$$q(T) = -\frac{\delta T}{K} + (x_0 - x_T) \frac{1}{T} + \frac{\delta T}{2K} = 0.$$

Isolando T na equação acima obtemos:

$$\bar{T} = \sqrt{\frac{2K(x_0 - x_T)}{\delta}}. \quad (4.22)$$

A equação obtida acima restringe o horizonte de tempo T que a firma deve utilizar para que a condição $x(t) \geq 0$ seja respeitada, em função dos demais parâmetros exógenos K , δ , x_0 e x_T , implicando $q(T) = 0$, desta forma, caso a firma escolha deixar uma quantidade final $x_T \geq 0$, basta substituir o valor de x_T desejado e calcular o horizonte de tempo de suas operações, neste caso a firma não obterá o lucro máximo.

Avaliando o resultado obtido em (4.21) em $T = \bar{T}$ obtido em (4.22) e substituindo $2K(x_0 - x_T)/\delta$ por \bar{T}^2 temos:

$$\bar{J} = \frac{1}{\delta} \left[1 - e^{-\delta T_1} - \delta T_1 e^{-\delta \left(\frac{1}{2\bar{T}} + \frac{1}{2\bar{T}} \right)} \right] = \frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta T_1} - \delta T_1 e^{-\delta \bar{T}}). \quad (4.23)$$

Como ainda temos uma restrição sobre x_T , dada por $x_T = 0$ para que seja satisfeita a condição de transversalidade em (4.13), avaliando (4.22) em $x_T^* = 0$, resulta em:

$$T^*(\alpha) = \sqrt{\frac{2Kx_0}{\delta}}, \quad (4.24)$$

que é o horizonte de planejamento que deve ser utilizado pela firma para que se obtenha o lucro máximo, onde $\alpha = (K, \delta, x_0)$.

Fazendo $x_T = 0$ em (4.22), ou de forma equivalente substituindo \bar{T} por T^* obtemos:

$$\bar{J} = \frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta T_1} - \delta T_1 e^{-\delta T^*}) \quad (4.25)$$

E finalmente, substituindo o limite de integração superior T_1 por T^* , obtemos uma expressão para o lucro máximo da firma, dado por:

$$J^*(\alpha) = \frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta T^*} - \delta T^* e^{-\delta T^*}). \quad (4.26)$$

O resultado obtido acima é a solução para o problema de controle ótimo apresentado em (4.3)-(4.7) com a função de demanda inversa dada por (4.8).

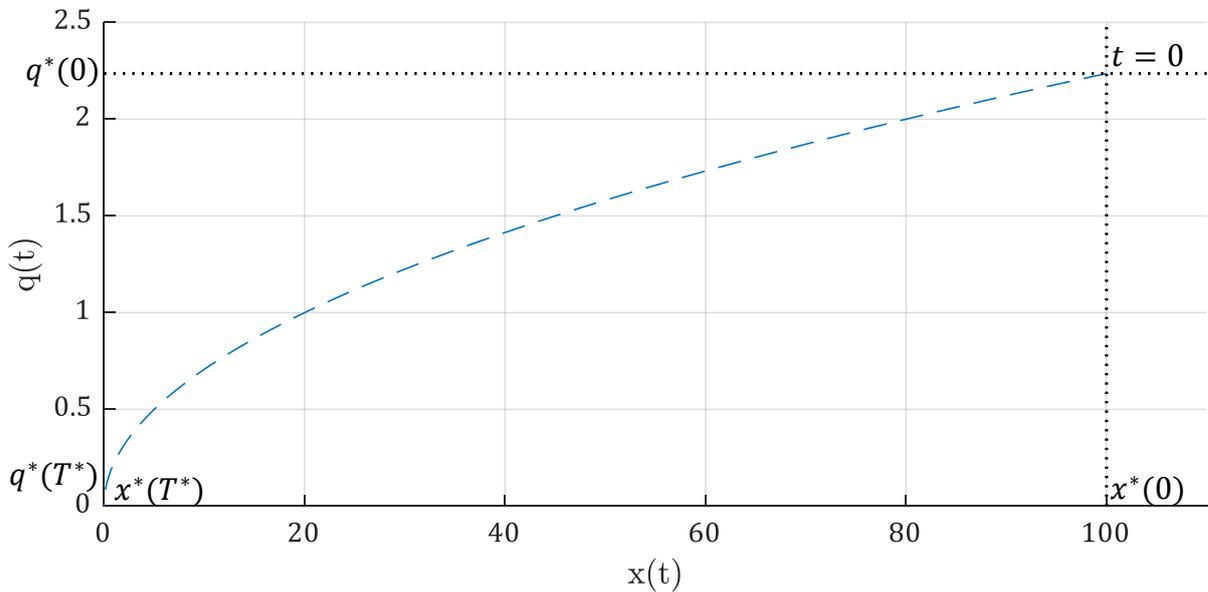
Avaliando as expressões (4.18)-(4.20) em $T = T^*$ e $x_T = x_T^* = 0$, resulta em:

$$x^*(t, \alpha) = \frac{1}{2} \frac{\delta}{K} (t - T^*)^2, \quad t \in [0, T^*] \quad (4.27)$$

$$q^*(t, \alpha) = -\frac{\delta}{K} (t - T^*) = -\dot{x}^*(t), \quad t \in [0, T^*] \quad (4.28)$$

$$m^*(t, \alpha) = \lambda^*(t, \alpha) e^{\delta t} = K e^{\delta(t-T^*)}, \quad t \in [0, T^*] \quad (4.29)$$

O Gráfico 5 apresenta o comportamento da variável de controle q em relação ao estado x em suas trajetórias ótimas em função dos parâmetros K , δ e x_0 , onde o estado inicial é dado por $x^*(0, \alpha) = x_0$, o valor do controle inicial dado por $q^*(0, \alpha) = \delta T^*/K$ e os valores finais dados por $x^*(T^*, \alpha) = 0$ e $q^*(T^*, \alpha) = 0$.

Gráfico 5 - Comportamento da variável q em função da variável x .

Fonte: Elaboração própria (2018).

Os resultados (4.24) e (4.28) são exatamente os mesmos obtidos por Hotelling (1991, p. 290), mas o autor não explicita uma função para o comportamento do estoque de recursos ao longo do tempo, nem uma função para J^* . Dixon (2012) resolve este mesmo problema e algumas variações, apresentando os mesmos resultados que os obtidos em (4.24), (4.26), (4.28) e (4.29), apesar do autor também resolver o problema de controle ótimo, seguimos um caminho diferente, onde a solução (parcial) irrestrita para o problema é explicitada e as restrições são aplicadas ao final, permitindo avaliar também situações fora do ótimo ao relaxar as restrições impostas sobre T e x_T .

Como vimos, para obter o lucro máximo, a firma deve escolher um horizonte de operação dado por T^* definido em (4.24), em função dos parâmetros exógenos K , δ e x_0 , além disso, ao final do período de operações da empresa, x_T deve ser igual a zero. Porém, se a empresa escolher um valor de T diferente de T^* , teremos dois casos fora do ótimo, sendo eles $T < T^*$ e $T > T^*$.

Como já vimos ao analisar o Gráfico 3 e o Gráfico 4, caso T escolhido seja menor do que T^* , ao final do período teremos $q(T) = 0$ e $x(T) > 0$.

Da expressão (4.21) para J , fazendo o limite de integração igual a T , e substituindo x_T por $x_T = x_0 - \delta T^2 / 2K$, que é obtido isolando-se x_T em (4.22), então temos:

$$\tilde{J}(\beta) = \frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta T} - \delta T e^{-\delta T}), \quad T \leq T^*(\alpha). \quad (4.30)$$

Neste caso a firma pode ter uma concessão temporária para explorar os recursos, avaliando o lucro obtido neste período. Alternativamente a firma pode desejar deixar uma quantidade final de recursos $x_T > 0$, então basta calcular o período de tempo em que irá realizar suas operações de extração utilizando a equação (4.22).

No segundo caso fora do ótimo, temos a situação em que o estoque de recursos x , exaure-se antes do planejado pela firma, digamos no instante T_1 , então $x(T_1) = 0$, para $T_1 < T^* < T$. No momento em que o estoque de recursos acaba a empresa deverá encerrar suas operações, então, o fluxo de lucros da empresa deverá ser computado até o instante T_1 , que será o limite superior da integral conforme procedemos em (4.21). Devemos, primeiramente, encontrar o valor de T_1 . Então, substituindo t por T_1 em (4.18), substituindo x_T por $x_0 - \delta T^2/2K$, que é o valor de x_T para o qual $q(T)$ é zero, e isolando T_1 obtemos:

$$T_1(\beta) = T - \sqrt{T^2 - T^{*2}}, \quad T \geq T^*(\alpha) \quad (4.31)$$

Substituindo x_T por $x_0 - \delta T^2/2K$ em (4.21) temos:

$$\hat{J}(\beta) = \frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta T_1(\beta)} - \delta T_1(\beta) e^{-\delta T}), \quad T \geq T^*. \quad (4.32)$$

E finalmente temos que $\hat{J}(\beta)|_{T=T^*(\alpha)} = \tilde{J}(\beta)|_{T=T^*(\alpha)} = J^*(\alpha)$.

4.2 AS PROPRIEDADES DE ENVELOPE DO PROBLEMA

Para analisar as propriedades de envelope de J^* , pelo Teorema do Envelope Dinâmico, conforme o resultado obtido em (2.39), as derivadas parciais de primeira ordem devem ser calculadas diferenciando o Lagrangeano associado ao problema de controle ótimo diretamente com respeito ao parâmetro de interesse, mantendo as variáveis de estado, coestado e controle e os multiplicadores de Lagrange fixos e então avaliar estas variáveis ao longo da trajetória ótima destas variáveis e, finalmente, integrar o resultado ao sob o horizonte de planejamento, conforme o procedimento apresentado por Caputo (1990).

Neste problema, como não há restrições não diferenciais, Lagrangeano será exatamente igual ao Hamiltoniano do problema:

$$L = H = \pi(q)e^{-\delta t} - \lambda q = (1 - e^{-Kq})e^{-\delta t} - \lambda q. \quad (4.33)$$

Realizando o procedimento descrito para o parâmetro K obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial K} &= \frac{\partial \pi(q)}{\partial K} e^{-\delta t} = q e^{-Kq} e^{-\delta t} \\ \left. \frac{\partial H}{\partial K} \right|_* &= q^*(t; \alpha) e^{-Kq^*(t; \alpha)} e^{-\delta t} \\ J_K^*(\alpha) &= \int_0^{T^*} \frac{\partial \pi}{\partial K} (q^*(t; \alpha)) e^{-\delta t} dt \\ &= \int_0^{T^*} q^*(t; \alpha) e^{-Kq^*(t; \alpha)} e^{-\delta t} dt > 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Repetindo o procedimento para δ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \delta} &= \frac{\partial (\pi e^{-\delta t})}{\partial \delta} = -\pi(q) t e^{-\delta t} = -t(1 - e^{-Kq(t)}) e^{-\delta t} \\ \left. \frac{\partial H}{\partial \delta} \right|_* &= -t(1 - e^{-Kq^*(t; \alpha)}) e^{-\delta t} \\ J_\delta^*(\beta) &= - \int_0^{T^*} t \pi(q^*(t; \alpha)) e^{-\delta t} dt \\ &= - \int_0^{T^*} t(1 - e^{-Kq^*(t; \alpha)}) e^{-\delta t} dt < 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Os resultados obtidos em (4.34) e (4.35) através dos valores ótimos das derivadas parciais de primeira ordem são funções cumulativas descontadas. Em um problema de maximização de lucro da firma competitiva como o exemplo de Caputo (1990), derivando-se J^* em relação ao preço de mercado do produto, resulta na função de produção cumulativa descontada.

