MARCELO AUGUSTO DONCATTO GELATI

ESTABILIDADE EM EQUILÍBRIO WALRASIANO: WEINTRAUB E OS MÉTODOS DE LIAPUNOV

Porto Alegre

2018

MARCELO AUGUSTO DONCATTO GELATI

ESTABILIDADE EM EQUILÍBRIO WALRASIANO: WEINTRAUB E OS MÉTODOS DE LIAPUNOV

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

Orientador: Jorge Paulo de Araújo

Porto Alegre

2018

MARCELO AUGUSTO DONCATTO GELATI

ESTABILIDADE EM EQUILÍBRIO WALRASIANO: WEINTRAUB E OS MÉTODOS DE LIAPUNOV

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Trabalho aprovado. Porto Alegre, __ de ________ de 2018:

Jorge Paulo de Araújo
Orientador

Marcelo de Carvalho Griebeler
Convidado 1

Sérgio Marley Modesto Monteiro
Convidado 2

Porto Alegre
2018

Este trabalho é dedicado a todos aqueles que
me fizeram uma pessoa melhor.

Agradecimentos

Faço meus agradecimentos em ordem cronológica.

Agradeço ao meu pai, por ter me estimulado desde muito cedo. Agradeço à minha mãe, por ter me fornecido um vasto capital cultural. Apesar dos desentendimentos, boa parte de minha trajetória foi definida por vocês e estou muito satisfeito com ela.

Agradeço ao meu amigo Maurício, pelas discussões intelectuais realizadas em todas as vezes que saíamos. Todas nossas conversas faziam com que eu tivesse vontade de continuar aprendendo e ampliaram minhas áreas de interesse. Sei que sou uma pessoa muito menos limitada hoje por causa de suas provocações.

Um de meus agradecimentos principais vai ao meu padrinho acadêmico, Fernando Sabino. Enquanto meus pais definiram minha trajetória pré-acadêmica, você me orientou para todas ótimas decisões que tomei ao entrar na faculdade. É de coração mesmo que agradeço a todas conversas, observações, informações e a tudo mais que você disponibilizou para me ajudar. Eu não teria chegado tão longe, não fosse por isso.

Agradeço ao chefe do meu primeiro estágio, Hudson. Todo tempo e informação que você concedeu para que eu me qualificasse foram de extrema valia e me engrandeceram significativamente.

Outro de meus agradecimentos principais vai a meu amigo Bruno. As linhas que tenho que usar para lhe agradecer não conseguiriam conter tudo o que eu precisaria escrever. Por isso agradeço a tudo. A tudo mesmo.

Apesar de a qualidade do curso em geral ter sido baixa, tive alguns ótimos professores. Dentre estes, gostaria de agradecer principalmente ao professor Horn, ao professor Monteiro, ao professor Jorge e ao professor Hélio. Suas aulas e personalidades foram inspiradoras. Agradeço também ao professor Griebeler que, apesar de não ter sido meu professor, teve paciência de ouvir minhas maluquices e me auxiliou quando fui seu bolsista.

Por fim, meu maior agradecimento vai à minha companheira, Daiane. Obrigado por ter me tornado mais humano. Obrigado, principalmente, por ter me tornado pleno. Seu apoio e carinho diários me fizeram descobrir que, independente do que eu faça, o que importa é que eu me sinta feliz. E eu me sinto feliz com você. Obrigado.

"I should like to say two things, one intellectual and one moral.
The intellectual thing I should want to say is this:
when you are studying any matter, or considering any philosophy,
ask yourself only what are the facts and what is the truth that the facts bear out.
Never let yourself be diverted either by what you wish to believe,
or by what you think would have beneficent social effects if it were believed.
But look only, and solely, at what are the facts.
The moral thing I should wish to say is very simple
I should say love is wise, hatred is foolish.
In this world which is getting more and more closely interconnected
we have to learn to tolerate each other, we have to learn
to put up with the fact that some people say things that we don't like.
We can only live together in that way and if we are to live together
and not die together we must learn a kind of charity and a kind of
tolerance which is absolutely vital to the continuation of human life on this planet".
(Bertrand Russell)

Resumo

Esta monografia confronta a tese de Weintraub (1991) acerca do uso dos métodos de Liapunov para o estudo da estabilidade do equilíbrio walrasiano. Weintraub afirma que foi o artigo de Clower e Bushaw (1954) que introduziu os métodos para a comunidade acadêmica. Este trabalho faz uma revisão da literatura sobre estabilidade em equilíbrio geral e mostra que os métodos eram conhecidos antes da publicação de Clower e Bushaw.

Palavras-chave: Equilíbrio geral. Estabilidade. Equações Diferenciais.

Classificação JEL: B21; C26; D50.

Abstract

The present Bachelor thesis deals with Weintraub's (1991) commentary on the use of Liapunov's methods for studying stability on a general equilibrium framework. Weintraub points out that it was the work of Clower and Bushaw (1954) that first introduced Liapunov's methods to the scientific community. This work presents a literature review about stability in general equilibrium and then shows that the methods were known before Clower and Bushaw's publication.

Keywords: General Equilibrium. Stability. Differential Equations.

JEL classification: B21; C26; D50.

Sumário

Introdução

No livro de Weintraub (1991) há uma explicação de como se deu a transformação da economia pré II Guerra Mundial para uma ciência matematizada. Em meio a esta investigação, há uma discussão sobre a introdução dos métodos de Liapunov em economia, especificamente nos trabalhos sobre estabilidade em um sistema walrasiano. Nesta parte, Weintraub afirma que foi o trabalho de Clower e Bushaw (1954) que introduziu o conceito de estabilidade em Liapunov na ciência econômica.

O critério usado para selecionar quem foram os pioneiros não é *stricto senso* quem foram os primeiros a utilizar Liapunov em um trabalho de economia, pois Weintraub refere-se a um artigo de 1950, escrito em japonês por Yasui e que faz uso das funções de Liapunov. Assim, Weintraub conclui que

> *This said, it must be recognized that Yasui did not use Liapunov theory to "solve" a problem previously unsolved. He used the theory to simplify previous results. Further, his connection to the developing literature was remote in terms of distance and influence. His was not the work that introduced Liapunov theory to economists who were linked to the line of papers that resulted in the articles of Arrow, Block, and Hurwicz. (WEINTRAUB, 1991, p. 89)*

Portanto, o que interessa a Weintraub é quem introduziu os métodos diretamente para a comunidade científica, que neste caso seriam Clower e Bushaw. No entanto, se desenvolveu uma consciência dentro da própria comunidade de que os responsáveis por isso foram Arrow e Hurwicz (1958). Segundo Weintraub, o motivo principal é que na *survey* clássica sobre estabilidade walrasiana de Negishi (1962) **não** há quaisquer referências ao trabalho de Clower e Bushaw, inclusive quando Negishi refere-se explicitamente aos métodos de Liapunov.

Citando Weintraub,

> *[...] that judgment [o de Negishi] led to a belief that the Liapunov methods were first introduced into the economics literature by Arrow and Hurwicz in 1958, when in fact they had been introduced earlier. [...] More important, however, is the fact that Clower and Bushaw explicitly used, cited, and discussed the second or indirect Liapunov technique for demonstrating asymptotic stability of the competitive equilibrium. (WEINTRAUB, 1991, p. 136-7)*

Independentemente de considerações sobre a intencionalidade de Negishi ao não incluir o artigo daqueles economistas em sua *survey*, meu trabalho mostrará que a afirmação de Weintraub está equivocada, pois existe um trabalho anterior ao de Clower e Bushaw, a saber Arrow e Hurwicz (1951), que utiliza o segundo método de Liapunov.

No entanto, Arrow e Hurwickz utilizam os métodos de Liapunov, mas não o discutem explicitamente. Nessas linhas, ainda poderíamos considerar válido o argumento de Weintraub. Apesar disso, ainda não cabe atribuir a Clower e Bushaw o crédito. Feita a leitura dos artigos de Arrow e Hurwicz (1958) e Clower e Bushaw (1954), constatei que enquanto as funções de Liapunov são uma ferramenta central no trabalho de Arrow e Hurwicz, Clower e Bushaw referem-se a ela apenas duas vezes: uma como demonstração **alternativa** a um teorema já provado e outra em uma nota de rodapé. O julgamento de Weintraub é feito no sentido de que os autores foram ignorados mesmo após sua inédita contribuição. Ora, a contribuição não pode ser inovadora se nem os autores a consideram dessa maneira. Trata-se meramente de um exercício matemático. Diante dessas informações, a tese de Weintraub continua sendo difícil de ser sustentada.

Minha investigação analisará esse problema de mais perto e descobrirá quais foram as contribuições de fato em cada um dos artigos. A importância dela é desmistificar uma ideia que está distante da realidade, já que algumas teorias são criadas e perpetuadas sem a devida verificação. Descobri, por exemplo, outros autores da história do pensamento econômico que citam a tese de Weintraub. Eles dizem que:

> *[a]s pointed out by E. R. Weintraub (1991 :136–37), the Bushaw-Clower article pioneered the Liapunov technique for demonstrating that the addition of stock-adjustment mechanisms could led to asymptotic stability of the competitive equilibrium, which was not recognized in the literature at the time. (BACKHOUSE; BOIANOVSKY et al., 2013, p. 47)*

Diante disso, é fundamental mostrar que há problemas na tese de Weintraub.

