

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ALESSANDRA HELENA KIMURA
PALMEIRA

**ESTABILIDADE E
ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS
LPV AMOSTRADOS**

Porto Alegre
2019

**ALESSANDRA HELENA KIMURA
PALMEIRA**

**ESTABILIDADE E
ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS
LPV AMOSTRADOS**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel
Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre
2019

**ALESSANDRA HELENA KIMURA
PALMEIRA**

**ESTABILIDADE E
ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS
LPV AMOSTRADOS**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS
Doutor pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres, UNICAMP
Doutor pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França

Prof. Dr. Paulo César Pellanda, IME
Doutor pela École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace –
Toulouse, França

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil

Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira, UFRGS
Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Brasil

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Coordenador do PPGEE: _____
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre, Março de 2019.

AGRADECIMENTOS

À minha família pelo apoio incondicional e pelo amor, em especial ao meu Alessandro, pela companhia e inspiração.

Aos meus amigos que estão próximos e àqueles que estão distantes, aos novos e aos antigos pelos quais tenho muito carinho, em especial aos Bruno, Thiago, Luciano, Cláudia, Paulo, Estefanny, Ilca.

A todos meus professores, em especial ao Alex Seuret e ao Jeferson Flores pelas correções e contribuições. E mais especialmente ao meu orientador João Manoel, pela paciência e conhecimentos transmitidos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFRGS pela oportunidade de realizar meu mestrado e meu doutorado e ao LAAS pela oportunidade de realizar meu doutorado sanduíche.

Ao CNPq pela provisão das bolsas de doutorado pleno e de doutorado sanduíche.
À banca pelas contribuições.

RESUMO

Este trabalho aborda o problema de controle amostrado de sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV). Assume-se que o controlador LPV é atualizado apenas nos instantes de amostragem e mantido constante entre duas amostragens consecutivas, através de um segurador de ordem zero, enquanto que na planta, os estados e os parâmetros variantes evoluem continuamente no tempo. Assim, são propostas condições quasi-LMIs (desigualdades matriciais lineares) para projeto do controle LPV amostrado por realimentação de estados para garantir a estabilidade assintótica da origem do sistema em malha fechada, com o intervalo de amostragem periódico ou aperiódico. A abordagem baseia-se em uma modelagem politópica para o sistema LPV em que se assume que os limites de amplitude e de taxa de variação dos parâmetros são conhecidos. Propõe-se um *looped*-funcional dependente dos parâmetros para considerar os efeitos da amostragem aperiódica.

Baseado nesta abordagem, dois problemas específicos são investigados: a rejeição a perturbações \mathcal{L}_2 em tempo contínuo e a estabilização na presença de saturação em magnitude do sinal de controle. Para o segundo problema, também é proposta uma estratégia por controle preditivo baseado em modelo (MPC). A partir das condições quasi-LMIs estabilizantes, são propostos alguns problemas de otimização.

Os sistemas LPV também são utilizados para representar a dinâmica de uma classe de sistemas não-lineares, neste caso, chamam-se de sistemas quasi-LPV e o parâmetro variante depende do estado. Contudo, geralmente o sistema quasi-LPV modela apenas localmente a dinâmica do sistema, assim, neste trabalho considera-se uma região de validade para o modelo. Assim, para uma classe de sistemas não-lineares descritos por modelos quasi-LPV, propõem-se condições estabilizantes por meio da abordagem por *looped*-funcional, a qual permite considerar um modelo em tempo contínuo do sistema e uma lei de controle amostrada. Ademais, a modelagem fuzzy Takagi-Sugeno também é estudada neste caso, que pode ser vista como um caso particular de sistemas quasi-LPV. São propostos também problemas de otimização: maximizar o limite superior do intervalo de amostragem para um dado conjunto de condições iniciais admissíveis; ou maximizar uma estimativa da região de atração da origem dados os limites do intervalo de amostragem.

Palavras-chave: Sistemas amostrados, sistemas LPV, *looped*-funcional, saturação, condição de setor generalizada, desigualdades matriciais lineares (LMI), controle preditivo baseado em modelo (MPC), ganho \mathcal{L}_2 , quasi-LPV, *fuzzy* Takagi-Sugeno.

ABSTRACT

This work addresses the problem of sampled-data control of systems with linear parameter varying (LPV). It is explicitly assumed that the LPV-controller is updated only at the sampling instants and that the control signal is kept constant between two consecutive samples by means of a zero order holder, while the plant and the scheduling parameter evolve continuously in time. In this case, quasi Linear Matrix Inequality (LMI) conditions to compute a sampled-data LPV state feedback control law that ensures the asymptotic stability of the closed-loop system, provided that the intersampling interval respect some bounds, are proposed. The proposed approach is based on a polytopic modeling of the LPV system, where it is assumed that the bounds of magnitude and rate of the parameter are known. The proposed parameter dependent looped-functional is used to take into account the sampling effects.

Based on this approach, two specific problems are investigated: the rejection of \mathcal{L}_2 perturbation in continuous time and the stabilization under saturation in magnitude of the control signal. For the second problem, a model predictive control strategy is also proposed. From the stabilization quasi-LMI conditions, some optimization problems are proposed.

LPV systems can also represent the dynamics of a class of nonlinear systems, in this case they are called quasi-LPV systems and the variant parameter depends on the state. However, the quasi-LPV system generally only represent locally the system dynamics, then, in this work a region of validity of the model is considered. Thus, for a class of nonlinear systems described by quasi-LPV models, stabilizing conditions are proposed considering the looped-functional approach, which allows to consider a continuous-time model of the system and a sampled-data control law. In addition, the Takagi-Sugeno fuzzy models is also studied, which can be seen as a particular case of quasi-LPV systems. Optimization problems are also proposed: to maximize the upper limit of the sampling interval for a given set of initial admissible conditions; or to maximize an estimate of the region of attraction of the origin given the limits of the sampling interval.

Keywords: Sampled-data systems, LPV systems, looped-functional, saturation, generalized sector condition, linear matrix inequality (LMI), model predictive control (MPC), \mathcal{L}_2 -gain, quasi-LPV, fuzzy Takagi-Sugeno.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	13
LISTA DE TABELAS	15
LISTA DE ABREVIATURAS	17
LISTA DE SÍMBOLOS	19
1 INTRODUÇÃO	21
2 CONTROLE DE SISTEMAS LPV: ESTADO DA ARTE	25
2.1 Introdução	25
2.2 Controle em Tempo Contínuo	26
2.3 Controle em Tempo Discreto	27
2.4 Controle Amostrado	28
2.4.1 Sistemas Não-lineares com Controle Amostrado	30
2.5 Considerações Finais	31
3 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LPV AMOSTRADOS	33
3.1 Introdução	33
3.2 Estabilização de Sistemas LPV com Controle Amostrado	33
3.2.1 Formulação do Problema	33
3.2.2 Modelagem Politópica	35
3.2.3 Abordagem por <i>Looped</i> -Funcional	36
3.2.4 Condições de Estabilização	40
3.2.5 Casos Particulares	44
3.2.6 Problema de Otimização	45
3.2.7 Exemplo Numérico	46
3.3 Atenuação de Perturbações \mathcal{L}_2	49
3.3.1 Formulação do Problema	49
3.3.2 Abordagem por <i>Looped</i> -funcional com Ganho \mathcal{L}_2	49
3.3.3 Condições de Estabilização	51
3.3.4 Análise de Estabilidade com Atenuação de Perturbação	55
3.3.5 Problemas de Otimização	56
3.3.6 Exemplos Numéricos	57
3.4 Considerações Finais	60

4	ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LPV AMOSTRADOS COM SATURAÇÃO	63
4.1	Introdução	63
4.2	Estabilização de Sistemas LPV com Saturação de Sinal de Controle e Dados Amostrados	64
4.2.1	Formulação do Problema	64
4.2.2	Resultados Preliminares	65
4.2.3	Abordagem por <i>Looped</i> -Funcional	67
4.2.4	Condições de Estabilização	68
4.2.5	Extensões	72
4.2.6	Problemas de Otimização	73
4.2.7	Exemplo Numérico	74
4.3	Estratégia LPV-MPC com Dados Amostrados	77
4.3.1	Problema LPV-MPC Amostrado	79
4.3.2	Controle LPV Amostrado com Custo Garantido	80
4.3.3	Lei de Controle com Estratégia LPV-MPC	85
4.3.4	Casos Particulares	87
4.3.5	Exemplo Numérico	88
4.4	Considerações Finais	91
5	ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES	93
5.1	Introdução	93
5.2	Formulação do Problema	94
5.3	Sistemas Quasi-LPV com Dados Amostrados	94
5.3.1	Modelagem Politépica Local	95
5.3.2	Abordagem por <i>Looped</i> -funcional	96
5.3.3	Condições Estabilizantes	97
5.3.4	Análise de Estabilidade	101
5.3.5	Problemas de Otimização	102
5.3.6	Exemplo Numérico	103
5.4	Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno com Dados Amostrados	106
5.4.1	Modelo Fuzzy T-S	106
5.4.2	Condições Estabilizantes	108
5.4.3	Análise de Estabilidade	110
5.4.4	Problemas de Otimização	111
5.4.5	Exemplo Numérico	111
5.5	Considerações Finais	115
6	CONCLUSÃO	117
6.1	Perspectivas de Trabalhos Futuros	120
6.2	Publicações	121
	REFERÊNCIAS	125