No problema analisado, a função cumulativa obtida em (4.34) indica que derivando-se J^* em relação ao preço de estrangulamento K , obteve-se uma função cumulativa, na qual a função de oferta ótima é ponderada por um termo igual a $e^{-Kq^*(t; \alpha)}$. Este termo é igual exatamente igual a derivada de $p(q; K)$ em relação a K , $\partial p / \partial K = e^{-Kq^*(t; \alpha)}$. Para valores pequenos de $q^*(t; \alpha)$, próximos a zero $e^{-Kq^*(t; \alpha)}$ se

aproxima da unidade e o preço $p(q; K)$ se aproxima de K . Então para valores de $q^*(t; \alpha)$ próximos a zero a variação do lucro ótimo em resposta a variação do parâmetro K é semelhante a resposta da variação do preço p exógeno. Se substituirmos q^* do expoente no termo $e^{-Kq^*(t; \alpha)}$, o integrando em (4.34) fica no formato $q^*(t; \alpha)e^{-\delta T^*}$, então $J_K^*(\alpha)$ fica:

$$J_K^*(\alpha) = e^{-\delta T^*} \underbrace{\int_0^{T^*} q^*(t; \alpha) dt}_{x_0} = x^*(0; \alpha)e^{-\delta T^*}$$

Como já vimos, na trajetória ótima, a produção acumulada em todo período de operação da empresa é exatamente igual ao estoque inicial x_0 , a variação do lucro devido a uma variação no preço de estrangulamento, é proporcional a esta variação, ao estoque inicial e a um fator $e^{-\delta T^*}$, ou seja, toda a quantidade acumulada de recursos extraídos igual a x_0 , ao final do período, trazida a valor presente.

O resultado obtido em (4.35) mostra que a redução no lucro acumulado, pelo aumento da taxa de desconto é proporcional ao fluxo de lucro acumulado, ponderado em cada instante pelo tempo em que o lucro é recebido, em cada instante, semelhante a interpretação apresentada no exemplo de Caputo (1990).

Para encontrar a variação no lucro causada por um aumento no estoque inicial do recurso x_0 , deve-se avaliar o valor da variável de coestado no instante $t = 0$, dada sua função de trajetória ótima, conforme o resultado obtido em (2.41) para o Teorema do Envelope Dinâmico:

$$J_{x_0}^*(\alpha) = \lambda^*(0, \alpha) > 0 \quad (4.36)$$

A variação do lucro em função do aumento do valor do horizonte de tempo T é obtida avaliando-se o integrando da função objetivo em T , conforme o resultado obtido em (2.40), para o Teorema do Envelope Dinâmico:

$$J_T(\alpha) = \pi(q(T; \alpha))e^{-\delta T} \geq 0 \quad (4.37)$$

De (4.36) temos que a variação do lucro em resposta à uma variação marginal na quantidade inicial do estoque do recurso é proporcional ao preço sombra de valor presente no instante inicial. E de (4.37), temos que a variação do lucro em função da

variação do horizonte de tempo escolhido pela firma é igual ao valor do lucro instantâneo em T , trazido a valor presente.

4.3 VALIDAÇÃO DAS DERIVADAS DE PRIMEIRA ORDEM

Nesta seção serão validadas as propriedades de envelope obtidas na seção anterior, comparando-se os integrais dos resultados obtidos em (4.34), (4.35), (4.36) e (4.37), avaliadas nos valores ótimos obtidos, com as derivadas de primeira ordem de J^* para cada um dos parâmetros exógenos do problema.

De (4.34) temos que a derivada de J^* em relação ao parâmetro K , avaliada em $q^*(t; \alpha)$ obtido em (4.28) e $T^*(\alpha)$ obtido em (4.24) é dada por:

$$\begin{aligned} J_K^*(\alpha) &= \int_0^{T^*} q^*(t; \alpha) e^{-Kq^*(t; \alpha)} e^{-\delta t} dt \\ &= \frac{\delta}{K} \int_0^{T^*} (T^*(\alpha) - t) e^{-\delta T^*} dt \\ &= \frac{\delta}{K} \left[\left(T^* t - \frac{t^2}{2} \right) e^{-\delta T^*} \right]_0^{T^*} \\ &= \frac{\delta}{K} \left(T^{*2} - \frac{T^{*2}(\alpha)}{2} \right) e^{-\delta T^*} \\ &= \frac{\delta T^{*2}}{2K} e^{-\delta T^*} \end{aligned}$$

Temos que $T^{*2}(\alpha) = 2Kx_0/\delta$ então substituindo no resultado acima obtemos:

$$J_K^*(\alpha) = x_0 e^{-\delta T^*} > 0, \quad (4.38)$$

como já havíamos antecipado. Derivando J^* em relação ao parâmetro K temos:

$$\begin{aligned} J_K^*(\alpha) &= \frac{\partial J^*(\alpha)}{\partial K} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial K} [1 - e^{-\delta T^*} (1 + \delta T^*)] \\ &= \frac{1}{\delta} [-e^{-\delta T^*} (-\delta T_K^*) (1 + \delta T^*) - e^{-\delta T^*} (\delta T_K^*)] \\ &= \frac{1}{\delta} [e^{-\delta T^*} (\delta T_K^* (1 + \delta T^*) - \delta T_K^*)] \\ &= \frac{1}{\delta} [e^{-\delta T^*} \delta^2 T_K^* T^*] \end{aligned}$$

Derivando $T^*(\alpha)$ em relação a K temos que:

$$T_K^*(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{2x_0}{\delta} \left(\frac{2Kx_0}{\delta} \right)^{-1/2} = \frac{x_0}{\delta T^*}. \quad (4.39)$$

Substituindo $T_K^*(\alpha)$ no resultado anterior obtemos:

$$J_K^*(\alpha) = \frac{1}{\delta} \left[e^{-\delta T^*} \delta^2 \frac{x_0}{\delta T^*} T^* \right] = x_0 e^{-\delta T^*},$$

que é exatamente o mesmo resultado obtido em (4.38).

A partir de (4.35) vamos calcular o valor de $J_\delta^*(\alpha)$, então:

$$\begin{aligned} J_\delta^*(\alpha) &= - \int_0^{T^*} (1 - e^{-Kq^*(t;\alpha)}) t e^{-\delta t} dt \\ &= - \int_0^{T^*} (t e^{-\delta t} - t e^{-\delta T^*}) dt \\ &= \left[\frac{t e^{-\delta t}}{\delta} + \frac{e^{-\delta t}}{\delta^2} + \frac{t^2 e^{-\delta T^*}}{2} \right]_0^{T^*} \\ &= \left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{T^*}{\delta} + \frac{T^{*2}}{2} \right) e^{-\delta T^*} - \frac{1}{\delta^2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

O sinal do resultado obtido em (4.40) não é claro no arranjo em que se encontra. Mas podemos rearranjar o resultado obtido em de uma forma mais conveniente, colocando $1/\delta^2$ em evidencia na expressão:

$$J_\delta^*(\alpha) = \frac{1}{\delta^2} \left[\left(1 + \delta T^* + \frac{(\delta T^*)^2}{2} \right) e^{-\delta T^*} - 1 \right]. \quad (4.41)$$

De (4.41) nota-se que para que $J_\delta^*(\beta)$ seja positivo é necessário que $(1 + \delta T^* + (\delta T^*)^2/2) e^{-\delta T^*}$ seja maior do que 1, e para que essa condição seja atendida, é necessário que $(1 + \delta T^* + (\delta T^*)^2/2)$ seja maior do que $e^{\delta T^*}$.

Para verificar esta condição podemos tomar a expansão de Taylor para $e^{\delta T^*}$ como artifício, então:

$$e^{\delta T^*} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta T^*)^n}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{\delta T^*}{1} + \frac{(\delta T^*)^2}{2} + \frac{(\delta T^*)^3}{6} \dots$$

Com isso, vemos claramente que a expressão $(1 + \delta T^* + (\delta T^*)^2/2)$ em (4.41) tem exatamente os três primeiros termos da representação de $e^{\delta T^*(\alpha)}$ em expansão de Taylor. Como todos os termos da expansão são positivos, pois δT^* é positivo, então $e^{\delta T^*}$ é inequivocamente maior que os três primeiros termos da expansão, com isso verificamos então que $J_\delta^*(\beta) < 0$.

Agora vamos verificar o valor de $J_\delta^*(\beta)$ derivando $J^*(\beta)$ em relação a δ :

$$\begin{aligned} J_\delta^*(\alpha) &= \frac{\partial J^*(\alpha)}{\partial \delta} = \frac{\partial}{\partial \delta} \left[\frac{1}{\delta} - e^{-\delta T^*} \left(\frac{1}{\delta} + T^* \right) \right] \\ &= \left[-\frac{1}{\delta^2} + e^{-\delta T^*} (T^* + \delta T_\delta^*) \left(\frac{1}{\delta} + T^* \right) \right. \\ &\quad \left. - e^{-\delta T^*} \left(-\frac{1}{\delta^2} + T_\delta^* \right) \right] \end{aligned}$$

Calculando $T_\delta^*(\alpha)$ temos que:

$$\begin{aligned} T_\delta^*(\alpha) &= \frac{1}{2} (-1) 2Kx_0 \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{2Kx_0}{\delta} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2\delta} T^{*2} \frac{1}{T^*} = -\frac{T^*}{2\delta} \end{aligned} \tag{4.42}$$

Então, substituindo (4.42) em no resultado anterior temos:

$$\begin{aligned} J_\delta^*(\alpha) &= \left[-\frac{1}{\delta^2} + e^{-\delta T} \left(T^* - \frac{T^*}{2} \right) \left(\frac{1}{\delta} + T^* \right) - e^{-\delta T^*} \left(-\frac{1}{\delta^2} - \frac{T^*}{2\delta} \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{T^*}{\delta} + \frac{T^{*2}}{2} \right) e^{-\delta T^*} - \frac{1}{\delta^2}, \end{aligned}$$

que é exatamente o mesmo resultado obtido em (4.40).