Para demonstrar meus argumentos, divido a monografia nas seguintes partes. Na parte I discuto as origens do estudo moderno sobre estabilidade walrasiana, começando com Hicks e passando pelas contribuições de Samuelson e de um resultado clássico de Metzler. Na parte II exponho os métodos de Liapunov e descrevo detalhadamente o paper de Clower e Bushaw, mostrando exatamente onde os autores utilizaram tais ferramentas. Por fim, na parte III analiso em detalhes o artigo de Arrow e Hurwicz de 1958 e faço um breve comentário sobre o artigo de 1951.

Parte I

Hicks, Samuelson e Metzler

1 As estabilidades perfeita e dinâmica de Hicks e Samuelson

1.1 Estabilidade no sentido de Hicks

É no capítulo 5 de Hicks (1939) que o autor propõe algumas definições de estabilidade em um sistema competitivo. Suponha que há m mercados. Estabilidade no mercado k, no sentido hicksiano, significa que quando o preço do bem k cai a demanda por k será maior que a oferta (e vice-versa). No entanto, duas situações podem ocorrer:

1. a estabilidade se verifica após os outros $m-1$ mercados ajustarem seus preços;
2. a estabilidade se verifica após termos fixado o preço de qualquer subconjunto dos outros $m-1$ mercados [1].

Caso o mercado seja estável no primeiro caso mas não no segundo, dizemos que ele é *imperfeitamente estável*. Se o mercado cumpre ambas condições [2], dizemos que é *perfeitamente estável*.

Apesar de Hicks não ter formalizado matematicamente suas definições, faço isso em seguida. A motivação vem de Metzler (1945) e nos ajudará a criar a intuição para entender resultados posteriores.

Definindo a função excesso de demanda do bem k

$$x_k(p_1, \dots, p_m) = D_k(p_1, \dots, p_m) - S_k(p_1, \dots, p_m) \tag{1.1}$$

em que D_k é a demanda pelo bem k e S_k é a oferta pelo bem k.

A estabilidade no mercado k é definida pela condição de equilíbrio parcial

$$\frac{dx_k}{dp_k} < 0. \tag{1.2}$$

Para que o mercado seja imperfeitamente estável, 1.2 deve se verificar após todos os outros mercados terem se ajustado, isto é,

$$\frac{d}{dp_k}[x_j(p_1(p_k), \dots, p_m(p_k))] = 0 \qquad \textit{para } j \neq k. \tag{1.3}$$

[1] Note que por essa definição podemos fixar o preço de *todos* os outros $m-1$ mercados.
[2] É evidente que $2 \implies 1$. Portanto, é redundante especificar que o mercado deve cumprir as duas condições.

Montando o sistema para os m mercados e fazendo a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dp_k} = \frac{dx_1}{dp_1}\frac{dp_1}{dp_k} + \ldots + \frac{dx_1}{dp_k} + \ldots + \frac{dx_1}{dp_m}\frac{dp_m}{dp_k} = 0 \\
&\vdots \\
&\frac{dx_k}{dp_k} = \frac{dx_k}{dp_1}\frac{dp_1}{dp_k} + \ldots + \frac{dx_k}{dp_k} + \ldots + \frac{dx_k}{dp_m}\frac{dp_m}{dp_k} \\
&\vdots \\
&\frac{dx_m}{dp_k} = \frac{dx_m}{dp_1}\frac{dp_1}{dp_k} + \ldots + \frac{dx_m}{dp_k} + \ldots + \frac{dx_m}{dp_m}\frac{dp_m}{dp_k} = 0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dp_1} & \ldots & \frac{dx_1}{dp_m} \\ \vdots & & \\ \frac{dx_k}{dp_1} & \ldots & \frac{dx_k}{dp_m} \\ \vdots & & \\ \frac{dx_m}{dp_1} & \ldots & \frac{dx_m}{dp_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dp_1}{dp_k} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \frac{dp_m}{dp_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{dx_k}{dp_k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Por Cramer, obtemos

$$1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dp_1} & \ldots & 0 & \ldots & \frac{dx_1}{dp_m} \\ \vdots & & & & \\ \frac{dx_k}{dp_1} & \ldots & \frac{dx_k}{dp_k} & \ldots & \frac{dx_k}{dp_m} \\ \vdots & & & & \\ \frac{dx_m}{dp_1} & \ldots & 0 & \ldots & \frac{dx_m}{dp_m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dp_1} & \ldots & \frac{dx_1}{dp_k} & \ldots & \frac{dx_1}{dp_m} \\ \vdots & & & & \\ \frac{dx_k}{dp_1} & \ldots & \frac{dx_k}{dp_k} & \ldots & \frac{dx_k}{dp_m} \\ \vdots & & & & \\ \frac{dx_m}{dp_1} & \ldots & \frac{dx_m}{dp_k} & \ldots & \frac{dx_m}{dp_m} \end{vmatrix}} = \frac{\left|A(k)\right|}{\left|A\right|}. \tag{1.6}$$

Se utilizarmos a expansão de Laplace em $A(k)$ na coluna k, obteremos a matriz $A(k)$ sem a linha e sem a coluna k - que chamarei de $A(k|k)$ - multiplicada por $\frac{dx_k}{dp_k}$. Assim, obtemos

$$1 = \frac{dx_k}{dp_k}\frac{\left|A(k|k)\right|}{\left|A\right|} \implies \frac{dx_k}{dp_k} = \frac{\left|A\right|}{\left|A(k|k)\right|}. \tag{1.7}$$

Então, para que a condição 1.2 seja cumprida, o primeiro menor k (isto é, $det[A(k|k)]$) tem que possuir sinal oposto a $det[A]$.

A formulação para a estabilidade perfeita é semelhante. Vamos supor que após uma alteração no preço do bem k, sem perda de generalidade, deixamos o preço dos bens $k+1,\ldots,m$ fixos. Então, o sistema 1.4 fica da seguinte maneira

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dp_k} = \frac{dx_1}{dp_1}\frac{dp_1}{dp_k} + \ldots + \frac{dx_1}{dp_k} = 0 \\ &\vdots \\ &\frac{dx_k}{dp_k} = \frac{dx_k}{dp_1}\frac{dp_1}{dp_k} + \ldots + \frac{dx_k}{dp_k}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dp_1} & \ldots & \frac{dx_1}{dp_k} \\ \vdots & & \\ \frac{dx_k}{dp_1} & \ldots & \frac{dx_k}{dp_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dp_1}{dp_k} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{dx_k}{dp_k} \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Por Cramer,

$$1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dp_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ \frac{dx_k}{dp_1} & \ldots & \frac{dx_k}{dp_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dp_1} & \ldots & \frac{dx_1}{dp_k} \\ \vdots & & \\ \frac{dx_k}{dp_1} & \ldots & \frac{dx_k}{dp_k} \end{vmatrix}} = \frac{\left|A^k(k)\right|}{\left|A^k\right|}. \tag{1.10}$$

Usando Laplace em $A^k(k)$ na coluna k, obteremos a mesma matriz sem a linha e sem a coluna k, multiplicada por $\frac{dx_k}{dp_k}$. Isto é,

$$1 = \frac{dx_k}{dp_k}\frac{\left|A^k(k|k)\right|}{\left|A^k\right|} \implies \frac{dx_k}{dp_k} = \frac{\left|A^k\right|}{\left|A^k(k|k)\right|}. \tag{1.11}$$

Note que A^k é o menor em que as linhas e colunas $k+1,\ldots,m$ foram retiradas. $A^k(k|k)$ é o menor em que as linhas e colunas $k,\ldots,m$ foram retiradas. Para que haja estabilidade, eles devem ter sinais opostos. Portanto, estabilidade perfeita implica que os menores devem *alternar* os sinais [3]

$$\frac{dx_k}{dp_k} < 0, \begin{vmatrix} \frac{dx_k}{dp_k} & \frac{dx_k}{dp_l} \\ \frac{dx_l}{dp_k} & \frac{dx_l}{dp_l} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \frac{dx_k}{dp_k} & \frac{dx_k}{dp_l} & \frac{dx_k}{dp_j} \\ \frac{dx_l}{dp_k} & \frac{dx_l}{dp_l} & \frac{dx_l}{dp_j} \\ \frac{dx_j}{dp_k} & \frac{dx_j}{dp_l} & \frac{dx_j}{dp_j} \end{vmatrix} < 0, \; etc., \tag{1.12}$$

[3] Isto é, os menores de ordem ímpar devem ter sinal negativo e os de ordem par devem ter sinal positivo.

de tal forma que

$$sinal\left|A\right| = sinal[(-1)^m]. \tag{1.13}$$

1.2 As contribuições de Samuelson

Infelizmente, a estabilidade no sentido de Hicks não é derivada de considerações dinâmicas. O trabalho de Hicks é essencialmente estático. Para tentar entender as relações entre estática comparativa e sistemas dinâmicos, Samuelson (1942) cunha o termo *princípio da correspondência*. Esse termo aos procedimentos feitos por ele em um artigo anterior (SAMUELSON, 1941).

Dentre as contribuições do artigo de 1941, destaco suas definições de estabilidade. São elas:

1. estabilidade do primeiro tipo "no grande"(ou global);
2. estabilidade do primeiro tipo "no pequeno"(ou local);
3. estabilidade do segundo tipo "no grande";
4. estabilidade do segundo tipo "no pequeno".

