UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ARGUMENTAÇÃO EM GEOMETRIA:
UM OLHAR SOBRE A FORMAÇÃO DE CONCEITOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

LUCAS MÜLLER SCHNEIDER

Porto Alegre
2018

LUCAS MÜLLER SCHNEIDER

ARGUMENTAÇÃO EM GEOMETRIA: UM OLHAR SOBRE A FORMAÇÃO DE CONCEITOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática

Orientadora
Profª. Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Porto Alegre
2018

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de matemática Pura e Aplicada

Argumentação em Geometria: um olhar sobre a formação de conceitos do ensino fundamental

Lucas Müller Schneider

Banca examinadora:

Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Profª. Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof. Dr. Vandoir Stormowski
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

“Sorte é pras crianças
Que vê o professor em desespero na miséria
Que no meio do caminho da educação havia uma pedra
E havia uma pedra no meio do caminho”

(Criolo)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo identificar, analisar e discutir como é realizada a demonstração matemática por alunos do nono ano do ensino fundamental. Para realizar a pesquisa foi construído e aplicado um questionário de quatro perguntas envolvendo o conteúdo de geometria, sendo tópicos desse conteúdo: soma dos ângulos internos de um polígono, transposição e soma de ângulos assim como definições de diferentes tipos de ângulo, soma e sobreposição de áreas, e o conceito de diagonal e triangulação de polígonos. Sendo todos esses conteúdos que segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1988) deveriam ser abordados em sala de aula pelo professor. A análise da pesquisa foi feita a partir das teorias de Shlomo Vinner (2002) sobre Imagem do Conceito e Definição do Conceito e da teoria dos três mundos matemáticos de David Tall (2013). Foram analisados quatorze questionários e, a partir desses dois referenciais, discuti como os alunos realizam as demonstrações matemáticas. A conclusão acerca da análise dos questionários foi de que, apesar da demonstração matemática ser importante na construção de conhecimento do aluno, muito pouco é trabalhada em sala de aula. Com isso o aluno tem problemas na construção de imagens de muitos conceitos ou imagens muito limitadas sobre conceitos, além disso grande parte dos alunos utiliza apenas um tipo de pensamento matemático para suas demonstrações matemáticas.

Palavras-chave: Pensamento matemático. Geometria.

ABSTRACT

This paper aims to identify, analyze and discuss how the mathematical proof is performed by students from ninth grade of elementary school. In order to conduct the research a questionnaire was formulated and applied; it had four questions about geometry, being its topics: sum of the interior angles of a polygon, transposing and sum of angles — as well as definitions of diferente types of angle, sum and layering of areas, and the concept of diagonal and polygon triangulation. All of these contents, according to National Curriculum Parameters (1988) must be approached in the classroom by the teacher. This analysis was done based on the theories of Shlomo Vinner (2002) on Concept Image and Concept Definition and the theory of the three worlds of mathematics of David Tall (2013). Fourteen questionnaires were analyzed and, from these two references, I er tediscussed how students perform the mathematical proofs. We concluded from this analysis that, although the mathematical proof is important in the student construction of knowledge, it is slightly worked in the classroom. As a result, the student has difficulties in constructing images of many concepts or has extremely limited images about concepts. In addition, most students use only one type of mathematical thinking for their mathematical proofs.

Keywords: Mathematical thinking. Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Material referente a) questão 2 b) questão 3 20
Figura 2: Questão 1 do questionário 21
Figura 3: Relação entre a soma dos ângulos internos e o número de triângulos em um polígono 22
Figura 4: Questão 2 do questionário 23
Figura 5: Questão 3 do questionário 25
Figura 6: Caso simplificado da questão 3 26
Figura 7: Questão 4 do questionário 27
Figura 8: Hexágono transformado em a) dois triângulos e um quadrilátero. b) um triângulo e um pentágono 28

LISTA DE EXTRATOS

Extrato 1: Resposta com erro de imagem de conceito da questão 1 29
Extrato 2: Explicação do aluno L sobre a questão 1 30
Extrato 3: Explicação do aluno G para a questão 1 31
Extrato 4: Exemplo de problemas com imagem de conceito da questão 2 32
Extrato 5: Exemplo de resposta para a questão 2 32
Extrato 6: Exemplo de resposta da questão 3 envolvendo o ângulo de 360° 33
Extrato 7: Exemplo de problema de conceito de imagem da questão 4 34
Extrato 8: Exemplo de resposta axiomática formal 34
Extrato 9: Respostas para a questão 2 35
Extrato 10: Exemplo de resposta com pensamento simbólico operacional para a questão 3. 36
Extrato 11: Exemplo de resposta utilizando pensamento conceitual corporificado da questão 4. 36

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 10

2. REFERENCIAL TEÓRICO 12

2.1. Demonstração matemática em sala de aula 12

2.2. Desenvolvimento do pensamento matemático 15

3. PESQUISA – ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO 19

3.1. Um pouco sobre a pesquisa e objetivos. 19

3.2. Resolução do questionário 21

4. ANÁLISE DE DADOS 29

4.1. Imagem do Conceito vs. Definição do Conceito 29

4.2. O pensamento matemático por trás das questões 34

4.3. O pensamento matemático de cada aluno 37

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS 39

REFERÊNCIAS 42

APÊNDICE A – Questionário 44

APENDICE B – Termo de Consentimento Informado 46

APÊNDICE C – Carta de autorização da escola para análise e utilização do material 48

1. INTRODUÇÃO

Durante a graduação em licenciatura em matemática, somos levados inúmeras vezes para dentro de uma sala de aula, algumas vezes como observador e outras como professor. Como professor pude perceber que, infelizmente, o ensino está muito mecanizado, a sala de aula é um lugar no qual os alunos precisam memorizar o máximo possível de conceitos e aplicações e que alcançam melhores notas quem consegue decorar mais coisas. Poucas são as vezes em que existe a construção de conhecimento, sendo o próprio aluno o responsável por essa construção.

Como essa construção é realizada de maneiras diferentes para cada indivíduo, algumas coisas são construídas de maneira incorreta ou imprecisa, pois em sala de aula as coisas são feitas na base de algoritmos. O professor explica o algoritmo para aluno, o aluno entende em quais lugares deve-se encaixar os números que são dados nos exercícios e com isso resolver as questões. Logo, se mudamos um pouco o que é exigido pelos exercícios ou damos exemplos diferentes dos que o aluno está acostumado, ele tem dificuldade de entender o que é pedido.

Contudo, para que o aluno consiga construir seu conhecimento é importante que ele entenda o que ele está aprendendo e o mais importante, que ele entenda de onde vem o que ele aprende. Para isso serve a demonstração, porém a demonstração não deve ser dada como pronta para o aluno pelo professor, pois "quando os estudantes se deparam com uma demonstração já construída, eles tornam-se céticos, porque não conseguem compreender a garantia proporcionada por ela." (MARTINS, MANDARINO, 2014, p. 104). A demonstração matemática também é utilizada para desenvolver o pensamento matemático do aluno, para que futuramente ele consiga realizar argumentações mais complexas.

No presente trabalho de conclusão de curso, investigo como os alunos realizam demonstrações matemáticas sob a perspectiva da teoria dos mundos da matemática de David Tall. Meu foco da demonstração matemática será na área de geometria, pois além de ser um assunto que sempre me chamou atenção e segundo os PCN (1988) são conteúdos que são de fácil demonstração. Utilizo como demonstração matemática a maneira com que um individuo utiliza para explicar algum teorema, podendo ser realizado de maneira não formal.

No capítulo 3 é apresentada uma revisão bibliográfica de como é pensada a demonstração matemática em sala de aula pelo ponto de vista de professores e livros didáticos. Também são apontados motivos pelos quais escolhi o nono ano do ensino fundamental e a área da geometria para aplicar minha prática pedagógica. Além disso explico os conceitos de Imagem do Conceito, Definição do Conceito e a teoria dos três mundos de David Tall que serão utilizadas para analisar os dados obtidos.

No capítulo 4 é explicado o tipo de pesquisa e meus objetivos com essa pesquisa. Também é explicado como é feita a construção e aplicação do questionário elaborado, esse focando no aluno para saber como que o aluno utiliza a demonstração matemática para desenvolver questões matemáticas.

No capítulo 5 os dados coletados pelo questionário são analisados a partir dos objetivos apresentados anteriormente. Por final, no capítulo 6 trago minhas reações, reflexões e conclusões depois de ter construído esse trabalho.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Na primeira seção desse capítulo discuto como é trabalhada a demonstração matemática em sala de aula e como os professores percebem o uso da demonstração matemática em sala de aula. Ao final da seção trago o conceito de como deveria ser trabalhada a demonstração matemática no ensino fundamental. Na segunda seção trago os conceitos de Conceito de Imagem e da Teoria dos Três Mundos que utilizo na análise de dados da minha pesquisa.

2.1. Demonstração matemática em sala de aula

A demonstração matemática consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como parte do currículo a partir do 6º ano do ensino fundamental para ajudar a desenvolver a lógica do aluno e:

> "[...] é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode- se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas." (BRASIL, 1998, p. 71)

Logo, ao final do quarto ciclo (8° e 9° ano) do ensino fundamental, o aluno já deve ter passado por experiências que desenvolvam um raciocínio dedutivo, sendo capaz de realizar demonstrações, não sendo necessárias as demonstrações axiomáticas. É papel do professor trazer para os alunos situações nas quais seja possível observar regularidades para que o aluno possa formular teorias e conjecturas que posteriormente possam ser provadas ou não.

Os principais conteúdos apontados pelos PCN para que sejam trabalhadas as demonstrações matemáticas são dentro do campo da geometria, como o Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales e soma dos ângulos internos de um triângulo. Esses assuntos são escolhidos pela facilidade de utilizar material concreto para verificar suas propriedades e a partir disso criar conjecturas.