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Sistema LPV com realimentação de estado com dados amostrados.	35
Figura 2:	Polítopos \mathcal{B}_σ e \mathcal{B}_{δ_k} , para $N = 2$.	37
Figura 3:	Sinais para $x(0) = [2 \ 0]'$, com $ \dot{\sigma}(t) \leq 0,2$ e $T_k \in [1; 400]$ ms.	47
Figura 4:	Sinais para $x(0) = [2 \ 0]'$, com $ \dot{\sigma}(t) \leq 0,2$ e $T_k \in [1; 1708]$ ms.	48
Figura 5:	Sinais para $T_k \in [1; 400]$ ms em linha sólida e para $T_k \in [1; 1349]$ ms em linha tracejada, com $x(0) = [1 \ 0]'$.	58
Figura 6:	Valores obtidos de γ^{-1} para diferentes valores de \mathcal{T}_2 , com $\mathcal{T}_1 = 1$ ms e as matrizes de ganhos de realimentação definidas em (68), com o objetivo de minimizar γ , a partir de um funcional DP (linha contínua) e IP (linha tracejada-pontilhada).	60
Figura 7:	Conjuntos $\mathcal{E}(X_0, 1)$ (linha sólida vermelha), $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_1)), 1)$ (linha pontilhada) e $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_2)), 1)$ (linha tracejada) para os casos (a) (em azul) e (b) (em preto).	76
Figura 8:	Conjuntos $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_1)), 1)$ (linha pontilhada) e $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_2)), 1)$ (linha tracejada) e algumas trajetórias para $T_k \in [1; 988]$ ms.	76
Figura 9:	Para $x(0) = [8,55 \ -0,63]'$, evolução de $x(t)$, $u(t)$, $\sigma(t)$ e valores de T_k , para os casos (a) $T_k \in [1, 20]$ ms (em linha sólida) e (b) $T_k \in [1, 988]$ ms (em linha pontilhada).	77
Figura 10:	Para $\mathcal{T}_1 = 1$ ms, com $K_0 = [-0,1299 \ -0,9125]$ e $K_1 = [0,0166 \ -0,2799]$ e o problema de otimização (105), valores obtidos de α^{-1} para diferentes valores de \mathcal{T}_2 .	78
Figura 11:	$\mathcal{L}_V(40)$ obtidos a partir da descrição na Seção 4.3.4.2 com condições DP (em preto) e IP (em vermelho) e a partir do Algoritmo em (SHI; SU, 2014) (em azul).	88
Figura 12:	Sinais para $x(0) = [-1,5 \ 0,47]'$ e $T_k \in [10, 200]$ ms obtidos a partir do Algoritmo 1 com condições DP (linha contínua) e a partir da solução de (132) (tracejada-pontilhada).	90
Figura 13:	Resultado de simulação para $x(0) = [2 \ 0]'$ e $T_k \in [10, 200]$ ms obtidos a partir do Algoritmo 1 com condições DP (linha contínua) e IP (tracejada-pontilhada) e do Algoritmo em (SHI; SU, 2014) (pontilhada).	91
Figura 14:	Os conjuntos $\mathcal{L}_V(1)$ e \mathcal{R}_H são descritos em linhas sólidas e tracejadas, respectivamente. Para os ganhos definidos em (178) e $T_k \in [10, 71]$ ms, algumas trajetórias são descritas para condições iniciais $x(0) \in \mathcal{L}_V(1) \subset \mathcal{R}_H$ (em linha sólida) e para $x(0) \notin \mathcal{L}_V(1)$ (em pontilhado).	104
Figura 15:	Sinais para $x(0) = [0,1062 \ -0,8500]'$ e $T_k \in [10, 71]$ ms.	105

Figura 16:	Os conjuntos $\bar{\mathcal{L}}_V(1)$ e \mathcal{R}_H são descritos em linhas sólidas e tracejadas, respectivamente. Para $T_k \in [10, 71]$ ms, algumas trajetórias são descritas para condições iniciais $x(0) \in \bar{\mathcal{L}}_V(1)$ (em linha sólida).	106
Figura 17:	Valores obtidos de γ para diferentes valores de \mathcal{T}_2 através da solução do problema de otimização (176), para $\mathcal{T}_1 = 10$ ms e com os ganho descritos em (178).	106
Figura 18:	Para $T_k \in [0,02, 0,032]$ s, sinais para $x(0)$ na fronteira de \mathcal{L}_V e cortes de \mathcal{L}_V (em preto) no plano definido pelas variáveis de estado x_1 e x_2 para x_3 constante.	113
Figura 19:	Sinais para $x(0) = [10 \ -10 \ 5]'$ e $T_k \in [0,02, 0,032]$, com o método proposto (linha contínua) e com (WU et al., 2014) (linha tracejada).	114

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Limite máximo factível \mathcal{T}_2 (em [s]) do intervalo de amostragem para $u(t_k) = K(\sigma(t_k))x(t_k)$	46
Tabela 2:	Limite máximo factível \mathcal{T}_2 (em [s]) do intervalo de amostragem para $u(t_k) = Kx(t_k)$	48
Tabela 3:	Para $T_k \in [1, 60]$ ms, valores mínimos de γ para diferentes casos do <i>looped</i> -funcional.	59
Tabela 4:	Máximo \mathcal{T}_2 obtido considerando $\mathcal{E}(X_0,1) = 1,5I$ e $\mathcal{T}_1 = 1$ ms.	75
Tabela 5:	Matrizes K e P para os casos (a) e (b).	75
Tabela 6:	Matrizes K e P obtidas no instante de amostragem $t_k = 0$, para $T_k \in [10, 200]$ ms e $x(0) = [2 \ 0]'$	90
Tabela 7:	Valores obtidos para γ_0 , considerando $x(0) = [2 \ 0]'$, $T_k \in [10, 200]$ ms e $T_k \in [10, 400]$ ms, a partir das condições apresentadas em (SHI; SU, 2014) e das condições DP e IP do Teorema 4 ¹	92

LISTA DE ABREVIATURAS

DP	Dependente nos parâmetros
IP	Independente nos parâmetros
IQC	<i>Integral quadratic constraint</i>
L-K	Lyapunov-Krasovskii
LMI	Desigualdade matricial linear ou <i>linear matrix inequality</i>
LPV	Linear com parâmetro variante no tempo ou <i>linear parameter varying</i>
LTI	Linear e invariante no tempo ou <i>linear time invariant</i>
LTV	Linear e variante no tempo ou <i>linear time-variant</i>
MPC	Controle preditivo baseado em modelo ou <i>model predictive control</i>
NCS	Sistema de controle em rede ou <i>networked control system</i>
PDF	Função dependente nos parâmetros ou <i>parameter dependent function</i>
PDI	Inclusão diferencial politópica ou <i>polytopic diferencial inclusion</i>
PDLF	<i>Looped</i> -funcional dependente nos parâmetros ou <i>parameter dependent looped-functional</i>
PDQF	Função quadrática dependente nos parâmetros ou <i>parameter dependent quadractic function</i>
T-S	Takagi-Sugeno
ZOH	Segurador de ordem zero ou <i>zero-order hold</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{N}	conjunto de números naturais
\mathbb{R}^+	conjunto de números reais positivos
\mathbb{R}^n	conjunto de vetores de n -dimensões
$\mathbb{R}^{n \times n}$	conjunto de matrizes $n \times n$
\mathbb{S}^n	matrizes simétricas de $\mathbb{R}^{n \times n}$
$\mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n$	define o conjunto de funções contínuas no intervalo $[0, T]$ para \mathbb{R}^n , com $\mathcal{T}_1 < T \leq \mathcal{T}_2$
$\mathcal{E}(P, c)$	elipsoide $\mathcal{E}(P, c) = \{x \in \mathbb{R}^n; x'Px \leq c\}$, com $P = P' > 0$ e $c > 0$
$\mathcal{L}_V(c)$	representa o conjunto $\bigcap_{\sigma \in \mathcal{B}} V(x, \sigma) \leq c$, com $V(x, \sigma)$ sendo uma função.
$Co\{\cdot\}$	envolpe de um conjunto convexo
$Ver(\mathcal{B})$	representa os vértices do conjunto convexo \mathcal{B}
$\partial \mathcal{E}$	fronteira do conjunto \mathcal{E}
$diag\{A, B\}$	matriz bloco diagonal formada pelas matrizes A e B
x	vetor de estado da planta $x \in \mathbb{R}^n$
u	sinal de entrada da planta $u \in \mathbb{R}^m$
$\sigma_{(j)}$	j -ésimo parâmetro variante no tempo com $j = 1, \dots, N$
δ	possível variação de σ no intervalo de amostragem
n	número de estados do sistema
N	número de parâmetros variantes
$P > (<) 0$	P é uma matriz positiva (negativa) definida
$A_{(i)}$	i -ésima linha da matriz A
$x_{(i)}$	i -ésimo elemento do vetor x
\mathbf{A}	representa $[A_1 \ A_2 \ \dots \ A_N]$
$\mathbf{A}(\nu, \beta)$ (ou $\mathbf{A}(\nu)$)	representa $\mathbf{A}(\nu \otimes I + \beta \otimes I)$ (ou $\mathbf{A}(\nu \otimes I)$)
A'	representa a matriz A transposta
I	matriz identidade de dimensão apropriada

0	matriz de zeros de dimensão apropriada
t_k	instante em que ocorre a k -ésima amostragem
T_k	intervalo entre duas amostragens consecutivas, i.e. $T_k = t_{k+1} - t_k$
\mathcal{T}_1	limite inferior do intervalo de amostragem
\mathcal{T}_2	limite superior do intervalo de amostragem
$x_k(\tau)$	função equivalente a $x(t_k + \tau)$, para $\tau \in [0, T_k]$, no intervalo $t \in [t_k, t_{k+1}]$
$x(t_{k+s/k})$	representa $x(t_{k+s})$ predito no instante t_k , para $s = 0, 1, \dots, \infty$
K_k (ou $K_{k,i}$)	representa a matriz K (ou K_i) projetada no instante t_k
$\text{He}\{A\} > 0$	refere-se a $A + A' > 0$
\otimes	produto de Kronecker
$\ x\ ^2$	norma Euclidiana de x ao quadrado
$\ x\ _Q^2$	representa $x'Qx$

1 INTRODUÇÃO

O objetivo básico da teoria de controle é obter controladores que atendam requisitos de estabilidade e performance sobre processos reais. Quando os processos são lineares e invariantes no tempo (LTI - *linear time invariant*), as técnicas de controle existentes e consolidadas podem ser aplicadas, tanto no caso de controladores contínuos como discretos. Contudo, na prática há muitos sistemas variantes no tempo (LTV - *linear time varying*) e técnicas de controle para sistemas LTI não são precisamente válidas. Quando a variação no sistema ocorre de forma lenta, aproximações para sistemas LTI podem ser feitas. Assim, com um modelo aproximado, as técnicas de controle para sistemas LTI podem ser aplicadas. Por outro lado, em alguns casos a variação temporal deve ser explicitamente considerada. Assim, uma abordagem é considerar que a planta pode ser representada por um sistema linear com parâmetros variantes no tempo (LPV - *linear parameter varying*), que são uma subclasse dos sistemas LTV. Para esta subclasse de sistema, a dependência temporal é descrita por uma dependência paramétrica variante no tempo (OLIVEIRA, 2000). Além de sistemas LTV, muitas plantas podem ser modeladas como sistemas LPV, como o caso de sistemas com incertezas ou mesmo alguns sistemas não-lineares. Neste último caso, os parâmetros dependem do estado e usa-se a denominação de sistemas quasi-LPV (HUANG; JADBABAIE, 1999). Outra abordagem bastante utilizada na literatura para modelar esta classe de sistemas não-lineares consiste no uso de sistema *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) (TAKAGI; SUGENO, 1985), que pode ser visto como um caso particular de sistemas quasi-LPV.

