



Instituto de  
MATEMÁTICA  
E ESTATÍSTICA

UFRGS



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**A IMAGEM DO CONCEITO DE PRINCÍPIOS COMBINATÓRIOS EM DIFERENTES PÚBLICOS**

**GIULIANA GAGG**

Porto Alegre  
2018

**GIULIANA GAGG**

**A IMAGEM DO CONCEITO DE PRINCÍPIOS COMBINATÓRIOS EM DIFERENTES  
PÚBLICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso  
submetido como requisito parcial para a  
obtenção do grau de Licenciada em  
Matemática

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Marilaine de Fraga  
Sant'Ana

Porto Alegre  
2018

Instituto de Matemática e Estatística  
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

**A imagem do conceito de princípios combinatórios em diferentes públicos**  
Giuliana Gagg

Banca examinadora:

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Marilaine de Fraga Sant'Ana  
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Débora da Silva Soares  
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof. Me. Marcelo Antonio dos Santos  
Colégio de Aplicação - UFRGS

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu forças para enfrentar esta jornada.

Agradeço aos meus pais Gilberto e Eliana e à minha irmã Elizabeth, que sempre me apoiaram e me incentivaram a perseverar.

Agradeço aos amigos, que estiveram comigo durante esta caminhada.

Agradeço à professora Marilaine de Fraga Sant'Ana, que me orientou na realização deste trabalho e pelas aulas maravilhosas durante a graduação.

Agradeço à professora Marlusa Benedetti da Rosa, pelas oportunidades de bolsa no Colégio de Aplicação.

Agradeço à professora Débora da Silva Soares e ao professor Marcelo Antonio dos Santos, por aceitarem participar da banca deste trabalho.

Agradeço aos alunos que aceitaram participar da pesquisa deste trabalho.

*A Gilberto, Eliana e Elizabeth, com carinho.*

*“Quero trazer à memória o que  
me pode dar esperança”  
(Lamentações 3:21)*

## RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso pretende estudar o processo de aprendizagem de alguns princípios combinatórios. De acordo com as definições de Tall e Vinner (1981) de definição e imagem do conceito, este trabalho tem o propósito de estudar o processo de formação e manifestação da imagem do conceito dos princípios aditivo e multiplicativo. A pesquisa se caracteriza como qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1994), e duas atividades práticas foram propostas para realizar a análise. Uma delas foi aplicada no 7º ano do ensino fundamental fazendo uso da tendência de resolução de problemas conforme o modelo de passos proposto por Onuchic e Allevato (2011); a outra atividade foi um questionário proposto a alunos da graduação em licenciatura em Matemática. Concluiu-se que quanto maior o número de experiências com o conceito, para ambos os públicos, mais rica é a imagem do conceito de cada um. A resolução de problemas auxiliou os alunos do ensino fundamental a formarem suas imagens dos conceitos; para os alunos do ensino superior, percebeu-se que o convite à escrita de seus pensamentos auxilia na análise da fundamentação da imagem do conceito do aluno em relação à análise combinatória.

**Palavras-chave:** Imagem do conceito, Princípio aditivo, Princípio multiplicativo, Resolução de problemas

## ABSTRACT

This undergraduate thesis intends to analyze how students learn some combinatorial principles. According to Tall and Vinner's (1981) definitions of definition concept and image concept, this thesis is looking to study the process of formation and manifestation of addition and multiplication principles' image concept. The research is qualitative, according to Bogdan and Biklen (1994), and two practical activities were proposed to carry out the analysis. One of them was applied at a 7th-grade level through problem-solving proposed by Onuchic and Allevato (2011); the other activity was a questionnaire proposed to students of the undergraduate degree in Mathematics. It was concluded that the greater number of experiences with the concept, for both audiences, the richer is the image concept. Problem-solving helped middle school's students forming their image concept; for the undergraduate students, it was noticed that the stimulus to the writing of their thoughts assists in the analysis of the fundamentation of the image of the student concept in relation to the combinatorial analysis.

**Keywords:** Image concept, Addition principle, Multiplication principle, Problem-solving



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Respostas da aluna N referentes ao exercício 1.....	30
Figura 2 – Respostas da aluna N referentes ao exercício 2.....	32
Figura 3 – Respostas da aluna ME referentes ao exercício 2.....	33
Figura 4 – Respostas do aluno G referentes ao exercício 3.....	36
Figura 5 – Respostas do aluno E referentes ao exercício 3.....	37
Figura 6 – Respostas da aluna N referentes ao exercício 3.....	38
Figura 7 – Respostas da aluna N referentes ao exercício 4.....	39

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	10
<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	12
ANÁLISE COMBINATÓRIA.....	12
IMAGEM E DEFINIÇÃO DO CONCEITO.....	13
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	15
REVISÃO DE LITERATURA.....	18
<b>METODOLOGIA</b> .....	21
<b>PRÁTICA DE ENSINO</b> .....	24
COM O ENSINO FUNDAMENTAL.....	24
COM O ENSINO SUPERIOR.....	26
<b>ANÁLISE DO MATERIAL</b> .....	28
RELATO E ANÁLISE DA ATIVIDADE COM O ENSINO FUNDAMENTAL .....	28
AULA 1.....	28
AULA 2.....	34
ANÁLISE COM O ENSINO SUPERIOR.....	41
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	46
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	49
<b>APÊNDICE A</b> .....	51
<b>APÊNDICE B</b> .....	52
<b>APÊNDICE C</b> .....	53

## INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo a respeito da manifestação da imagem do conceito dos princípios aditivo e multiplicativo da análise combinatória. Neste, será analisado o processo pelo qual um aluno passa, para que os conceitos matemáticos tenham uma base fundamentada em sua mente.

O interesse pela temática de ensino aprendizagem possui ampla relação com a vontade de conhecer mais sobre processo que passamos para fixar um conceito, seja da matemática ou não. Apesar disso, o propósito da pesquisa em estudar esse processo de aprendizagem não é o de generalizar este, mas de conhecer as potencialidades de cada um e as explorar.

Neste contexto, foi escolhida a tendência de resolução de problemas, pode ser um dos contextos que favorece que o aluno pense e forme suas ideias de maneira mais intuitiva, já que para resolver um problema, o aluno precisa elaborar uma solução, atitude que intensifica a capacidade de compreensão do conceito. E considerando que o tópico matemático deste trabalho é a análise combinatória, a tendência mencionada anteriormente pode potencializar a análise de cada passo tomado pelos estudantes na construção de seu conhecimento.

A análise combinatória foi um dos tópicos que mais me cativou durante o Ensino Médio. Diferentemente dos demais tópicos que haviam sido trabalhados até então, o professor propôs problemas que fomentavam o raciocínio matemático, porque precisávamos entender a razão de nossas soluções, ao invés de aplicarmos uma fórmula sem a compreendermos. Quando fiz a disciplina de Combinatória I<sup>1</sup>, oferecida pelo curso, percebi a mesma preocupação em que o aluno construísse seu próprio conhecimento, e pude compreender ainda mais sobre esta área da matemática, trazendo a cada conceito um sentido ainda não percebido.

A escolha pela análise combinatória tem relação com esta trajetória apresentada, mas também por ser um dos assuntos da matemática que é mais relacionado com o cotidiano. A partir disto, surgiu o interesse de analisar a aprendizagem deste tópico da matemática, quais são as imagens que ficam na mente de um aluno a respeito dos princípios aditivo e multiplicativo, como os alunos seriam

---

<sup>1</sup> Esta disciplina foi ministrada no segundo semestre de 2016 pela Prof. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana.

capazes de explicar o que compreendem, a maneira que novas perspectivas influenciam na compreensão de um conteúdo.

A partir da perspectiva da soma de novas ideias a um mesmo conceito e da mudança que estes trazem para a compreensão, surge a ideia deste trabalho. O objetivo deste é verificar como este processo ocorre, usando como tópico matemático a análise combinatória, o que também soma um propósito de expandir a ideia desta área da matemática como algo que vai além da operação de multiplicação. Outro dos objetivos é a análise do que vai permanecer na mente do aluno sobre os conceitos matemáticos a longo prazo.

Quanto à divisão do trabalho, na próxima seção apresenta-se o referencial teórico utilizado na pesquisa bem como uma revisão de literatura. Apresentam-se os princípios combinatórios abordados na pesquisa, os conceitos de Imagem e Definição do Conceito e a tendência de resolução de problemas. Na segunda seção a metodologia da pesquisa é apresentada, assim como a pergunta de pesquisa, e na seção seguinte, é descrito o planejamento das atividades que foram realizadas. Na quarta seção são relatadas as atividades realizadas e é feita uma análise destas com base no material recolhido. Finalmente, na quinta seção apresenta-se as considerações finais da pesquisa, baseadas nos resultados obtidos.

## REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresentam-se os referenciais teóricos que foram essenciais para esta pesquisa e uma breve revisão de literatura. Na primeira seção, serão apresentados os conceitos de análise combinatória que foram utilizados para esta pesquisa. Em seguida, apresentam-se as ideias de Tall e Vinner sobre imagem e definição do conceito. Após apresenta-se o método de resolução de problemas de Onuchic e Allevato. Na revisão de literatura, são citados alguns trabalhos que se considera que apresentaram uma temática semelhante a trabalhada na pesquisa.

### ANÁLISE COMBINATÓRIA

As definições aqui citadas são conceitos iniciais da análise combinatória e foram aplicadas no decorrer desta pesquisa foram retiradas em parte de Santos, Mello e Murari (1995) e Carvalho (2015). Este resumo foi base teórica para a elaboração de problemas que envolvessem o raciocínio combinatório.

A primeira definição pertinente ao trabalho é a de princípio aditivo cujo conceito é, segundo Santos, Mello e Murari (1995), que dados  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , conjuntos disjuntos 2 a 2, tal que cada conjunto  $A_i$  possui  $a_i$  elementos, então a união  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  possui  $a_1+a_2+\dots+a_n$  elementos.