De (4.36) temos que $J_{x_0}^*(\alpha) = \lambda^*(0, \alpha)$ e de (4.29) temos que $\lambda^*(t) = Ke^{-\delta T^*}$, que é constante para todo t , então $J_{x_0}^*(\alpha)$ é dado por:

$$J_{x_0}^*(\alpha) = \lambda^*(0, \alpha) = Ke^{-\delta T^*}. \tag{4.43}$$

Derivando $J^*(\alpha)$ em relação a x_0 , obtemos:

$$\begin{aligned} J_{x_0}^*(\alpha) &= \frac{\partial J^*(\alpha)}{\partial x_0} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial x_0} \left[1 - e^{-\delta T^*} (1 + \delta T^*) \right] \\ &= \frac{1}{\delta} \left[\delta T_{x_0}^* e^{-\delta T^*} (1 + \delta T^*) - e^{-\delta T^*(\alpha)} \delta T_{x_0}^* \right] \end{aligned}$$

Derivando $T^*(\alpha)$ em relação x_0 temos:

$$T_{x_0}^*(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{2K}{\delta} \right) \left(\frac{2Kx_0}{\delta} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{K}{\delta T^*} \quad (4.44)$$

Substituindo na expressão anterior temos:

$$\begin{aligned} J_{x_0}^*(\alpha) &= \frac{1}{\delta} \left[\frac{K}{T^*} e^{-\delta T^*} (1 + \delta T^*) - e^{-\delta T^*} \frac{K}{T^*} \right] = \frac{1}{\delta} \left[\frac{K}{T^*} e^{-\delta T^*} \delta T^* \right] \\ &= K e^{-\delta T^*}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

encontrando um resultado idêntico ao obtido em (4.43).

De (4.37) temos que:

$$\begin{aligned} J_T^*(\alpha) &= \pi(q^*(T^*(\alpha); \alpha)) e^{-\delta T} = (1 - e^{-Kq^*(T^*(\alpha), \alpha)}) e^{-\delta T^*} \\ &= (1 - e^{-\delta(T^*(\alpha) - T^*)}) e^{-\delta T^*(\alpha)} = (1 - 1) e^{-\delta T^*} \\ &= (0) e^{-\delta T^*(\alpha)} = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

O resultado obtido em (4.46) indica que a derivada do lucro avaliada em $T^*(\alpha)$ é zero, ou seja, para $T = T^*(\alpha)$ temos o lucro máximo e o sinal da derivada deve mudar com $T \lesseqgtr T^*(\alpha)$. Derivando $J^*(\alpha)$ em relação a T , obtemos $J_T^*(\alpha) = 0$, dado que $T^*(\alpha)$ não foi escolhido livremente pela firma e sim como função de K , x_0 e δ . Para verificar o sinal da derivada no entorno do ponto ótimo, derivando $\tilde{J}(\beta)$ apresentado em (4.30), em relação à T :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_T(\beta) &= \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{\delta} [1 - e^{-\delta T} (1 + \delta T)] \right\} = \frac{1}{\delta} [\delta e^{-\delta T} (1 + \delta T) - \delta e^{-\delta T}] \\ &= e^{-\delta T} (1 + \delta T) - e^{-\delta T} = \delta T e^{-\delta T} \end{aligned} \quad (4.47)$$

O resultado obtido em (4.47) indica que para valores de $T < T^*(\alpha)$, um aumento marginal no horizonte de tempo T impacta em um aumento no valor presente do lucro proporcional a $\delta T e^{-\delta T}$. Ou ainda, uma redução marginal de T em relação ao valor ótimo $T^*(\alpha)$, implica uma redução no valor presente do fluxo de lucros da firma proporcional a $\delta T e^{-\delta T}$. Substituindo T_1 por T em (4.21) onde obtivemos uma expressão para J , sem a aplicação das restrições e derivando a em relação a T , temos:

$$J_T = \frac{1}{\delta} \left\{ \delta e^{-\delta T} - \delta e^{-\delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2K(x_0 - x_T)}{\delta} \right)^{\frac{1}{T} + \frac{1}{2}T} \right]} \right. \\ \left. - \delta T e^{-\delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2K(x_0 - x_T)}{\delta} \right)^{\frac{1}{T} + \frac{1}{2}T} \right]} \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{2K(x_0 - x_T)}{\delta} \right)^{\frac{1}{T} + \frac{1}{2}T} - \frac{\delta}{2} \right] \right\},$$

então, escolhendo $T^2 = 2K(x_0 - x_T)/\delta$ e substituindo $2K(x_0 - x_T)/\delta$ por T^2 , independente de x_T ser igual ou maior que zero, temos:

$$J_T = \frac{1}{\delta} \left\{ \delta e^{-\delta T} - \delta e^{-\delta \left[\frac{1}{2} T^2 + \frac{1}{2}T \right]} - \delta T e^{-\delta \left[\frac{1}{2} T^2 + \frac{1}{2}T \right]} \left[\frac{\delta T^2}{2} - \frac{\delta}{2} \right] \right\} \quad (4.48) \\ = \frac{1}{\delta} \{ \delta e^{-\delta T} - \delta e^{-\delta T} - \delta T e^{-\delta T} (0) \} = 0,$$

Como a derivada de J^* em relação a T é zero no ótimo e positiva para valores de $T < T^*(\alpha)$, implica que a derivada é não positiva (≤ 0) para $T > T^*(\alpha)$.

Vamos verifica ainda as elasticidades de J^* em relação aos parâmetros exógenos K , δ e x_0 . A elasticidade de J^* em relação ao parâmetro K é dada por:

$$\frac{\partial J^* K}{\partial K J^*} = \frac{K(x_0 e^{-\delta T^*})}{\frac{1}{\delta} [1 - e^{-\delta T^*} (1 + \delta T^*)]} = \frac{\delta K x_0}{e^{\delta T^*} - (1 + \delta T^*)}. \quad (4.49)$$

E elasticidade de J^* em relação ao parâmetro x_0 é igual a:

$$\frac{\partial J^* x_0}{\partial x_0 J^*} = \frac{x_0 (K e^{-\delta T^*})}{\frac{1}{\delta} [1 - e^{-\delta T^*} (1 + \delta T^*)]} = \frac{\delta K x_0}{e^{\delta T^*} - (1 + \delta T^*)}, \quad (4.50)$$

exatamente igual à elasticidade de J^* em relação a K obtida em (4.49), sendo ambas positivas. Ou seja, uma variação percentual de K , digamos de $\Delta K = 1\%$, causa a mesma variação percentual ΔJ^* em J^* , que é causada por uma variação $\Delta x_0 = 1\%$,

A elasticidade de J^* em relação a δ é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J^*}{\partial \delta} \frac{\delta}{J^*} &= \frac{\delta \left\{ \frac{1}{\delta^2} \left[\left(1 + \delta T^* + \frac{(\delta T^*)^2}{2} \right) e^{-\delta T^*} - 1 \right] \right\}}{\frac{1}{\delta} [1 - e^{-\delta T^*} (1 + \delta T^*)]} \\
 &= - \frac{\left[e^{\delta T^*} - \left(1 + \delta T^* + \frac{(\delta T^*)^2}{2} \right) \right]}{[e^{\delta T^*} - (1 + \delta T^*)]} \quad (4.51) \\
 &= \frac{(\delta T^*)^2 / 2}{[e^{\delta T^*} - (1 + \delta T^*)]} - 1 = \frac{\delta K x_0}{[e^{\delta T^*} - (1 + \delta T^*)]} - 1,
 \end{aligned}$$

que é igual ao valor das elasticidades de J^* em relação a K e x_0 , obtidas em (4.49) e (4.50) menos 1.

Nesta seção validamos os resultados do Teorema do Envelope Dinâmico através da derivação direta da função valor-ótimo J^* e verificamos que os resultados obtidos são equivalentes, na próxima seção faremos um exercício numérico e verificaremos graficamente a tangências das curvas em relação à variação dos parâmetros na vizinhança de um conjunto inicial de parâmetros β^0 , ao avaliar as derivadas obtidas nestes valores iniciais.

4.4 UM EXERCÍCIO NUMÉRICO

Nesta seção, vamos verificar graficamente o comportamento das variáveis ótimas obtidas na resolução do problema de maximização da firma monopolista extratora de recursos exauríveis. Além disso, vamos verificar também o comportamento do valor presente do lucro da firma em resposta a variações na vizinhança de um conjunto de parâmetros, digamos $\beta^0 = (K^0, \delta^0, x_0^0, T^0)$. Definimos como a vizinhança de β^0 a bola aberta de centro β^0 e raio $\varepsilon > 0$, representada por $B = (\beta^0, \varepsilon)$.

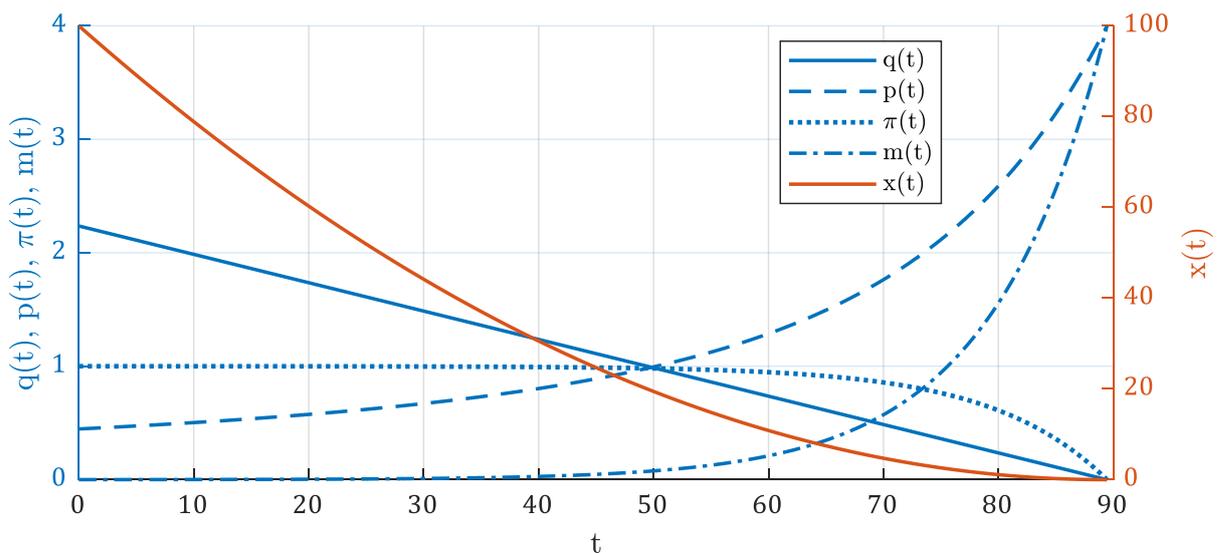
Primeiramente vamos definir os valores de $K^0 = 4$, $\delta^0 = 0.1$, $x_0^0 = 100$ e $x_T^0 = 0$. O valor de T^{0*} foi calculado utilizando-se (4.24), resultando em 89,44 e o valor de J^* para este conjunto de parâmetros é $J^* = J(\beta^0) = 9.987$. No Gráfico 6 pode ser visto o comportamento da variável de controle $q(t)$, da variável de estado $x(t)$, do preço $p(t)$, do lucro $\pi(t)$ e do preço sombra de valor corrente $m(t)$ ao longo do horizonte de

planejamento da firma, onde os valores de $x(t)$ estão representados pela escala ao lado direito, e os valores das demais variáveis, representadas pela escala da esquerda.