Por isso, técnicas de controle para sistemas LPV ou quasi-LPV têm recebido atenção especial de pesquisadores da área de controle, tanto no desenvolvimento teórico como em aplicações práticas. Por exemplo, podem-se citar alguns trabalhos que tratam de sistemas LPV (FERON; APKARIAN; GAHINET, 1996; HADDAD; BERNSTEIN, 1991; SHAMMA; XIONG, 1995) e referências inclusas nestes trabalhos. No caso em que os parâmetros não estão disponíveis para medição, projeta-se um controle robusto, que garanta a estabilidade para o sistema LPV (HADDAD; BERNSTEIN, 1991; KAPILA et al., 1998). No controle por ganhos escalonados ou programados (*gain scheduling*) assume-se que os parâmetros estão disponíveis para medição. Neste caso, são configurados controladores que atuam em faixas de operação do sistema (SHAMMA; ATHANS, 1992) que são definidas a partir dos valores dos parâmetros. Diferentemente do clássico *gain scheduling*, no controle LPV, o controlador é diretamente dependente dos parâmetros variantes, ou seja, o controlador varia de acordo com o parâmetro, o qual deve ser medido.

Em muitas aplicações práticas, o controlador LPV é implementado de forma digital. Portanto, os parâmetros variantes e o vetor de estado ou de saída do sistema

são amostrados. Em (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001) e (CORSO et al., 2009), por exemplo, considera-se a planta como um sistema LPV discreto, i.e., a planta evolui de forma discreta. Contudo, esta abordagem aproxima ou não representa a dinâmica física real da planta que na maioria dos casos evoluem continuamente no tempo. No caso em que se considera a discretização de um sistema LPV em tempo contínuo, além da dificuldade de se obter um modelo discreto, em muitos casos, assume-se que os parâmetros não evoluem continuamente no intervalo de amostragem (TAN; GRIGORIADIS; WU, 2002). Na prática, esta hipótese nem sempre é válida e pode gerar problemas de estabilidade.

Além da dificuldade de se obter modelos LPV em tempo discreto, a amostragem pode ser aperiódica, isto é, os intervalos de amostragem podem variar. A aperiódicidade de amostragem é um modo de representar perdas de pacotes de dados na comunicação ou mesmo quando o protocolo de comunicação não fixa o período de amostragem. Esta é uma característica presente em sistemas com controle em rede ou *networked control systems* (NCS) e nas técnicas de controle acionado por eventos ou *event trigger control*. Assim, além da dificuldade de se obter uma representação discreta do sistema com amostragem periódica que considere a variação do parâmetro em tempo contínuo, a amostragem aperiódica torna a tarefa mais complexa. No caso do controle amostrado, o comportamento da planta em tempo contínuo e a atualização discreta do sinal de controle devem ser explicitamente considerados na análise de estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada. Contudo, poucos trabalhos tratam formalmente do problema de controle amostrado para sistemas LPV (SHI; SU, 2014; DU et al., 2012).

Por outro lado, o sistema também pode estar sujeito à saturação do sinal de controle. A função saturação não pode ser linearizada, nem desprezada e seus efeitos devem ser considerados na dinâmica do sistema. A saturação é uma forma de modelar as limitações físicas, tecnológicas ou de segurança, existentes nos elementos do sistema de controle, os quais são comuns em sensores e atuadores que não fornecem ou recebem sinais de amplitude ilimitada. As saturações presentes no sistema degradam o desempenho, sendo fontes de múltiplos pontos de equilíbrio, ciclo-limites ou de instabilidade (TARBOURIECH et al., 2011). Citam-se como exemplos de elementos com saturação: válvulas proporcionais, atuadores hidráulicos e pneumáticos, motores, atuadores de aquecimento ou resfriamento, sensores e amplificadores. Assim, alguns trabalhos consideram o sistema LPV com saturação do sinal de controle (DU et al., 2012; SHI; SU, 2014; KOTHARE; BALAKRISHNAN; MORARI, 1996).

Além da saturação, em aplicações práticas, outra importante característica presente nos sistemas são as perturbações. Perturbações podem ser encontradas em sensores, em atuadores, na entrada da planta ou até mesmo internas ao sistema. Por exemplo, em (OLIVEIRA; TROFINO; DE SOUZA, 2002) e (DU et al., 2012), considera-se a perturbação exógena em sistemas LPV. Entretanto, na abordagem utilizando modelos discretos, muitas vezes é assumido que o sinal de perturbação exógeno não varia durante o intervalo de amostragem, o que na maioria dos casos não é uma hipótese verdadeira.

Frente aos problemas expostos acima, a presente tese tem por objetivo propor condições estabilizantes para o sistema LPV com controle amostrado. A abordagem utilizada considera que a planta evolui continuamente no tempo, enquanto que o sinal de controle amostrado é mantido constante entre dois intervalos de amostragem

consecutivos. Consideram-se a evolução dos parâmetros e o sinal de perturbação exógeno em tempo contínuo, mesmo durante o intervalo de amostragem. O problema de saturação do sinal de controle amostrado também é abordado. Em particular, foca-se no problema de estabilização com dados amostrados aperiódicamente. Também é abordada a estabilização de uma classe de sistemas não-lineares, através da representação por sistemas quasi-LPV, onde os parâmetros variantes dependem do estado.

Assim, os seguintes objetivos específicos são considerados:

- estabilização de sistemas LPV sujeitos a perturbação exógena por realimentação LPV de estados amostrados;
- estabilização de sistemas LPV sujeitos a saturação do sinal de controle por realimentação LPV de estados amostrados, além de propor um algoritmo para estratégia por controle preditivo baseado em modelo ou *model predictive control* (MPC);
- estabilização local de uma classe de sistemas não-lineares amostrados que podem ser modelados através de sistemas quasi-LPV. Em particular, será considerada também a modelagem *fuzzy* T-S.

A partir dos objetivos determinados e de um modelo politópico que descreve o sistema LPV, são propostas condições para os problemas de estabilização na forma de quasi-LMIs. A lei de controle considerada é do tipo realimentação LPV dos estados. Para considerar os efeitos da amostragem aperiódica, utiliza-se um *looped*-funcional (SEURET, 2012) com dependência paramétrica que é uma alternativa menos conservadora aos clássicos funcionais de Lyapunov-Krasovskii (L-K) (FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004) e, portanto, não necessita de métodos de discretização para representar a planta. Os efeitos da saturação do sinal de controle são considerados por meio de uma versão dependente de parâmetros da condição de setor generalizada (TARBOURIECH et al., 2011).

O presente documento é dividido nos seguintes capítulos:

- No Capítulo 2, apresenta-se uma breve revisão sobre os métodos existentes para análise de estabilidade e estabilização de sistemas LPV, quasi-LPV e *fuzzy* T-S, levando em conta tanto a abordagem por controle em tempo contínuo, discreto e com dados amostrados. O controle em tempo contínuo nem sempre é viável, pois assume-se que os dados da planta estão disponíveis para medição em tempo contínuo. Para considerar o controle em tempo discreto, uma abordagem é utilizar modelos obtidos a partir de uma discretização do sistema contínuo. Contudo, além da dificuldade de se obter um modelo discreto que represente de forma exata a dinâmica do sistema LPV, a amostragem pode ocorrer de forma aperiódica. Nos métodos de discretização, assume-se que os parâmetros não evoluem durante o intervalo de amostragem ou considera-se uma aproximação da evolução em tempo contínuo do parâmetro. Uma alternativa é considerar o controle com dados amostrados ou *sampled-data control* que é a abordagem utilizada neste trabalho.
- No Capítulo 3, são apresentados a modelagem politópica utilizada neste trabalho e resultados base para a análise de estabilidade e estabilização de sistemas LPV com sinal de controle amostrado. Considera-se que os limites de

magnitude e de variação dos parâmetros são conhecidos. A lei de controle é definida como uma realimentação LPV dos estados amostrados do sistema, com intervalo de amostragem aperiódico e limitado. A partir das condições de estabilização obtidas, é proposto um problema de otimização para a síntese do controlador visando a maximização do limite superior do intervalo de amostragem, para o qual a estabilidade é garantida. Com base nos resultados obtidos, também são propostas condições para assegurar a estabilidade assintótica do sistema LPV com atenuação das perturbações exógenas do tipo \mathcal{L}_2 no sinal de saída. Na abordagem proposta, considera-se que a perturbação atua na planta de forma contínua.