A estabilidade do primeiro significa que existe pelo menos um ponto de equilíbrio $\mathring{x}$ tal que algumas trajetórias convergem para esse ponto. A estabilidade **global** especifica que independente do ponto inicial $\overline{x}$, a trajetória atinge o ponto de equilíbrio $\mathring{x}$. Matematicamente, temos que

$$\lim_{t\to\infty} x(t;\overline{x}) = \mathring{x}. \tag{1.14}$$

Para que um ponto $\mathring{x}$ seja **localmente** estável, deve existir uma vizinhança $N(\mathring{x})$ de $\mathring{x}$ tal que toda trajetória que inicie em algum ponto na vizinhança de $N(\mathring{x})$ converge para $\mathring{x}$. Matematicamente, temos que

$$\lim_{t\to\infty} x(t;\overline{x}) = \mathring{x}, \qquad \overline{x} \in N(\mathring{x}). \tag{1.15}$$

Apesar de a estabilidade do segundo tipo não nos interessar, vale a pena descrevê-la. Refere-se a um ponto de equilíbrio tal que a trajetória orbita em torno desse ponto, nunca efetivamente convergindo para ele. As considerações sobre estabilidade local e global se aplicam aqui da mesma maneira.

Neste trabalho uso o termo estabilidade dinâmica para me referir à estabilidade do primeiro tipo.

Durante o início de 1940, algumas tentativas foram feitas para entender a relação entre a estabilidade hicksiana e a estabilidade dinâmica. Por exemplo, Samuelson (1941) mostra que a estabilidade imperfeita de Hicks não era uma condição nem necessária nem suficiente para a estabilidade dinâmica. Mostra também que a estabilidade perfeita não é uma condição necessária para a estabilidade dinâmica. É somente em 1944 que ele, com a ajuda do matemático Witold Hurewicz, mostra que a estabilidade perfeita *também* não é uma condição suficiente para a estabilidade dinâmica. O artigo dá um exemplo em que há estabilidade hicksiana perfeita mas não há estabilidade dinâmica. No próximo capítulo, mostro alguns exemplos em que essas situações acontecem.

Assim, os economistas descobriram que a estabilidade em Hicks não é uma condição nem necessária e nem suficiente para a estabilidade dinâmica. No entanto, há alguns casos em que é possível mostrar que as duas têm semelhanças. Portanto, meu objetivo capítulo seguinte é explorar mais a fundo a relação entre estabilidade dinâmica e hicksiana.

2 Metzler e a integração das duas estabilidades

2.1 Velocidades de ajustamento

Conforme Metzler (1945), é Lange (1944) que aponta pela primeira vez que as formulações de Hicks, que vimos no capítulo ??, são instantâneas e não variam de mercado para mercado. Ainda nesse livro, Lange monta um sistema com velocidades de ajustamento.

Assim, temos o novo sistema dinâmico

$$\frac{dp_i}{dt} = k_i x_i, \ k_i > 0 \qquad\qquad i = 1, \ldots, m \tag{2.1}$$

em que a variação dos preços é proporcional ao excesso de demanda pelo bem x_i, ponderado pelas velocidades de ajustamento k_i.

Há aqui uma leve mudança de notação. A partir de agora, utilizo o subíndice i para cada bem ao invés do antigo k. A letra k agora representa a velocidade de ajustamento.

O exemplo a seguir vai trazer luz à relação entre as estabilidades hicksiana e dinâmica.

Imagine o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \tfrac{dp_1}{dt} &= -k_1(p_1 - \mathring{p}_1) - k_1(p_2 - \mathring{p}_2) \\ \tfrac{dp_2}{dt} &= 2k_2(p_1 - \mathring{p}_1) + k_2(p_2 - \mathring{p}_2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Aqui, as funções $x_1(p_1, p_2)$ e $x_2(p_1, p_2)$ foram aproximadas pelos seu planos tangentes, ou seja,

$$\begin{aligned} x_1(p_1, p_2) &= x_1(\mathring{p}_1, \mathring{p}_2) + \tfrac{dx_1}{dp_1}(p_1 - \mathring{p}_1) + \tfrac{dx_1}{dp_2}(p_2 - \mathring{p}_2) \\ x_2(p_1, p_2) &= x_2(\mathring{p}_1, \mathring{p}_2) + \tfrac{dx_2}{dp_1}(p_1 - \mathring{p}_1) + \tfrac{dx_2}{dp_2}(p_2 - \mathring{p}_2). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Como $\mathring{p}_1$ e $\mathring{p}_2$ são pontos de equilíbrio, então $x_1(\mathring{p}_1, \mathring{p}_2) = x_2(\mathring{p}_1, \mathring{p}_2) = 0$ e

$$\begin{aligned} \tfrac{dx_1}{dp_1} &= -1 \quad & \tfrac{dx_1}{dp_2} &= -1 \\ \tfrac{dx_2}{dp_1} &= 2 \quad & \tfrac{dx_2}{dp_2} &= 1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Na forma matricial, temos

$$k^T A = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_1 \\ 2k_2 & k_2 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

em que k^T é o transposto do vetor coluna $k = (k_1, k_2)$.

Do ponto de vista hicksiano esse sistema não é imperfeitamente estável, pois os dois menores principais de têm sinais diferentes (veja 1.12).

O polinômio característico de $k^T A$ é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (k_2 - k_1)\lambda + k_1 k_2. \tag{2.6}$$

Chamando as raízes de 2.6 de λ_1 e λ_2, temos que $\lambda_1\lambda_2 = k_1 k_2 > 0$, pois $k_1, k_2 > 0$. Portanto, as raízes devem ter o mesmo sinal. Além disso, temos que $\lambda_1 + \lambda_2 = k_2 - k_1$. Portanto, se $k_1 > k_2 \implies \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \implies$ os dois autovalores são negativos e o sistema é dinamicamente estável. Se $k_1 < k_2$ o sistema não é estável.

Este exemplo mostra que mesmo que as condições de Hicks não estejam satisfeitas é possível que o sistema seja dinamicamente estável e que a estabilidade depende também das velocidades de ajustamento e não só dos $\frac{dx_i}{dp_j}$.

Assim, podemos interpretar a estabilidade de Hicks de outra maneira. Podemos imaginar que ela é uma formulação que *independe* das velocidades de ajustes. Neste contexto, Metzler mostra que se um sistema é dinamicamente estável para quaisquer $k_1 > 0, \ldots, k_m > 0$, então o sistema também é (perfeitamente) estável no sentido de Hicks. Este é o resultado que mostrarei a seguir.

2.2 Primeiro teorema de Metzler

Vamos montar o sistema 2.3 para os m mercados com as velocidades de ajustamento.

$$\frac{dp_i}{dt} = k_i a_{i1}(p_1 - \mathring{p}_1) + \ldots + k_i a_{im}(p_m - \mathring{p}_m) \qquad i = 1, \ldots, m \tag{2.7}$$

em que $a_{ij} = \frac{dx_i}{dp_j}$.

O polinômio característico de 2.7 é

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - k_1 a_{11} & -k_1 a_{12} & \ldots & -k_1 a_{1m} \\ -k_2 a_{21} & \lambda - k_2 a_{22} & \ldots & -k_2 a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -k_m a_{m1} & -k_m a_{m2} & \ldots & \lambda - k_m a_{mm} \end{vmatrix} = \left|\lambda I - k^T A\right| \tag{2.8}$$

Expandindo 2.8, temos

$$p(\lambda) = \lambda^m + (-1)^1 S_1 \lambda^{m-1} + (-1)^2 S_2 \lambda^{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1} S_{m-1} \lambda + (-1)^m S_m \tag{2.9}$$

em que S_i, $i = 1, \ldots, m$, é o somatório de todos os menores principais de ordem i da matriz $k^T A$.

Para que ele seja estável, as raízes λ_m devem ter parte real negativa. Agora note duas condições abaixo:

$$p(0) = (-1)^m S_m = (-1)^m \left| k^T A \right|. \tag{2.10a}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} p(\lambda) = \infty. \tag{2.10b}$$

Se $(-1)^m$ e $|k^T A|$ tiverem sinais opostos, $p(0) < 0$ por 2.10a. Mas como 2.10b nos garante que $p(\lambda) \to \infty$, o eixo λ será cortado. Portanto, o comportamento de 2.9 será (grosseiramente) assim:

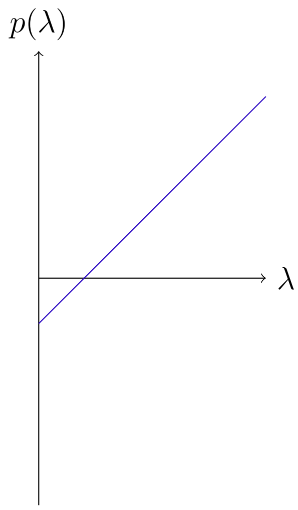

Figura 1 – Instabilidade do sistema 2.7

Nesse caso, o sistema é instável, pois $p(\lambda) = 0$ para algum λ com parte real positiva. Se $(-1)^m$ e $|k^T A|$ têm o mesmo sinal, o comportamento será desse tipo:

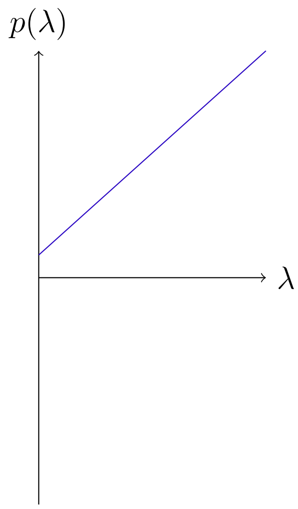

Figura 2 – Estabilidade do sistema 2.7

E não há raízes com parte real positiva. Portanto, o sistema é estável. Mas essa é exatamente a última condição de estabilidade perfeita de Hicks (ver 1.13)! Agora, basta verificar as condições 1.12 e garantiremos que um sistema dinamicamente estável atende as condições de Hicks.