A quantidade de recursos extraídos $q(t)$ decresce a uma taxa constante δ^0/K^0 igual a $2,5 \times 10^{-2}$, iniciando com valor dado por $\delta^0 T^{0*}/K^0 \cong 2,24$ e finalizando o período de extração com valor igual a zero. O estoque de recursos $x(t)$ inicia com valor $x_0^0 = 100$ e reduz-se à medida que os recursos vão sendo extraídos, onde no final do período o estoque de recursos exaure-se totalmente. O preço $p(t)$ inicia o período com seu menor valor, onde $p(0) \cong 0,45$, e vai subindo a medida que $q(t)$ cai, chegando ao seu valor máximo $K^0 = 4$ ao final do período, quando $q(t)$ é próximo a zero.

O lucro $\pi(t)$ é aproximadamente constante igual a 1 até que $q(t)$ cai abaixo de 1 e $p(t)$ supera a unidade, no ponto onde as três variáveis “se cruzam”. Assim, o lucro passa a cair, chegando a zero ao final do período. O preço sombra de valor corrente $m(t)$ é próximo de zero enquanto o lucro instantâneo é unitário, pois, neste caso, um aumento no valor de q não reflete o aumento do lucro. Quando o lucro instantâneo cai abaixo da unidade, aumentos marginais em q refletiriam um aumento no lucro, assim, $m(t)$ passa a subir, atingindo seu valor máximo $K^0 = 4$ ao final do período T^{0*} .

Gráfico 6 - Comportamento das variáveis $q(t)$, $p(t)$, $\pi(t)$, $m(t)$ e $x(t)$.

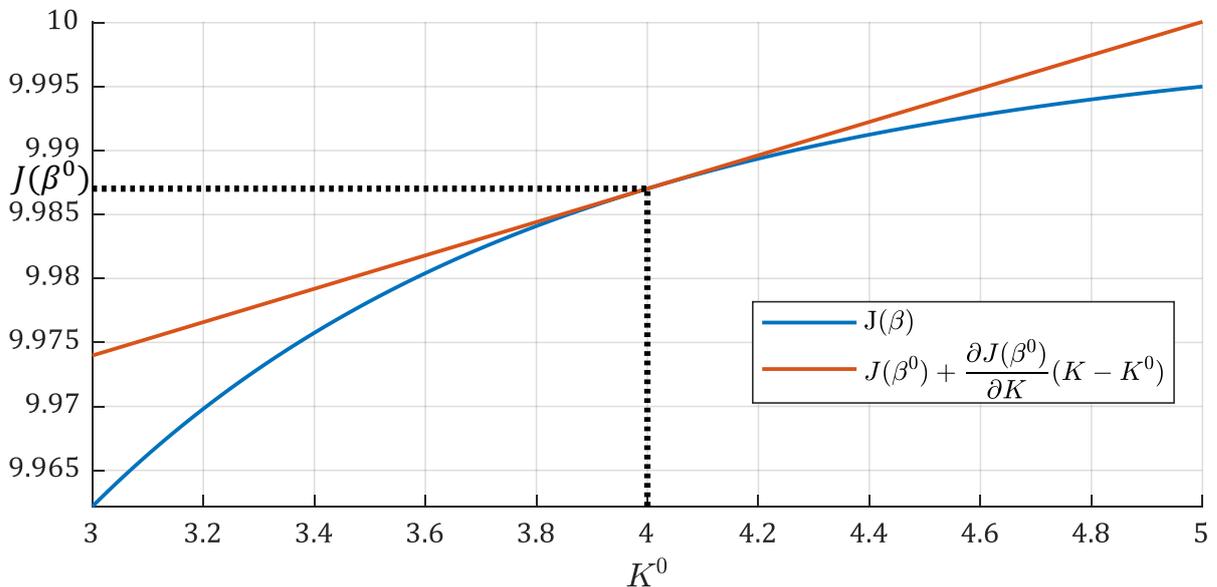


Fonte: Elaboração própria (2018).

Vamos comparar o comportamento do valor presente do lucro $J(\beta)$ no entorno de $J(\beta^0)$, variando cada um dos parâmetros e considerando primeiramente, que $T^* = T(K, \delta, x_0)$, ou seja, T não é livremente escolhido pela firma.

Inicialmente vamos variar K no entorno de K^0 , mantendo $\delta = \delta^0$ e $x_0 = x_0^0$, calculando $T_{(K)}^* = T(K, \delta^0, x_0^0)$, para cada valor de K , e então, calcular $J(\beta)$ para cada conjunto de parâmetros. O Gráfico 7 apresenta o comportamento do valor presente do lucro em resposta às variações no parâmetro K .

Gráfico 7 - Variação de J^* em resposta à variação marginal de K .

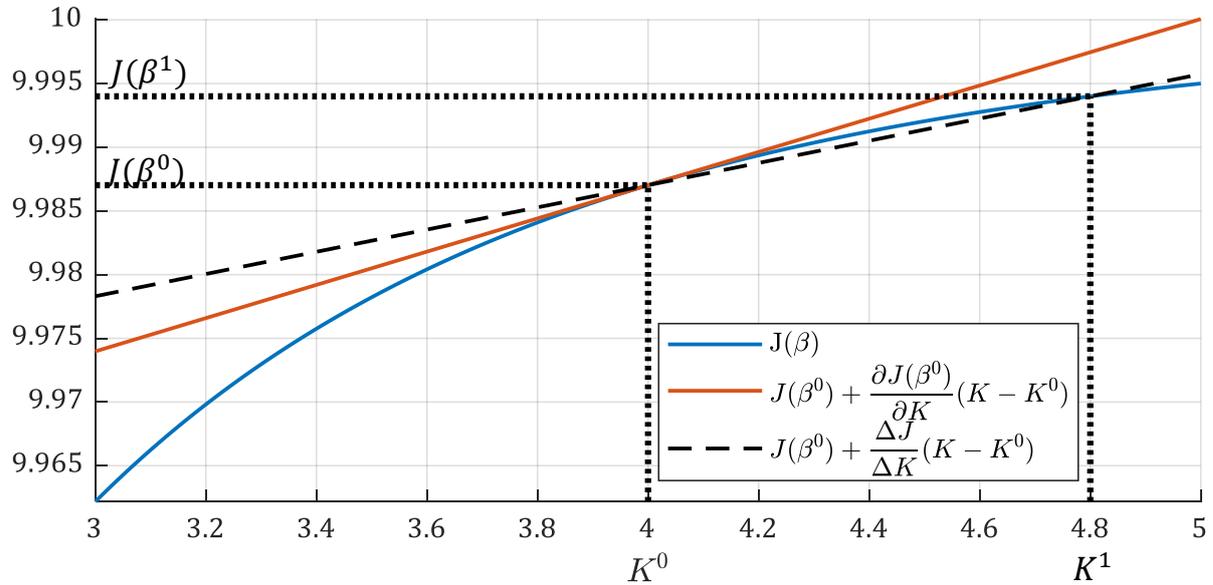


Fonte: Elaboração própria (2018).

A reta que tangencia a curva no ponto $(K^0, J(\beta^0))$ tem inclinação $\partial J/\partial K$, avaliada em β^0 . Para o conjunto de parâmetros escolhido, o valor de $\partial J/\partial K$ calculado por com base em (4.38) foi de $1,3 \times 10^{-2}$. Desta forma, para uma variação marginal de K igual a ΔK , a variação de J é $\Delta J \cong 1,3 \times 10^{-2} \Delta K$. Ou seja, para variações pequenas de K , a variação de J é dada aproximadamente por $\Delta J \cong (\partial J/\partial K) \Delta K$. O Gráfico 8 ilustra uma variação de ΔK de 20%, podemos ver que conforme $\Delta K = K^1 - K^0$ aumenta, a reta secante (tracejada) com inclinação $\Delta J/\Delta K$, que passa pelos pontos $(K^0, J(\beta^0))$ e $(K^1, J(\beta^1))$, se distancia da reta com inclinação $\partial J/\partial K$. Para uma variação $\Delta K = 1\%$, o valor obtido para $\Delta J = J(\beta^1) - J(\beta^0)$ foi de $5,1 \times 10^{-4}$, resultando em um valor de $\Delta J/\Delta K = 1,28 \times 10^{-2}$, bastante próximo ao valor calculado para $\partial J/\partial K$,

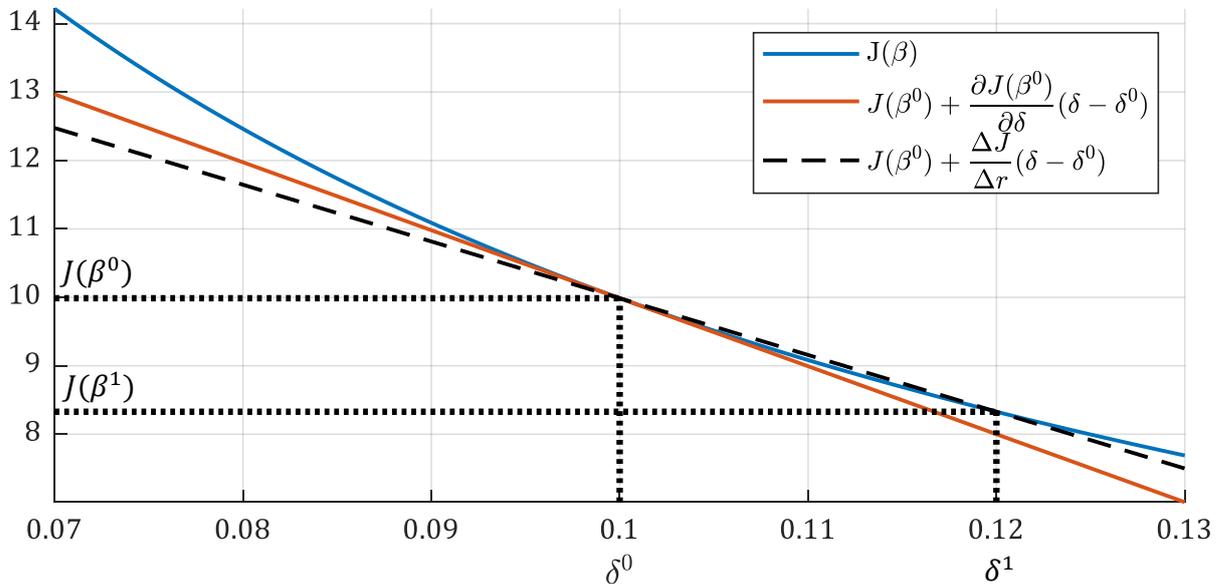
avaliado em β^0 . Enquanto que para uma variação $\Delta K = 10\%$, o valor obtido para $\Delta J/\Delta K$ foi de $1,06 \times 10^{-2}$, aproximadamente 20% inferior a $\partial J/\partial K$.

Gráfico 8 - Variação J^* em resposta à variação de K .



Fonte: Elaboração própria (2018).