- No Capítulo 4, são apresentadas condições para estabilização assintótica local e global da origem de sistemas LPV sujeitos à saturação de controle amostrado. São propostas condições que permitem a formulação de problemas de otimização com restrições LMI para maximização da estimativa da região de atração da origem ou, dado um conjunto de condições iniciais admissíveis, para maximização do limite superior do intervalo de amostragem. Também são fornecidas condições para maximização do limite superior do intervalo de amostragem para o caso global. Na Seção 4.3, a partir dos resultados propostos para sistemas LPV com saturação, são apresentadas condições estabilizantes com um limitante para uma função custo. Com base nestas condições obtidas, um algoritmo utilizando estratégia LPV-MPC é proposto. Assim, a partir dos valores do estado e dos parâmetros amostrados, a cada instante de amostragem projetam-se os ganhos de realimentação estabilizantes de forma que a função custo seja minimizada utilizando um modelo de predição.
- No Capítulo 5, abordam-se os problemas de análise de estabilidade e estabilização local de uma classe de sistemas não-lineares com dados amostrados. Neste caso, a lei de controle LPV pode ser vista como uma realimentação não-linear do estado, visto que os parâmetros dependem do estado. Duas abordagens são consideradas neste trabalho: modelos quasi-LPV e *fuzzy* T-S. A partir das condições estabilizantes propostas, dois problemas de otimização são considerados: maximizar o limite superior do intervalo de amostragem para um conjunto de condições iniciais admissíveis ou maximizar uma estimativa da região de atração da origem, dados os limites do intervalo de amostragem.
- No último capítulo, são apresentadas conclusões e propostas de trabalhos futuros.

2 CONTROLE DE SISTEMAS LPV: ESTADO DA ARTE

2.1 Introdução

Um sistema LTV e causal pode ser descrito pelo seguinte modelo na representação de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t),\end{aligned}\tag{1}$$

sendo as matrizes $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ dependentes do tempo, $x(t)$, $y(t)$ e $u(t)$ são os vetores de estado, dos sinais de saída e de entrada do sistema, respectivamente. Devido à dificuldade de obter condições para análise de estabilidade do sistema LTV, muitas vezes são realizadas simplificações. Por exemplo, supondo uma variação lenta no tempo utiliza-se um modelo LTI que representa de maneira aproximada a dinâmica do sistema (1) em um intervalo de tempo. Contudo, esta aproximação pode tornar a dinâmica do modelo diferente da dinâmica real do sistema (AGULHARI, 2013). Assim, uma abordagem que tem sido amplamente utilizada para alguns sistemas variantes no tempo é representá-los por sistemas LPV (OLIVEIRA, 2000) que podem ser descritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))u(t), \\ y(t) &= C(\sigma(t))x(t) + D(\sigma(t))u(t),\end{aligned}\tag{2}$$

em que $\sigma(t)$ é um vetor de parâmetros variantes no tempo, $A(\sigma(t))$, $B(\sigma(t))$, $C(\sigma(t))$ e $D(\sigma(t))$ são matrizes com dependência paramétrica. Assim, a variação temporal do sistema LTV é representada por um parâmetro variante no tempo (OLIVEIRA, 2000).

Inúmeros são os processos que podem ser descritos por um sistema LPV como definido em (2). Além de uma subclasse de sistemas LTV, os parâmetros variantes podem representar incertezas do modelo ou alguns elementos não-lineares presentes nos sistemas. Neste último caso, os parâmetros dependem das variáveis de estado, i.e., tem-se $\sigma(x(t))$ e os modelos são chamados de quasi-LPV.

Quando os parâmetros estão disponíveis para medição em tempo real, estes podem ser utilizados na lei de controle para ajustá-la à medida que o modelo evolui ao longo do tempo e, assim, melhorar o desempenho do sistema em malha fechada (OLIVEIRA, 2000). Neste caso, pode-se implementar o controle por ganhos programados (SHAMMA; ATHANS, 1992). Quando a lei de controle é projetada com dependência paramétrica chama-se de controle LPV. Caso contrário, são propostas condições para estabilização robusta do sistema LPV (KAPILA et al., 1998), (YAESH; SHAKED, 2009), i.e., o sinal de controle independe dos valores dos parâmetros.

Nas seções seguintes, são descritos alguns trabalhos existentes para controle de sistemas LPV.

2.2 Controle em Tempo Contínuo

Na literatura, há diversos trabalhos que tratam do controle de sistemas LPV (EL GHAOUI; SCORLETTI, 1996; FERON; APKARIAN; GAHINET, 1996; HAD-DAD; BERNSTEIN, 1991; KAPILA et al., 1998; SHAMMA; XIONG, 1995; TROFINO; DE SOUZA, 1999; WANG; BALAKRISHNAN, 2002). Considerando-se elementos não-lineares no sistema estudado e, portanto, a modelagem por sistemas quasi-LPV, podem-se citar (HUANG; JADBABAIE, 1999) e (TAN; PACKARD; BALAS, 2000), por exemplo.

Em alguns casos, quando o parâmetro não está disponível para medição em tempo real, é necessário projetar um controlador que seja robusto às possíveis variações do parâmetro. Esse tipo de controlador é denominado controlador robusto. Para este caso, considerando a lei de controle por realimentação de estados (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989), obtém-se

$$u(t) = Kx(t),$$

em que K é a matriz de realimentação de estados.

O compensador também pode ser uma realimentação de saída do sistema LPV. Como em (YAESH; SHAKED, 2009), (FERON; APKARIAN; GAHINET, 1996) e (KAPILA et al., 1998), a dinâmica do compensador é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t), \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t),\end{aligned}$$

no qual A_c , B_c , C_c e D_c são matrizes que descrevem a dinâmica do compensador e são independentes dos parâmetros e x_c representa o vetor de estado do compensador.

Quando o parâmetro variante está disponível para medição, pode-se considerar técnicas de síntese do controlador por ganhos programados (SHAMMA; ATHANS, 1992). Neste caso, vários controladores são projetados sob diferentes condições de operação, com a lei de controle real alternando entre os controladores projetados localmente sob algum esquema de programação (WANG; BALAKRISHNAN, 2002) que depende do parâmetro. Outra abordagem é utilizar o controlador LPV, no qual a lei de controle varia de acordo com a medição do parâmetro variante. Considerando a lei de controle como uma realimentação de estados (OLIVEIRA; TROFINO; DE SOUZA, 2002), esta pode ser descrita por

$$u(t) = K(\sigma(t))x(t),$$

em que $K(\sigma)$ é uma matriz dependente dos parâmetros variantes. Em (BLIMAN et al., 2006), por exemplo, a matriz $K(\sigma)$ é um polinômio homogêneo no espaço dos parâmetros.

O controlador LPV ainda pode ser uma realimentação de saída dependente dos parâmetros, como em (APKARIAN; GAHINET, 1995; PELLANDA et al., 2004), que pode ser descrito como

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c(\sigma(t))x_c(t) + B_c(\sigma(t))y(t), \\ u(t) &= C_c(\sigma(t))x_c(t) + D_c(\sigma(t))y(t).\end{aligned}\tag{3}$$

Para obter condições estabilizantes para sistemas LPV, muitos trabalhos consideram a estabilidade no sentido de Lyapunov. Para isso, considera-se a função quadrática de Lyapunov na forma

$$V(x) = x'Px,$$

com $P = P' > 0$. Assim, a função de Lyapunov utilizada para projeto de controladores estabilizantes é independente de parâmetros (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989; HADDAD; BERNSTEIN, 1991, 1993; GAROFALO; CELENTANO; GLIELMO, 1993; WANG; BALAKRISHNAN, 2002). Neste caso, as condições estabilizantes derivam da mesma função de Lyapunov e devem ser válidas para toda possível variação do parâmetro, resultando em condições, em geral, conservadoras.

Com objetivo de obter condições menos conservadoras, por exemplo, pode-se considerar uma função de Lyapunov dependente de parâmetro (DP). Uma abordagem é considerar a matriz P afim no parâmetro (GAHINET; APKARIAN; CHILALI, 1996; APKARIAN; TUAN, 2000; PELLANDA et al., 2004), ou seja, genericamente tem-se

$$V(x, \sigma) = x'P(\sigma)x,$$

com a matriz $P(\sigma)$ dependente de parâmetros que pode ser representada por

$$P(\sigma) = P_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)} P_j,$$

sendo $\sigma_{(j)}$ o j -ésimo elemento do parâmetro. Em (TROFINO; DE SOUZA, 1999) e (OLIVEIRA; TROFINO; DE SOUZA, 2002), apresenta-se uma abordagem por estabilidade bi-quadrática do sistema LPV. Neste caso, considera-se uma função de Lyapunov quadrática nos estados e nos parâmetros, ou seja,

$$P(\sigma) = P_0 + P_1\Theta + \Theta'P_1 + \Theta'P_2\Theta,$$

com $\Theta = [(\sigma_{(1)}I)' \dots (\sigma_{(N)}I)']'$. Em (OLIVEIRA; PERES, 2006; BLIMAN et al., 2006; OLIVEIRA; PERES, 2007), a função de Lyapunov é estruturada como um polinômio homogêneo no espaço de parâmetros. Portanto, ao aumentar o grau deste polinômio, obtêm-se condições menos conservadoras, contudo, mais complexas do ponto de vista numérico.

2.3 Controle em Tempo Discreto

Assumir que os valores dos parâmetros e dos sinais de saída (ou estado) estão disponíveis para medição em tempo contínuo em geral não é uma hipótese válida. Além disso, os controladores normalmente são componentes digitais e, portanto, apresentam dinâmica em tempo discreto. Assim, recentemente vários trabalhos abordam sistemas LPV no contexto discreto. Para isso, alguns trabalhos consideram a planta como um sistema LPV discreto (JUNGERS; CASTELAN, 2011; DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001; DE CAIGNY et al., 2010; OLIVEIRA; PERES, 2006; DE OLIVEIRA; BERNUSSOU; GEROMEL, 1999), i.e., o seguinte modelo é considerado

$$\begin{aligned} x(k+1) &= E(\sigma(k))x(k) + F(\sigma(k))u(k), \\ y(k) &= G(\sigma(k))x(k) + H(\sigma(k))u(k), \end{aligned} \tag{4}$$

em que k representa o tempo discreto e as matrizes dependentes nos parâmetros $E(\sigma(k))$, $F(\sigma(k))$, $G(\sigma(k))$ e $H(\sigma(k))$ descrevem a dinâmica do sistema.