Os PCN ainda trazem que tanto a formação inicial quanto a formação continuada não preparam o professor para dar aula, com isso o professor se baseia em livros didáticos para a construção de suas aulas, que por sua vez são de qualidade insatisfatória. No Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) é indicado que o professor discuta as justificativas matemáticas com seus alunos para que o aluno encontre mais significado no que está fazendo. Porém dos onze conjuntos de livros didáticos do 6° ao 9° ano indicados pelo PNLD/2017 (BRASIL, 2016), cinco possuem explicações, exemplos ou exercícios que trazem o uso de demonstrações nos livros de 8° ou 9° ano para o ensino de geometria. Com isso temos uma boa parcela de livros que não trazem a demonstração para o desenvolvimento do aluno, apenas a repetição de algoritmos ou mecanismos para encontrar a resposta correta.

No trabalho de Mandarino e Martins (2014) é feita uma análise em livros didáticos de 6° a 9° ano para verificar o uso de demonstrações em livros didáticos. Todos os temas analisados são referentes a conteúdos dentro da geometria pois, segundo as autoras são "conteúdos para os quais a argumentação e prova são simples de serem trabalhadas e entendidas." (MANDARINO, MARTINS; 2014; p. 102) e a demonstração deve ser realizada com frequência pelos estudantes para que eles compreendam e aceitem a validade das construções.

Na análise dos livros didáticos apenas 15% do total de atividades "utilizam o conteúdo em foco para fundamentar outras propriedades e/ou trabalhar dedução, justificação, verificação e demonstração" (MANDARINO, MARTINS; 2014; p. 112) e a maioria dos exercícios analisados eram repetitivos, nos quais o aluno apenas precisava reproduzir algum tipo de algoritmo e privilegiam a habilidade do cálculo.

Segundo Silva e Sales (2010), a partir de entrevistas feitas com professores do ensino fundamental, o professor não tenta continuar a construção de raciocínio dedutivo dos alunos em sala de aula por não se sentir preparado para trabalhar com isso no ensino fundamental, pois em sua formação só trabalhou com demonstrações formais e, para esses professores, esse tipo de demonstração está fora do alcance dos alunos. Além disso, segundo os autores, a universidade não ensina meios para que o professor consiga trabalhar outras maneiras de demonstração em níveis mais simples.

Da mesma maneira, é discutido por Caramés (2010) o uso da demonstração no ensino de geometria no ensino fundamental. Novamente existe um entendimento de que é necessário que os alunos, já no ensino fundamental, tenham contato com a demonstração matemática. A partir de um questionário aplicado em professores do ensino fundamental são identificados três tipos de professores: professores que acham que os alunos não são capazes de entender a demonstração matemática já que "os alunos não estão entendendo outras coisas muito menos demonstração" (CARAMÉS; 2010; p. 5); professores que concordam que se deve trabalhar demonstração matemática em sala de aula de maneira simples sem abusar de demonstrações muito formais; e professores que assumem não possuírem conhecimento necessário para trabalhar com demonstração em sala de aula.

Um ponto que não havia sido trazido por outros trabalhos foi de que os professores também não trabalham com demonstração por falta de tempo em sala de aula, por isso pensam ser mais fácil trabalhar com a geometria "calculista", mostrando apenas as fórmulas aos alunos sem que exista a discussão dos porquês por trás da fórmula.

É interessante pontuar que no trabalho citado alguns professores não concordam com a demonstração em sala de aula, porém utilizam do argumento de que os professores não estão preparados para realizá-las, com isso não sabem como aplicar atividades adequadas para os alunos.

No trabalho de Meier (2012) é realizada uma pesquisa com professores sobre o que eles entendem sobre demonstração matemática. Mais uma vez temos que grande parte dos professores entendem a demonstração matemática como um processo formal e rigoroso de raciocínio, logo não seria possível ser feito na escola básica.

Com isso temos que a demonstração matemática deve ser trabalhada em sala de aula para desenvolver a argumentação do aluno e para que não pareça algo mecanizado, pois proporciona a compreensão do aluno. Porém existe uma resistência por parte dos professores em utilizar demonstrações tanto como exemplos como para exercícios por receio do aluno não entender ou não estar preparado para compreender todos os passos de uma demonstração, principalmente pois alguns professores pensam que toda demonstração tem que ser formal, logo algo que o aluno não é capaz de fazer já que alguns dos professores não se sentem capazes de realizá-las.

Pietropaulo (2005) dialoga entre as diferentes maneiras de demonstração utilizadas pelos matemáticos. Uma das citadas seria o tipo de demonstração não formal, pois demonstrações desse tipo separam os matemáticos dos não matemáticos, ou seja, apenas pessoas que entendem do assunto e compreendem esse tipo de linguagem entendem o real significado do que foi mostrado.

> “A demonstração dos resultados é essencial não apenas em seu aspecto de validação, mas, sobretudo, porque ela é parte integrante da construção de conceitos matemáticos e como tal proporciona avanços na compreensão da própria Matemática.” (PIETROPAULO, 2005, p. 66)

Com isso, o autor traz dois tipos de demonstração, a demonstração que valída e a demonstração que explica, sendo que a segunda “termina por utilizar raciocínios fundamentados em ideias matemáticas, enquanto a mera prova formal emprega basicamente regras de sintaxe.” (PIETROPAULO, 2005, p. 79)

A partir das ideias trazidas por Pietropaulo, a demonstração matemática é muito mais do que mero formalismo, como muitos professores pensam que deve ser. A demonstração matemática pode ser feita de maneira simples, desde que traga o entendimento e a compreensão do que está sendo feito e que ajude a melhorar a compreensão matemática do aluno.

2.2. Desenvolvimento do pensamento matemático

Imagem do Conceito, trazida por Shlomo Vinner (2002) em um dos capítulos de *Pensamento Matemático Avançado* é a imagem criada por cada indivíduo quando lhe é apresentado um novo conceito através de diferentes abordagens. Em sala de aula isso ocorre como uma construção feita por cada aluno a partir de diferentes atividades elaboradas pelo professor. Essa Imagem do Conceito é uma figura mental que pode variar de indivíduo para indivíduo, com isso temos que algumas pessoas podem apresentar imagens de conceito erradas sobre um certo conceito.

Uma Imagem do Conceito é considerada errada quando entra em contradição com a Definição do Conceito, que é a definição formal de algum conceito. É papel do professor fazer com que os alunos consigam construir imagens de conceito próximas das definições de conceito, porém as vezes os alunos precisam ser questionados de diferentes formas sobre um mesmo conceito. Para que exista uma construção e não apenas memorização da imagem, uma vez que apenas a memorização pode limitar o desenvolvimento da imagem e da construção de outras imagens.

> “Propor aulas que possibilitem a interação dos alunos, permite que, se o conceito não for muito complicado, possamos abrir para que os alunos criem suas próprias definições. Com essa ideia não buscamos fugir do rigor matemático, das provas e definições aceitas pela comunidade matemática, mas proporcionar ao aluno a exposição de suas ideias e de sua forma de compreender um conceito novo.” (ATZ, 2017, p. 17)

Com isso temos que aulas que proporcionam diferentes construções do pensamento dos alunos, ajudam na criação e formação, não só de uma Imagem do Conceito, como também na Definição do Conceito. Essa construção mutua é dita por Atz (2017) como necessária para que exista uma conexão entre as duas, ao invés do que acontece em sala de aula, que o professor quer que o aluno construa uma Imagem do Conceito a partir da Definição do Conceito. Porém como cada aluno tem uma maneira diferente de compreender os exemplos e atividades, algumas construções acontecem de forma errada. Logo, se o aluno constrói uma Imagem do Conceito errada, quando ele for passando para os próximos ciclos de aprendizado ele terá problemas na aplicação e na demonstração de novos conceitos.

Em seu livro *Como os Humanos Aprendem a Pensar Matematicamente*, David Tall (2013) afirma que são necessários diferentes tipos de atividade para que ocorra a aprendizagem de um indivíduo. Diferentes atividades são necessárias para que o aluno desenvolva diferentes pensamentos matemáticos. Segundo o autor existem três categorias de pensamento matemático que podem ser desenvolvidos:

- Corporificação Conceitual: se constrói em percepções humanas e ações desenvolvendo imagens que são verbalizadas de forma cada vez mais sofisticada e se transforma em entidades mentais perfeitas em nossa imaginação.
- Simbolismo Operacional: são as ações físicas que se tornam procedimentos matemáticos. Enquanto alguns alunos permanecem em um nível de

> processamento das informações, outros veem os símbolos de forma flexível como operações a serem executadas e também operadas através de manipulação e cálculos.
>
> - Formalismo Axiomático: constrói o conhecimento formal em sistemas axiomáticos especificados pelas definições de teoria de conjuntos, nos quais as propriedades são deduzidas através de provas matemáticas. (TALL, 2013, p.16-17, tradução de Atz)

Além disso, segundo Tall (2013) cada uma dessas maneiras de pensar possue qualidades diferentes, e uma pessoa pode desenvolver cada uma separadamente assim como pode alternar entre os mundos, utilizando apenas um deles ou os três. Apesar de que na escola, a corporificação conceitual e o simbolismo operacional desenvolvem-se em paralelo, no qual ações corporificadas dão origem a operações simbólicas e o simbolismo incorpora as representações, já o formalismo axiomático não é tão trabalhado em sala de aula.

Analisando mais detalhadamente cada um dos mundos de Tall, temos que o mundo Corporificado Conceitual é a descrição e observação de propriedades de objetos, assim como sua manipulação, mesmo que um indivíduo não precise manipular. Assim ao pensar em algum conceito podemos corporificá-lo a partir de gráficos, material concreto ou desenhos. O mundo Simbólico operacional é aquele no qual são utilizadas variáveis matemáticas para efetuar e representar ações e seus produtos. Por último, o mundo Axiomático Formal é o mundo de axiomas e teoremas, é caracterizado pela utilização de linguagem formal.

Fernandes (2014) faz uma análise dos livros didáticos recomendados pelo MEC utilizando a teoria dos três mundos de Tall. Os livros analisados foram livros de 6°, 7° e 8° ano, por conterem os conteúdos de estudo que eram ângulos e paralelismo. Assim como Tall relata, foram encontrados apenas exemplos e exercícios dos mundos conceituais corporificados e simbólicos operacionais, sendo o primeiro encontrado nos três anos e o segundo encontrados apenas nos livros de 7° e 8° ano. Sobre o mundo axiomático formal “a coleção analisada apresentou a definição do ângulo, e encontramos o que pode ser entendido como um possível caminho que permite chegar ao Mundo Formal Axiomático” (FERNANDES, 2014, p. 11).