Imagine que alguns mercados são muito inflexíveis em relação a outros, isto é, suas velocidades de ajustamento são muito pequenas. Supondo que esses $m - n$ mercados não se ajustem, colocamos suas velocidades de ajustamento $k_{n+1} = \ldots = k_m = 0$. Os outros n

mercados formam o sistema

$$\frac{dp_i}{dt} = k_i a_{i1}(p_1 - \mathring{p}_1) + \ldots + k_i a_{in}(p_n - \mathring{p}_n) \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Ora, repetindo os procedimentos realizados acima, descobirmos que o determinante desse sistema deve ter o mesmo sinal de $(-1)^n$. Portanto, as condições de Hicks são satisfeitas e ele é perfeitamente estável e temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Se um sistema é dinamicamente estável para quaisquer velocidades de ajustamento, então ele também é perfeitamente estável.*

2.3 Segundo teorema de Metzler

Apesar de ser uma condição necessária, ela não é uma condição suficiente. O exemplo a seguir ilustra isso.

Considere o sistema

$$\begin{array}{rlccc} \frac{dp_1}{dt} = & -k_1(p_1 - \mathring{p}_1) & -0.8k_1(p_2 - \mathring{p}_2) & \\ \frac{dp_2}{dt} = & & -k_2(p_2 - \mathring{p}_2) & -0.8k_2(p_3 - \mathring{p}_3) \\ \frac{dp_3}{dt} = & -10k_3(p1 - \mathring{p}_1) & -k_3(p_2 - \mathring{p}_2) & -k_3(p_3 - \mathring{p}_3) \end{array} \tag{2.12}$$

e sua matriz

$$\begin{pmatrix} -k_1 & -0.8k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & -0.8k_2 \\ -10k_3 & -k_3 & -k_3 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Os menores principais de primeira ordem são todos negativos $(-k_1, -k_2, -k_3)$, os de segunda ordem são positivos $(0.2k_2k_3, k_1k_3, k_1k_2)$ e o determinante da matriz é negativo $(-6.6k_1k_2k_3)$. Portanto, a matriz é perfeitamente estável.

Colocando $k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 1$, temos o polinômio característico

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 6.4\lambda + 26.4 \tag{2.14}$$

com raízes $\lambda_{1,2} \approx -0.095 \pm 2.34i$ e $\lambda_3 \approx -4.81$. Como as partes reais são todas negativas, o sistema é dinamicamente estável.

Se fizermos $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 2$, entretanto, o sistema não será assintoticamente estável. O polinômio característico é

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4.8\lambda + 26.4 \tag{2.15}$$

e as raízes são $\lambda_{1,2} \approx 0.039 \pm 2.28i$ e $\lambda_3 \approx -5.08$. Como as raízes complexas têm parte real positiva, o sistema não é estável.

Visto ess resultado, precisamos de uma condição mais forte para integrar as duas noções de estabilidade. É aqui que Metzler dá início ao seu resultado principal.

Metzler supõe a condição de substituibilidade bruta entre todos os bens, isto é,

$$\frac{dx_i}{dp_j} > 0 \qquad\qquad i \neq j \tag{2.16}$$

Lançando mão dessa condição, Metzler mostra que a estabilidade perfeita no sentido de Hicks é equivalente à estabilidade dinâmica.

Para demonstrar essa afirmação, Metzler introduz um sistema de equações em diferenças que serve como auxiliar na demonstração

$$\begin{array}{rcccccccc}
y_1(t) = & (k_1a_{11}+1)y_1(t-1) & + & k_1a_{12}y_2(t-1) & + & \dots & + & k_1a_{1m}y_m(t-1) \\
y_2(t) = & k_2a_{21}y_1(t-1) & + & (k_2a_{22}+1)y_2(t-1) & + & \dots & + & k_2a_{2m}y_m(t-1) \\
\vdots & & & & & & & \\
y_m(t) = & k_ma_{m1}y_1(t-1) & + & k_ma_{m2}y_2(t-1) & + & \dots & + & (k_ma_{mm}+1)y_m(t-1)
\end{array} \tag{2.17}$$

e sua matriz

$$B = \begin{pmatrix} k_1a_{11}+1 & k_1a_{12} & \dots & k_1a_{1m} \\ k_2a_{21} & k_2a_{22}+1 & \dots & k_2a_{2m} \\ \vdots & & & \\ k_ma_{m1} & k_ma_{m2} & \dots & k_ma_{mm}+1 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

A primeira etapa da argumentação é mostrar que o sistema de equações em diferenças 2.17 é estável se, e só se, o sistema 2.7 é estável. Minha demonstração se desviará levemente da demonstração de Metzler, por acreditar que é defeituosa em um determinado procedimento [1].

Montando o polinômio característico de 2.17

$$q(\rho) = \begin{vmatrix} \rho-(k_1a_{11}+1) & -k_1a_{12} & \dots & -k_1a_{1m} \\ -k_2a_{21} & \rho-(k_2a_{22}+1) & \dots & -k_2a_{2m} \\ \vdots & & & \\ -k_ma_{m1} & -k_ma_{m2} & \dots & \rho-(k_ma_{mm}+1). \end{vmatrix} \tag{2.19}$$

[1] Agradeço ao orientador Jorge P. de Araújo por apontar isso e pela sugestão de demonstração alternativa.

Se colocarmos $\rho - 1 = \lambda$, o polinômio característico 2.19 é igual ao polinômio 2.8. Ou seja, $q(\rho) = q(\lambda + 1) = p(\lambda)$. Além disso, se λ_i é raíz de p, então $\lambda_i + 1$ é raíz de q (e vice-versa).

Lema 2.1. *Se 2.17 é estável, então 2.7 é estável.*

Demonstração. Seja $\lambda_i + 1$ as raízes de $q(\lambda + 1)$. Para que haja estabilidade em 2.17 é preciso que as partes reais das raízes sejam em módulo menor que 1, isto é,

$$\begin{aligned} &|Re(\lambda_i + 1)| < 1 \implies -1 < Re(\lambda_i + 1) < 1 \implies \\ &\implies -1 < Re(\lambda_i) + 1 < 1 \implies -2 < Re(\lambda_i) < 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Descobrimos que λ_i tem parte real negativa e como λ_i é raíz de p, 2.7 é estável. □

Lema 2.2. *Se 2.7 é estável, então 2.17 é estável.*

Demonstração. Como a estabilidade do sistema é independente das unidades de tempo, escolhemos unidades convenientes de maneira que $0 < k_i a_{ii} + 1 < 1$. Além disso, como os bens são substitutos brutos, $0 < k_i a_{ij} < 1$.

Dessa forma, a matriz 2.18 tem todos os componentes positivos. Pelo teorema de Perron-Frobenius, sabemos que existe um autovalor de B, $\lambda(B)$, tal que $\lambda(B) > 0$. Se ω é outro autovalor de B, então $|\omega| < \lambda(B)$.

Vamos provar por contrapositivo. Suponhamos que 2.17 não é estável. Então, existe uma raiz μ de $q(\lambda)$ tal que $|\mu| \geq 1$. Nesse caso, $q(\lambda)$ tem uma raiz real $\lambda(B) > |\mu| > 1$.

Assim, $\lambda(B) - 1 > 0$ é raíz de $p(\lambda)$ e, como ela é positiva, o sistema 2.7 não é estável. □

Com os procedimentos acima, chegamos no seguinte teorema.

Teorema 2.2. *O sistema 2.7 é estável se, e só se, 2.17 é estável.*

Agora, basta provar que a estabilidade de 2.17 é equivalente à estabilidade perfeita de Hicks.

Lema 2.3. *Se 2.17 é perfeitamente estável no sentido de Hicks, então 2.17 é dinamicamente estável*

Demonstração. Expandindo o polinômio característico da matriz 2.18, temos

$$\begin{aligned} q(\lambda) = p(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^m + (-1)^1 S_1 (\lambda - 1)^{m-1} + \ldots + \\ +(-1)^{m-1} S_{m-1}(\lambda - 1) + (-1)^m S_m. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Se 2.17 tem estabilidade perfeita no sentido de Hicks, os menores de ordem i têm o mesmo sinal de $(-1)^i$. Assim, 2.21 tem todos os coeficientes positivos. Pela regra dos sinais de Descartes, não há nenhuma raiz real não negativa, isto é, $\lambda - 1 < 0 \implies \lambda < 1$. Novamente, pelo teorema de Perron-Frobenius, $|\omega| < \lambda(B) < 1$ para toda raiz ω de 2.19. Como todas raízes estão dentro do círculo unitário, o sistema de equações em diferenças é estável. □

Agora, basta provar a volta.

Lema 2.4. *Se 2.17 é dinamicamente estável, então 2.17 é perfeitamente estável no sentido de Hicks.*

Demonstração. Consideremos uma versão reduzida a n mercados de 2.17.

$$\begin{array}{rcccccccc} \hat{y_1}(t) = & (k_1a_{11}+1)\hat{y_1}(t-1) & + & k_1a_{12}\hat{y_2}(t-1) & + & \dots & + & k_1a_{1n}\hat{y_n}(t-1) \\ \hat{y_2}(t) = & k_2a_{21}\hat{y_1}(t-1) & + & (k_2a_{22}+1)\hat{y_2}(t-1) & + & \dots & + & k_2a_{2n}\hat{y_n}(t-1) \\ \vdots & & & & & & & \\ \hat{y_n}(t) = & k_na_{n1}\hat{y_1}(t-1) & + & k_na_{n2}\hat{y_2}(t-1) & + & \dots & + & (k_na_{nn}+1)\hat{y_n}(t-1) \end{array} \tag{2.22}$$

Vamos mostrar que o sistema completo é estável somente se o sistema reduzido é estável.

