

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

APLICAÇÃO E ANÁLISE DE MÉTODOS ESTOCÁSTICOS DE OTIMIZAÇÃO AO
MODELO DE MÚLTIPLAS FONTES PONTUAIS PONDERADAS PARA A
DETERMINAÇÃO DA RADIAÇÃO EM CHAMAS

por

Bruno Hartmann da Silva

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Fevereiro de 2019

APLICAÇÃO E ANÁLISE DE MÉTODOS ESTOCÁSTICOS DE OTIMIZAÇÃO AO
MODELO DE MÚLTIPLAS FONTES PONTUAIS PONDERADAS PARA A
DETERMINAÇÃO DA RADIAÇÃO EM CHAMAS

por

Bruno Hartmann da Silva
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Energia

Orientador: Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França

Aprovada por:

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha PPG-EM / UNISINOS

Prof. Dr. Luís Mauro Moura PPG-EM / PUC-PR

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 25 de Fevereiro de 2019

*"I checked it very thoroughly," said the computer,
"and that quite definitely is the answer. I think
the problem, to be quite honest with you, is that
you've never actually known what the question is."*

Douglas Adams
(1952 - 2001)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente aos meus pais, Edgar e Claudia, que durante minha vida inteira me incentivaram à curiosidade e à busca pelo conhecimento, sem os quais eu não seria o que sou hoje.

À minha namorada, Bianca, pelo apoio incondicional, seja de perto ou de longe, tanto em tempos de insegurança quanto em tempos de alegria ao longo desses dois anos.

Ao meu orientador Francis França, por toda a confiança, apoio e incentivo durante o desenvolvimento desse estudo.

A todos os meus amigos e colegas de laboratório e de curso que de alguma forma me ajudaram a levar este trabalho adiante.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro durante o mestrado.

Ao Centro Nacional de Supercomputação - CESUP e à sua equipe pelo suporte técnico.

RESUMO

A determinação da emissão de radiação em chamas é um problema frequente em projetos de caldeiras, queimadores e equipamentos similares, sendo sua modelagem fundamental para controle de processos, para redução de custos e para prevenção de falhas e acidentes. Alguns modelos foram propostos, entre eles o chamado WMP, mas poucos estudos se dedicaram a desenvolvê-los e avaliá-los. Estudos anteriores buscaram relacionar os parâmetros do modelo WMP com o fenômeno da combustão e otimizá-los com a Otimização Extrema Generalizada. Existe contudo a possibilidade de que outros métodos sejam mais eficientes sem perda de qualidade. Com isso em mente, este estudo busca aplicar e avaliar o desempenho de diferentes algoritmos estocásticos de otimização ao modelo WMP. É feita uma revisão do estado da arte, sendo escolhidos cinco algoritmos para análise: Otimização de Lobos Cinzentos, Otimização de Manadas Egoístas, Algoritmo Genético, Algoritmo de Dentes-de-Leão e Otimização de Bactérias. Também é proposto um procedimento de calibração desses algoritmos baseada na metodologia de Projeto de Experimentos. O Algoritmo de Lobos Cinzentos se mostrou como o de melhor desempenho, sendo seus resultados médios e desvios padrões satisfatórios em comparação com os demais. O Algoritmo Genético e o Algoritmo de Dentes-de-Leão mostraram desempenho satisfatório, mas necessitando mais execuções para a confirmação da resposta. A Otimização de Manadas Egoístas e a Otimização de Bactérias exibiram desempenhos inferiores, com altas médias e desvios. A metodologia de Projeto de Experimentos se mostrou adequada para algoritmos com poucos parâmetros, mas perde qualidade à medida que o número de parâmetros aumenta. Os melhores resultados foram encontrados com maiores quantidades de fontes emissoras e maiores comprimentos de distribuição, concordando com a tendência apresentada por trabalhos anteriores. O melhor resultado foi encontrado pelo Algoritmo de Dentes-de-Leão, na configuração com sete fontes emissoras e comprimento de distribuição das fontes equivalente a 2,5 vezes o comprimento visível da chama, com um valor de função objetivo de $0,216 \text{ kW/m}^2$.

Palavras-chave: Otimização; Projeto de Experimentos; Problema Inverso; Radiação; Combustão.

ABSTRACT

The determination of radiation emission on flames is a frequent problem designing boilers, burners and similar equipments, its modelling being therefore fundamental for process control, cost reduction and prevention of failures and accidents. Some models have been proposed, among them the WMP model, however little study has been dedicated to solve and evaluate them. Some previous researches sought to correlate WMP model parameters to the phenomenon of combustion and to optimise them with the Generalised Extreme Optimisation. However there is the possibility of other optimisation methods being more efficient without loss of quality. Having this in mind, this study aims to apply and evaluate the performance of different stochastic optimisation algorithms applied to the WMP model. A bibliographical review of the state of the art is made, being chosen five methods to be analysed: Grey Wolf Optimiser, Selfish Herds Optimiser, Genetic Algorithms, Dandelion Algorithm and Bacterial Foraging Optimisation. Also, a procedure for the calibration of these methods is proposed, based on the Design of Experiments methodology. The Grey Wolf Optimizer presents the best performance, with satisfactory mean results and standard deviations. The Genetic Algorithm and the Dandelion Algorithm showed good satisfactory results, but also the necessity of a deeper conference of results. The Selfish Herds Optimiser and the Bacterial Foraging Optimisation had inferior performance, with higher means and deviations. The Design of Experiments methodology was satisfactory for algorithms with few parameters, but lost quality as the number of parameters increased. The best results were found for higher quantities of sources and larger distribution lengths, which agrees with tendencies presented by previous works. The best result was found by the Dandelion Algorithm, employing 7 point sources and a distribution length equivalent to 2.5 times the visible flame length, presenting an objective function value of 0.216 kW/m^2 .

Keywords: Optimisation; Design of Experiments; Inverse Problem; Radiation; Combustion.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Revisão Bibliográfica	3
1.2	Objetivos	6
1.3	Organização do Trabalho	7
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	8
2.1	O modelo WMP	8
2.2	Algoritmos Estocásticos de Otimização	11
2.2.1	Algoritmo Genético - GA	14
2.2.2	Otimização de Bactérias - BFO	18
2.2.3	Otimização de Lobos Cinzentos - GWO	22
2.2.4	Algoritmo de Dente-de-Leão - DA	23
2.2.5	Otimização de Manadas Egoístas - SHO	26
2.3	Planejamento de Experimentos	31
3	METODOLOGIA	37
3.1	Procedimento computacional	37
3.2	Dados experimentais	40
4	RESULTADOS	43
4.1	Calibração	43
4.1.1	Otimização de Lobos Cinzentos - GWO	43
4.1.2	Otimização de Manadas Egoístas - SHO	46
4.1.3	Algoritmo Genético - GA	48
4.1.4	Algoritmo de Dente-de-Leão - DA	50
4.1.5	Otimização de Bactérias - BFO	53
4.2	Otimização do Modelo WMP	56
4.2.1	Otimização de Lobos Cinzentos - GWO	56
4.2.2	Otimização de Manadas Egoístas - SHO	60

4.2.3	Algoritmo Genético - GA	64
4.2.4	Algoritmo de Dente-de-Leão - DA	69
4.2.5	Otimização de Bactérias - BFO	73
4.2.6	Análise de convergência	77
5	CONCLUSÕES	85
5.1	Sugestões para Trabalho Futuros	86
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87
	APÊNDICE A Dados Experimentais	92
	APÊNDICE B Planejamento de Experimentos	95
	APÊNDICE C Resultados de Calibração	103

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Ilustração do modelo WMP. Adaptado de Hankinson e Lowesmith, 2012.	8
Figura 2.2	Pseudocódigo do GA utilizado neste estudo.	15
Figura 2.3	Ilustração de operação de cruzamento entre dois cromossomos.	18
Figura 2.4	Pseudocódigo do BFO utilizado neste estudo.	20
Figura 2.5	Pseudocódigo do GWO utilizado neste estudo.	23
Figura 2.6	Pseudocódigo do DA utilizado neste estudo.	24
Figura 2.7	Pseudocódigo do SHO utilizado neste estudo.	27
Figura 2.8	Comparação entre os testes do planejamento fatorial 3^K completo e o planejamento Box-Behnken para $K = 3$	32
Figura 2.9	Exemplo de montagem do planejamento Box-Behnken para $K = 4$	33
Figura 3.1	Bancada utilizada para a obtenção dos dados experimentais. Adaptado de Miguel et al., 2016	42
Figura 4.1	Resultados correspondentes a cada teste do GWO.	43
Figura 4.2	Superfície de resposta gerada para calibração do GWO, a partir dos coeficientes da Tabela 4.1.	45
Figura 4.3	Resultados correspondentes a cada teste do SHO.	46
Figura 4.4	Superfície de resposta gerada para calibração do SHO, a partir dos coeficientes da Tabela 4.2.	47
Figura 4.5	Resultados correspondentes a cada teste do GA.	48
Figura 4.6	Resultados correspondentes a cada teste do DA.	51
Figura 4.7	Resultados correspondentes a cada teste do BFO.	53
Figura 4.8	Resultados encontrados pelo GWO para cada combinação de J e β_s	56
Figura 4.9	Resultados médios, desvios padrão e resultados mínimos encontrados pelo GWO para cada combinação de J e β_s	57
Figura 4.10	Melhores perfis de radiação calculados pelo GWO.	59
Figura 4.11	Frações radiantes calculadas pelo GWO na melhor solução.	60

Figura 4.12	Resultados médios, desvios padrão e resultados mínimos encontrados pelo SHO para cada combinação de J e β_s	61
Figura 4.13	Resultados encontrados pelo SHO para cada combinação de J e β_s	62
Figura 4.14	Melhores perfis de radiação calculados pelo SHO.	63
Figura 4.15	Frações radiantes calculadas pelo SHO na melhor solução.	64
Figura 4.16	Resultados médios, desvios padrão e resultados mínimos encontrados pelo GA para cada combinação de J e β_s	65
Figura 4.17	Resultados encontrados pelo GA para cada combinação de J e β_s	66
Figura 4.18	Frações radiantes calculadas pelo GA na melhor solução.	67
Figura 4.19	Melhores perfis de radiação calculados pelo GA.	68
Figura 4.20	Resultados encontrados pelo DA para cada combinação de J e β_s	69
Figura 4.21	Resultados médios, desvios padrão e resultados mínimos encontrados pelo DA para cada combinação de J e β_s	70
Figura 4.22	Melhores perfis de radiação calculados pelo DA.	72
Figura 4.23	Frações radiantes calculadas pelo DA na melhor solução.	72
Figura 4.24	Resultados encontrados pelo BFO para cada combinação de J e β_s	74
Figura 4.25	Resultados médios, desvios padrão e resultados mínimos encontrados pelo BFO para cada combinação de J e β_s	75
Figura 4.26	Melhores perfis de radiação calculados pelo BFO.	76
Figura 4.27	Frações radiantes calculadas pelo BFO na melhor solução.	76
Figura 4.28	Gráficos de convergência para o GWO.	78
Figura 4.29	Gráficos de convergência para o SHO.	80
Figura 4.30	Gráficos de convergência para o GA.	81
Figura 4.31	Gráficos de convergência para o DA.	82
Figura 4.32	Gráficos de convergência para o BFO.	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Valores dos parâmetros utilizados no planejamento de experimentos.	38
Tabela 3.2	Quantidade de observações planejada pelo DoE de cada algoritmo; R.P.C. = repetições do ponto central.	38
Tabela 3.3	Dados experimentais utilizados neste estudo. Adaptado de Miguel et al., 2016.	41
Tabela 4.1	Coefficientes $\hat{\beta}$ da curva de resposta para o GWO e teste F; G.L. = Graus de Liberdade.	44
Tabela 4.2	Coefficientes $\hat{\beta}$ da curva de resposta para o SHO e teste F; G.L. = Graus de Liberdade.	47
Tabela 4.3	Coefficientes $\hat{\beta}$ da curva de resposta para o GA, suas respectivas estatísticas $ t_0 $ (entre parênteses) e teste F; G.L. = Graus de Liberdade.	50
Tabela 4.4	Coefficientes $\hat{\beta}$ da curva de resposta para o DA, suas respectivas estatísticas $ t_0 $ (entre parênteses) e teste F; G.L. = Graus de Liberdade.	52
Tabela 4.5	Coefficientes $\hat{\beta}$ da curva de resposta para o BF e teste F; G.L. = Graus de Liberdade.	55
Tabela 4.6	Coefficientes do melhor resultado encontrado pelo GWO. $J = 8, \beta_s = 2, 5, f_o = 0, 226 \text{ kW/m}^2$	59
Tabela 4.7	Coefficientes do melhor resultado encontrado pelo SHO. $J = 7, \beta_s = 2, 5, f_o = 0, 248 \text{ kW/m}^2$	63
Tabela 4.8	Coefficientes do melhor resultado encontrado pelo GA. $J = 11, \beta_s = 2, 5, f_o = 0, 228 \text{ kW/m}^2$	67
Tabela 4.9	Coefficientes do melhor resultado encontrado pelo DA. $J = 7, \beta_s = 2, 5, f_o = 0, 216 \text{ kW/m}^2$	71
Tabela 4.10	Coefficientes do melhor resultado encontrado pelo BFO. $J = 5, \beta_s = 2, 25, f_o = 0, 359 \text{ kW/m}^2$	74
Tabela A.1	Dados experimentais de fluxo radiante para as 12 chamas laminares de difusão descritas na Tabela 3.3.	92

Tabela B.1	Experimentos planejados para o GWO pelo método fatorial 3^K completo.	95
Tabela B.2	Experimentos planejados para o SHO pelo método Box-Behnken. .	95
Tabela B.3	Experimentos planejados para o GA pelo método Box-Behnken. .	96
Tabela B.4	Experimentos planejados para o DA pelo método Box-Behnken. . .	97
Tabela B.5	Experimentos planejados para o BFO pelo método Box-Behnken. .	98
Tabela C.1	Resultados obtidos para cada <i>design</i> testado com o GWO.	103
Tabela C.2	Resultados obtidos para cada <i>design</i> testado com o SHO.	103
Tabela C.3	Resultados obtidos para cada <i>design</i> testado com o GA.	104
Tabela C.4	Resultados obtidos para cada <i>design</i> testado com o DA.	105
Tabela C.5	Resultados obtidos para cada <i>design</i> testado com o BFO.	107

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BFO	Otimização de Bactérias
CESUP	Centro Nacional de Supercomputação
DA	Algoritmo de Dentes-de-Leão
DoE	Projeto de Experimentos
GA	Algoritmo Genético
GEO	Otimização Extrema Generalizada
GWO	Otimização de Lobos Cinzentos
PSO	Otimização de Enxame de Partículas
SHO	Otimização de Manadas Egoístas
SP	Modelo de Fonte Pontual Única
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
WMP	Modelo das Múltiplas Fontes Pontuais Ponderadas

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

A_j	Coeficiente da correlação
B_j	Coeficiente da correlação
C_j	Coeficiente da correlação
D_j	Variável auxiliar da correlação
F_0	Estatística do teste F
F_{test}	Valor de F crítico para teste F
f_o	Função objetivo, W/m ²
$f_{o,s}$	Função objetivo sinalizada
fit	Aptidão
h	Vetor solução de indivíduo presa
H	Matrix "chapéu"
h_{jj}	Elemento j da diagonal de H
H_0	Hipótese nula
H_1	Hipótese alternativa
I_a	Intensidade do atrator
I_r	Intensidade do repelente
J	Número de fontes pontuais
K	Número total de parâmetros
k_j	Parâmetro j
L_f	Comprimento de chama, m
L_s	Comprimento de distribuição, m
ℓ	Número aleatório seguindo a distribuição de Lévy
\bar{l}_{cut}	Comprimento médio de corte, bits
l_{res}	Resolução da cadeia de bits
LHV	Poder calorífico inferior, J/kg
\dot{m}	Vazão mássica de combustível, kg/s
M	Número de pontos de medição
MS_{LOF}	Média da soma dos quadrados do da falta de ajuste
MS_{PE}	Média da soma dos quadrados do erro puro

N_{bits}	Tamanho da cadeia de bits
N_{coef}	Número de coeficientes
N_{disp}	Número de eventos de dispersão
N_{ev}	Número total de avaliações da função objetivo
n_{ev}	Número de avaliações da função objetivo até o momento
N_{ex}	Número de execuções
N_{mut}	Número de mutações
N_{obs}	Número de observações
N_{pop}	Número de indivíduos na população
N_{rep}	Número de eventos de reprodução
N_{seeds}	Número de sementes
N_{steps}	Número de passos
N_{test}	Número de testes
N_{var}	Número de variáveis
N_x	Número de indivíduos no grupo x
P_{cross}	Probabilidade de cruzamento
P_{mut}	Probabilidade de mutação
P_{sel}	Probabilidade de seleção
\mathbf{p}	Vetor solução de indivíduo predador
q''_R	Fluxo radiante total, W/m^2
q''_j	Fluxo radiante da fonte puntual j , W/m^2
q_f	Taxa de liberação de calor, W
r	Número aleatório com distribuição uniforme entre 0 e 1
\mathbf{r}	Vetor de componentes aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1
$\hat{\mathbf{r}}$	Vetor unitário de componentes aleatórias com distribuição uniforme
R_a	Alcance do atrator
R_{att}	Raio de ataque
R_f	Distância de medição do eixo da chama, m
R_r	Alcance do repelente
R_{CD}	Raio de busca do dente-de-leão núcleo
S	Sinal recebido pela bactéria
\vec{S}_j	Distância entre fonte j e sensor de radiação, m

SS_{LOF}	Soma dos quadrados da falta de ajuste
SS_{PE}	Soma dos quadrados do erro puro
SV	Valor de sobrevivência
t_0	Estatística do teste t
t_{teste}	Valor de t crítico para teste t
w_j	Peso da fonte j
\mathbf{X}	Matriz de coeficientes da regressão
\mathbf{x}	Vetor solução
x_i	Componente i do vetor solução
$x^{(u)}$	Limite superior da variável
$x^{(l)}$	Limite inferior da variável
X_R	Fração radiante
\mathbf{y}	Vetor de respostas do fenômeno
y	Resposta do fenômeno analisado
\hat{y}	Resposta estimada pela regressão
z_j	Posição vertical da fonte j , m

Símbolos Gregos

α	Nível de confiança
α_w	Fator de murchamento
α_g	Fator de crescimento
β_s	Comprimento de distribuição normalizado
β_i	Coefficiente da regressão relacionado ao parâmetro x_i
β	Vetor de coeficientes da regressão
$\hat{\beta}$	Vetor de coeficientes estimados da regressão
$\hat{\beta}_i$	Coefficiente estimado da regressão relacionado ao parâmetro x_i
ϵ	Erro
$\boldsymbol{\epsilon}$	Vetor de erros das observações
φ	Ângulo do sensor, rad
η_{kill}	Fração da população a ser eliminada
η_{pred}	Fração da população definida como predadores
τ	Transmissividade do meio
κ	Iteração

ν_1	Parâmetro de localização da distribuição de Lévy
ν_2	Parâmetro de escala da distribuição de Lévy
ω	Atratividade da presa
ψ	Variável auxiliar da movimentação no SHO
ρ	Resíduo Studentizado
σ	Desvio padrão
$\hat{\sigma}$	Desvio padrão estimado

Símbolos Matemáticos

$\hat{\mathbf{x}}$	Estimado ou unitário
\bar{x}	Média
$ x $	Módulo
$\ \mathbf{x}\ $	Norma do vetor
$\ \mathbf{x}\ _\infty$	Norma infinita do vetor
$\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$	Produto de Hadamard
\wedge	Conjunção
\sum	Somatório
$\text{sgn}(x)$	Função sinal
\mathbf{X}'	Transposta
\mathbf{X}^{-1}	Inversa
$x \mid y$	x tal que y

1 INTRODUÇÃO

A utilização de combustão como fonte de calor ou para eliminação de rejeitos é recorrente em diversos setores da indústria, principalmente em indústrias petrolíferas. Em plataformas marítimas para extração de petróleo, por exemplo, gases a serem rejeitados são queimados em um *flare*, o qual é posicionado suficientemente longe para que o calor da chama não afete os equipamentos e os funcionários presentes na plataforma. O projeto dessas estruturas depende de ferramentas capazes de oferecer previsões adequadas do calor a ser emitido considerando diversas vazões e composições de gases. Nesse contexto, a modelagem de radiação em chamas se torna vital para a redução de custos, para o aprimoramento do controle dos processos e para a prevenção de acidentes nos locais de aplicação.

O modelo mais simples para a previsão da emissão de radiação em chamas considera toda a radiação como sendo proveniente de uma fonte pontual única, propagando calor igualmente em todas as direções. Tal previsão se torna falha à medida que o ponto de interesse se aproxima da chama, que devido ao formato alongado e a dinâmicas de reação química produz um perfil de radiação com intensidade variável. Alguns novos modelos foram propostos para levar essa variação em consideração, sendo o mais simples o modelo de múltiplas fontes pontuais ponderadas, que distribui diversas fontes pontuais sobre o eixo da chama, buscando reproduzir o perfil observado experimentalmente. Contudo, à medida que a quantidade de fontes aumenta, a quantidade de parâmetros a serem determinados para a utilização do modelo também é acrescida. O grande número de variáveis dificulta a exploração do espaço de soluções sendo necessária a utilização de algum método dedicado a encontrar o melhor resultado possível da função a ser avaliada.

Diversos métodos determinísticos tentam resolver tais problemas. O método mais simples - e custoso - é chamado de busca exaustiva, ou seja, se baseia na avaliação de todas as combinações possíveis das variáveis envolvidas de forma que se tenha certeza do melhor valor, ou pelo menos da região onde o resultado deve ser refinado. Em um problema simples com duas variáveis a busca exaustiva consiste na construção do gráfico $f(x_1, x_2)$ dentro de algum domínio especificado e na posterior identificação dos melhores valores de f . Apesar de eficiente em problemas simples de poucas dimensões, outros problemas com mais dimensões, comportamentos complexos ou com contornos indefinidos se tornam

difíceis para uma boa avaliação por meio da busca exaustiva.

Outros métodos se valem de regras também determinísticas que levam o algoritmo a economizar operações. O método de Gradiente Descendente, por exemplo, se baseia na derivada primeira da função de forma a seguir sua curvatura até um ponto de mínimo (ou máximo, caso o problema seja de maximização). Entretanto é necessário o conhecimento da derivada primeira da função no ponto de análise, o que pode não ser possível ou ser custoso computacionalmente. Uma alternativa é o método de Coordenada Descendente, que testa a inclinação da função uma coordenada por vez apenas. Tais métodos só são realmente eficientes na resolução de funções convexas, ou seja, que contenham um mínimo apenas. Em funções não convexas o resultado final oferecido pelo algoritmo se torna dependente da posição inicial de avaliação, podendo encontrar variados mínimos locais para múltiplas execuções do programa. Por esse motivo, são formulados modelos estocásticos de otimização.

A palavra "estocástico" vem do grego *στοχαστικός*, significando "agir baseado em conjectura". Portanto métodos estocásticos tentam estimar a localização da melhor solução baseados em regras com componentes randômicas, fazendo com que a trajetória de exploração da análise seja parcialmente determinada pelo acaso. Parcialmente pois outras regras são aplicadas para calibrar o nível de aleatoriedade ou para tender a busca a certos pontos de importância identificados ao longo do procedimento. Frequentemente esses algoritmos são inspirados em fenômenos naturais ou em comportamentos de animais e plantas, interpretando a evolução e a seleção natural como um grande algoritmo biológico de otimização, poupando apenas indivíduos que adotam hábitos que levam à maior disponibilidade de alimento, ao menor gasto de energia, ou a qualquer outro objetivo necessário para a sobrevivência da espécie. Devido à notoriedade desses métodos, existe uma necessidade de análise aprofundada de seu desenvolvimento e sua calibração aplicadas aos mais diversos problemas.

Este estudo busca analisar o uso desses algoritmos aplicando-os a um problema específico de transferência radiativa, o modelo de múltiplas fontes pontuais ponderadas, e testar uma metodologia de calibração de seus parâmetros, servindo de base para trabalhos futuros na área.

1.1 Revisão Bibliográfica

Hankinson e Lowesmith, 2012 revisaram e propuseram diversos modelos de emissão de radiação em chamas, evoluindo do mais simples (SP, ou Modelo de Fonte pontual Única, em inglês *Single Point Source Model*, que considera toda a radiação sendo emitida por uma fonte pontual localizada sobre o eixo da chama, a uma altura correspondente à metade de seu comprimento visível), até o mais complexo (hemisférios emissores distribuídos sobre uma forma sólida; no trabalho em questão, dois semi-elipsóides). Dentre esses modelos, o que foi capaz de melhor aliar simplicidade e precisão foi o modelo WMP (Modelo das Múltiplas Fontes pontuais, em inglês *Weighted Multi-Point Source Model*). É sugerida a utilização de pelo menos 20 fontes ($J \geq 20$), alegando que uma quantidade maior contribuiria pouco para o aumento da precisão da solução. Entretanto, os autores comentam a necessidade de estudos para a definição da distribuição das fontes e de seus respectivos pesos. Poucos trabalhos utilizaram até o momento o modelo WMP para realizar tal modelagem [Ekoto et al., 2014; Kang et al., 2015; San Marchi et al., 2016], todos obedecendo a configuração sugerida por Hankinson e Lowesmith, 2012.

O primeiro trabalho que explorou de fato outras possibilidades na configuração foi publicado por Miguel et al., 2016. O estudo formulou o problema como um problema inverso, isso é, quando o resultado desejado é conhecido e é variada a configuração do objeto do problema para corresponder o mais fielmente possível a esse resultado. No caso, o resultado desejado provém de dados experimentais de 12 chamas laminares de difusão de metano (CH_4). Traduzindo o erro entre numérico e experimental, foi estabelecida uma função objetivo a ser minimizada, sendo duas abordagens utilizadas: não-correlacionada e correlacionada. Para resolver esse problema, foi utilizada a Otimização Extrema Generalizada, ou GEO (do inglês, *Generalized Extreme Optimization* [De Sousa, 2003]), como método de otimização dessa função objetivo. Foram encontrados resultados satisfatórios para as duas abordagens, com ligeiramente maior precisão para o modelo não-correlacionado. Em um trabalho subsequente, Silva et al., 2018 empregou o Recozimento Simulado (ou SA, do inglês *Simulated Annealing* [Kirkpatrick et al., 1983]) para a resolução do modelo WMP correlacionado, obtendo resultados finais mais favoráveis do que os apresentados por Miguel et al., 2016 para o mesmo número de avaliações da função objetivo. Entretanto, o autor propõe que outros algoritmos devem ser aplicados ao problema buscando identificar quais abordagens são mais aconselháveis para sua resolução.

À medida que o número de variáveis de uma função aumenta, aumenta-se o número de dimensões do espaço de busca, já que cada variável é interpretada como um eixo ortogonal do domínio a ser explorado. Funções diferenciáveis e com apenas um ponto de mínimo (ou máximo, dependendo do problema a ser resolvido) permitem que esse ponto seja facilmente encontrado com a utilização de um algoritmo determinístico como Gradiente Descendente ou Levenberg-Marquardt [Levenberg, 1944; Marquardt, 1963]. No entanto diversos problemas apresentam funções descontínuas ou discretas que impedem tais métodos de serem aplicados. Além disso, outros problemas, mesmo sendo plenamente diferenciáveis em todos os pontos, podem conter diversos mínimos locais, fazendo com que a convergência seja completamente dependente da estimativa inicial e apresente resultados diferentes em diferentes execuções.

Buscando evitar tais problemas, foram desenvolvidos ao longo do tempo diversos métodos estocásticos de otimização, isso é, que se aproveitam da utilização de algum componente randômico ou pseudo-randômico em seu algoritmo para que a solução não se atenha a um mínimo local. Tais métodos vêm tomando espaço desde a década de 1950 (como os estudos de Robbins e Monro, 1951), normalmente - mas não sempre - inspirados em fenômenos naturais, comportamentos de animais, evolução, táticas de reprodução de plantas, comportamento humano, etc. Isso pois, similarmente à ideia de otimizar uma função, a natureza teoricamente recompensa o indivíduo mais apto em um determinado ambiente, o qual impõe a esse indivíduo certas condições para sua sobrevivência. A função a ser otimizada será então, por exemplo, a maior aquisição de nutrientes com o menor esforço possível, ou a eficiência de reprodução. Diferentes condições ou funções apresentarão soluções variadas, assim como na natureza há espécies com ninhadas grandes mas que perdem muitos filhotes e há outras com ninhadas pequenas que investem todos os seus recursos na garantia de que esses não pereçam. A analogia computacional se dá na modelagem matemática desses fenômenos - na dinâmica predador/presa ou na reprodução da espécie - para controlar a busca da solução no domínio desejado. Alguns métodos se basearam por exemplo:

- no comportamento de insetos [Dorigo et al., 1996; Lucic e Teodorovic, 2001; Yang, 2008; Saremi et al., 2017];
- no comportamento de mamíferos predadores [Yang, 2010; Fausto et al., 2017; Mirjalili et al., 2014; Yazdani e Jolai, 2015];

- no comportamento de pássaros [Yang e Deb, 2009; Askarzadeh, 2016];
- na fauna marinha [Ebrahimi e Khomehchi, 2016; Mirjalili e Lewis, 2016; Mirjalili et al., 2017];
- em plantas [Yang, 2012; Li et al., 2017];
- em outras formas de vida [Li et al., 2016; Jaderyan e Khotanlou, 2016; Passino, 2002];
- em conceitos biológicos [Holland, 1992; Storn e Price, 1997; De Sousa, 2003; Jaddi et al., 2016; Tang et al., 2015];
- em fenômenos físicos [Kirkpatrick et al., 1983; Sacco e Oliveira, 2005; Abedinpourshotorban et al., 2015; Husseinzadeh Kashan, 2015; Kaveh e Mahdavi, 2014; Kaveh e Dadras, 2017; Nematollahi et al., 2017];
- em algum aspecto do comportamento humano [Savsani e Savsani, 2015; Geem et al., 2001; Atashpaz-Gargari e Lucas, 2007];
- em conceitos matemáticos ou filosóficos [Mirjalili, 2016; Punnathanam e Kotecha, 2016].

Ao serem analisados, diversos desses métodos compartilham componentes semelhantes, com pequenas modificações, trazendo críticas de que tais métodos não sejam de fato inovadores, mas sim variações de algoritmos já existentes. Piotrowski et al., 2014 faz uma crítica contundente ao Algoritmo de Buracos Negros [Hatamlou, 2013], demonstrando que o método é apenas uma variação do já estabelecido método de Otimização por Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization*, PSO [Kennedy e Eberhart, 1995]). Yang, 2014, por outro lado, manifesta preocupação com a falta de atenção da comunidade dedicada à área em relação a certos aspectos, como análise matemática, calibração de parâmetros e aplicação em problemas reais (grande parte das propostas aplicam seus algoritmos apenas a funções de teste padronizadas, como as funções de Ackley e Rastrigin). Além disso, o mesmo texto classifica os componentes em categorias ("operadores genéticos", "randomização", "caótico" e "atração e repulsão") buscando orientar o desenvolvimento de novos métodos, reforçando a ideia de que estes utilizariam ferramentas

similares àsquelas já estabelecidas por métodos anteriores. Quanto à calibração desses algoritmos, poucas informações são dadas pelos autores que propõem novos métodos sobre as escolhas dos valores utilizados em seus parâmetros. Existe portanto uma necessidade de estudos que sejam capazes de guiar a calibração desses parâmetros para diferentes problemas de acordo com suas características - os parâmetros utilizados para a minimização da função Rastrigin, por exemplo, não necessariamente serão bons para a minimização da função de Easom, pois as duas possuem comportamentos muito distintos.

Um dos métodos que busca prever o comportamento de determinado fenômeno experimental a ser analisado é o chamado projeto de experimentos, ou DoE (do inglês *Design of Experiments*). Ele é utilizado para estudar o quanto a variação dos parâmetros desse fenômeno influencia no resultado obtido a partir desses experimentos. Montgomery, 2013 traz a base teórica do DoE clássico, enquanto Garud et al., 2017 faz uma revisão complementar do desenvolvimento do DoE moderno e um histórico de áreas onde foi aplicada essa evolução da metodologia, sendo as mais notáveis Engenharia, Ciência da Computação, e Medicina.

1.2 Objetivos

Com base na revisão bibliográfica descrita, o objetivo geral deste trabalho é analisar o desempenho de algoritmos de otimização selecionados ao problema da determinação de parâmetros do modelo WMP de radiação em chamas, buscando servir como base para futuros desenvolvimentos desse modelo. Os objetivos específicos deste trabalho são, por sua vez:

- Selecionar, dentre os revisados, métodos estocásticos de otimização baseados em características definidas pelo autor;
- Propor, aplicar e avaliar a eficácia de uma metodologia para a calibração dos parâmetros dos métodos de otimização selecionados;
- Aplicar os métodos de otimização selecionados ao problema WMP correlacionado utilizando formulação semelhante àquela aplicada em trabalhos anteriores;
- Analisar os resultados estatisticamente, com suas médias e desvios para cada caso, visando a identificar qual dos métodos seria mais adequado por questões de aplicabilidade, robustez e eficiência, analisando os casos de convergência;

- Avaliar os melhores resultados encontrados para o modelo WMP.
- Sugerir um direcionamento para trabalhos futuros dentro da área de discussão.

1.3 Organização do Trabalho

O trabalho está organizado em Fundamentação Teórica (Capítulo 2), Metodologia (Capítulo 3), Resultados (Capítulo 4) e Conclusões (Capítulo 5).

No Capítulo 2 é explicitada em detalhes toda a base teórica utilizada neste trabalho. É explicado o modelo WMP, sua formulação e o motivo da utilização de estratégias estocásticas para sua otimização. São descritas as principais ferramentas utilizadas em algoritmos estocásticos e são listados os algoritmos escolhidos para aplicação neste estudo, os quais têm seu funcionamento caracterizados detalhadamente. Por haver a necessidade de calibração dos parâmetros desses algoritmos, a metodologia de DoE é também exposta em detalhes, sendo apresentadas as metodologias de definição dos experimentos a serem testados e de cálculo de regressão linear e de diagnóstico da curva resultante, assim como suas interpretações.

No Capítulo 3 são definidos os valores dos parâmetros a serem testados em cada um dos algoritmos selecionados, a metodologia de análise e os critérios de seleção dos parâmetros a serem utilizados na otimização do modelo WMP. Também são descritas as restrições aplicadas, como punições e domínio de busca do algoritmo. Além disso, descreve-se o recurso computacional de *software* e de *hardware* utilizado e são apresentados os dados experimentais nos quais a otimização foi baseada.

O Capítulo 4 traz os resultados do processo de calibração e das execuções finais, assim como análises e discussões sobre esses resultados.

O Capítulo 5 conclui o trabalho retomando brevemente tudo o que foi abordado e resumindo os pontos discutidos no Capítulo 4, oferecendo sugestões para trabalhos futuros na área.

As referências utilizadas são apresentada ao final do texto. Esta dissertação também inclui apêndices com dados detalhados complementares.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 O modelo WMP

O modelo de múltiplas fontes pontuais ponderadas, ou WMP (*weighted multi-point*), é um modelo simples, algébrico (ou seja, não utiliza nenhum artifício de cálculo diferencial), que representa a emissão de radiação em chamas como sendo proveniente de diversas fontes pontuais distribuídas ao longo do eixo da chama. Cada fonte emite uma fração da energia radiante para que, em sua totalidade, todas as contribuições resultem no perfil real de radiação. A Figura 2.1 ilustra o modelo:

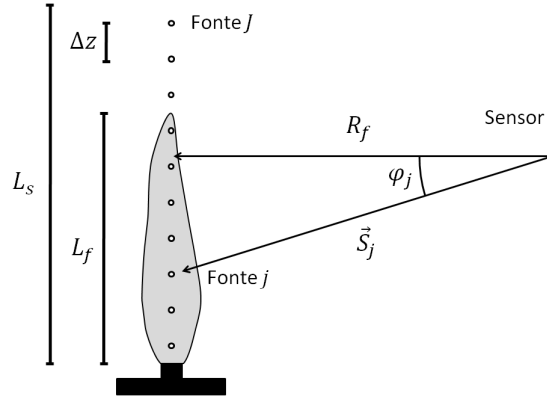


Figura 2.1 – Ilustração do modelo WMP. Adaptado de Hankinson e Lowesmith, 2012.

As fontes emitem radiação isotropicamente, ou seja, com a mesma intensidade em todas as direções. O fluxo de radiação calculado é dado pela seguinte equação:

$$q''_R = \sum_{j=1}^J q''_j = \sum_{j=1}^J \frac{w_j X_R \dot{m} LHV \tau_j}{4\pi |\vec{S}_j|^2} \cos \varphi_j \quad (2.1)$$

onde q''_R é o fluxo radiante calculado, q''_j é o fluxo calculado de cada fonte j , J é o número total de fontes, w_j é o peso da fonte j (ou a fração da radiação total que a fonte j emite), X_R é a fração radiante da chama, \dot{m} é a vazão mássica de combustível sendo queimado, LHV é o poder calorífico inferior do combustível, τ_j é a transmissividade do meio ao longo do caminho descrito pelo vetor \vec{S}_j (considerada 1, ou seja, o ar como meio não participante), $|\vec{S}_j|$ é a distância da fonte j até o ponto de medição e φ_j é o ângulo entre o vetor normal da superfície do sensor de radiação e o vetor \vec{S}_j . Dado que q''_R é um somatório de contribuições, é esperado que a soma da radiação proveniente de todas as fontes seja igual à radiação total emitida pela chama àquele ponto, portanto impondo uma restrição

aos valores de w_j de forma que:

$$\sum_{j=1}^J w_j = 1 \quad (2.2)$$

Hankinson e Lowesmith, 2012 sugeriram a utilização de pelo menos 20 fontes ($J \geq 20$), alegando que uma quantidade maior contribuiria pouco para o aumento da precisão da solução (em outras palavras, que o modelo "convergiria" com $J = 20$). Com essa configuração é sugerida a definição dos pesos de acordo com a seguinte função:

$$w_j = jw_1 \quad (2.3a)$$

$$w_j = \left[j_p - \frac{j_p - 1}{J - j_p + 1} \cdot (j - j_p + 1) \right] \cdot w_1 \quad (2.3b)$$

onde w_j é o peso de cada fonte j , j_p é o número da fonte localizada onde se encontra o pico de radiação (em torno de $0,75J$) e J é o número total de fontes. Esta formulação prevê que as fontes fossem distribuídas ao longo do comprimento visível da chama, entretanto os próprios autores comentam a necessidade de estudos para a definição da distribuição das fontes e de seus respectivos pesos.

O trabalho de Miguel et al., 2016 explora essas características do modelo com uma formulação de problema inverso. Nessa formulação, a resposta a ser obtida é conhecida (no caso desse estudo, os dados experimentais para um determinado conjunto de chamadas), e são variados os parâmetros do problema de forma a se aproximar o máximo possível do resultado desejado. Essa diferença entre valores numéricos e experimentais é traduzida através da definição de uma função objetivo, a qual se deseja minimizar. A função objetivo definida para o problema do modelo WMP é dada pela seguinte equação:

$$f_o(X_R, w_j) = \left[\sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^M (q''_{R,med,i} - q''_{R,i})^2 \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

onde M é o número de pontos de medição para cada chama, F o número de chamadas avaliadas, $q''_{R,med,i}$ é o fluxo de calor medido e $q''_{R,i}$ o fluxo de calor calculado pelo modelo. Os pontos foram distribuídos uniformemente ao longo do eixo da chama dentro de um determinado comprimento de distribuição L_s , de acordo com as seguintes equações:

$$L_s = \beta_s L_f \quad (2.5a)$$

$$\Delta z = L_s / J \quad (2.5b)$$

$$z_1 = \Delta z/2 \quad (2.5c)$$

$$z_j = z_{j-1} + \Delta z \quad (2.5d)$$

onde β_s é o comprimento de distribuição adimensionalizado pelo comprimento da chama, L_f é o comprimento visível de chama, Δz é a distância entre fontes e z_j é a posição vertical de cada fonte em referência ao bico do queimador. Em uma das abordagens, a determinação dos pesos w_j e da fração radiante X_R foi feita livremente, com o problema tendo portanto $N_{var} = J + 1$ variáveis a serem definidas. Entretanto essa abordagem não aproxima o modelo do real fenômeno, e uma formulação correlacionada é necessária para fazer essa aproximação.