Pode-se exemplificar o uso deste princípio através de um exemplo na obra de Santos, Mello e Murari (1995). O que foi utilizado pelos autores é que entraram em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro, supondo que um rapaz, Carlos apenas possa comprar o ingresso para um evento, deseja-se saber quantas opções de programa esta pessoa tem para fazer durante o final de semana. Tal questão pode ser resolvida somando as opções que Carlos possui, ou seja, 5 programas.

O princípio da inclusão e exclusão também foi trabalhado, ao ser relacionado com o princípio aditivo, por também se tratar do número de elementos de uma união de conjuntos. Do princípio da inclusão e exclusão é que

O número de elementos na união de  $n$  conjuntos finitos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  é dado por:  $\sum_{i=1}^n n(A_i) - \sum_{1 \leq i < j} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1 \leq i < j < k < p} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) + \dots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$ . (SANTOS; MELLO; MURARI, 1995, p.91).

Um exemplo sobre este princípio também pode ser encontrado na obra de Santos, Mello e Murari (1995). Neste, há uma classe de 30 alunos na qual 14 falam inglês, 5 falam alemão e 3 falam inglês e alemão, deseja-se saber quantos alunos falam pelo menos uma língua dentre as duas citadas. Para resolver tal problema é necessário somar a quantidade de alunos que falam uma língua apenas e subtrair destes os que falam 2 línguas, que representam a intersecção dos conjuntos, o que resultam em 16 alunos que falam pelo menos uma língua das citadas.

Outro princípio da análise combinatória utilizado nesta pesquisa é o multiplicativo. A definição apresentada em Carvalho (2015, p.3) deste princípio, também denominado princípio fundamental da contagem é que “se uma decisão  $D_1$  pode ser tomada de  $p$  modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão  $D_2$  pode ser tomada de  $q$  modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões  $D_1$  e  $D_2$  é igual  $p \cdot q$ ”.

Para exemplificar o princípio fundamental da contagem, há um exercício de Carvalho (2015) em que um restaurante apresenta 3 opções de saladas, 3 opções de sopas e 4 opções de pratos principais. A pergunta é o número de refeições completas, formadas por uma salada, uma sopa e um prato principal que são possíveis. Para resolver tal questão, multiplica-se o número de modos para tomar cada uma das decisões, o que resulta em 36 opções diferentes de refeições.

## IMAGEM E DEFINIÇÃO DO CONCEITO

A imagem e a definição do conceito foram trabalhadas pelos autores David Tall e Shlomo Vinner em 1981, fazendo referência à limites e continuidade. Os autores afirmam que a imagem e a definição do conceito fazem parte da estrutura cognitiva do indivíduo, e estão associadas a algum conceito particular já existente.

Segundo os autores a *definição do conceito* é a definição formal do mesmo, enquanto a *imagem do conceito* é descrita como

[...] a estrutura cognitiva total associada a este conceito, que inclui todas as figuras mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL; VINNER, 1981, p.152, tradução de Giraldo<sup>2</sup>).

Tall e Vinner (1989) afirmam que somos expostos a vários estímulos mentais, tais que estes desenvolvem diferentes partes da imagem do conceito. Portanto quando o *nome do conceito* é evocado, como afirma Vinner (1991), no livro *Pensamento Matemático Avançado*<sup>3</sup>, editado por David Tall (1991), várias lembranças e imagens mentais são geradas, tais que estas imagens não representam algo verbal, mas imagens mentais, impressões e experiências.

Sendo que Tall e Vinner (1989), estabelecem que a memória evocada em determinado contexto é chamada de *imagem do conceito evocada*. Entretanto, estes autores afirmam que um problema ocorre quando diferentes partes da imagem do conceito são evocadas gerando uma confusão diante de problemas matemáticos, o que geralmente acontece quando alguns conceitos são compreendidos de maneira equivocada.

Logo, a principal diferença entre as duas estruturas cognitivas apresentadas é que a definição do conceito é a definição formal matemática, aceita pela academia. Enquanto, a imagem do conceito refere-se a forma como compreendemos um conceito, o que significa que é caracterizada por aquilo que mais marca o indivíduo sobre aquele conceito, sendo única para cada um.

No livro *Pensamento Matemático Avançado*, citado anteriormente, Shlomo Vinner (1991) aborda com bastante profundidade sobre a imagem do conceito. O autor procura relacionar o processo de criação de conceitos matemáticos com o processo realizado por uma criança para significar algumas palavras, como carro, árvore ou casa, por exemplo. Muitas destas palavras não possuem definições formais, entretanto a menção dos nomes delas, traz à memória seus significados.

No caso da matemática, o autor procura apresentar como há a criação de conceitos neste contexto, e como as duas estruturas cognitivas se relacionam. Vinner

---

<sup>2</sup> “[...] the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated proprieties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures.” GIRALDO, V. *Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada*. Tese (Doutorado em Ciências) – COPPE. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

<sup>3</sup> *Advanced Mathematical Thinking*, David Tall, 1991.

(1991) compreende que a imagem e a definição do conceito são dois grupos de estrutura cognitiva de um indivíduo.

Estes dois grupos podem interagir um com o outro durante sua criação, ou podem se desenvolver separadamente, neste caso são mais propícios os conflitos entre a definição matemática e a imagem que o aluno possui sobre o conceito em questão. O que o autor sugere é que ambas as estruturas cognitivas se conectem na construção do aprendizado.

Na pesquisa em questão, o enfoque estará na imagem do conceito formulada pelos alunos a partir de definições matemáticas tratadas em momentos anteriores da escola básica. Pois o propósito é estudar o processo que o aluno passa para que a imagem do conceito seja fundamentada.

## **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

A resolução de problemas é uma das tendências em educação matemática, que em linhas gerais, propõe que ao invés de começar um conteúdo com uma aula expositiva, sejam sugeridos problemas para que os alunos resolvam, e desta forma o conteúdo seja trabalhado a partir das estratégias formuladas pelos alunos. Mais detalhes sobre tal tendência serão trabalhados através dos referenciais de Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2011).

Em *Ensino-aprendizagem de conteúdos específicos de matemática*<sup>4</sup>, escrito por Onuchic (1999), a autora afirma, fundamentada em Schroeder e Lester, que a tendência de resolução de problemas pode ser trabalhada com 3 enfoques diferentes. O professor pode ensinar *sobre* a resolução de problemas, pode ensinar *como* resolver problemas, ou pode trabalhar *através* da resolução de problemas. Tal que destes 3 enfoques, o mais trabalhado pela autora é o último.

Segundo Onuchic (1999), quando procura-se ensinar através da resolução de problemas, os problemas são o propósito e o modo para se aprender matemática. A autora afirma que quando se ensina os alunos através da resolução de problemas,

---

<sup>4</sup> Artigo publicado no livro *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*, Bicudo, 1999.



encontra-se um meio de “ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro das atividades feitas em cada unidade temática” (ONUChic, 1999, p. 208).

A autora também afirma que entender é relacionar. Portanto, a compreensão de uma ideia matemática está intimamente conectada com as relações que um aluno faz entre o conceito matemático e diferentes contextos, que neste caso, estão apresentados nos problemas propostos. Isto porque, quando um problema é proposto a um estudante, diversas relações matemáticas são feitas para que este problema possa ser solucionado. Onuchic (1999) também afirma que quando se resolve um problema, são descobertas as ideias mal formuladas, não compreendidas, tal que estas ideias podem ser melhor trabalhadas.

Em Onuchic e Allevalo (2011), as autoras apresentam algumas razões pelas quais sugere-se ensinar através da resolução de problemas fundamentadas em diversos trabalhos. Estas razões são as seguintes:

- Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o *dar sentido*.
- Resolução de problemas desenvolve *poder matemático* nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
- Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.
- Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
- Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
- A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.

(ONUChic; ALLEVATO, 2011, p. 82)

Através destas razões pelas quais escolher a resolução de problemas, pode-se notar que a lógica “tradicional” da sala de aula é alterada. O professor não é mais o centro das atividades, mas a responsabilidade pelo aprendizado passa aos alunos. Esta realidade precisa ser compreendida por ambos os lados, como afirmam Onuchic e Allevalo (2011), pois professor e alunos precisarão estar dispostos a deixar a zona de conforto, o que na maioria das vezes não é fácil. As razões citadas, são um incentivo ao desafio que é proposto a cada uma das partes.

Diante da proposta de ensinar através da resolução de problemas, Onuchic, Allevato e o grupo de pesquisa GTERP<sup>5</sup>, da UNESP – Rio Claro/SP, esquematizaram uma proposta de passos a serem implementados para a realização de uma aula seguindo a resolução de problemas. Os passos são os seguintes:

1. Preparação do problema:

Seleciona-se um problema com o propósito de introduzir um conceito matemático ainda não trabalhado. Este problema pode ser chamado de problema gerador.

2. Leitura individual:

Entrega-se o problema para os alunos e pede-se para que cada um leia o mesmo.

3. Leitura em grupo:

Separa-se os alunos em grupos e pede-se para que o problema seja lido novamente. Caso existam dúvidas sobre o enunciado do problema, estas devem ser sanadas neste momento.

4. Resolução do problema:

Depois de ler e compreender o problema, busca-se resolver esse a partir de um trabalho cooperativo e colaborativo. Considerando os alunos como co-construtores da Matemática nova, o problema gerador é aquele que provoca a construção do conteúdo planejado pelo professor para tal momento.

5. Observar e incentivar:

Enquanto os alunos resolvem o problema em grupo, o professor os avalia, os observa e os incentiva a trabalhar de modo colaborativo. Também os incentiva a empregarem técnicas aprendidas em outros momentos.