Se $y_i \geq \hat{y_i} > 0$ para os valores iniciais, então $y_i(t) \geq \hat{y_i}(t)$ para qualquer t. Provamos esta última afirmação por indução. Se $y_i(t-1) \geq \hat{y_i}(t-1)$ para todo $j = 1, \dots, n$, então $y_i(t)$ é uma soma de termos ≥ 0, dos quais m termos estão presentes em $\hat{y_i}(t)$. Portanto, $y_i(t) \geq \hat{y_i}(t)$. Assim, se o sistema reduzido é instável, o sistema maior também é.

Para que o sistema reduzido seja estável, é preciso que $(-1)^n$ tenha o mesmo sinal do determinante de ordem n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.23}$$

como vimos antes. Mas, novamente, essa é a condição de estabilidade perfeita em Hicks.

□

Os dois lemas anteriores nos dão o seguinte teorema.

Teorema 2.3. *Se há substituibilidade bruta dos bens, a estabilidade perfeita no sentido de Hicks é equivalente a estabilidade dinâmica.*

Terminada a parte I, iremos olhar para os métodos de Liapunov mais de perto. O capítulo seguinte mostrará sobre o que se trata o segundo método de Liapunov e em seguida conseguiremos analisar o paper de Clower e Bushaw (1954).

Parte II

Liapunov, Clower e Bushaw

3 Os métodos de Liapunov

3.1 Teorema de Liapunov

Seja $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^∞, $x_0 \in \mathcal{U}$ e $X(x_0) = 0$. Com isso, consideremos o seguinte sistema dinâmico

$$x' = X(x), \tag{3.1}$$

isto é,

$$X(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Observe que $x'(t) = x_0$ é um equilíbrio estacionário para o sistema acima.

Definição 3.1. *Um fluxo em $\mathcal{U}$ é uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ tal que*

1. $\varphi(0, x) = x$*;*
2. $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$*.*

A ideia é que a trajetória do sistema $x' = X(x)$ define um fluxo $\varphi(t, x)$. Em outras palavras, $\varphi(t, \overline{x}) = x(t)$ em que $x(0) = \overline{x}$.

Definição 3.2. *Uma função de Liapunov para o campo X em x_0 é uma função $V : U_0 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, definida em uma vizinhança $U_0 \subseteq \mathcal{U}$ de x_0, tal que*

1. $V(x_0) = 0$, $V(x) > 0$, *para* $x \neq x_0$*;*
2. $\nabla V(x) \cdot X \leq 0$ *em* U_0

Se a desigualdade é estrita no item 2, dizemos que é uma função de Liapunov estrita.

Teorema 3.1 (*Teorema de Liapunov*)**.** *Se existe uma função de Liapunov para o campo X em x_0, então x_0 é um equilíbrio estável. Ademais, se existe uma função de Liapunov estrita, o equilíbrio será assintoticamente estável.*

Demonstração. Consideremos uma vizinhança aberta tal que o fecho compacto $\overline{U}_0$ de U_0 é tal que

$$m = \min_{\partial \overline{U}_0} V(x)$$

Antes de continuar a demonstração, apenas clarifico que $\partial \overline{U}_0$ refere-se à fronteira de $\overline{U}_0$. Isto é,

$$\partial \overline{U}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{x_n\} \subseteq \overline{U}_0 \text{ com } x_n \to x \text{ e } \exists \{y_n\} \subseteq \overline{U}_0^c \text{ com } y_n \to x\}. \tag{3.3}$$

Na reta, por exemplo, a fronteira do conjunto $A = (0, 1)$ é $\partial A = \{0, 1\}$.

Prosseguimos com a demonstração. Como V é contínua e $V(x_0) = 0$, então podemos escolher uma vizinhança aberta $U_1 \subseteq U_0$, $x \in U_1$ e $V(x) < m$.

Se $\varphi(t, x)$ é o fluxo determinado por $x' = X(x)$, então $V(\varphi(t, x)) < m$, $\forall t \geq 0$, pois V é decrescente sobre as trajetórias de $x' = X$.

Devemos mostrar que $\varphi(t, x) \in \overline{U}_0$ $\forall t \geq 0$. Vamos provar por absurdo. Se existe $t' > 0$ tal que $\varphi(t', x) \notin \overline{U}_0$, então há um t'' tal que $t' > t'' > 0$ e $\varphi(t'', x) \in \partial \overline{U}_0$ e portanto $V(\varphi(t'', x)) \geq m$, pois m é o mínimo de V em $\partial \overline{U}_0$. Mas isto é um absurdo, pois $V(\varphi(t, x)) < m$ $\forall t \geq 0$.

Logo, $\varphi(t, x_0) = x_0$ é uma solução estável. Nos resta provar agora o segundo caso.

Suponhamos que exista uma trajetória $\varphi(t, x)$ tal que

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t, x) \neq x_0.$$

Então, existe uma sequência $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(t_n, x) \neq x_0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k \to \infty} \varphi(t_{n_k}, x) = y,$$

sendo a igualdade garantida pela compacidade de $\overline{U}_0$ e pelo teorema de Bolzano-Weirstrass.

Ademais, temos que

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(t_{n_k} + 1, x) = \lim_{k \to \infty} \varphi(1, \varphi(t_{n_k}, x)) = \varphi(1, y).$$

Pela continuidade de V,

$$V(\varphi(t_{n_k}, x)) \to V(y) = V(\varphi(0, y))$$
$$V(\varphi(t_{n_k} + 1, x)) \to V(\varphi(1, y)),$$

mas isso implica que

$$V(\varphi(0,y)) = V(\varphi(1,y)),$$

o que é uma contradição, pois por hipótese V é estritamente decrescente sobre as trajetórias. Então

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,x) = x_0 \qquad\qquad \text{para } x \in U_1$$

e x_0 é um equilíbrio assintoticamente estável.

□

Procedemos agora para analisar o artigo de Clower e Bushaw (1954).

4 O sistema estoque-fluxo de Bushaw e Clower

4.1 Contribuições...?

O artigo de Clower e Bushaw (1954) é um pequeno desvio do caminho que tracei até agora. Enquanto tudo que expus anteriormente remetia à pesquisa sobre estabilidade de um equilíbrio geral, aqui os autores pretendem criar uma teoria geral de determinação de preços em um modelo de estoque-fluxo. Citando a introdução de seu artigo,

> *In recent years economists have devoted considerable attention to special problems involving stock-flow relationship. Thus far, however, attempts to study such relationships within the framework of the general theory of price determination have been few in number and highly restricted in scope. The object of the present paper is to fill at least part of this gap in the existing literature. It is a study in the pure theory of market price determination in a stock-flow economy - an economy in which the typical commodity is simultaneously produced, consumed, and held for future disposal by economic units. (CLOWER; BUSHAW, 1954, p. 328)*

Logo na introdução já temos uma pista do motivo de Negishi (1962) não ter citado Clower e Bushaw em sua *survey*: o foco do artigo *não* era estudar a estabilidade de um equilíbrio geral. Além do mais, o modelo proposto pelos autores difere tanto daquele proposto por Hicks e Samuelson quanto daquele proposto por Arrow e Hurwicz (como veremos a seguir). Weintraub não percebe que, simplesmente, esse artigo não foi relevante para a pesquisa da estabilidade do equilíbrio walrasiano. Os autores propõem uma modelagem diferente do que havia à época e a comunidade científica não incorporou suas contribuições.

Mas ainda assim, Weintraub se refere especificamente aos métodos de Liapunov introduzidos pelos autores, não à contribuição do artigo em geral. A investigação detalhada do artigo a seguir mostrará que a contribuição deles (para a inserção dos métodos de Liapunov) também não foi tão significante assim.

4.2 Estoque e fluxo: definições

Definimos a notação de antemão:

Definição 4.1. *Para o restante do capítulo, consideramos que:*

- *há m mercados;*

- *p_i é o preço do i-ésimo bem, $p_1, \ldots, p_m$;*
- *$d_i(p_1, \ldots, p_m)$ é a flow demand (demanda corrente) e $s_i(p_1, \ldots, p_m)$ é a flow supply (oferta corrente) do bem i;*
- *$D_i(p_1, \ldots, p_m)$ é a demanda pelo estoque do bem i;*
- *$S_i \equiv S_i^0 + \int_{t_0}^{t} (s_i - d_i)dt$, S_i é a oferta pelo estoque do bem i, em que S_i^0 é o estoque do bem i no tempo t_0.*
- *$X_i(p_1, \ldots, p_m; t) \equiv D_i(p_1, \ldots, p_m) - S_i^0 + \int_{t_0}^{t} x_i(p_1, \ldots, p_m)dt$, em que X_i é o excesso de demanda por estoques e $x_i \equiv d_i - s_i$ é o excesso de demanda corrente.*

Quando me refiro aos termos oferta/demanda corrente, quero dizer apenas que é a oferta/demanda que ocorre em cada período t, sem depender das produções passadas.