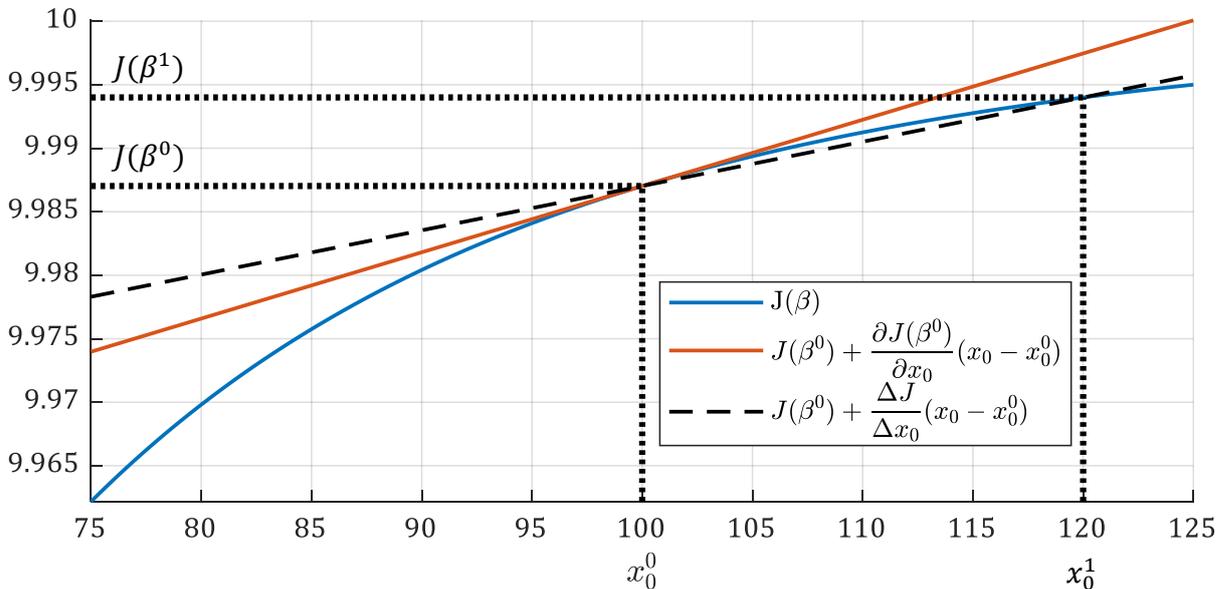
A análise para a resposta de $J(\beta)$ em relação à variação do parâmetro exógeno δ , ou seja, a taxa de desconto, é semelhante à realizada para o parâmetro K . O valor de $\partial J/\partial \delta$, dado por (4.2) e avaliado em β^0 foi de aproximadamente -99,35, o que significa que um aumento marginal em δ provoca uma redução em J dada por $\Delta J \cong -99,35\Delta\delta$, indicando uma grande sensibilidade do valor presente do lucro às variações na taxa de desconto δ . O Gráfico 9 ilustra uma variação $\Delta\delta$ de 20%, provocando uma redução em J de 16,6%.

Gráfico 9 - Variação de J^* em resposta à variação de δ .

Fonte: Elaboração própria (2018).

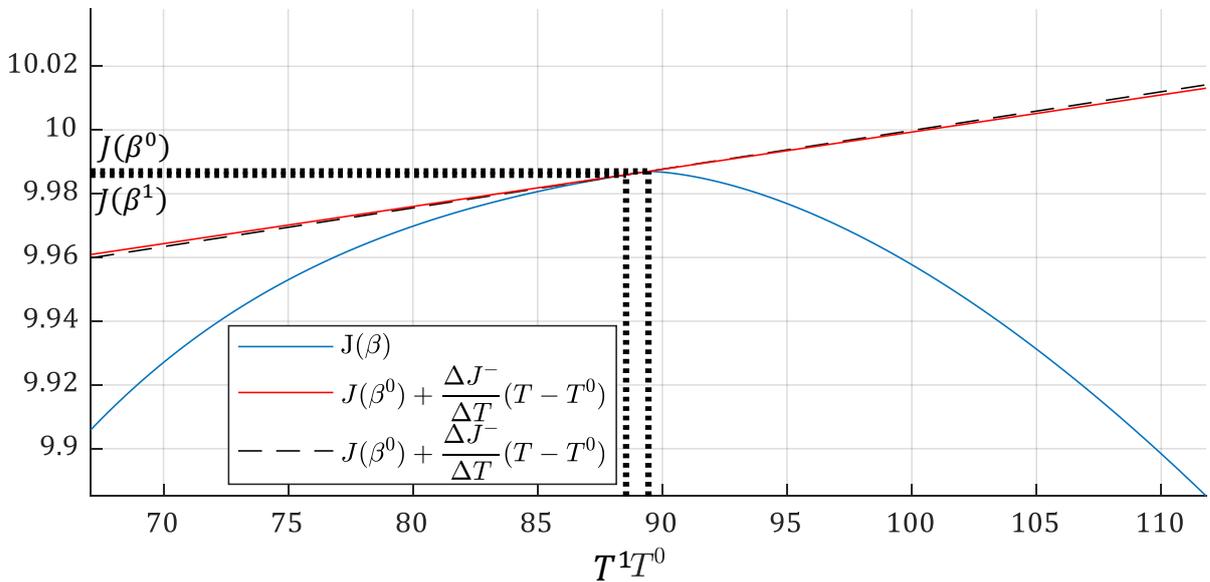
A inclinação da reta tangente ao ponto $(K^0, J(\beta^0))$ é negativa e igual a $\partial J/\partial \delta$, em conformidade com os resultados obtidos anteriormente. Na vizinhança de β^0 , uma variação de 1% em δ , causa uma variação próxima a -1% em J , representando uma elasticidade de aproximadamente -1. Para esta variação de δ , o valor de $\Delta J/\Delta \delta$ encontrado foi de -98,4, bastante próximo ao valor de $\partial J/\partial \delta$.

Para o parâmetro exógeno x_0 , o valor de $\Delta J/\Delta x_0$ dado por (4.43), avaliado em β^0 é positivo, conforme já verificado, e igual a $3,49 \times 10^{-4}$. Desta forma uma variação de x_0 , Δx_0 na vizinhança de β^0 provoca uma variação em J de $\Delta J \cong 3,49 \times 10^{-4} \Delta x_0$. Semelhante ao verificado para o parâmetro exógeno K , e ao contrário do parâmetro δ , a sensibilidade de J a variações de x_0 é muito pequena. As elasticidades calculadas de J em relação aos parâmetros K e x_0 , para β^0 foram ambas iguais a $5,2 \times 10^{-3}$, enquanto a elasticidade em relação a δ foi exatamente $5,2 \times 10^{-3} - 1$, o que está de acordo com os resultados obtidos em (4.49), (4.50) e (4.51).

Gráfico 10 - Variação de J^* em resposta à variação de x_0 

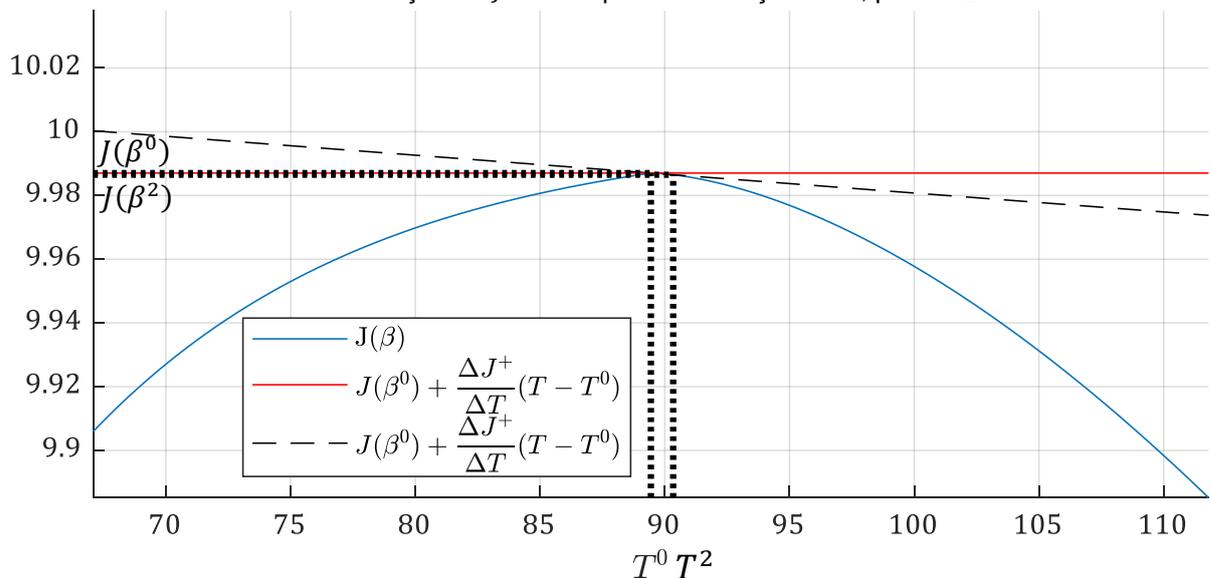
Fonte: Elaboração própria (2018).

Agora vamos considerar que a firma pode escolher um horizonte de planejamento diferente de $T^*(\alpha)$, conseqüentemente a taxa de extração dos recursos $q(t)$ será afetada pela decisão da firma e, conseqüentemente o valor de J também. É possível que a firma não consiga estimar com exatidão a quantidade inicial do estoque de recursos x_0 e, desta forma escolha um horizonte de tempo T maior ou menor do que $T^*(\alpha)$. O Gráfico 11 apresenta o comportamento de J a variações de T , onde para valores de T menores que $T^*(\alpha)$, a inclinação da curva nas proximidades do ponto $(T^0, J(\beta^0))$ é aproximadamente $\delta T e^{-\delta T}$, que avaliado em β^0 tem valor de $1,2 \times 10^{-3}$, que foi exatamente o valor de $\Delta J / \Delta T$ para uma redução de 1% no valor de T . Nesta situação, o horizonte de tempo escolhido para a extração dos recursos resulta em uma taxa $q(t)$ de extração dos recursos menor do que $q^*(t; \alpha)$, ao final do período $q(T^1)$ será igual a zero, porém, x_{T^1} será maior que zero e o lucro obtido será menor que o valor ótimo J^* que é obtido com o conjunto de parâmetros β^0 . Com $T = T^*(\alpha)$, ao final do período de planejamento, o valor da variável de controle q será igual a zero e o valor da variável de estado x também será igual a zero.

Gráfico 11 - Variação de J^* em resposta à variação de T , para $T < T^0$.

Fonte: Elaboração própria (2018).

O Gráfico 12 a apresenta o mesmo intervalo de variação do parâmetro T que o gráfico anterior, porém, evidencia a inclinação exatamente no ponto $(T^0, J(\beta^0))$, que calculada de acordo com o resultado obtido em (4.46) é igual a zero.