Em minha pesquisa utilizei as definições de Imagem do Conceito, Definição do Conceito e a teoria dos três mundos da matemática para analisar como os alunos expressam seus pensamentos para realizar a demonstração matemática a partir de questões propostas. Pois como é discutido durante o capítulo, tanto pelos PCN quanto pelos livros didáticos, alunos do nono ano já tiveram contato com todas as formas de pensar trazidas por Tall.

3. PESQUISA – ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO

Nesse capítulo abordo questões relativas à minha pesquisa. Explico qual tipo de pesquisa utilizo e como formulei o questionário que utilizei, assim como o público para o que eu apliquei o questionário.

3.1. Um pouco sobre a pesquisa e objetivos

Nessa seção é explicado qual o tipo de pesquisa estou desenvolvendo nesse trabalho e como foi construído o questionário que apliquei para minha prática pedagógica. Ao final da seção pontuo meus objetivos ao aplicar o questionário.

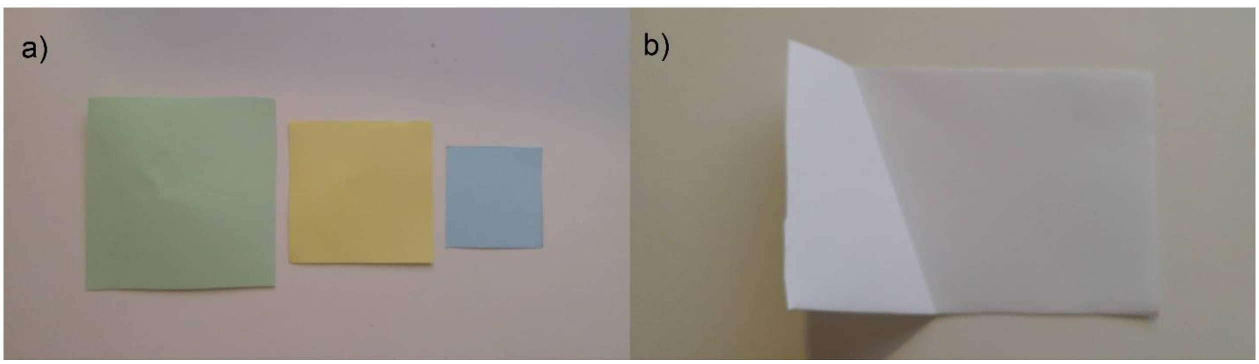
A pesquisa desenvolvida é uma pesquisa qualitativa, pois possui as cinco características apresentadas por Bogdan e Biklen (1994):

1. Na investigação qualitativa a fonte direta é o ambiente natural, ou seja, o investigador introduz-se no ambiente de pesquisa, sendo sua principal fonte de dados o seu caderno de campo, podendo utilizar-se de material escrito por alunos, áudios e filmagens para complementar as informações trazidas pelo investigador.
2. A investigação qualitativa é descritiva, ou seja, é feita através de palavras ou imagens e não por números.
3. Na investigação qualitativa o processo é mais importante do que apenas os resultados.
4. A investigação qualitativa não recolhe dados e provas com o objetivo de afirmar hipóteses, ao invés disso, os conceitos são construídos a medida que os dados são coletados.
5. Na investigação qualitativa o significado possui importância vital, ou seja, "os investigadores que fazem uso desse tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido a suas vidas." (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 50)

Meier (2012), em uma de suas análises para entender como alunos do oitavo ano do ensino fundamental pensavam e argumentavam, elaborou um questionário com cinco questões de geometria e aritmética nas quais os alunos deviam, além de responder as perguntas, justificar suas respostas. As respostas dos alunos foram categorizadas em 6 tipos diferentes, levando em conta se o aluno realizou ou não a questão e qual o nível de entendimento que o aluno teve da questão.

Baseando-me no questionário criado pela autora citada, criei um questionário com quatro perguntas que solicitavam respostas descritivas, sendo duas delas, as questões 2 e 4, coletadas das provas da OBMEP e duas questões coletadas do trabalho da autora, questões 1 e 3. Junto com o questionário foi entregue um material para ajudar o aluno na visualização das questões. Esse material tem relação com as perguntas 2 e 3 e está representado na figura 1. a) e b) respectivamente.

Figura 1: Material referente a) questão 2 b) questão 3



Fonte: Autor

Todas as questões do questionário são sobre geometria, trazendo conteúdos que envolvem conhecimentos que, segundo os PCN (1988), são adquiridos até os anos finais do ensino fundamental, sendo eles: a soma dos ângulos internos de um polígono, identificação e construção de ângulos, soma e sobreposição de áreas e o conceito de diagonal de um polígono. O questionário foi aplicado em uma turma de nono ano do ensino fundamental, no turno da tarde de uma escola estadual de Porto Alegre – RS, em dois períodos, cada um de 50 minutos, totalizando 100 minutos. Ao final dos 100 minutos todos os alunos já haviam entregue o questionário.

Foi realizada a coleta do questionário respondido pelos alunos para análise de como ocorre a construção do pensamento do aluno e possíveis reflexões. A coleta de áudios foi feita, pois alguns alunos têm dificuldade de escrever a construção de seus pensamentos, então gravei áudios de conversas entre mim e o aluno, em que eu tento ajudar o aluno a construir seu raciocínio, para entender como o mesmo desenvolve as atividades propostas. O áudio substitui a coleta de dados escritos para quem tiver dificuldade na escrita do desenvolvimento das questões. O caderno de campo serviu como complemento dos outros dados, pois me ajudou a captar informações que eu não consegui perceber através de áudios ou coleta de dados e trouxe as minhas percepções dos acontecimentos e do desenvolvimento dos alunos.

Com isso tenho como objetivo operacionais desse trabalho:

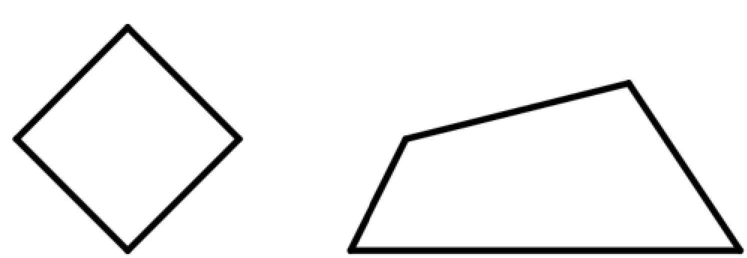
- analisar como foram formadas algumas imagens de conceitos dentro da geometria;
- avaliar quais tipos de pensamento, definidos por Tall (2013), são utilizados para responder cada uma das questões do questionário;
- avaliar quais tipos de pensamentos cada um dos alunos utilizou para responder as questões do questionário;
- discutir o nível de argumentação matemática que os alunos possuem para resolver as questões do questionário.

3.2. Resolução do questionário

Nessa seção é demonstrada uma solução possível para as questões do questionário. É importante destacar de que essas não são as únicas maneiras de resolver as questões.

Figura 2: Questão 1 do questionário

Questão 1: As figuras abaixo são quadriláteros:



É verdade que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°? Explique sua reposta:

Fonte: Meier (2012)

A resolução foi realizada pelo autor e todos os postulados, teoremas e definições foram tiradas de Dolce e Pompeo (1993) e tem o intuito de mostrar possíveis resoluções.

Teorema 3.1: Soma dos ângulos de um triângulo: A soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a 180º.

Resolução:

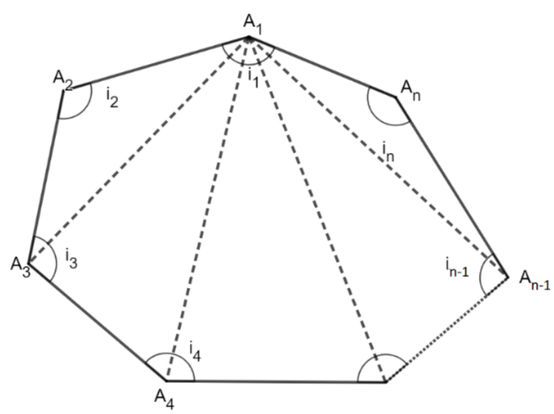
Seja $A_1 A_2 A_3 A_4 \dots A_n$ um polígono convexo de n lados.

De um vértice qualquer conduzimos todas as diagonais que têm esse vértice como extremo.

O polígono fica então dividido em $(n-2)$ triângulos e a soma $\mathrm{S_i}$ dos ângulos internos do polígono

$$\mathrm{S_i} = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \cdots + i_n$$

Figura 3: Relação entre a soma dos ângulos internos e o número de triângulos em um polígono



Fonte: Autor

$\mathrm{S_i}$ é igual à soma dos ângulos internos dos $(n-2)$ triângulos, como mostra a figura 3.