Supomos mais uma vez que a variação dos preços é uma função do excesso de demanda, mas desta vez incluímos além da produção corrente a produção de estoque, isto é,

$$\frac{dp_i}{dt} = f_i(x_i, X_i) \qquad i = 1, \ldots, m \tag{4.1}$$

Faremos algumas suposições sobre o comportamento de 4.1:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right)^2 > 0 \quad \text{e} \tag{4.2a}$$

$$f_i(0,0) = 0. \tag{4.2b}$$

Em uma vizinhança dos pontos $\overline{x}_i$ e $\overline{X}_i$ e expandindo em Taylor, temos que

$$f_i \approx f_i(\overline{x}_i, \overline{X}_i) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i - \overline{x}_i) + \frac{\partial f_i}{\partial X_i}(X_i - \overline{X}_i) = \alpha_i(x_i - \overline{x}_i) + \beta_i(X_i - \overline{X}_i) \tag{4.3}$$

e por 4.2a, não pode ocorrer que $\alpha_i = 0$ e $\beta_i = 0$ simultaneamente. Se colocarmos $\overline{x}_i = \overline{X}_i = 0$, temos por 4.2b

$$f_i = \alpha_i x_i + \beta_i X_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{4.4}$$

Definição 4.2. *Se $\alpha_i = 0$, chamaremos o bem i de estoque-orientado. Se $\beta_i = 0$, o bem i será chamado de fluxo-orientado.*

4.3 O equilíbrio

Suponhamos que na vizinhança de $p^0 = (p_1^0, \dots, p_m^0)$ as funções x_i e D_i admitam a seguinte expansão em séries de potências:

$$x_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(p_j - p_j^0) + [(p_1 - p_1^0), \dots, (p_m - p_m^0)] \tag{4.5a}$$

$$D_i = D_i^0 + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(p_j - p_j^0) + [(p_1 - p_1^0), \dots, (p_m - p_m^0)] \tag{4.5b}$$

O símbolo $[(p_1 - p_1^0), \dots, (p_m - p_m^0)]$ indica alguma série de potências nas variáveis $(p_1 - p_1^0), \dots, (p_m - p_m^0)$, iniciando com termos de segundo grau, $a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}$ e $b_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j}$.

Se definirmos $\dfrac{dp_i}{dt} = q_i$ e utilizarmos as equações acima, chegamos em

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \beta_i x_i^0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_i a_{ij}(p_j - p_j^0) + \sum_{j=1}^{m}(\alpha_i a_{ij} + \beta_i b_{ij}) q_j + \\ &+ [(p_1 - p_1^0), \dots, (p_m - p_m^0); q_1, \dots, q_m] \qquad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{4.6}$$

As equações 4.4 e 4.6 formam o sistema que temos que lidar.

Definição 4.3. *Para que $p^0 = (p_1^0, \dots, p_m^0)$ seja um ponto de equilíbrio no tempo t_0, é preciso que*

$$\frac{dp_i}{dt} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dt} = 0, \qquad\qquad i = 1, \dots, m$$

Portanto, se p^0 é um ponto de equilíbrio em t_0, temos que

$$\begin{cases} \alpha_i x_i^0 & +\beta_i X_i^0 = 0, \\ & \beta_i x_i^0 = 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

que por sua vez, é equivalente à condição

$$x_i^0 = X_0^i = 0 \text{ se } \beta_i \neq 0, \qquad x_i^0 = 0 \text{ se } \beta_i = 0. \tag{4.8}$$

Em palavras, as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio implicam que

- o excesso de demanda por estoques e o excesso de demanda corrente desaparecem no equilíbrio se o bem não é fluxo-orientado;
- o excesso de demanda corrente desaparece no equilíbrio se o bem é fluxo-orientado.

Vamos redefinir algumas variáveis para enxugar a notação.

Definição 4.4. *Supondo ainda que $p^0 = (p_1^0, \ldots, p_m^0)$ é um vetor de preços de equilíbrio, a nova notação é dada por:*

- $P_i = p_i - p_i^0$;
- $Q_i = \frac{dp_i}{dt} = \frac{dP_i}{dt}$;
- $P = (P_1, \ldots, P_m)$;
- $Q = (Q_1, \ldots, Q_m)$;
- $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$;
- $A_{ij} = \beta_i a_{ij}$;
- $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$;
- $B_{ij} = \alpha_i a_{ij} + \beta_i b_{ij}$.

Para o restante da seção, supomos que $\beta_i \neq 0 \; \forall i = 1, \ldots, m$.

Assim, podemos escrever em notação vetorial o sistema composto por 4.4 e 4.6,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = Q \\ \frac{dQ}{dt} = \mathbf{A}P + \mathbf{B}Q + [P_1, \ldots, P_m; Q_1, \ldots Q_n]. \end{cases} \tag{4.9}$$

A estabilidade do sistema 4.9 é implicada pela estabilidade de sua versão linearizada,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = Q \\ \frac{dQ}{dt} = \mathbf{A}P + \mathbf{B}Q. \end{cases} \tag{4.10}$$

A matriz de coeficientes é, portanto,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

O polinômio característico de 4.11 é

$$p(\lambda) = |\boldsymbol{I}\lambda^2 - \boldsymbol{B}\lambda - \boldsymbol{A}|. \tag{4.12}$$

Vamos ver alguns teoremas sobre a estabilidade desse sistema.

Teorema 4.1. *Se as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são negativas definidas, toda raiz real de 4.12 é negativa.*

Demonstração. Seja λ uma raiz real de 4.12 e seja M um vetor característico real correspondente. Isso implica que

$$(M)\lambda^2 - (\boldsymbol{B}M)\lambda - (\boldsymbol{A}M) = 0. \tag{4.13}$$

Tomando o produto escalar de 4.13 com M, temos

$$(M^T M)\lambda^2 - (M^T\boldsymbol{B}M)\lambda - (M^T\boldsymbol{A}M) = 0. \tag{4.14}$$

Pela nossa hipótese, todos coeficientes da equação 4.14 são positivos. Portanto, pela regra dos sinais de Descartes, a raiz real λ só pode ser negativa.

□

Teorema 4.2. *Se as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são negativas definidas e a matriz $\boldsymbol{A}$ é simétrica, toda raiz de 4.12 tem parte real negativa.*

Demonstração. Seja $\lambda = \sigma + \tau i$ uma raiz de 4.12 e seja M um vetor característico correspondente. Tomando o produto escalar de 4.13 com $\overline{M}$, o conjugado de M, temos

$$(\overline{M}^T M)\lambda^2 - (\overline{M}^T\boldsymbol{B}M)\lambda - (\overline{M}^T\boldsymbol{A}M) = 0 \tag{4.15}$$

Tirando o conjugado dos dois lados, temos

$$(M^T\overline{M})\overline{\lambda}^2 - (M^T\boldsymbol{B}\overline{M})\overline{\lambda} - (M^T\boldsymbol{A}\overline{M}) = 0 \tag{4.16}$$

Dividindo 4.15 por λ, 4.16 por $\overline{\lambda}$ e somando ambos, temos

$$(\overline{M}^T M)\sigma - \frac{1}{2}(\overline{M}^T\boldsymbol{B}M + M^T\boldsymbol{B}\overline{M}) - (\overline{M}^T\boldsymbol{A}M)\frac{\sigma}{\sigma^2+\tau^2} = 0. \tag{4.17}$$

Colocando $M = U + iV$, chegamos em

$$(\overline{M}^T M)\sigma - (U^T\boldsymbol{B}U + V^T\boldsymbol{B}V) - (U^T\boldsymbol{A}U + V^T\boldsymbol{A}V)\frac{\sigma}{\sigma^2+\tau^2} = 0. \tag{4.18}$$

Como as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são negativas definidas, temos novamente, pela regra dos sinais de Descartes, que todos coeficientes são positivos e as raízes σ são positivas.

□

Teorema 4.3. *Se a matriz $\boldsymbol{B}$ é negativa definida e se as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são simétricas, então toda raiz complexa de 4.12 tem parte real negativa.*

Demonstração. Novamente, seja a raiz $\lambda = \sigma + \tau i$ e $M = U + iV$. Por hipótese, tratamos de raízes complexas, ou seja, $\tau \neq 0$. Como $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são simétricas, 4.15 só possui coeficientes reais. Portanto, $\overline{\lambda}$ é a outra raiz e temos

$$\lambda + \overline{\lambda} = 2\sigma = \frac{\overline{M}^T \boldsymbol{B} M}{\overline{M}^T M} = \frac{U^T \boldsymbol{B} U + V^T \boldsymbol{B} V}{\overline{M}^T M}, \tag{4.19}$$

sendo o último pedaço negativo. Portanto, $\sigma < 0$ e o sistema é estável. □

Note que o teorema 4.1 não nos garante que a mera propriedade de matrizes negativas definidas implica estabilidade. É preciso também que todas as raízes sejam reais. O exemplo abaixo ilustra isso.

Seja $n = 2$. As matrizes abaixo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

são ambas negativas definidas. Montando o polinômio 4.12 para essas matrizes, temos

$$\lambda^4 + 8\lambda^3 + 18\lambda^2 - 5\lambda + 10 = 0. \tag{4.21}$$

As raízes são $\lambda_{1,2} \approx 0.21290 + 0.65444i$ e $\lambda_{3,4} \approx -4.2129 \pm 1.8346i$. Logo, há um par de raízes com coeficiente real positivo e o sistema não é estável.

Sem lançar mão das condições de simetria, os autores não conseguem formular uma condição geral o suficiente para garantir a estabilidade.

De qualquer maneira, toda a discussão de Clower e Bushaw se baseia no cômputo explícito das soluções do sistema, ou como eles mesmo chamam, do "primeiro método de Liapunov". A nossa discussão toda centra-se no segundo método de Liapunov, isto é, da utilização de uma função auxiliar para identificar as condições de estabilidade. Ao fazer esse breve comentário sobre Liapunov, os autores provam o teorema 4.2 utilizando o segundo método. Vamos vê-lo.