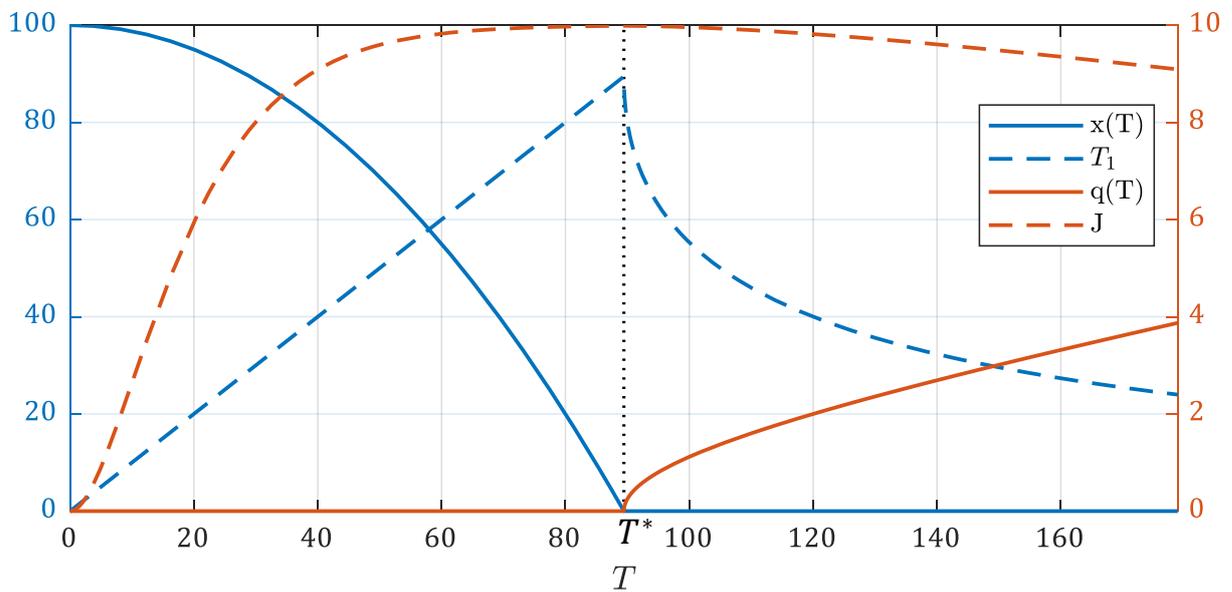
Gráfico 12 - Variação de J^* em resposta à variação de T , para $T \geq T^0$.

Fonte: Elaboração própria (2018).

Para valores de $T > T^*(\alpha)$ o lucro obtido será menor do que J^* , nesta situação o valor de T escolhido fará com que a taxa de extração dos recursos seja maior do que $q^*(t; \alpha)$, o que fará com que o estoque de recursos chegue ao fim antes no

planejado, ou seja, para um instante, digamos $T_1 < T^*(\alpha)$. Neste instante a taxa de extração q será maior do que zero. Para um aumento de 1% no valor de T , o valor de $\Delta J/\Delta T$ calculado foi de aproximadamente $-5,94 \times 10^{-4}$, cerca de metade da variação ao diminuir T em 1%. Quanto menor a variação de ΔT , ou seja, quando $\Delta T \rightarrow 0$, mais próximo de zero será $\Delta J/\Delta T$, na vizinhança de β^0 . O Gráfico 13 apresenta os valores finais das variáveis x e q , dado o valor de T escolhido pela firma, variando entre zero e duas vezes $T^*(\alpha)$. Também são apresentados os valores de J e o valor de T_1 , que para valores menores ou iguais a $T^*(\alpha)$ é exatamente T , e para valores maiores que $T^*(\alpha)$, será um valor menor dado por (4.31), neste caso, T_1 é o exato instante em que o estoque de recursos se esgota. Além disso, pode se verificar que na vizinhança de T^{0*} a variação do valor presente do lucro ótimo J^* em resposta a variações de T é muito pequena, portanto a inclinação de J^* nesta região é muito próxima a zero, sendo exatamente igual a zero em T^* .

Gráfico 13 - Valores de $x(T)$, $q(T)$, J e T_1 em função de T escolhido.



Fonte: Elaboração própria (2018).

A escala da esquerda representa os valores de x e T_1 , enquanto a escala da direita representa os valores de q e de J . Conforme já mencionado, no gráfico é possível observar que para valores de T maiores que o valor ótimo, o valor final de q será maior do que zero. O valor de J será crescente até que o parâmetro T escolhido

pela firma será igual a $T^*(\alpha)$, passando a decrescer para valores maiores, e apresentando uma baixa variação na vizinhança de β^0 , para variações de T .

Conforme o exercício gráfico e numérico feito nesta seção pudemos verificar que as derivadas de primeira ordem obtidas pelo do Teorema do Envelope Dinâmico e validadas através da derivação da função valor-ótimo J^* em relação às variáveis exógenas de interesse fornecem informações precisas para a análise de sensibilidade em otimização dinâmica, ou seja, são um ferramenta útil para realização de dinâmica comparativa, comparamos os impactos causados em J^* por pequenas variações nos parâmetros exógenos, onde os valores de $\Delta J^*/\Delta\alpha$ calculados são boas aproximações das derivadas $\partial J^*/\partial\alpha$ obtidas através do Teorema do Envelope Dinâmico. No próximo capítulo vamos verificas o comportamento das derivadas de segunda ordem de J^* .

5 PROPRIEDADES QUALITATIVAS DO PROBLEMA

Neste capítulo vamos verificar se é possível obter as propriedades qualitativas do problema de extração de recursos exauríveis em monopólio, através da caracterização da matriz Hessiana do problema, com propriedades semelhantes às apresentadas por Caputo (1990), em seu exemplo. Vamos tomar as derivadas de segunda ordem de J^* . Aqui não faremos suposições a respeito do comportamento do problema, uma vez que temos a forma funcional da função lucro e temos também as funções ótimas resultantes da solução do problema, então vamos verificar diretamente seu comportamento, que já pudemos ter uma ideia ao observar a concavidade/convexidade das curvas de J^* nos gráficos do capítulo anterior.

Primeiramente vamos tomar as derivadas de segunda ordem da diagonal principal de $J_{\beta\beta}^*$. Para obter as derivadas J_{KK}^* , $J_{\delta\delta}^*$ e $J_{x_0x_0}^*$, de acordo com a metodologia primal-dual dinâmica, podemos derivar diretamente os resultados obtidos para as derivadas de primeira ordem J_K^* , J_δ^* e $J_{x_0}^*$. Para obter J_{KK}^* e $J_{\delta\delta}^*$ vamos derivar os resultados obtidos em (4.34) e (4.35), respectivamente:

$$\begin{aligned} J_{KK}^* &= \frac{\partial}{\partial K} \int_0^{T^*} q^*(t; \alpha) e^{-\delta t} dt \\ &= \int_0^{T^*} \frac{\partial}{\partial K} \left[\frac{\partial \pi}{\partial K} (q^*(t; \alpha)) \right] e^{-\delta t} dt \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} J_{\delta\delta}^* &= -\frac{\partial}{\partial \delta} \int_0^{T^*} t \pi(q^*(t; \alpha)) e^{-\delta t} dt \\ &= -\int_0^{T^*} t \frac{\partial}{\partial \delta} [\pi(q^*(t; \alpha)) e^{-\delta t}] dt \\ &= -\int_0^{T^*} t \frac{\partial}{\partial \delta} [\pi(q^*(t; \alpha))] e^{-\delta t} - t^2 \pi(q^*(t; \alpha)) e^{-\delta t} dt \end{aligned} \quad (5.2)$$

Os valores de J_{KK}^* e $J_{\delta\delta}^*$ são obtidos então integrando-se os resultados obtidos acima ao longo do horizonte de T^* .

Para encontrar $J_{x_0x_0}^*$ basta tomar a derivada de $J_{x_0}^*$ obtido em (4.36):

$$J_{x_0x_0}^*(\alpha) = \frac{\partial}{\partial x_0} [\lambda^*(0, \alpha)] \quad (5.3)$$

Agora vamos encontrar as derivadas cruzadas de segunda ordem de J^* . Primeiramente vamos apresentar a expressão para as derivadas cruzadas em relação às variáveis δ e K , derivando J_K^* obtido em (4.34) em relação a δ e J_δ^* obtido em (4.35) em relação a K :

$$J_{K\delta}^* \equiv \frac{\partial}{\partial \delta} \int_0^{T^*} \frac{\partial \pi}{\partial K} (q^*(t; \alpha)) e^{-\delta t} dt \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \int_0^{T^*} \frac{\partial}{\partial \delta} \left[\frac{\partial \pi}{\partial K} (q^*(t; \alpha)) \right] e^{-\delta t} - \frac{\partial \pi}{\partial K} (q^*(t; \alpha)) t e^{-\delta t} \\ &= - \int_0^{T^*} \frac{\partial}{\partial K} [\pi(q^*(t; \alpha))] t e^{-\delta t} dt \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\equiv - \frac{\partial}{\partial K} \int_0^{T^*} \pi(q^*(t; \alpha)) t e^{-\delta t} dt \equiv J_{\delta K}^*$$

Para obter as derivadas $J_{Kx_0}^*$ e $J_{x_0K}^*$, vamos derivar J_K^* obtido em (4.34) em relação a x_0 e $J_{x_0}^*$ obtido em (4.36) em relação a K :

$$J_{Kx_0}^* \equiv \frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^{T^*} \frac{\partial \pi}{\partial K} (q^*(t; \alpha)) e^{-\delta t} dt \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \int_0^{T^*} \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\frac{\partial \pi}{\partial K} (q^*(t; \alpha)) \right] e^{-\delta t} \\ &= \frac{\partial \lambda^*}{\partial K} (0, \alpha) \equiv J_{x_0K}^* \end{aligned} \quad (5.7)$$

E finalmente, para obter as derivadas $J_{\delta x_0}^*$ e $J_{x_0\delta}^*$, vamos derivar J_δ^* em relação a x_0 e $J_{x_0}^*$ em relação a δ , respectivamente:

$$J_{\delta x_0}^* \equiv - \frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^{T^*} \pi(q^*(t; \alpha)) t e^{-\delta t} dt \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} &\equiv - \int_0^{T^*} \frac{\partial}{\partial x_0} [\pi(q^*(t; \alpha))] t e^{-\delta t} dt \\ &= \frac{\partial}{\partial K} [\lambda^*(0, \alpha)] \equiv J_{x_0\delta}^* \end{aligned} \quad (5.9)$$

De acordo com Caputo (1990), a simetria das derivadas cruzadas verifica-se ao na trajetória ótima como um todo e não a cada instante de tempo, então na próxima seção vamos verificar os valores derivadas de segunda ordem comparando as

derivadas cruzadas entre si. Para os elementos da diagonal de $J_{\beta\beta}^*$ vamos comparar os resultados obtidos tomando duas vezes a derivada de J^* em relação à cada uma das variáveis, verificando também a validade do Teorema do Envelope.