Pelo teorema 3.1 e pelo que foi dito acima temos que:

$$\mathrm{S_i} = (n-2) \cdot 180° \qquad (3.1)$$

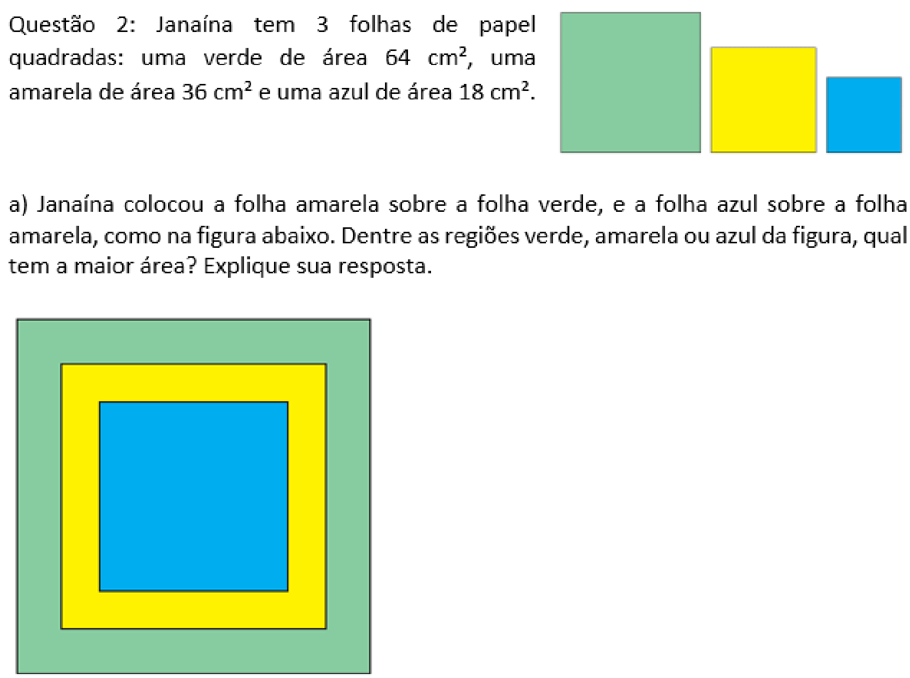
Como todo quadrilátero tem n = 4, então a partir por (3.1) temos:

$$S_4 = (4 - 2) \cdot 180°$$

$$S_4 = 360°$$

Com isso temos que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é 360°.

Figura 4: Questão 2 do questionário


Questão 2: Janaína tem 3 folhas de papel quadradas: uma verde de área 64 cm², uma amarela de área 36 cm² e uma azul de área 18 cm².

a) Janaína colocou a folha amarela sobre a folha verde, e a folha azul sobre a folha amarela, como na figura abaixo. Dentre as regiões verde, amarela ou azul da figura, qual tem a maior área? Explique sua resposta.

Fonte: Prova OBMEP (2018) modificada

Definição 3.1: A soma de superfícies está associada a uma área (número) que é a soma das áreas das superfícies parcelas.

$$C = A + B \Rightarrow (Área\ C = Área\ A + Área\ B)$$

Resolução:

Chamemos de Área A a área do quadrado azul, Área B a área do quadro amarelo com a sobreposição do quadrado azul e Área C a área do quadrado verde com sobreposição do quadrado amarelo. Com isso temos:

$$Área\ A = 18cm^2 \tag{3.2}$$

$$Área\ B = 36cm^2 \tag{3.3}$$

$$Área\ C = 64cm^2 \tag{3.4}$$

Pela definição 3.1 temos que a área do quadrado amarelo que não é sobreposta pelo quadrado azul (Área D) é:

$$Área\ B = Área\ A + Área\ D \tag{3.5}$$

Substituindo (3.2) e (3.3) em (3.5) temos:

$$36 = 18 + D$$

$$D = 18$$

Com isso temos que a área do quadrado amarelo não sobreposto pelo quadrado azul é 18cm².

De maneira análoga, temos que a área do quadrado verde que não é sobreposta pelo quadrado amarelo (Área E) é:

$$Área\ C = Área\ B + Área\ E \tag{3.6}$$

Substituindo (3.3) e (3.4) em (3.6) temos:

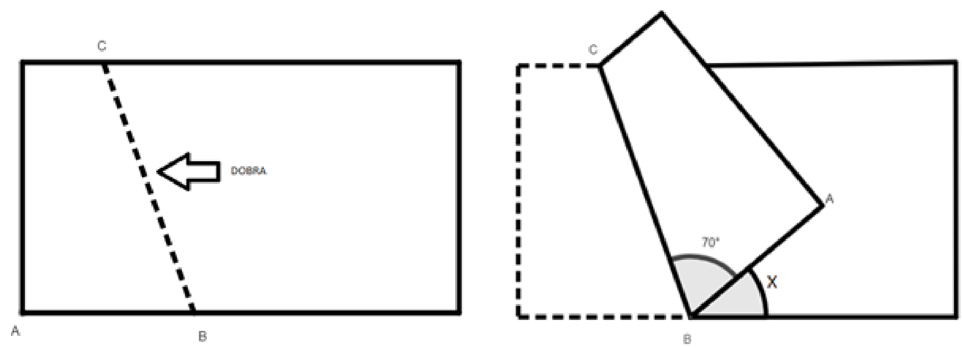
$$64 = 36 + E$$

$$D = 28$$

Com isso temos que a área do quadrado verde não sobreposto pelo quadrado amarelo é de 28cm². Logo, a região que tem a maior área é a região verde.

Figura 5: Questão 3 do questionário

Questão 3: A partir de uma folha, foi realizada uma dobra, como mostra a figura abaixo.



Qual o valor de x? Explique sua resposta:

Fonte: Meier (2012)

Postulado 3.1: Dados um ângulo $A\hat{O}B$ e uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ de um plano, existe sobre esse plano, e num dos semiplanos que $\overrightarrow{O'A'}$ permite determinar, uma única semirreta $\overrightarrow{O'B'}$ que forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $A'\hat{O}B' \equiv A\hat{O}B$.

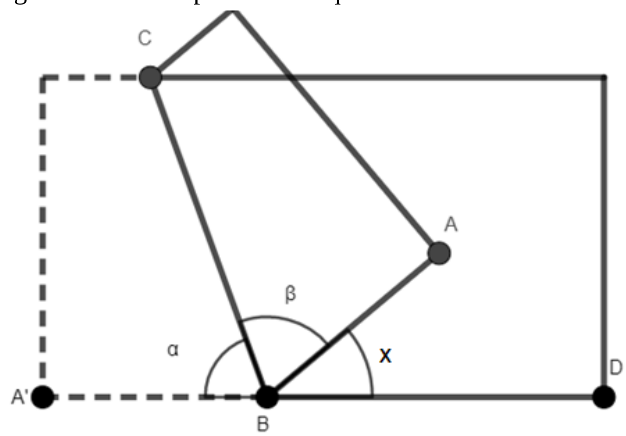
Definição 3.2: ângulo raso é todo ângulo cujo seus lados são semirretas opostas.

Teorema 3.2: Se a semirreta $\overrightarrow{OB}$ é interna ao ângulo $A\hat{O}C$, o ângulo $A\hat{O}C$ é a soma dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$.

$A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C$

Para a resolução utilizo a figura 6, por ser uma versão simplificada da questão 3.

Figura 6: Caso simplificado da questão 3



Fonte: Autor

Na figura 6 temos que:

$$C\hat{B}A = \beta = 70°$$

é o ângulo dado pela questão é

$$A'\hat{B}C = \alpha$$

Pelo postulado 3.1 temos que $A'\hat{B}C \equiv C\hat{B}A$, logo $\alpha \equiv \beta$.

Pela definição 3.2 temos que o ângulo $A'\hat{B}D = 180°$.

Pelo teorema 3.2, como as semirretas $\overrightarrow{BC}\ e\ \overrightarrow{BA}$ são internas ao ângulo $A'\hat{B}D$ então:

$$A'\hat{B}D = A'\hat{B}C + C\hat{B}A + A\hat{B}D.$$

Logo,

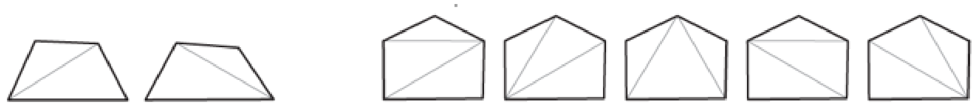
$$180° = 70° + 70° + x$$

$$180° = 140° + x$$

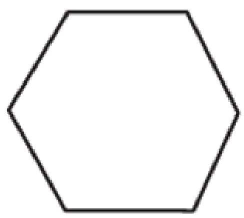
$$40° = x$$

Figura 7: Questão 4 do questionário

Questão 4: A nova mania de Fábio é triangular polígonos, ou seja, decompor polígonos em triângulos desenhando diagonais que não se cruzam no interior do polígono. Fábio notou que há apenas duas maneiras de triangular um quadrilátero e cinco maneiras de triangular um pentágono, como nas figuras.



De quantas maneiras Fábio pode triangular um hexágono? Explique sua resposta:



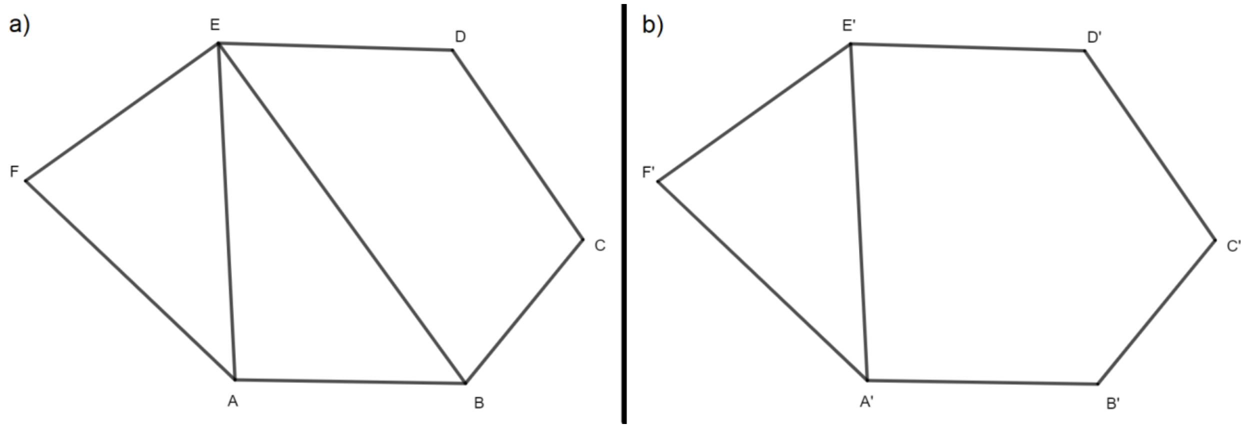
Fonte: Prova OBMEP (2018) modificada

Resolução:

Para resolver a questão vou trabalhar com dois casos:

- Caso 1: transformar o hexágono em dois triângulos e um quadrilátero, como na figura 8.a). Com isso temos os triângulos AEF e ABE e o quadrilátero BCDE. Como mostra a própria questão, existem duas maneiras de triangular um quadrilátero. Considerando que podemos transformar, de maneira análoga, o hexágono nos triângulos BCD e BDE e no quadrilátero BEFA teremos mais duas maneiras de triangular o hexágono. Totalizando 4 maneiras.
- Caso 2: transformar o hexágono em um triângulo e um pentágono, como na figura 7.b). Com isso temos o triângulo A’E’F’ e o pentágono A’B’C’D’E’. Como mostra a própria questão, existem cinco maneiras de triangular um pentágono. Considerando que podemos transformar, de maneira análoga, o hexágono no triângulo B’C’D’ e no pentágono B’E’F’A’ teremos mais cinco maneiras de triangular o hexágono. Totalizando 10 maneiras.