Na abordagem correlacionada, as variáveis são descritas em função de algum parâmetro da chama, como propriedades do combustível (poder calorífico, por exemplo), características do escoamento (vazão mássica de combustível queimado) ou da própria chama como um todo (taxa de liberação de calor, fração radiante, comprimento de chama). No caso da formulação apresentada por Miguel et al., 2016, foram utilizadas as seguintes equações:

$$q_f = Q_f/Q_{ref} \quad (2.6a)$$

$$X_R(q_f) = A_{X_R}q_f^2 + B_{X_R}q_f + C_{X_R} \quad (2.6b)$$

$$D_j(q_f) = A_jq_f^2 + B_jq_f + C_j \quad (2.6c)$$

onde Q_f é a taxa de liberação de calor da chama, Q_{ref} é uma taxa de liberação de calor de referência (definida no estudo como 1kW), A , B e C são os coeficientes a serem definidos e D_j é uma variável auxiliar para definir os pesos, de forma a reforçar a restrição dada pela Equação 2.2. Os pesos então são definidos da seguinte forma:

$$w_j = \frac{D_j}{\sum_{j=1}^J D_j} \quad (2.7)$$

Após a aplicação dessas correlações, a função objetivo f_o pode ser expressa como:

$$f_o(A_j, B_j, C_j, A_{X_R}, B_{X_R}, C_{X_R}) = \left[\sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^M (q''_{R,m,i} - q''_{R,i})^2 \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

Apesar da abordagem correlacionada apresentar vantagens do ponto de vista da coerência da modelagem ao se basear em características do fenômeno da combustão, o número de variáveis aumenta significativamente: $N_{var} = 3 \times (J + 1)$, em comparação com

$N_{var} = J + 1$ da abordagem não-correlacionada. Como cada variável equivale a um grau de liberdade, e portanto a uma dimensão do espaço de busca, o "volume" total do espaço a ser pesquisado aumenta exponencialmente com o número de variáveis. Além disso, a formulação permite que mais de uma combinação de variáveis ofereça o mesmo valor de f_o . O método de busca a ser utilizado deve prever a alta probabilidade de encontro de um mínimo local, e portanto deve possuir meios de evitar que o algoritmo fique "preso" nesses vales. Com esse fim, são utilizados algoritmos estocásticos de otimização.

2.2 Algoritmos Estocásticos de Otimização

Algoritmos estocásticos de otimização são aqueles algoritmos que agem, de alguma forma, por meio de conjecturas, os quais são modelados por algum componente randômico e por eventual chance de aceitação de maus caminhos durante a exploração do espaço de soluções, de forma que seja possível encontrar uma resposta melhor em algum ponto mais à frente. Entre os componentes presentes em diversos algoritmos, podem ser identificados os seguintes:

- Formas de geração de novas soluções:
 - Mutação: ao decodificar a solução como uma cadeia binária, a mudanç a de um dos bits dessa cadeia;
 - Cruzamento: mistura dos componentes de dois vetores solução (binários ou reais) para a geração de soluções "filhas";
 - Perturbação aleatória: soma de um vetor randômico a um vetor solução;
 - Perturbação determinística: soma, a um vetor solução, um segundo vetor seguindo algum critério (atração pela melhor solução já encontrada, por exemplo);
 - Semeadura: geração de uma solução aleatória dentro de um determinado alcance;
 - Geração aleatória: criação de uma solução aleatória dentro do domínio de busca;
 - Geração determinística: criação de uma nova solução com a combinação de várias soluções já existentes.

- Critérios sobre a influência de uma solução para as próximas iterações:
 - Morte: solução é eliminada da população;
 - Murchamento ou crescimento: a solução tem seu raio de influência diminuído ou aumentado;
 - Aptidão (*fitness*): valor calculado com base na função objetivo f_o para definir a probabilidade de reprodução ou a influência nas novas soluções;
 - Idade: número de iterações no qual aquela solução sobrevive até ser eliminada;
 - Atração ou repulsão: a solução demarca sua posição com algo que atraia (ou que repila) as demais para aquela região do domínio;
 - Hierarquia: algumas soluções têm papel diferenciado das outras, definindo as diferentes funções de acordo com "castas" ou hierarquias;
 - Migração: em métodos que separam as soluções por nichos (grupos locais), as soluções são transportadas de um nicho para o outro, de forma a mudar sua interação com o restante da população.

- Parâmetros definidos pelo usuário, podendo ser constantes ou funções de algum outro parâmetro:
 - Magnitude da perturbação: um peso multiplicador aplicado ao vetor a ser somado em uma perturbação (determinística ou aleatória) ou à uma geração combinada;
 - Inércia: um valor somado à movimentação da solução pelo espaço de busca, de forma que ela não seja facilmente desviada de seu caminho;
 - População: número de soluções a serem avaliadas no espaço. Normalmente mantida aproximadamente constante;
 - Nichos: grupos locais que interagem localmente;
 - "Temperatura": nome em referência ao Recozimento Simulado [Kirkpatrick et al., 1983], significa algum parâmetro função do número de iterações, portanto independente da convergência em si, apenas do tempo de execução;
 - Resolução: em algoritmos que são decodificados em cadeias binárias, a determinação do tamanho da "grade" do domínio de busca, e conseqüentemente da precisão da solução.

- Efeitos de contorno, ou seja, como o algoritmo lida com soluções que saem do domínio:
 - Penalidade: um valor adicionado à aptidão ou à função objetivo de forma a desqualificar aquela solução;
 - Morte: eliminação da solução;
 - Reflexão: interpreta o limite do domínio como uma parede, fazendo com que o excesso do vetor solução seja retornado para dentro do domínio;
 - "Horizonte de eventos": nome proveniente do Algoritmo de Buracos Negros [Hatamlou, 2013], traça um contorno em alguma região dentro do domínio, de forma que quando uma solução se aproxima demais da região delimitada, esta solução é modificada de algum modo.
- Critérios de seleção:
 - Critério de Metropolis: assume alguma probabilidade de que uma pior solução seja escolhida, permitindo que ela percorra caminhos improváveis em busca de soluções melhores;
 - Roleta: define-se a probabilidade de cada solução ser escolhida de acordo com algum critério (aptidão, por exemplo), e com o uso de um número aleatório (giro da roleta), escolhe uma das soluções;
 - Aleatório: escolhe alguma solução aleatoriamente. A aceitação dessa escolha, por sua vez, pode ou não depender de algum outro critério.

É difícil criar uma definição clara e específica dessas ferramentas, já que por diversas vezes elas são encontradas de forma combinada. Entretanto uma classificação vaga não é capaz de oferecer informações suficientes para a personalização de métodos já existentes ou o desenvolvimento de novos. O segredo (e a dificuldade) na utilização eficiente e no desenvolvimento desses métodos está no equilíbrio dessas ferramentas, de forma que sejam equilibradas explorações global e local sem que sejam comprometidos o resultado final e o esforço computacional.

Comparando as ferramentas citadas, foram escolhidos cinco algoritmos estocásticos, apresentados a seguir em ordem cronológica de publicação, com dinâmicas avaliadas como sendo de interesse a serem testadas no problema do modelo WMP correlacionado:

- **Algoritmo Genético** (ou GA, do inglês *Genetic Algorithm* [Holland, 1992]): um dos algoritmos mais tradicionais, foi escolhido para testar o uso de decodificação binária e suas ferramentas de mutação e cruzamento, além de perceber seus efeitos da escolha da resolução no seu resultado;
- **Otimização de Bactérias** (*Bacterial Foraging Optimization*, ou BFO [Passino, 2002]): o algoritmo pode ser considerado um híbrido entre busca aleatória e busca determinística, além de empregar uma dinâmica de atração-repulsão entre os indivíduos;
- **Otimização de Lobos Cinzentos** (*Grey Wolf Optimizer*, ou GWO [Mirjalili et al., 2014]): variante da Otimização por Enxame de Partículas (PSO) [Kennedy e Eberhart, 1995], movimenta os indivíduos sem levar em consideração a melhor solução já encontrada, apenas as melhores soluções daquela iteração. Além disso, possui apenas dois parâmetros a serem calibrados;
- **Algoritmo de Dente-de-Leão** (*Dandelion Algorithm*, ou DA [Li et al., 2017]): procura soluções aleatoriamente dentro de um raio de alcance, tendo um sistema de hierarquias que possibilita que soluções ruins (e teoricamente mais distantes do ponto ótimo) ajudem na busca global enquanto a melhor solução realiza a busca local;
- **Otimização de Manadas Egoístas** (*Selfish Herd Optimizer*, ou SHO [Fausto et al., 2017]): utiliza uma hierarquia complexa na definição dos movimentos, além de uma dinâmica de repulsão e atração diferente da Otimização de Bactérias, baseada no comportamento de manadas de presas e predadores.

A seguir são apresentados mais detalhes sobre cada um dos algoritmos selecionados.

2.2.1 Algoritmo Genético - GA

Algoritmos Genéticos são uma categoria de algoritmos de otimização que utilizam operadores baseados na dinâmica evolutiva da natureza. Cada solução candidata é interpretada como um código genético, ou cromossomo, que passa adiante secções próprias em operações de cruzamento e que eventualmente são modificadas randomicamente por operações de mutação. Com o decorrer das iterações, as melhores soluções são mantidas

e se reproduzem, conservando traços tidos como favoráveis para a resolução do problema. A Figura 2.2 traz o pseudocódigo do GA utilizado neste trabalho.

Algoritmo Genético

Definir parâmetros iniciais: l_{res} , N_{pop} , P_{mut} , η_{kill} e l_{cut} ;
 Gerar população inicial de pais;
 Gerar população inicial de filhos;
 Avaliar f_o para pais e filhos;
 Registrar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$;
Enquanto *condição de parada* == FALSO **faça**
 Calcular probabilidade de cruzamento das soluções P_{cross} ;
 Enquanto número de filhos < que número de mortes N_{kill} **faça**
 Selecionar dois indivíduos (pai e mãe) aleatoriamente de acordo com P_{cross} ;
 Se mãe == pai **então**
 Inicialização randômica de 2 filhos;
 Senão
 Selecionar pontos de corte;
 Gerar dois filhos trocando secções da cadeia binária a cada ponto de corte;
 Fim-se
 Adicionar filhos gerados ao grupo de novas soluções filhas;
 Fim-enquanto
 Para cada filho **faça**
 Se $r \leq P_{mut}$ **então**
 Selecionar elemento da cadeia binária aleatoriamente;
 Trocar elemento de 1 para 0 ou vice-versa;
 Fim-se
 Fim-para
 Avaliar f_o para os filhos;
 Registrar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$ caso haja melhoria;
 Substituir piores pais com novos filhos;
Fim-enquanto
 Retornar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$.
Fim

Figura 2.2 – Pseudocódigo do GA utilizado neste estudo.

O primeiro passo a ser realizado é a definição dos parâmetros do GA. O código descrito possui os seguintes parâmetros:

- **Resolução** (l_{res}): para converter a resposta real em uma cadeia binária é necessário definir um valor de resolução dessa cadeia. Quanto menor esse valor de resolução mais refinada é a busca, entretanto mais bits (e conseqüentemente mais memória) são necessários para decodificar a resposta. O número mínimo de bits necessários

para representar uma variável real em binário é calculado como:

$$N_{bits} \geq \log_2 \left(\frac{x^{(u)} - x^{(l)}}{l_{res}} + 1 \right) \quad (2.9)$$

onde N_{bits} é o número de bits, $x^{(u)}$ e $x^{(l)}$ são respectivamente os limites superior e inferior da variável x e l_{res} é a resolução a ser utilizada. O número total de bits para um indivíduo, portanto, é o somatório do número de bits para cada variável da solução. A resolução é um parâmetro crucial para encontrar um bom resultado principalmente em funções que tenham gradientes elevados. Se o valor de resolução for muito grande o algoritmo poderá perder informação relevante e facilmente "pular" por cima de mínimos em potencial. Já em funções com gradientes leves, esse parâmetro pode ser relaxado visando uma convergência mais rápida, para posteriormente ser realizada uma busca local, com uso de algum método determinístico ou não, para encontrar a resposta ideal.

- **População** (N_{pop}): é o número de indivíduos presentes a cada iteração do algoritmo. Um número de indivíduos elevado representa uma maior busca global, mas pode também representar um número maior de avaliações desnecessárias de f_o , aumentando o tempo necessário para convergência. Uma população pequena demais, por sua vez, pode acelerar a convergência mas faz com que o algoritmo corra o risco de prender-se em um mínimo local.
- **Probabilidade de mutação** (P_{mut}): probabilidade de que um dos filhos sofra mutação de um elemento em sua cadeia binária. Uma maior probabilidade de mutação aumenta a aleatoriedade do algoritmo, mas evita parcialmente que os filhos herdem características exatas dos seus pais.
- **Fração de mortes** (η_{kill}): porcentagem de pais a serem eliminados por iteração, e indiretamente, quantidade de filhos a serem produzidos para substituí-los. Ao mesmo tempo que mais mortes faz com que seja aumentada a aleatoriedade evitando que uma quantidade grande de características seja mantida, quando elevada demais pode fazer com que poucas características sejam exploradas nas gerações seguintes, prejudicando a busca.
- **Comprimento médio de corte** (\bar{l}_{cut}): esse parâmetro se resume posteriormente no número máximo de cortes a serem feitos no cromossomo do indivíduo durante o

evento de cruzamento. Um comprimento longo significa que serão realizados menos cortes, portanto reduzindo a aleatoriedade do algoritmo.

A partir desses parâmetros definidos pelo usuário são calculados outros parâmetros necessários do algoritmo: quantidade de filhos (que será igual à quantidade de indivíduos eliminados N_{kill}), número máximo de cortes ($N_{cut,max}$) e número de cruzamentos (N_{cross}). Além disso, também são inicializados aleatoriamente todos os indivíduos para a primeira iteração (pais e filhos), avaliada f_o para cada um deles e registrada a melhor solução inicial $f_{o,best}$.

Ao prosseguir para o laço, é determinada uma condição de parada, que pode variar de problema para problema. Enquanto essa condição não for atendida, o algoritmo repete o procedimento dentro do laço indeterminadamente.

A primeira ação dentro do laço principal é a determinação da probabilidade de cruzamento P_{cross} , com base nos valores de f_o . Para um problema de minimização é necessária a definição de um valor de aptidão, ou *fitness*, (fit) para que o menor valor de f_o tenha a maior aptidão. Já em um problema de maximização, o próprio valor de f_o pode ser utilizado. No presente estudo, as probabilidades são calculadas de acordo com as seguintes equações:

$$fit_i = \frac{f_{o,max}^\kappa - f_{o,i}^\kappa}{f_{o,max}^\kappa - f_{o,min}^\kappa} \quad (2.10a)$$

$$P_{cross,i} = \frac{fit_i}{\sum_{j=1}^{N_{pop}} fit_j} \quad (2.10b)$$

onde fit_i se refere à aptidão do indivíduo i , $f_{o,max}^\kappa$ e $f_{o,min}^\kappa$ aos valores de f_o máximo e mínimo na iteração κ respectivamente, $f_{o,i}^\kappa$ é o valor de f_o do indivíduo i na iteração κ e $P_{cross,i}$ é a probabilidade de cruzamento do indivíduo i . Observando a Eq. 2.10b, percebe-se que a soma das $P_{cross,i}$ de todos os indivíduos é igual à unidade. Isso facilita a seleção desses indivíduos na operação de cruzamento, que é feita pelo método de roleta: os valores de $P_{cross,i}$ são interpretados como setores de uma roleta, e um número aleatório r , com distribuição uniforme entre 0 e 1, é utilizado para definir em qual desses setores o ponteiro da roleta parou. Indivíduos com valores maiores de P_{cross} ocupam uma área maior da roleta, portanto sendo mais facilmente escolhidos.

Após a escolha dos dois pais, é feito o cruzamento. Caso os dois pais sejam iguais, são gerados dois filhos aleatoriamente, já que pelo modo padrão os filhos seriam cópias idênticas. Isso pode ocorrer frequentemente quando um dos indivíduos tem uma probabi-

idade muito maior de ser escolhido que os demais, sendo escolhido duas vezes, ou quando a população não possui muita variabilidade genética, podendo ter vários indivíduos iguais. Caso os pais escolhidos sejam diferentes, o cruzamento ocorre de modo padrão. É definido o número de cortes a serem realizados, sendo o mínimo 1. Depois são definidos aleatoriamente os pontos de corte na extensão do cromossomo. Os códigos dos filhos são então gerados de forma que todas as secções entre pontos de corte são trocadas entre si. A Figura 2.3 ilustra um cruzamento em cromossomos com $N_{bits} = 15$ e $N_{cut} = 3$.

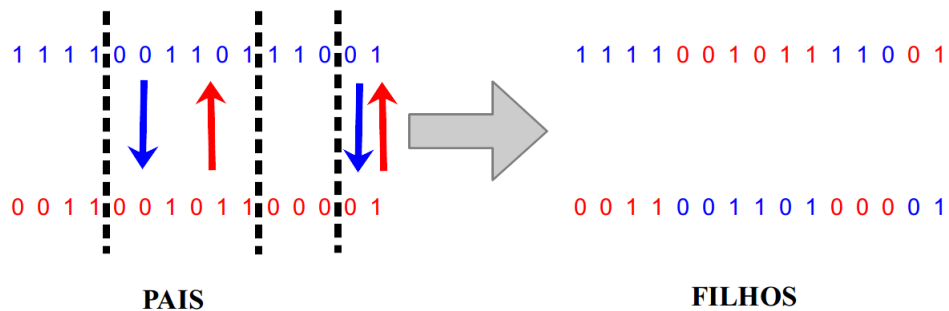


Figura 2.3 – Ilustração de operação de cruzamento entre dois cromossomos.

Depois de terminada uma operação, os filhos gerados são armazenados e novos pais são selecionados, recomeçando a operação até que a quantidade necessária de filhos seja atingida.

Depois é executada a operação de mutação. Para cada filho, é definido um número aleatório com distribuição de probabilidade uniforme r . Caso r seja menor que a probabilidade de mutação, é escolhido aleatoriamente um gene do cromossomo, o qual será invertido: se for 1, se tornará 0, e vice-versa.

Apenas depois de concluídas essas etapas são avaliados os valores de f_o dos filhos, os quais substituirão os piores pais da geração anterior. Se a condição de parada não for cumprida, o laço principal é recomeçado. Ao final, o algoritmo deve retornar a melhor solução de todas as avaliadas durante o processamento.

2.2.2 Otimização de Bactérias - BFO

O BFO é baseado na busca de nutrientes pela bactéria *E. coli*. Essa bactéria faz uma busca local em todas as direções para identificar uma direção que possa oferecer mais nutrientes. Ao encontrar uma direção com gradiente positivo, ela nada naquela direção

até que a quantidade de comida deixe de aumentar. Esse comportamento é semelhante à aplicação de um Gradiente Descendente, que, aliado a outras ferramentas, torna o algoritmo híbrido por definição. Para permitir a comparação entre métodos, o algoritmo original apresentado por Passino, 2002, foi ligeiramente modificado. A Figura 2.4 descreve o pseudocódigo do BFO utilizado neste estudo.

Assim como no algoritmo anterior, o primeiro passo é definir os parâmetros dados pelo usuário, considerados os seguintes:

- **População** (N_{pop}): número de indivíduos no espaço de busca, com os mesmos prós e contras descritos no GA.
- **Tamanho do passo** (l_{step}): tamanho do passo que cada indivíduo dá nos eventos quimiotáticos. Pode-se fazer uma analogia com a resolução do GA: um passo grande pode fazer com que o indivíduo pule eventuais mínimos em funções com grandes gradientes. Um passo pequeno, no entanto, prejudica a exploração e a convergência.
- **Número máximo de passos** ($N_{step,max}$): máximo número de passos que serão dados no evento quimiotático. Um número grande demais diminuirá a aleatoriedade e pode fazer com que as bactérias fiquem presas em mínimos locais. Um número pequeno pode não permitir o encontro de mínimos, deixando o algoritmo aleatório demais e interrompendo o nado da bactéria prematuramente.
- **Número de eventos de reprodução** (N_{rep}): vezes que as melhores bactérias serão duplicadas, gerando cópias idênticas que substituirão os piores indivíduos. Mais eventos como esse significa uma melhor busca local; menos, uma melhor busca global.
- **Número de eventos de dispersão** (N_{disp}): vezes que bactérias poderão ser transportadas para um ponto aleatório do espaço de busca. Quanto mais vezes, mais aleatório se torna o algoritmo, podendo prejudicar a busca local. Do contrário, menos vezes torna o algoritmo quase que puramente determinístico.
- **Probabilidade de dispersão** (P_{disp}): probabilidade de uma bactéria seja dispersada no espaço de busca. Maiores probabilidades aumentam a aleatoriedade.
- **Intensidade da atração/repulsão** (I_a, I_r): esses dois parâmetros definem o quão

Otimização de Bactérias

Definir parâmetros iniciais: N_{pop} , l_{step} , $N_{steps,max}$, N_{rep} , N_{disp} , P_{disp} , I_a , I_r , R_a e R_r ;
 Gerar população inicial;
 Calcular sinalização entre bactérias, S .
 Avaliar f_o para população;
 Calcular função objetivo sinalizada, $f_{o,s} = f_o + S$.
 Registrar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$;
Enquanto *condição de parada* == FALSO **faça**
 Para cada indivíduo **faça**
 Enquanto passos < $N_{steps,max}$ **e**
 nova $F_{o,s}$ pior que antiga $F_{o,s}$ **faça**
 Gerar um vetor direção aleatório $\hat{\mathbf{r}}$ e dar um passo naquele sentido;
 Calcular S , f_o e $f_{o,s}$;
 Fim-enquanto
 Enquanto passos < $N_{steps,max}$ **e**
 nova $f_{o,s}$ melhor que antiga $f_{o,s}$ **faça**
 Dar um passo no sentido determinado.
 Calcular S , f_o e $F_{o,s}$;
 Fim-enquanto
 Fim-para
 Registrar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$;
 Se *condição para reprodução* == VERDADEIRO **faça**
 Duplicar melhores indivíduos e substituir metade pior da população com as duplicatas.
 Fim-se
 Se *condição para dispersão* == VERDADEIRO **faça**
 Para cada indivíduo **faça**
 Se $r < P_{disp}$ **faça**
 Substituir o indivíduo por outro gerado aleatoriamente.
 Fim-se
 Fim-para
 Fim-se
 Calcular S , f_o e $f_{o,s}$;
 Registrar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$;
Fim-enquanto
 Retornar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$.
Fim

Figura 2.4 – Pseudocódigo do BFO utilizado neste estudo.

fortemente os indivíduos são atraídos e repelidos uns pelos outros. É um multiplicador do sinal recebido do restante da população.

- **Alcance da atração/repulsão** (R_a , R_r): representam o quão distante uma bactéria pode perceber a presença de outra e ser atraída e repelida por ela. O sinal

diminui de intensidade exponencialmente à medida que os indivíduos se afastam. Esses parâmetros controlam o quão rápido esse sinal decai com a distância.

Depois de definidos os parâmetros, a população é inicializada randomicamente. São calculados f_o e o sinal S que cada bactéria recebe do restante da população. Para um problema de minimização, S é calculado com a seguinte expressão:

$$S_i = \sum_{j \neq i} -I_a \exp \left[-R_a \sum_{k=1}^{N_{var}} (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{j,k})^2 \right] + I_r \exp \left[-R_r \sum_{k=1}^{N_{var}} (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{j,k})^2 \right] \quad (2.11)$$

onde S_i é o sinal correspondente ao indivíduo i e $\mathbf{x}_{j,k}$ é a posição do indivíduo j na dimensão k . O sinal S é portanto um escalar que posteriormente é adicionado à f_o , controlando o distanciamento entre indivíduos e dessa forma regulando o balanço entre busca global e busca local. Caso todos os valores de intensidade I e alcance R sejam iguais para atração e repulsão, o sinal é anulado, e o indivíduo não é afetado pela presença de outras bactérias no espaço. Parâmetros maiores de repulsão tendem a afastar os indivíduos, aumentando a busca global e buscando distribuí-los mais uniformemente no espaço. Já uma maior atração tende a concentrá-los em um ponto do domínio.

Prosseguindo para o laço principal, o algoritmo realiza o evento quimiotático, ou seja, a procura por nutriente de cada indivíduo. A primeira ação é chamada tombamento (originalmente *tumble*), quando a bactéria analisa o espaço no entorno para identificar em qual direção o gradiente de nutrientes é positivo. Para isso é gerado um vetor unitário aleatório $\hat{\mathbf{r}}$ no espaço de busca, pela seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \quad (2.12)$$

onde \mathbf{r} é um vetor aleatório com N_{var} componentes. O indivíduo então dá um passo de tamanho definido pelo usuário nesse sentido, e avalia se houve melhora em $f_{o,s}$. Se não, é gerado outro $\hat{\mathbf{r}}$ e realizado novo teste. Se sim, a bactéria realiza um nado (do original *swim*) nessa direção até que o gradiente se torne desfavorável ou que o número máximo de passos seja atingido.

Depois de realizados os eventos quimiotáticos para todas as bactérias, é conferida a condição para a realização do evento de reprodução. Nesse evento, a metade da população que apresenta os piores valores de f_o é eliminada e substituída por duplicatas do restante. Esse evento faz com que a exploração local seja intensificada nos melhores pontos naquele momento. Nessa situação é importante o balanço entre atração e repulsão, para que as

bactérias novas se afastem e evitem ficarem presas em mínimos locais.

Depois é avaliada a condição para a realização do evento de dispersão. Nesse evento é jogado um dado (um número randômico entre 0 e 1) e caso o resultado seja menor que a probabilidade de dispersão o indivíduo sendo avaliado é "lançado" para outro ponto do domínio, ou seja, reinicializado aleatoriamente. O evento de dispersão aumenta consideravelmente a aleatoriedade do algoritmo, já que a bactéria pode cair em qualquer outro ponto do domínio e que não depende de qualquer valor relacionado ao desempenho do indivíduo (f_o , por exemplo).

Realizados os três eventos, são recalculados f_o , S e $f_{o,s}$ para as novas posições da população, e o laço é recomeçado caso a condição de parada não seja atendida. Ao final, o melhor resultado é retornado.

2.2.3 Otimização de Lobos Cinzentos - GWO

O GWO é uma variante da Otimização por Enxame de Partículas, PSO, que leva em consideração apenas as três melhores soluções da população naquela iteração, diferentemente do PSO canônico, o qual considera tanto a melhor solução de todas quanto a melhor solução encontrada por cada partícula no decorrer da execução. Para isso o GWO define uma hierarquia como a observada nas alcateias. São definidos os lobos alfa, beta e delta, ou \mathbf{x}_α , \mathbf{x}_β e \mathbf{x}_δ , com a primeira, segunda e terceira melhores soluções respectivamente. Os outros lobos são definidos como omega, ou \mathbf{x}_ω , e não têm influência na movimentação dos outros indivíduos. A analogia por trás dessa metodologia é que, nas dinâmicas sociais de uma alcateia, os líderes são os que guiam o restante na movimentação da caça por serem aqueles que tem mais informações sobre a localização da presa.

O GWO tem como uma das vantagens a grande simplicidade em sua programação e poucos parâmetros a serem definidos pelo usuário, o que torna fácil seu controle. O pseudocódigo do GWO é exibido na Figura 2.5.

Os parâmetros iniciais a serem definidos pelo usuário são:

- **População** (N_{pop}): número de indivíduos na alcateia.
- **Tamanho máximo do passo** ($l_{step,max}$): tamanho máximo do passo dado pela alcateia na movimentação. Um passo muito grande pode prejudicar a identificação de um mínimo; um passo pequeno prejudica a busca global.

Otimização de Lobos Cinzentos

Definir parâmetros iniciais: N_{pop} e $l_{step,max}$;

Gerar população inicial;

Avaliar f_o para população;

Registrar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$;

Enquanto *condição de parada* == FALSO **faça**

Identificar \mathbf{x}_α , \mathbf{x}_β e \mathbf{x}_δ ;

Movimentar a alcateia de acordo com os líderes;

Avaliar f_o ;

Registrar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$ se houver melhoria;

Fim-enquanto

Retornar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$.

Fim

Figura 2.5 – Pseudocódigo do GWO utilizado neste estudo.

No início do algoritmo são definidos os parâmetros, inicializada a população aleatoriamente e avaliada f_o . Ao iniciar o laço principal, são definidos os líderes \mathbf{x}_α , \mathbf{x}_β e \mathbf{x}_δ e movimentada a alcateia de acordo com o seguinte equacionamento:

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{x}_j - \left[l_{step,max} \left(1 - \frac{n_{ev}}{N_{ev}} \right) \| l_{step,max} \mathbf{r} \circ \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \| \right] (2\mathbf{r} - 1) \quad (2.13)$$

onde n_{ev} é o número de avaliações de f_o até o momento, N_{ev} é o número máximo de avaliações de f_o , \mathbf{r} é um vetor randômico com componentes entre 0 e 1, \mathbf{x}_j é a posição de um dos líderes no espaço de busca e \mathbf{x}_i é a posição do indivíduo a ser movimentado. Para cada indivíduo, são calculadas \mathbf{v}_j referentes a cada líder, ou seja, \mathbf{v}_α , \mathbf{v}_β e \mathbf{v}_δ . A nova posição é a média dessas três posições:

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \frac{\mathbf{v}_\alpha + \mathbf{v}_\beta + \mathbf{v}_\delta}{3} \quad (2.14)$$

Depois que toda a alcateia tem sua posição atualizada, os valores de f_o são novamente avaliados e é registrada uma eventual melhoria. Se a condição de parada não for satisfeita, o laço é reiniciado. Caso contrário, é retornada a melhor solução.

2.2.4 Algoritmo de Dente-de-Leão - DA

O DA se baseia na dispersão de sementes pelo dente-de-leão. O algoritmo define raios de alcance para o dente-de-leão núcleo (que apresenta o melhor resultado até o momento) e para os dentes-de-leão assistentes (escolhidos entre os restantes das sementes da

iteração anterior). Dentro desses raios são geradas sementes aleatoriamente. O encontro ou não de melhores respostas faz variar o alcance, refinando mais ou menos a busca de acordo com o andamento. O pseudocódigo do DA utilizado nesse estudo é apresentado na Figura 2.6.

Algoritmo de Dente-de-Leão

Definir parâmetros iniciais: N_{pop} , $N_{seeds,max}$, $N_{seeds,min}$, N_{mut} , α_w e α_g ;
 Gerar população inicial de flores e sementes;
 Inicializar raio de semeadura R_i ;
 Avaliar f_o para dentes-de-leão e sementes;
 Registrar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$;
Enquanto *condição de parada* == FALSO **faça**
 Escolher dentes-de-leão núcleo e assistentes;
 Definir $N_{seeds,i}$ para cada indivíduo;
 Atualizar R_i ;
 Gerar novas sementes;
 Avaliar f_o para as sementes;
 Registrar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$ caso haja melhoria;
Fim-enquanto
 Retornar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$.
Fim

Figura 2.6 – Pseudocódigo do DA utilizado neste estudo.

Os parâmetros necessários para a execução do DA são os seguintes:

- **População** (N_{pop}): número total de dentes-de-leão (núcleo + assistentes) a serem preservados para a próxima geração. Maior N_{pop} implica numa maior busca global, mas pode prejudicar o tempo de convergência.
- **Número de sementes máximo e mínimo** ($N_{seeds,max}$ e $N_{seeds,min}$): limites máximo e mínimo do número de novas soluções que os dentes-de-leão podem gerar. Mais sementes realiza uma busca local maior, mas prejudica tempo de convergência.
- **Número de mutações** (N_{mut}): modo diferenciado de geração de sementes.
- **Fatores de murchamento e crescimento** (α_w e α_g): multiplicadores para alteração do raio de alcance. Um murchamento muito rápido pode fazer com que o algoritmo fique preso em um mínimo local. Um crescimento elevado pode fazer com que ele nunca convirja.

Depois de definidos esses parâmetros, são inicializadas as populações de dentes-de-leão e de sementes, e avaliada f_o para cada solução candidata. Também são inicializados os raios de busca R_i como tendo a dimensão do domínio de busca ($x^{(u)} - x^{(l)}$ para cada variável x).

No laço principal, são escolhidas o dente-de-leão núcleo \mathbf{x}_{CD} (aquele que apresenta a melhor f_o) e os dentes-de-leão assistentes. O método utilizado é o método de roleta, já descrito na subseção 2.2.1, sendo a probabilidade $P_{sel,i}$ de escolha do indivíduo i para a próxima geração dada pela expressão:

$$P_{sel,i} = \frac{|f_{o,i} - \bar{f}_o|}{\sum_{j=1}^{N_{pop}} f_{o,j}} \quad (2.15)$$

onde $f_{o,i}$ é a função objetivo do indivíduo i e \bar{f}_o é a média das funções objetivo de todos os indivíduos daquela geração (dentes-de-leão e sementes). Essa expressão faz com que as melhores e as piores soluções daquela geração tenham a mesma chance de serem escolhidas. Teoricamente, piores soluções se encontram mais afastadas de \mathbf{x}_{CD} , o que faz com que a região de busca seja aumentada. Um possível "desperdício" de avaliações de f_o é evitado na definição do número de sementes para cada dente-de-leão. O número de sementes $N_{seeds,i}$ do indivíduo i é definido como:

$$N_{seeds,i} = \frac{f_{o,max} - f_{o,i}}{f_{o,max} - f_{o,min}} N_{seeds,max} \quad (2.16)$$

onde $N_{seeds,max}$ é o limite máximo de sementes. Dessa forma \mathbf{x}_{CD} sempre terá o máximo de sementes possível. Se o número mínimo de sementes for violado, $N_{seeds,i}$ é redefinido como $N_{seeds,i} = N_{seeds,min}$.

O raio de busca é então corrigido. Se for registrada melhoria na f_o , o que significa dizer que houve uma mudança de posição de \mathbf{x}_{CD} , seu raio R_{CD} é aumentado por um fator de crescimento α_g . Do contrário, R_{CD} é reduzido em um fator de murchamento α_w com o objetivo de refinar a busca no local. O ajuste é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} R_{CD}^{\kappa+1} = \alpha_g R_{CD}^{\kappa} & \text{se } f_{o,best}^{\kappa+1} \neq f_{o,best}^{\kappa} \\ R_{CD}^{\kappa+1} = \alpha_w R_{CD}^{\kappa} & \text{se } f_{o,best}^{\kappa+1} = f_{o,best}^{\kappa} \end{cases} \quad (2.17)$$

onde R_{CD}^{κ} é o raio de \mathbf{x}_{CD} na iteração κ e $f_{o,best}^{\kappa}$ é a melhor solução registrada pelo

algoritmo até a iteração κ . Para os dentes-de-leão assistentes, os raios são definidos como:

$$R_i^{\kappa+1} = \frac{n_{ev}}{N_{ev}} R_i^\kappa + (\|\mathbf{x}_{CD}\|_\infty - \|\mathbf{x}_i\|_\infty) \quad (2.18)$$

onde R_i^k é o raio do dente-de-leão i na iteração κ , n_{ev} é o número de avaliações de f_o até o momento, N_{ev} é o número máximo de avaliações de f_o , e $\|\mathbf{x}_i\|_\infty$ é a norma do supremo da solução i , isso é, o módulo do maior componente de \mathbf{x}_i .

Novas sementes são então geradas para a próxima geração. Na semeadura normal, as sementes são geradas aleatoriamente dentro do raio de alcance de cada dente-de-leão definido anteriormente, na quantidade também determinada anteriormente. Já na semeadura com mutação, \mathbf{x}_{CD} é modificado para gerar novas sementes, de acordo com as seguintes equações:

$$\Delta \mathbf{x} = \ell \circ \text{sgn}(\mathbf{r} - 0.5) \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{x}_{mut} = \mathbf{x}_{CD} + \Delta \mathbf{x} \quad (2.19b)$$

onde $\Delta \mathbf{x}$ é o vetor de valores a serem adicionados, \mathbf{r} é um vetor randômico de distribuição uniforme entre 0 e 1, $\text{sgn}()$ denomina a função sinal e \mathbf{x}_{mut} é a semente resultante. O vetor ℓ é um vetor aleatório obedecendo a distribuição de Lévy, dada por:

$$P(\ell) = \sqrt{\frac{\nu_2}{2\pi}} \frac{1}{(\ell - \nu_1)^{3/2}} \exp \left[-\frac{\nu_2}{2(\ell - \nu_1)} \right] \quad (2.20)$$

onde ν_1 e ν_2 são as constantes de escala e posição, respectivamente. Neste trabalho foram utilizados os valores $\nu_1 = 1$ e $\nu_2 = 0, 1$, definidos empiricamente.

Depois de definidas todas as sementes, f_o é avaliada para cada uma delas, e sua eventual melhoria de $f_{o,best}$ é registrada. Caso não tenha sido atendida a condição de parada, o laço principal é reiniciado. Se a condição for atendida, o laço é interrompido e o algoritmo retorna a melhor solução encontrada.

2.2.5 Otimização de Manadas Egoístas - SHO

A SHO é um método baseado na interação entre presas e predadores em seu *habitat* natural. As movimentações obedecem um sistema hierárquico, definindo líderes e subordinados, seguidores e desertores, de acordo com aptidões baseadas na f_o analisada. Apesar dos poucos parâmetros a serem definidos pelo usuário, o funcionamento do algoritmo é complexo, com necessidade de recalcular algumas variáveis ao longo de cada iteração. A

Figura 2.7 traz o pseudocódigo do método utilizado neste estudo.

Otimização de Manadas Egoístas

Definir parâmetros iniciais: N_{pop} , η_{pred} e R_{att} ;
 Gerar população inicial de presas e predadores;
 Avaliar f_o para presas e predadores;
 Registrar \mathbf{x}_{best} , $f_{o,best}$ e $f_{o,worst}$;
Enquanto *condição de parada* == FALSO **faça**
 Calcular valor de sobrevivência SV para toda a população;
 Calcular posições \mathbf{h}_{safe} e \mathbf{p}_{safe} ;
 Avaliar f_o para \mathbf{h}_{safe} e \mathbf{p}_{safe} ;
 Registrar \mathbf{x}_{best} , $f_{o,best}$ e $f_{o,worst}$ caso haja mudança;
 Recalcular SV ;
 Calcular atratividade ω de cada presa para cada predador;
 Selecionar presas a serem mortas e eliminar selecionadas;
 Restaurar população por meio de cruzamentos;
 Avaliar f_o para as novas presas;
 Registrar \mathbf{x}_{best} , $f_{o,best}$ e $f_{o,worst}$ caso haja mudança;
 Recalcular SV ;
 Definir comportamento da manada;
 Definir vizinhos de cada presa;
 Movimentar presas e predadores;
 Avaliar f_o para presas e predadores na nova posição;
 Registrar \mathbf{x}_{best} , $f_{o,best}$ e $f_{o,worst}$ caso haja mudança;
Fim-enquanto
 Retornar \mathbf{x}_{best} e $f_{o,best}$.
Fim

Figura 2.7 – Pseudocódigo do SHO utilizado neste estudo.