Teorema 4.4. *Supondo as mesmas condições de 4.2 ($\boldsymbol{A}$ simétrica e negativa definida, $\boldsymbol{B}$ negativa definida) e que existe uma função contínua $V(P, Q)$ que*

1. *zera quando $P = Q = 0$,*
2. *é positiva definida e*
3. *tem uma derivada total $\frac{dV}{dt} \leq 0$,*

então o estado de equilíbrio $P = Q = 0$ é estável

Antes da demonstração, note que os autores simplesmente definem uma função de Liapunov, como na definição 3.2 e enunciam o teorema 3.1.

Demonstração. Definimos a função

$$V(P, Q) = Q^T Q - P^T \boldsymbol{A} P, \tag{4.22}$$

que cumpre 1 e 2. Sua derivada (computada utilizando 4.9) é $\frac{dV}{dt} = 2Q^T \boldsymbol{B} Q$, que cumpre 3 por $\boldsymbol{B}$ ser negativa definida. □

O resto da discussão dos autores trata de seu modelo de estoque-fluxo. Isso não nos interessa, pois já vimos em qual situação os autores apresentaram os métodos de Liapunov. Há mais um corolário provado utilizando os mesmos métodos, na página 339, nota de rodapé 10.

Como comentei na introdução, Clower e Bushaw apenas se valem marginalmente da função de Liapunov para seu trabalho. Falta apenas ver como Arrow e Hurwicz utilizam os métodos no seu artigo.

Parte III

Arrow e Hurwicz

5 O artigo de Arrow e Hurwicz

5.1 Definindo conceitos

O objetivo dos autores em seu artigo é preencher algumas lacunas deixadas pela comunidade científica até então. Isto é, apesar de os economistas à época estudarem a relação entre a estabilidade dinâmica de Samuelson e a estabilidade perfeita de Hicks, pouco se sabia sobre *quais* condições garantiam estabilidade. Assim, era precisa descobrir se a estabilidade era compatível com preferências convexas, racionais, etc. Essa era o projeto de pesquisa dos novos economistas matemáticos, como Arrow, Debreu, Hahn, Gale, entre outros.

O trabalho de Arrow e Hurwicz (1958) mostrará algumas economias que eram compatíveis com estabilidade, preenchendo a lacuna acima.

O trabalho começa definindo a notação que será usada.

O sistema dinâmico a ser resolvido pode ser representado como m equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{dp_j}{dt} = f_j(p_1, \ldots, p_m) \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{5.1a}$$

$$\frac{dp}{dt} = f(p) \qquad p = (p_1, \ldots, p_m) \tag{5.1b}$$

A equação 5.1b é a forma vetorial de 5.1a.

Definição 5.1. $\Psi(t, \mathring{p})$ *é uma (trajetória da) solução de 5.1a (ou 5.1b) se, e só se*

$$\frac{d\Psi(t, \mathring{p})}{dt} = f[\Psi(t, \mathring{p})] \tag{5.2a}$$

$$\Psi(0, \mathring{p}) = \mathring{p} \tag{5.2b}$$

Note que a condição 5.2b diz apenas que $\mathring{p}$ é o valor inicial da solução.

Definição 5.2. *Um ponto* $\overline{p} \in \mathbb{R}^m$ *é um ponto de equilíbrio de 5.1b se, e só se*

$$f(\overline{p}) = 0 \tag{5.3}$$

Definição 5.3. *Um ponto de equilíbrio $\overline{p}$ é chamado de localmente estável se existe uma vizinhança $N(\overline{p})$ tal que para qualquer $\mathring{p} \in N(\overline{p})$, toda solução $\Psi(t, \mathring{p})$ convergirá para $\overline{p}$, isto é*

$$\lim_{t \to \infty} \Psi(t, \mathring{p}) = \overline{p} \tag{5.4}$$

Esta é a definição de Samuelson de estabilidade do primeiro tipo no "pequeno".

Definição 5.4. *Um ponto de equilíbrio $\overline{p}$ é chamado de globalmente estável se toda solução $\Psi(t, \mathring{p})$ (com qualquer $\mathring{p}$ inicial) converge para $\overline{p}$.*

Esta é a definição de Samuelson de estabilidade do primeiro tipo no "grande".

Existe a possibilidade de haver múltiplos equilíbrios. Para acomodar o conceito de estabilidade nesse caso, os autores se referem à seguinte definição.

Definição 5.5. *Seja E o conjunto de todos pontos de equilíbrio. O sistema 5.1b é dito estável se, e só se, para todo $\mathring{p}$ inicial, $\Psi(t, \mathring{p})$ converge para algum $\overline{p} \in E$.*

Agora os autores dão significado à notação acima.

Definição 5.6. *O significado econômico das variáveis acima:*

- $p_0 = 1$ *é o preço do bem "numerário";*
- $P_1, \ldots, P_m$ *são os preços dos outros bens;*
- $p_1, \ldots, p_m$ *são os preços dos outros bens em termos do numerário, isto é,* $p_1 = P_1/p_0, \ldots, p_m = P_m/p_0$*;*
- $p = (p_0, p_1, \ldots, p_m)$ *é o vetor de preços normalizado;*
- $\frac{dp_j}{dt} = f_j(p_1, \ldots, p_m)$, *($j$ = 1, ..., m), é a função de excesso de demanda agregada do bem j.*

O último item é o sistema 5.1a montado acima e define o *processo de ajustamento instantâneo*. Como vimos no Capítulo 2, Metzler estuda também o sistema no caso em que as velocidades de ajustamento variam, a saber

$$\frac{dp_j}{dt} = k_j f_j(p_1, \ldots, p_m), \quad k_j > 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{5.5}$$

em que k_j é a velocidade de ajustamento no mercado j. Já sabemos que escolhendo as unidades de medida convenientes para k_j conseguimos reduzir 5.5 a 5.1a. Portanto, se há estabilidade em 5.1a, a estabilidade em 5.5 é determinada por consequência.

Isso torna-se mais importante ainda dado o teorema 2.1 de Metzler. Portanto, temos o seguinte teorema

Teorema 5.1. *Se o sistema 5.1a é estável* $\implies$ *o sistema 5.5 é estável* $\implies$ *há estabilidade perfeita no sentido de Hicks no equilíbrio.*

Demonstração. Veja o Capítulo 2 para a prova. □

Existem n unidades (firmas, indivíduos) e cada uma delas maximiza alguma entidade (lucro, utilidade) que está em função dos preços. Em competição perfeita, os preços são exógenos.

O artigo trata apenas dos casos de trocas puras (as menções a economias de produção restringem-se aos rodapés). Cada indivíduo i se depara com o seguinte problema

$$
\begin{aligned}
&\max && u^i(X_0^i, X_1^i, \ldots, X_m^i) \\
&\text{sujeito a} && \sum_{k=0}^{m} p_k X_k^i = \sum_{k=0}^{m} p_k \mathring{X}_k^i, \\
& && X_k^i \geq 0 \qquad\qquad (k = 0, 1, \ldots, m)
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

em que X_k^i é a quantidade consumida e $\mathring{X}_k^i$ é a dotação inicial possuída pelo indivíduo i do bem k.

A solução do problema 5.6 pode ser escrita como

$$\hat{X}_k^i = \mathring{X}_k^i + f_k^i(p_1, \ldots, p_m) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m) \tag{5.7}$$

em que f_k^i é a função excesso de demanda do indivíduo i pelo bem k. A função excesso de demanda **agregada** do bem k é definida por

$$f_k(p_1, \ldots, p_m) = \sum_{i=1}^{n} f_k^i(p_1, \ldots, p_m) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m). \tag{5.8}$$

A existência do equilíbrio competitivo significa que existe um vetor

$$\overline{p} = (\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_m) \tag{5.9}$$

tal que as duas condições abaixo são cumpridas

$$f_j(\overline{p}) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{5.10a}$$

$$\overline{p} \geqslant 0. \tag{5.10b}$$

Note que a desigualdade em 5.10b é diferente da desigualdade em 5.6. Falarei um pouco sobre essa diferença de notações.

Pegue dois vetores u e v, com m componentes cada um. A desigualdade $u \geq v$ significa que $u_i \geq v_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$, mas $u_j > v_j$ para algum j. Já a desigualdade $u \geqslant v$ significa apenas que $u_i \geq v_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Portanto, $u \geq v$ é uma condição mais forte que $u \geqslant v$.

Os autores concluem a introdução e começam a mostrar os resultados. Meu interesse é apresentar apenas a parte I do artigo, em que o segundo método de Liapunov é usado.

5.2 O caso da ausência de trocas no equilíbrio

Antes de continuar a apresentação do artigo, é importante fazer um comentário sobre a nota de rodapé 21 na página 530. O rodapé é esse: "See Arrow and Hurwicz [5]. This is a special case of Liapounoff's 'second method' for proving stability". A referência de número 5 é o trabalho de Arrow e Hurwicz (1951). Na página 5 desse artigo, os autores definem uma função D, que é "proportional to the distance in the (X, Y) space to the saddle-point $(\overline{X}, \overline{Y})$". Em outras palavras, é uma aplicação de Liapunov.

Ademais, na bibliografia do artigo há o livro de Lefschetz (1948). O livro discute *extensamente* os métodos de Liapunov. Portanto, é suficiente dizer que a comunidade de economia já tinha conhecimento dos métodos, antes da publicação de Clower e Bushaw.