Figura 8: Hexágono transformado em a) dois triângulos e um quadrilátero. b) um triângulo e um pentágono.



Fonte: Autor

Somando os dois casos, temos 14 maneiras diferentes de triangular o hexágono.

4. ANÁLISE DE DADOS

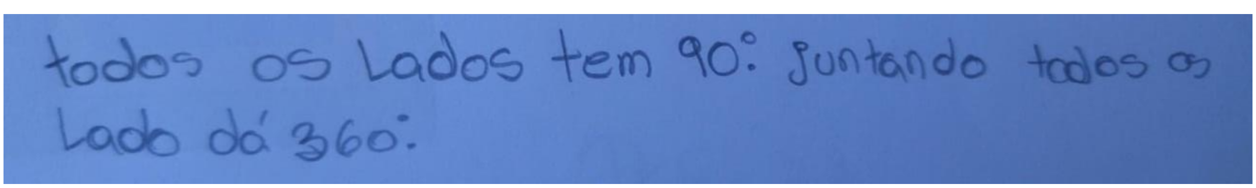
Após a aplicação do questionário, os alunos estavam livres para entregá-lo ou não, assim como responder as questões ou não. Para análise dos questionários vou utilizar quatorze dos vinte questionários entregues, sendo esses escolhidos para análise por terem entregado o Termo de Consentimento Informado devidamente preenchido e assinado pelos responsáveis. Todos os alunos entregaram os questionários, mesmo que alguns estejam incompletos. Os seis alunos que não entregaram o termo justificaram terem esquecido de entregar para os responsáveis, ou os responsáveis não quiseram assinar ou porque o aluno não quis participar da pesquisa. Cada aluno é identificado com uma letra (A a N). A análise dos questionários foi feita sob três aspectos:

4.1. Imagem do Conceito vs. Definição do Conceito

Segundo as definições de Imagem do Conceito e Definição do Conceito discutidas no capítulo 2.2, fiz uma análise das respostas dos alunos, para verificar quais os problemas de construção de Imagem do Conceito foram identificados.

Na primeira questão, quando perguntados se a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, oito alunos utilizaram a palavra “lado” em suas respostas. Com isso percebe-se que existe um problema na formação da Imagem do Conceito do aluno sobre o que é ângulo. Dolce e Pompeo (1993) trazem que a definição de ângulo é “a reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares)” (DOLCE; POMPEO,1993, p. 20). Enquanto a definição de lado (assumo aqui que seja referente ao lado de um polígono) é “uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_nA_1}$ são os lados de um polígono” (DOLCE; POMPEO,1993, p. 132, 133). 7 respostas foram semelhantes a reposta do extrato 1:

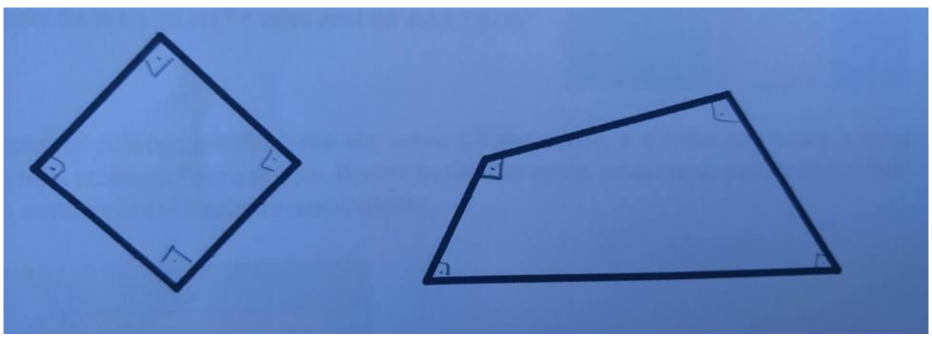
Extrato 1: Resposta com erro de imagem de conceito da questão 1


todos os Lados tem 90°. juntando todos os Lado dá 360°.

Fonte: Aluno A

Além de problemas na formação da Imagem do Conceito, pode-se perceber que a construção do conceito da soma dos ângulos internos de um quadrilátero ficou restrita para muitos alunos, pois esses relacionavam quadriláteros apenas com um quadrado, ou seja, apoiam-se em casos particulares. Por isso respondiam que cada “lado” ou ângulo possuía 90°. Nove alunos realizaram essa relação em suas respostas. Alguns alunos até desenhavam ângulos de 90° graus no quadrado que estava de exemplo na questão e quando perguntados se esses mesmos ângulos eram encontrados no outro polígono que não era um quadrado, muitos não sabiam responder e o aluno L respondeu que “sim, todo quadrilátero tem 4 ângulos de 90° graus” como mostra o extrato 2.

Extrato 2: Explicação do aluno L sobre a questão 1



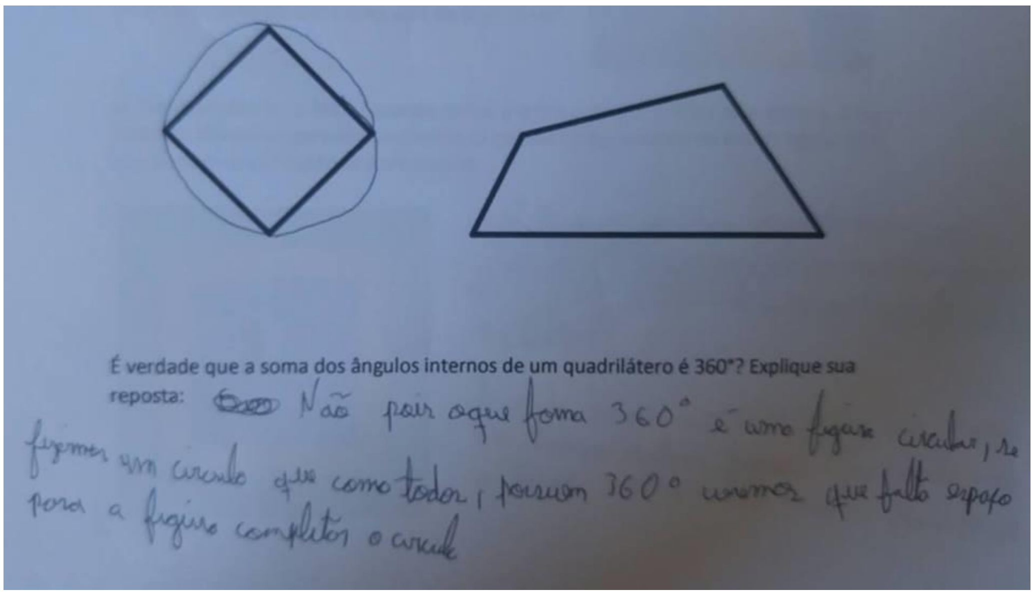
Fonte: Aluno L

O aluno G trouxe uma Imagem do Conceito errada e diferente da dos outros colegas. Apresentou ter a Imagem do Conceito de ângulo interno de um polígono com ângulo central de uma circunferência correlacionadas. Sendo a definição de soma dos ângulos internos de um polígono já apresentada na resolução da primeira questão do questionário no capítulo 3 e a definição do ângulo central de uma circunferência ser:

> “Ângulo central relativo a uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. Se numa circunferência de centro O um ângulo central determina um arco $\widehat{AB}$, dizemos que: $\widehat{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$, ou $\widehat{AB}$ é o arco subentendido por $A\hat{O}B$.” (DOLCE; POMPEO,1993, p. 167)

Segundo esse aluno “todos os círculos têm 360° e que como a figura falta espaço para completar o círculo” logo a figura não pode ter 360°. Quando o questionei sobre a figura ao lado, como pode ser visto no extrato 3, que também é um quadrilátero, porém não é um quadrado, ele tentou desenhar um círculo da mesma forma que fez no quadrado e, como não conseguiu, só respondeu que não sabia.

Extrato 3: Explicação do aluno G para a questão 1

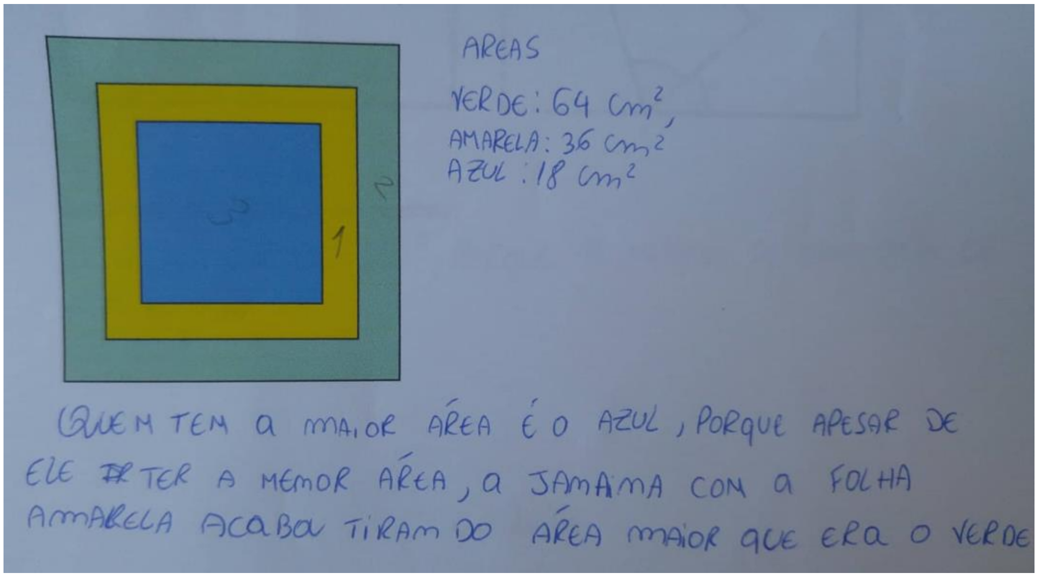


Fonte: Aluno G

Dos quatorze alunos, apenas dois alunos não manifestaram imagens de conceito erradas ou pouco elaboradas e apenas um aluno não respondeu a questão 1. Todos os outros onze alunos apresentaram uma Imagem do Conceito errada, mal formulada ou ambos.