Assim como para os outros algoritmos, deve-se definir primeiramente os parâmetros de entrada dados pelo usuário. São eles:

- **População** (N_{pop}): número total de indivíduos no espaço de busca (presas e predadores);
- **Fração de predadores** (η_{pred}): porcentagem de predadores na população total. Mais predadores pode aumentar a rotatividade da população, eliminando e reiniciando mais presas a cada iteração. Mas essa aleatoriedade maior pode prejudicar o tempo de convergência, por exemplo.
- **Raio de ataque** (R_{att}): raio de alcance dos predadores. Quanto maior for o raio, mais provável é que uma presa seja morta, aumentando assim a aleatoriedade do algoritmo.

A partir desses valores, são calculados o número de presas e predadores e inicializados os dois grupos. Os valores de f_o para cada um deles são avaliados e são registrados o melhor e o pior desses.

Prosseguindo para o laço principal, é calculado o valor de sobrevivência SV para cada indivíduo i da população, tanto presas como predadores. Esse valor é calculado da seguinte maneira:

$$SV_i = \frac{f_{o,i} - f_{o,worst}}{f_{o,best} - f_{o,worst}} \quad (2.21)$$

onde $f_{o,worst}$ e $f_{o,best}$ são o pior e o melhor valor de f_o encontrados durante toda a execução. Essa função mostra que é necessário um cuidado especial ao definir mecânicas de punição para a função objetivo: punições acentuadas podem gerar gradientes altos na topologia da função, provocando uma discrepância de valores (f_o muito alto ou muito baixo, mas sem valores intermediários) que distorce SV .

Com o uso de SV são calculados os pontos mais seguros, \mathbf{h}_{safe} e \mathbf{p}_{safe} para presas e predadores, respectivamente. O cálculo é feito da mesma forma para ambos os grupos, de acordo com a seguinte equação:

$$\mathbf{x}_{safe} = \frac{\sum_{i=1}^{N_x} \mathbf{x}_i SV_i}{\sum_{i=1}^{N_x} SV_i} \quad (2.22)$$

onde N_x é o número de indivíduos no grupo x . Como \mathbf{h}_{safe} e \mathbf{p}_{safe} também são pontos no espaço, também são avaliados os valores de f_o correspondentes e são recalculados SV , inclusive para \mathbf{h}_{safe} e \mathbf{p}_{safe} .

Em seguida é calculada a atratividade $\omega_{i,j}$ de cada presa i em relação a cada predador j , segundo a Equação 2.23:

$$\omega_{i,j} = (1 - SV_i)e^{-\|\mathbf{h}_i - \mathbf{p}_j\|^2} \quad (2.23)$$

A partir desses valores, para cada predador j é calculada a probabilidade $P_{att,i,j}$ de uma determinada presa i ser atacada, sendo:

$$P_{att,i,j} = \frac{\omega_{i,j}}{\sum_{i=1}^{N_h} \omega_{i,j}} \left| \|\mathbf{h}_i - \mathbf{p}_j\| \leq R \wedge SV_i < SV_j \right. \quad (2.24)$$

onde R_{att} é o raio de ataque definido pelo usuário. Segundo essa expressão, são apenas consideradas as atratividades daquelas presas que se encontram dentro do raio de alcance do predador j e que apresentam SV menor que a dele. Todas as outras que se encontram longe demais e/ou mais aptas são impossíveis de serem eliminadas nessa iteração. A

seleção de quais presas serão mortas é feita por sistema de roleta, como descrito em outros algoritmos. Nesse estudo foi considerada a possibilidade de dois predadores selecionarem a mesma presa, possibilitando um número variável de mortes ao longo da execução.

Depois de eliminadas as presas selecionadas, ocorre a fase de restauração. Primeiro é definida uma probabilidade de seleção $P_{sel,i}$ de uma determinada presa para contribuir para a próxima geração:

$$P_{sel,i} = \frac{SV_i}{\sum_{i=1}^{N_h} SV_i} \quad (2.25)$$

Pelo método de roleta, são definidos os indivíduos que contribuirão para cada componente do novo vetor separadamente, e aleatoriamente é definido qual componente do pai será transmitido ao filho. Dessa forma podem ser misturados valores de componentes diferentes, aumentando a aleatoriedade da geração (o valor armazenado no componente x_1 do pai pode ser transmitido para o componente x_5 do filho, por exemplo). Depois de gerados todos os filhos, esses substituem os espaços deixados pelas presas eliminadas anteriormente. Novamente os valores de f_o são avaliados, registradas quaisquer eventuais mudanças no melhor e no pior valores e recalculados os valores de SV para presas, predadores e pontos seguros.

A última operação a ser realizada é a movimentação dos indivíduos. Para isso, primeiro é definida uma hierarquia da manada: a presa que apresenta maior valor de SV é definida como líder. A movimentação do líder segue as seguintes equações:

$$\text{se } SV_{leader} = 1 \begin{cases} \psi = -SV_{p,safe} e^{-\|\mathbf{h}_{leader}^\kappa - \mathbf{p}_{safe}^\kappa\|^2} \\ \mathbf{h}_{leader}^{\kappa+1} = \mathbf{h}_{leader}^\kappa + 2r\psi(\mathbf{p}_{safe}^\kappa - \mathbf{h}_{leader}^\kappa) \end{cases} \quad (2.26a)$$

$$\text{se } SV_{leader} < 1 \begin{cases} \psi = e^{-\|\mathbf{h}_{leader}^\kappa - \mathbf{x}_{best}\|^2} \\ \mathbf{h}_{leader}^{\kappa+1} = \mathbf{h}_{leader}^\kappa + 2r\psi(\mathbf{x}_{best} - \mathbf{h}_{leader}^\kappa) \end{cases} \quad (2.26b)$$

onde r é um número aleatório entre 0 e 1. As condições descritas estabelecem que, se o líder se encontra na melhor solução registrada ele se deslocará em direção oposta a \mathbf{p}_{safe} . Caso contrário, ele buscará a direção de \mathbf{x}_{best} , que lhe oferecerá maior aptidão e consequentemente maiores chances de sobrevivência.

As demais presas são divididas em desertoras e seguidoras. As desertoras são aquelas que apresentam SV menor que um número aleatório r . Essas se movimentam de

acordo com a Equação 2.27:

$$\begin{cases} \psi = SV_{h,safe} e^{-\|\mathbf{h}_i^\kappa - \mathbf{x}_{best}\|^2} \\ \mathbf{h}_i^{\kappa+1} = \mathbf{h}_i^\kappa + 2r\psi(\mathbf{x}_{best} - \mathbf{h}_i^\kappa) + 2r(1 - SV_i)\hat{\mathbf{r}} \end{cases} \quad (2.27)$$

onde $\hat{\mathbf{r}}$ é um vetor aleatório unitário. Essas presas tendem a buscar sozinhas \mathbf{x}_{best} , independentemente do comportamento da manada, somando adicionalmente um componente aleatório na sua movimentação.

As seguidoras subdividem-se entre dominantes e subordinadas. As dominantes são aquelas que possuem $SV > \overline{SV}$, sendo \overline{SV} é o valor médio de SV entre as presas, e tendem a seguir tanto o líder da manada quanto o seu vizinho mais próximo. Sua movimentação é dada pela Equação 2.28:

$$\begin{cases} \psi_{leader} = SV_{leader} e^{-\|\mathbf{h}_i^\kappa - \mathbf{h}_{leader}\|^2} \\ \psi_{neighbour} = SV_{neighbour} e^{-\|\mathbf{h}_i^\kappa - \mathbf{h}_{neighbour}^\kappa\|^2} \\ \mathbf{h}_i^{\kappa+1} = \mathbf{h}_i^\kappa + 2r\psi_{leader}(\mathbf{h}_{leader}^\kappa - \mathbf{h}_i^\kappa) + 2r\psi_{neighbour}(\mathbf{h}_{neighbour}^\kappa - \mathbf{h}_i^\kappa) \end{cases} \quad (2.28)$$

As restantes são consideradas subordinadas, as quais simplesmente seguem a manada em direção a \mathbf{h}_{safe} , como demonstra a Equação 2.29:

$$\begin{cases} \psi = SV_{h,safe} e^{-\|\mathbf{h}_i^\kappa - \mathbf{h}_{safe}\|^2} \\ \mathbf{h}_i^{\kappa+1} = \mathbf{h}_i^\kappa + 2r\psi(\mathbf{h}_{safe}^\kappa - \mathbf{h}_i^\kappa) \end{cases} \quad (2.29)$$

Restando a movimentação dos predadores, esses têm suas posições atualizadas de acordo com a atratividade das presas em relação a cada um deles. Cada predador escolhe uma presa a ser perseguida, de acordo com o método da roleta, seguindo as probabilidades dadas pela Equação 2.25, entretanto sem obedecer a condição dada anteriormente (ou seja, considerando todas as presas). A movimentação do predador j ao perseguir a presa i é dada pela Equação 2.30:

$$\mathbf{p}_j^{k+1} = \mathbf{p}_j^k + 2r(\mathbf{h}_i - \mathbf{p}_j^k) \quad (2.30)$$

É importante notar que, sempre que a variável aleatória r for exibida em qualquer uma das equações citadas neste estudo ela é definida novamente. Na Equação 2.28, por exemplo, que contém dois r , cada um deles pode assumir um valor diferente.

Depois de movimentados todos os indivíduos, f_o é avaliada novamente para cada

um deles, são registradas eventuais mudanças em $f_{o,best}$ e $f_{o,worst}$ e o laço é reiniciado. Quando a condição de parada for atendida, o laço é interrompido e o algoritmo retorna \mathbf{x}_{best} .

2.3 Planejamento de Experimentos

Para estimar quais valores seriam os melhores a serem atribuídos aos parâmetros descritos em cada um dos cinco algoritmos, foi utilizada a metodologia de Planejamento de Experimentos (ou DoE, do inglês *Design of Experiments*) descrita nesta seção.

O DoE é uma técnica para definir como variar os parâmetros a serem analisados no experimento em questão e como avaliar a importância de cada um deles no resultado observado. Existem diversos métodos que podem ser aplicados, sendo utilizados especificamente neste trabalho dois deles: o experimento fatorial 3^K completo e o experimento Box-Behnken.

O primeiro passo para se utilizar o DoE é definir quais são os parâmetros do experimento a serem variados, quantos níveis variá-los e quais os valores de cada nível. Dependendo do planejamento aplicado, diferentes combinações desses valores serão testadas: um experimento fatorial 2^K completo, por exemplo, testa todas as combinações dos valores máximo (1) e mínimo (-1) de cada parâmetro (2 se refere ao número de níveis e K se refere ao número de parâmetros a serem testados). Já um experimento fatorial 3^K completo, utilizado neste trabalho, testa todas as combinações dos valores máximo (1), mínimo (-1) e médio (0) de cada parâmetro. É notável que, à medida que o número de parâmetros cresce, o número de testes N_{test} a serem realizados é aumentado exponencialmente, o que torna esse modelo inviável para planejar a experimentação de fenômenos que envolvem muitos parâmetros.

Com o objetivo de reduzir o número de testes a uma quantidade viável, foram sugeridos alguns modelos fatoriais incompletos. Um deles é o chamado planejamento Box-Behnken [Box e Behnken, 1960], que busca preservar algumas vantagens do modelo fatorial completo (como a propriedade de rotabilidade, ou seja, que a curva de ajuste tenha uma variância estável nas fronteiras do domínio) ao mesmo tempo que evita o aumento exponencial da quantidade de testes necessária. Normalmente experimentos devem ser divididos em blocos (grupos de testes com diferentes combinações), de forma a evitar que efeitos relacionados ao fenômeno sejam confundidos com efeitos causados pelos ins-

trumentos de medição (em um teste de pneus, por exemplo, algum efeito proveniente do veículo poderia ser considerado erroneamente como sendo uma característica do pneu), fato que normalmente ocorre em testes ordenados de forma aleatória (que podem não ser balanceados, ou seja, com a mesma quantidade de testes para cada parâmetro em cada bloco). O planejamento Box-Behnken determina os testes combinando *designs* incompletos equilibrados e um *design* fatorial de dois níveis. Dessa forma, ele gera blocos completamente balanceados e com um baixo nível de redundância. Cada bloco deve ter um teste no ponto central (onde todos os parâmetros adotam seu valor médio. A Figura 2.8 compara as interpretações visuais dos testes de um experimento fatorial 3^K completo com os testes de um planejamento Box-Behnken para $K = 3$ e a Figura 2.9 ilustra a metodologia empregada no Box-Behnken para $K = 4$.

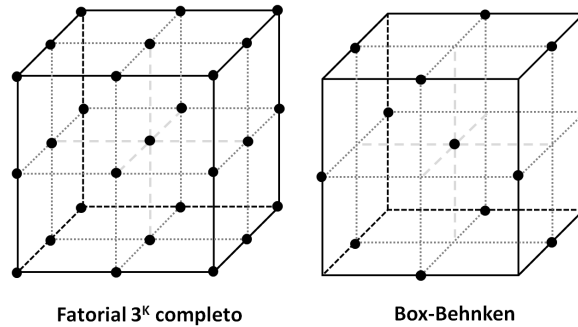


Figura 2.8 – Comparação entre os testes do planejamento fatorial 3^K completo e o planejamento Box-Behnken para $K = 3$.

Após a realização dos testes é feito um ajuste de curva dos resultados, normalmente de segunda ordem, estimando a tendência da resposta em função dos parâmetros. A equação da curva de ajuste é dada por:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^K \beta_i k_i + \sum_{i=1}^K \beta_{ii} k_i^2 + \sum_{i < j} \beta_{ij} k_i k_j + \epsilon \quad (2.31)$$

onde y é a resposta, β são os coeficientes de cada termo, k_i são os valores normalizados dos parâmetros variados (-1, 0 ou 1) e ϵ é o erro do ajuste. Todas as combinações dos parâmetros k_i podem ser organizadas em uma matriz \mathbf{X} com dimensões $N_{obs} \times N_{coef}$ (sendo N_{obs} o número total de observações e N_{coef} o número de coeficientes da Equação

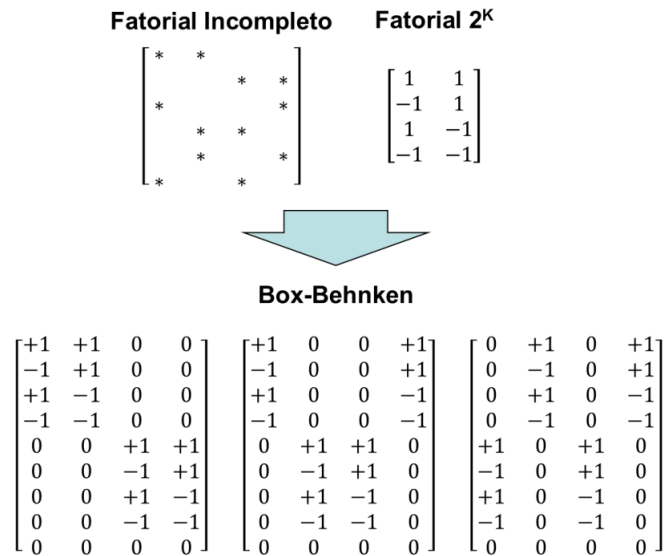


Figura 2.9 – Exemplo de montagem do planejamento Box-Behnken para $K = 4$.

2.31), de forma que a equação se torna:

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{N_{coef}-1} \beta_j x_j + \epsilon \quad (2.32)$$

Os coeficientes são calculados de forma a minimizar ϵ^2 , sendo o vetor de coeficientes estimados $\hat{\beta}$, com dimensões $N_{coef} \times 1$, calculado como:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (2.33)$$

onde \mathbf{y} é o vetor de respostas correspondentes aos testes da matriz \mathbf{X} , com dimensões $N_{obs} \times 1$. O apóstrofe representa a transposta da matriz em questão. O vetor ϵ do erro do ajuste é definido como a diferença entre a resposta experimental \mathbf{y} e a resposta $\hat{\mathbf{y}}$ estimada pela curva de ajuste com os coeficientes $\hat{\beta}$. A Equação 2.33 é deduzida como o objetivo de minimizar o vetor ϵ , resultando no vetor $\hat{\beta}$ de coeficientes que gera a curva que oferece essa minimização.

Um procedimento costumeiro para eliminar possíveis desvios que não são do fenômeno em si é a remoção de valores aberrantes que muito provavelmente são derivados de erros na experimentação ou que são resultados muito improváveis de ocorrerem. Para isso, é calculado o resíduo studentizado (ou seja, corrigido segundo a distribuição de Student

devido à pequena amostra) ρ_i para uma dada observação i , dado por:

$$\rho_i = \frac{y_i - \hat{y}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(1 - h_{ii})}} \quad (2.34)$$

onde y_i é o resultado observado e \hat{y}_i é o resultado estimado pela curva de resposta. A variância estimada $\hat{\sigma}^2$ é dada pela média dos quadrados dos erros MS_E , dada por:

$$MS_E = \frac{SS_E}{N_{obs} - N_{coef}} = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}\mathbf{X}'\mathbf{y}}{N_{obs} - N_{coef}} \quad (2.35)$$

e o h_{ii} se refere aos elementos da diagonal da chamada "matriz chapéu" \mathbf{H} , definida como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \quad (2.36)$$

Os valores aberrantes são aqueles identificados com $|\rho_i| > 3$ e são eliminados da amostragem. Depois de removidos os coeficientes $\hat{\beta}$ devem ser novamente calculados, assim como os novos resíduos, repetindo o processo sucessivamente até que todos os pontos não se apresentem aberrantes dentro da amostra.

A aceitação geral da curva de resposta calculada pode ser feita com um teste F comparando o erro médio puro da experimentação MS_{PE} com o erro médio por falta de ajuste MS_{LOF} . A estatística F_0 para falta de ajuste é dada por:

$$F_0 = \frac{SS_{LOF}/(N_{test} - N_{coef})}{SS_{PE}/(N_{obs} - N_{coef})} = \frac{MS_{LOF}}{MS_{PE}} \quad (2.37)$$

onde SS_{LOF} é a soma dos quadrados dos erros por falta de ajuste, SS_{PE} é a soma dos quadrados dos erros puros (inerentes ao experimento), N_{test} é o número de diferentes combinações de fatores \mathbf{x}_i . As variáveis SS_{LOF} e SS_{PE} são definidas como:

$$SS_{LOF} = \sum_{i=1}^{N_{test}} N_{obs,i} (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 \quad (2.38)$$

$$SS_{PE} = \sum_{i=1}^{N_{test}} \sum_{j=1}^{N_{obs,i}} (y_{ij} - \hat{y}_i)^2 \quad (2.39)$$

onde $N_{obs,i}$ é o número de observações para cada combinação de parâmetros \mathbf{X}_i : (no modelo Box-Behnken, por exemplo, o ponto central terá mais observações, portanto um $N_{obs,i}$ maior que o restante), \bar{y}_i é a média das observações para a combinação de parâmetros correspondente e \hat{y}_i é a resposta estimada pela curva de ajuste.

O teste compara a estatística de teste definida pela Equação 2.37 com o valor

da probabilidade dada pela distribuição de Fischer, $F_{test} = F(\alpha, N_{test} - N_{coef}, N_{obs} - N_{test})$, com α sendo o nível de confiança desejado (normalmente 5%, representando a probabilidade de rejeição errônea da hipótese nula). Caso $F_0 > F_{test}$ a função não é linear (como descrita na Equação 2.31) e outro formato deve ser testado.

A análise dos coeficientes estimados de ajuste dessa curva é feita com uso de um teste t. Para cada coeficiente β_j da função, são definidas as hipóteses nula e alternativa, H_0 e H_1 respectivamente, como sendo:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_j = 0 \\ H_1 : \beta_j \neq 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

A hipótese nula estabelece que o coeficiente β_j não afeta significativamente o modelo, o que significa dizer que o parâmetro ou relação x_j correspondente não é relevante para a resposta no fenômeno estudado, podendo ser eliminado da equação. O mesmo é feito para as interações entre parâmetros e para termos quadráticos. Caso essa hipótese seja rejeitada, o parâmetro (ou interação) é tido como essencial para o bom ajuste da superfície de resposta. A estatística t_0 para o teste da hipótese nula é dada de acordo com o seguinte equação:

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}} \quad (2.41)$$

onde $\hat{\sigma}$ é o desvio padrão estimado (dado pela Equação 2.35) e C_{jj} é o elemento da diagonal da matriz $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ correspondente a $\hat{\beta}_j$. A hipótese nula H_0 é rejeitada caso $|t_0| > t_{test} = t(\alpha/2, N_{obs} - K - 1)$. Essa expressão significa que a probabilidade do parâmetro correspondente ser irrelevante é muito pequena, portanto deve ser considerado (adotando-se H_1 como verdadeira). Este teste é apenas um teste parcial, pois o coeficiente $\hat{\beta}_j$ analisado depende de todos os outros valores de $x_{i \neq j}$, ou seja, caso a equação seja definida de modo diferente, a variação dos coeficientes relativos a um mesmo parâmetro pode ser significativa.

Também pode ser definido um intervalo de confiança dos coeficientes $2\Delta\beta_j$, sendo que seus erros obedecem uma distribuição t de Student com $N_{obs} - N_{coef}$ graus de liberdade. Pode-se então dizer que β_j se encontra, com confiança de valor α , dentro do seguinte intervalo:

$$\Delta\beta_j = t(\alpha/2, N_{obs} - N_{coef})\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}} \quad (2.42a)$$

$$\hat{\beta}_j - \Delta\beta_j \leq \beta_j \leq \hat{\beta}_j + \Delta\beta_j \quad (2.42b)$$

Da mesma forma podemos estimar um intervalo de confiança da resposta y_0 em um determinado ponto \mathbf{k}_0 , dado por:

$$\Delta y_0 = t(\alpha/2, N_{obs} - N_{coef}) \sqrt{\hat{\sigma}^2 (1 + \mathbf{k}'_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{k}_0)} \quad (2.43)$$

$$\hat{y}(\mathbf{k}_0) - \Delta y_0 \leq y_0 \leq \hat{y}(\mathbf{k}_0) + \Delta y_0 \quad (2.44)$$

A partir da curva final, caso os testes sejam favoráveis, podemos encontrar os valores onde se encontram os parâmetros ótimos, ou seja, onde y apresenta o mínimo valor possível (ou máximo, se for um problema de maximização). Esse ponto pode ser encontrado onde o gradiente da função é zero, ou seja:

$$\vec{\nabla} y = \frac{\partial y}{\partial k_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (2.45)$$

A resolução do encontro do ponto de gradiente zero é resolvido por meio de um sistema de equações lineares:

$$2\beta_{ii}k_i + \sum_{j \neq i} \beta_{ij}k_j = -\beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (2.46)$$

Por ser uma função de segunda ordem, a derivada segunda de y em relação a qualquer parâmetro será constante. Isso significa que, ao serem mantidos todos os outros parâmetros fixos, haverá apenas um valor de k_i que apresentará inclinação nula. A avaliação desse ponto para identificá-lo como um mínimo ou um máximo se dá pelo sinal da derivada segunda: caso ela seja positiva, o ponto é um mínimo; caso negativa, um máximo. É perfeitamente possível que o ponto onde $\vec{\nabla} y = 0$ seja um mínimo em uma direção e um máximo em outra, configurando o que é conhecido como ponto de sela. Nesse caso, a função não apresenta um ponto extremo (máximo ou mínimo global), sendo necessárias ou a avaliação dos parâmetros em suas extremidades, ou a obtenção de mais dados experimentais para a realização de um novo ajuste.

3 METODOLOGIA

Este capítulo traz o processo de análise realizado para a obtenção dos resultados que serão exibidos e discutidos posteriormente.

3.1 Procedimento computacional

Depois de definidos os algoritmos de otimização a serem comparados, como descrito no Capítulo 2, sendo eles GW, SHO, GA, DA e BFO, são definidos os intervalos de cada parâmetro a serem testados. Para alguns parâmetros é desejado observar o efeito na variação de sua ordem de grandeza. Para isso seus valores foram analisados logicamente, ou seja, o valor a ser traduzido da normalização do DoE para a aplicação no algoritmo é o expoente do seu valor expresso em base 10. A Tabela 3.1 traz os valores mínimos, médios e máximos de cada parâmetro para cada algoritmo testado.

A metodologia do DoE é então aplicada, definindo os testes a serem executados. As Tabelas B.1 a B.5 mostram todas as combinações testadas e a Tabela 3.2 mostra a quantidade de testes realizados para cada algoritmo. Os testes não foram divididos em blocos por serem cálculos computacionais e por serem executados em múltiplos núcleos ao mesmo tempo, sendo variada a semente de geração de números pseudo-aleatórios para cada execução. Foram executadas 10 observações para cada teste, cada uma com diferentes inicializações, com repetições nos pontos centrais quando necessárias como demandadas pelo modelo Box-Behnken. Para o algoritmo GWO, foi utilizado um modelo fatorial 3^K completo, pois este possui apenas $K = 2$ parâmetros, o que inviabiliza a aplicação ao Box-Behnken. Para o GWO, portanto, não foram feitas repetições extras no ponto central. Foi apenas realizado o teste de calibração com os parâmetros do caso de maior dificuldade a ser resolvido ($J = 12$ e $\beta_s = 2, 5$, decisão baseada empiricamente em observações anteriores), assumindo que uma calibração para um problema com maior dificuldade seria também eficiente para problemas similares, contudo mais simples.

A partir dos resultados dos testes de calibração, são calculados os coeficientes $\hat{\beta}$ das curvas de ajuste de cada algoritmo. A definição dos valores dos parâmetros a serem usados na simulação final é feito de acordo com a seguinte cadeia de decisão:

- Caso a curva não passe no teste F de falta de ajuste (Equação 2.37) é escolhido o ponto de teste que demonstrar o melhor desempenho médio ou, caso não haja

Tabela 3.1 – Valores dos parâmetros utilizados no planejamento de experimentos.

Algoritmo	Parâmetro	Valores			Níveis		
		mín	méd	máx	-1	0	1
GWO	N_{pop}	10	100	1000	1	2	3
	$l_{step,max}$	0,5	1,5	2,5	0,5	1,5	2,5
SHO	N_{pop}	10	100	1000	1	2	3
	η_{pred}	0,1	0,3	0,5	0,1	0,3	0,5
	R_{att}	0,2	1,0	1,8	0,2	1,0	1,8
GA	N_{pop}	10	100	1000	1	2	3
	l_{res}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-1}	-5	-3	-1
	P_{mut}	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8
	η_{kill}	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8
	l_{cut}	5	12	25	5	12	25
DA	N_{pop}	2	6	10	2	6	10
	$N_{seeds,min}$	10	50	90	10	50	90
	$N_{seeds,max}$	100	550	1000	100	550	1000
	N_{mut}	10	100	1000	1	2	3
	α_w	$1 - 10^{-5}$	$1 - 10^{-3}$	$1 - 10^{-1}$	-5	-3	-1
	α_g	$1 + 10^{-5}$	$1 + 10^{-3}$	$1 + 10^{-1}$	-5	-3	-1
BFO	N_{pop}	10	100	1000	1	2	3
	l_{step}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	-3	-2	-1
	$N_{step,max}$	10	100	1000	1	2	3
	N_{rep}	0	5	10	0	5	10
	N_{disp}	0	5	10	0	5	10
	P_{disp}	0	0,5	1	0	0,5	1
	I_a	0,1	1	10	-1	0	1
	I_r	0,1	1	10	-1	0	1
	R_a	0,1	1	10	-1	0	1
	R_r	0,1	1	10	-1	0	1

Tabela 3.2 – Quantidade de observações planejada pelo DoE de cada algoritmo;

R.P.C. = repetições do ponto central.

Algoritmo	K	Planejamento	R.P.C.	N_{test}	N_{obs}
GWO	2	Fatorial 3^K completo	1	9	90
SHO	3	Box-Behnken	3	13	150
GA	5	Box-Behnken	6	41	460
DA	6	Box-Behnken	6	61	660
BFO	10	Box-Behnken	10	181	1900

nenhum resultado significativamente melhor, o ponto central por ter maior significância estatística.

- Caso a curva não apresente evidências de falta de ajuste, são resolvidos os testes t

individuais por parâmetro (Equação 2.40).

- Para cada parâmetro individual, caso ele não seja considerado relevante (linearmente ou quadraticamente), é definido parâmetro correspondente como sendo o ponto central (pois teoricamente sua variação não afeta o resultado e o ponto central tem maior significância estatística).
- Caso as relações lineares, quadráticas ou de interação sejam majoritariamente significativas, o mínimo é procurado através do gradiente, aplicando as restrições mencionadas no item anterior. Caso algum parâmetro não apresente mínimo, são analisados os extremos para identificar qual deles apresenta melhor resultado.
- Caso as relações do modelo sejam majoritariamente irrelevantes (ou seja, passem no teste individual), é tomado o ponto com melhor desempenho médio ou, se não existir nenhum resultado claramente melhor que os demais, é tomado o ponto central por possuir maior significância estatística.

A simulação final então é executada. Foram testados valores de comprimento de distribuição adimensional β_s de 1,00 a 2,50, variando com passos de 0,25, e número de fontes J de 2 a 12, variando em passos de 1. As combinações testadas, portanto, são as mesmas testadas por Miguel et al., 2016 e Silva et al., 2018. Cada uma das combinações de β_s e J foram simuladas 50 vezes, sendo analisadas posteriormente suas médias e seus desvios padrões. Os melhores valores encontrados para cada algoritmo são armazenados, assim como dados de convergência $f_o(n_{ev})$ de cada uma das simulações. Logo o total de execuções apenas no cálculo final é $N_{ex} = 11J \times 7\beta_s \times 50 \text{ simulações} \times 5 \text{ algoritmos} = 19250$ execuções.

A comparação entre algoritmos é feita mantendo-se fixo o número máximo de avaliações da função objetivo $N_{ev} = 200000$, que pode variar levemente seu valor final dependendo de como alguns algoritmos são codificados, entretanto tal efeito pode ser considerado irrelevante para a resposta final. Foram impostas as mesmas restrições utilizadas por Miguel et al., 2016 e Silva et al., 2018 para o domínio das variáveis da função

objetivo, dada pela Equação 2.8. O domínio de busca é delimitado por:

$$\begin{cases} -5 \leq A_j, B_j, A_{X_R}, B_{X_R} \leq 5 \\ 0 \leq C_j, C_{X_R} \leq 10 \\ w_j \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Para que o algoritmo obedecesse a essas restrições foram definidas punições para f_o :

- Caso algum coeficiente da solução candidata se encontre fora do domínio, a fração radiante X_R de todas as chamas é definida como 1, aumentando o valor de f_o ;
- Caso algum valor de w_j se encontre menor que zero (ou seja, se algum D_j for definido como negativo), é somado 1 ao valor desse peso w_j , aumentando para mais de 100% a fração radiante da chama e aumentando conseqüentemente o valor de f_o .

Os códigos foram escritos em Python 3.6 [van Rossum, 2019], com a utilização dos módulos SciPy 1.0 [Jones et al., 2019] / NumPy 1.14 [Oliphant, 2019] para cálculos vetorizados, PyDOE 0.3 [Martinez et al., 2019] para o projeto de experimentos e Matplotlib 2.1 [Hunter et al., 2019] / Seaborn 0.9 [Waskom, 2019] para a geração dos gráficos. Para execução foi utilizado o *cluster* Sun Fire (Newton) do CESUP - Centro Nacional de Supercomputação da UFRGS, que apresenta desempenho teórico de pico de 12,94 Tflops ($12,94 \times 10^{12}$ operações de ponto flutuante por segundo) [CESUP, 2018].

3.2 Dados experimentais

Os dados experimentais utilizados são os mesmos utilizados por Miguel et al., 2016 e por Silva et al., 2018: 12 chamas de difusão laminares que utilizam metano como combustível. As chamas foram acesas em um queimador Santoro, com tubo central de 11,1 mm de diâmetro para saída de metano e um duto anular externo com 101,6 mm de diâmetro externo utilizado para o *coflow* de ar, o qual foi aplicado com uma vazão de 0,1 m³/min para todas as chamas. Evitando que a borda do queimador fosse uma barreira para a medição de radiação em alturas abaixo da altura de injeção, o tubo central foi elevado 60 mm acima da saída do *coflow*. As vazões de ar e metano foram controladas e medidas com um medidor Bronkhorst série EL200. Os valores de fluxo radiante foram calculados como a média das diferenças entre o sinal da chama e o sinal de fundo (sem

chama) com uma amostra de 50 aquisições. As incertezas foram calculadas com base na variância da amostra e das incertezas do sinal do sensor, do sistema de aquisição e do posicionamento do sensor. O fluxo radiativo foi medido com um transdutor MEDTHERM modelo 64-0.5-20/ZnSeW-1C-150, com uma termopilha Schmidt-Boelter com campo de visão de 150° , e uma janela ZnSe com uma transmissividade espectral constante de 70% num intervalo de comprimentos de onda entre $0,7 \mu\text{m}$ e $17 \mu\text{m}$. O sensor tem uma incerteza de 3% do sinal de leitura, com um intervalo de confiança de 95%. O sistema de aquisição utilizado foi um Agilent 34972A com incerteza de 0,0030% da leitura mais 0,0035% da extensão de medição. Os comprimentos de onda foram determinados visualmente a partir de fotos de longa exposição para chamas paradas e a partir de 150 fotos de cada chama para chamas trêmulas. A Tabela 3.3 exhibe os dados das chamas utilizadas. Os dados detalhados de medição dos perfis de radiação podem ser encontrados na Tabela A.1. A Figura 3.1 mostra uma esquematização da bancada experimental.

Tabela 3.3 – Dados experimentais utilizados neste estudo.

Adaptado de Miguel et al., 2016.

Chama	Q_f [kW]	L_f [m]	R_f [m]	M
1	0,139	0,046	0,054	19
2	0,166	0,055	0,054	20
3	0,194	0,066	0,054	20
4	0,222	0,076	0,054	20
5	0,250	0,088	0,054	21
6	0,277	0,102	0,054	22
7	0,277	0,101	0,114	28
8	0,333	0,126	0,114	19
9	0,388	0,139	0,114	20
10	0,444	0,166	0,114	20
11	0,499	0,176	0,114	21
12	0,544	0,189	0,114	21

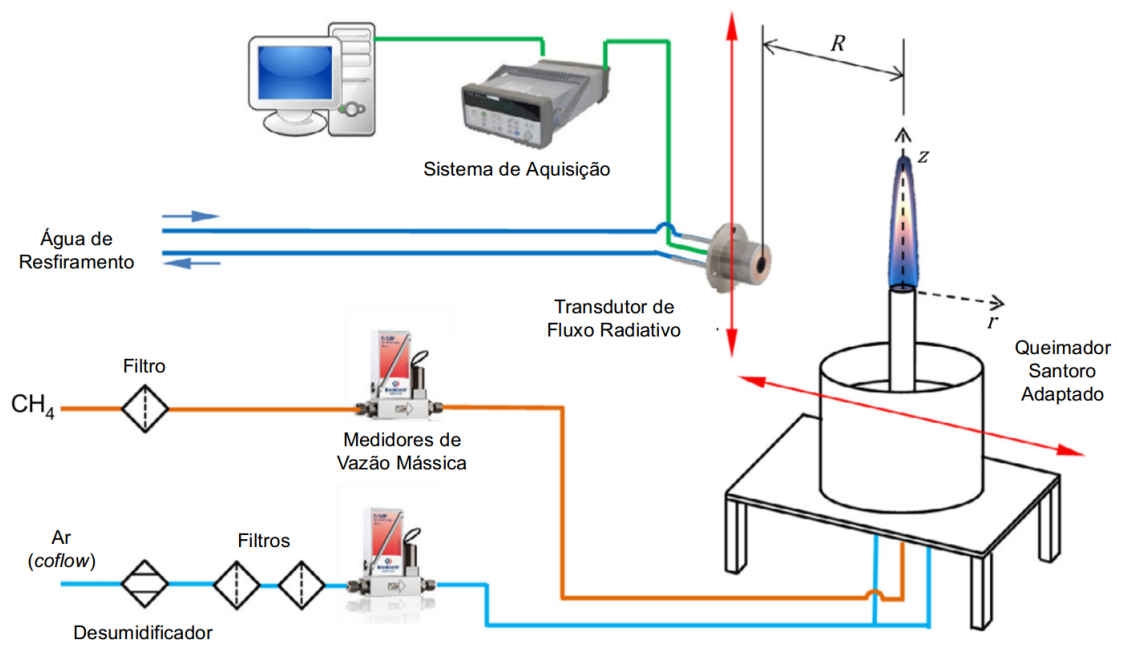


Figura 3.1 – Bancada utilizada para a obtenção dos dados experimentais.

Adaptado de Miguel et al., 2016

4 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados e discutidos os pontos pertinentes da análise. Os dados são divididos em duas seções: a primeira com os resultados relativos ao procedimento de calibração dos algoritmos, dividindo a análise para cada um deles individualmente; a segunda com os resultados relativos à simulação final, também discutindo cada algoritmo individualmente, além de realizar a comparação entre algoritmos levando em consideração os resultados já discutidos e os dados de convergência para as configurações extremas do modelo WMP.

4.1 Calibração

4.1.1 Otimização de Lobos Cinzentos - GWO

A Figura 4.1 traz os resultados de cada caso, sendo a barra amarela sua média e as barras de erro representando 3 vezes o desvio padrão estimado para mais e para menos, já desconsiderando os valores aberrantes, os quais foram retirados para a definição dos coeficientes $\hat{\beta}$. Dados mais detalhados podem ser consultados na Tabela C.1. Nota-se que os valores das observações para um mesmo teste têm ordens de grandeza similares: as menores médias têm também os menores desvios. As melhores médias são apresentadas

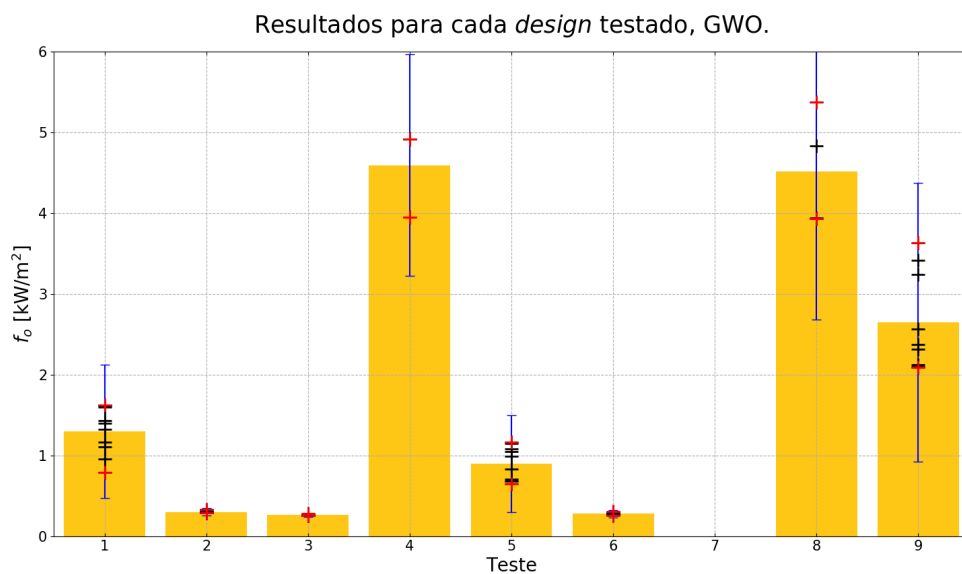


Figura 4.1 – Resultados correspondentes a cada teste do GWO.

pelos testes 2 (0, -1), 3 (1, -1) e 6 (1, 0), demonstrando que os resultados são melhores com N_{pop} média e grande (100 ~ 1000) e $l_{step,max}$ pequeno e médio (0.5 ~ 1). Além disso, esses três testes mostram um pequeno desvio padrão e nenhum valor aberrante, o que demonstra eficácia do algoritmo com esses parâmetros. O caso 7 (-1, 1), por sua vez, demonstra péssimos resultados, sendo que todos os seus valores foram tidos como aberrantes e eliminados do cálculo. Isso provavelmente é devido ao fato de que o algoritmo não leva em conta a melhor solução já encontrada em sua movimentação. A população pequena explora pouco o domínio e o passo grande joga as soluções candidatas para fora das fronteiras, ficando presas a um mínimo local com valor alto de F_o em razão do algoritmo de movimentação.