5.1 VERIFICAÇÃO DAS DERIVADAS DE SEGUNDA ORDEM

Para a caracterização das propriedades de $J_{\beta\beta}^*$ vamos verificar a expressão final de cada uma das derivadas da diagonal e também seu sinal. Derivando a expressão da integral obtida em (4.34) para J_K^* e integrando-a temos:

$$\begin{aligned} J_{KK}^* &= \int_0^{T^*} \frac{\partial(q^* e^{-\delta T^*})}{\partial K} dt = \delta \int_0^{T^*} \frac{\partial}{\partial K} \left[\frac{1}{K} (T^* - t) e^{-\delta T^*} \right] dt \\ &= \delta e^{-\delta T^*} \int_0^{T^*} \left[\left(-\frac{T^*}{K^2} + \frac{T_K^*}{K} - \frac{\delta T_K^* T^*}{K} \right) + \left(\frac{1}{K^2} + \frac{\delta T_K^*}{K} \right) t \right] dt \\ &= e^{-\delta T^*} \left[\left(-\frac{\delta T^*}{K^2} + \frac{\delta x_0}{\delta K T^*} - \frac{\delta x_0}{K} \right) t + \left(\frac{\delta}{K^2} + \frac{\delta x_0}{K T^*} \right) \frac{t^2}{2} \right]_0^{T^*}. \end{aligned}$$

Avaliando a expressão acima nos limites de integração e reorganizando o resultado temos a seguinte expressão para J_{KK}^* :

$$J_{KK}^* = -\frac{x_0^2}{T^*} e^{-\delta T^*} < 0. \quad (5.10)$$

Para verificar se o resultado obtido com a aplicação do Teorema do Envelope está correto, vamos obter J_{KK}^* derivando J_K^* , obtido em (4.38) em relação a K , multiplicando e dividindo o resultado obtido por T^* e substituindo T^{*2} por $2Kx_0/\delta$ temos:

$$\begin{aligned} J_{KK}^* &= \frac{\partial}{\partial K} (x_0 e^{-\delta T^*}) = -\delta x_0 T_K^* e^{-\delta T^*} = -\delta x_0 \frac{T^*}{2K} e^{-\delta T^*} \\ &= -\delta x_0 \frac{T^{*2}}{2KT^*} e^{-\delta T^*} = -\delta x_0 \frac{1}{2KT^*} \frac{2Kx_0}{\delta} e^{-\delta T^*} = -\frac{x_0^2}{T^*} e^{-\delta T^*}, \end{aligned}$$

que é exatamente o mesmo resultado obtido em (5.10).

Vamos repetir o mesmo procedimento acima para encontrar $J_{\delta\delta}^*$, derivando o resultado obtido em (4.35) para J_{δ}^* em relação a δ e tomando a integral ao longo do horizonte de tempo T^* :

$$\begin{aligned}
 J_{\delta\delta}^* &= - \int_0^{T^*} t \frac{\partial}{\partial \delta} [e^{-\delta t} - e^{-\delta T^*}] dt \\
 &= \int_0^{T^*(\alpha)} t [te^{-\delta t} - (T^* + \delta T_{\delta}^*)e^{-\delta T^*}] dt \\
 &= \int_0^{T^*(\alpha)} \left(t^2 e^{-\delta t} - t \frac{T^*}{2} e^{-\delta T^*} \right) dt \\
 &= \left[-\frac{t^2 e^{-\delta t}}{\delta} - \frac{2te^{-\delta t}}{\delta^2} - \frac{2e^{-\delta t}}{\delta^3} - \frac{t^2 T^*}{4} e^{-\delta T^*} \right]_0^{T^*}.
 \end{aligned}$$

Avaliando então o resultado acima nos limites e organizando os termos de integração obtemos:

$$J_{\delta\delta}^* = \frac{2}{\delta^3} \left[1 - \left(1 + \delta T^* + \frac{(\delta T^*)^2}{2} + \frac{(\delta T^*)^3}{8} \right) e^{-\delta T^*} \right] > 0. \quad (5.11)$$

Para verificar o sinal de (5.11) podemos realizar um procedimento semelhante ao utilizado para verificar o sinal de J_{δ}^* , tomando a expansão de Taylor de $e^{\delta T^*}$ e comparando com o termo que está multiplicando $e^{-\delta T^*}$, chega-se a conclusão que $J_{\delta\delta}^*$ é positivo.

Derivando J_{δ}^* em relação a δ temos:

$$\begin{aligned}
 J_{\delta\delta}^* &= \frac{\partial}{\partial \delta} \left[\frac{1}{\delta^2} \left(1 + \delta T^* + \frac{(\delta T^*)^2}{2} \right) e^{-\delta T^*} - \frac{1}{\delta^2} \right] \\
 &= \frac{2}{\delta^3} - \frac{2}{\delta^3} \left(1 + \delta T^* + \frac{(\delta T^*)^2}{2} \right) e^{-\delta T^*} \\
 &\quad + \frac{1}{\delta^2} \left(1 + \delta T^* + \frac{(\delta T^*)^2}{2} \right) e^{-\delta T^*} (-T^* - \delta T_{\delta}^*) \\
 &\quad + \frac{1}{\delta^2} (\delta T^{*2} + 2T^* + \delta T_{\delta}^*) e^{-\delta T^*},
 \end{aligned}$$

substituindo T_{δ}^* por $-T^*/2\delta$ e reorganizando a expressão, temos:

$$J_{\delta\delta}^* = \frac{2}{\delta^3} \left[1 - \left(1 + \delta T^* + \frac{(\delta T^*)^2}{2} + \frac{(\delta T^*)^3}{8} \right) e^{-\delta T^*} \right],$$

que é o mesmo resultado obtido em (5.11).

Derivando $J_{x_0}^*$ em relação à x_0 , e substituindo $T_{x_0}^*$ por $K/\delta T^*$ temos:

$$J_{x_0 x_0}^* = K \frac{\partial(e^{-\delta T^*})}{\partial x_0} = -\delta T_{x_0}^* K e^{-\delta T^*} = -\frac{K^2}{T^*} e^{-\delta T^*} < 0, \quad (5.12)$$

obtendo como resultado uma forma semelhante a J_{KK}^* .

Agora vamos avaliar as derivadas de segunda ordem cruzadas, para ver se a simetria se verifica.

Derivando (4.34) em relação a x_0 temos:

$$\begin{aligned} J_{Kx_0}^* &= \int_0^{T^*} \frac{\partial(q^* e^{-\delta T^*})}{\partial x_0} dt = \frac{\delta}{K} \int_0^{T^*} \frac{\partial}{\partial x_0} [(T^* - t)e^{-\delta T^*}] dt \\ &= \frac{\delta}{K} \int_0^{T^*} [T_{x_0}^* e^{-\delta T^*} (1 - \delta T^* + t\delta)] dt = \frac{e^{-\delta T^*}}{T^*} \int_0^{T^*} [1 - \delta T^* + t\delta] dt \quad (5.13) \\ &= \frac{e^{-\delta T^*}}{T^*} \left[\left(t - \delta T^* t + \frac{t^2}{2} \delta \right) \right]_0^{T^*} = e^{-\delta T^*} \left(1 - \frac{\delta T^*}{2} \right), \end{aligned}$$

então se as derivadas de segunda ordem cruzadas são iguais, devemos ter um resultado exatamente igual ao obtido acima derivando (4.36) em relação a K :

$$\begin{aligned} J_{x_0 K}^* &= \frac{\partial}{\partial K} (K e^{-\delta T^*}) = e^{-\delta T^*} - \delta T_K^* K e^{-\delta T^*} \\ &= e^{-\delta T^*} - \frac{K x_0}{T^*} e^{-\delta T^*} = e^{-\delta T^*} \left(1 - \frac{K x_0}{T^*} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ao analisar os resultados obtidos para as derivadas de segunda ordem cruzadas $J_{Kx_0}^*$ e $J_{x_0 K}^*$ parece não haver simetria, vamos então reescrever (5.14), através de algumas manipulações:

$$\begin{aligned} J_{x_0 K}^* &= e^{-\delta T^*} \left(1 - \frac{K x_0 T^*}{T^{*2}} \right) = e^{-\delta T^*} \left(1 - \frac{\delta}{2K x_0} K x_0 T^* \right) \\ &= e^{-\delta T^*} \left(1 - \frac{\delta T^*}{2} \right), \end{aligned}$$

obtendo exatamente o mesmo resultado que em (5.13) e confirmando a relação de simetria entre as derivadas cruzadas.

Para obter $J_{K\delta}^*$ derivamos J_K^* em (4.34) em relação a δ :

$$\begin{aligned}
 J_{K\delta}^* &= \int_0^{T^*} \frac{\partial(q^* e^{-\delta T^*})}{\partial \delta} dt = \frac{1}{K} \int_0^{T^*} \frac{\partial}{\partial \delta} [\delta(T^* - t)e^{-\delta T^*}] dt \\
 &= \frac{1}{K} e^{-\delta T^*} \int_0^{T^*} \left[\frac{T^*}{2} - \frac{\delta T^{*2}}{2} + t \left(\frac{\delta T^*}{2} - 1 \right) \right] dt \\
 &= \frac{1}{K} e^{-\delta T^*} \left[\frac{T^*}{2} t - \frac{\delta T^{*2}}{2} t + \frac{t^2}{2} \left(\frac{\delta T^*}{2} - 1 \right) \right]_0^{T^*} \\
 &= \frac{1}{K} e^{-\delta T^*} \left[\frac{T^{*2}}{2} - \frac{\delta T^{*3}}{2} + \frac{\delta T^{*3}}{4} - \frac{T^{*2}}{2} \right] = -\frac{\delta T^{*3}}{4K} e^{-\delta T^*}.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Para verificar a simetria, vamos calcular $J_{\delta K}^*$ derivando (4.35) em relação à K :

$$\begin{aligned}
 J_{\delta K}^* &= - \int_0^{T^{*(\alpha)}} \frac{\partial}{\partial K} [t e^{-\delta t} - t e^{-\delta T^*}] dt = -\delta T_K^* e^{-\delta T^*} \int_0^{T^{*(\alpha)}} t dt \\
 &= -\delta T_K^* e^{-\delta T^*} \frac{T^{*2}}{2} = -\delta \frac{x_0}{\delta T^*} e^{-\delta T^*} \frac{T^{*2}}{2} = -\frac{x_0 T^*}{2} e^{-\delta T^*}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Novamente, para o resultado obtido acima, aparentemente, a simetria não se confirma, sendo necessário manipular a expressão obtida em (5.15), substituindo T^{*2} por $2Kx_0/\delta$, então:

$$J_{K\delta}^* = -\frac{\delta T^{*3}}{4K} e^{-\delta T^*} = -\frac{\delta T^*}{4K} \frac{2Kx_0}{\delta} e^{-\delta T^*} = -\frac{x_0 T^*}{2} e^{-\delta T^*},$$

o mesmo resultado obtido em (5.16), confirmando novamente a simetria.