Na segunda questão do questionário, dada a área de três quadrados e suas sobreposições, quando perguntada qual seria a maior área, sete alunos responderam essa questão dizendo que o quadrado de maior área é o azul por estar cobrindo a área dos outros quadrados. Logo, como o quadrado azul está “inteiro” ou “todo amostra” (palavras dos alunos) ele é o maior, um exemplo é o do extrato 4.

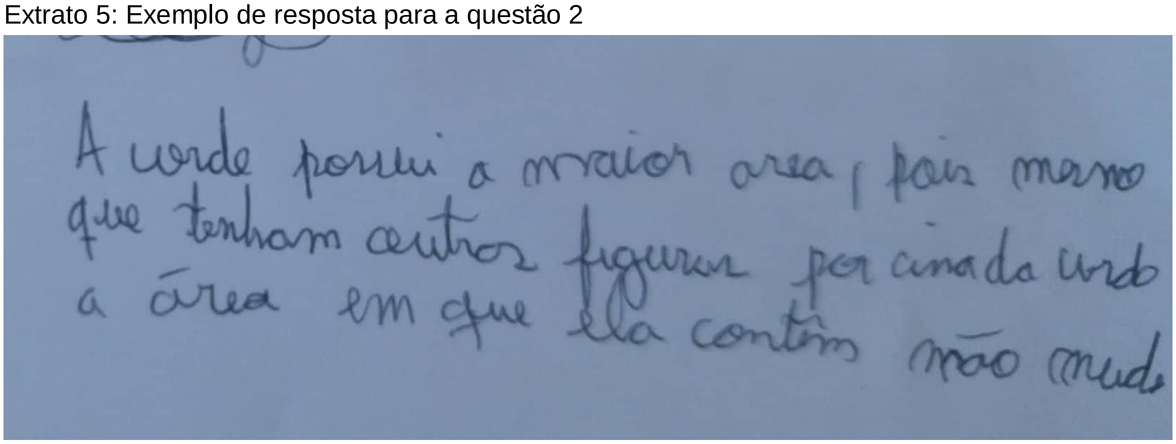
Extrato 4: Exemplo de problemas com imagem de conceito da questão 2



Fonte: Aluno J

Isso mostra que existe falhas na Imagem do Conceito de sobreposição de áreas, pois muitos alunos assumem que pelo fato de o quadrado azul estar inteiro ele é maior que os outros que estão com sobreposição. Um problema semelhante que foi identificado nas respostas, foi de que a área verde seria a maior área pois o quadrado verde tem a maior área, três alunos responderam dessa forma. Quando questionados sobre a área verde ser a mesma do quadrado verde, dois ficaram em silêncio e não responderam à pergunta e um afirmou que “sim, a área do quadrado verde permanece a mesma”, exemplifico isso no extrato 5.

Extrato 5: Exemplo de resposta para a questão 2

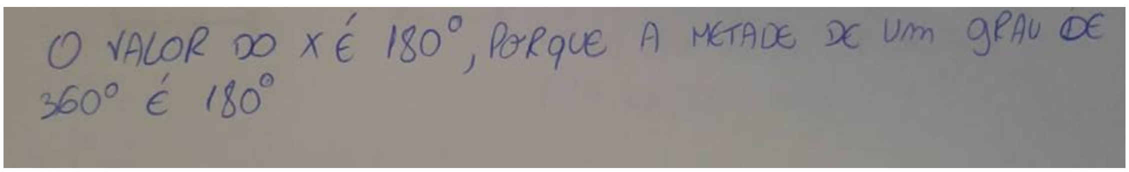


Fonte: Aluno G

Das quatorze respostas analisadas da questão 2, todos responderam à questão sendo que dez pessoas tiveram problemas com a Imagem do Conceito de sobreposição e soma de áreas.

Na pergunta de número 3, sobre o valor de x, a partir da análise das figuras dadas na questão, dois alunos criaram uma relação com o ângulo de 360°, em suas respostas escritas não existe explicação para o uso desse ângulo e quando questionados não souberam responder, como é visto no extrato 6.

Extrato 6: Exemplo de resposta da questão 3 envolvendo o ângulo de 360°



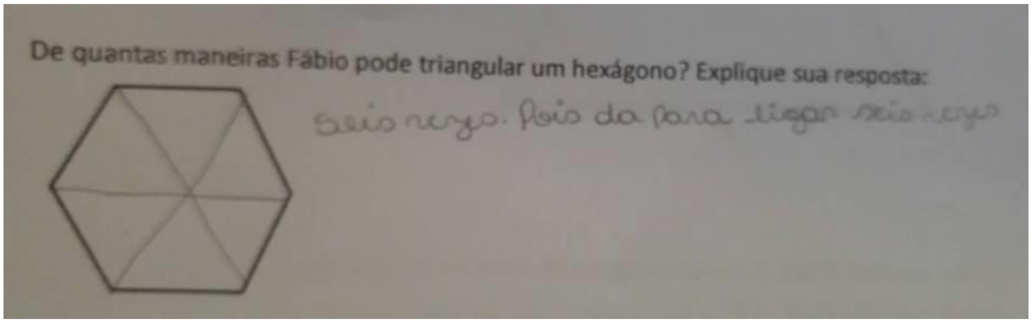
Fonte: Aluno J

Cinco alunos mostraram problemas na Imagem do Conceito de transposição de ângulos, ou seja, não conseguiram identificar que, como demonstrado no capítulo 3, existe dois ângulos de 70°. Esses alunos levavam em conta apenas um ângulo de 70° com isso respondiam que o valor de x era 110°. Isso mostra também que existe problemas na identificação do tamanho de ângulos, já que um ângulo de 110°, é um ângulo obtuso enquanto o ângulo de 40°, a resposta correta, é um ângulo agudo.

Com isso temos que, 7 alunos tiveram problemas com imagens de conceitos necessárias para responder essa questão e 5 alunos não responderam à questão. É interessante destacar o alto número de alunos que não responderam à questão mesmo depois de eu interferir questionando-os sobre qual seria o ângulo que havia no papel antes de ele ser dobrado.

Para responder a quarta questão, identifiquei problemas em dois alunos quanto à construção de Imagem do Conceito. Nesses dois casos, apesar da questão pedir que fosse feita a triangulação de polígonos utilizando suas diagonais, esses dois alunos utilizaram pontos de encontro entre as diagonais para triangular o polígono, como pode ser visto no extrato 7. O restante dos alunos não teve problemas com nenhuma Imagem do Conceito.

Extrato 7: Exemplo de problema de conceito de imagem da questão 4



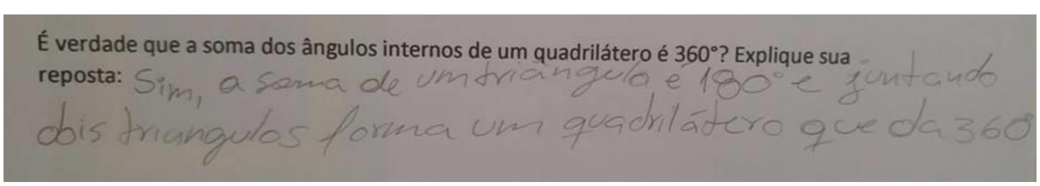
Fonte: Aluno K

4.2. O Pensamento Matemática por trás das questões

Depois de analisar os conceitos utilizados pelos alunos, faço uma análise de quais pensamentos matemáticos, ou quais mundos da matemática definidos por Tall (2013) foram evidenciados para responder cada uma das questões do questionário. Para análise das questões vou utilizar apenas as respostas que não tiveram problemas com conceitos de imagem ou que apesar da Imagem do Conceito utilizada pelo aluno entrar em contradição com a Definição do Conceito, foi possível entender o pensamento utilizado, exemplificado no extrato 1.

Com isso temos que na questão 1 nove alunos responderam com base na propriedade de que o quadrado tem todos os seus ângulos de 90°, portanto a soma dos quatro ângulos resulta em 360°. Logo, eles construíram seus pensamentos no mundo corporificado conceitual para realizar a demonstração da questão. Três alunos utilizaram características do mundo axiomático formal, pois apesar de não existir o rigor e formalidade da linguagem matemática para realizar a demonstração da questão, utilizaram-se de conceitos prévios, que se encaixam em teoremas, para chegar no resultado da questão realizando uma demonstração correta. Os três alunos mostraram argumentos como o do extrato 8.