Os coeficientes $\hat{\beta}$ e resultados do teste de falta de ajuste são exibidos na Tabela 4.1. A nomenclatura utilizada é:

- A = $\log_{10}(N_{pop})$;
- B = $l_{step,max}$;
- K = constante.

Tabela 4.1 – Coeficientes $\hat{\beta}$ da curva de resposta para o GWO e teste F;

G.L. = Graus de Liberdade.

Teste F				
	G.L.	SS	MS	F_0
Falta de Ajuste (<i>LOF</i>)	9-6=3	3,674	1,225	7,019
Erro Puro (<i>PE</i>)	66-9=57	9,946	0,174	

$\hat{\beta}$ (Eq. 2.33)		
Lineares	A	B
	-1,84	2,37
Quadráticos	A^2	B^2
	0,954	1,223
Interação	AB	
	-1,281	
Constante	K	
	1,134	

De acordo com o teste, $F_0 = 7,019$, o qual é maior do que $F_{test} = 2,766$, portanto o modelo testado para a superfície de resposta não é considerado adequado e outras equações devem ser exploradas. A remoção de diversos valores aberrantes, com altos desvios, faz com que o erro puro do fenômeno diminua mais expressivamente do que o erro por falta de ajuste, aumentando assim o valor de F_0 e facilitando a rejeição de H_0 . A curva de ajuste resultante é exibida na Figura 4.2.

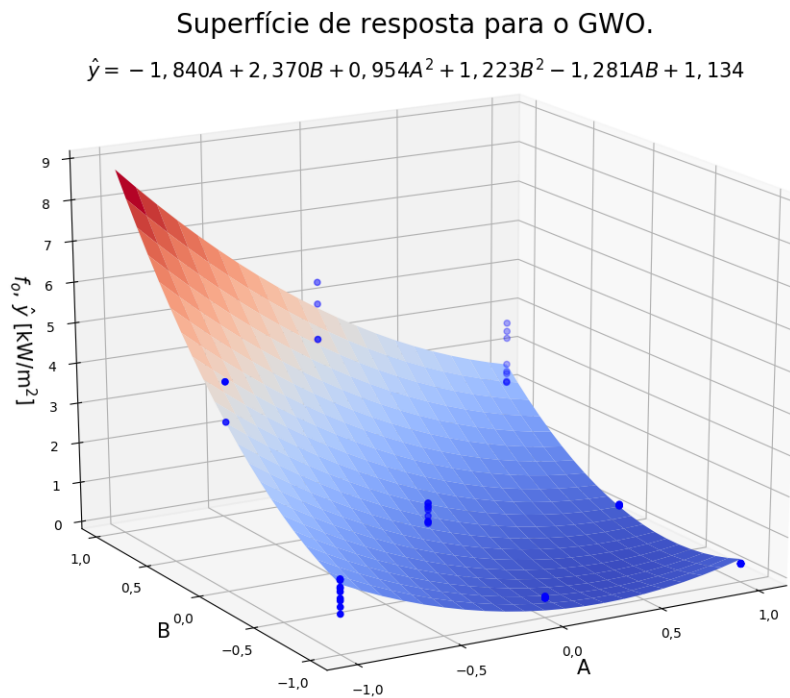


Figura 4.2 – Superfície de resposta gerada para calibração do GWO, a partir dos coeficientes da Tabela 4.1.

Apesar do diagnóstico não se mostrar favorável à utilização do modelo, é possível perceber a tendência dos resultados para a região comentada anteriormente, com maiores populações e menores tamanhos de passo.

De acordo com os resultados, foi escolhido para a simulação final o caso 3 (1, -1), correspondendo a $N_{pop} = 1000$ e $l_{step,max} = 0,5$, por apresentar a menor média (0,265 kW/m²), com seu desvio padrão $\sigma = 0,007$ kW/m².

4.1.2 Otimização de Manadas Egoístas - SHO

A Figura 4.3 traz os resultados dos testes de calibração. Dados mais detalhados podem ser encontrados na Tabela C.2.

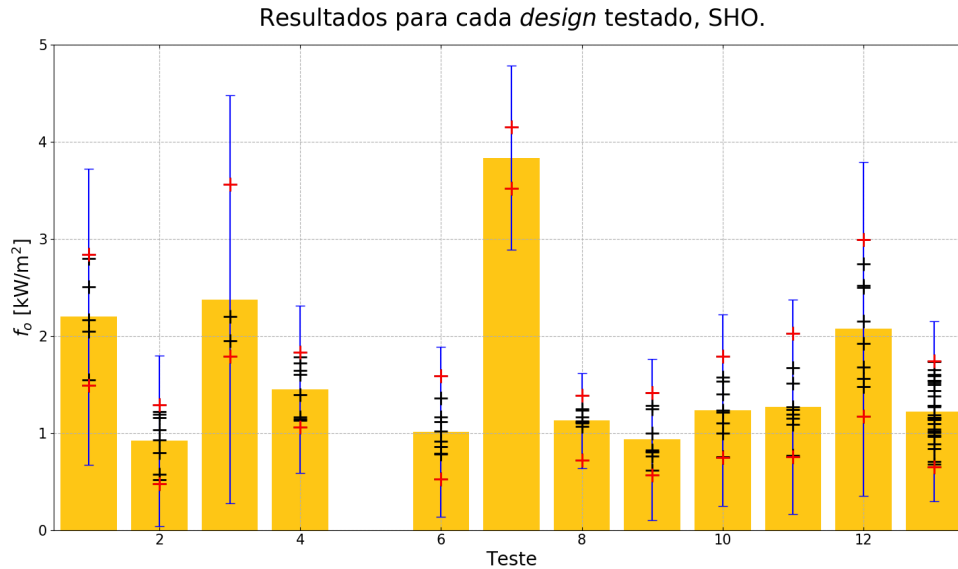


Figura 4.3 – Resultados correspondentes a cada teste do SHO.

Nota-se uma predominância de valores aberrantes nos casos 1, 3, 5 e 7, principalmente no caso 5, o qual teve todos os seus valores eliminados. Todos esses casos compartilham N_{pop} pequena, com 10 indivíduos, atestando a necessidade de maiores ordens de grandeza para esse parâmetro. É válido observar que valores pequenos de f_o , mas que não obedecem à regressão também são passíveis de serem eliminados, como se nota na observação 1 do caso 5 (0,610 kW/m²), pois se pode considerar que esses pontos foram encontrados por "sorte". Este caso especificamente contém N_{pop} pequena (10), R_{att} pequeno (0,2) e η_{pred} média (0,3). Alguns testes apresentam bons resultados, sendo os principais encontrados nos casos 2, 6 e 9, todos eles com populações médias ou grandes (100 ~ 1000 indivíduos), sendo η_{pred} média ou baixa (0,1 ~ 0,3) assim como R_{att} (0,2 ~ 1).

A Tabela 4.2 traz os coeficientes da regressão e os resultados do teste F para falta de ajuste. A nomenclatura utilizada é:

- $A = \log_{10}(N_{pop})$;
- $B = \eta_{pred}$;
- $C = R_{att}$;
- $K = \text{constante}$.

Tabela 4.2 – Coeficientes $\hat{\beta}$ da curva de resposta para o SHO e teste F; G.L. = Graus de Liberdade.

Teste F				
	G.L.	<i>SS</i>	<i>MS</i>	F_0
Falta de Ajuste (<i>LOF</i>)	13-10=3	1,629	0,543	3,361
Erro Puro (<i>PE</i>)	123-13=110	17,767	0,162	

$\hat{\beta}$ (Eq. 2.33)			
Lineares	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
	-0,658	0,243	0,359
Quadráticos	A^2	B^2	C^2
	0,485	0,068	0,085
	<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>BC</i>
Interação	0,054	-0,367	0,125
Constante	<i>K</i>		
	1,225		

De acordo com o teste F, $F_0 = 3,361$, maior do que $F_{test} = 2,687$, portanto não sendo a regressão linear adequada. A Figura 4.4 mostra a superfície de resposta gerada, parametrizada em função da fração de predadores, a qual é crescente da esquerda para a direita.

Superfície de resposta para o SHO.

$$\hat{y} = -0,658A + 0,243B + 0,359C + 0,485A^2 + 0,0682B^2 + 0,0849C^2 + 0,0542AB - 0,367AC + 0,125BC + 1,23$$

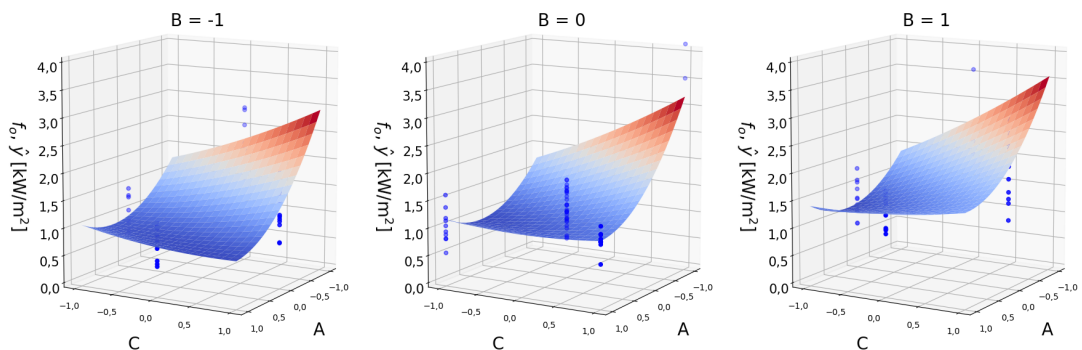


Figura 4.4 – Superfície de resposta gerada para calibração do SHO, a partir dos coeficientes da Tabela 4.2.

Novamente, apesar do modelo apresentar evidências de falta de ajuste, é possível observar uma tendência na superfície de resposta. Os melhores resultados encontram-se nas regiões em azul, com grande população e pequeno raio de ataque. Além disso, a curva tem seus valores de função objetivo aumentados também quando a fração de predadores aumenta, podendo ser observada a elevação no canto vermelho do gráfico, com valores variando de 2,8 kW/m² a 3,5 kW/m², aproximadamente. Essas observações concordam com aquelas explicitadas anteriormente.

De acordo com os resultados, foi definido o caso 2 (1, -1, 0), correspondendo a $N_{pop} = 1000$ indivíduos, $\eta_{pred} = 0,1$ e $R_{att} = 1$, por possuir a menor média de todas, igual a 0,922 kW/m², tendo um desvio padrão de 0,293 kW/m².

4.1.3 Algoritmo Genético - GA

A Figura 4.5 traz os resultados obtidos nos testes executados de acordo com o projeto de experimentos. Dados detalhados podem ser encontrados na Tabela C.3.

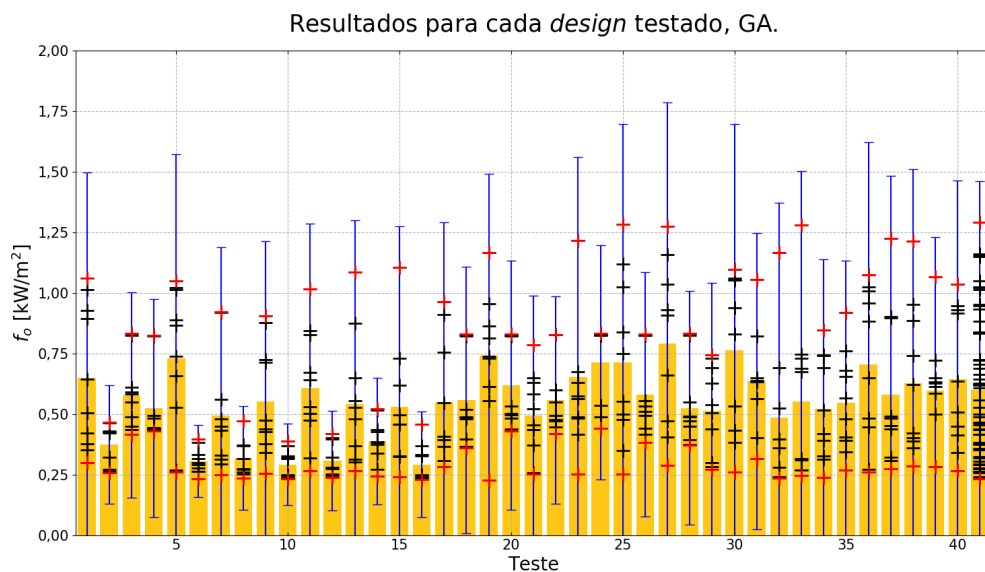


Figura 4.5 – Resultados correspondentes a cada teste do GA.

Nota-se que poucos resultados foram desqualificados como valores aberrantes e que todas as médias encontram-se abaixo de 0,8 kW/m², mostrando uma certa facilidade do algoritmo a atingir valores baixos de função objetivo, e portanto facilitando o ajuste do modelo. Entretanto os desvios são relativamente altos para cada caso em comparação com o desvio geral, o que invalida a relevância da variação dos parâmetros. Apenas em

um pequeno grupo de testes, mais especificamente os testes 2, 6, 8, 10, 12, 14 e 16, as médias e os desvios encontram-se baixos (médias entre 0,29 kW/m² e 0,39 kW/m² e desvios abaixo de 0,1 kW/m²). Em todos esses testes a população de soluções foi alta, com 1000 indivíduos, podendo-se concluir portanto que uma alta variabilidade genética é a chave para encontrar bons resultados. Os demais parâmetros não demonstraram nenhum efeito significativo no resultado.

Os coeficientes $\hat{\beta}$ calculados, suas respectivas estatísticas $|t_0|$ e os resultados do teste F de falta de ajuste são exibidos na Tabela 4.3. A nomenclatura utilizada é:

- A = $\log_{10}(N_{pop})$;
- B = $\log_{10}(l_{res})$;
- C = P_{mut} ;
- D = η_{kill} ;
- E = \bar{l}_{cut} ;
- K = constante.

Foi encontrado o valor da estatística $F_0 = 1,100$, o qual é menor do que $F_{test} = 1,596$, sendo a curva calculada considerada adequada. Entretanto, ao prosseguir para o teste t individual por coeficiente, apenas 4 dos 21 coeficientes foram considerados relevantes. As estatísticas dos coeficientes considerados irrelevantes (ou seja, com $|t_0| < t_{test} = 1,966$) estão assinaladas em vermelho. Os coeficientes individuais considerados relevantes são aqueles relacionados à população (β_A e β_{A2}), corroborando com a observação feita anteriormente de que esse parâmetro é o que se mostrava mais relevante. Além disso, desconsiderando o termo constante, o termo de interação entre a probabilidade de mutação e a fração de mortes também foi considerada relevante, sendo β_{CD} menor que zero, o que significa que quando os dois parâmetros adotarem valores opostos (-1,1 ou 1,-1) o valor de \hat{y} tenderá a subir. De fato, os testes correspondentes (casos 30 e 31) estão entre as maiores médias encontradas, enquanto que os valores opostos (1,1 e -1,-1) encontram-se entre as menores médias, desconsiderando os casos com população grande (que apresentam desempenho discrepantemente melhor do que todos os outros).

Considerando essas observações foi escolhido o teste 16 (1, 0, 0, 0, 1) para a definição de parâmetros da simulação final, por possuir a menor média (0,292 kW/m²) e, apesar do desvio ligeiramente maior que as demais melhores soluções, vários pontos encontram-se concentrados próximos aos valores mínimos, podendo-se considerar mais provável que o GA encontre bons resultados com esses parâmetros. Os valores dos parâmetros a serem declarados são: $N_{pop} = 1000$, $l_{res} = 0,001$, $P_{mut} = 0,5$, $\eta_{kill} = 0,5$, $\bar{l}_{cut} = 20$.

Tabela 4.3 – Coeficientes $\hat{\beta}$ da curva de resposta para o GA, suas respectivas estatísticas $|t_0|$ (entre parênteses) e teste F; G.L. = Graus de Liberdade.

Teste F					
	G.L.	<i>SS</i>	<i>MS</i>	F_0	
Falta de Ajuste (<i>LOF</i>)	41-21=20	1,356	0,068	1,100	
Erro Puro (<i>PE</i>)	450-41=409	25,228	0,062		
$\hat{\beta}$ (Eq. 2.33) / ($ t_0 $ (Eq. 2.41))					
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
Lineares	-0,118 (6,13)	-0,019 (0,99)	0,016 (0,82)	0,020 (1,05)	0,007 (0,39)
	A^2	B^2	C^2	D^2	E^2
Quadráticos	-0,137 (5,22)	0,039 (1,46)	-0,007 (0,27)	-0,009 (0,36)	$-2,2 \times 10^{-4}$ (0,008)
	<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>	<i>AE</i>	<i>BC</i>
Interação	0,056 (1,45)	0,062 (1,61)	-0,010 (0,27)	-0,023 (0,60)	-0,030 (0,77)
	<i>BD</i>	<i>BE</i>	<i>CD</i>	<i>CE</i>	<i>DE</i>
	-0,003 (0,06)	-0,031 (0,80)	-0,100 (2,50)	0,047 (1,24)	$-7,7 \times 10^{-5}$ (0,002)
	<i>K</i>				
Constante	0,601 (18,86)				

4.1.4 Algoritmo de Dente-de-Leão - DA

Os resultados da calibração são apresentados na Figura 4.6 com suas médias e desvios padrão já desconsiderando os valores aberrantes. Dados detalhados podem ser encontrados na Tabela C.4.

No geral, os dados parecem ter médias muito boas e da mesma ordem de grandeza (todas abaixo de 0,8 kW/m²) além de apresentarem poucos valores aberrantes (apenas 4 em um total de 660), representando uma certa robustez do algoritmo em relação à variação de seus parâmetros. No geral os desvios também encontram-se parecidos (em torno de 0,2 kW/m²). Entretanto podem ser observadas algumas exceções nos casos 15, 31, 32, 43, 44, 51, 52, 58 e 60. Esses casos apresentam médias nitidamente mais baixas que o restante, cerca de 0,5 kW/m² ou menor. Todos esses casos tem em comum $\alpha_w = 0,9$,

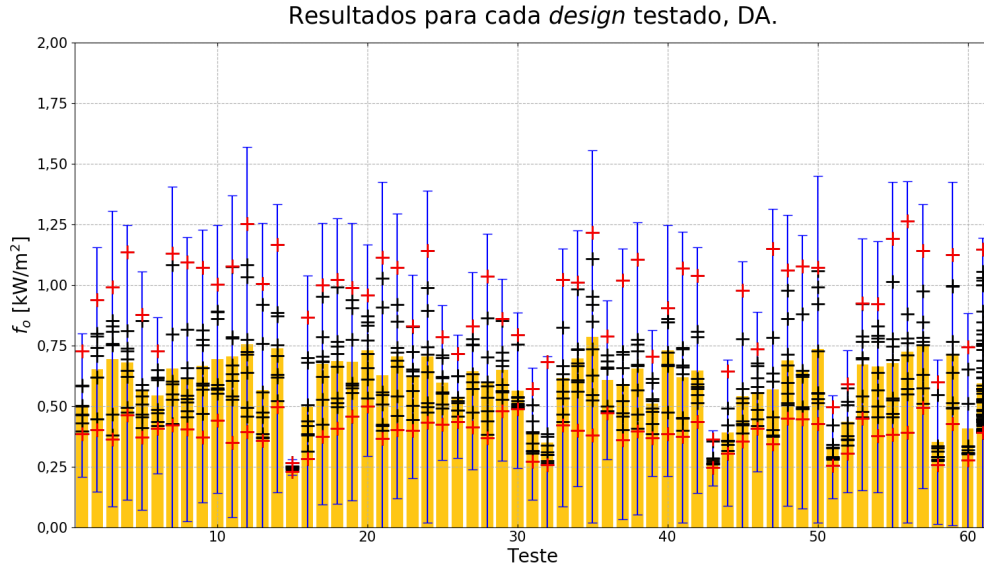


Figura 4.6 – Resultados correspondentes a cada teste do DA.

representando uma rápida contração do raio de busca no decorrer da execução. Pode-se concluir, portanto, que α_w é o parâmetro mais significativo para o bom desempenho do DA.

Os coeficientes da regressão e os dados de seu diagnóstico encontram-se na Tabela 4.4. A nomenclatura utilizada é:

- $A = \log_{10}(N_{pop})$;
- $B = N_{seeds,min}$;
- $C = N_{seeds,max}$;
- $D = N_{mut}$;
- $E = \log_{10}(1 - \alpha_w)$;
- $F = \log_{10}(\alpha_g - 1)$;
- $K = \text{constante}$.

De acordo com o teste de falta de ajuste, $F_0 = 1,078$, menor do que $F_{test} = 1,456$, portanto considerando adequada a equação da superfície de resposta. Contudo, novamente ao serem analisados os coeficientes individualmente, vários deles foram tidos como irrelevantes para o modelo (21 do total de 29), revelando um modelo falho que deve ser explorado melhor, caso seja necessário em aplicações futuras. Os coeficientes individuais (lineares e quadráticos) considerados relevantes são aqueles correspondentes a N_{pop} , a $N_{seeds,max}$ e aos fatores α_w e α_g . As conclusões que se pode tirar a partir desses coeficientes é que populações pequenas, pequeno número máximo de sementes, murchamento intenso

Tabela 4.4 – Coeficientes $\hat{\beta}$ da curva de resposta para o DA, suas respectivas estatísticas $|t_0|$ (entre parênteses) e teste F; G.L. = Graus de Liberdade.

Teste F						
G.L.						
<i>SS</i>						
<i>MS</i>						
<i>F₀</i>						
Falta de Ajuste (<i>LOF</i>)		61-28=33		1,354	0,041	1,078
Erro Puro (<i>PE</i>)		656-61=595		22,651	0,038	

$\hat{\beta}$ (Eq. 2.33)/ ($ t_0 $ (Eq. 2.41))						
Lineares	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
	0,031 (2,311)	0,003 (0,214)	0,035 (2,596)	0,022 (1,635)	-0,147 (10,904)	0,019 (1,441)
Quadráticos	<i>A²</i>	<i>B²</i>	<i>C²</i>	<i>D²</i>	<i>E²</i>	<i>F²</i>
	0,035 (1,846)	0,015 (0,806)	-0,01 (0,544)	0,036 (1,933)	-0,105 (5,599)	0,051 (2,714)
Interação	<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>	<i>AE</i>	<i>AF</i>	<i>BC</i>
	-0,04 (1,341)	-0,006 (0,206)	0,006 (0,201)	0,02 (0,663)	0,009 (0,301)	0,001 (0,035)
	<i>BD</i>	<i>BE</i>	<i>BF</i>	<i>CD</i>	<i>CE</i>	<i>CF</i>
	0,002 (0,078)	0,013 (0,417)	-0,064 (2,145)	0,039 (1,293)	0,019 (0,618)	0,025 (0,814)
	<i>DE</i>	<i>DF</i>	<i>EF</i>			
	0,003 (0,096)	0,014 (0,465)	0,022 (0,731)			
Constante	<i>K</i>					
	0,595 (24,287)					

e crescimento lento aprimoram o resultado final. Dado que a geração de novas sementes é aleatória, uma grande população gerando muitas sementes provavelmente provoca um alto "desperdício" de avaliações da função objetivo. Além disso, a relação dos fatores de murchamento e crescimento faz sentido pois a atualização da melhor solução acontece em poucas iterações, fazendo com que o murchamento do raio de alcance seja muito menos frequente que o seu crescimento, necessitando de uma maior intensidade para um bom balanço na busca.

Com base na análise descrita, foi escolhido o caso 15 (-1, 0, 0, 0, 1, 0) como base para a calibração do DA a ser aplicado na execução final. Os parâmetros finais são,

portanto: $N_{pop} = 2$, $N_{seeds,min} = 50$, $N_{seeds,max} = 550$, $N_{mut} = 100$, $\alpha_w = 0,9$ e $\alpha_g = 1,001$.

4.1.5 Otimização de Bactérias - BFO

A Figura 4.7 traz os resultados dos testes de calibração para o BFO. Dados detalhados podem ser encontrados na Tabela C.5.

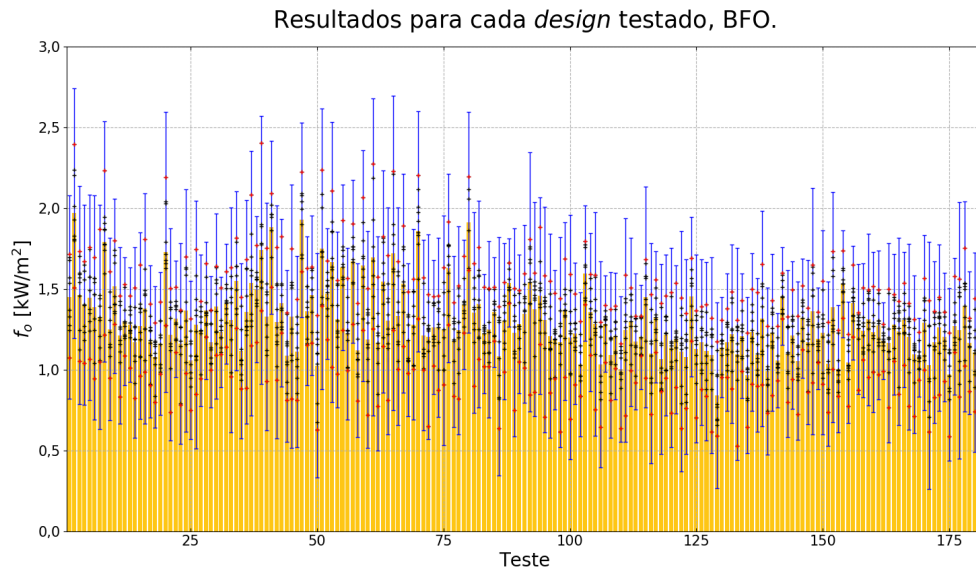


Figura 4.7 – Resultados correspondentes a cada teste do BFO.

É possível notar que todos os resultados apresentam médias na mesma ordem de grandeza, todas entre $0,9 \text{ kW/m}^2$ e 2 kW/m^2 , e desvios relativamente altos. Poucos valores foram considerados aberrantes, sendo eliminados apenas 15 dos 1900. Não é possível traçar uma diferença clara entre os testes, pois as variações das médias são da mesma ordem de grandeza dos desvios, podendo ser interpretadas como erro puro do algoritmo. O caso que apresentou menor média foi o de número 129, com média de $0,842 \text{ kW/m}^2$ e desvio padrão de $0,192 \text{ kW/m}^2$. É possível fazer algumas deduções arriscadas, como que tamanhos maiores de passo apresentariam melhores resultados, mas é difícil fazer tal afirmação com confiança devido ao alto número de parâmetros envolvidos.

A Tabela 4.5 traz os coeficientes $\hat{\beta}$ calculados e os resultados do teste F. A nomenclatura utilizada é:

- $A = \log_{10}(N_{pop})$;
- $B = \log_{10}(l_{step})$;

- $C = \log_{10}(N_{step,max});$
- $D = N_{rep};$
- $E = N_{disp};$
- $F = P_{disp}$
- $G = \log_{10}(I_a);$
- $H = \log_{10}(R_a);$
- $I = \log_{10}(I_r);$
- $J = \log_{10}(R_r);$
- $K = \text{constante.}$

O teste F teve como resultado $F_0 = 1,563$ o qual é maior que o $F_{test} = 1,236$, considerando portanto o modelo utilizado como não adequado para prever o comportamento do algoritmo. Logo, não foi feita a análise individual por coeficiente. A grande incerteza na modelagem do comportamento do BFO se deve principalmente ao grande número de parâmetros a serem calibrados, tornando muito mais complexas e menos nítidas as relações entre eles, dado que foi utilizado um modelo fatorial incompleto para o planejamento do experimento. Essa configuração afeta a robustez do modelo desnecessariamente em comparação com outros algoritmos que se mostram eficazes com menos parâmetros. É possível que as relações seriam expostas mais claramente se fosse utilizado um modelo fatorial completo 3^K , mas nesse caso seriam necessárias $3^{10} = 590490$ execuções, cerca de 310 vezes o estipulado pelo modelo Box-Behnken (1900 execuções).

Devido à análise inconclusiva, foi escolhido o caso 129 (0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0) como base para a calibração por apresentar a menor média, tendo os seguintes parâmetros aplicados: $N_{pop} = 100$, $l_{step} = 0,01$, $N_{step,max} = 100$, $N_{rep} = 5$, $N_{disp} = 0$, $P_{disp} = 0,5$, $I_a = 1$, $R_a = 0,1$, $I_r = 1$, $R_r = 1$.

Tabela 4.5 – Coeficientes $\hat{\beta}$ da curva de resposta para o BF e teste F; G.L. = Graus de Liberdade.

Teste F					
	G.L.	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i> ₀	
Falta de Ajuste (<i>LOF</i>)	181-66=115	8,100	0,070	1,563	
Erro Puro (<i>PE</i>)	1885-181=1704	76,768	0,045		

$\hat{\beta}$ (Eq. 2.33)					
Lineares	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
	0,089	-0,185	0,057	-0,097	0,086
Lineares	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>
	0,149	-0,021	0,063	0,011	-0,060
Quadráticos	<i>A</i> ²	<i>B</i> ²	<i>C</i> ²	<i>D</i> ²	<i>E</i> ²
	0,102	0,230	0,153	0,022	-0,033
Quadráticos	<i>F</i> ²	<i>G</i> ²	<i>H</i> ²	<i>I</i> ²	<i>J</i> ²
	0,034	-0,003	-0,026	-0,001	0,008
Interação	<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>	<i>AE</i>	<i>AF</i>
	-0,144	0,132	-0,046	0,054	0,165
	<i>AG</i>	<i>AH</i>	<i>AI</i>	<i>AJ</i>	<i>BC</i>
	0,026	-0,024	-0,012	0,002	-0,094
	<i>BD</i>	<i>BE</i>	<i>BF</i>	<i>BG</i>	<i>BH</i>
	0,060	-0,082	0,041	-0,013	0,023
	<i>BI</i>	<i>BJ</i>	<i>CD</i>	<i>CE</i>	<i>CF</i>
	0,073	0,010	-0,147	0,096	0,086
	<i>CG</i>	<i>CH</i>	<i>CI</i>	<i>CJ</i>	<i>DE</i>
	-0,007	0,129	0,034	-0,046	-0,036
<i>DF</i>	<i>DG</i>	<i>DH</i>	<i>DI</i>	<i>DJ</i>	
-0,013	0,014	0,064	-0,093	0,045	
<i>EF</i>	<i>EG</i>	<i>EH</i>	<i>EI</i>	<i>EJ</i>	
0,113	-0,016	-0,062	0,039	0,004	
<i>FG</i>	<i>FH</i>	<i>FI</i>	<i>FJ</i>	<i>GH</i>	
-0,070	-0,018	0,078	-0,039	-0,017	
<i>GI</i>	<i>GJ</i>	<i>HI</i>	<i>HJ</i>	<i>IJ</i>	
0,053	-0,045	-0,018	0,090	-0,051	
Constante	<i>K</i>				
	1,197				

4.2 Otimização do Modelo WMP

4.2.1 Otimização de Lobos Cinzentos - GWO

A Figura 4.8 traz todos os pontos encontrados, sendo os resultados médios representados pela superfície. A Figura 4.9 traz por sua vez o mapa de calor dos dados encontrados pelo GWO, com valores médios, desvios padrão e melhores resultados para cada combinação de J e β_s .



Figura 4.8 – Resultados encontrados pelo GWO para cada combinação de J e β_s .

É possível notar uma tendência regular na evolução dos resultados: no geral, valores maiores de β_s e de J apresentam menores valores de f_o . Conclui-se que um maior comprimento de distribuição dá mais liberdade às fontes para distribuir a radiação, reduzindo os possíveis valores de f_o e, de forma semelhante, um maior número de fontes permite refinar essa distribuição, regulando mais adequadamente, em relação aos dados experimentais, o fluxo radiante que chega em cada ponto de medição utilizado como referência. Dado o comportamento observado, pode-se esperar que valores maiores de β_s oferecerão erros menores, mas não necessariamente pode-se dizer o mesmo de maiores valores de J , pois existe um ponto de mínimo em $J = 8$, onde foi encontrada a melhor so-

Resultados de f_o para cada combinação de J e β_s encontrado pelo GWO em 50 execuções.

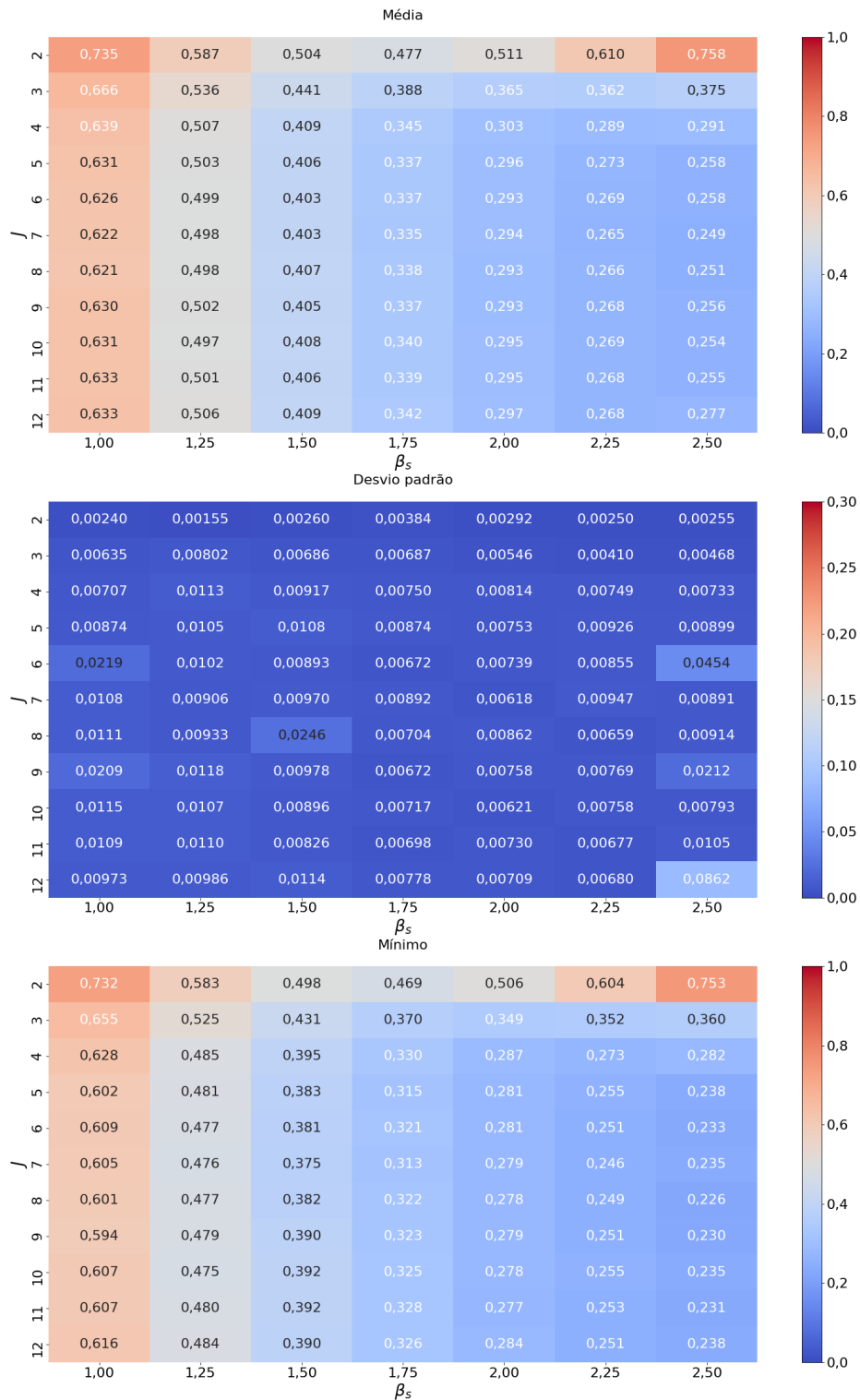


Figura 4.9 – Resultados médios, desvios padrão e resultados mínimos encontrados pelo GWO para cada combinação de J e β_s .

lução, com os valores de f_o tendendo a aumentar lentamente após esse ponto. Os desvios padrão encontrados foram todos baixos, o que pode ser justificado também pela Figura 4.8, a qual exibe quase todos os pontos bem agrupados, sugerindo que os poucos desvios que apresentam valores maiores foram gerados por pontos isolados que não representam o desempenho geral da otimização. Esses valores concordam com os valores de média e desvio encontrados na calibração, confirmando a premissa utilizada (de que a configuração com $J = 12$ e $\beta_s = 2,5$ seria a mais difícil de ser otimizada, e portanto uma calibração para este caso poderia ser considerada como adequada para os demais).

O melhor resultado encontrado pelo GWO foi localizado com a configuração $J = 8$ e $\beta_s = 2,5$, apresentando um valor de $f_o = 0,226 \text{ kW/m}^2$. Os coeficientes A , B e C utilizados na correlação para X_R e cada D_j são exibidos na Tabela 4.6. A Figura 4.10 traz os perfis gerados por esses coeficientes. Nota-se uma boa aproximação entre o perfil calculado, representado pelas linhas azuis, e os pontos experimentais, exibidos em vermelho. Todos os valores de f_o individuais para cada chama encontram-se na mesma ordem de grandeza, entre $0,048 \text{ kW/m}^2$ e $0,080 \text{ kW/m}^2$. Já a Figura 4.11 traz a previsão da fração radiante calculada pelos coeficientes da primeira linha da Tabela 4.6 (em azul, com equação no canto inferior direito) em comparação com o calculado a partir dos dados experimentais (em vermelho) e com os erros relativos para cada uma das medidas (em verde). Para chamas com pequena taxa de liberação de calor, a curva em azul concorda muito bem com os pontos calculados a partir dos dados experimentais. Entretanto, à medida que q_f aumenta, os valores numéricos se afastam dos experimentais, com o pico de erro sendo apresentado na chama 10 com um valor de cerca de 14%. Este desvio é esperado em algum nível, já que o cálculo a partir dos dados experimentais pode ter incertezas consideráveis, já que a chama não é envolvida completamente na medição. Dessa forma a estimativa experimental tende a subestimar o X_R real, o que é corrigido em algum nível pelo modelo WMP ao ajustar seus parâmetros em concordância com os fluxos medidos em laboratório.

Com tais resultados, os parâmetros utilizados para o GWO mostram uma boa calibração do algoritmo e um desempenho satisfatório na otimização do modelo WMP correlacionado como formulado. Os pequenos desvios mostram uma boa metodologia de calibração, permitindo que, para problemas semelhantes, sejam realizadas menos execuções do algoritmo, economizando tempo no desenvolvimento do modelo.