6. Registro das resoluções no quadro:

Representantes dos grupos escrevem suas resoluções no quadro; as resoluções certas e erradas devem ser registradas a fim de que possam ser discutidas por todos.

7. Plenária:

Os alunos são convidados a discutirem a respeito das resoluções apresentadas.

8. Busca pelo consenso:

---

<sup>5</sup> Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas.

Depois de analisadas as soluções e sanadas as dúvidas, o professor busca com a turma chegar a um consenso sobre o resultado obtido.

9. Formalização do conteúdo:

O professor formaliza matematicamente, padronizando conceitos, processos e princípios empregados na resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e demonstrações das propriedades qualificadas para o assunto.

Estes passos possibilitam que o aluno desenvolva sua capacidade matemática, já que diferentes estratégias podem ser utilizadas para resolver o problema. Dessa forma a compreensão matemática pode ser maximizada, já que as diferentes opiniões da turma serão levadas em consideração na busca pelo consenso, facilitando a compreensão da formalização do conteúdo.

## **REVISÃO DE LITERATURA**

O trabalho de análise combinatória através da resolução de problemas é um tópico constante na academia, tais que as abordagens dos autores apenas variam quanto à metodologia utilizada. Foram escolhidos trabalhos ou dissertações que fizeram uma pesquisa qualitativa, por ser a mesma metodologia empregada neste trabalho.

O trabalho de conclusão de curso de Lima (2013) trata-se sobre a relação entre o raciocínio combinatório, o raciocínio lógico e o desenvolvimento do pensamento do aluno, tendo como base a resolução de problemas. A autora fez uma atividade prática com alunos do 2º ano do ensino médio trabalhando com problemas da Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas que abordassem pelo menos o princípio multiplicativo. Lima (2013) acredita que os resultados do trabalho entre análise combinatória e resolução de problemas foi significativo, pois percebeu que a sequência didática que ela escolheu auxiliou os alunos com quem trabalhou estabelecerem sentido aos conteúdos trabalhados. Os passos para a resolução de problemas escolhidos pela autora eram: compreensão do problema, elaboração de um plano para resolvê-lo, execução do plano, análise da solução. Este trabalho

diferencia-se do de Lima (2013), pois a autora trabalhou com alunos do ensino médio e a maneira que ela trabalhou a resolução de problemas foi diferente da proposta pelo GTERP.

Outro trabalho de conclusão de curso que também abordou análise combinatória através da resolução de problemas foi o de Menezes (2017). O autor realizou sua pesquisa com alunos do ensino médio e procurava analisar quais as contribuições que esta tendência da educação matemática oferece no aprendizado de análise combinatória. Menezes (2017) desenvolveu uma sequência didática que possibilitasse que os alunos conjecturassem ideias e testassem hipóteses, concluindo que tal metodologia auxiliou os alunos a desenvolverem seu raciocínio lógico e a interpretar problemas, além de promover um processo de aprendizado mais autônomo. A presente pesquisa se diferencia de Menezes (2013) pois ele trabalhou com o ensino médio assim como Lima (2013), mas a maneira como ele trabalhou a resolução de problemas foi semelhante.

A dissertação de mestrado de Atz (2017) é a respeito do trabalho de conceitos iniciais da análise combinatória fazendo uso da resolução de problemas. A autora buscou inserir alunos do 6º ano do ensino fundamental ao conteúdo da análise combinatória antes do ensino médio. Atz (2017) considera que a sequência didática que ela elaborou para as aulas, baseadas na resolução de problemas do GTERP, ajudou os alunos a compreenderem os de análise combinatória que ela trabalhou na pesquisa, tais como os conceitos de possibilidade e fatorial, os princípios aditivo e multiplicativo, permutações simples e com repetição, e combinações.

Na análise, Atz (2017) buscou como referencial teórico os estudos sobre pensamento matemático de David Tall, principalmente a respeito da imagem do conceito e a forma como um conceito matemático é fundamentado na mente do aluno. A autora concluiu que a resolução de problemas auxiliou os alunos a expandirem e modificarem as imagens dos conceitos de análise combinatória.

Diante dos trabalhos citados, acredita-se que a temática desta pesquisa é semelhante a apresentada por Atz (2017), pois a autora trabalhou a análise combinatória com alunos do ensino fundamental procurando analisar as imagens dos conceitos deles, a pesquisa de Atz (2017) também está baseada na tendência de resolução de problemas. Mas a presente pesquisa não é tão abrangente quanto à

dissertação de mestrado, pois não foram abordados tantos conceitos combinatórios como em Atz (2017). Outra distinção ao comparar com a dissertação de mestrado é que por esta pesquisa ter o propósito de também analisar a imagem do conceito de alunos do ensino superior sobre os princípios aditivo e multiplicativo, a resolução de problemas não apresentou o enfoque que Atz (2017) fez em sua dissertação.

## METODOLOGIA

O objetivo dessa pesquisa é analisar como a imagem do conceito de um aluno do Ensino Fundamental é formada intuitivamente, ou seja, sem muita interferência do professor e sem ter conhecimento matemático prévio. O conteúdo matemático no qual a pesquisa é baseada é análise combinatória, especificamente os princípios aditivo e multiplicativo.

A pesquisa é de cunho qualitativo, pois pretende-se analisar a manifestação da imagem do conceito de alunos mais jovens e nos estudantes mais experientes e não é algo que pode ser contemplado na pesquisa quantitativa, conforme afirmam Bogdan e Biklen (1994). Isso porque na pesquisa quantitativa, procura-se avaliar o quanto uma determinada interferência atua no desenvolvimento de um determinado grupo de alunos, fazendo uso de testes antes e depois da interferência e comparando os resultados, o processo não é levado em conta. Esses autores também justificam que a pesquisa qualitativa tem sua validade, pois o pesquisador está em busca de analisar um processo e procura diminuir ao máximo suas influências na prática que fornece os dados para a pesquisa e em sua análise.

A pesquisa foi desenvolvida em uma turma de Ensino Fundamental, pois desta forma o objetivo da pesquisa pôde ser melhor contemplado, já que alunos deste nível escolar ainda não formalizaram os conceitos de análise combinatória, afinal este tópico matemático está programado apenas para o Ensino Médio. A turma em que a prática foi aplicada era do 7º ano do Ensino Fundamental, pois a partir desse ano sugere-se que comece a se trabalhar árvores de possibilidades com os estudantes, o que pode ser considerado como uma introdução à análise combinatória neste nível escolar.

Esta prática da pesquisa foi desenvolvida em sala de aula, mas como foi estudado um dos tópicos da Análise Combinatória, a atividade foi realizada em dois períodos. Para que a pesquisa pudesse ser desenvolvida, foi escolhida a tendência de resolução de problemas, especificamente o roteiro desenvolvido pelo GTERP, para que a turma pudesse desenvolver suas ideias antes de ter o conhecimento matemático formalizado.

Considerando que o propósito da pesquisa é compreender como a imagem do conceito dos alunos é formada, para os estudantes do Ensino Fundamental, foi proposto trabalho em grupo, pois se sabe que as ideias que nossos colegas têm, influenciam na imagem do conceito e podem auxiliar na compreensão de um tópico matemático. Para analisar a imagem do conceito evocada pelos alunos, foram recolhidos os registros escritos das ideias que os alunos têm sobre o que foi trabalhado em aula no final da mesma.

Foram coletados dados na forma de caderno de campo e documentação dos materiais dos alunos. O caderno de campo teve como finalidade apresentar uma descrição do ambiente em que a pesquisa foi realizada. Assim foi possível relembrar as visões do pesquisador no ambiente da sala de aula, a forma como lidou com os alunos na sala de aula, o perfil da turma. Como a situação estudada é atípica, acreditou-se necessário caracterizar o ambiente da pesquisa para que os dados recolhidos de outras formas pudessem ser analisados melhor.

Como o propósito da pesquisa é compreender como os alunos manifestam sua imagem do conceito, é necessário que haja uma documentação do que os estudantes evocaram para resolver os problemas, das outras imagens dos conceitos que foram lembradas para solucioná-los, de modo que os materiais que os alunos produziram, como as estratégias que eles criaram para resolverem os problemas matemáticos propostos foram recolhidos para que esse processo realizado pelos alunos pudesse ser analisado. As atividades dos alunos foram digitalizadas para analisá-las melhor. Esses dois tipos de dados citados, encaixam-se nas categorias de caderno de campo e documentação, apresentadas por André e Lüdke (2015), e tem a finalidade de, respectivamente, trazer para a análise da pesquisa a visão do pesquisador e daqueles que participaram da prática, com o propósito de que a análise seja a mais rica possível.

Outra parte da prática foi um questionário realizado com alunos da graduação da Licenciatura em Matemática que estavam cursando a disciplina Combinatória I, a fim de analisar qual a imagem de conceito desses graduandos, relacionada aos princípios aditivo e multiplicativo. Essa experiência foi realizada para fazer uma comparação entre as semelhanças e divergências entre as imagens de conceito sobre um mesmo assunto de alunos de diferentes etapas escolares.

Tal questionário foi disponibilizado virtualmente. A fim de traçar o perfil dos graduandos foram elaboradas perguntas nas quais eles responderam se tinham estudado em escola pública ou particular e em qual cidade, para analisar se estes fatos influenciaram seu aprendizado matemático. Com o propósito de que os estudantes de graduação pudessem explicar melhor a imagem de conceito que tinham a respeito dos princípios aditivo e multiplicativo, suas lembranças e influências no momento atual destes, já que estavam cursando a disciplina de Combinatória I, a maioria das perguntas que abordavam estes tópicos eram dissertativas. No questionário também haviam perguntas em que os alunos precisavam formular duas perguntas, uma a respeito de cada princípio que estava sendo trabalhado, também com a intenção de perceber a imagem do conceito deles através de exemplos.