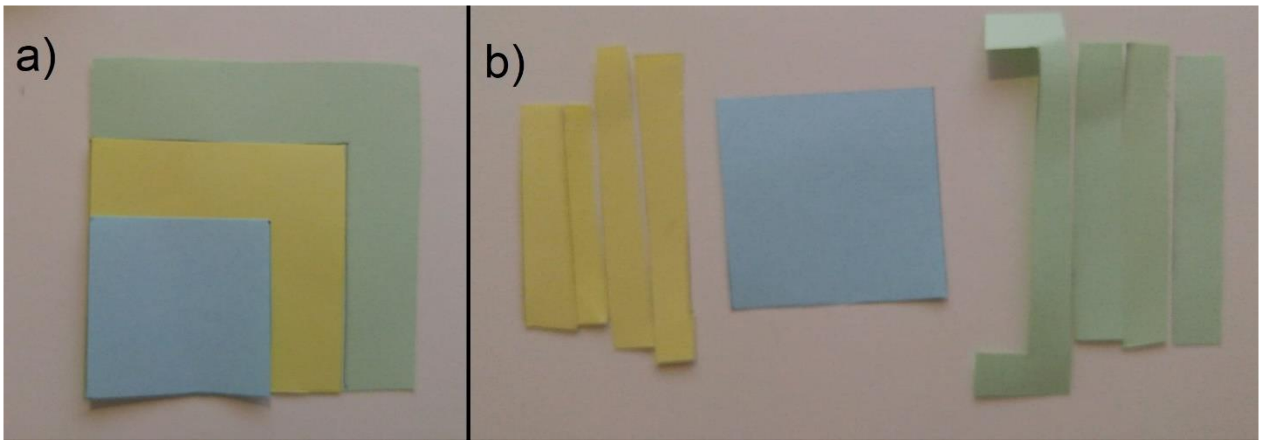
Extrato 8: Exemplo de resposta axiomática formal



Fonte: Aluno N

Na questão número 2, todos os alunos utilizaram do pensamento conceitual corporificado para demonstrar as questões, de forma correta ou não, e dez alunos partiram apenas da visualização da imagem e, apesar do enunciado dar o valor da área de cada quadrado, nenhum aluno as utilizou para cálculos corretos, dando demonstrações erradas em relação à Imagem do Conceito. Apenas dois alunos responderam à questão de maneira correta com demonstração correta, ambas utilizando do pensamento conceitual corporificado em suas respostas, suas respostas estão representadas no extrato 9 a) e b).

Extrato 9: Respostas para a questão 2



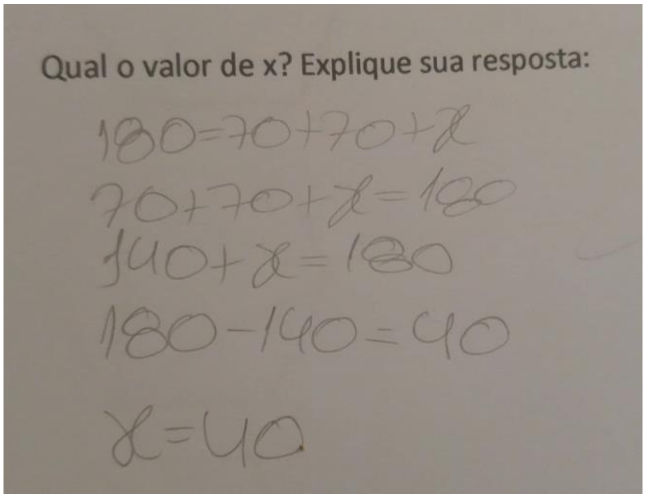
Fonte: Alunos D e H

Quando questionei o aluno D e o aluno H sobre suas respostas, que em suas folhas estava apenas “verde”, ambos me mostraram seus materiais. O material do aluno D possuía várias marcações a lápis para que ele pudesse ficar trocando as sobreposições de lugar e comparar as áreas, as marcas do lápis estão sob os lados da folha amarela e folha azul no extrato 9 a). Já o aluno H mostrou que ele tentou deixar as áreas parecidas para tentar comparar e assim percebeu que os papéis verdes juntos eram maiores que os outros papéis, como está no extrato 9 b).

Em sua maioria, as demonstrações da questão 3 foram realizadas a partir do pensamento conceitual corporificado e mesmo com o auxílio do material da figura 1 entregue aos alunos, nenhum fez uso deles senão uso visual. Cinco dos nove alunos tiveram como resposta final 110°, pois utilizaram apenas o que foi mostrado na figura e o princípio de que a soma de tudo deveria dar 180°.

Os outros quatro alunos chegaram ao nível simbólico operacional, pois conseguiram operar com as variáveis e chegaram à resposta correta, como mostra o extrato 10.

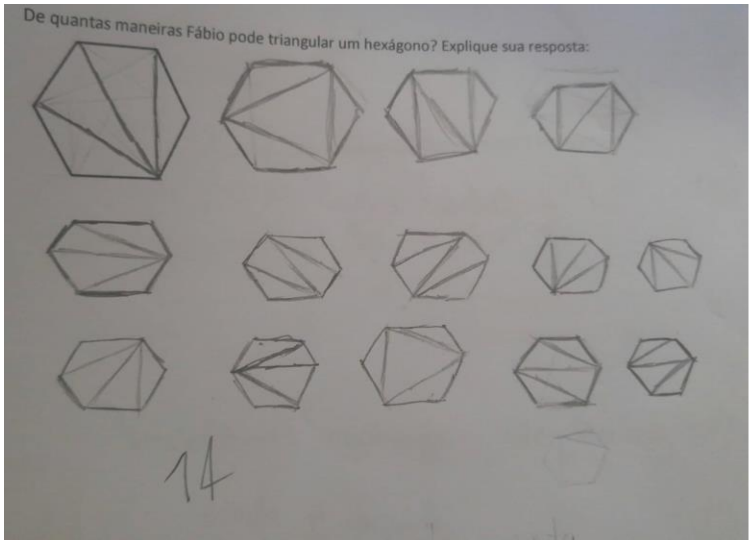
Extrato 10: Exemplo de resposta com pensamento simbólico operacional para a questão 3.



Fonte: Aluno N

Como a questão 4 foi coletada da prova da OBMEP de 2018, os alunos já a conheciam. Porém modifiquei a pergunta e dois alunos utilizaram a mesma resposta da prova. Quando os questionei sobre o porquê da resposta encontrada eles tentaram criar uma relação entre o número de lados do hexágono e um número de segmentos de reta, para chegar no resultado 42 que era o resultado da prova da OBMEP. Tirando esses dois alunos e os outros dois alunos citados no capítulo 4.1, todos os outros alunos tiveram apenas o pensamento corporificado conceitual, pois a partir da propriedade do enunciado construíram a demonstração a partir de desenhos. Com isso apenas dois alunos realizaram uma demonstração de forma correta, como mostra o extrato 11.

Extrato 11: Exemplo de resposta utilizando pensamento conceitual corporificado da questão 4.



Fonte: Aluno M

4.3. O pensamento matemático de cada aluno

Depois de analisar as imagens de conceitos criadas por cada um dos alunos e avaliar que tipo de pensamento foi utilizado para resolver cada uma das questões do questionário meu foco agora é no aluno. Nessa sessão do trabalhou analiso por quais mundos cada aluno conseguiu passar para responder o questionário.

Nove alunos utilizam apenas do pensamento conceitual corporificado e nenhum dos nove alunos respondeu e demonstrou corretamente nenhuma das questões. Todos esses alunos possuíam problemas na construção de imagens de conceito como vistos nos extratos da seção 4.1.

Dois alunos demonstraram algum grau de pensamento conceitual corporificado e simbólico operacional, sendo que um deles, o aluno G, não demonstrou de forma semelhante a demonstrada por mim nenhuma das questões e o aluno M demonstrou a questão 3 de maneira pensada por mim, utilizando pensamento simbólico operacional (extrato 10) e a questão 4 utilizando o pensamento conceitual corporificado (extrato 11). Dois alunos apresentaram pensamento conceitual corporificado e algum grau de pensamento formal axiomático, sendo que ambos os alunos responderam corretamente apenas a primeira questão, única questão que foi apresentado algum grau de pensamento formal axiomático (extrato 8).

Por fim, apenas um aluno apresentou certo grau dos três mundos em suas questões, sendo a primeira questão respondida corretamente utilizando pensamento formal axiomático (extrato 8), a terceira questão utilizando pensamento simbólico operacional (extrato 10) em sua demonstração e na resposta das questões 2 e 4 utilizando o pensamento conceitual corporificado (extratos 9 e 11). E nenhum aluno apresentou pensamento de mais de um mundo em uma mesma questão, penso que pela pouca complexidade das questões apresentadas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao término desse trabalho, percebo que consegui resultados para meus objetivos e a partir do que foi descrito, analisado e discutido durante o trabalho percebo alguns problemas na construção do conhecimento matemático. Existe uma grande dificuldade de os alunos construírem corretamente imagens de conceito. Penso eu que o motivo disso seja a falta de discussão em sala da aula, para que os alunos consigam desenvolver a argumentação matemática e adquirir confiança para praticar a demonstração em sala de aula. Porém para que isso ocorra, os professores precisam distanciar-se da matemática formal e axiomática desenvolvida durante sua formação.

Os alunos aparentam memorizar conceitos e não os construir e por isso muitos dos alunos acabam criando imagens de conceitos erradas. Pois o que é entendido pelo aluno não é discutido em sala de aula e assim ele não tem a oportunidade de alinhar a Imagem do Conceito que ele possui com a Definição do Conceito.

É importante ressaltar aqui que a análise de imagens de conceito não estava inicialmente nos meus objetivos, porém após realizar a minha coleta de dados em sala de aula, percebi que seria problemático apenas analisar como os alunos realizam as demonstrações das questões sendo que muitos têm dificuldades em construir uma demonstração corretamente por não ter imagens de conceito claras. Além do que, a partir das análises dos dados adquiridos pelo questionário, a maioria das questões que foram demonstradas incorretamente foram questões nas quais os alunos se utilizaram apenas do pensamento conceitual corporificado, ou seja, um pensamento mais primitivo que começa a ser construído mais cedo na fase escolar.

Apesar de Tall (2013) afirmar que o pensamento conceitual corporificado e o pensamento simbólico operacional devem ser construídos de maneira conjunta em sala de aula, não é o que é percebido. Relacionando com os estudos apontados anteriormente, penso que o fato de grande parte das demonstrações utilizarem o pensamento conceitual corporificado é pelo fato desse pensamento ser mais visual e concreto. Além disso, no dia-a-dia escolar é mais fácil para o professor encontrar exemplos desse tipo e, consequentemente, o aluno possui esse tipo de pensamento matemático mais desenvolvido. Dessa maneira, por causa da falta de generalização de conceitos e atividades em sala de aula, que também é fruto da falta de demonstração, os alunos encontram dificuldades na hora de realizarem problemas diferentes dos que eles estão habituados. Por isso, muitos alunos têm dificuldades de saber quando deve-se utilizar os conceitos e propriedades aprendidas, digo isso pelos poucos acertos das questões do questionário, já que nenhum aluno demonstrou corretamente todas questões do questionário e nove alunos não souberam demonstrar corretamente nenhuma questão.