Tabela 4.6 – Coeficientes do melhor resultado encontrado pelo GWO.

$$J = 8, \beta_s = 2,5, f_o = 0,226 \text{ kW/m}^2.$$

	A_j	B_j	C_j
X_R	-0,63455	0,60533	0,04137
D_1	1,63978	2,46981	3,25562
D_2	4,05567	4,68992	4,18997
D_3	4,20593	-0,51297	3,72338
D_4	-1,95179	-2,44876	3,02067
D_5	-0,11776	-2,78813	1,65523
D_6	-1,14955	-2,24331	1,64911
D_7	1,93835	-2,37674	0,72241
D_8	-0,83480	-3,52741	2,21315

Fluxo de radiação calculado pelo GWO: $J = 8, \beta_s = 2,5, f_o = 0,226 \text{ kW/m}^2$

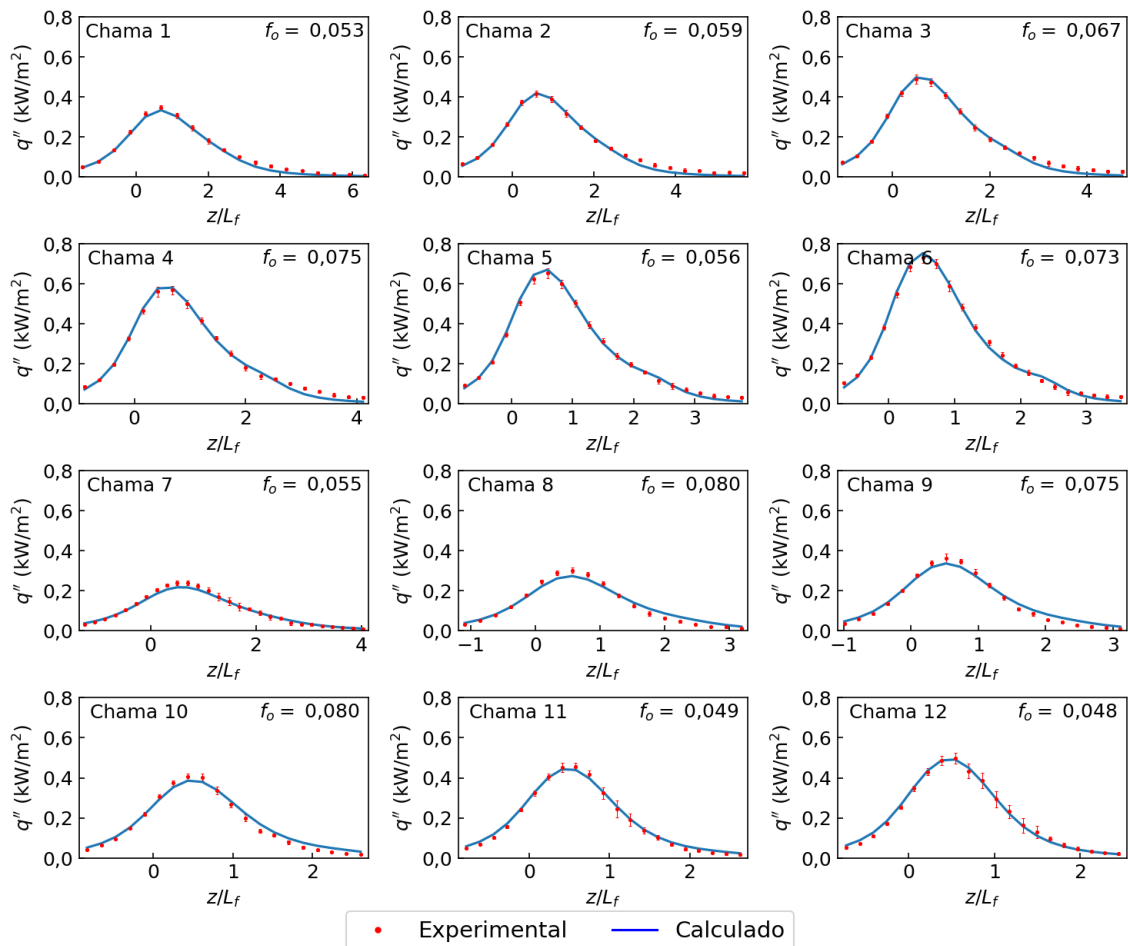


Figura 4.10 – Melhores perfis de radiação calculados pelo GWO.

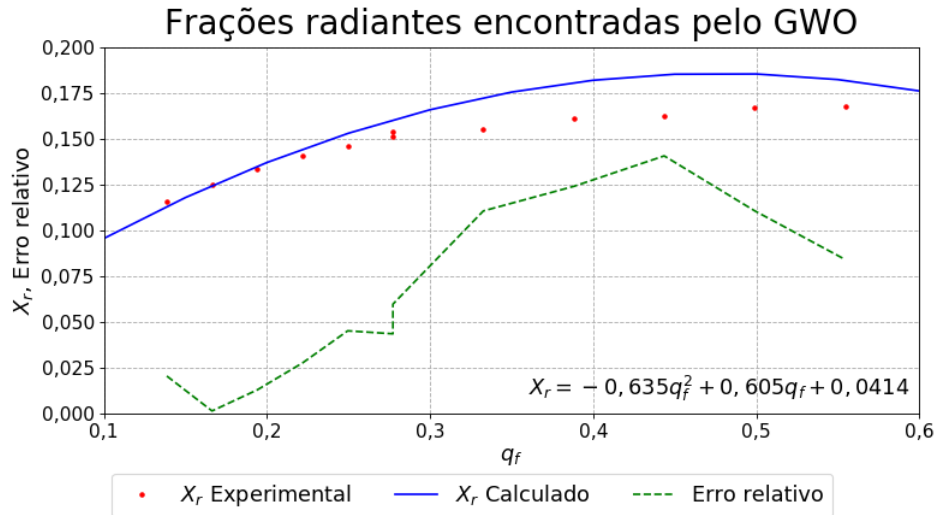


Figura 4.11 – Frações radiantes calculadas pelo GWO na melhor solução.

4.2.2 Otimização de Manadas Egoístas - SHO

A Figura 4.13 mostra todos os resultados encontrados, sendo a superfície os valores médios. A Figura 4.12 traz o mapa de calor dos dados encontrados pelo SHO, com valores médios, desvios padrão e melhores resultados para cada combinação de J e β_s .

Os valores mínimos continuam acompanhando aproximadamente a tendência observada nos resultados do GWO. Entretanto, à medida que o J aumenta, a perda de precisão é evidente, com uma média de $0,995 \text{ kW/m}^2$ sendo encontrada com $J = 12$ e $\beta_s = 2,5$, o que também é evidenciado pelo largo desvio padrão para os mesmos parâmetros ($0,271 \text{ kW/m}^2$). A Figura 4.13 mostra de fato grandes desvios padrões, com os pontos se mostrando mais espalhados à medida que aumentam ambos J e β_s . Poucos pontos se mostram tão isolados a ponto de serem considerados valores aberrantes, fazendo assim com que os valores de desvio apresentado possam ser considerados como boas estimativas. Os valores mínimos de f_o , como já observado, mostram tendência parecida com àqueles observados pelo GWO, com a região próxima de $J = 7$ e $\beta_s = 2,5$ apresentando os melhores resultados. Entretanto o aumento de f_o para valores maiores de J é claramente mais acentuado do que no algoritmo anterior, mostrando a falta de capacidade do algoritmo de encontrar melhores resultados com os parâmetros obtidos no método de calibração. Ainda assim, os resultados podem ser considerados genericamente bons.

A melhor solução obtida pelo SHO utilizou a configuração $J = 7$ e $\beta_s = 2,5$, com um valor de $f_o = 0,248 \text{ kW/m}^2$. Os coeficientes A , B e C para X_R e cada D_j são exibidos

Resultados de f_o para cada combinação de J e β_s encontrado pelo SHO em 50 execuções.

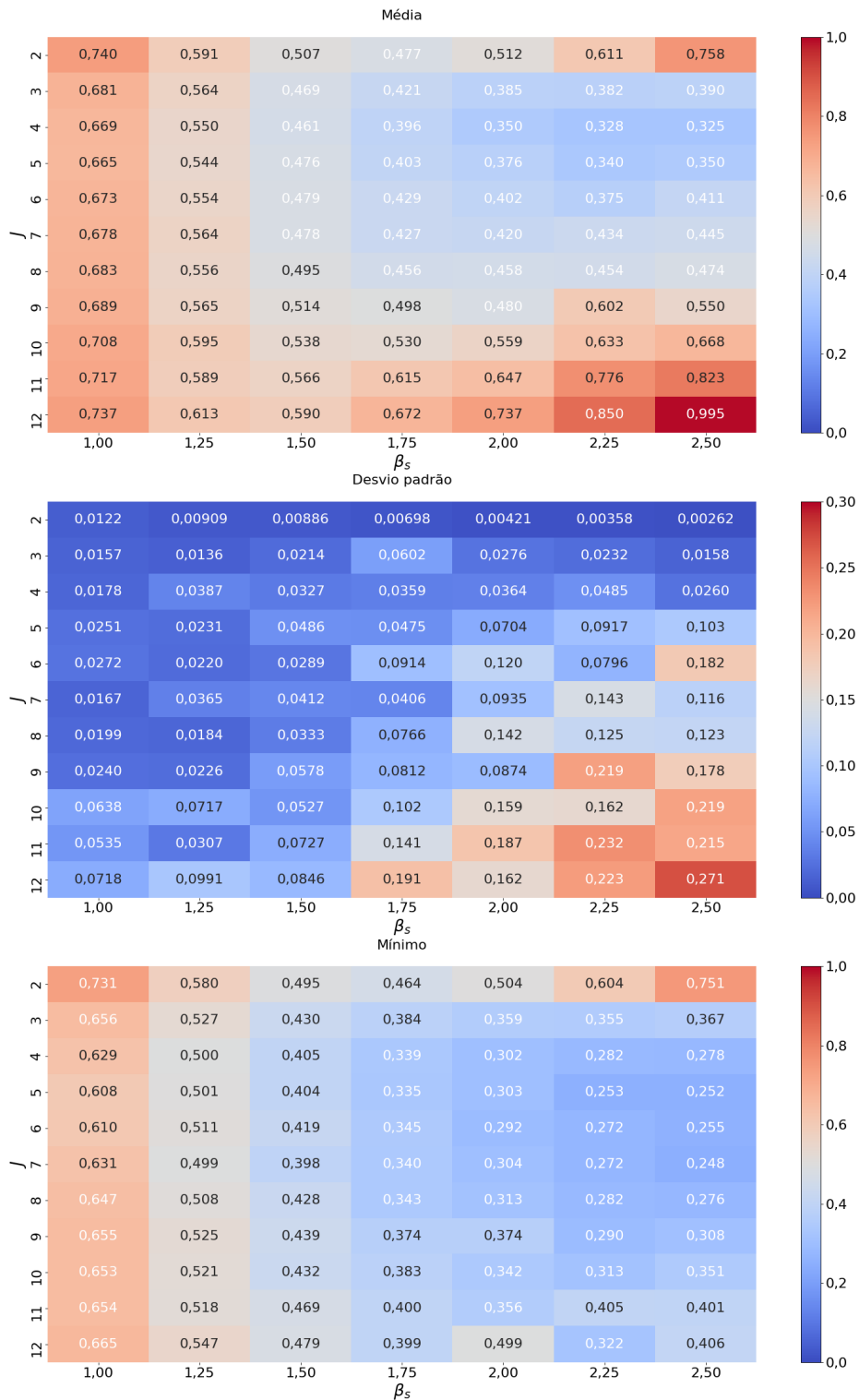
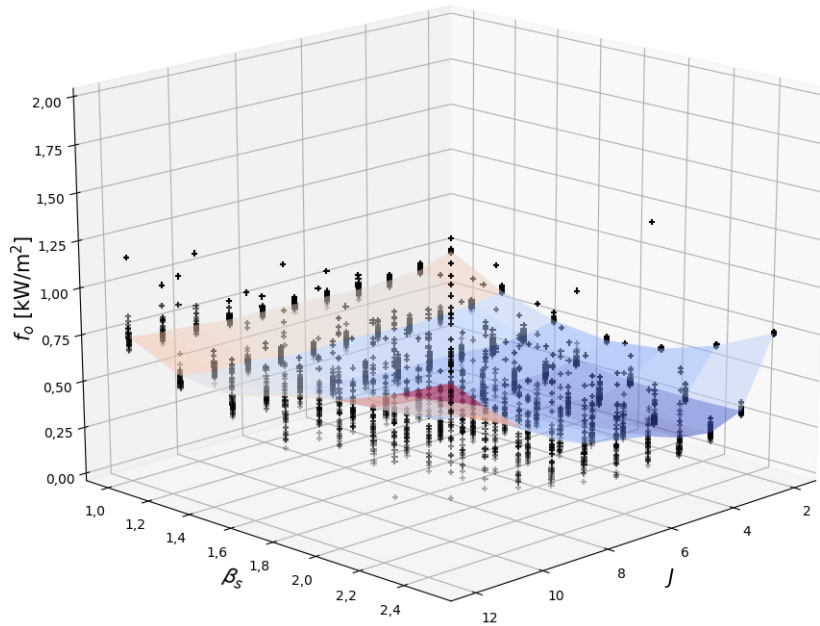


Figura 4.12 – Resultados médios, desvios padrão e resultados mínimos encontrados pelo SHO para cada combinação de J e β_s .

Resultados encontrados pelo SHO em 50 execuções.

Figura 4.13 – Resultados encontrados pelo SHO para cada combinação de J e β_s .

na Tabela 4.7. A Figura 4.14 exhibe os perfis gerados por esses coeficientes e a Figura 4.15 a previsão de X_R segundo os coeficientes encontrados. Apesar de o resultado ser ligeiramente pior do que o encontrado no GWO, os perfis calculados se mostram bem próximos dos resultados experimentais. Os valores dos parâmetros confirmam o fato de que um maior comprimento de distribuição é vantajoso para o modelo em contraste com um uso de mais fontes emissoras, o que dificulta sua otimização devido ao maior número de variáveis. Os coeficientes apresentados pelo SHO são muito diferentes daqueles apresentados pelo GWO, o que pode ser esperado já que o número de fontes foi modificado. A exceção é encontrada nos coeficientes A_{X_R} , B_{X_R} e C_{X_R} , que são similares, o que é previsto já que X_R é um valor independente das configurações do modelo e diretamente relacionado aos dados experimentais. Consequentemente, os erros de X_R são muito próximos daqueles encontrados pelo GWO, com o pico sendo encontrado na chama 10, também em torno de 14%.

De acordo com os resultados descritos, os parâmetros utilizados para o algoritmo do SHO mostram uma boa calibração para valores baixos de J e β_s , mas cada vez mais inadequados à medida que o número de fontes e o comprimento de distribuição aumentam.

Tabela 4.7 – Coeficientes do melhor resultado encontrado pelo SHO.

$$J = 7, \beta_s = 2,5, f_o = 0,248 \text{ kW/m}^2.$$

	A_j	B_j	C_j
X_R	-0,56209	0,55731	0,04844
D_1	1,37959	1,58972	4,25344
D_2	-1,59536	3,21030	6,38157
D_3	0,82148	0,20991	3,31274
D_4	-2,49140	-0,54461	1,78575
D_5	-0,27502	-4,92331	2,81493
D_6	3,72523	-4,15886	1,16073
D_7	-3,40067	-1,82171	2,05592

Fluxo de radiação calculado pelo SHO: $J = 7, \beta_s = 2,5, f_o = 0,248 \text{ kW/m}^2$

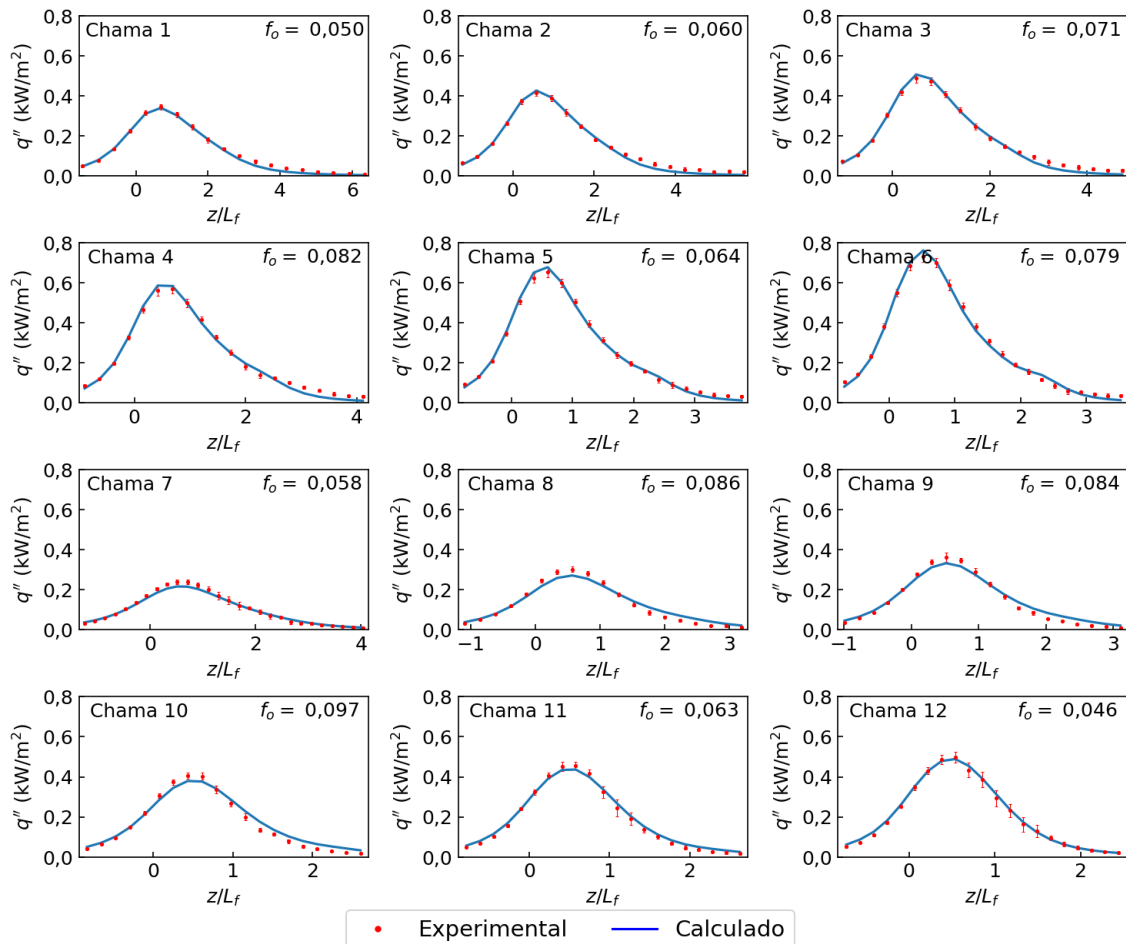


Figura 4.14 – Melhores perfis de radiação calculados pelo SHO.

Entretanto, o pior valor de desvio padrão encontrado está próximo do melhor desvio encontrado na calibração, para os mesmos parâmetros do algoritmo e para a mesma

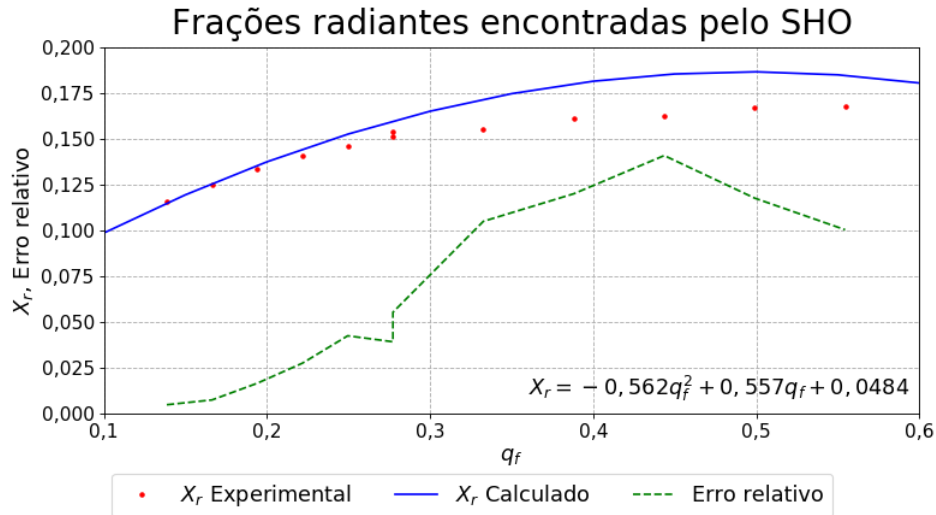


Figura 4.15 – Frações radiantes calculadas pelo SHO na melhor solução.

configuração do modelo WMP, demonstrando que a premissa da escolha do caso para a calibração foi correta, e portanto é provável que a incerteza dos resultados finais seja de fato proveniente do algoritmo ao invés de uma calibração ruim.

4.2.3 Algoritmo Genético - GA

A Figura 4.16 traz o mapa de calor dos dados encontrados pelo GA, com valores médios, desvios padrão e melhores resultados para cada combinação de J e β_s . A Figura 4.17 traz por sua vez todos os pontos encontrados, sendo os resultados médios representados pela superfície. Observa-se novamente uma tendência semelhante às anteriores, com valores maiores de β_s e de J apresentando menores valores de f_o . Entretanto, os desvios padrões apresentam comportamento mais errático, sendo os maiores valores encontrados no mesmo ponto onde os mínimos são menores, mostrando que, apesar da região oferecer potenciais melhores resultados, estes são mais difíceis de serem encontrados. Mesmo assim, os resultados mínimos ainda encontram-se muito próximos dos já exibidos anteriormente. Na Figura 4.17, percebe-se a grande variação dos resultados finais em toda a extensão do gráfico, exibindo uma menor certeza de encontrar o eventual mínimo global. Apesar da distribuição dos pontos se apresentar maior que aqueles encontrados pelo GWO, eles se mostram relativamente uniformes sobre todo o gráfico, ao contrário dos aumentos de variância apresentados pelo SHO.

O melhor resultado encontrado pelo GA foi localizado com a configuração $J = 11$

Resultados de f_o para cada combinação de J e β_s encontrado pelo GA em 50 execuções.

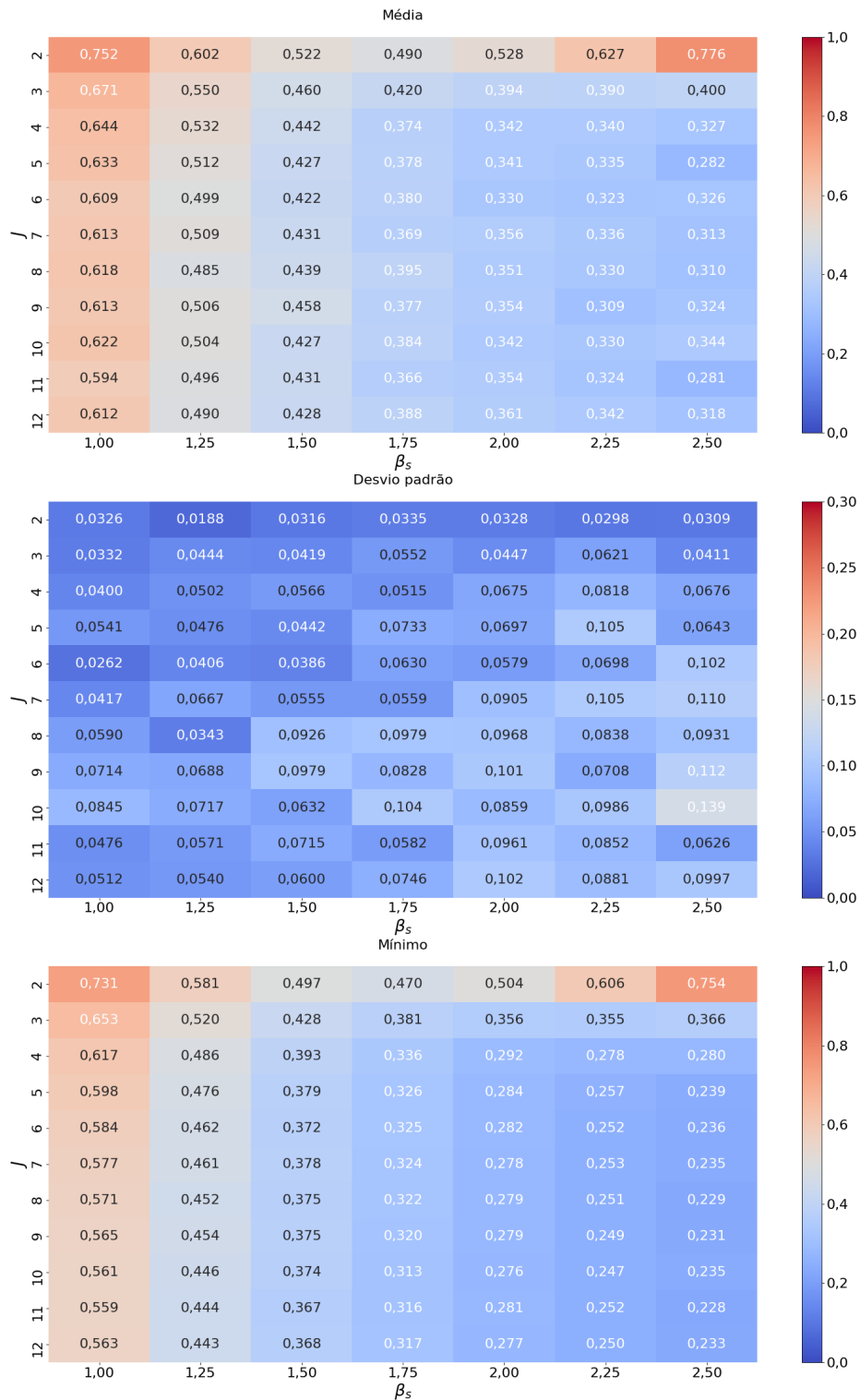
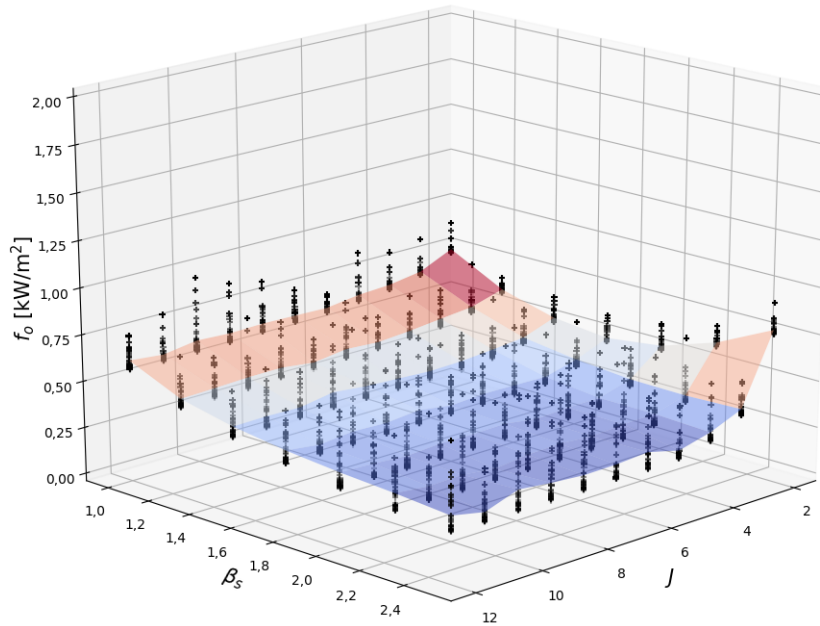


Figura 4.16 – Resultados médios, desvios padrão e resultados mínimos encontrados pelo GA para cada combinação de J e β_s .

Resultados encontrados pelo GA em 50 execuções.

Figura 4.17 – Resultados encontrados pelo GA para cada combinação de J e β_s .

e $\beta_s = 2,5$, apresentando um valor de $f_o = 0,228 \text{ kW/m}^2$. Os coeficientes A , B e C utilizados na correlação para X_R e cada D_j são exibidos na Tabela 4.8. A Figura 4.18 traz a previsão de X_R segundo a melhor resposta e a Figura 4.19 traz os perfis gerados pelos melhores coeficientes encontrados. Mais uma vez nota-se uma boa aproximação entre o perfil calculado e os pontos experimentais. Todos os valores de f_o individuais para cada chama encontram-se na mesma ordem de grandeza, entre $0,046 \text{ kW/m}^2$ e $0,085 \text{ kW/m}^2$. O X_R previsto se comporta de mesma forma que nos dois algoritmos analisados anteriormente, com um pico de desvio de 14% em comparação com o calculado com o experimental, referente à chama 10.

Com tais resultados, os parâmetros utilizados para o GA mostram uma boa calibração do algoritmo e um desempenho satisfatório na otimização do modelo WMP correlacionado como formulado. Ainda assim, pode ser considerado que há espaço para melhorias na metodologia de calibração visando diminuir a variância dos resultados, e portanto permitindo a redução do número de execuções para problemas futuros.

Tabela 4.8 – Coeficientes do melhor resultado encontrado pelo GA.

$$J = 11, \beta_s = 2,5, f_o = 0,228 \text{ kW/m}^2.$$

	A_j	B_j	C_j
X_R	-0,67937	0,63049	0,03910
D_1	-3,68035	3,32844	6,75464
D_2	4,73607	4,96089	8,27956
D_3	4,87292	4,96089	7,16520
D_4	4,76539	3,74877	7,51710
D_5	-4,90224	-4,94134	5,30791
D_6	-4,81427	-4,92179	4,25219
D_7	-4,92179	-3,74877	3,60703
D_8	-2,60508	-3,89540	2,98142
D_9	1,89149	-4,94134	2,16031
D_{10}	1,39296	-3,11339	1,30009
D_{11}	-4,95112	-4,96089	4,28152

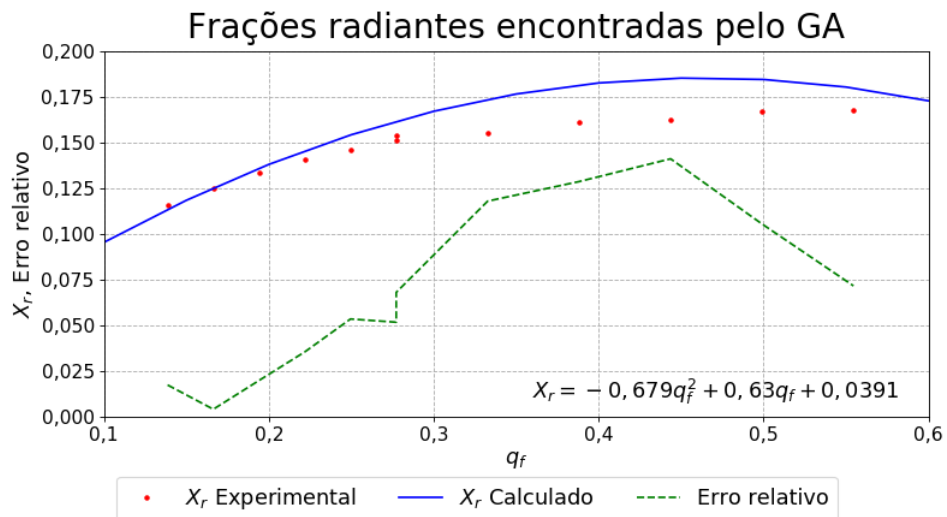


Figura 4.18 – Frações radiantes calculadas pelo GA na melhor solução.

Fluxo de radiação calculado pelo GA: $J = 11$, $\beta_s = 2,5$, $f_o = 0,228 \text{ kW/m}^2$

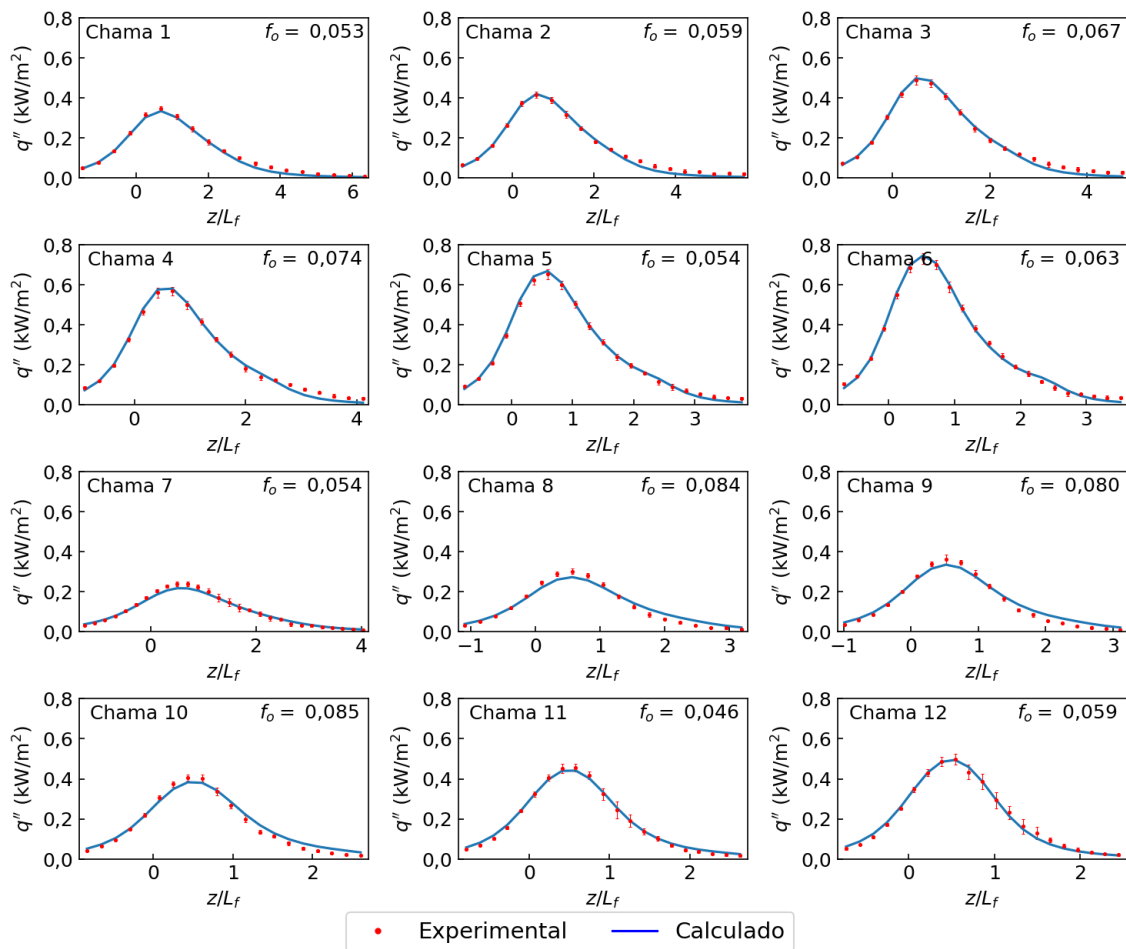


Figura 4.19 – Melhores perfis de radiação calculados pelo GA.

4.2.4 Algoritmo de Dente-de-Leão - DA

A Figura 4.20 exibe cada resultado encontrado, com os resultados médios conectados pelo gráfico de superfície. A Figura 4.21 traz os resultados encontrados pelo DA, com valores médios, desvios padrão e melhores resultados para cada combinação de J e β_s .

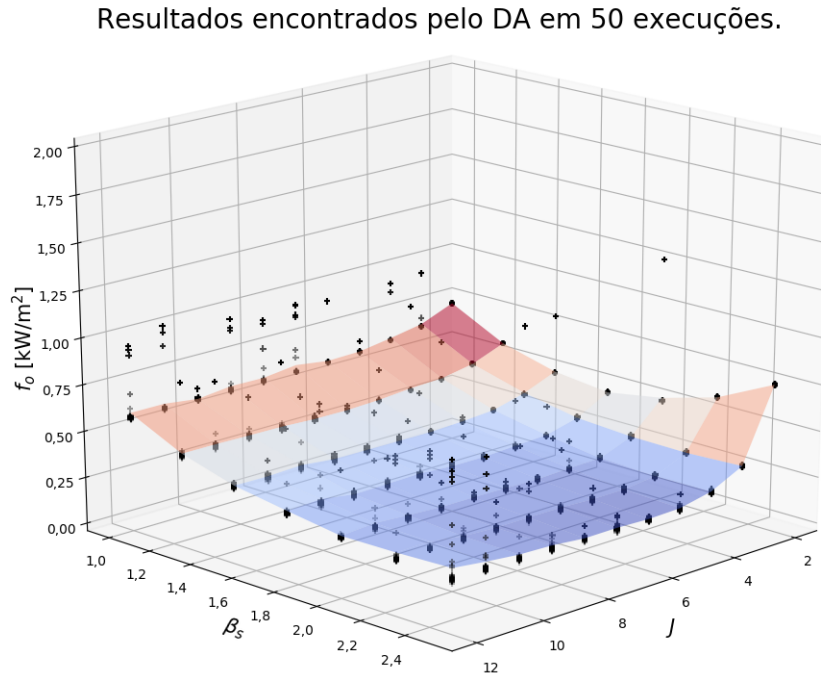


Figura 4.20 – Resultados encontrados pelo DA para cada combinação de J e β_s .

A mesma tendência de resultados é encontrada, dessa vez com um comportamento parecido com o do GWO, com médias e valores mínimos excelentes. Os desvios padrões, entretanto, não se mostram tão uniformes quanto aqueles do GWO, exibindo alguns pontos com maior variância, normalmente em valores mais altos de J . Ainda assim, essas variâncias maiores são menores do que aquelas encontradas pelo SHO. A Figura 4.20 exibe tanto vários pontos muito agrupados quanto diversos pontos isolados que podem vir a ser considerados anômalos em uma análise mais aprofundada, demonstrando que na maior parte das vezes pode-se considerar que o algoritmo encontrará soluções muito próximas das ideais. Isso pode ser observado comparando os valores de desvio encontrados na calibração e na simulação final. A calibração, para o caso escolhido, apresentou um desvio muito menor do que na simulação final (0,011 kW/m² em comparação com 0,153 kW/m²),

Resultados de f_o para cada combinação de J e β_s encontrado pelo DA em 50 execuções.

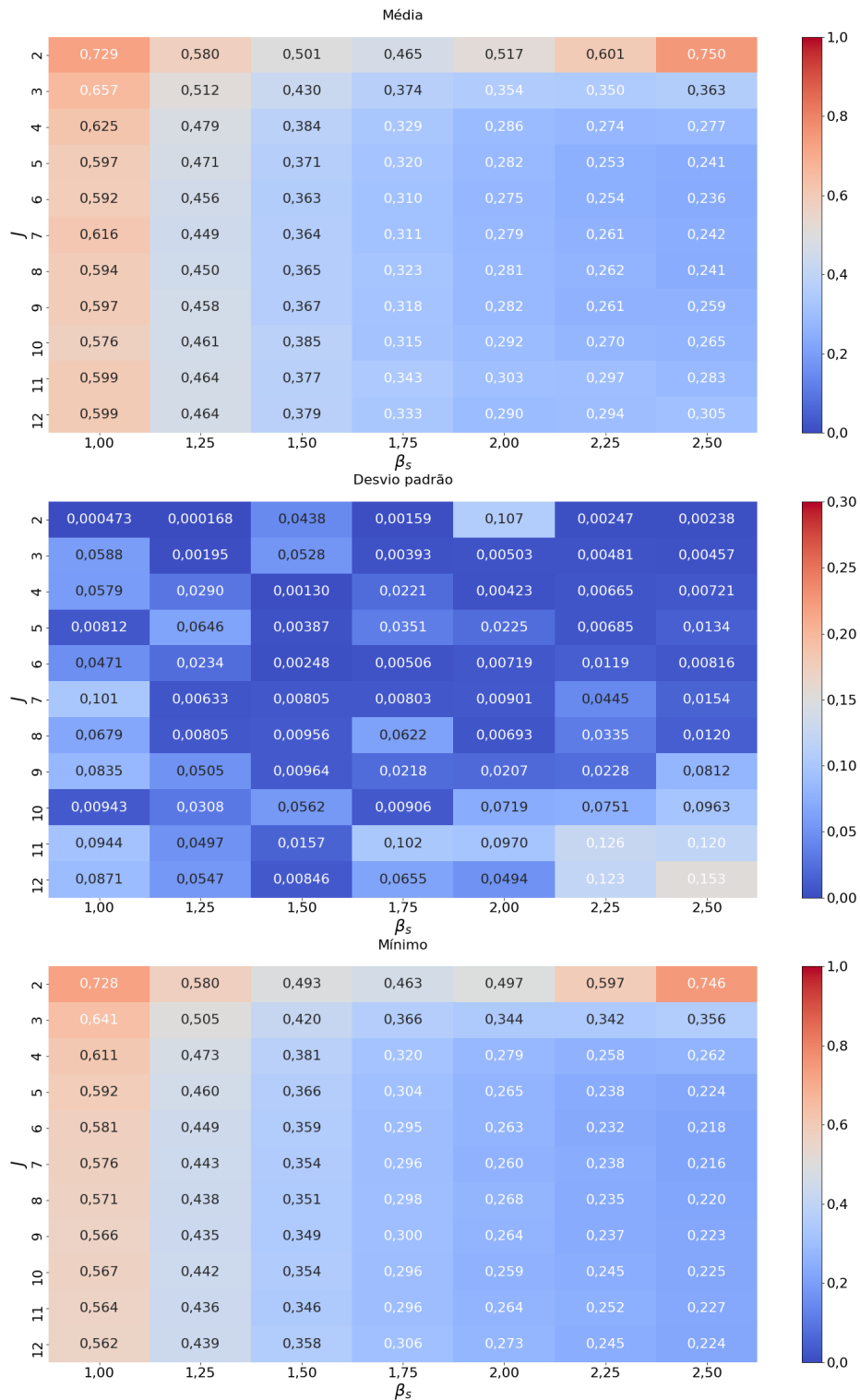


Figura 4.21 – Resultados médios, desvios padrão e resultados mínimos encontrados pelo

DA para cada combinação de J e β_s .

assim como médias maiores (0,249 kW/m² contra 0,305 kW/m²). Entretanto o valor mínimo do cálculo final, 0,224 kW/m², encontra-se abaixo de todos os valores encontrados na calibração, e inclusive de todos os melhores valores encontrados pelos três algoritmos analisados anteriormente (GWO, SHO e GA), mostrando eficiência do DA em comparação com os demais, apesar de uma provável incerteza a ser encontrada pelo usuário.