Em (DE OLIVEIRA; BERNUSSOU; GEROMEL, 1999), o parâmetro variante representa incertezas no sistema e, a partir de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros como $V(x(k), \sigma(k)) = x'(k)P(\sigma(k))x(k)$, são propostas condições para projeto de um controle robusto por realimentação de estados definido como

$$u(k) = Kx(k).$$

Em (JUNGERS; CASTELAN, 2011), é proposta uma realimentação de saída *gain scheduled* estabilizante para um sistema não-linear discreto sujeito à saturação no sinal de controle.

Por outro lado, uma abordagem para tratar os efeitos de limites de controle (saturação) e desempenho é a estratégia MPC proposta inicialmente por (KOTHARE; BALAKRISHNAN; MORARI, 1996) e também considerada em (CASAVOLA; FAMULARO; FRANZE, 2003; WADA; SAITO; SAEKI, 2004; CASAVOLA et al., 2006; JUNGERS; OLIVEIRA; PERES, 2011; SUZUKI; SUGIE, 2006; LU; ARKUN, 2000). A partir da função de Lyapunov independente de parâmetros em (SUZUKI; SUGIE, 2006), são apresentadas condições para projeto de uma lei de controle robusta por realimentação de estados, enquanto que em (LU; ARKUN, 2000) o controle por realimentação de estados proposto é afim nos parâmetros como

$$u(k) = K(\sigma(k))x(k),$$

em que

$$K(\sigma(k)) = \sum_{j=1}^N \sigma_j(k)K_j.$$

Além disso, em (JUNGERS; OLIVEIRA; PERES, 2011), considera-se uma função de Lyapunov dependente de parâmetros.

Contudo, a maioria dos sistemas LPV não são representados por (4), i.e., são sistemas com dinâmica em tempo contínuo. Assim, alguns trabalhos propõem métodos de discretização de sistemas LPV em tempo contínuo, sendo um problema complexo, como abordado em (APKARIAN, 1997). A partir dos resultados apresentados em (APKARIAN, 1997), o sistema (2) pode ser representado pelo modelo discreto (4) para $t \in [kT, (k+1)T)$, com intervalo de amostragem T e as matrizes

$$\begin{aligned} E(\sigma(k)) &= e^{A(\sigma(k))T}, \\ F(\sigma(k)) &= \int_0^T e^{A(\sigma(k))(T-s)} B(\sigma(k)) ds. \end{aligned} \quad (5)$$

Entretanto, determinar o valor exato das matrizes em (5) é uma tarefa complexa, podendo-se aproximar os valores por séries de Taylor. Por outro lado, a evolução durante o intervalo de amostragem do parâmetro variante não é levada em conta, o que é considerada uma suposição irrealista.

2.4 Controle Amostrado

Motivado pelo desenvolvimento de sistemas de controle em rede e sistemas embarcados, o interesse em sistemas com dados amostrados cresceu nas últimas décadas

(HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007). Atenção especial tem sido dada ao caso da amostragem aperiódica (HETEL et al., 2017; ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001), i.e., quando o intervalo entre duas amostragens consecutivas não é necessariamente constante, como assume a teoria de controle discreta clássica. Para tratar dos efeitos da amostragem aperiódica, três abordagens principais podem ser encontradas na literatura. A primeira é baseada em modelos discretos com incertezas (CLOOSTERMAN et al., 2009, 2010; ROBERT; SENAME; SIMON, 2010). A segunda refere-se à análise robusta de sistemas contínuos e discretos usando a teoria de *small-gains* (MIRKIN, 2007) ou *integral quadratic constraints* (IQCs) (FUJIOKA, 2009; KAO; FUJIOKA, 2013) ou sistemas híbridos (BRIAT, 2016). O terceiro método considera a abordagem por entradas com atrasos ou *input delay approach* e, portanto, o uso de funcionais de Lyapunov-Krasovskii (L-K) (FRIDMAN; SEURET; RICHARD, 2004; NAGHSHTABRIZI; HESPANHA; TEEL, 2008; FRIDMAN, 2010)). Uma alternativa menos conservadora aos funcionais de L-K são os *looped*-funcionais propostos em (SEURET, 2012) e (BRIAT; SEURET, 2012).

Em (ROBERT; SENAME; SIMON, 2010), é proposto um modelo discreto com incertezas para representar um sistema LTI com controle amostrado aperiódicamente. A partir deste modelo é proposto um controlador dinâmico como descrito em (3), porém em tempo discreto, que além de estabilizar o sistema, atenua o efeito de uma perturbação exógena na saída do sistema. Nesta abordagem, o sinal de perturbação é considerado um sinal constante durante o intervalo de amostragem, o que nem sempre é uma consideração válida.

Poucos trabalhos tratam formalmente com o problema de controle amostrado para sistemas LPV. Em (BRAGA et al., 2015), propõe-se um modelo discreto LPV para sistemas LPV em tempo contínuo, considerando tanto a amostragem aperiódica como a variação do parâmetro no intervalo de amostragem, similar ao apresentado em (APKARIAN, 1997) e representado em (5). Para obter os valores aproximados das matrizes descritas em (5), utilizam-se expansões por séries de Taylor. Um controlador por realimentação de saídas acionado por eventos é proposto. Outra abordagem para discretização é a técnica de *lifting*, como descrito em (TAN; GRIGORIADIS, 2000; TAN; GRIGORIADIS; WU, 2002). Nos casos de modelos discretos ou discretizações, é comum assumir que os parâmetros não evoluem durante o período do intervalo de amostragem ou aproximações. Ademais, o sinal de perturbação é considerado constante entre dois instantes de amostragem consecutivos, como em (TAN; GRIGORIADIS, 2000; TAN; GRIGORIADIS; WU, 2002; ROBERT; SENAME; SIMON, 2010).

Em (RAMEZANIFAR; MOHAMMADPOUR; GRIGORIADIS, 2013), a partir da abordagem por *input delay*, utiliza-se um funcional de Lyapunov-Krasovskii com dependência paramétrica e projeta-se uma realimentação LPV de estados, descrita por

$$u(t) = K(\sigma(t_k))x(t_k), \text{ para } t \in [t_k, t_{k+1}),$$

sendo t_k o instante de amostragem. Ademais, propõe-se a atenuação da perturbação no sinal de saída em tempo contínuo, pois a abordagem utilizada não necessita de um modelo discreto do sistema, diferentemente do apresentado em (ROBERT; SENAME; SIMON, 2010; TAN; GRIGORIADIS; WU, 2002). Em (SHI; SU, 2014) e (DU et al., 2012), utilizam-se funcionais de L-K e considera-se saturação do sinal de controle. O primeiro utiliza a estratégia por MPC, enquanto o segundo considera o problema de minimização de um limite superior do ganho \mathcal{L}_2 entre o distúrbio e o

sinal de saída.

2.4.1 Sistemas Não-lineares com Controle Amostrado

O problema do controle amostrado é particularmente relevante no contexto de sistemas não-lineares. Neste caso, a obtenção de um modelo discreto que represente a dinâmica contínua pode ser uma tarefa difícil e, inclusive, inviável. Além disso, as aproximações numéricas do modelo podem levar a comportamentos indesejados (como instabilidade) quando utilizado para projeto de leis de controle com dados amostrados (NEŠIĆ; TEEL; KOKOTOVIĆ, 1999). Portanto, é fundamental considerar o comportamento contínuo da planta e a evolução discreta do sinal de controle.

Modelos LPV podem ser utilizados para representar uma classe de sistemas não-lineares em uma região de operação. A abordagem quasi-LPV baseia-se na possibilidade de reescrever a planta na forma em que os elementos não-lineares podem ser representados por parâmetros variantes no tempo que dependem do estado do sistema (RUGH; SHAMMA, 2000). Assim, as técnicas de controle LPV (HOFFMANN; WERNER, 2015; BRIAT, 2014) podem ser aplicadas na análise e na estabilização do sistema em malha fechada. Da mesma forma que para sistemas LPV, o controlador pode ser projetado na forma quasi-LPV, i.e., a lei de controle é dependente de parâmetros.

Na literatura, há poucos trabalhos que consideram o problema de estabilidade de sistemas não-lineares com dados amostrados. Na maioria destes, considera-se a modelagem *fuzzy* T-S que pode ser vista como uma representação quasi-LPV. Os modelos *fuzzy* T-S são uma poderosa ferramenta matemática para representar a dinâmica de alguns sistemas não-lineares (TAKAGI; SUGENO, 1985). Nestes modelos, um sistema não-linear é representado como uma soma ponderada de subsistemas lineares (LAM; LING, 2008) que localmente descrevem a dinâmica do sistema não-linear. A partir desses modelos, vários trabalhos presentes na literatura consideram o controle *fuzzy* T-S para obter condições estabilizantes para sistemas não-lineares (KATAYAMA; ICHIKAWA, 2004; WU et al., 2014). Em (KATAYAMA; ICHIKAWA, 2004) e (NGUANG; SHI, 2003), são propostas condições estabilizantes para projeto de uma lei de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída através de inequações de Riccati. A partir da abordagem por funcionais L-K, em (LAM, 2009), são propostas condições LMIs estabilizantes por realimentação de estados, enquanto que em (LAM; SENEVIRATNE, 2009), é considerado o seguimento de um modelo de referência. Em (LAM; LING, 2008), é considerada uma função custo para projeto de um controlador ótimo. Em (KIM; LEE; TOMIZUKA, 2010), propõe-se um modelo *fuzzy* T-S discreto aproximado para o sistema não-linear visando o projeto de um controlador *fuzzy* por realimentação de estados.