Após a análise de dados levanto alguns questionamentos sobre a criação do meu questionário. Considero que, apesar de não ter sido essa a intenção inicial, colocar a questão de 2018 da OBMEP foi importante para mostrar que alguns alunos sabiam a resposta da questão, mas não seu desenvolvimento. Com isso, como eu realizei modificações na questão eles não souberam responder como obtiveram os resultados encontrados. Assim percebo que os alunos estão mais acostumados e preocupados em memorizar resultados do que entender o desenvolvimento. Isso é problemático, pois mostra a falta de questionamento que existe em relação à matemática na sala de aula.

Outra questão que eu considero importante discutir é a primeira, a questão sobre a soma dos ângulos internos de um quadrilátero, na qual percebi que muitos alunos se apoiaram na figura do que para eles era um quadrado para responder à questão. Me pergunto se caso eu tivesse colocado outros exemplos de quadriláteros ao invés daquele as respostas teriam sido diferentes, se os alunos utilizaram em suas respostas a propriedade do quadrado por ser a figura que se destacou ou eles trariam mesmo assim a ideia de que todo quadrilátero possui quatro ângulos de 90° para suas respostas.

Para finalizar penso que a demonstração matemática não é praticada em sala de aula, sendo utilizado o conceito de demonstração de Pietropaulo (2005) de que a demonstração serve para explicar e facilitar o entendimento dos alunos sobre certo conceito. Isso causa dificuldade na organização e desenvolvimento de conceitos posteriores, pois tudo é construído em cima de coisas decoradas e aceitas sem entendimento. Com isso o aluno memoriza suas imagens de conceito o que torna difícil manipulá-la para que se encaixe em novos desafios.

REFERÊNCIAS

ATZ, Dafne. **A Análise Combinatória no 6° ano por meio da resolução de problemas.** Dissertação (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2017.

BRASIL, Ministério da Educação. **Guia Digital**. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/pnld-2017/>. Acesso em: 22 nov. 2018.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BODGAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação** - uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994. pp. 47-74.

CARAMÉS, C. G. T. DE A. Uso de Demonstração Na Educação Geométrica no Ensino Fundamental. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Julho, 2010, Bahia.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar – vol. 9**: 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 1997.

MARTINS, R. B.; MANDARINO, M. C. F. **Argumentação , prova e demonstração em geometria : análise de coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental**. p. 101–115, 2014.

MEIER, Melissa. **Modelagem Geométrica e o Desenvolvimento do Pensamento Matemático no Ensino Fundamental.** Dissertação (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2012.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática.** Tese de Doutorado. São Paulo: PUC, 2005.

SILVA, M. M. DOS S.; SALES, A. **O Professor do Ensino Fundamental e a Demonstração em Matemática**, 2010.

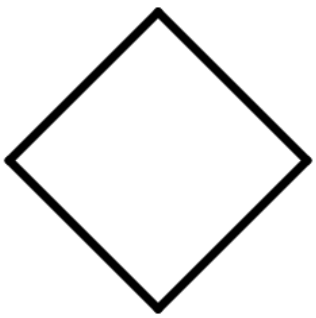
TALL, David. Advanced Mathematical Thinking. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002.

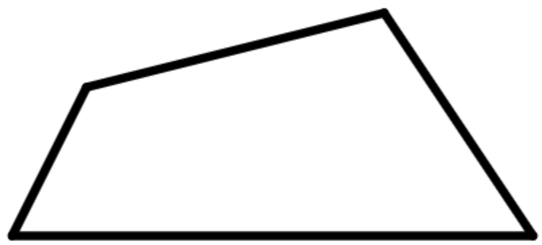
TALL, David. How Humans Learn to Think Mathematically. New York, NY – USA: Cambridge University Press, 2013.

VINNER, Shlomo. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking.** New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, p. 65-81, 2002.

APÊNDICE A – Questionário

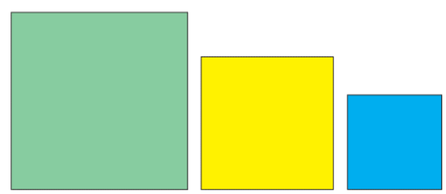
Questão 1: As figuras abaixo são quadriláteros:



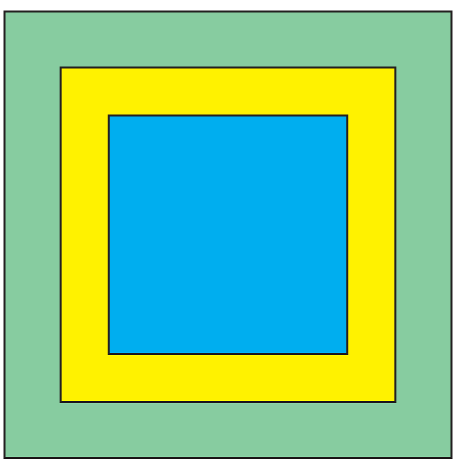


É verdade que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°? Explique sua reposta:

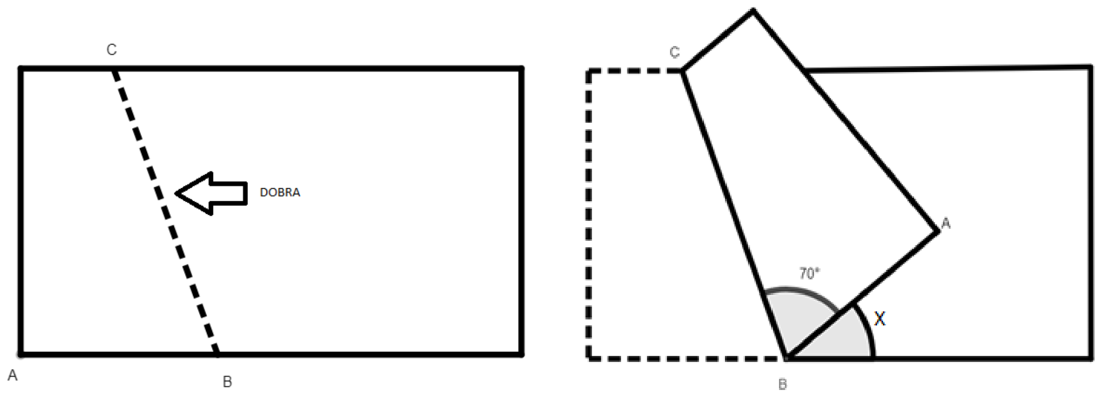
Questão 2: Janaína tem 3 folhas de papel quadradas: uma verde de área 64 cm², uma amarela de área 36 cm² e uma azul de área 18 cm².



a) Janaína colocou a folha amarela sobre a folha verde, e a folha azul sobre a folha amarela, como na figura abaixo. Dentre as regiões verde, amarela ou azul da figura, qual tem a maior área? Explique sua resposta.

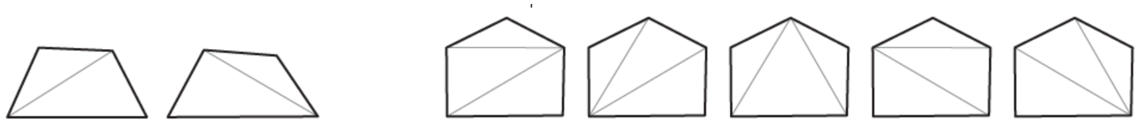


Questão 3: A partir de uma folha, foi realizada uma dobra, como mostra a figura abaixo.

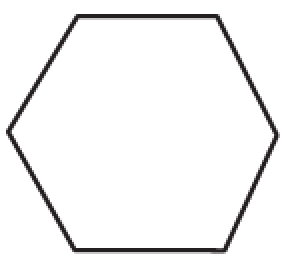


Qual o valor de x? Explique sua resposta:

Questão 4: A nova mania de Fábio é triangular polígonos, ou seja, decompor polígonos em triângulos desenhando diagonais que não se cruzam no interior do polígono. Fábio notou que há apenas duas maneiras de triangular um quadrilátero e cinco maneiras de triangular um pentágono, como nas figuras.



De quantas maneiras Fábio pode triangular um hexágono? Explique sua resposta:



APENDICE B – Termo de Consentimento Informado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ______________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada "DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA: COMO ALUNOS DO NONO ANO AS REALIZAM" desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) LUCAS MÜLLER SCHNEIDER. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por MARILAINE DE FRAGA SANT'ANA, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (51) xxxx-xxxx ou e-mail.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Investigar de que maneira alunos do nono ano do ensino fundamental expressão seus conhecimentos a partir de exercícios de geometria.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre como alunos conseguem realizar demonstrações matemáticas, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço *Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS – Av. Bento Gonçalves, 9500 – Prédio 43-111 - Agronomia, Porto Alegre - RS* /telefone (51) xxxx-xxxx /e-mail.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de Novembro de 2018.

Assinatura do Responsável:
Assinatura do(a) pesquisador(a):
Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE C – Carta de autorização da escola para análise e utilização do material

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Porto Alegre, __ de Novembro de 2018.

Prezada Professora Cláudia Egelke Gonçalves

Diretora da Escola Estadual de Ensino Médio Anne Frank

O(A) aluno(a) LUCAS MÜLLER SCHNEIDER, atualmente é graduando(a) regularmente matriculado(a) no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do Departamento de Matemática Pura e Aplicada para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o(a) graduando(a) está desenvolvendo um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). O TCC produzido deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto pesquisador(a) e professor(a) responsável pela orientação do desenvolvimento do TCC pelo(a) graduando(a), reitero nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa colocando-nos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixo à disposição o seguinte telefone de contato: (51)xxxx-xxxx.

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

____

Marilaine de Fraga Sant'Ana
Professora Orientadora