## **PRÁTICA DE ENSINO**

Para a realização da análise proposta neste trabalho, foram realizadas duas atividades práticas, com metodologias e públicos diferentes. Uma destas atividades foi proposta para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental e era um projeto sobre resolução de problemas a respeito dos princípios aditivo e multiplicativo. A outra prática realizada foi um questionário com alunos da graduação do curso de Licenciatura em Matemática que estivessem cursando a disciplina de Combinatória I. As perguntas que estes estudantes precisavam responder se tratavam das percepções que tinham dos princípios aditivo e multiplicativo a partir da sua experiência com a análise combinatória na escola básica. Essas duas atividades foram realizadas com a intenção de verificar se havia semelhança entre as imagens dos conceitos manifestadas nos dois grupos de alunos, naquilo que as caracterizava.

### **COM O ENSINO FUNDAMENTAL**

A atividade proposta aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental ocorreu nos dias 14 e 21 de novembro durante a tarde no período em que é disponibilizado uma oportunidade de retomar conceitos abordados durante as aulas de matemática. No primeiro dos encontros estavam presentes 10 alunos e no segundo encontro 8 alunos. Cada um dos encontros teve a duração de 1 hora.

A sequência metodológica escolhida foi o roteiro para a resolução de problemas elaborado pelo GTERP, pois nesses passos seria oportunizado um momento em que os alunos manifestassem a sua compreensão sobre o conteúdo, o que oportunizaria a expressão da imagem do conceito destes estudantes. Entretanto, dos passos apresentados pelo GTERP, o último, formalização do conteúdo, não fez parte da aula, pois não era a intenção da pesquisa trabalhar os princípios da análise combinatória formalmente.

As expectativas e objetivos nesta prática eram de desenvolver a capacidade de expressar as interpretações de um conteúdo matemático, além de argumentá-las com os colegas durante o trabalho em grupo. O anseio da prática era também ver como os

estudantes iriam trabalhar em uma aula em que não haveria um momento expositivo antes das atividades, o que é um costume na escola.

Na primeira aula com os alunos apresentou-se a sequência da aula, no que se refere a sequência de passos de resolução de problemas do GTERP. Nesta aula foram propostos dois problemas de princípio aditivo um de cada vez para que os alunos resolvessem. As questões eram as seguintes:

1. Em um prédio, 10 moradores assinam o jornal A e 14 moradores assinam o jornal B, quantos moradores há no prédio se todos eles assinam algum jornal?
2. Em uma turma, 12 alunos falam espanhol, 16 falam inglês e 4 falam as duas línguas, quantos alunos há nesta turma se todos os alunos falam alguma língua estrangeira?

Dentro do planejamento da aula, também estavam inseridas algumas perguntas baseadas nas etapas da resolução de problemas e para checar o que os alunos estavam compreendendo do problema a fim de analisar a imagem de conceito que estavam formando. Estas questões foram propostas em ambas as aulas, e as perguntas eram as seguintes:

- a) Como você pensou em resolver o problema quando o leu pela primeira vez?
- b) Você mudou sua estratégia de resolução depois de conversar com o seu grupo? O que mudou?
- c) As estratégias de resolução dos outros grupos mudaram sua forma de pensar quanto a maneira de resolver o exercício? Como você resolveria o problema se recebesse agora novamente?
- d) Qual seria o procedimento para resolver um problema do mesmo estilo do que você recebeu?
- e) Se precisasse explicar a alguém como resolver esse problema, o que você diria?

No segundo encontro, a sequência de etapas do encontro foi lembrada, ou seja, os passos de resolução de problemas do GTERP, e 2 problemas de princípio multiplicativo foram propostos em forma de fichas para serem resolvidos. As questões propostas foram as seguintes:

3. Darlene vai pedir uma pizza, ela pode escolher entre os sabores: brócolis, quatro queijos, calabresa, frango e milho. A pizza pode ter borda de *catupiry* ou queijo *cheddar*. Quantas opções Darlene tem se ela só pode pedir um sabor na pizza e uma borda?
4. Uma sorveteria tem 4 sabores diferentes de sorvete: baunilha, menta, flocos e coco, também tem 3 sabores de cobertura: caramelo, chocolate e morango, e oferece 6 tipos de extras para serem colocados no sorvete como: confeitos, gotas de chocolate, granulado, rolinhos de *waffer*, *marshmallow*, suspiros. David está nessa sorveteria e vai pedir um sabor de sorvete, com uma das coberturas e um dos extras, quantas opções ele tem?

## COM O ENSINO SUPERIOR

Foi proposto aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática que estavam cursando a disciplina de Combinatória I, um questionário que foi disponibilizado virtualmente entre os dias 15 a 26 de outubro, através de um formulário no Google Docs, que foi respondido por 6 alunos. Esta atividade foi proposta a fim de perceber uma conexão entre a imagem do conceito dos alunos de diferentes níveis de ensino.

Algumas perguntas procuravam traçar o perfil dos estudantes, e as demais questões se referiam ao aprendizado de análise combinatória na escola, especialmente dos princípios aditivo e multiplicativo. Tais perguntas por vezes eram dissertativas e nos casos em que a resposta poderia ser sim ou não, eram objetivas. As perguntas do questionário foram as seguintes:

- Quando você ingressou na UFRGS?
- Em que tipo de escola você cursou as etapas da escola básica?
- Em que cidade e estado você estudou?
- Você viu análise combinatória na escola?
- Você tem alguma lembrança marcante sobre isso? Quando aconteceu?
- Você lembra como viu ou o princípio aditivo ou o princípio multiplicativo na escola?

- Qual a imagem que vem a sua mente quando esses princípios são citados?
- Isso influenciou na sua aprendizagem de análise combinatória na escola?
- Como você acha que essas lembranças afetam na sua compreensão de análise combinatória hoje?
- Crie uma questão sobre o princípio aditivo.
- Crie uma questão sobre o princípio multiplicativo.

As expectativas e objetivos desta atividade eram analisar como os alunos escreveriam os princípios combinatórios em questão a partir de suas lembranças, além de verificar qual a influência disto nos exemplos que eles formulassem sobre os princípios aditivo e multiplicativo.

## ANÁLISE DO MATERIAL

Este capítulo procura conciliar os tópicos apresentados no referencial teórico com os dados obtidos nas práticas. Esta seção está separada em duas partes que consistem: no relato e análise da prática realizada com os alunos do Ensino Fundamental, a segunda parte apresenta a análise das respostas do questionário respondido por alunos da graduação em Licenciatura em Matemática.

### RELATO E ANÁLISE DA PRÁTICA COM O ENSINO FUNDAMENTAL

Esta seção contém o relato, a reflexão e a análise das aulas ministradas que estão organizados por aula. Para preservar o anonimato dos alunos, a primeira letra do nome de cada um foi utilizada para a diferenciação de seus trabalhos. As produções apresentadas foram selecionadas por se destacarem das demais por apresentarem soluções diferentes de outras produções, ou para analisar a evolução do pensamento do aluno durante as etapas da aula, ou o desenvolvimento da imagem do conceito do aluno.

#### AULA 1

O tema desta aula era o princípio aditivo. Como é um costume dos professores do 7<sup>o</sup> ano escreverem a pauta da aula no quadro, ou seja, o que vai acontecer na aula, o mesmo procedimento foi realizado, neste caso a pauta correspondia aos passos do roteiro do GTERP. Então foi entregue o primeiro problema<sup>6</sup>, que se referia ao número de moradores de um prédio, aos alunos que estavam divididos em 4 grupos. Eles primeiro leram individualmente, que é o segundo passo do roteiro para a resolução de problemas do GTERP, e depois resolveram a questão com seus colegas, que é o terceiro passo do mesmo roteiro, e quase todos os alunos perguntavam: “É só somar

---

<sup>6</sup> Em um prédio, 10 moradores assinam o jornal A e 14 moradores assinam o jornal B, quantos moradores há no prédio se todos eles assinam algum jornal?

sora?”, em especial, o aluno E perguntou se a questão era uma pegadinha. Os alunos resolveram o problema rapidamente e quando passava nos grupos para perguntar se tinham alguma dúvida ou como eles estavam resolvendo o problema, os alunos respondiam que apenas precisavam somar.

Em seguida, os alunos registraram as resoluções no quadro e durante a plenária, os estudantes não estavam muito dispostos a conversar sobre o problema, muitos deles estavam demonstrando desinteresse, pois segundo eles “era só somar”. Então, para que houvesse uma pequena discussão a fim de estabelecer-se um consenso sobre a forma de resolver problemas que fossem parecidos com o dado, foi feita uma pergunta semelhante à apresentada para verificar se a turma tinha identificado que o mesmo processo podia ser empregado em outros problemas. Os alunos afirmaram que deveriam somar os dados do exemplo<sup>7</sup> para encontrarem a resposta.

Depois deste momento, os alunos terminaram de preencher a folha de perguntas sobre como haviam pensado em resolver o problema e como explicariam a outras pessoas. De todas as perguntas desta folha, a que apresenta mais formas diferentes de escrever a resposta é a última. Isso porque alguns dos alunos escreveram uma frase genérica e outros escreveram novamente a soma do problema. A seguir, o registro da resposta de um dos alunos, que também caracteriza as demais.

---

<sup>7</sup>O exemplo apresentado foi: Se em uma turma 14 alunos fazem aula de judô e 12 alunos fazem aula de pintura, quantos alunos há na turma se todos fazem alguma das atividades citadas?

Responda as perguntas abaixo a respeito do exercício \_\_\_\_\_:

a) Como você pensou em resolver o problema quando o leu pela primeira vez?

*Eu pensei em somar os dois números de quantidade de moradores.*

b) Você mudou sua estratégia de resolução depois de conversar com seu grupo? O que mudou?

*Eu não mudei minha estratégia, minha dupla teve a mesma estratégia.*

c) As estratégias de resolução dos outros grupos mudaram sua forma de pensar quanto a maneira de resolver o exercício? Como você resolveria o problema se recebesse agora novamente?