Considerando o caso de intervalos de amostragem aperiódicos, podem ser citados por exemplo (WU et al., 2014), (KIM; PARK; JOO, 2016) e (LI et al., 2014). Em (WU et al., 2014) e (KIM; PARK; JOO, 2016), a partir de um funcional L-K, condições LMIs estabilizantes são propostas para sistemas LPV com controle *fuzzy* T-S por realimentação de estados. Ademais, na segunda referência, a lei de controle também pode ser uma realimentação de saída. Em (LI et al., 2014), condições LMIs são propostas para projeto de um controlador *fuzzy* T-S estabilizante por realimentação de saída ou de estados e atenuação de perturbações para sistemas de suspensão de um veículo.

Observa-se que o modelo quasi-LPV ou *fuzzy* T-S utilizado para obtenção de condições de estabilidade geralmente representa a dinâmica do sistema não-linear apenas localmente. Contudo, esta região de validade do modelo muitas vezes é desprezada, como em (WU et al., 2014). Neste caso, deve-se ter em mente que a estabilização global da origem não é garantida para o sistema não-linear e, assim, é importante a caracterização de regiões de estabilidade contidas na região de atração, fato este não considerado nos trabalhos acima citados.

2.5 Considerações Finais

O desenvolvimento de métodos de análise de estabilidade e de estabilização de sistemas LPV tem recebido atenção nas últimas décadas. Tanto por ser uma sub-classe de sistemas LTV e permitir a obtenção de métodos menos complexos, quanto por ser uma ferramenta capaz de modelar incertezas e alguns elementos não-lineares. Assim, neste capítulo, algumas referências que estudam a estabilidade de sistemas LPV presentes na literatura foram apresentadas, considerando o controle em tempo contínuo, discreto ou amostrado. O controle em tempo contínuo muitas vezes não é viável, tanto por considerar que deve ser possível amostragens em tempo real e contínuas do parâmetro, como por assumir que o controlador é analógico. Uma alternativa é o controle em tempo discreto, contudo para sistemas LPV, a obtenção do modelo discreto a partir de um modelo em tempo contínuo é uma tarefa complexa, especialmente nos casos de amostragem aperiódica. Além disso, em muitos trabalhos, o modelo discreto ou discretizado despreza ou aproxima a evolução do parâmetro durante o intervalo de amostragem. Ademais, quando se estuda a atenuação da perturbação na saída, modelos discretos podem considerar o sinal de perturbação como um sinal constante entre duas amostras, o que muitas vezes não é válido.

Assim, uma abordagem mais adequada neste caso é o controle com dados amostrados ou *sampled-data control*. Nesta abordagem, enquanto o sinal de controle é considerado constante entre dois instantes de amostragem consecutivos, a evolução da planta é considerada em tempo contínuo. Assim, os dados da planta, como os valores do estado e dos parâmetros são amostrados e disponíveis para o controlador somente nos instantes de amostragem, isto é, os estados e parâmetros do sistema variam em tempo contínuo durante o intervalo de amostragem, enquanto que os valores amostrados são mantidos constantes no controlador até o próximo instante de amostragem. A mesma suposição é feita quando se considera uma perturbação exógena na planta com controle amostrado, ou seja, o sinal da perturbação pode variar durante o intervalo de amostragem. Além disso, esta abordagem permite considerar a amostragem aperiódica, isto é, quando os intervalos de amostragem não são fixos. Contudo, na literatura são observados poucos trabalhos que tratam formalmente o controle amostrado aperiodicamente para sistemas LPV. Assim, os capítulos seguintes concentram-se em propor condições estabilizantes para sistemas LPV e quasi-LPV com controle amostrado.

3 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LPV AMOSTRADOS

3.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentadas condições para estabilização de sistemas LPV com dados amostrados que serão utilizadas como base para o desenvolvimento deste trabalho. Estas condições são propostas na forma de quasi-LMIs, i.e., são LMIs desde que uma variável escalar tenha seu valor fixado. A abordagem é baseada em um modelo politópico para sistemas LPV proposto em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2015) e considera que os limites de magnitude e de taxa de variação do parâmetro são conhecidos. Para considerar os efeitos da amostragem aperiódica, utiliza-se um *looped*-funcional dependente dos parâmetros desenvolvido a partir dos resultados apresentados em (SEURET, 2012) e (BRIAT; SEURET, 2012). Além disso, também são obtidas condições LMIs para a análise de estabilidade.

A partir dos resultados obtidos, considera-se também o caso da planta LPV com perturbação limitada em norma \mathcal{L}_2 . Como o método utilizado não necessita de técnicas de discretização, considera-se que o sinal de perturbação pode variar durante o intervalo de amostragem. Assim, enquanto assegura-se a estabilidade do sistema na ausência da perturbação, também considera-se o problema de rejeição à perturbação. Problemas de otimização são propostos para projeto de uma lei de controle que minimize um limitante do ganho \mathcal{L}_2 do sistema em malha fechada e que maximize o limite superior do intervalo de amostragem, para o qual um certo nível de rejeição à perturbação \mathcal{L}_2 é assegurado.

3.2 Estabilização de Sistemas LPV com Controle Amostrado

3.2.1 Formulação do Problema

O seguinte sistema LPV é considerado:

$$\dot{x}(t) = A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))u(t), \quad (6)$$

sendo os vetores de estado e de entrada representados por $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$, respectivamente. O vetor de N parâmetros variantes no tempo é definido como $\sigma(t) = [\sigma_{(1)}(t) \ \sigma_{(2)}(t) \ \cdots \ \sigma_{(N)}(t)]' \in \mathbb{R}^N$. Assume-se que cada componente de $\sigma(t)$ é limitado em amplitude e em taxa de variação como segue:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{(j)} &\leq \sigma_{(j)}(t) \leq \bar{\sigma}_{(j)}, \\ \underline{\xi}_{(j)} &\leq \dot{\sigma}_{(j)}(t) \leq \bar{\xi}_{(j)}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Considera-se que $A(\sigma(t))$ e $B(\sigma(t))$ são matrizes afins nos parâmetros variantes, descritas genericamente como:

$$A(\sigma(t)) = A_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}(t)A_j,$$

$$B(\sigma(t)) = B_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}(t)B_j,$$

em que $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes constantes, conhecidas e de dimensões apropriadas, para $j = 0, 1, \dots, N$.

Considera-se uma abordagem por dados amostrados para implementar o controle, i.e., os valores de $\sigma(t)$ e $x(t)$ são medidos e disponíveis apenas nos instantes de amostragem t_k , com t_k sendo uma sequência crescente de escalares positivos, tais que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [t_k, t_{k+1}) = [0, +\infty)$. A diferença entre dois instantes de amostragem consecutivos é definida por

$$T_k = t_{k+1} - t_k.$$

Para qualquer $k \geq 0$, assume-se que T_k satisfaz

$$0 < \mathcal{T}_1 \leq T_k \leq \mathcal{T}_2.$$

O caso particular $T_k = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 > 0$, para todo k corresponde a ocorrência de uma amostragem periódica. No intervalo $[t_k, t_{k+1})$, os dados amostrados de $x(t)$ e $\sigma(t)$ são mantidos constantes por meio de um segurador de ordem zero (ou *zero-order hold* - ZOH). Neste caso, considerando-se uma lei de controle do tipo realimentação de estados LPV, tem-se que:

$$u(t) = K(\sigma(t_k))x(t_k), \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \forall k \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

em que a matriz de ganhos de realimentação é também considerada afim nos parâmetros amostrados e descrita por

$$K(\sigma(t_k)) = K_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}(t_k)K_j,$$

com $K_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ para $j = 0, 1, \dots, N$. O sistema em malha fechada obtido com a lei de controle amostrada (8) pode então ser descrito esquematicamente pela Figura 1.

Assim, com base na formulação acima, o seguinte problema de interesse é considerado:

Problema 1 (Estabilização). *Projetar os ganhos de realimentação K_j , com $j = 0, 1, \dots, N$ tais que o sistema LPV (6) com a lei de controle amostrada (8) é assintoticamente estável para todo $\sigma(t)$ satisfazendo (7) e $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$.*

A partir do Problema 1, um problema de otimização implícito é projetar os ganhos de realimentação estabilizantes K_j , $j = 0, 1, \dots, N$, tais que o limite superior do intervalo de amostragem seja maximizado, ou seja, dado \mathcal{T}_1 maximizar \mathcal{T}_2 .

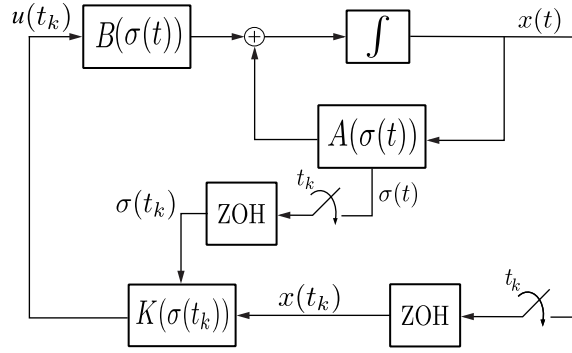


Figura 1: Sistema LPV com realimentação de estado com dados amostrados.

3.2.2 Modelagem Politópica

Para $t \in [t_k, t_{k+1})$, a função $\sigma(t)$ pode ser decomposta como:

$$\sigma(t) = \sigma(t_k) + \delta_k(t),$$

em que δ_k representa a possível variação de $\sigma(t)$ durante o intervalo de amostragem. A partir dos limites definidos em (7), assumindo sem perda de generalidade que $\bar{\xi}_{(j)} \geq 0$ e $\underline{\xi}_{(j)} \leq 0$ e $\mathcal{T}_2 \geq \mathcal{T}_1$, segue que:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{(j)} &\leq \sigma_{(j)}(t_k) \leq \bar{\sigma}_{(j)}, \\ \mathcal{T}_2 \underline{\xi}_{(j)} &\leq \delta_{k(j)}(t) \leq \mathcal{T}_2 \bar{\xi}_{(j)}, \quad j = 1, \dots, N, \\ \underline{\xi}_{(j)} &\leq \dot{\delta}_{k(j)}(t) \leq \bar{\xi}_{(j)}, \end{aligned} \quad (9)$$

uma vez que $\dot{\delta}_k(t) = \dot{\sigma}(t)$.