O melhor resultado foi dado pela configuração $J = 7$ e $\beta_s = 2,5$, apresentando um valor de $f_o = 0,216$ kW/m². Os coeficientes A , B e C utilizados na correlação para X_R e cada D_j são exibidos na Tabela 4.9. A Figura 4.22 traz os perfis de radiação calculados com esses coeficientes, e a Figura 4.23 mostra a previsão de X_R .

Tabela 4.9 – Coeficientes do melhor resultado encontrado pelo DA.

$$J = 7, \beta_s = 2,5, f_o = 0,216 \text{ kW/m}^2.$$

	A_j	B_j	C_j
X_R	-0,53002	0,52260	0,05495
D_1	-2,89093	4,14954	1,86578
D_2	4,30105	3,97029	2,36479
D_3	1,00561	0,09760	1,52512
D_4	-0,85410	-4,34710	2,79512
D_5	-0,38820	0,21399	0,10395
D_6	3,35422	-4,36163	1,38855
D_7	2,99108	-4,49324	1,57195

Os perfis encontram-se muito próximos aos dados experimentais, com poucos desvios evidentes. Se comparados com o melhor resultado encontrado pelo SHO, o qual utiliza o mesmo número de fontes, as únicas semelhanças que podem ser encontradas são com relação aos coeficientes relativos a X_R (por ser relacionado somente à natureza da chama) e a D_6 , os quais apresentam coeficientes muito próximos. Todos os restantes são drasticamente diferentes, inclusive mudando de sentido entre os dois resultados (parábolas negativas ou positivas). Isso mostra que essa correlação pode levar o modelo a resultados semelhantes utilizando coeficientes muito distintos. Tal observação pode ser considerada como uma falta de "física" na correlação, o que faz com que o modelo não se aproxime realmente do fenômeno, mas sim seja apenas uma representação matemática abstrata que casualmente é capaz de chegar a valores semelhantes aos observados experimentalmente. Outras correlações devem ser testadas levando em consideração o fenômeno em si, potencialmente encontrando resultados mais precisos além de colaborar com uma melhor

Fluxo de radiação calculado pelo DA: $J = 7$, $\beta_s = 2,5$, $f_o = 0,216 \text{ kW/m}^2$

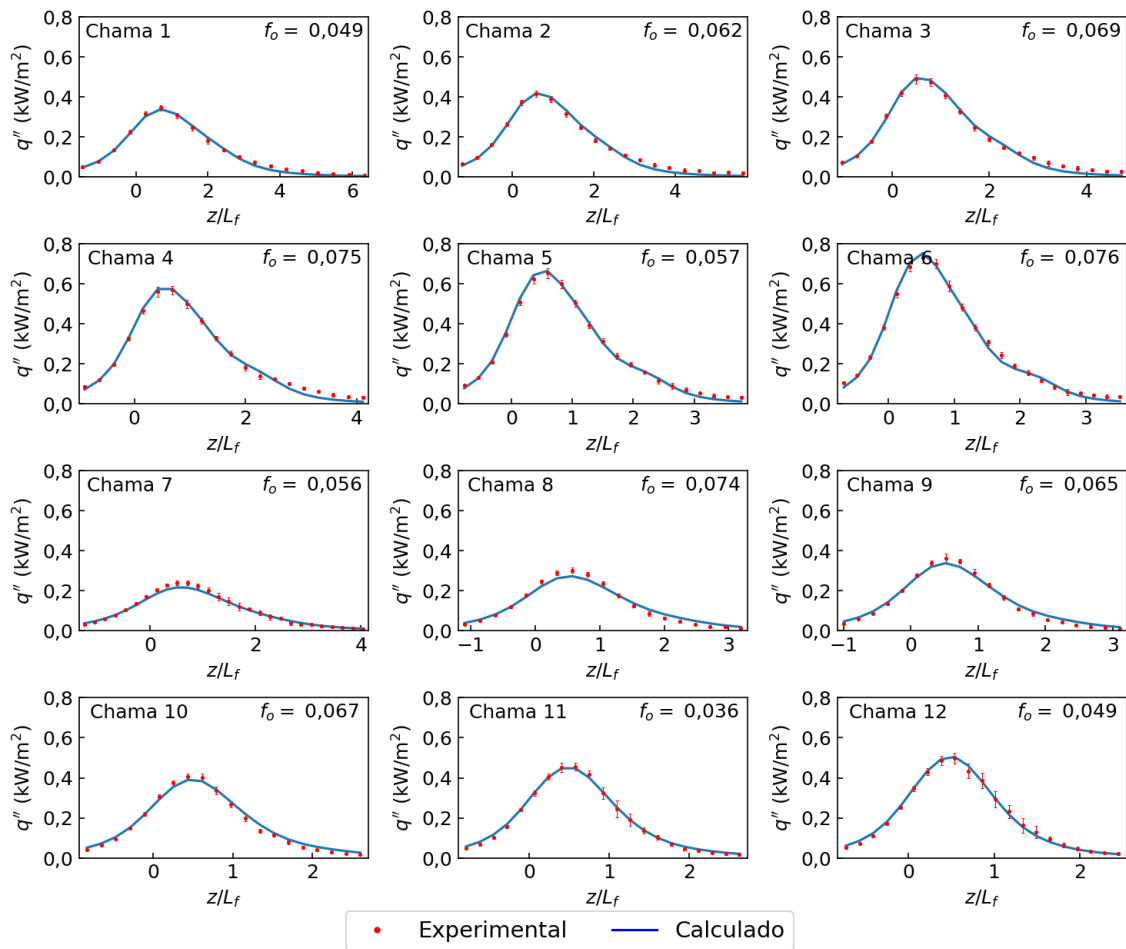


Figura 4.22 – Melhores perfis de radiação calculados pelo DA.

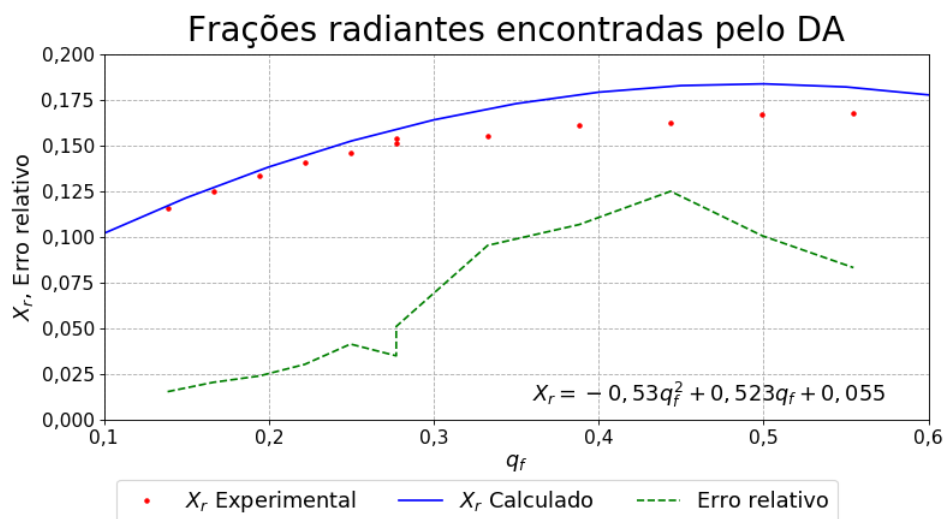


Figura 4.23 – Frações radiantes calculadas pelo DA na melhor solução.

compreensão do fenômeno da combustão. Por outro lado, a previsão de X_R mostrou uma redução no erro, com seu maior desvio sendo 12,5%, ainda na chama 10, o que pode ter contribuído para a fato de esta ser a melhor solução neste trabalho. Ainda assim, a tendência ainda é de que os valores reais previstos de X_R sejam maiores do que aqueles estimados experimentalmente, ainda de acordo com as análises anteriores.

Os resultados aqui discutidos levam à conclusão de que, apesar da maior quantidade de parâmetros, o DA pode ser considerado robusto e com uma boa capacidade de refino devido aos excelentes resultados apresentados em comparação com os demais métodos. Já que os poucos casos com maior variância apresentaram a variação devido a alguns pontos isolados, pode se considerar que os parâmetros escolhidos na calibração são satisfatórios. Melhorias podem ser feitas por exemplo modificando-se o método de calibração a fim de obter uma observação mais detalhada do comportamento do algoritmo. Para o problema do modelo WMP correlacionado, no entanto, a calibração realizada se mostrou suficiente.

4.2.5 Otimização de Bactérias - BFO

A Figura 4.24 apresenta todos os resultados com a superfície representando seus valores médios para cada configuração. Já a Figura 4.25 mostra os resultados encontrados pelo BFO (médias, desvios padrão e mínimos) para cada combinação de J e β_s .

O BFO se apresenta como o algoritmo de pior desempenho no geral, com valores altos de média, desvio e mínimo em todos os casos. Os menores desvios se apresentam em pequenos β_s e são crescentes à medida que o comprimento de distribuição aumenta, mostrando maior sensibilidade do algoritmo em relação aos gradientes da função analisada em comparação com o número de variáveis. O mesmo comportamento pode ser observado mais graficamente na Figura 4.24, onde se nota o agrupamento dos resultados para pequenos comprimentos de distribuição e um espalhamento gradual dos resultados à medida que β_s é aumentado. Esse espalhamento não ocorre em torno das mesmas médias apresentadas pelos algoritmos anteriores (podem ser comparados, por exemplo, com os resultados apresentados pelo SHO na Figura 4.13), mas sim apresentam um prejuízo significativo de eficácia, elevando a média em comparação com os demais métodos estocásticos analisados. Os valores mínimos encontram-se bem aquém dos encontrados pelos outros algoritmos, demonstrando ineficiência, mesmo que apresentando médias e desvios similares àqueles previstos pelo DoE.

Resultados encontrados pelo BFO em 50 execuções.

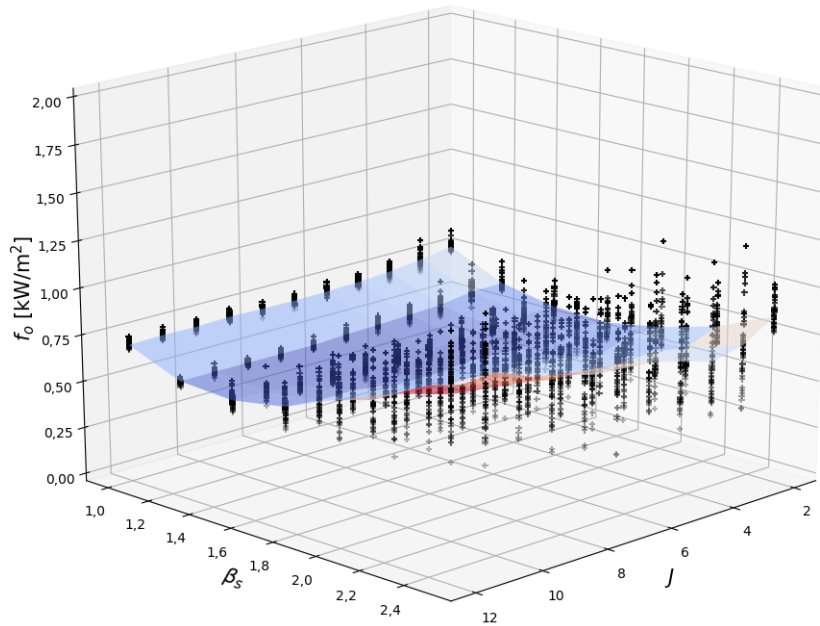


Figura 4.24 – Resultados encontrados pelo BFO para cada combinação de J e β_s .

A melhor configuração encontrada foi dada por $J = 5$ e $\beta_s = 2,25$, com $f_o = 0,359$ kW/m², acima de todos os resultados anteriores. Os coeficientes A , B e C utilizados na correlação para X_R e cada D_j são exibidos na Tabela 4.10. A Figura 4.26 mostra os perfis calculados pelos coeficientes, enquanto a Figura 4.27 mostra a comparação entre o X_R previsto pelo modelo WMP e o estimado experimentalmente.

Tabela 4.10 – Coeficientes do melhor resultado encontrado pelo BFO.

$$J = 5, \beta_s = 2,25, f_o = 0,359 \text{ kW/m}^2.$$

	A_j	B_j	C_j
X_R	-0,75227	0,67971	0,02699
D_1	2,85797	4,68143	0,58652
D_2	-0,66006	-0,85466	2,55119
D_3	0,06048	-2,00546	1,53268
D_4	3,45583	-3,83282	1,08948
D_5	-2,47699	0,60356	0,48628

O resultado, apesar de pior do que aqueles que os outros métodos foram capazes de encontrar, ainda mostra uma concordância razoável com os pontos experimentais,

Resultados de f_0 para cada combinação de J e β_s encontrado pelo BFO em 50 execuções.

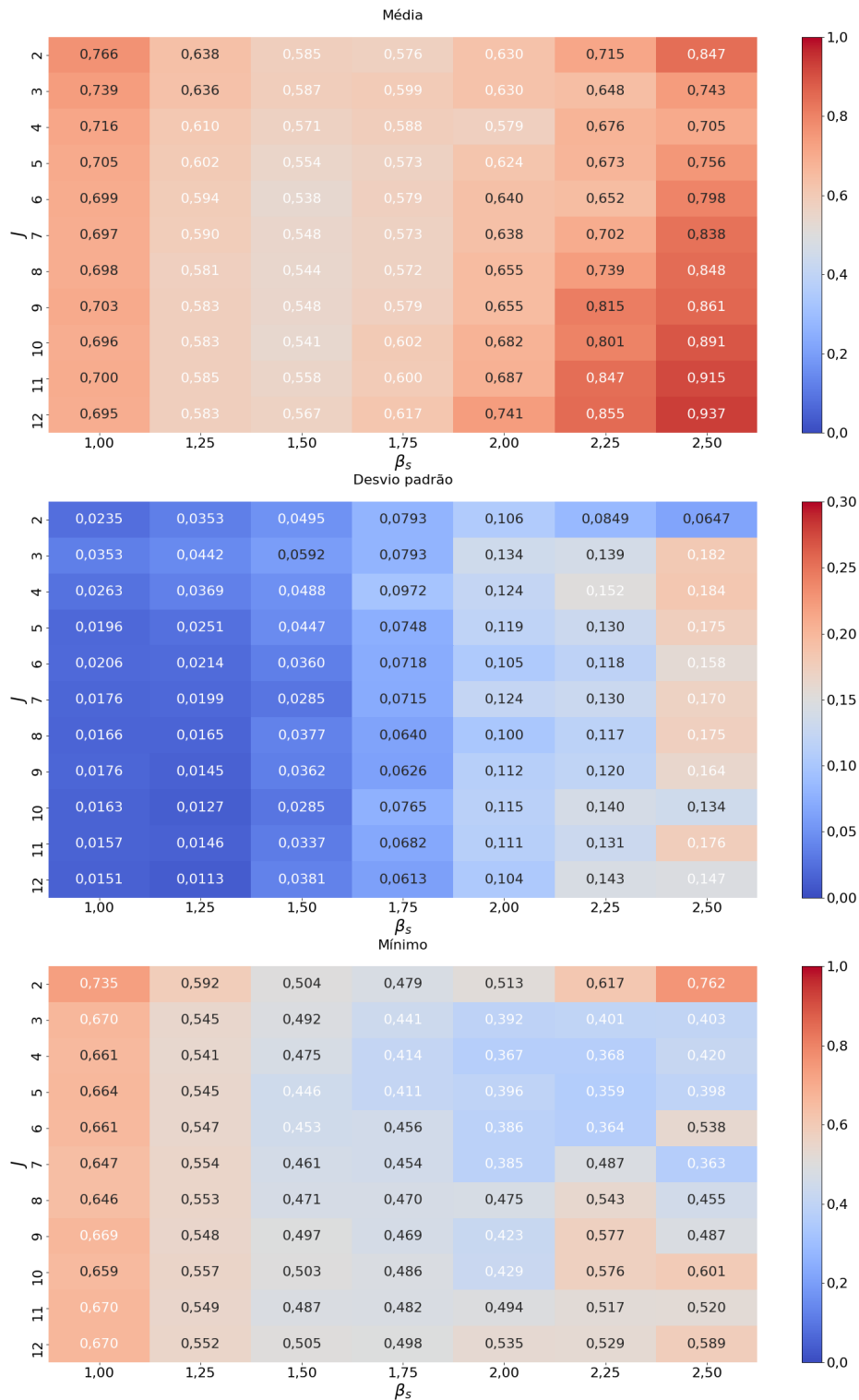


Figura 4.25 – Resultados médios, desvios padrão e resultados mínimos encontrados pelo BFO para cada combinação de J e β_s .

Fluxo de radiação calculado pelo BFO: $J = 5$, $\beta_s = 2,2$, $f_o = 0,359 \text{ kW/m}^2$

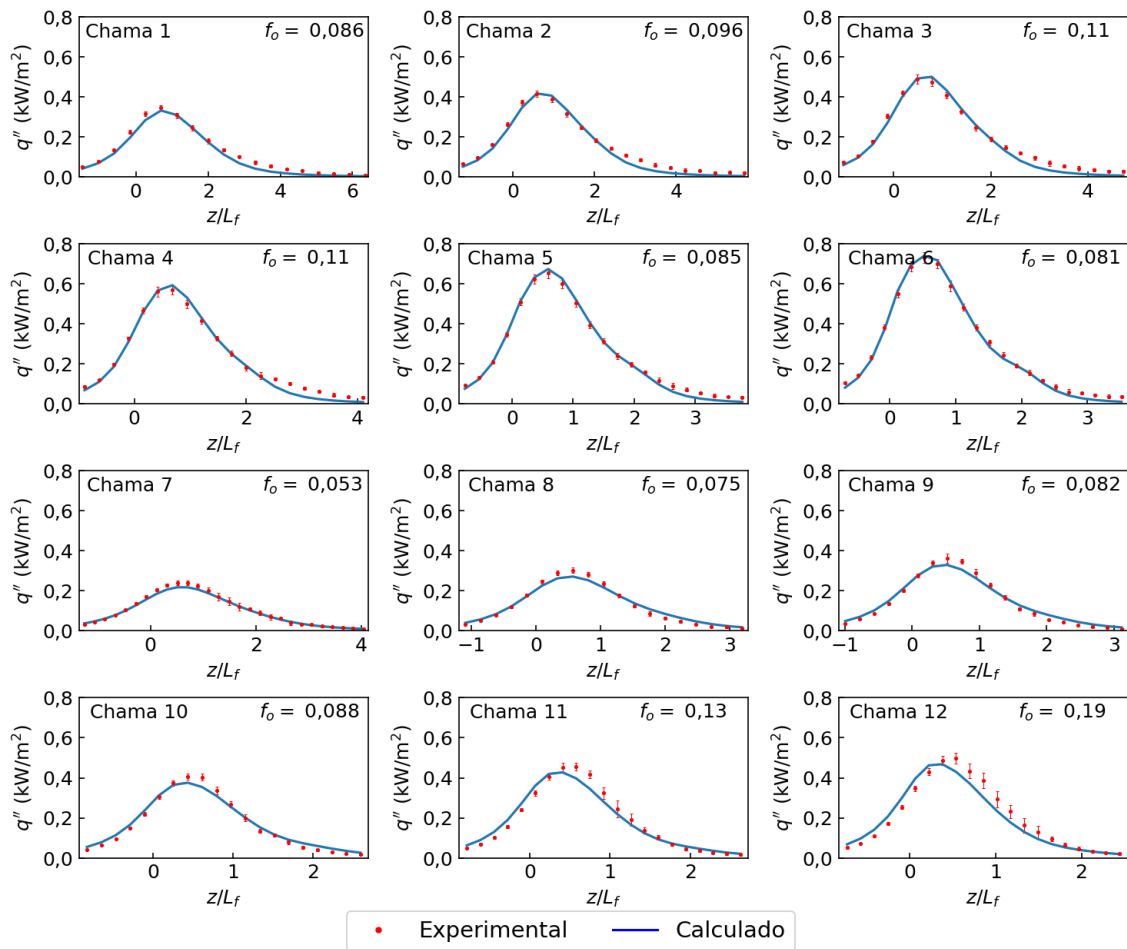


Figura 4.26 – Melhores perfis de radiação calculados pelo BFO.

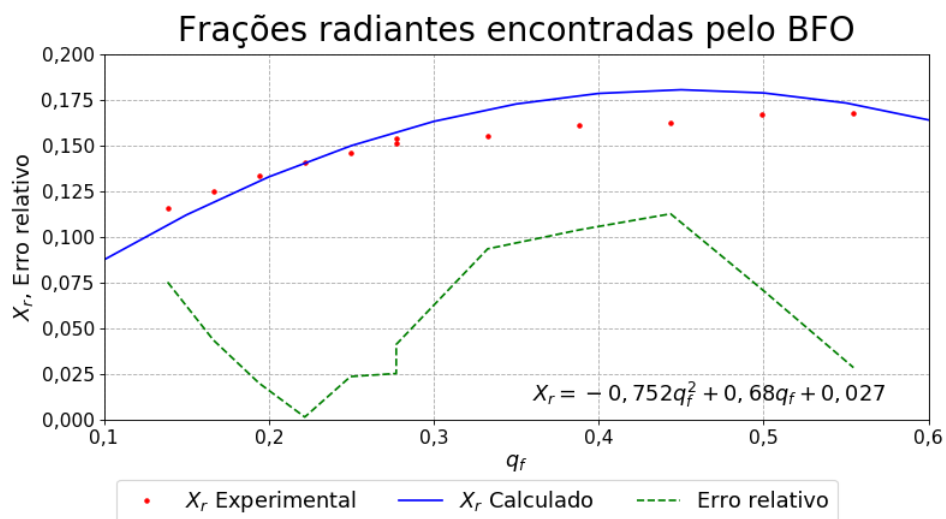


Figura 4.27 – Frações radiantes calculadas pelo BFO na melhor solução.

entretanto os desvios presentes entre experimental e numérico são mais expressivos, principalmente nas chamadas 9, 10, 11, e 12, que mostram uma piora gradual causada também por um deslocamento para a esquerda do pico de radiação calculado numericamente em relação ao pico de radiação medido em laboratório. A previsão de X_R segundo o BFO apresentou o menor erro entre os cinco algoritmos, com um máximo em torno de 11,5% para a chamada 10. Dado que, como comentado anteriormente, os valores de X_R tendem a ser subestimados experimentalmente, o menor desvio (ainda que apenas ligeiramente) pode haver influenciado na queda de qualidade da solução.

Pode-se concluir portanto que o BFO é um algoritmo de difícil calibração e que os parâmetros utilizados não foram eficazes na resolução do problema do modelo WMP correlacionado considerando a variedade de configurações deste modelo que foram testadas. Uma análise mais aprofundada pode ser feita para cada uma dessas ferramentas de forma a compreender melhor seu funcionamento e como elas influenciam no comportamento do algoritmo e na resolução do problema. Entretanto, de acordo com a metodologia de calibração e com os valores escolhidos para o teste neste trabalho, o algoritmo não demonstrou bom desempenho, sendo superado por todos os demais analisados neste estudo.

4.2.6 Análise de convergência

Buscando comparar, para cada algoritmo, sua capacidade de convergência para os mínimos globais de cada problema, são analisados os pontos extremos das configurações do modelo WMP, ou seja, $J = 2$ e $\beta_s = 1$, $J = 2$ e $\beta_s = 2,5$, $J = 12$ e $\beta_s = 1$, $J = 12$ e $\beta_s = 2,5$. Em cada gráfico, os pontos representam onde houve modificação de $f_{o,best}$ ao longo da execução. Foram consideradas execuções aberrantes aquelas que finalizaram em um mínimo local distante da média final (ou seja, que encontra-se 3 desvios padrões distante da média), sendo esses excluídos para o cálculo da média e dos desvios ao longo da execução. A linha preta representa o valor médio de $f_{o,best}$ ao longo da execução, enquanto que as linhas vermelhas são os valores desviados 3 desvios padrões a partir da média. A linha verde representa a evolução do valor mínimo.

A Figura 4.28 traz os gráficos de convergência para o GWO. Em todas as configurações os desvios da resposta diminuiriam rapidamente, demonstrando uma efetiva busca global das melhores regiões. Apenas na configuração $J = 12$ e $\beta_s = 2,5$ houve alguns resultados que acabaram presos em mínimos locais muito distantes dos melhores

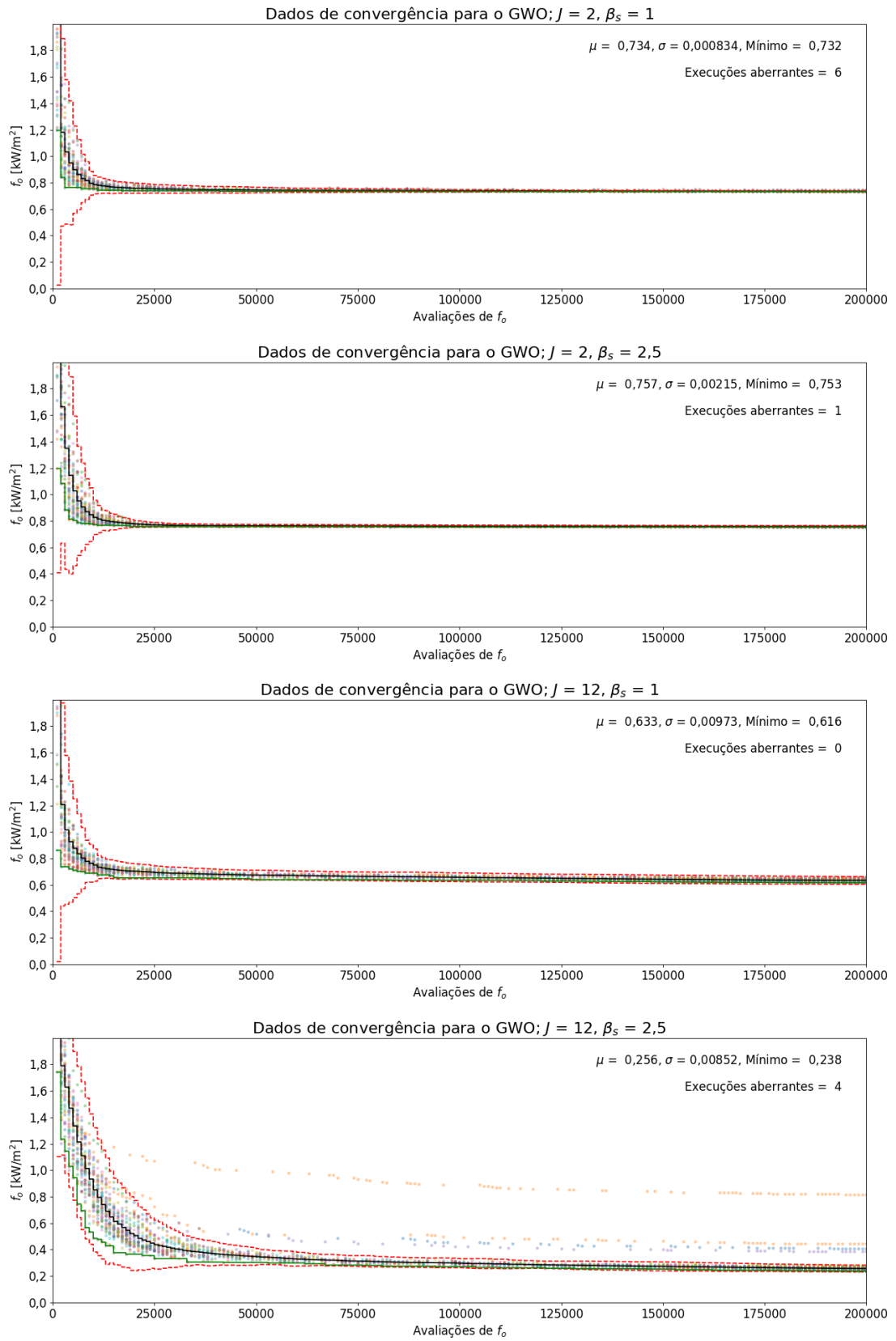


Figura 4.28 – Gráficos de convergência para o GWO.

resultados. Essas observações mostram a robustez do GWO aplicado ao modelo WMP correlacionado.

A Figura 4.29 traz os gráficos de convergência para o SHO. Nas configurações com poucas variáveis, o SHO se mostrou robusto com uma convergência rápida e com poucas execuções presas em mínimos locais distantes. Já para as configurações com mais variáveis, o algoritmo se torna extremamente suscetível a se ater a mínimos locais. Maiores comprimentos de distribuição parecem dificultar a busca global, aumentando consideravelmente o desvio ao longo da execução. Quando o espaço é composto de poucas dimensões, este problema não é tão grave, já que é muito mais fácil de ser explorado. Entretanto, problemas com muitas variáveis se tornam muito improváveis de serem resolvidos com poucas execuções.

A Figura 4.30 traz os gráficos de convergência para o GA. Este algoritmo apresenta um desenho similar ao GWO, com um comportamento estável, entretanto com maiores desvios padrões, ocasionados por uma maior facilidade de se manter preso em mínimos locais. Apesar disso, várias execuções encontram-se próximas do valor mínimo, deslocando a curva da média (em preto) para próximo da curva de mínimo (em verde). O aumento do número de variáveis e o aumento do comprimento de distribuição parecem afetar independentemente a robustez do algoritmo. Estas observações demonstram que o algoritmo oferece uma alta probabilidade de encontrar boas soluções, mas pode necessitar de algumas execuções extras para conferência do resultado.

A Figura 4.31 traz os gráficos de convergência para o DA. O comportamento do DA é bem atípico quando comparado com os algoritmos anteriores. Ele apresenta uma variância extremamente alta no início da execução, provocado pela natureza completamente aleatória de geração de soluções que utiliza. Entretanto, após algum tempo, a variação diminui, e o refino da solução local é realizado eficientemente. Quanto mais variáveis, mais suscetível a prender-se em um mínimo local o algoritmo se torna, o que é evidenciado pelos pontos distantes nas configurações com $J = 12$. Mesmo assim, quando esses valores são eliminados como execuções aberrantes, os desvios se tornam extremamente baixos. Assim como o GA, o DA se mostra robusto, entretanto pode necessitar de algumas execuções extras buscando conferir se o melhor resultado foi realmente encontrado.

A Figura 4.32 traz os gráficos de convergência para o BFO. O BFO mostra uma instabilidade semelhante ao SHO, entretanto com um efeito mais expressivo da variação

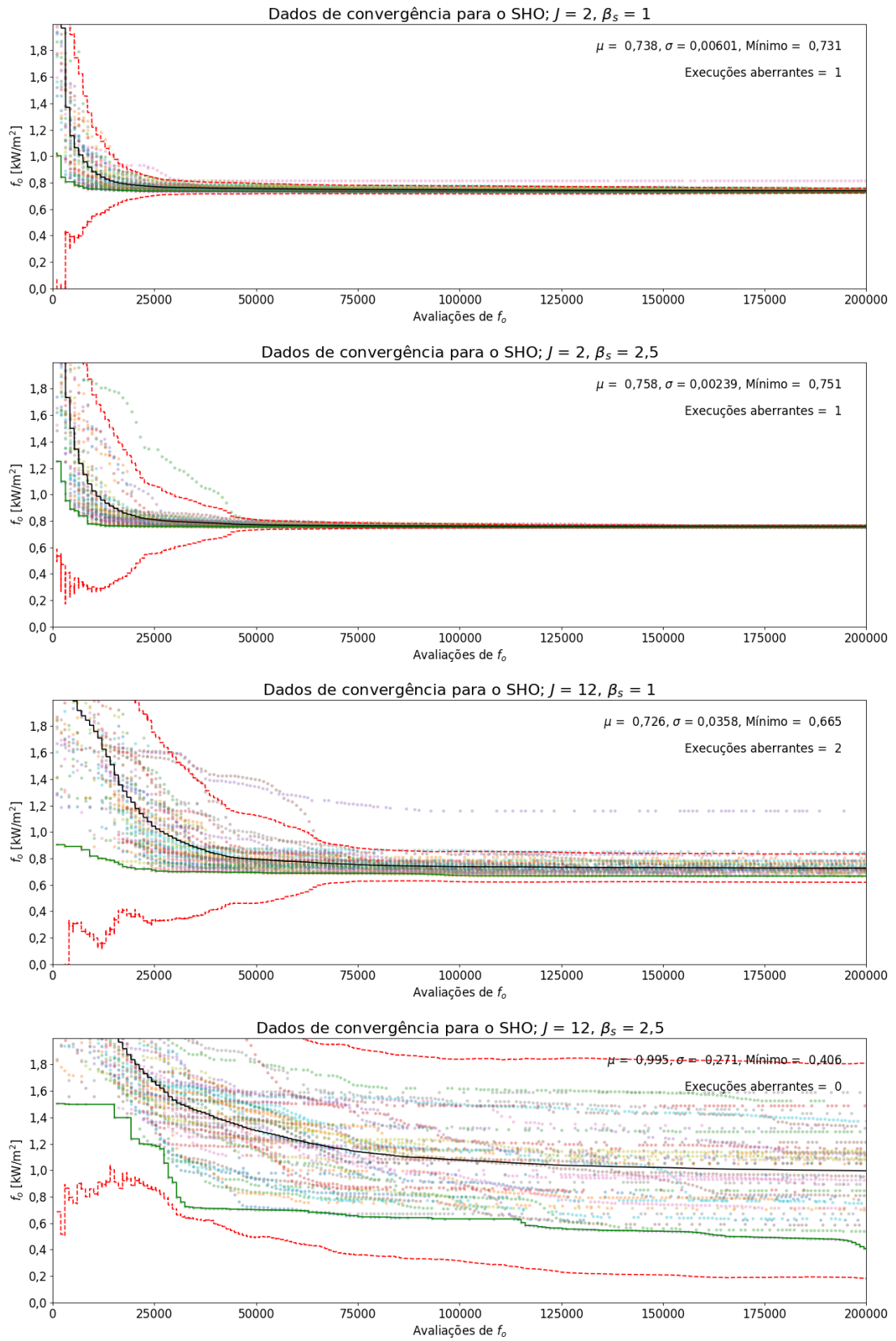


Figura 4.29 – Gráficos de convergência para o SHO.

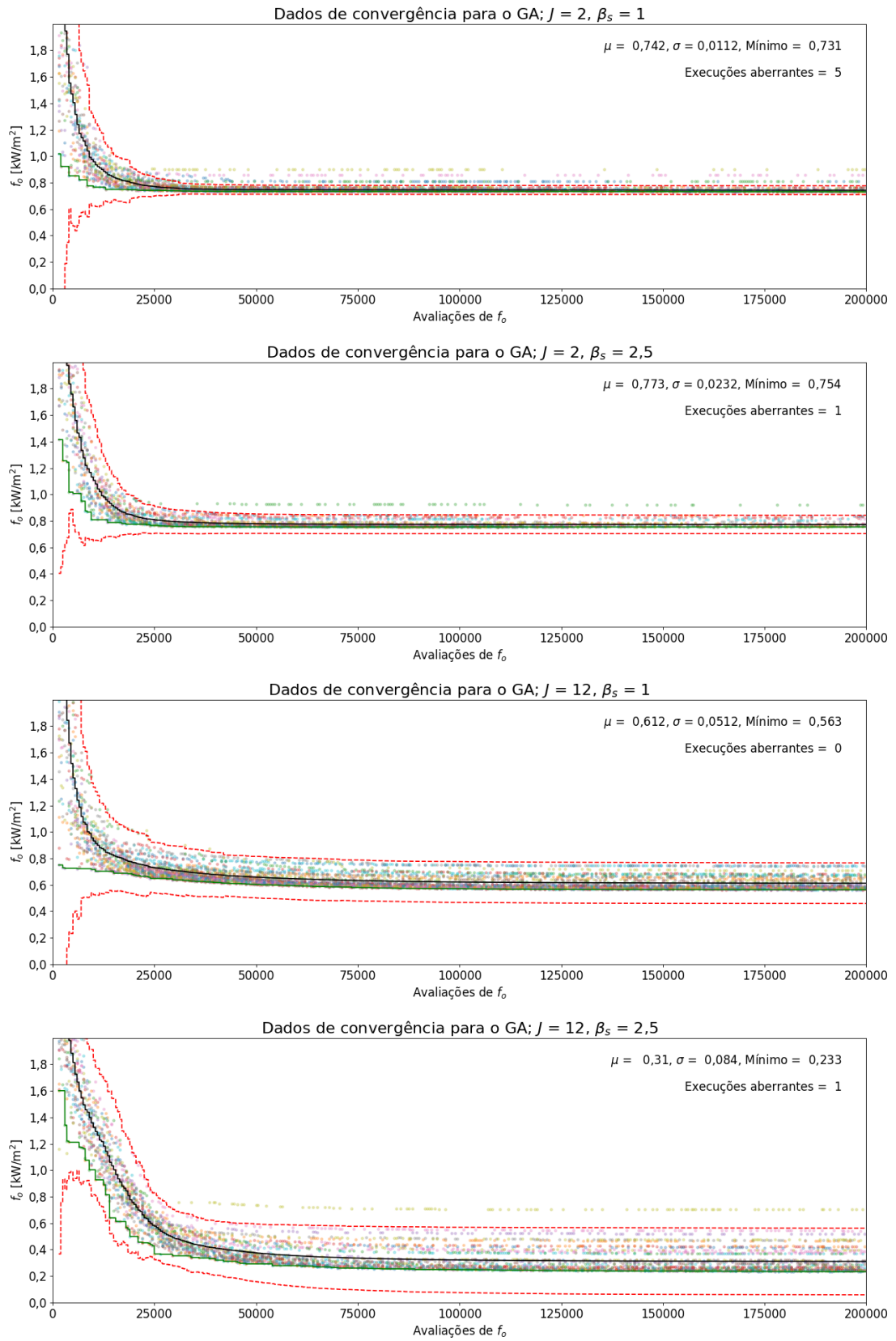


Figura 4.30 – Gráficos de convergência para o GA.