Continuemos. Seja D a distância entre um ponto p para algum equilíbrio $\overline{p}$.

$$D^2 = \sum_{k=0}^{m} (p_k - \overline{p}_k)^2 = \sum_{j=1}^{m} (p_j - \overline{p}_j)^2. \tag{5.11}$$

A última igualdade vem do fato que $p_0 = \overline{p}_0 = 1$. Mostraremos que, sob certas condições, $\frac{dD}{dt} < 0$ e, com isso, $p \to \overline{p}$ quando $t \to \infty$. Definimos a distância V, tal que

$$V = \frac{1}{2} D^2 \tag{5.12}$$

e derivamos em relação ao tempo, obtendo

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{m} (p_j - \overline{p}_j)\left(\frac{dp_j}{dt}\right) = \sum_{j=1}^{m} (p_j - \overline{p}_j) x_j. \tag{5.13}$$

Aqui, $x_k = \frac{dp_k}{dt} = f_k(p_1, \ldots, p_m)$, com $k = 0, 1, \ldots, m$. Novamente, x_k representa o excesso de demanda do bem k. Para definir o excesso de demanda do indivíduo i pelo bem k usamos x_k^i, de tal forma que

$$x_k^i = \hat{X}_k^i - \mathring{X}_k^i, \qquad\qquad x_k = \sum_{i=1}^{n} x_k^i. \tag{5.14}$$

Fazendo as devidas substituições em 5.13, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{m} p_j x_j - \sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j x_j = \sum_{j=1}^{m} p_j \sum_{i=1}^{n} x_j^i - \sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j x_j = \\ = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} p_j x_j^i) - \sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j x_j \end{aligned} \tag{5.15}$$

Pegue a restrição orçamentária em 5.6,

$$\sum_{k=0}^{m} p_k x_k^i = 0 \tag{5.16}$$

e a substitua em 5.15 (utilizando o fato de que $\overline{p}_0 = p_0 = 1$). Assim, obtemos

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (-p_0 x_0^i) - \sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j (\sum_{i=1}^{n} x_j^i) = - \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=0}^{m} \overline{p}_k x_k^i). \tag{5.17}$$

Lema 5.1. *Suponha que cada indivíduo satisfaça o axioma fraco das preferências reveladas* [1] *Então,*

$$\overline{x}_k^i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \ e \ \forall k = 0, \ldots, m \implies -\sum_{j=1}^{m} (p_j - \overline{p}_j) x_j^i = \sum_{k=0}^{m} \overline{p}_k x_k^i > 0 \tag{5.18}$$

Demonstração. Por definição, $\overline{x}^i \equiv (\overline{x}_0^i, \ldots, \overline{x}_m^i)$ maximiza a utilidade de i sujeito a $\overline{P} \cdot \overline{x}^i$. No entanto, como $\overline{x}^i = 0$ (por hipótese), então $P \cdot \overline{x}^i = 0$. Portanto, o antecedente do axioma da preferência revelada se mantém na forma $P \cdot \overline{x}^i \leq P \cdot x^i$ pela restrição orçamentária $P \cdot x^i$. Se segue então que $P \cdot x^i > P \cdot \overline{x}^i$, a não ser que $\overline{x}^i = x^i$. Isso fornece $\overline{P} \cdot x^i > 0$ a não ser que $x^i = 0$, pois $\overline{P} \cdot \overline{x}^i = 0$. Dividindo ambos os lados de $\overline{P} \cdot x^i > 0$ por $\overline{P}_0$, nós obtemos o lema. □

Portanto, se segue que $\frac{dV}{dt} < 0$ a não ser que $x^i = 0$, isto é, $x^i = \overline{x}^i$ para todo i.

Portanto, nos falta ver o caso em que $x^i = \overline{x}^i$ para todo i. Caso isso ocorra, temos que

$$u_k^i(x^i) = u_k^i(\overline{x}^i) \qquad\qquad \text{para todo } i, k, \tag{5.19}$$

em que $u_k^i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_k^i}$.

[1] Confira Mas-Colell, Whinston e Green (1995).

Por sua vez, no máximo individual (isto é, com toda restrição orçamentária gasta)

$$p_j = \frac{u_j^i}{u_0^i}. \tag{5.20}$$

Portanto, temos que $\frac{dV}{dt} < 0$ a não ser que

$$p_j = \frac{u_j^i}{u_0^i}\overline{p}_j, \tag{5.21}$$

isto é, quando

$$p_j = \overline{p}_j \qquad\qquad j = 1, \ldots, m \tag{5.22}$$

de tal forma que o sistema está em equilíbrio. Assim

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(t, \mathring{p}) = \overline{p} \qquad\qquad \forall\, \mathring{p}. \tag{5.23}$$

Como estabilidade global implica a unicidade do equilíbrio, nós temos o

Teorema 5.2. *Suponha que toda função excesso de demanda individual é contínua e nenhum indivíduo está saturado (isto é, a restrição em 5.6 é com igualdade e não desigualdade). Deixe $\overline{x}^i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Então, o processo de ajustamento instantâneo é estável em trocas puras. Além disso, possui um único vetor de preços de equilíbrio.*

Após isso, Arrow e Hurwicz procuram vários casos em que a condição $\overline{x}^i = 0$ é satisfeita. Isso não interessa ao trabalho, pois a intenção era apenas mostrar em que partes eles utilizaram o teorema de Liapunov, em contraste com os usos de Clower e Bushaw.

Por fim, no apêndice da parte I os autores continuam usando extensamente os métodos de Liapunov. Aqui, ao invés de tratar de processos de ajustamento instantâneo, os autores trabalham com processos de ajustamento com defasagem entre mercados. Novamente, não interessa ao trabalho, pois o resultado principal já foi mostrado.

6 Conclusão

Para Weintraub e outros historiadores do pensamento econômico, a história é apenas uma narrativa criada pelo historiador e há inúmeras versões dela. Segundo eles, narrativas que se pretendem mostrar como uma sequência de acontecimentos que levam inevitavelmente à Verdade e ao Progresso trariam consigo vícios e distorções dos acontecimentos históricos. Essa é a posição da Sociologia do Conhecimento Científico. Weintraub tenta mostrar que a *survey* de Negishi (1962) é uma dessas narrativas. O autor seleciona o artigo de Clower e Bushaw (1954) e o retrata como se fosse um artigo fundamental para a discussão sobre estabilidade em equilíbrio walrasiano da época. Ele segue a crítica argumentando que o artigo, apesar de introduzir os métodos de Liapunov na teoria econômica, foi ignorado por Negishi.

O que mostrei em meu trabalho foi a irresponsabilidade de Weintraub em retratar dessa maneira o artigo, pois a) os métodos de Liapunov já eram conhecidos na comunidade acadêmica de economia antes do artigo de Clower e Bushaw, b) Clower e Bushaw não faziam parte do mesmo programa de pesquisa dos economistas matemáticos (Arrow, Debreu, Gale, etc.) e não contribuíram para a expansão do conhecimento sobre estabilidade em equilíbrio walrasiano e c) Clower e Bushaw utilizam apenas marginalmente os métodos de Liapunov.

Diante disso, a tese de Weintraub fica enfraquecida e pouco esclarece a discussão da época. Apesar disso, o resto do livro de Weintraub traz alguns *insights* importantes. Sua tese sobre os métodos de Liapunov não foi um deles.

Referências

ARROW, K. J.; HURWICZ, L. *A Gradient Method for Approximating Saddle Points and Constrained Maxima*. 1951. Disponível em: <https://www.rand.org/pubs/papers/P223.html>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 54.

ARROW, K. J.; HURWICZ, L. On the stability of the competitive equilibrium, i. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 522–552, 1958. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 51.

BACKHOUSE, R. E.; BOIANOVSKY, M. et al. Transforming modern macroeconomics. *Cambridge Books*, Cambridge University Press, 2013. Citado na página 16.

CLOWER, R. W.; BUSHAW, D. W. Price determination in a stock-flow economy. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 328–343, 1954. Citado 7 vezes nas páginas 9, 15, 16, 33, 39, 41 e 57.

HICKS, J. *Value and Capital: An Inquiry into some Fundamental Principles of Economic Theory*. 1. ed. Oxford University Press, 1939. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:oxp:obooks:9780198282693>. Citado na página 19.

LANGE, O. *Price Flexibility and Employment*. Greenwood Press, 1944. (Cowles Commission for Research in Economics Monographs). ISBN 9780313204807. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=dw5pPwAACAAJ>. Citado na página 25.

LEFSCHETZ, S. *Lectures on Differential Equations*. Princeton University Press, 1948. (Annals of mathematics studies). ISBN 9780691083957. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=1rbkRZZQ5IAC>. Citado na página 54.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M. D.; GREEN, J. R. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press, 1995. Citado na página 55.

METZLER, L. A. Stability of multiple markets: the hicks conditions. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 277–292, 1945. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 25.

NEGISHI, T. The stability of a competitive economy: a survey article. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 635–669, 1962. Citado 3 vezes nas páginas 15, 41 e 57.

SAMUELSON, P. A. The stability of equilibrium: Comparative statics and dynamics. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 9, n. 2, p. 97–120, 1941. ISSN 00129682, 14680262. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1906872>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

SAMUELSON, P. A. The stability of equilibrium: Linear and nonlinear systems. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 10, n. 1, p. 1–25, 1942. ISSN 00129682, 14680262. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1907018>. Citado na página 22.

SAMUELSON, P. A. The relation between hicksian stability and true dynamic stability. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 12, n. 3/4, p. 256–257, 1944. ISSN 00129682, 14680262. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1905436>. Citado na página 23.

WEINTRAUB, E. R. *Stabilizing dynamics: Constructing economic knowledge*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 15.

YASUI, T. A general theory of stability. *Economic Studies Quarterly*, v. 1, p. 13–32, 1950. Citado na página 15.