*Não mudou, mas eu resolveria com multiplicação.*

d) Qual seria o procedimento para resolver um problema do mesmo estilo do que você recebeu?

*O procedimento seria o mesmo que fiz nessa atividade. Somaria os números que informam o que for.*

e) Se precisasse explicar a alguém como resolver esse problema, o que você diria?

*Seria somar os números.*

8

Figura 1: Respostas da aluna N referentes ao exercício 1.

A resposta da aluna N foi escolhida por ser uma das mais generalizadas entre seus colegas. A aluna somou os dados apresentados na questão e identificou que esta operação poderia ser aplicada para solucionar outros problemas semelhantes. A partir desta resposta pode-se afirmar que a imagem do conceito de princípio aditivo não apresenta como característica exemplificar outros casos em que este princípio é aplicado; a imagem do conceito da aluna N apresenta o processo utilizado.

Depois foi entregue o segundo problema<sup>9</sup> da aula referente ao princípio da inclusão e exclusão. Os alunos leram individualmente e depois começaram a trabalhar com seus grupos, e desta vez os alunos fizeram mais perguntas porque queriam saber se este problema era semelhante ao anterior. Dos quatro grupos, dois somaram os três valores dados pela questão. Os outros dois grupos somaram 12 e 16 e subtraíram 4; um destes grupos perguntou várias vezes se esta era a decisão certa a tomar.

<sup>8</sup> Resposta ao item a: Eu pensei em somar os dois números de quantidade de moradores.

Resposta ao item b: Eu não mudei minha estratégia, minha dupla teve a mesma estratégia.

Resposta ao item c: Não mudou, mas eu resolveria com multiplicação.

Resposta ao item d: O procedimento seria o mesmo que fiz nessa atividade. Somaria os números que informam o que for.

Resposta ao item e: Seria somar os números.

<sup>9</sup> Em uma turma, 12 alunos falam espanhol, 16 falam inglês e 4 falam as duas línguas, quantos alunos há nesta turma se todos os alunos falam alguma língua estrangeira?

Após os alunos escreverem suas resoluções no quadro. Neste momento os alunos que haviam subtraído 4 de 28, ficaram inseguros sobre suas respostas, apesar de as terem explicado muito bem, logo foi dito aos grupos que escrevessem suas soluções no quadro, mesmo que fossem diferentes das dos demais colegas. Como as resoluções foram diferentes, a plenária foi bastante agitada e cada grupo estava defendendo sua solução, mas o grupo de alunos que havia subtraído estava mais disposto a ceder.

A fim de buscar um consenso foram feitas algumas perguntas aos alunos. A primeira destas foi se os 12 alunos que falavam espanhol, sabiam apenas esta língua ou se não tinha restrição, a turma respondeu que não tinha restrição. Então se perguntou se os 4 alunos que falavam as 2 línguas podiam estar contabilizados entre os 12, os estudantes responderam que sim. Neste momento, alguns alunos compreenderam que somando 12 e 16 estavam contando os 4 alunos duas vezes, mas fizemos o mesmo raciocínio com o grupo de estudantes que falavam inglês para que toda a turma pudesse compreender. Também foi feito um diagrama de Venn para exemplificar o que estava sendo falado visualmente.

Conversamos mais com os alunos, pois outras respostas surgiram porque eles pensaram no número de alunos que falava apenas uma língua das trabalhadas no problema. Depois deste momento de discussão chegamos a um consenso sobre a forma de resolver a questão, então os alunos terminaram de responder suas folhas sobre o pensamento que tiveram durante a resolução da questão. A seguir, algumas destas respostas.



Responda as perguntas abaixo a respeito do exercício 2 :

a) Como você pensou em resolver o problema quando o leu pela primeira vez?  
*Somar todos os números.*

b) Você mudou sua estratégia de resolução depois de conversar com seu grupo? O que mudou?  
*Sim, mudei eu somei os números maiores e fiz o resultado menos 4.*

c) As estratégias de resolução dos outros grupos mudaram sua forma de pensar quanto a maneira de resolver o exercício? Como você resolveria o problema se recebesse agora novamente?  
*Não, mudar nada.*

d) Qual seria o procedimento para resolver um problema do mesmo estilo do que você recebeu?  
*Faria o mesmo que fiz com o exercício 2.*

e) Se precisasse explicar a alguém como resolver esse problema, o que você diria?  
*Somaria os números e o quatro que sobrou eu faria o resultado menos 4.*

10

Figura 2: Respostas da aluna N referentes ao exercício 2.

A aluna N fez parte de um dos grupos que somou 12 e 16 e subtraiu 4. Ela e sua colega afirmaram durante a plenária que, se apenas somassem o número de alunos que falavam cada uma das línguas, estariam contando aqueles que sabiam espanhol e inglês duas vezes; também podemos perceber este pensamento na resposta do item e. Nota-se que a imagem do conceito do princípio da inclusão e exclusão está baseada no exemplo dado na aula, mas a aluna percebe que na união de dois conjuntos, se há elementos que fazem parte de ambos, estes precisam ser subtraídos da soma da quantidade de elementos que fazem parte de um conjunto.

<sup>10</sup> Resposta ao item a: Somar todos os números.

Resposta ao item b: Sim, mudei eu somei os números maiores e fiz o resultado menos 4.

Resposta ao item c: Não, mudei nada.

Resposta ao item d: Faria o mesmo que fiz com o exercício 2.

Resposta ao item e: Somaria os números e o quatro que sobrou eu faria o resultado menos 4.

Responda as perguntas abaixo a respeito do exercício \_\_\_\_:

a) Como você pensou em resolver o problema quando o leu pela primeira vez?  
*Pensei em fazer  $12+16-4$ .*

b) Você mudou sua estratégia de resolução depois de conversar com seu grupo? O que mudou?  
*Não, pensamos na mesma estratégia.*

c) As estratégias de resolução dos outros grupos mudaram sua forma de pensar quanto a maneira de resolver o exercício? Como você resolveria o problema se recebesse agora novamente?  
*Não, pois a nossa estratégia estava certa.*

d) Qual seria o procedimento para resolver um problema do mesmo estilo do que você recebeu?  
*Somando ou subtraindo.*

e) Se precisasse explicar a alguém como resolver esse problema, o que você diria?  
*Para a pessoa somar  $12+16$  e diminuir 4 do resultado final.*

11

Figura 3: Respostas da aluna ME referentes ao exercício 2.

A aluna ME fazia parte de um dos grupos que raciocinou segundo o princípio de inclusão e exclusão. Ela se destaca de outras respostas apresentadas, pois a aluna identificou que ambas as operações são necessárias para resolver o problema. Quanto à imagem do conceito do aluno sobre o princípio da inclusão e da exclusão, percebe-se que a discussão com os colegas de grupo foi fundamental para que a aluna se convencesse da solução que havia pensado, pois o grupo da aluna ME estava muito indeciso quanto a forma de resolver a questão e a conversa entre os colegas de grupo foi importante para que eles solucionassem o problema .

Percebe-se que a discussão com os colegas, um dos passos do roteiro para a resolução de problemas do GTERP foi fundamental para a formação da imagem do conceito dos alunos, principalmente na segunda questão trabalhada. Outro fator que auxiliou os alunos foi a separação em casos, também no segundo problema, para que percebessem que a mesma situação ocorria se considerássemos os alunos que falavam inglês ou os que sabiam espanhol. Além disso, nota-se que a representação visual do problema os incentivou a explorar mais a situação apresentada. Isto constata o que Vinner (1991) afirma que quando situações antigas são evocadas para

<sup>11</sup> Resposta ao item a: Pensei em fazer  $12 + 16 - 4$ .

Resposta ao item b: Não, pensamos na mesma estratégia.

Resposta ao item c: Não, pois a nossa estratégia estava certa.

Resposta ao item d: Somando ou subtraindo.

Resposta ao item e: Para a pessoa somar  $12 + 16$  e diminuir 4 do resultado final.

compreender um conceito, diversas lembranças são trazidas à memória para auxiliar na compreensão do que está se estudando.

## AULA 2

O tema desta aula era o princípio multiplicativo. Novamente foi apresentada a estrutura de passos de resolução de problemas do GTERP. Os alunos se dividiram em dois grupos, um de 3 e outro de 5 alunos, para realizarem as tarefas. Eles leram individualmente e depois se separaram em grupos para resolverem o primeiro problema<sup>12</sup> da aula, terceiro da atividade prática, nesse momento os dois grupos apresentaram situações diferentes.

O grupo com menos integrantes trabalhou segundo a proposta e não fizeram perguntas, ao checar como estavam para incentivá-los, já tinham terminado a resolução. No outro grupo, duas alunas, estavam tentando fazer a atividade, já os outros 3 estudantes atestaram que não tinham entendido o que precisavam fazer, pois não sabiam por onde começar. A fim de incentivar estes alunos, conforme o quinto passo do GTERP, perguntou-se qual dos recheios de pizza eles escolheriam, a aluna M respondeu que apenas gostava de um dos sabores. Para continuar a conversa foi perguntado quantas opções ela tinha se considerasse os dois sabores de borda apresentados na questão, e ela respondeu que tinha duas opções. Então deixou-se a cargo da aluna e seus colegas pensar nas demais possibilidades.

Em seguida os alunos escreveram suas resoluções no quadro. O primeiro grupo, de 3 integrantes, escreveu a operação matemática que fizeram. Já o segundo grupo, de 5 alunos, apresentou um consenso entre seus integrantes na apresentação da solução no quadro, mas cada um dos integrantes tinha uma resposta diferente no papel. Este grupo afirmou que a resposta da pergunta era 2, mas a justificativa era diferente para cada aluno. Um deles afirmou que eram 2 opções (pizza e borda) e outra aluna disse que eram 2 opções (porque haviam 2 opções de borda); depois eles

---

<sup>12</sup> Darlene vai pedir uma pizza, ela pode escolher entre os sabores: brócolis, quatro queijos, calabresa, frango e milho. A pizza pode ter borda de catupiry ou queijo cheddar. Quantas opções Darlene têm se ela só pode pedir um sabor na pizza e uma borda?

mudaram sua resposta para 7, pois haviam 2 opções de borda e 5 opções de recheio de pizza.