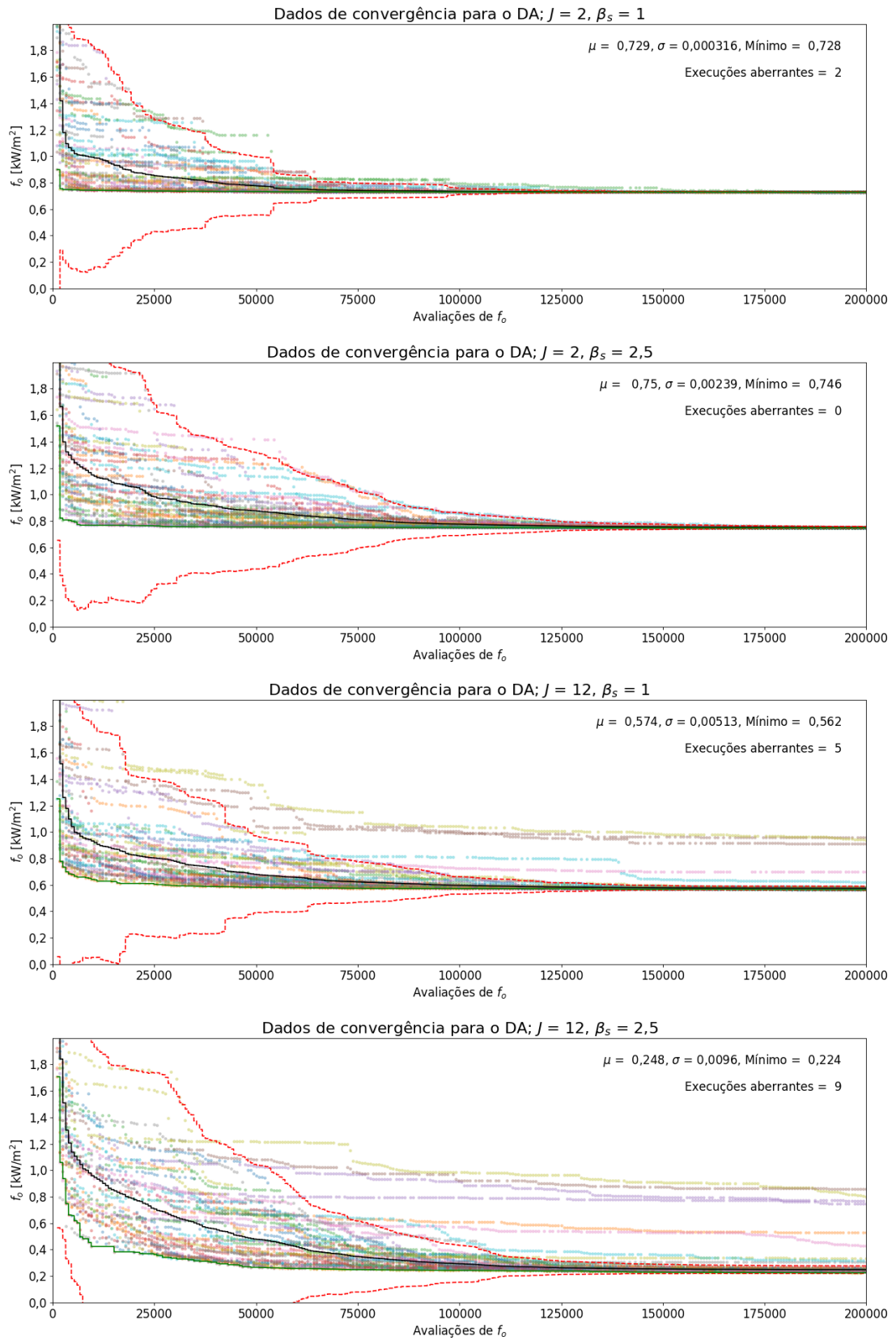


Figura 4.31 – Gráficos de convergência para o DA.

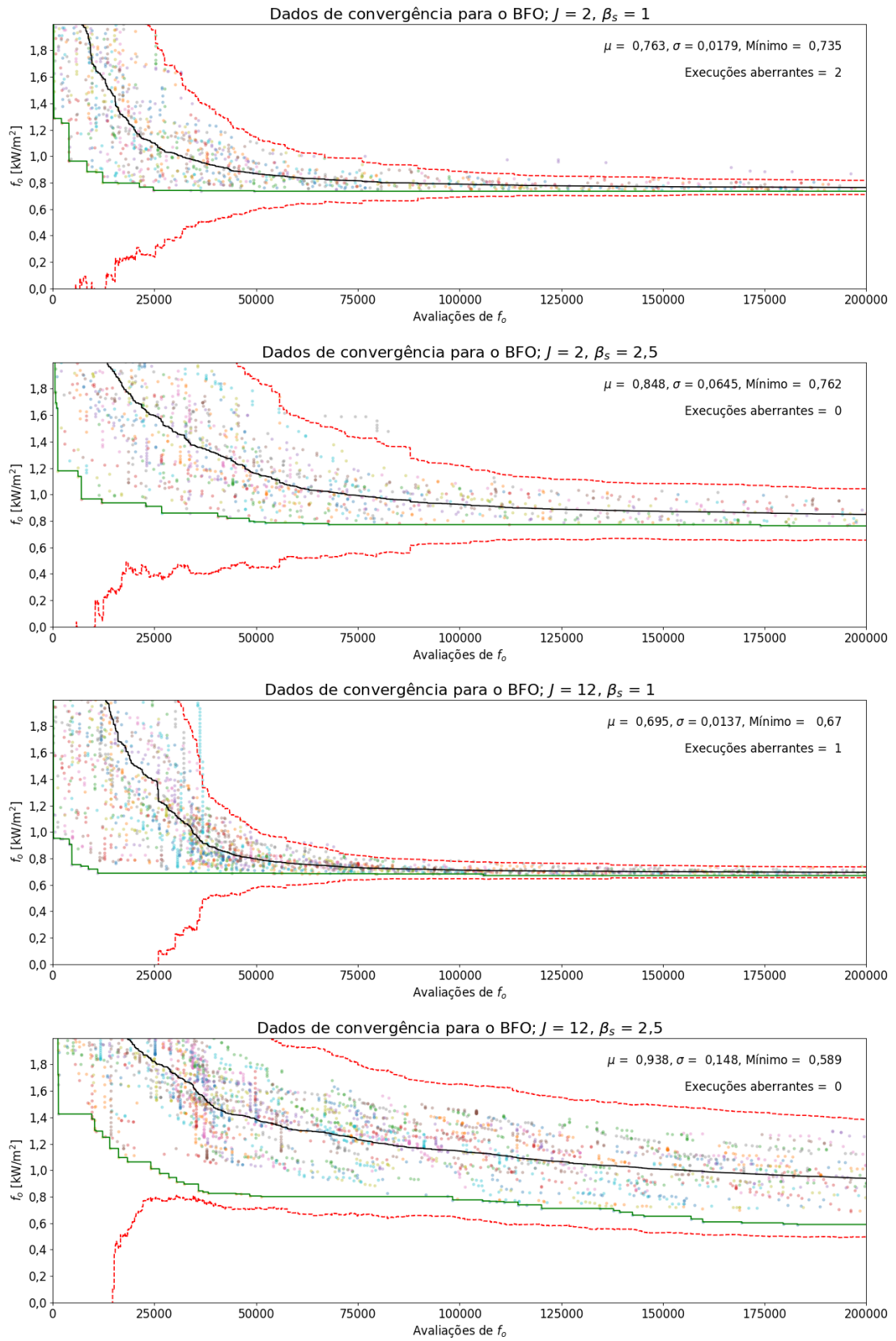


Figura 4.32 – Gráficos de convergência para o BFO.

de β_s , com o número de variáveis parecendo ser menos relevante, já que para o mesmo β_s mas com valores de J diferentes o algoritmo apresentou desempenhos similares. Isso se deve ao fato de que o BFO trabalha com uma dinâmica de sinalização entre bactérias que distorce diretamente a percepção da função objetivo por cada indivíduo da população. De fato, quando o algoritmo é analisado diretamente no código utilizando os parâmetros escolhidos pelo DoE, nota-se que os valores dessa sinalização chegam a ser duas ordens de grandeza maiores do que os valores mínimos da função objetivo, tornando a função objetivo em si praticamente irrelevante no funcionamento do algoritmo a não ser em regiões com altos gradientes, onde ela se aproxima das ordens de grandeza da sinalização. Entretanto, uma redução extremada da ordem de grandeza da sinalização pode causar o efeito contrário, fazendo com que esta se torne praticamente irrelevante em relação à f_o . Essa dinâmica, portanto, se mostra mais eficiente quando a função objetivo não apresenta valores muito altos e muito baixos, como ocorre no caso do problema do modelo WMP correlacionado da forma como foi formulado. Além disso, o grande número de parâmetros a serem definidos pelo usuário faz com que seja extremamente difícil sua calibração, o que prejudica a certeza do bom resultado na simulação final.

5 CONCLUSÕES

Foi realizado um estudo sobre algoritmos estocásticos de otimização aplicado à otimização do modelo WMP correlacionado para radiação em chamadas como formulado por trabalhos anteriores. A literatura foi revisada buscando entender o funcionamento desses algoritmos dentro da diversidade de ferramentas que esse campo apresenta. Dentre os algoritmos pesquisados, foram escolhidos cinco algoritmos distintos que apresentam ferramentas diferentes para serem comparados na solução do problema proposto. Devido à ausência de informações bem estabelecidas sobre a calibração desses algoritmos, foi proposta uma metodologia de calibração de algoritmos de otimização a serem aplicados em problemas com diversas configurações a serem exploradas. Tal metodologia foi baseada no método de DoE, utilizando uma metodologia de regressão linear e de análises estatísticas para a obtenção do melhor desempenho. Com base na teoria pesquisada e na metodologia definida, foram realizados testes de calibração para cada um dos algoritmos utilizando o problema definido como mais difícil de ser resolvido. A partir desses resultados preliminares, foram escolhidos os parâmetros e realizadas as execuções finais, a partir das quais o desempenho de cada algoritmo foi analisado e comparado com os demais.

- O algoritmo GWO se mostrou com o melhor desempenho geral, de rápida convergência, baixa variância no resultado final e fácil calibração, possuindo apenas dois parâmetros a serem definidos pelo usuário.
- O SHO se apresentou com uma hierarquia complexa a ser implantada no código em contraste com a simplicidade na calibração, sendo necessária a definição de apenas três parâmetros. Mesmo assim seus resultados não se mostraram satisfatórios para o problema estudado, apresentando altas médias e variâncias para configurações com maiores valores de J e β_s .
- O GA apresentou bons resultados apesar de uma variância maior que a do GWO, mas ainda estável dentro de todo o domínio. Os resultados mostram eficiência na resolução do problema, entretanto podendo ser necessária execuções extras para conferência do resultado devido à maior variância.
- O DA apresentou bons resultados apesar de uma certa tendência a prender-se em mínimos locais. Sua convergência também foi mais lenta no início das execuções,

mas sua capacidade de refino do resultado se mostrou excepcionalmente eficiente.

- O BFO apresentou uma grande dificuldade em sua calibração e, por consequência, um desempenho muito inferior em relação aos demais métodos.

A análise aplicada e os resultados discutidos demonstram que o aumento da complexidade no algoritmo normalmente é prejudicial à sua operação (como proposto pelo SHO), e quanto menos parâmetros a serem definidos maiores são as probabilidades de bons resultados serem encontrados (vide os resultados apresentados pelo GWO). Mecânicas que distorcem a função objetivo (como utilizadas pelo BFO) devem ser analisadas com muito cuidado e aplicadas com precaução dependendo do problema a ser resolvido. Algoritmos que discretizam o domínio de busca (como apresentado pelo GA) não prejudicam a qualidade dos resultados e, caso necessário, o resultado final pode ser aprimorado com a utilização de um algoritmo determinístico ou com alguma outra ferramenta estocástica com eficiência de refino (como exibido pelo DA).

Com relação ao modelo WMP correlacionado, os valores apresentam tendências similares às encontradas em trabalhos anteriores, sendo as configurações com maiores comprimentos de distribuição e maiores quantidades de fontes capazes de apresentar resultados mais próximos dos experimentais. A melhor solução encontrada foi dada pela configuração $J = 7$ e $\beta_s = 2, 5$, com um valor de $f_o = 0, 216 \text{ kW/m}^2$, encontrado pelo DA.

5.1 Sugestões para Trabalho Futuros

- Se faz necessário o estudo mais aprofundado de metodologias de calibração e de estimativa de comportamento da função a ser otimizada, de forma que os algoritmos possam ser executados em suas capacidades mais próximas do ótimo.
- Uma análise mais detalhada aplicando uma ferramenta por vez ou metodologia semelhante seria valorosa para o desenvolvimento de novos algoritmos e para a adaptação e calibração dos já existentes, independentemente de analogias naturais, visando somente a teoria matemática e o custo computacional envolvido na resolução do problema.
- É essencial a obtenção de mais resultados experimentais para a generalização do modelo WMP com respeito a diferentes combustíveis, regimes de escoamento e condições de queima.

- Com base em novos dados experimentais, outras formulações para o modelo WMP correlacionado, seja modificando-se as variáveis envolvidas, as equações ou os domínios de busca, devem ser aplicadas à medida que a compreensão do fenômeno de combustão avança, aproximando o modelo à própria física e química envolvida.
- Finalmente, é importante a integração de todas as sugestões supracitadas, aplicando o estado da arte da otimização computacional aos novos modelos que surgirão e a qualquer outro problema necessário, desenvolvendo o conhecimento técnico e científico de maneira prática e eficiente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abedinpourshotorban, H., Mariyam Shamsuddin, S., Beheshti, Z., e Jawawi, D. N. Electromagnetic field optimization: A physics-inspired metaheuristic optimization algorithm, **Swarm and Evolutionary Computation**, 2015.

Askarzadeh, A. A novel metaheuristic method for solving constrained engineering optimization problems: Crow search algorithm, **Computers and Structures**, vol. 169, 2016.

Atashpaz-Gargari, E. e Lucas, C. [IEEE 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation - Singapore (2007.09.25-2007.09.28)] 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation - Imperialist competitive algorithm: An algorithm for optimization inspired by imperialistic competition, 2007.

Box, G. E. P. e Behnken, D. W. Some New Three Level Designs for the Study of Quantitative Variables, **Technometrics**, vol. 2, 1960.

CESUP, C. N. d. S. **Cluster Sun Fire (Newton) - CESUP**. <http://www.cesup.ufrgs.br/recursos-e-servicos-1/hardware-1/sun-fire>, Acesso em: 15-12-2018.

De Sousa, F. L. **Otimização Extrema Generalizada: Um novo Algoritmo Estocástico para o Projeto Ótimo**. Tese de doutorado, Instituto Nacional de pesquisas Espaciais, São José dos Campos, Brasil, 2003.

Dorigo, M., Maniezzo, V., e Colorni, A. Ant system: optimization by a colony of cooperating agents, **IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part B (Cybernetics)**, vol. 26, 1996.

Ebrahimi, A. e Khamnehchi, E. Sperm Whale Algorithm: an Effective Metaheuristic Algorithm for Production Optimization Problems, **Journal of Natural Gas Science and Engineering**, 2016.

Ekoto, I. W., Ruggles, A. J., Creitz, L. W., e Li, J. X. Updated jet flame radiation modeling with buoyancy corrections, **International Journal of Hydrogen Energy**, vol. 39, 2014.

Fausto, F., Cuevas, E., Valdivia, A., e González, A. A Global Optimization Algorithm Inspired In The Behavior Of Selfish Herds, **BioSystems**, 2017.

Garud, S. S., Karimi, I. A., e Kraft, M. Design of Computer Experiments: A Review, **Computers and Chemical Engineering**, 2017.

Geem, Z. W., Kim, J. H., e Loganathan, G. A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search, **SIMULATION: Transactions of the Society for Modeling and Simulation**, vol. 76, 2001.

Hankinson, G. e Lowesmith, B. J. A consideration of methods of determining the radiative characteristics of jet fires, **Combustion and Flame**, vol. 159(3), p. 1165–1177, 2012.

Hatamlou, A. Black hole: A new heuristic optimization approach for data clustering, **Information Sciences**, vol. 222, 2013.

Holland, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence**. The MIT Press, 1992.

Hunter, J., Dale, D., Firing, E., Droettboom, M., et al. **Matplotlib: Python plotting**. <https://matplotlib.org/>, Acesso em: 2-3-2019.

Husseinzadeh Kashan, A. A new metaheuristic for optimization: Optics inspired optimization (OIO), **Computers and Operations Research**, vol. 55, 2015.

Jaddi, N. S., Alvankarian, J., e Abdullah, S. Kidney-inspired algorithm for optimization problems, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 2016.

Jaderyan, M. e Khotanlou, H. Virulence optimization algorithm, **Applied Soft Computing**, 2016.

Jones, E., Oliphant, T., Peterson, P., et al. **SciPy: Open source scientific tools for Python**. <http://www.scipy.org/>, Acesso em: 2-3-2019.

Kang, Y., Wang, Q., Lu, X., Ji, X., Wang, H., Guo, Q., Chen, Y., Yan, J., e Zhou, J. Experimental and theoretical study on radiative heat transfer characteristics of dimethyl ether jet diffusion flame, **Fuel**, vol. 158, 2015.

Kaveh, A. e Dadras, A. A novel meta-heuristic optimization algorithm: Thermal exchange optimization, **Advances in Engineering Software (Thomson Reuters)**, 2017.

Kaveh, A. e Mahdavi, V. Colliding Bodies Optimization method for optimum design of truss structures with continuous variables, **Advances in Engineering Software (Thomson Reuters)**, vol. 70, 2014.

Kennedy, J. e Eberhart, R. **[IEEE ICNN'95 - International Conference on Neural Networks - Perth, WA, Australia (27 Nov.-1 Dec. 1995)] Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks - Particle swarm optimization**. vol. 4, 1995.

Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., e Vecchi, M. P. Optimization by Simulated Annealing, **Science**, vol. 220, 1983.

Levenberg, K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares, **Quarterly of Applied Mathematics**, vol. 2, 1944.

Li, M. D., Zhao, H., Weng, X. W., e Han, T. A novel nature-inspired algorithm for optimization: Virus colony search, **Advances in Engineering Software (Thomson Reuters)**, vol. 92, 2016.

Li, X., Han, S., Zhao, L., Gong, C., e Liu, X. New Dandelion Algorithm Optimizes Extreme Learning Machine for Biomedical Classification Problems, **Computational Intelligence and Neuroscience**, vol. 2017, 2017.

Lucic, P. e Teodorovic, D. **Bee system: modeling combinatorial optimization transportation engineering problems by swarm intelligence**. In Preprints of the TRISTAN IV triennial symposium on transportation analysis, p. 441–445, 2001.

Marquardt, D. W. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, **SIAM Journal on Applied Mathematics**, vol. 11, 1963.

Martinez, J.-M., Collette, Y., Baudin, M., et al. **pyDOE: Design of Experiments for Python**. <https://pythonhosted.org/pyDOE/>, Acesso em: 2-3-2019.

Miguel, R. B., Machado, I. B., Pereira, F. M., Pagot, P. R., e França, F. H. R. Application of inverse analysis to correlate the parameters of the weighted-multi-point-source model to compute radiation from flames, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 102, p. 816–825, 2016.

Mirjalili, S. SCA: A Sine Cosine Algorithm for Solving Optimization Problems, **Knowledge-Based Systems**, 2016.

Mirjalili, S., Gandomi, A. H., Mirjalili, S. Z., Saremi, S., Faris, H., e Mirjalili, S. M. Salp Swarm Algorithm: A bio-inspired optimizer for engineering design problems, **Advances in Engineering Software (Thomson Reuters)**, 2017.

Mirjalili, S. e Lewis, A. The Whale Optimization Algorithm, **Advances in Engineering Software (Thomson Reuters)**, vol. 95, 2016.

Mirjalili, S., Mirjalili, S. M., e Lewis, A. Grey Wolf Optimizer, **Advances in Engineering Software (Thomson Reuters)**, vol. 69, 2014.

Montgomery, D. C. **Design and Analysis of Experiments**. Wiley, 8th edition, 2013.

Nematollahi, A. F., Rahiminejad, A., e Vahidi, B. A novel physical based meta-heuristic optimization method known as Lightning Attachment Procedure Optimization, **Applied Soft Computing**, vol. 59, 2017.

Oliphant, T. **NumPy**. <http://www.numpy.org/>, Acesso em: 2-3-2019.

Passino, K. Biomimicry of bacterial foraging for distributed optimization and control, **IEEE Control Systems Magazine**, vol. 22, 2002.

Piotrowski, A. P., Napiorkowski, J. J., e Rowinski, P. M. How novel is the “novel” black hole optimization approach?, **Information Sciences**, vol. 267, 2014.

Punnathanam, V. e Kotecha, P. Yin-Yang-pair Optimization: A novel lightweight optimization algorithm, **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, vol. 54, 2016.

Robbins, H. e Monro, S. A Stochastic Approximation Method, **The Annals of Mathematical Statistics**, vol. 22, 1951.

Sacco, W. F. e Oliveira, C. R. E. [2005 World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO05) - Rio de Janeiro, Brasil (2005.05.30-2005.06.03)] - A New Stochastic Optimization Algorithm based on a Particle Collision Metaheuristic, 2005.

San Marchi, C., Hecht, E., Ekoto, I., Groth, K., LaFleur, C., Somerday, B., Mukundan, R., Rockward, T., Keller, J., e James, C. Overview of the DOE hydrogen safety, codes and standards program, part 3: Advances in research and development to enhance the scientific basis for hydrogen regulations, codes and standards, **International Journal of Hydrogen Energy**, 2016.

Saremi, S., Mirjalili, S., e Lewis, A. Grasshopper Optimisation Algorithm: Theory and application, **Advances in Engineering Software (Thomson Reuters)**, vol. 105, 2017.

Savsani, P. e Savsani, V. Passing Vehicle Search (PVS): A novel metaheuristic algorithm, **Applied Mathematical Modelling**, 2015.

Silva, B. H. d., Machado, I. M., Pereira, F. M., Pagot, P. R., e França, F. H. R. [2018 Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering (ENCIT 2018) - Águas de Lindóia, Brasil (2018.11.25-2018.11.27)] - Application of the SA optimisation method to the correlated WMP radiation model for flames, 2018.

Storn, R. e Price, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces, **Journal of Global Optimization**, vol. 11, 1997.

Tang, D., Dong, S., Jiang, Y., Li, H., e Huang, Y. ITGO: Invasive tumor growth optimization algorithm, **Applied Soft Computing**, 2015.

van Rossum, G. **Python 3.7.2**. <https://www.python.org/>, Acesso em: 2-3-2019.

Waskom, M. **seaborn: statistical data visualization**. <https://seaborn.pydata.org/>, Acesso em: 2-3-2019.

Yang, X.-S. **Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms**. Luniver Press, 2008.

Yang, X.-S., **A New Metaheuristic Bat-Inspired Algorithm**, p. 65–74. Springer, Berlin, 2010.

Yang, X.-S., [Lecture Notes in Computer Science] **Unconventional Computation and Natural Computation Volume 7445 || Flower Pollination Algorithm for Global Optimization**, vol. 10.1007/978-3-642-32894-7, 2012.

Yang, X.-S. **Nature-Inspired Optimization Algorithms**. Elsevier Insights. Elsevier, 1 edition, 2014.

Yang, X.-S. e Deb, S. [IEEE 2009 World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing (NaBIC) - Coimbatore, India (2009.12.9-2009.12.11)] **2009 World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing (NaBIC) - Cuckoo Search via Lévy flights**, 2009.

Yazdani, M. e Jolai, F. Lion Optimization Algorithm (LOA): A nature-inspired metaheuristic algorithm, **Journal of Computational Design and Engineering**, 2015.

APÊNDICE A – Dados Experimentais

Este apêndice traz as tabelas com os dados de medição para cada uma das 12 chamas utilizadas neste trabalho.

Tabela A.1 – Dados experimentais de fluxo radiante para as 12 chamas laminares de difusão descritas na Tabela 3.3.

Chama 1		Chama 2		Chama 3		Chama 4		Chama 5	
z/L_f	$q''_{R,med,i}$ [kW/m ²]	z/L_f	$q''_{R,med,i}$ [kW/m ²]	z/L_f	$q''_{R,med,i}$ [kW/m ²]	z/L_f	$q''_{R,med,i}$ [kW/m ²]	z/L_f	$q''_{R,med,i}$ [kW/m ²]
-1,478	0,049	-1,236	0,065	-1,030	0,074	-0,894	0,086	-0,772	0,094
-1,043	0,076	-0,872	0,095	-0,727	0,105	-0,631	0,120	-0,545	0,131
-0,608	0,135	-0,509	0,160	-0,424	0,178	-0,368	0,198	-0,318	0,210
-0,173	0,225	-0,145	0,263	-0,121	0,304	-0,105	0,326	-0,090	0,348
0,260	0,316	0,218	0,372	0,181	0,418	0,157	0,465	0,136	0,509
0,695	0,345	0,581	0,416	0,484	0,488	0,421	0,560	0,363	0,624
1,130	0,307	0,945	0,389	0,787	0,474	0,684	0,569	0,590	0,652
1,565	0,246	1,309	0,317	1,090	0,408	0,947	0,500	0,818	0,599
2,000	0,179	1,672	0,248	1,393	0,328	1,210	0,416	1,045	0,502
2,434	0,135	2,036	0,182	1,696	0,248	1,473	0,329	1,272	0,395
2,869	0,102	2,400	0,141	2,000	0,190	1,736	0,252	1,500	0,314
3,304	0,073	2,763	0,108	2,303	0,147	2,000	0,180	1,727	0,238
3,739	0,054	3,127	0,084	2,606	0,118	2,263	0,140	1,954	0,195
4,173	0,040	3,490	0,059	2,909	0,095	2,526	0,124	2,181	0,158
4,608	0,031	3,854	0,045	3,212	0,069	2,789	0,102	2,409	0,118
5,043	0,019	4,218	0,031	3,515	0,053	3,052	0,078	2,636	0,089
5,478	0,016	4,581	0,031	3,818	0,042	3,315	0,061	2,863	0,072
5,913	0,011	4,945	0,021	4,121	0,035	3,578	0,045	3,090	0,053
6,347	0,008	5,309	0,022	4,424	0,029	3,842	0,035	3,318	0,040
		5,672	0,020	4,727	0,027	4,105	0,033	3,545	0,035
								3,772	0,033

Chama 6		Chama 7		Chama 8		Chama 9		Chama 10	
z/L_f	$q''_{R,med,i}$ [kW/m ²]	z/L_f	$q''_{R,med,i}$ [kW/m ²]	z/L_f	$q''_{R,med,i}$ [kW/m ²]	z/L_f	$q''_{R,med,i}$ [kW/m ²]	z/L_f	$q''_{R,med,i}$ [kW/m ²]
-0.680	0.106	-1.254	0.032	-1.095	0.032	-0.992	0.037	-0.831	0.041
-0.480	0.142	-1.058	0.043	-0.857	0.050	-0.776	0.057	-0.650	0.062
-0.280	0.233	-0.862	0.058	-0.619	0.078	-0.561	0.085	-0.469	0.094
-0.080	0.382	-0.666	0.079	-0.380	0.119	-0.345	0.135	-0.289	0.149
0.120	0.551	-0.470	0.104	-0.142	0.180	-0.129	0.201	-0.108	0.218
0.320	0.687	-0.274	0.135	0.095	0.246	0.086	0.277	0.072	0.305
0.520	0.731	-0.078	0.172	0.333	0.289	0.302	0.339	0.253	0.373
0.720	0.701	0.117	0.205	0.571	0.303	0.517	0.362	0.433	0.407
0.920	0.588	0.313	0.229	0.809	0.283	0.733	0.347	0.614	0.402
1.120	0.483	0.509	0.239	1.047	0.236	0.949	0.290	0.795	0.338
1.320	0.383	0.705	0.240	1.285	0.176	1.165	0.227	0.975	0.267
1.520	0.307	0.901	0.224	1.523	0.124	1.381	0.166	1.156	0.199
1.720	0.243	1.098	0.200	1.761	0.085	1.597	0.109	1.337	0.134
1.920	0.191	1.294	0.171	2,000	0.064	1.812	0.084	1.518	0.113
2.120	0.156	1.490	0.147	2.238	0.046	2.028	0.055	1.698	0.077
2.320	0.116	1.686	0.121	2.476	0.031	2.244	0.044	1.879	0.052
2.520	0.086	1.882	0.110	2.714	0.021	2.460	0.029	2.060	0.039
2.720	0.060	2.078	0.090	2.952	0.019	2.676	0.022	2.240	0.028
2.920	0.053	2.274	0.069	3.190	0.012	2.892	0.017	2.421	0.022
3.120	0.044	2.470	0.061			3.107	0.010	2.602	0.018
3.320	0.037	2.666	0.040						
3.520	0.037	2.862	0.034						
		3.058	0.030						
		3.254	0.023						
		3.450	0.020						
		3.647	0.017						
		3.843	0.012						
		4.039	0.011						

Chama 11		Chama 12	
z/L_f	$q''_{R,med,i}$ [kW/m ²]	z/L_f	$q''_{R,med,i}$ [kW/m ²]
-0.784	0.046	-0.730	0.050
-0.613	0.069	-0.571	0.071
-0.443	0.101	-0.412	0.108
-0.272	0.157	-0.253	0.170
-0.102	0.240	-0.095	0.252
0.068	0.323	0.063	0.346
0.238	0.405	0.222	0.429
0.409	0.450	0.380	0.487
0.579	0.454	0.539	0.498
0.750	0.417	0.698	0.434
0.920	0.323	0.857	0.386
1.090	0.244	1.015	0.292
1.261	0.189	1.174	0.232
1.431	0.138	1.333	0.161
1.602	0.101	1.492	0.128
1.772	0.067	1.650	0.093
1.943	0.046	1.809	0.063
2.113	0.036	1.968	0.046
2.284	0.025	2.126	0.032
2.454	0.020	2.285	0.025
2.625	0.016	2.444	0.020

APÊNDICE B – Planejamento de Experimentos

Este apêndice traz todos os testes determinados no DoE para cada algoritmo.

Tabela B.1 – Experimentos planejados para o GWO pelo método fatorial 3^K completo.

Teste	Parâmetros	
	N_{pop}	$l_{step,max}$
1	-1	-1
2	0	-1
3	+1	-1
4	-1	0
5	0	0
6	+1	0
7	-1	+1
8	0	+1
9	+1	+1

Tabela B.2 – Experimentos planejados para o SHO pelo método Box-Behnken.

Teste	Parâmetros		
	N_{pop}	η_{pred}	R_{att}
1	-1	-1	0
2	+1	-1	0
3	-1	+1	0
4	+1	+1	0
5	-1	0	-1
6	+1	0	-1
7	-1	0	+1
8	+1	0	+1
9	0	-1	-1
10	0	+1	-1
11	0	-1	+1
12	0	+1	+1
13	0	0	0

Tabela B.3 – Experimentos planejados para o GA pelo método Box-Behnken.

Teste	Parâmetros				
	N_{pop}	l_{res}	P_{mut}	η_{kill}	\bar{l}_{cut}
1	-1	-1	0	0	0
2	+1	-1	0	0	0
3	-1	+1	0	0	0
4	+1	+1	0	0	0
5	-1	0	-1	0	0
6	+1	0	-1	0	0
7	-1	0	+1	0	0
8	+1	0	+1	0	0
9	-1	0	0	-1	0
10	+1	0	0	-1	0
11	-1	0	0	+1	0
12	+1	0	0	+1	0
13	-1	0	0	0	-1
14	+1	0	0	0	-1
15	-1	0	0	0	+1
16	+1	0	0	0	+1
17	0	-1	-1	0	0
18	0	+1	-1	0	0
19	0	-1	+1	0	0
20	0	+1	+1	0	0
21	0	-1	0	-1	0
22	0	+1	0	-1	0
23	0	-1	0	+1	0
24	0	+1	0	+1	0
25	0	-1	0	0	-1
26	0	+1	0	0	-1
27	0	-1	0	0	+1
28	0	+1	0	0	+1
29	0	0	-1	-1	0
30	0	0	+1	-1	0
31	0	0	-1	+1	0
32	0	0	+1	+1	0
33	0	0	-1	0	-1
34	0	0	+1	0	-1
35	0	0	-1	0	+1
36	0	0	+1	0	+1
37	0	0	0	-1	-1
38	0	0	0	+1	-1
39	0	0	0	-1	+1
40	0	0	0	+1	+1
41	0	0	0	0	0

Tabela B.4 – Experimentos planejados para o DA pelo método Box-Behnken.

Teste	Parâmetros					
	N_{pop}	$N_{seeds,min}$	$N_{seeds,max}$	N_{mut}	α_w	α_g
1	-1	-1	0	0	0	0
2	+1	-1	0	0	0	0
3	-1	+1	0	0	0	0
4	+1	+1	0	0	0	0
5	-1	0	-1	0	0	0
6	+1	0	-1	0	0	0
7	-1	0	+1	0	0	0
8	+1	0	+1	0	0	0
9	-1	0	0	-1	0	0
10	+1	0	0	-1	0	0
11	-1	0	0	+1	0	0
12	+1	0	0	+1	0	0
13	-1	0	0	0	-1	0
14	+1	0	0	0	-1	0
15	-1	0	0	0	+1	0
16	+1	0	0	0	+1	0
17	-1	0	0	0	0	-1
18	+1	0	0	0	0	-1
19	-1	0	0	0	0	+1
20	+1	0	0	0	0	+1
21	0	-1	-1	0	0	0
22	0	+1	-1	0	0	0
23	0	-1	+1	0	0	0
24	0	+1	+1	0	0	0
25	0	-1	0	-1	0	0
26	0	+1	0	-1	0	0
27	0	-1	0	+1	0	0
28	0	+1	0	+1	0	0
29	0	-1	0	0	-1	0
30	0	+1	0	0	-1	0
31	0	-1	0	0	+1	0
32	0	+1	0	0	+1	0
33	0	-1	0	0	0	-1
34	0	+1	0	0	0	-1
35	0	-1	0	0	0	+1
36	0	+1	0	0	0	+1
37	0	0	-1	-1	0	0
38	0	0	+1	-1	0	0
39	0	0	-1	+1	0	0
40	0	0	+1	+1	0	0
41	0	0	-1	0	-1	0
42	0	0	+1	0	-1	0
43	0	0	-1	0	+1	0

Teste	Parâmetros					
	N_{pop}	$N_{seeds,min}$	$N_{seeds,max}$	N_{mut}	α_w	α_g
44	0	0	+1	0	+1	0
45	0	0	-1	0	0	-1
46	0	0	+1	0	0	-1
47	0	0	-1	0	0	+1
48	0	0	+1	0	0	+1
49	0	0	0	-1	-1	0
50	0	0	0	+1	-1	0
51	0	0	0	-1	+1	0
52	0	0	0	+1	+1	0
53	0	0	0	-1	0	-1
54	0	0	0	+1	0	-1
55	0	0	0	-1	0	+1
56	0	0	0	+1	0	+1
57	0	0	0	0	-1	-1
58	0	0	0	0	+1	-1
59	0	0	0	0	-1	+1
60	0	0	0	0	+1	+1
61	0	0	0	0	0	0

Tabela B.5 – Experimentos planejados para o BFO pelo método Box-Behnken.

Teste	Parâmetros									
	N_{pop}	l_{step}	$N_{step,max}$	N_{rep}	N_{disp}	P_{disp}	I_a	R_a	I_r	R_r
1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	+1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
6	+1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
7	-1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0
8	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0
9	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
10	+1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
11	-1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
12	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
13	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
14	+1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
15	-1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0
16	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0
17	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
18	+1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
19	-1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0
20	+1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0
21	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0

Teste	Parâmetros									
	N_{pop}	l_{step}	$N_{step,max}$	N_{rep}	N_{disp}	P_{disp}	I_a	I_r	R_a	R_r
68	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	+1
69	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0
70	0	0	+1	-1	0	0	0	0	0	0
71	0	0	-1	+1	0	0	0	0	0	0
72	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0
73	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0
74	0	0	+1	0	-1	0	0	0	0	0
75	0	0	-1	0	+1	0	0	0	0	0
76	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0
77	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0
78	0	0	+1	0	0	-1	0	0	0	0
79	0	0	-1	0	0	+1	0	0	0	0
80	0	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0
81	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0
82	0	0	+1	0	0	0	-1	0	0	0
83	0	0	-1	0	0	0	+1	0	0	0
84	0	0	+1	0	0	0	+1	0	0	0
85	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0
86	0	0	+1	0	0	0	0	-1	0	0
87	0	0	-1	0	0	0	0	+1	0	0
88	0	0	+1	0	0	0	0	+1	0	0
89	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0
90	0	0	+1	0	0	0	0	0	-1	0
91	0	0	-1	0	0	0	0	0	+1	0
92	0	0	+1	0	0	0	0	0	+1	0
93	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1
94	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	-1
95	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	+1
96	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	+1
97	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0
98	0	0	0	+1	-1	0	0	0	0	0
99	0	0	0	-1	+1	0	0	0	0	0
100	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0
101	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
102	0	0	0	+1	0	-1	0	0	0	0
103	0	0	0	-1	0	+1	0	0	0	0
104	0	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0
105	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0
106	0	0	0	+1	0	0	-1	0	0	0
107	0	0	0	-1	0	0	+1	0	0	0
108	0	0	0	+1	0	0	+1	0	0	0
109	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0
110	0	0	0	+1	0	0	0	-1	0	0
111	0	0	0	-1	0	0	0	+1	0	0
112	0	0	0	+1	0	0	0	+1	0	0
113	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0

Teste	Parâmetros									
	N_{pop}	l_{step}	$N_{step,max}$	N_{rep}	N_{disp}	P_{disp}	I_a	I_r	R_a	R_r
114	0	0	0	+1	0	0	0	0	-1	0
115	0	0	0	-1	0	0	0	0	+1	0
116	0	0	0	+1	0	0	0	0	+1	0
117	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1
118	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	-1
119	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	+1
120	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	+1
121	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0
122	0	0	0	0	+1	-1	0	0	0	0
123	0	0	0	0	-1	+1	0	0	0	0
124	0	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0
125	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0
126	0	0	0	0	+1	0	-1	0	0	0
127	0	0	0	0	-1	0	+1	0	0	0
128	0	0	0	0	+1	0	+1	0	0	0
129	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0
130	0	0	0	0	+1	0	0	-1	0	0
131	0	0	0	0	-1	0	0	+1	0	0
132	0	0	0	0	+1	0	0	+1	0	0
133	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0
134	0	0	0	0	+1	0	0	0	-1	0
135	0	0	0	0	-1	0	0	0	+1	0
136	0	0	0	0	+1	0	0	0	+1	0
137	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1
138	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	-1
139	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	+1
140	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	+1
141	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0
142	0	0	0	0	0	+1	-1	0	0	0
143	0	0	0	0	0	-1	+1	0	0	0
144	0	0	0	0	0	+1	+1	0	0	0
145	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0
146	0	0	0	0	0	+1	0	-1	0	0
147	0	0	0	0	0	-1	0	+1	0	0
148	0	0	0	0	0	+1	0	+1	0	0
149	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0
150	0	0	0	0	0	+1	0	0	-1	0
151	0	0	0	0	0	-1	0	0	+1	0
152	0	0	0	0	0	+1	0	0	+1	0
153	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1
154	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	-1
155	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	+1
156	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	+1
157	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
158	0	0	0	0	0	0	+1	-1	0	0
159	0	0	0	0	0	0	-1	+1	0	0

APÊNDICE C – Resultados de Calibração

Este apêndice traz os resultados de calibração para cada algoritmo, com médias e desvios padrão de cada teste desconsiderando os valores aberrantes, os quais estão assinalados em vermelho.