Para calcular o valor de $J_{\delta x_0}^*$ vamos derivar J_δ^* obtido em (4.35) em relação a x_0 :

$$\begin{aligned}
 J_{\delta x_0}^* &= - \int_0^{T^{*(\alpha)}} t \frac{\partial}{\partial x_0} (e^{-\delta t} - e^{-\delta T^*}) dt = - \int_0^{T^{*(\alpha)}} t (\delta T_{x_0}^* e^{-\delta T^*}) dt \\
 &= -\delta T_{x_0}^* e^{-\delta T^*} \int_0^{T^{*(\alpha)}} t dt = -\delta T_{x_0}^* e^{-\delta T^*} \frac{T^{*2}}{2} = -\frac{KT^*}{2} e^{-\delta T^*}.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

E finalmente, para obter o valor de $J_{x_0\delta}^*$ vamos derivar $J_{x_0}^*$ obtido em (4.36) em relação a δ :

$$\begin{aligned} J_{x_0\delta}^* &= \frac{\partial}{\partial \delta} (K e^{-\delta T^*}) = K e^{-\delta T^*} (-T^* - \delta T_{x_0}^*) \\ &= K e^{-\delta T^*} (-T^* - \delta T_{\delta}^*) = -\frac{KT^*}{2} e^{-\delta T^*}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

obtendo o mesmo resultado que em (5.17).

Como vimos as derivadas de segunda ordem da diagonal de $J_{\alpha\alpha}^*$, onde $\alpha = (K, \delta, x_0)$, J_{KK}^* e $J_{x_0x_0}^*$ são negativas, e $J_{\delta\delta}^*$ é positiva. As derivadas de segunda ordem cruzadas $J_{x_0\delta}^* = J_{\delta x_0}^*$ e $J_{K\delta}^* = J_{\delta K}^*$ tem sinal negativo, enquanto as derivadas $J_{x_0K}^* = J_{Kx_0}^*$ tem seu sinal definido em função dos valores de K , x_0 e δ , onde:

$$J_{x_0K}^* = J_{Kx_0}^* = e^{-\delta T^*} \left(1 - \frac{Kx_0}{T^*}\right) = e^{-\delta T^*} \left(1 - \sqrt{\frac{Kx_0\delta}{2}}\right),$$

então

$$J_{x_0K}^* = J_{Kx_0}^* \begin{cases} < 0, & Kx_0\delta/2 > 1 \\ = 0, & Kx_0\delta/2 = 1. \\ > 0, & Kx_0\delta/2 < 1 \end{cases}$$

Definindo $\gamma = (K, x_0)$, e definindo $J_{\gamma\gamma}^*$ como:

$$J_{\gamma\gamma}^* = \begin{bmatrix} J_{KK}^* & J_{x_0K}^* \\ J_{Kx_0}^* & J_{x_0x_0}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K^2}{T^*} e^{-\delta T^*} & e^{-\delta T^*} \left(1 - \frac{Kx_0}{T^*}\right) \\ e^{-\delta T^*} \left(1 - \frac{Kx_0}{T^*}\right) & -\frac{x_0^2}{T^*} e^{-\delta T^*} \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Então os menores principais líderes de $J_{\gamma\gamma}^*$, definidos como $|J_{\gamma\gamma}^*|_1$ e $|J_{\gamma\gamma}^*|_2$ são:

$$|J_{\gamma\gamma}^*|_1 = |J_{KK}^*| = \left[-\frac{K^2}{T^*} e^{-\delta T^*}, \right]$$

$$\begin{aligned}
|J_{\gamma\gamma}^*|_2 &= \begin{vmatrix} J_{KK}^* & J_{x_0K}^* \\ J_{Kx_0}^* & J_{x_0x_0}^* \end{vmatrix} = \left[\frac{K^2 x_0^2}{T^{*2}} e^{-2\delta T^*} - \left(1 - \frac{Kx_0}{T^*}\right)^2 e^{-2\delta T^*} \right] \\
&= \left[\frac{K^2 x_0^2}{T^{*2}} e^{-2\delta T^*} - \left(1 - 2\frac{Kx_0}{T^*} + \frac{K^2 x_0^2}{T^{*2}}\right) e^{-2\delta T^*} \right] \\
&= \left[\frac{K^2 x_0^2}{T^{*2}} e^{-2\delta T^*} - \left(1 - \sqrt{2Kx_0\delta} + \frac{K^2 x_0^2}{T^{*2}}\right) e^{-2\delta T^*} \right]. \\
&= (\sqrt{2Kx_0\delta} - 1)e^{-2\delta T^*} = (\delta T^* - 1)e^{-2\delta T^*}
\end{aligned}$$

Onde o sinal de $|J_{\gamma\gamma}^*|_1$ é sempre negativo e o sinal de $|J_{\gamma\gamma}^*|_2$ é definido em função do valor de $2Kx_0\delta \gtrless 1$, conforme:

$$|J_{\gamma\gamma}^*|_2 \begin{cases} < 0, & 2Kx_0\delta < 1 \\ = 0, & 2Kx_0\delta = 1. \\ > 0, & 2Kx_0\delta > 1 \end{cases}$$

Se $2Kx_0\delta \geq 1$, então $|J_{\gamma\gamma}^*|_2$ será maior ou igual a zero, neste caso $J_{\gamma\gamma}^*$ será negativa-definida ou negativa-semidefinida, respectivamente, caso contrário a matriz $J_{\gamma\gamma}^*$ será indefinida, uma vez que o k -ésimo menor principal líder deve ter sinal igual a $(-1)^k$, para que $J_{\gamma\gamma}^*$ seja negativa-definida, ou ser zero, para que $J_{\gamma\gamma}^*$ seja negativa-semidefinida.

Desta forma verificamos que para o problema em questão não é possível analisar suas propriedades qualitativas, uma vez que a matriz formada com as derivadas parciais de segunda ordem, apesar de apresentar simetria para as derivadas de segunda ordem cruzadas, não pode ser caracterizada como negativa-definida ou semidefinida, ou ainda como positiva-definida ou semidefinida. Para que possa ser feita uma análise qualitativa completa a respeito do problema, é necessário que sejam atendidas algumas condições, que garantam que o problema seja “bem-comportado”.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos a metodologia primal-dual dinâmica introduzida por Caputo em 1988 e generalizada em 1990, como uma ferramenta para a realização de análise de sensibilidade em otimização dinâmica e para a obtenção de propriedades qualitativas de um problema de otimização dinâmica que dificilmente podem ser obtidos utilizando-se outras abordagens de dinâmica comparativa. Apresentamos a exposição da metodologia primal-dual introduzida por Silberberg em seu artigo de 1974, como base para a exposição da versão dinâmica equivalente de Caputo.

Verificamos um exemplo que, por suposição, atende todos os requisitos necessários para produzir uma análise qualitativa bem característica do problema em questão. Este exemplo de maximização de lucro da firma competitiva, extraído de Caputo (1990) possui interpretações econômicas interessantes, apresentando resultados intertemporais análogos ao que é conhecido como Lema de Hotelling, que é também obtido com a aplicação do Teorema do envelope Dinâmico.

Aplicamos a metodologia dual-primal dinâmica de Caputo a um problema de maximização de lucros da firma extratora de recursos exauríveis em monopólio proposto por Hotelling (1991). Diferentemente do exemplo de Caputo, em nosso problema os parâmetros de interesse não aparecem linearmente no integrando da função objetivo. Além disso, utilizamos uma forma funcional para a função lucro, onde o preço do produto é definido em função da quantidade ofertada, pois trata-se de um problema de monopólio. Os resultados obtidos através da análise de sensibilidade em otimização dinâmica, isto é, dinâmica comparativa, utilizando o Teorema do Envelope Dinâmico foram satisfatórios, uma vez que foram validados e também verificados graficamente. Na análise gráfica, as derivadas obtidas foram avaliadas em um ponto fixo escolhido $(\beta^0, J^*(\beta^0))$, onde tangenciaram a curva de valor-ótimo do lucro ao variar-se cada um dos parâmetros na fizinhança deste ponto fixo, coincidindo com a descrição de Samuelson para a explicação do nome Teorema do Envelope. Também foram fornecidas algumas interpretações ou descrições para os resultados obtidos, ainda que não tão “elegantes” quanto os resultados apresentados no exemplo de Caputo.

Ao verificar as propriedades qualitativas do problema através da metodologia primal-dual dinâmica de Caputo, verificamos que as derivadas parciais de segunda ordem cruzadas apresentaram simetria e reciprocidade, o que se deve, em princípio à natureza de da função valor-ótimo J^* , uma vez que, conforme verificado $J^* \in C^{(2)}$. Porém apenas duas derivadas parciais de segunda ordem da diagonal da matriz $J_{\alpha\alpha}^*$ tiveram valor negativo, e a terceira com valor positivo. Ao avaliar os dois primeiros menores principais da matriz $J_{\alpha\alpha}^*$, verificamos que o primeiro menor principal tinha sinal negativo e o sinal do segundo era determinado pelos valores dos parâmetros do problema, então a sub-matriz que analisamos é definida condicionalmente aos parâmetros do problema, podendo ser negativa definida, negativa-semidefinida ou indefinida, desta forma, não permitindo uma análise completa das propriedades qualitativas do problema escolhido.

REFERÊNCIAS

CAPUTO, Michael R. **How to do comparative dynamics on the back of an envelope in variational calculus**. 1988. Trabalho apresentado para Society for Economic Dynamics and Control, Tempe, AZ, 1988.

CAPUTO, Michael R. How to do comparative dynamics on the back of an envelope in optimal control theory. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 14 n. 3-4, p. 655-683, 1990.

CAPUTO, Michael R. **Foundations of dynamics economic analysis: optimal control theory and applications**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

CHIANG, Alpha C. **Elements of dynamic optimization**. Long Grove: Waveland, 2000.

DIXON, David S. **Hotelling's rule in the limit: an agent-based exploration of the model Space**. 2012. Trabalho apresentado na 85th Annual Conference of the Western Economic Association International, Portland, OR, 2010. Disponível em: <<http://www.unm.edu/~ddixon/papers/AceHotelling.pdf>>. Acesso em: 01 out. 2018.

HOTELLING, Harold. The economics of exhaustible resources. **Bulletin of Mathematical Biology**, v. 53, n. 1-2, p. 281-312, 1991.

KAMIEN, Morton I.; SCHWARTZ, Nancy L. **Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management**. New York: Dover, 2012.

LAFRANCE, Jeffrey T.; BARNEY, L. Dwayne. The envelope theorem in dynamic optimization. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 15, p. 355-85, 1991

LÉONARD, Daniel, LONG, Ngo Van. **Optimal control theory and static optimization in economics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

LÖFGREN, Karl-Gustaf. **A brief history of envelope theorems in economics: static and dynamic**. Umea Economic Studies, n. 892, Umea University, Department of Economics, 2014. Disponível em: <http://www.usbe.umu.se/digitalAssets/147/147208_ues892.pdf>. Acesso em: 05 set. 2018.

ONIKI, Hajime. Comparative dynamics (sensitivity analysis) in optimal control theory. **Journal of Economic Theory**, v. 6(3), p. 265–283, 1973.

SAMUELSON, Paul A. **Foundations of economic analysis**. New York, Atheneum, 1974.

SCHMIDT, Torsten. Really pushing the envelope: early use of the envelope theorem by Auspitz and Lieben. **History of Political Economy**, v. 36, n. 1, p. 103-129, 2004.

SILBERBERG, Eugene. A revision of comparative statics methodology in economics, or, how to do comparative statics on the back of an envelope. **Journal of Economic Theory**, v. 7(2), p. 159–172, 1974.

VARIAN, Hal R. **Microeconomics Analysis**. 3. ed. New York: W. W. Norton & Company, 1992.