Considerando tantas respostas diferentes, a plenária foi bastante agitada, pois nenhum dos grupos estava disposto a ceder. A fim de estabelecer um consenso, foi feita a árvore de possibilidades para este problema no quadro. Durante este processo, os dois grupos compreenderam e concordaram com o que estava sendo realizado, sendo que quando a árvore de possibilidades foi concluída, o aluno G afirmou: “Se tu contar tudo dá 10, que é a mesma coisa que 5 recheios vezes 2 bordas.”.

Foi a partir deste momento que a busca pelo consenso da turma começou, pois alguns alunos do grupo 2 concordaram com a fala do colega, mas surgiu a possibilidade de não querer uma borda recheada na pizza. Os alunos concordaram que neste caso a resposta seria 15. Mas surgiu uma nova questão, pois alguns alunos afirmaram que os sabores da borda eram diferentes dos sabores de recheio de pizza, e, portanto, a resposta não era nem 10 ou 15, mas 7 que era a soma dos sabores. Então, foi dito que a borda e o recheio são partes diferentes da pizza, pois os dois a compunham, tal que este argumento foi aceito para justificar a operação de multiplicação. Após este momento, os alunos terminaram de completar a folha em que precisavam explicar seu pensamento. Abaixo, alguns registros das respostas dos alunos:

Responda as perguntas abaixo a respeito do exercício 3:

a) Como você pensou em resolver o problema quando o leu pela primeira vez?  
*Eu pensei em fazer 5 (sabores) vezes 2 (sabor borda), que é igual a 10 combinações possíveis.*

b) Você mudou sua estratégia de resolução depois de conversar com seu grupo? O que mudou?  
*Não, nada mudou.*

c) As estratégias de resolução dos outros grupos mudaram sua forma de pensar quanto a maneira de resolver o exercício? Como você resolveria o problema se recebesse agora novamente?

d) Qual seria o procedimento para resolver um problema do mesmo estilo do que você recebeu?  
*Fazer o número de uma das opções vezes o número da outra, e o resultado será as possibilidades.*

e) Se precisasse explicar a alguém como resolver esse problema, o que você diria?  
*Multiplique os sabores (5) pelas bordas (2) e o resultado será as possibilidades (10).*

13

Figura 4: Respostas do aluno G referentes ao exercício 3.

Este aluno fazia parte do grupo 1 que resolveu o exercício multiplicando os dados da questão. Percebe-se que o aluno generalizou o procedimento escrevendo o princípio fundamental da contagem, apesar de não termos formalizado este com a turma, e isto se deve ao fato que o aluno G percebeu que duas decisões de naturezas diferentes precisavam ser tomadas, o que se constata na resposta do item a. Analisando a imagem do conceito do princípio multiplicativo que o aluno formou até o momento, o estudante recorreu ao conceito de multiplicação que estava bem fundamentado, o que o redirecionou para um exemplo resolvido através da operação de multiplicação.

<sup>13</sup> Resposta ao item a: Eu pensei em fazer 5 (sabores) vezes 2 (sabor borda), que é igual a 10 combinações possíveis.

Resposta ao item b: Não, nada mudou.

Resposta ao item d: Fazer o número de uma das opções vezes o número da outra, e o resultado será as possibilidades.

Resposta ao item e: Multiplique os sabores (5) pelas bordas (2) e o resultado será as possibilidades (10).

Responda as perguntas abaixo a respeito do exercício 3:

a) Como você pensou em resolver o problema quando o leu pela primeira vez?  
EU não entendi, então pedi ajuda para os meus amigos.

b) Você mudou sua estratégia de resolução depois de conversar com seu grupo? O que mudou?  
Sim, pizza e a borda.

c) As estratégias de resolução dos outros grupos mudaram sua forma de pensar quanto a maneira de resolver o exercício? Como você resolveria o problema se recebesse agora novamente?  
Não, o outro grupo foi  $5 \times 2 = 10$  combinações.

d) Qual seria o procedimento para resolver um problema do mesmo estilo do que você recebeu?  
EU iria multiplicar.

e) Se precisasse explicar a alguém como resolver esse problema, o que você diria?  
Iria fazer multiplicação.

14

Figura 5: Respostas do aluno E referentes ao exercício 3.

O aluno E fazia parte do grupo 2, ele foi um dos alunos citados que não tinha compreendido o problema na leitura individual e participou da conversa realizada com a aluna M, citada anteriormente. Ele mudou sua forma de pensar quanto à resolução do exercício, pois pensava que a resposta era 2. Percebe-se que o aluno notou que havia duas categorias: recheio e borda da pizza, mas não percebeu que tinham 5 opções de recheios e 2 de bordas. Entretanto, durante a plenária quando conversamos que era possível resolver multiplicando o número de recheios pelo número de bordas, o aluno compreendeu que problemas com categorias diferentes são resolvidos a partir da operação citada. Logo, ao analisar a imagem do conceito do princípio combinatório em questão, o aluno E formalizou que a multiplicação é a generalização para resolver problemas semelhantes ao apresentado, como está escrito na resposta do item d.

<sup>14</sup> Resposta ao item a: Eu não entendi, então pedi ajuda para os meus amigos.

Resposta ao item b: Sim, pizza e a borda.

Resposta ao item c: Não, o outro grupo foi  $5 \times 2 = 10$  combinações.

Resposta ao item d: Eu iria multiplicar.

Resposta ao item e: Iria fazer multiplicação.



Responda as perguntas abaixo a respeito do exercício 3:

a) Como você pensou em resolver o problema quando o leu pela primeira vez?

*Eu pensei em contar as opções de sabores de pizza e a borda.*

b) Você mudou sua estratégia de resolução depois de conversar com seu grupo? O que mudou?

*Nada.*

c) As estratégias de resolução dos outros grupos mudaram sua forma de pensar quanto a maneira de resolver o exercício? Como você resolveria o problema se recebesse agora novamente?

*Não, mudou nada.*

d) Qual seria o procedimento para resolver um problema do mesmo estilo do que você recebeu?

*Seria contar as opções e a resposta seria a quantidade de que tinha no problema.*

e) Se precisasse explicar a alguém como resolver esse problema, o que você diria?

*Eu diria para ler 2 vezes a pergunta, prestar bem atenção no quanto ela pode escolher.*

15

Figura 6: Respostas da aluna N referentes ao exercício 3.

A aluna N também fazia parte do grupo 2. Ela percebeu que havia mais de um sabor de recheio de pizza e também de bordas de pizza. Como ambos compõem a pizza, a aluna pensou que deveria somar as informações pois não reconheceu que precisaria escolher a borda e o recheio. Analisando resposta do item d da aluna, identifica-se que a construção da árvore de possibilidades com a turma auxiliou na compreensão da aluna, pois precisaria contar as opções geradas para chegar na resposta da pergunta. Isso porque depois de montarmos a árvore de possibilidades, incentivou-se os alunos que contassem quantas eram as opções possíveis, e a aluna N foi uma das primeiras que respondeu que eram 10 combinações. Percebe-se que a operação da multiplicação não foi a primeira opção dela, mas contar opções o que recorre à adição, uma operação que parece estar mais fundamentada para a aluna. Logo até o momento desta questão, a imagem do conceito de princípio multiplicativo desta aluna estava fundamentada na árvore de possibilidades.

Depois do término da primeira questão, foi entregue aos alunos o problema da sorveteria<sup>16</sup>. Neste exercício eram 3 decisões que precisavam ser tomadas, portanto

<sup>15</sup> Resposta ao item a: Eu pensei em contar as opções de sabores de pizza e a borda.

Resposta ao item b: Nada.

Resposta ao item c: Não, mudou nada.

Resposta ao item d: Seria contar as opções e a resposta seria a quantidade do que tinha no problema.

Resposta ao item e: Eu diria para ler 2 vezes a pergunta, prestar bem atenção no quanto ela pode escolher.

<sup>16</sup> Uma sorveteria tem 4 sabores diferentes de sorvete: baunilha, menta, flocos e coco, também tem 3 sabores de cobertura: caramelo, chocolate e morango, e oferece 6 tipos de extras para serem colocados no sorvete como:

os alunos teriam que multiplicar os três dados. O grupo de 3 alunos realizou a multiplicação dos dados da questão, novamente eles não fizeram perguntas. O segundo grupo apresentou situações diferentes, os alunos E e N multiplicaram os dados da questão. Já a aluna M, continuou pensando em somar os dados da questão e mudou sua estratégia ao conversar com os colegas.

A plenária foi mais calma do que a anterior porque os dois grupos tiveram o mesmo pensamento. Nesse momento, a aluna M afirmou que se estivesse escrito no problema combinações ao invés de opções, ela compreenderia com mais facilidade. Como a discussão sobre os modos de resolução não evoluiu, foi feita uma comparação entre o número de opções se fosse considerado ou não que era possível não escolher uma cobertura ou extra. Em seguida, os alunos terminaram de preencher as folhas para explicarem suas resoluções. Uma das respostas que se destacou pode ser encontrada abaixo.

Responda as perguntas abaixo a respeito do exercício 4:

a) Como você pensou em resolver o problema quando o leu pela primeira vez?

*Eu pensei em multiplicar a quantidade de sabores, extras e cobertura e assim dá o resultado.*

b) Você mudou sua estratégia de resolução depois de conversar com seu grupo? O que mudou?

*Não.*

c) As estratégias de resolução dos outros grupos mudaram sua forma de pensar quanto a maneira de resolver o exercício? Como você resolveria o problema se recebesse agora novamente?