A partir dos limites definidos em (9), nota-se que $\sigma(t_k)$, $\delta_k(t)$ e $\dot{\delta}_k(t)$ pertencem a politopos convexas em \mathbb{R}^N com 2^N vértices. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \sigma(t_k) &\in \mathcal{B}_\sigma = Co\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2^N}\}, \\ \delta_k(t) &\in \mathcal{B}_{\delta_k} = Co\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2^N}\}, \\ \dot{\sigma}(t) &= \dot{\delta}_k(t) \in \mathcal{B}_{\dot{\delta}} = Co\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2^N}\}. \end{aligned}$$

A partir dos vértices dos politopos, tem-se

$$\sigma(t_k) = \sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f(t_k) \nu_f, \quad \delta_k(t) = \sum_{g=1}^{2^N} \gamma_g(t) \beta_g, \quad \dot{\delta}_k(t) = \sum_{h=1}^{2^N} \rho_h(t) \eta_h,$$

com $\lambda_f(t_k), \gamma_g(t), \rho_h(t) \geq 0$ e $\sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f(t_k) = \sum_{g=1}^{2^N} \gamma_g(t) = \sum_{h=1}^{2^N} \rho_h(t) = 1$.

Então, é possível reescrever as matrizes dependentes dos parâmetros $A(\sigma(t))$,

$B(\sigma(t))$ e $K(\sigma(t_k))$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$ como

$$\begin{aligned}
A(\sigma(t)) &= A_0 + \mathbf{A}((\sigma(t_k) \otimes I) + (\delta_k(t) \otimes I)) \\
&= A_0 + \mathbf{A} \left(\sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f(t_k)(\nu_f \otimes I) + \sum_{g=1}^{2^N} \gamma_g(t)(\beta_g \otimes I) \right), \\
B(\sigma(t)) &= B_0 + \mathbf{B}((\sigma(t_k) \otimes I) + (\delta_k(t) \otimes I)) \\
&= B_0 + \mathbf{B} \left(\sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f(t_k)(\nu_f \otimes I) + \sum_{g=1}^{2^N} \gamma_g(t)(\beta_g \otimes I) \right), \\
K(\sigma(t_k)) &= K_0 + \mathbf{K}(\sigma(t_k) \otimes I) \\
&= K_0 + \mathbf{K} \sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f(t_k)(\nu_f \otimes I),
\end{aligned} \tag{10}$$

em que $\mathbf{A} = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_N]$, $\mathbf{B} = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_N]$ e $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_N]$.

Assim, para $t \in [t_k, t_{k+1})$, o sistema em malha fechada pode ser representado por:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A_0 + \mathbf{A}(\sigma(t_k) \otimes I) + \mathbf{A}(\delta_k(t) \otimes I)) x(t) + (B_0 + \mathbf{B}(\sigma(t_k) \otimes I) \\
&\quad + \mathbf{B}(\delta_k(t) \otimes I)) (K_0 + \mathbf{K}(\sigma(t_k) \otimes I)) x(t_k).
\end{aligned}$$

Observe que, nos instantes de amostragem, o sistema em malha fechada depende do parâmetro $\sigma(t_k)$ que pode assumir qualquer valor no politopo \mathcal{B}_σ . Por outro lado, no intervalo (t_k, t_{k+1}) , a dinâmica do sistema também depende de $\delta_k(t)$, que pode evoluir dentro do politopo \mathcal{B}_{δ_k} . Portanto na modelagem politópica proposta, o sistema em malha fechada depende de $\sigma(t_k)$ e $\delta_k(t)$ que podem assumir valores dentro dos politopos \mathcal{B}_σ e \mathcal{B}_{δ_k} , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 2.

Esta modelagem implica em uma redução do conservadorismo quando comparado com a abordagem considerada em (SHI; SU, 2014), em que assume-se que o sistema em malha fechada depende de $\sigma(t)$ e $\sigma(t_k)$ e assim, esses parâmetros podem assumir valores no politopo \mathcal{B}_σ de forma independente. Por outro lado, em (TAN; GRIGORIADIS; WU, 2002), assume-se que $\sigma(t)$ não varia no intervalo de amostragem (t_k, t_{k+1}) , isto é, é considerado $\sigma(t) = \sigma(t_k)$ para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ o que pode ser irreal e levar a instabilidade do sistema em malha fechada.

3.2.3 Abordagem por *Looped-Funcional*

Nesta seção, os resultados apresentados em (SEURET, 2012; BRIAT; SEURET, 2012) são estendidos para considerar a análise de estabilidade de sistemas LPV por meio de um *looped-funcional* e uma função dependentes de parâmetros. Para obter condições para estabilização do sistema (6) com a lei de controle (8), foca-se no comportamento do sistema entre os instantes de amostragem, i.e., para $t \in [t_k, t_{k+1})$. Para tanto, para qualquer intervalo de amostragem $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ e $\tau \in [0, T_k]$, são

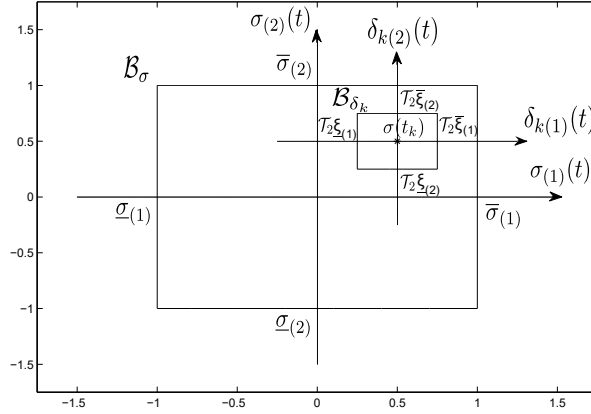


Figura 2: Politopos \mathcal{B}_σ e \mathcal{B}_{δ_k} , para $N = 2$.

consideradas as seguintes definições (SEURET, 2012; BRIAT; SEURET, 2012):

$$\begin{aligned}
 x_k(0) &= x(t_k), \\
 x_k(\tau) &= x(t_k + \tau), \\
 \dot{x}_k(\tau) &= \frac{d}{d\tau} x_k(\tau) \\
 \sigma_k(0) &= \sigma(t_k), \\
 \sigma_k(\tau) &= \sigma(t_k + \tau),
 \end{aligned} \tag{11}$$

A partir desta notação, a dinâmica do sistema LPV em malha fechada (6)-(8) no intervalo de amostragem pode ser representada por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_k(\tau) &= (A_0 + \mathbf{A}(\sigma_k(0) \otimes I) + \mathbf{A}(\delta_k(\tau) \otimes I)) x_k(\tau) + (B_0 + \mathbf{B}(\sigma_k(0) \otimes I) \\
 &\quad + \mathbf{B}(\delta_k(\tau) \otimes I)) (K_0 + \mathbf{K}(\sigma_k(0) \otimes I)) x_k(0),
 \end{aligned} \tag{12}$$

para $\tau \in [0, T_k]$.

Considera-se a seguinte definição de *looped*-funcional que pode ser vista como uma extensão da proposta em (BRIAT; SEURET, 2012) a fim de considerar a dependência do parâmetro σ .

Definição 1. *Um funcional*¹

$$\mathcal{F} : [0, T_2] \times \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n \times \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^N \times [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] \rightarrow \mathbb{R},$$

é dito um *looped*-funcional dependente de parâmetros (*parameter dependent looped-functional - PDLF*) em relação a $\sigma_k \in \mathbb{R}^N$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. a igualdade

$$\mathcal{F}(0, x_k, \sigma_k, T) = \mathcal{F}(T, x_k, \sigma_k, T)$$

é verdadeira para todas funções $x_k \in \mathcal{C}_{[0, T]}^n \subset \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n$, $\sigma_k \in \mathcal{C}_{[0, T]}^N \subset \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^N$, e todo $T \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$;

2. o funcional é diferenciável em relação à primeira variável.

¹ $\mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n$ define o conjunto de funções contínuas no intervalo $[0, T]$ para \mathbb{R}^n , com $\mathcal{T}_1 \leq T \leq \mathcal{T}_2$.

A partir da representação do sistema em malha fechada (12) e de um PDLF, a seguir são propostas condições para estabilização de um sistema LPV com dados amostrados aperiodicamente, baseados nos resultados apresentados em (SEURET, 2012; BRIAT; SEURET, 2012) para sistemas LTI.

Lema 1. *Seja uma função dependente dos parâmetros (parameter dependent function - PDF) $V : \mathbb{R}^n \times \mathcal{B}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfazendo*

$$\mu_1 \|x\|^2 \leq V(x_k, \sigma_k) \leq \mu_2 \|x\|^2, \quad (13)$$

com $0 < \mu_1 \leq \mu_2$, e um PDLF $\mathcal{V}_0 : [0, \mathcal{T}_2] \times \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n \times \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^N \times [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz para todo $x_k \in \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n$, $\sigma_k \in \mathcal{B}_\sigma$ e $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$

$$\mathcal{V}_0(T_k, x_k(T_k), \sigma_k(T_k), T_k) = \mathcal{V}_0(0, x_k(0), \sigma_k(0), T_k). \quad (14)$$

Defina $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = V(x_k(\tau), \sigma_k(\tau)) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$, com $\dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ sendo a derivada de $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ em relação a τ , ao longo das trajetórias do sistema (12).

Se existe um escalar $\mu_3 > 0$ tal que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = \frac{d}{d\tau} [V(x_k, \sigma_k) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)] < -\mu_3 \left\| \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \right\|^2, \quad \text{para } \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (15)$$

então:

(i) o incremento da função V entre dois instantes de amostragem consecutivos satisfaz:

$$\Delta V(k) = V(x_{k+1}(0), \sigma_{k+1}(0)) - V(x_k(0), \sigma_k(0)) < -\mathcal{T}_1 \mu_3 \|x_k(0)\|^2, \quad (16)$$

para $x_k(0) \neq 0$;

(ii) as trajetórias do sistema LPV (6) com a lei de controle amostrada (8) convergem assintoticamente para a origem.