Tabela C.1 – Resultados obtidos para cada *design* testado com o GWO.

Teste	Observação										\bar{y}	σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	1,109	1,403	1,430	1,619	1,596	0,789	1,323	1,164	1,627	0,957	1,302	0,275
2	0,335	0,289	0,290	0,303	0,305	0,300	0,325	0,304	0,298	0,290	0,304	0,014
3	0,256	0,254	0,258	0,265	0,263	0,270	0,262	0,268	0,268	0,280	0,265	0,007
4	3,948	1,819	4,917	18,494	1,788	4,917	59,812	27,325	24,870	19,693	4,594	0,457
5	0,679	1,082	0,685	1,163	1,153	0,990	0,707	0,837	0,648	1,051	0,900	0,199
6	0,269	0,289	0,293	0,306	0,294	0,262	0,270	0,304	0,273	0,268	0,283	0,015
7	16,810	10,155	8,820	30,073	23,584	36,358	17,911	18,580	24,315	57,505		
8	3,935	12,112	13,408	9,096	8,381	12,491	3,943	2,888	5,375	4,830	4,521	0,613
9	2,125	4,048	3,240	2,374	2,095	2,321	3,419	2,097	3,631	2,565	2,652	0,576

Tabela C.2 – Resultados obtidos para cada *design* testado com o SHO.

Teste	Observação										\bar{y}	σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	16,827	2,838	2,797	1,547	1,496	42,213	16,624	2,166	2,508	2,045	2,200	0,508
2	1,194	1,224	0,579	0,522	0,477	0,802	1,158	1,036	1,293	0,932	0,922	0,293
3	3,564	21,496	38,084	18,166	1,793	4,305	2,202	19,977	12,193	1,951	2,377	0,700
4	1,835	1,606	1,147	1,399	1,134	1,167	1,647	1,722	1,064	1,786	1,451	0,287
5	0,610	13,447	5,005	4,758	14,669	4,758	31,876	31,197	1,215	5,095		
6	0,861	1,361	1,588	1,117	0,784	1,024	0,917	1,165	0,789	0,527	1,013	0,293
7	2,015	0,984	4,153	5,875	21,925	22,149	10,214	3,520	4,962	11,742	3,837	0,317
8	1,107	0,719	1,165	1,122	1,390	1,114	1,250	1,238	1,118	1,069	1,129	0,164
9	1,282	0,804	0,617	0,809	1,249	1,002	0,830	0,766	1,415	0,569	0,934	0,276
10	1,794	1,573	1,107	1,217	0,750	1,533	1,406	1,234	0,997	0,760	1,237	0,329
11	2,028	1,091	0,760	1,270	1,670	1,515	0,769	1,240	1,155	1,195	1,269	0,369
12	1,921	1,481	1,683	1,172	1,560	2,150	2,994	2,746	2,519	2,503	2,073	0,574
13	1,144	1,187	1,009	1,501	1,139	0,679	1,542	1,283	1,653	1,096		
	1,501	1,139	0,679	1,542	1,283	1,653	1,096	1,589	1,042	0,842	1,225	0,309
	1,542	1,283	1,653	1,096	1,589	1,042	0,842	0,964	1,739	1,282		

Tabela C.3 – Resultados obtidos para cada *design* testado com o GA.

Teste	Observação										\bar{y}	σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	0,353	1,062	0,301	0,424	0,506	0,896	1,015	0,378	0,645	0,927	0,651	0,282
2	0,321	0,265	0,464	0,273	0,428	0,421	0,430	0,424	0,467	0,258	0,375	0,081
3	0,611	0,582	0,416	0,488	0,450	0,593	0,824	0,549	0,437	0,834	0,578	0,141
4	0,438	0,438	0,431	0,482	0,438	0,495	0,445	0,823	0,824	0,438	0,525	0,150
5	0,269	0,890	0,868	0,262	1,021	1,015	1,051	0,738	0,658	0,529	0,730	0,281
6	0,333	0,234	0,397	0,382	0,299	0,264	0,265	0,292	0,279	0,317	0,306	0,050
7	0,313	0,250	0,919	0,434	0,923	0,450	0,295	0,481	0,562	0,330	0,496	0,231
8	0,370	0,315	0,271	0,260	0,253	0,473	0,275	0,373	0,373	0,237	0,320	0,071
9	0,256	0,905	0,724	0,377	0,877	0,426	0,341	0,476	0,715	0,440	0,554	0,220
10	0,250	0,323	0,317	0,327	0,249	0,238	0,369	0,237	0,232	0,389	0,293	0,056
11	0,641	0,529	0,827	0,267	0,502	1,017	0,844	0,319	0,672	0,476	0,609	0,226
12	0,281	0,240	0,251	0,418	0,241	0,249	0,321	0,275	0,398	0,403	0,308	0,069
13	0,874	0,555	0,651	0,480	0,301	1,086	0,369	0,527	0,314	0,265	0,542	0,253
14	0,375	0,428	0,385	0,435	0,523	0,517	0,271	0,383	0,243	0,339	0,390	0,087
15	0,497	0,619	1,534	0,457	0,327	0,325	0,243	0,729	0,459	1,106	0,529	0,249
16	0,232	0,234	0,458	0,247	0,238	0,369	0,333	0,238	0,249	0,327	0,292	0,073
17	1,447	0,756	0,547	0,963	0,367	0,912	0,393	0,284	0,309	0,407	0,549	0,247
18	0,823	0,367	0,831	0,489	0,398	0,827	0,487	0,361	0,482	0,519	0,558	0,183
19	0,814	0,613	0,556	0,955	0,730	1,168	1,507	0,227	0,863	0,739	0,740	0,250
20	0,824	0,497	0,823	0,503	0,484	0,826	0,534	0,430	0,830	0,438	0,619	0,171
21	0,631	0,436	0,584	0,524	0,454	0,252	0,373	0,649	0,785	0,257	0,495	0,165
22	0,494	0,828	0,827	0,472	0,550	0,599	0,420	0,474	0,478	0,448	0,559	0,143
23	0,484	0,676	0,416	0,488	0,630	1,217	0,253	0,564	1,215	0,574	0,652	0,304
24	0,828	0,834	0,829	0,827	0,824	0,537	0,489	0,442	1,934	0,824	0,715	0,161
25	0,750	1,120	0,350	0,839	1,026	1,282	0,478	0,501	0,254	0,553	0,715	0,328
26	0,382	0,831	0,495	0,441	0,824	0,511	0,416	0,824	0,554	0,534	0,581	0,168
27	0,405	0,288	0,931	1,157	0,662	1,276	1,699	1,037	0,907	0,472	0,793	0,331
28	0,449	0,375	0,490	0,373	0,551	0,832	0,473	0,825	0,491	0,396	0,526	0,161
29	0,745	0,438	0,540	0,693	0,283	0,627	0,729	0,271	0,505	0,301	0,513	0,176
30	1,098	1,054	0,831	0,434	0,383	0,534	0,940	1,060	1,054	0,261	0,765	0,310
31	0,563	0,633	0,636	0,649	0,639	1,707	1,057	0,824	0,318	0,402	0,635	0,204
32	1,299	0,235	0,361	0,397	1,166	0,281	0,524	0,693	1,570	0,241	0,487	0,295
33	0,689	0,246	0,674	0,312	0,732	1,281	0,317	0,748	0,271	0,269	0,554	0,317
34	0,743	0,392	0,328	0,419	0,691	0,744	0,239	0,313	0,847	0,516	0,523	0,205
35	0,679	0,482	0,270	0,392	0,405	0,656	0,919	0,346	0,566	0,762	0,548	0,195
36	1,075	1,025	0,448	0,649	0,273	0,959	0,483	1,008	0,885	0,261	0,706	0,305
37	0,482	1,224	0,275	0,440	0,452	0,309	0,897	0,492	0,904	0,321	0,580	0,301
38	0,886	0,952	0,624	0,423	1,214	0,742	0,361	0,285	0,402	0,389	0,628	0,295
39	0,649	0,499	0,627	0,614	0,723	0,634	0,285	1,067	0,586	0,285	0,597	0,211
40	0,342	0,917	0,508	0,947	1,035	0,266	0,415	0,930	0,449	0,637	0,645	0,273

Teste	Observação										\bar{y}	σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
41	0,278	0,384	1,013	1,292	1,026	0,619	0,265	1,160	0,722	0,292	0,601	0,287
	0,265	1,160	0,722	0,292	0,359	0,952	0,464	0,440	0,834	0,934		
	0,464	0,440	0,834	0,934	0,628	0,663	0,609	0,415	0,884	0,839		
	0,609	0,415	0,884	0,839	0,275	0,706	0,499	0,292	0,232	0,835		
	0,499	0,292	0,232	0,835	0,326	0,241	0,466	0,723	0,625	1,149		
	0,466	0,723	0,625	1,149	0,645	0,319	1,392	0,258	0,688	1,049		

Tabela C.4 – Resultados obtidos para cada *design* testado com o DA.

Teste	Observação										\bar{y}	σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	0,729	0,398	0,586	0,429	0,464	0,584	0,387	0,501	0,466	0,503	0,505	0,099
2	0,743	0,621	0,799	0,709	0,446	0,790	0,938	0,447	0,619	0,404	0,652	0,168
3	0,854	0,754	0,809	0,751	0,466	0,364	0,829	0,382	0,758	0,991	0,696	0,204
4	0,648	1,135	0,476	0,465	0,727	0,696	0,740	0,494	0,810	0,623	0,681	0,189
5	0,411	0,853	0,455	0,567	0,879	0,371	0,543	0,589	0,466	0,507	0,564	0,164
6	0,486	0,728	0,650	0,408	0,618	0,619	0,420	0,610	0,471	0,437	0,545	0,107
7	0,602	0,427	1,084	1,131	0,592	0,549	0,425	0,798	0,422	0,528	0,656	0,250
8	0,530	0,618	0,658	0,516	1,094	0,544	0,405	0,455	0,482	0,818	0,612	0,195
9	0,470	0,594	0,570	1,072	0,587	0,658	0,371	0,753	0,774	0,814	0,666	0,188
10	0,862	0,552	0,889	0,569	0,891	1,003	0,569	0,443	0,574	0,589	0,694	0,184
11	0,633	0,780	1,079	0,527	0,669	0,787	0,350	0,542	0,606	1,075	0,705	0,221
12	0,638	0,495	1,034	0,724	0,395	1,084	0,775	0,713	0,459	1,251	0,757	0,271
13	0,358	0,372	0,558	0,759	0,387	1,007	0,920	0,368	0,475	0,456	0,566	0,230
14	0,522	0,498	1,285	0,887	0,620	1,165	0,631	0,871	0,708	0,752	0,739	0,198
15	0,235	0,245	0,245	0,231	0,242	0,253	0,266	0,252	0,266	0,250	0,249	0,011
16	0,314	0,699	0,866	0,382	0,680	0,438	0,418	0,506	0,282	0,385	0,497	0,180
17	0,705	0,952	0,685	1,000	0,375	0,787	0,424	0,682	0,527	0,622	0,676	0,193
18	0,718	0,747	0,409	0,766	0,992	0,514	0,497	0,533	1,023	0,664	0,686	0,196
19	0,460	0,906	0,574	0,774	0,459	0,554	0,595	0,586	0,989	0,940	0,684	0,191
20	0,960	0,773	0,532	0,500	0,658	0,873	0,612	0,846	0,832	0,718	0,730	0,145
21	0,420	0,401	0,509	0,559	0,424	0,910	0,548	1,113	1,028	0,367	0,628	0,265
22	0,921	0,723	0,849	1,073	0,664	0,690	0,742	0,461	0,403	0,542	0,707	0,196
23	0,504	0,446	0,653	0,643	0,831	0,564	0,401	0,725	0,624	0,828	0,622	0,140
24	1,143	0,514	0,715	0,896	0,497	0,640	0,989	0,475	0,435	0,746	0,705	0,228
25	0,509	0,559	0,616	0,711	0,787	0,493	0,553	0,623	0,699	0,424	0,597	0,106
26	0,482	0,515	0,626	0,522	0,459	0,718	0,626	0,536	0,482	0,436	0,540	0,085
27	0,572	1,278	0,413	0,600	0,755	0,778	0,474	0,752	0,632	0,832	0,645	0,136
28	0,536	0,439	0,370	0,481	0,702	0,599	0,864	0,585	1,036	0,383	0,600	0,204
29	0,722	0,564	0,527	0,479	0,689	0,666	0,853	0,588	0,557	0,861	0,650	0,125
30	0,500	0,756	0,535	0,539	0,506	0,523	0,510	0,794	0,493	0,488	0,564	0,107
31	0,316	0,305	0,272	0,438	0,505	0,348	0,572	0,395	0,390	0,314	0,385	0,091
32	0,268	0,684	0,374	0,259	0,385	0,339	0,310	0,299	0,301	0,276	0,350	0,119

Teste	Observação										\bar{y}	σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
33	0,826	0,610	0,561	0,634	1,021	0,667	0,468	0,436	0,422	0,535	0,618	0,177
34	0,608	0,735	0,400	0,735	0,561	0,666	0,600	0,677	1,012	0,983	0,698	0,176
35	0,920	0,381	0,628	0,548	0,851	0,526	0,737	1,109	0,952	1,216	0,787	0,256
36	0,660	0,655	0,710	0,471	0,481	0,686	0,481	0,655	0,500	0,788	0,609	0,109
37	0,459	0,726	0,361	1,020	0,403	0,472	0,658	0,715	0,590	0,522	0,592	0,186
38	0,398	0,775	0,756	0,467	1,105	0,566	0,667	0,409	0,729	0,673	0,655	0,201
39	0,523	0,385	0,477	0,596	0,491	0,428	0,530	0,369	0,706	0,613	0,512	0,100
40	0,907	0,475	0,666	0,847	0,723	0,847	0,672	0,386	0,906	0,862	0,729	0,172
41	0,661	0,401	0,453	0,737	0,450	0,633	0,671	0,375	1,069	0,741	0,619	0,200
42	0,785	0,571	0,614	0,515	0,436	0,580	0,546	0,591	1,039	0,808	0,648	0,169
43	0,287	0,365	0,262	0,274	0,283	0,262	0,354	0,266	0,265	0,248	0,287	0,038
44	0,317	0,358	0,359	0,342	0,357	0,305	0,306	0,421	0,646	0,491	0,390	0,101
45	0,979	0,357	0,515	0,428	0,571	0,534	0,440	0,390	0,778	0,422	0,541	0,185
46	0,554	0,668	0,419	0,448	0,616	0,678	0,735	0,485	0,408	0,581	0,559	0,110
47	0,783	0,604	0,343	0,382	0,402	0,637	0,455	1,149	1,317	0,376	0,570	0,248
48	0,505	0,553	0,713	0,597	0,977	0,513	0,669	0,861	0,450	1,060	0,690	0,200
49	0,881	0,630	0,623	0,448	0,488	0,631	0,497	1,079	0,493	0,648	0,642	0,188
50	0,530	0,429	0,923	0,513	0,991	0,557	0,728	0,553	1,071	1,058	0,735	0,238
51	0,498	0,423	0,287	0,330	0,293	0,328	0,279	0,287	0,341	0,255	0,332	0,071
52	0,518	0,361	0,339	0,506	0,430	0,378	0,305	0,574	0,592	0,365	0,437	0,098
53	0,765	0,450	0,456	0,693	0,922	0,789	0,476	0,543	0,924	0,700	0,672	0,173
54	0,640	0,455	0,499	0,378	0,781	0,791	0,923	0,566	0,766	0,832	0,663	0,173
55	0,777	0,533	1,193	0,454	1,014	0,524	0,691	0,471	0,383	0,746	0,679	0,249
56	0,573	0,782	0,550	1,263	0,879	0,712	0,761	1,554	0,614	0,391	0,725	0,235
57	0,631	0,753	0,783	0,494	0,847	0,974	0,768	0,574	0,512	1,143	0,748	0,196
58	0,276	0,335	0,293	0,257	0,599	0,329	0,280	0,315	0,546	0,292	0,352	0,113
59	0,493	0,994	0,427	0,998	1,125	0,767	0,495	0,514	0,640	0,714	0,717	0,236
60	0,278	0,510	0,319	0,652	0,332	0,308	0,306	0,304	0,744	0,335	0,409	0,158
61	0,401	0,480	0,443	0,430	0,394	0,466	1,000	1,020	0,813	0,658	0,595	0,199
	1,000	1,020	0,813	0,658	0,553	0,456	0,734	0,523	0,436	0,438		
	0,734	0,523	0,436	0,438	1,146	0,797	0,466	0,757	0,529	0,466		
	0,466	0,757	0,529	0,466	0,530	0,404	0,408	0,447	0,392	0,571		
	0,408	0,447	0,392	0,571	0,641	0,773	0,407	0,565	0,465	0,752		
0,407	0,565	0,465	0,752	0,420	0,757	0,617	0,445	1,055	0,437			

Tabela C.5 – Resultados obtidos para cada *design* testado com o BFO.

Teste	Observação										\bar{y}	σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	1,678	1,536	1,369	1,247	1,718	1,570	1,330	1,076	1,277	1,695	1,450	0,209
2	1,801	1,510	2,237	0,742	2,394	1,827	2,014	2,205	1,809	1,931	1,970	0,257
3	1,127	1,569	1,055	1,247	1,703	1,733	1,590	1,598	1,540	1,459	1,462	0,225
4	1,233	1,400	1,650	1,403	1,614	1,041	1,272	1,556	1,184	1,670	1,402	0,206
5	1,759	1,350	1,573	1,493	1,747	1,065	1,298	1,576	1,241	1,376	1,448	0,211
6	1,041	1,318	1,247	1,467	1,568	1,540	1,468	0,947	1,694	1,567	1,386	0,231
7	1,136	1,872	1,050	1,324	1,395	1,208	1,443	1,056	1,464	1,308	1,326	0,231
8	2,233	1,742	1,218	1,779	1,868	1,945	1,597	1,871	1,776	1,907	1,794	0,248
9	0,951	1,142	1,307	1,482	1,389	1,160	1,143	1,609	1,235	1,084	1,250	0,188
10	1,710	1,741	1,456	1,799	1,405	1,664	1,285	1,408	1,363	1,351	1,518	0,179
11	0,833	1,399	1,427	1,267	1,256	1,047	1,112	1,158	1,184	1,457	1,214	0,182
12	1,528	1,513	1,292	1,209	1,087	1,196	1,216	1,273	1,370	1,300	1,298	0,132
13	1,340	1,231	1,241	1,246	1,292	1,372	1,458	1,393	1,014	1,198	1,278	0,118
14	1,509	1,390	1,085	1,054	0,918	0,825	1,188	1,264	1,191	1,269	1,169	0,196
15	1,080	0,961	1,652	1,186	1,380	1,357	1,407	1,383	1,235	1,083	1,272	0,193
16	0,986	1,810	1,624	1,057	1,469	1,493	1,254	1,365	1,254	1,463	1,377	0,237
17	1,261	0,903	0,913	1,168	1,246	1,332	1,091	1,183	1,240	1,408	1,174	0,157
18	1,293	0,801	1,073	1,171	1,035	1,146	1,105	1,179	0,839	1,157	1,080	0,146
19	0,987	1,199	1,218	0,976	1,305	1,422	1,011	1,035	1,157	1,306	1,162	0,147
20	1,678	1,659	1,715	1,792	2,193	2,027	1,631	1,276	2,042	1,273	1,729	0,289
21	0,736	1,322	1,009	1,163	1,421	1,386	1,145	1,122	1,506	1,376	1,219	0,219
22	1,512	1,426	1,283	1,293	1,182	1,391	1,191	1,400	1,373	1,110	1,316	0,120
23	1,365	1,264	0,784	1,178	1,363	0,793	1,145	1,096	1,370	1,265	1,162	0,207
24	1,420	0,980	1,047	1,157	1,202	1,634	1,306	1,585	1,626	1,699	1,366	0,250
25	0,896	0,981	1,180	1,162	0,951	0,748	1,316	1,087	1,033	1,242	1,060	0,163
26	1,238	1,372	1,336	0,848	1,085	1,089	1,746	1,438	1,582	1,061	1,279	0,256
27	0,946	1,425	1,226	1,247	1,331	1,363	1,294	1,240	1,390	0,969	1,243	0,156
28	1,656	1,336	1,202	1,285	1,577	1,203	1,417	1,348	1,358	1,279	1,366	0,141
29	1,367	1,138	1,038	1,123	1,372	1,288	1,041	0,998	1,285	1,077	1,173	0,135
30	1,090	1,364	1,164	1,536	1,641	1,238	1,469	1,558	1,633	1,235	1,393	0,191
31	1,308	1,271	1,137	1,198	1,097	1,107	1,270	1,199	1,245	1,506	1,234	0,114
32	1,380	1,430	1,346	1,529	1,502	1,610	1,294	1,143	1,413	1,419	1,407	0,124
33	0,982	1,449	1,189	1,631	1,277	1,577	1,503	1,091	1,416	0,960	1,308	0,232
34	1,791	0,799	1,346	1,494	1,260	1,641	1,581	1,643	1,817	1,379	1,550	0,184
35	1,397	0,972	1,032	1,448	0,885	1,062	0,938	1,251	1,129	1,057	1,117	0,181
36	1,268	1,215	1,273	1,245	1,625	0,885	1,627	1,304	1,681	1,457	1,358	0,231
37	1,582	1,699	1,347	1,843	1,149	1,302	1,467	2,084	1,615	1,269	1,536	0,273
38	1,563	1,603	1,769	1,170	1,432	1,398	1,557	1,515	1,573	1,414	1,499	0,151
39	1,545	1,774	1,367	2,405	1,546	1,506	1,693	1,889	1,900	1,784	1,741	0,277
40	1,280	1,416	0,929	1,122	1,533	1,090	1,756	1,206	1,466	1,485	1,328	0,235
41	1,946	2,496	1,964	1,861	2,941	2,092	1,511	1,963	2,023	1,694	1,882	0,178
42	1,217	1,158	1,760	0,938	1,534	1,173	1,525	1,375	1,264	1,020	1,296	0,240

Teste	Observação										\bar{y}	σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
43	1,370	1,523	1,296	1,462	1,383	1,265	1,249	1,228	1,827	1,532	1,413	0,173
44	1,174	1,163	0,814	1,151	0,925	1,033	1,345	0,856	1,052	1,355	1,087	0,177
45	1,228	1,057	1,525	1,092	1,256	0,820	1,751	1,540	1,510	1,524	1,330	0,271
46	1,227	1,067	0,854	0,813	1,331	1,019	1,136	1,284	1,439	0,951	1,112	0,198
47	2,462	2,040	2,081	2,093	2,227	1,691	1,607	1,900	1,711	1,998	1,927	0,201
48	1,193	1,163	1,516	1,330	1,330	1,630	1,419	1,387	1,518	1,156	1,364	0,154
49	1,496	1,234	0,537	1,615	1,627	1,638	1,167	1,359	1,448	1,569	1,462	0,165
50	1,106	1,156	0,675	0,791	0,630	1,102	1,037	1,338	1,234	1,193	1,026	0,231
51	2,089	1,698	1,395	1,451	2,003	1,404	1,733	2,731	1,729	2,238	1,749	0,290
52	1,332	1,518	1,555	1,604	1,479	1,676	1,377	1,188	1,525	1,443	1,470	0,135
53	1,858	1,570	1,637	1,692	1,854	1,619	1,017	1,917	2,109	1,399	1,667	0,289
54	1,204	1,231	1,401	1,140	0,974	1,241	1,534	1,524	1,555	1,304	1,311	0,181
55	1,743	1,926	1,563	1,764	1,638	1,705	1,246	1,654	1,573	1,527	1,634	0,170
56	1,449	1,565	1,182	1,247	1,241	1,297	1,015	1,223	1,018	0,994	1,223	0,177
57	1,668	1,685	1,748	1,543	1,285	1,764	1,764	1,819	1,904	1,535	1,671	0,168
58	1,411	0,808	1,289	1,105	1,061	0,975	1,347	1,066	0,960	1,190	1,121	0,179
59	1,912	1,702	1,626	1,574	1,315	1,515	1,799	2,066	1,692	1,247	1,645	0,238
60	0,930	0,721	1,290	1,341	1,377	1,503	1,136	1,065	1,354	1,158	1,187	0,224
61	1,254	1,674	1,456	1,931	2,277	1,530	2,186	1,764	1,582	1,322	1,697	0,327
62	1,168	1,228	1,042	1,134	0,852	1,214	1,352	1,577	1,269	0,774	1,161	0,221
63	1,147	1,407	1,662	1,790	1,596	1,816	1,201	1,523	1,826	1,496	1,546	0,230
64	1,421	1,162	1,343	1,532	0,814	1,708	1,254	1,442	1,135	1,221	1,303	0,234
65	2,212	1,625	1,610	1,257	1,530	2,229	1,902	1,837	1,779	1,245	1,723	0,324
66	1,583	1,281	1,419	1,158	1,671	1,609	1,055	1,359	1,004	1,176	1,332	0,225
67	1,360	1,523	1,890	1,761	1,147	1,746	1,234	1,547	1,480	1,648	1,534	0,226
68	1,281	1,343	1,056	1,059	1,070	1,330	1,059	1,483	1,185	0,978	1,184	0,158
69	1,024	1,395	1,561	1,483	1,225	1,268	1,027	1,333	1,487	1,003	1,281	0,197
70	2,118	2,205	2,006	1,850	1,920	1,564	1,833	1,779	1,976	1,317	1,857	0,248
71	1,325	1,536	1,103	1,287	1,100	1,085	0,999	1,128	1,569	1,008	1,214	0,196
72	1,468	1,259	1,176	1,243	0,649	1,275	1,115	1,421	1,177	1,248	1,203	0,211
73	1,148	1,455	1,026	1,191	1,170	1,414	1,416	1,209	1,207	1,401	1,264	0,138
74	1,379	1,363	1,001	1,460	1,422	1,285	1,172	1,422	1,262	0,876	1,264	0,185
75	1,340	1,481	0,999	1,250	1,002	0,908	1,632	1,542	1,201	1,087	1,244	0,237
76	1,601	1,339	1,776	1,280	1,489	1,918	1,771	1,767	1,649	1,702	1,629	0,194
77	1,286	1,298	0,836	1,256	1,181	1,053	1,418	0,916	1,188	1,323	1,176	0,177
78	1,298	1,297	1,458	0,822	1,199	0,979	1,507	1,520	1,130	1,235	1,244	0,215
79	1,365	1,425	1,567	1,403	1,349	1,265	1,705	1,321	1,415	1,230	1,405	0,134
80	2,602	2,375	1,618	1,863	2,058	2,627	2,197	1,629	2,693	2,115	1,913	0,228
81	1,172	1,660	1,376	1,387	1,508	0,898	1,249	1,570	1,438	1,286	1,354	0,207
82	1,203	1,586	1,578	1,756	1,615	1,387	1,249	1,194	1,433	1,066	1,407	0,214
83	1,104	1,226	1,166	1,261	1,240	1,275	1,174	1,253	1,019	1,512	1,223	0,123
84	1,502	1,022	1,233	1,499	1,110	1,171	1,047	1,297	1,103	1,502	1,249	0,182
85	1,499	1,407	1,372	1,211	1,180	1,407	1,208	1,512	1,426	1,343	1,357	0,114
86	0,637	1,306	1,069	1,297	0,966	0,828	0,820	1,393	1,176	1,323	1,082	0,246

Teste	Observação										\bar{y}	σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
87	1,166	1,398	1,459	1,427	1,540	1,240	1,129	1,304	0,988	1,353	1,300	0,161
88	1,561	1,494	1,496	1,665	1,663	1,512	1,412	1,419	0,934	1,625	1,539	0,091
89	1,074	1,462	1,400	1,335	0,751	1,266	1,117	1,504	1,101	1,302	1,231	0,214
90	1,272	1,197	1,416	1,474	1,269	1,133	1,049	0,617	1,492	1,256	1,284	0,143
91	1,234	1,598	1,443	1,372	1,364	1,452	1,013	1,045	1,415	1,528	1,346	0,184
92	1,763	1,413	1,410	1,808	1,563	1,681	1,541	1,749	0,847	1,661	1,544	0,267
93	1,082	1,291	0,864	1,547	1,496	1,522	1,601	1,432	1,444	1,463	1,374	0,221
94	1,672	1,506	1,885	1,389	1,156	1,308	1,229	1,539	1,408	1,492	1,459	0,203
95	1,424	1,428	0,706	1,229	1,133	1,349	1,449	1,585	1,412	1,390	1,310	0,233
96	1,126	1,393	1,471	1,135	1,131	1,318	1,170	0,857	0,947	1,549	1,210	0,210
97	1,192	1,166	0,953	1,249	1,476	1,224	1,223	1,186	0,947	1,237	1,185	0,143
98	0,617	1,440	1,213	1,160	1,272	1,209	1,034	1,288	1,365	1,105	1,170	0,216
99	1,194	1,501	1,373	1,466	1,688	0,953	1,329	1,337	1,408	1,365	1,361	0,183
100	1,364	1,287	1,166	0,970	1,493	1,593	1,223	0,981	1,243	0,694	1,201	0,252
101	1,376	1,122	0,908	1,470	1,288	1,177	1,141	1,292	1,202	1,255	1,223	0,146
102	1,106	0,964	1,028	0,839	1,298	1,152	0,961	1,222	0,839	0,933	1,034	0,149
103	1,758	1,539	1,773	1,794	1,447	1,649	1,537	1,405	1,640	1,427	1,597	0,140
104	1,427	1,326	1,345	1,191	1,378	1,505	1,155	1,090	1,591	1,566	1,357	0,163
105	1,235	1,216	1,367	1,574	1,296	1,096	1,589	0,755	1,438	1,257	1,282	0,230
106	1,295	1,266	1,204	0,964	1,089	0,818	0,862	1,269	0,645	0,927	1,034	0,213
107	1,401	1,317	1,314	1,308	1,330	1,328	1,366	1,166	1,044	1,280	1,285	0,099
108	0,854	1,052	1,190	1,036	1,376	0,811	1,194	1,243	0,958	1,201	1,092	0,171
109	1,300	1,034	1,252	1,010	1,295	1,395	1,374	1,103	1,114	1,207	1,208	0,130
110	1,145	1,122	0,973	0,638	1,103	0,985	1,163	1,076	0,889	0,943	1,004	0,150
111	1,194	1,064	1,109	1,302	1,587	1,344	1,442	0,717	1,263	1,418	1,244	0,231
112	1,301	0,996	1,271	1,468	1,035	1,509	1,467	1,432	1,329	1,153	1,296	0,174
113	0,922	1,243	1,102	1,269	1,318	1,332	1,144	1,322	1,150	0,961	1,176	0,140
114	1,087	1,321	1,199	1,137	1,325	1,098	1,334	1,333	1,093	1,097	1,202	0,108
115	1,657	1,682	0,714	0,951	1,578	1,180	1,437	1,581	1,567	1,404	1,449	0,228
116	0,922	0,950	1,467	1,178	1,296	0,852	1,164	1,086	1,375	0,723	1,101	0,227
117	1,325	1,183	1,340	1,248	1,557	1,232	1,109	1,312	1,447	1,507	1,326	0,136
118	1,412	0,866	1,153	0,983	0,873	0,922	0,884	1,013	1,169	1,389	1,066	0,196
119	1,331	0,994	1,308	1,227	0,949	1,334	1,458	1,225	1,329	1,000	1,216	0,166
120	1,008	1,455	1,051	0,732	1,167	1,149	1,022	1,131	1,175	1,478	1,137	0,205
121	1,204	1,136	1,227	0,892	1,241	1,539	1,203	1,058	1,181	1,192	1,187	0,153
122	1,166	1,196	1,337	0,901	0,793	0,639	1,384	1,444	1,129	1,153	1,114	0,248
123	1,018	1,219	0,761	0,852	1,349	1,178	1,138	1,308	0,800	1,189	1,081	0,201
124	1,692	0,858	1,395	1,179	1,306	1,520	1,619	1,261	1,565	1,536	1,453	0,165
125	1,201	1,336	1,310	1,094	1,365	0,704	1,184	0,916	1,159	1,039	1,131	0,194
126	0,979	1,328	1,002	1,362	1,206	0,879	1,394	1,247	1,043	1,259	1,170	0,171
127	1,358	1,217	1,043	1,403	1,153	0,881	0,837	1,232	0,937	1,089	1,115	0,184
128	1,222	0,980	1,254	1,063	1,145	1,319	0,879	1,216	1,204	0,619	1,090	0,202
129	1,121	0,695	0,788	0,771	0,962	0,972	0,659	0,592	1,174	0,688	0,842	0,192
130	1,092	1,178	1,164	1,183	1,223	0,955	0,971	1,183	1,309	1,135	1,139	0,103
131	0,994	1,295	1,266	1,380	1,285	1,126	1,285	1,028	0,953	1,096	1,171	0,142

Teste	Observação										\bar{y}	σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
132	1,416	1,114	1,200	1,481	1,181	1,447	1,248	0,883	1,252	0,991	1,221	0,184
133	1,307	1,087	1,247	1,049	1,263	0,530	1,117	1,272	0,937	1,161	1,097	0,219
134	1,238	1,429	1,257	1,279	0,991	1,369	1,070	1,082	1,184	1,197	1,210	0,129
135	0,811	0,942	1,119	1,229	0,989	0,826	0,645	1,087	1,004	1,012	0,966	0,161
136	1,244	1,357	1,306	1,197	1,499	1,403	1,196	1,041	0,914	1,175	1,233	0,163
137	0,898	1,051	0,966	0,970	1,000	1,481	1,100	1,072	1,160	1,224	1,092	0,159
138	0,908	1,115	1,096	1,654	1,532	1,305	1,445	1,204	1,517	1,390	1,317	0,222
139	1,019	0,746	0,905	0,734	1,216	1,004	0,942	0,913	1,151	1,270	0,990	0,172
140	1,176	1,150	1,259	1,430	1,138	0,841	1,229	1,357	1,347	1,383	1,231	0,162
141	1,200	1,271	1,034	1,017	1,011	0,932	0,983	1,041	1,018	1,089	1,059	0,097
142	1,450	1,512	1,455	1,315	1,375	1,556	1,344	1,588	1,601	1,351	1,455	0,101
143	1,268	1,100	1,264	1,269	0,798	0,889	1,330	0,980	0,991	1,109	1,100	0,173
144	1,052	0,943	1,188	1,331	1,083	1,302	1,171	1,495	1,310	1,269	1,214	0,153
145	1,141	1,008	0,976	0,960	0,726	1,095	0,936	1,335	1,226	1,149	1,055	0,163
146	1,123	1,180	1,322	1,258	1,180	1,523	1,415	1,356	1,398	1,433	1,319	0,123
147	1,192	1,278	0,867	0,862	1,157	1,383	1,311	1,302	1,116	1,223	1,169	0,169
148	1,159	1,457	1,639	1,459	1,274	1,601	1,495	0,919	0,978	1,649	1,363	0,254
149	1,146	1,328	1,358	1,265	1,178	1,283	1,051	1,161	1,120	1,045	1,194	0,105
150	0,911	1,496	1,318	1,289	1,269	1,552	0,950	1,206	1,343	0,979	1,231	0,211
151	1,002	1,295	1,053	1,181	0,860	0,985	1,216	1,171	0,737	0,877	1,038	0,170
152	1,236	1,006	1,618	1,580	1,310	1,697	1,255	1,273	1,735	1,159	1,387	0,238
153	0,971	1,227	0,837	1,000	1,057	0,925	1,246	0,933	0,997	0,861	1,005	0,131
154	1,627	1,478	1,419	1,739	1,535	1,532	1,558	1,322	1,615	1,489	1,531	0,110
155	1,030	0,774	1,156	1,012	1,188	0,942	1,221	0,995	1,023	1,116	1,046	0,125
156	1,449	1,336	1,503	1,648	1,427	1,485	1,306	1,206	1,447	1,333	1,414	0,118
157	1,340	1,258	1,279	1,191	1,284	1,324	1,325	1,353	0,873	1,303	1,253	0,134
158	1,323	1,212	1,099	1,271	1,293	1,414	1,139	1,510	1,064	1,111	1,244	0,139
159	1,442	1,155	1,123	0,955	1,254	1,496	1,298	1,489	1,474	1,434	1,312	0,177
160	0,987	1,515	1,195	0,987	1,337	1,290	1,271	1,113	1,435	1,213	1,234	0,165
161	1,496	0,972	1,191	1,289	1,303	1,173	1,303	1,476	1,151	1,412	1,277	0,153
162	1,268	0,991	1,119	1,181	1,285	1,230	1,169	1,191	1,150	1,211	1,180	0,079
163	1,502	1,114	1,068	0,766	1,255	1,191	1,473	1,115	1,200	0,984	1,167	0,206
164	1,071	1,433	1,451	1,349	1,321	1,468	1,132	1,273	1,257	1,055	1,281	0,145
165	1,423	1,352	0,850	1,396	0,890	1,302	1,260	1,316	1,368	1,225	1,238	0,193
166	1,536	1,029	1,225	1,476	1,413	1,225	1,276	1,234	1,372	1,316	1,310	0,139
167	1,412	0,982	0,775	1,299	1,220	1,261	1,314	1,395	1,320	1,067	1,204	0,192
168	1,126	1,312	1,163	1,149	1,119	1,257	1,059	1,136	0,712	0,919	1,095	0,162
169	1,080	1,010	1,005	1,111	1,233	1,086	1,072	0,939	1,052	1,182	1,077	0,081
170	1,431	1,307	1,059	1,371	1,001	1,444	1,087	1,240	1,428	1,566	1,293	0,181
171	1,154	0,946	1,148	0,618	0,804	1,272	0,708	1,274	1,428	0,928	1,028	0,255
172	1,145	1,123	1,353	1,364	0,828	1,323	1,147	1,285	1,201	0,950	1,172	0,167
173	1,353	1,451	1,104	1,333	1,436	1,323	1,321	1,167	0,846	1,289	1,262	0,172
174	1,331	1,278	0,928	1,238	1,360	1,360	1,151	1,181	1,064	1,130	1,202	0,133
175	1,103	1,025	1,228	1,127	0,867	0,816	0,886	0,588	0,964	1,107	0,971	0,178
176	1,294	1,154	1,170	1,579	1,341	1,201	1,107	1,302	1,418	1,125	1,269	0,141

Teste	Observação										\bar{y}	σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
177	0,912	1,053	1,564	0,994	1,514	1,453	1,481	1,454	1,192	0,832	1,245	0,265
178	1,755	1,533	1,397	1,058	1,325	1,539	1,268	1,515	1,025	1,501	1,392	0,216
179	1,226	1,272	1,262	0,927	1,142	1,321	1,146	1,200	1,305	0,865	1,167	0,147
180	1,122	0,892	0,970	0,993	1,244	1,440	1,105	1,201	0,741	1,377	1,108	0,206
181	1,107	1,269	1,309	1,249	1,401	0,963	1,322	1,474	1,132	1,337	1,197	0,182
	1,376	1,017	1,231	1,344	1,273	0,983	0,988	1,012	1,061	1,199		
	1,239	1,315	1,562	1,157	1,336	1,200	1,452	1,049	1,346	1,357		
	1,265	1,011	1,136	1,282	1,202	1,290	1,469	0,886	1,268	1,280		
	1,332	0,940	1,357	1,141	1,257	1,300	1,108	1,151	1,309	1,072		
	1,044	1,414	1,224	1,273	1,308	0,591	0,875	1,342	1,375	0,819		
	0,793	1,183	1,415	1,397	1,044	1,059	1,290	1,262	1,375	1,396		
	1,070	1,155	1,108	1,213	1,317	1,043	1,324	1,184	1,387	0,782		
	1,003	1,250	1,316	1,312	1,285	1,301	0,730	1,217	1,059	0,775		
	1,117	1,452	1,210	1,326	1,028	1,118	1,241	1,235	1,465	1,098		