*Resolveria da mesma forma.*

d) Qual seria o procedimento para resolver um problema do mesmo estilo do que você recebeu?

*Seria como eu resolvi multiplicando todas as quantidades.*

e) Se precisasse explicar a alguém como resolver esse problema, o que você diria?

*"Multiplique todas as quantidades e o porquê desse resultado."*

17

Figura 7: Respostas da aluna N referentes ao exercício 4.

confeitos, gotas de chocolate, granulado, rolinhos de wafer, marshmallow, suspiros. David está nessa sorveteria e vai pedir um sabor de sorvete, com uma das coberturas e um dos extras, quantas opções ele tem?

<sup>17</sup> Resposta ao item a: Eu pensei em multiplicar a quantidade de sabores, extras e cobertura e assim dá o resultado.

Resposta ao item b: Não.

Resposta ao item c: Resolveria da mesma forma.

Resposta do item d: Seria como eu resolvi multiplicando todas as quantidades.

Resposta ao item e: "Multiplique todas as quantidades e o porquê desse resultado."



No caso da aluna N citada anteriormente, pode-se fazer uma comparação quanto à evolução da imagem do conceito. No problema anterior ela recorreu à árvore de possibilidades para explicar como ele poderia ser resolvido. Já no problema em questão, a aluna generalizou a árvore de possibilidades a uma multiplicação entre os números de opções de cada decisão, como verifica-se nas respostas dela. Percebe-se que a aluna levou em consideração suas últimas experiências para resolver o problema proposto.

Pode-se através destas análises confirmar o que foi afirmado por Tall e Vinner (1981), pois as expressões das imagens do conceito dos alunos demonstram figuras mentais de exercícios anteriores, como foi posteriormente conversado com eles, sobre um exercício de combinações entre saias e blusas, processos e propriedades trabalhados tanto nesta aula como em momentos anteriores da escolarização.

Nota-se que a leitura em conjunto auxiliou muito os alunos, pois em diversos casos, os estudantes estavam confusos quanto à forma de resolver o problema, mas conversar com seus colegas ajudava na busca por uma solução. Logo, percebe-se que os passos para a resolução de problemas do GTERP auxiliaram os alunos no entendimento do que estava sendo tratado, o que confirma a afirmação de Onuchic e Allevato (2011) já que esta tendência proporcionou poder matemático aos alunos e fez deles os protagonistas do aprendizado.

Quanto à imagem do conceito dos alunos, percebe-se que os estudantes recorreram a situações anteriores, sejam exercícios parecidos com os problemas apresentados, como o exercício citado do número de combinações entre saias e blusas, que os alunos tinham resolvido em uma atividade proposta pelo professor da turma, ou os conceitos das operações matemáticas utilizadas para resolver os problemas. Isso lembra a afirmação de Tall e Vinner (1981) sobre a imagem do conceito evocada, em que a lembrança do algo passado é fundamental para formar um conceito no presente.

Também se nota que apesar dos alunos não resolverem os problemas por estratégias visuais, mas tentarem solucioná-los através de operações matemáticas, as representações visuais nas plenárias, como o diagrama de Venn e a árvore de possibilidades, foram eficazes em ambas as aulas para que as imagens dos conceitos dos alunos fossem formadas, o que mostra, como Tall e Vinner (1989) definem a

imagem do conceito, que esta estrutura cognitiva não é formada apenas por imagens visuais ou processos, mas por ambos. Logo, no processo de formação da imagem do conceito dos alunos são essenciais as experiências prévias, que trazem consigo imagens visuais ou processos fundamentais para que um novo conceito seja compreendido.

## **ANÁLISE COM O ENSINO SUPERIOR**

O questionário realizado com os alunos do ensino superior foi anônimo, cada aluno que respondeu às perguntas está relacionado a alguma letra do alfabeto. As primeiras perguntas do questionário buscavam saber o perfil dos alunos, principalmente quanto às escolas que estudaram durante a escola básica, a fim de analisar se estes fatos tinham alguma relação com as respostas subsequentes. Metade dos alunos estudaram em escola pública e a outra metade em escola particular.

Quanto à aprendizagem de análise combinatória na escola básica, todos os alunos que estudaram em escola privada viram o tópico nas aulas e apenas um dos que estudaram em escola pública foi exposto ao assunto. Ao serem perguntados sobre as lembranças sobre a análise combinatória, apenas dois recordaram algo sobre estas aulas. Um deles afirmou que achou a matéria confusa, este será identificado por aluno C, e outro aluno, que será identificado por aluno F, afirmou que lembrava um pouco do que estava escrito no livro didático, que o conteúdo foi abordado em poucas linhas e depois haviam alguns exercícios. A partir destes dados, recordações que foram evocadas quando o conceito foi citado, a análise foi realizada.

Apenas os dois alunos citados anteriormente se lembravam do modo como os princípios aditivo e multiplicativo foram abordados na escola. O aluno C afirmou que viu o conteúdo através de exemplos e o aluno F não aprendeu os princípios de maneira “formal”, como afirmou, ele disse que o professor dizia que se no problema estava escrito “e” a operação que deveria ser utilizada era a multiplicação, se estivesse escrito “ou” deveriam somar.

Ao ser perguntado se estes alunos consideravam estas lembranças na aprendizagem dos mesmos princípios no ensino superior, o aluno C respondeu talvez e os alunos B e F responderam sim. A partir destas respostas, pode-se refletir se a imagem do conceito faz diferença na aprendizagem, que também foi uma das perguntas feitas aos alunos, a relevância que estas lembranças têm na aprendizagem atual. Alguns alunos afirmaram que não interfere no aprendizado já que revisam este conteúdo na disciplina da universidade. O aluno B afirmou que estas lembranças o ajudam muito em seu aprendizado e o aluno C disse que como na escola as questões nunca apresentaram valores não definidos, e que isto gera dificuldades quando são necessárias generalizações.

As perguntas subsequentes podiam apresentar influências do estudo que os alunos estavam fazendo dos princípios aditivo e multiplicativo na graduação. Outra questão que os alunos precisavam responder era: “Qual a imagem que vem a sua mente quando estes princípios são citados?”, quatro alunos responderam esta pergunta. Os alunos B e F apresentaram respostas semelhantes, que “e” era princípio multiplicativo e “ou” era princípio aditivo; o aluno E citou as operações de adição e multiplicação, e o aluno C disse que lembrava de problemas como: “De quantas maneiras diferentes Fulano pode se vestir se tem 4 calças e 3 blusas?”. Novamente temos pequenas impressões da imagem do conceito destes alunos, e pode-se concluir que as figuras mentais prevalecem na mente dos alunos.

As últimas perguntas tinham o propósito de verificar quais exemplos os alunos tinham para cada princípio através da formulação de questões. Abaixo, um quadro com as respostas dos alunos.

	Questão de princípio aditivo	Questão de princípio multiplicativo
Aluno A	Em uma entrevista sobre qual cor se prefere entre o vermelho e o azul, 30 entrevistados responderam que preferem a cor vermelha e 50 responderam que preferem a cor azul. Calcule o número total de entrevistados.	Formar casais com 10 homens e 10 mulheres

Aluno B	Em museu há 3 portas que são somente de entrada, 4 de somente saída e 2 de entrada e saída. De quantas maneiras podemos entrar e depois sair do museu, de forma que não podemos entrar e sair pela mesma porta?	Em museu há 3 portas de entrada e 4 de saída. De quantas maneiras podemos entrar e depois sair do museu?
Aluno C	Se eu tenho 4 camisas pretas, 3 brancas e 5 coloridas, de quantas maneiras diferentes eu posso me vestir?	Se eu tenho 12 blusas e 4 calças, de quantas maneiras posso me vestir?
Aluno D	Sem resposta	Tenho duas calças e três camisas, quantos looks posso ter?
Aluno E	Sem resposta	Tenho 8 tipos de sabores de sorvete e posso escolher duas bolas (ou 3 bolas), preferencialmente sem repetir sabores; de quantos modos posso escolher?
Aluno F	Supondo que exista cinemas, e teatros em sua cidade, e que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro diferentes para passarem no próximo sábado, e que você tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento destes 5 que foram descritos anteriormente. Quantos são os programas que você pode fazer neste sábado?	Vamos supor que você queira viajar este fim de semana, e que esteja pensando em ir para uma praia descansar. E no percurso até chegar a praia você tem que passar por uma outra cidade. Vamos denotar a sua cidade por A, a cidade que você vai passar antes de chegar a praia por B, e a praia por C. Supondo que existam 3 rotas diferentes até a cidade B e da cidade B até a praia existem 2 rotas diferentes. De quantas maneiras possíveis você

		poderá chegar a praia usando um destes caminhos?
--	--	--

Quadro 1: Quadro das respostas das questões 11 e 12 do questionário.

Pode-se considerar estas respostas como parte da imagem do conceito que os alunos da graduação têm sobre os princípios aditivo e multiplicativo. Nota-se que os alunos que não elaboraram perguntas sobre o princípio aditivo são aqueles que não responderam as questões sobre as lembranças que tinham dos princípios. Logo, estes conceitos não deixaram marcas, caso contrário o que os caracteriza e exemplifica poderia ser demonstrado nesta resposta. Já sobre o princípio multiplicativo todos os alunos elaboraram uma resposta. Para os alunos que não responderam sobre suas lembranças na escola básica sobre estes princípios, é possível que durante este período da escolarização, processos, propriedades e exemplos destes princípios combinatórios não apresentassem sentido para estes sujeitos. Apesar disto, percebemos que estes graduandos já possuem uma imagem do conceito destes princípios combinatórios, tendo em vista suas respostas dos exemplos dos princípios aditivo e multiplicativo.

Quanto às respostas apresentadas, para o princípio aditivo os exemplos não apresentaram repetição, apesar disso percebe-se que o aluno C fez as duas questões sobre combinações de roupas e também o aluno D fez o exercício de princípio multiplicativo dentro do mesmo contexto. Nota-se que esta situação é bastante relacionada com estes princípios, possivelmente por ser um dos exemplos presentes em sala de aula como o aluno C afirmou em uma resposta anterior. Outra situação apresentada pelo aluno E foi a do processo de escolha de sabores em uma sorveteria, que assim como a resposta do aluno A de formar casais entre homens e mulheres, são situações que fazem parte do cotidiano. Isto lembra o que Vinner (1991) afirma sobre a semelhança entre o processo de criação da imagem dos conceitos matemáticos com o processo de significação de palavras, baseado em lembranças do que acontece no cotidiano. Da mesma forma, os alunos relacionaram os conceitos matemáticos com situações já vividas.

Um caso especial entre as respostas é o do aluno B, que criou suas questões levando em consideração o princípio combinatório contrário. Existe a possibilidade de o aluno ter trocado as perguntas no momento de responder, mas não pode deixar de se considerar a possibilidade de o aluno ter feito uma confusão entre os princípios. O

aluno afirmou nas questões anteriores, que apesar de não se lembrar muito bem das aulas de análise combinatória na escola, percebe a importância do aprendizado nessa fase na escolarização em momentos futuros. Sobre esta situação, Vinner (1991) afirma que há uma confusão quando diferentes partes da imagem do conceito são evocadas, que foi o que possivelmente aconteceu com este aluno, já que em um momento anterior havia relacionado os princípios com as conjunções de costume, “ou” e “e”.

Nota-se que a imagem do conceito dos alunos da graduação sobre os princípios aditivo e multiplicativo é fundamentada pelas experiências por eles vividas, como afirmam Tall e Vinner (1981), pois apesar de não demonstrarem, suas respostas foram influenciadas por estarem cursando uma disciplina de análise combinatória. O aluno E, por exemplo, afirmou não ter nenhuma lembrança da escola básica, mas respondeu o que lhe vinha à mente quando os princípios em questão eram citados. Entretanto, ainda pode-se perceber que quanto mais experiências vividas, mais rica é a imagem do conceito do aluno.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi desenvolvida com o propósito de estudar mais a respeito do processo de compreensão de conteúdos matemáticos e o que realmente se manterá no decorrer da vida estudantil, diante do desejo de conhecer o processo de aprendizagem de um conceito. Portanto, a partir das definições de Tall e Vinner (1989) sobre a imagem do conceito, foi estudado o processo de formação desta estrutura cognitiva, bem como ela se manifesta usando como tópico matemático os princípios aditivo e multiplicativo.

Na prática realizada com o intuito de analisar o processo de formação da imagem do conceito, com o ensino fundamental, os alunos foram inseridos no contexto de resolução de problemas, pois o desejo era que o aluno fosse o protagonista do seu processo de aprendizagem. Durante esta atividade, percebeu-se que o processo de compreensão dos alunos foi marcado pela resolução dos problemas em grupo, tal que as discussões com os colegas influenciaram positivamente os estudantes a fim de fundamentarem bem os conceitos trabalhados.

Apesar disso, reconhece-se que a prática com os alunos do ensino fundamental poderia ser melhorada, pois acredita-se que o processo de aprendizagem dos princípios combinatórios poderia ser melhor explorado se as conversas entre os grupos tivessem sido gravadas em áudio, bem como as plenárias realizadas. Também se acredita que além dos problemas mais próximos do contexto dos alunos, poderiam ser trabalhadas questões diferentes da realidade dos estudantes para verificar se eles relacionariam ambas as situações.

Os resultados do questionário realizado com alunos do ensino superior constataram que as experiências prévias influenciam na imagem do conceito de um aluno, tornando-a mais rica. Estas vivências auxiliam na aprendizagem do estudante quando conectadas, pois, caso contrário geram confusão quando evocadas. Traçando um paralelo entre as duas atividades realizadas durante a pesquisa, percebe-se que quando um aluno é fomentado diversas vezes a um mesmo tópico, sua imagem do conceito amadurece. Não se pode comparar os dois públicos, mas é possível perceber como suas ideias amadureceram no decorrer do tempo. No caso dos alunos do ensino fundamental, percebeu-se que as imagens dos conceitos evoluíram com as

discussões realizadas e outros problemas de um mesmo conceito sendo trabalhados; já no caso dos estudantes do ensino superior, não analisou-se o processo de aprendizagem através de atividades como realizado no ensino fundamental, mas foi possível notar que desde a escola básica a imagem do conceito dos alunos foi aprimorada, pois alguns alunos manifestaram influência da disciplina de Combinatória I da graduação em suas respostas ao questionário.

Procurando responder à pergunta proposta, é sabido que as respostas são diferentes para contextos distintos de alunos, mas pode-se afirmar que a formação da imagem do conceito procura estabelecer um fundamento desta na mente do estudante para que depois possa ser manifestada. Esta fundamentação apenas ocorre quando se dedica tempo. Principalmente na atividade com os alunos do 7º ano, foi possível perceber seu progresso conforme os exercícios iam sendo realizados, os estudantes ficavam mais convencidos do que estavam pensando.

A imagem do conceito também é desenvolvida quando se expressa a outros, quando os alunos conversavam com seus colegas não eram apenas palavras sem sentido, mas ideias que haviam desenvolvido. A mesma ideia acontece com o público do ensino superior, pois no momento em que os alunos são convidados a escrever e exemplificar o que pensam, precisam refletir se suas ideias estão concatenadas e se apresentam sentido matematicamente. Diante dos resultados apresentados, acredita-se que a metodologia escolhida foi adequada para ambas as práticas.

Apesar dos resultados obtidos, considera-se que exista outras possibilidades que esta temática proporciona. Pode-se estudar como o processo estudado ocorre em contextos diferentes, alterando tanto o ambiente e nível escolar quanto a dinâmica realizada nas aulas propostas durante esta pesquisa. Outra possibilidade que foi considerada é a de estudar a expressão matemática dos alunos, tanto oral quanto escrita. Como os alunos percebem a escrita matemática de definições, por exemplo, e de que forma eles as reescreveriam para que tal ficasse mais clara, no caso de a definição gerar dúvidas.

Compreende-se que as atividades e a pesquisa realizadas contribuíram na formação docente, pois em momentos anteriores da graduação não foram disponibilizadas possibilidades de ministrar aulas podendo focar no pensamento dos alunos. Isso porque era aconselhado que fosse seguido o modelo do professor titular,



de aulas expositivas e exercícios de fixação, sem um momento para conversas com os estudantes sobre o que estavam compreendendo. Diante desta experiência, considera-se que em momentos futuros um dos focos da docência será o pensamento dos alunos e o processo de aprendizagem que eles desenvolverem.

## REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M.; LÜDKE, M. ***Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas***. São Paulo: EPU, 2015.

ATZ, Dafne. **A análise combinatória no 6º ano do ensino fundamental por meio da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – PPGEM. Porto Alegre: UFRGS, 2017

BODGAN, R. C.; BIKLEN, S. K. ***Investigação Qualitativa em Educação - uma introdução à teoria e aos métodos***. Porto: Porto Editora, 1994. pp. 47-74.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. 11ª edição. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2015. 89 p.

GIRALDO, Victor. **Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada**. Tese (Doutorado em Ciências) – COPPE. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

LIMA, F.A. **Análises Combinatória, Raciocínio Lógico e Resolução de Problemas**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Porto Alegre: UFRGS, 2013.

MENEZES, G. L. **Análise combinatória e resolução de problemas em uma proposta didática para o ensino médio**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Porto Alegre: UFRGS, 2017.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema-Mathematics Education Bulletin**, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

SANTOS, José Plínio de Oliveira.; MELLO, Margarida Pinheiro.; MURARI, Idani Theresinha Calzolari. **Introdução à análise combinatória**. 1ª edição. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1995. 295 p.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151-169, 1981.

TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. 1ª edição. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers, 1991. 289 p.

VINNER, Shlomo. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers, p. 65-81, 1991.

## APÊNDICE A



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA



Porto Alegre, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Prezada Professora \_\_\_\_\_

Diretora do Colégio de Aplicação - UFRGS

O(A) aluno(a) Giuliana Gagg, atualmente é graduando(a) regularmente matriculado(a) no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do Departamento de Matemática Pura e Aplicada para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o(a) graduando(a) está desenvolvendo um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). O TCC produzido deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto pesquisador(a) e professor(a) responsável pela orientação do desenvolvimento do TCC pelo(a) graduando(a), reitero nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa colocando-nos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixo à disposição o seguinte telefone de contato: (51) XXXX-XXXX (Telefone de Contato do(a) Orientador(a)).

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

---

Marilaine de Fraga Sant'Ana  
Professor(a) do Departamento de Matemática Pura e  
Aplicada



## APÊNDICE C

### TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO (MAIORES)

Eu, \_\_\_\_\_, R.G. \_\_\_\_\_, aluno(a) de Combinatória I, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada COMO SE CRIA/MANIFESTA A IMAGEM DO CONCEITO EM RELAÇÃO AOS PRINCÍPIOS ADITIVO E MULTIPLICATIVO?, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Giuliana Gagg no atual semestre, 2018/2. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela Professora Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail [xxxxxxxx@mat.ufrgs.br](mailto:xxxxxxxx@mat.ufrgs.br).

Tenho ciência de que minha participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial do meu nome e pela idade.

A colaboração se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, em que minha produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos e vídeos, obtidas durante a participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação do(a) aluno(a).

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável através do e-mail [xxxxxxxxxxxx@gmail.com](mailto:xxxxxxxxxxxx@gmail.com).

Fui ainda informado(a) de que poderei me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Assinatura do Aluno(a):

Assinatura do(a) pesquisador(a):