Demonstração: Integrando (15) em um intervalo de amostragem, tem-se

$$\int_0^{T_k} \dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) d\tau < -\mu_3 \int_0^{T_k} \left\| \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \right\|^2 d\tau.$$

Como o funcional $\mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ satisfaz (14) para todo k e que, por continuidade, $x_k(T_k) = x_{k+1}(0)$ e $\sigma_k(T_k) = \sigma_{k+1}(0)$, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{T_k} \dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) d\tau &= V(x_k(T_k), \sigma_k(T_k)) - V(x_k(0), \sigma_k(0)) \\ &\quad + \mathcal{V}_0(T_k, x_k(T_k), \sigma_k(T_k), T_k) - \mathcal{V}_0(0, x_k(0), \sigma_k(0), T_k) \\ &= V(x_k(T_k), \sigma_k(T_k)) - V(x_k(0), \sigma_k(0)) \\ &= V(x_{k+1}(0), \sigma_{k+1}(0)) - V(x_k(0), \sigma_k(0)) \\ &< -\mu_3 \int_0^{T_k} \left\| \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \right\|^2 d\tau \leq -\mu_3 \int_0^{T_k} \|x_k(0)\|^2 d\tau \\ &\leq -\mathcal{T}_1 \mu_3 \|x_k(0)\|^2. \end{aligned}$$

Então, conclui-se que o item (i) é verdadeiro, o que implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(x_k(0), \sigma_k(0)) = 0$$

e, como V satisfaz (13), conclui-se também que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = 0.$$

Contudo deve-se garantir também que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Para isso, considere uma função admissível $\sigma(t)$, i.e. $\sigma(t) \in \mathcal{B}_\sigma$ e $\dot{\sigma}(t) \in \mathcal{B}_\delta$, $\forall t \geq 0$. Como o sistema (6) é linear variante no tempo, admite-se que existe uma matriz de transição $\phi_\sigma(t, t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Defina $\phi_{\sigma, k}(\tau, 0) = \phi_\sigma(t_k + \tau, t_k) : [0, \mathcal{T}_2) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ como a restrição de $\phi_\sigma(t, t_0)$ no intervalo $[t_k, t_k + \mathcal{T}_2)$. Assim, tem-se que:

$$x_k(\tau) = \phi_{\sigma, k}(\tau, 0)x_k(0) + \left(\int_0^\tau \phi_{\sigma, k}(\tau, s) ds \right) BKx_k(0)$$

e

$$\|x_k(\tau)\| \leq \left(\|\phi_{\sigma, k}(\tau, 0)\| + \left\| \int_0^\tau \phi_{\sigma, k}(\tau, s) ds \right\| \|BK\| \right) \|x_k(0)\|.$$

Como assume-se que $\sigma_k(\tau)$ é limitado e contínuo $\forall \tau \in [0, \mathcal{T}_2]$, considerando qualquer função admissível (i.e., $\sigma_k(\tau) \in \mathcal{B}_\sigma$ com $\dot{\sigma}_k(\tau) = \dot{\delta}_k(\tau) \in \mathcal{B}_\delta$), então, existe um escalar μ_m tal que

$$\begin{aligned} \|\phi_{\sigma, k}(\tau, 0)\| + \left\| \int_0^\tau \phi_{\sigma, k}(\tau, s) ds \right\| \|BK\| \\ \leq \sup_{\sigma \in \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^N} \left\{ \|\phi_{\sigma, k}(\tau, 0)\| + \left\| \int_0^\tau \phi_{\sigma, k}(\tau, s) ds \right\| \|BK\| \right\} = \mu_m, \end{aligned}$$

para todo $k > 0$.

Consequentemente, conclui-se que $\|x_k(\tau)\| \leq \mu_m \|x_k(0)\|$. Como $V(x_k(\tau), \sigma_k(\tau)) \leq \mu_2 \|x_k(0)\|$, segue que $V(x_k(\tau), \sigma_k(\tau)) \leq \mu_2 \mu_m \|x_k(0)\|$. Então, como $x_k(0) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$, segue que $x_k(\tau) = x(t_k + \tau) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$, i.e., $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.

□

O método propõe um *looped*-funcional que relaciona uma PDF V e um funcional \mathcal{W} . Assim, se a derivada temporal deste funcional satisfaz (15), então é possível verificar que a PDF satisfaz (16) e, assim, V é estritamente decrescente nos instantes de amostragem, consequentemente, como mostrado na prova acima, sendo o sistema linear, garante-se a convergência assintótica do estado para a origem em tempo contínuo. Note que V pode ser vista como uma função discreta de Lyapunov em relação às trajetórias discretas do sistema LPV (12).

Diferentemente de (SEURET, 2012) que trata do problema de sistemas LTI, o Lema 1 é utilizado como base para assegurar a estabilidade assintótica para sistemas LPV amostrados com o *looped*-funcional dependente dos parâmetros, que permite obter condições menos conservadoras quando comparado ao mesmo método com o *looped*-funcional independente dos parâmetros.

3.2.4 Condições de Estabilização

Nesta seção, condições estabilizantes são propostas com base nos resultados apresentados no Lema 1. O objetivo é propor condições quasi-LMIs tais que a desigualdade (15) seja verificada para uma PDF e um PDLF que satisfaçam (13) e (14), respectivamente.

Assim, considere uma função quadrática dependente dos parâmetros (*parameter dependent quadratic function* - PDQF) $V : \mathbb{R}^n \times \mathcal{B}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaz (13), descrita como

$$V(x_k, \sigma_k) = x_k'(\tau)P(\sigma_k(\tau))x_k(\tau), \quad (17)$$

em que $P(\sigma_k(\tau))$ é uma matriz simétrica e definida positiva $\forall \sigma_k(\tau) \in \mathcal{B}_\sigma$, dependendo de maneira afim de $\sigma_k(\tau)$, i.e., $P(\sigma_k(\tau))$ é definida como:

$$P(\sigma_k(\tau)) = P_0 + \mathbf{P}(\sigma_k(0) \otimes I + \delta_k(\tau) \otimes I), \quad (18)$$

com $\mathbf{P} = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_N]$ e $P_j \in \mathbb{S}^n$, para $j = 0, 1, \dots, N$.

Considere um candidato a funcional em tempo contínuo $\mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ dependente no parâmetro $\sigma_k(\tau)$, definido para todo $\tau \in [0, T_k]$, baseado em (SEURET, 2012), descrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = & (T_k - \tau) \left\{ (x_k(\tau) - x_k(0))' F(\sigma_k(\tau)) (x_k(\tau) - x_k(0)) \right. \\ & + 2(x_k(\tau) - x_k(0))' G(\sigma_k(\tau)) x_k(0) + \tau x_k'(0) X(\sigma_k(0)) x_k(0) \\ & \left. + \int_0^\tau \dot{x}_k'(\theta) R \dot{x}_k(\theta) d\theta \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

com as matrizes $F(\sigma_k(\tau))$, $G(\sigma_k(\tau))$ e $X(\sigma_k(0))$ dependentes dos parâmetros, com X_j e $F_j \in \mathbb{S}^n$ e $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall j = 0, 1, \dots, N$ e $R \in \mathbb{S}^n$, com $R > 0$. Note que $\mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ satisfaz a condição (14) do Lema 1.

A partir dos resultados teóricos do Lema 1, da PDQF $V(x_k, \sigma_k)$ e do PDLF $\mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$, definidos em (17) e (19), respectivamente, com $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = V(x_k, \sigma_k) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$, o seguinte teorema apresenta condições na forma quasi-LMI para estabilização do sistema LPV amostrado (6)-(8).

Por simplicidade, considere uma matriz \mathbf{L} de dimensão apropriada na forma $\mathbf{L} = [L_1 \ L_2 \ \dots \ L_N]$ e os vetores ν e β , definem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\nu, \beta) &= \mathbf{L}(\nu \otimes I + \beta \otimes I), \\ \mathbf{L}(\nu) &= \mathbf{L}(\nu \otimes I). \end{aligned} \quad (20)$$

Teorema 1. *Se existem matrizes $\tilde{P}_j, \tilde{X}_j, \tilde{F}_j \in \mathbb{S}^n$, matrizes $\tilde{G}_j, \tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{Q}_j \in \mathbb{R}^{(3n) \times n}$, $\tilde{K}_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j = 0, 1, \dots, N$, uma matriz positiva definida $\tilde{R} \in \mathbb{S}^n$ e um escalar positivo ϵ satisfazendo*

$$\tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) + \mathcal{T}_r \tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) + \mathcal{T}_r \tilde{\Pi}_3(\nu) < 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) - \mathcal{T}_r \tilde{\Pi}_3(\nu) & \mathcal{T}_r(\tilde{Q}_0 + \tilde{Q}(\nu, \beta)) \\ * & -\mathcal{T}_r \tilde{R} \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

$$(\tilde{P}_0 + \tilde{P}(\nu, \beta)) > 0, \quad (23)$$

$\forall(\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_j})$ e $\forall r = 1, 2$, com²

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) &= \text{He} \left\{ M'_1(\tilde{P}_0 + \tilde{\mathbf{P}}(\nu, \beta))M_3 - M'_{12}(\tilde{G}_0 + \tilde{\mathbf{G}}(\nu, \beta))M_2 - (\tilde{Q}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}(\nu, \beta))M_{12} \right. \\ &\quad + (\epsilon M'_1 + M'_3)((A_0 + \mathbf{A}(\nu, \beta))\tilde{Y}M_1 + (B_0 + \mathbf{B}(\nu, \beta))(\tilde{K}_0 + \tilde{\mathbf{K}}(\nu))M_2 \\ &\quad \left. - \tilde{Y}M_3) \right\} - M'_{12}(\tilde{F}_0 + \tilde{\mathbf{F}}(\nu, \beta))M_{12} + M'_1\tilde{\mathbf{P}}(\eta)M_1, \\ \tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) &= \text{He} \left\{ M'_3((\tilde{G}_0 + \tilde{\mathbf{G}}(\nu, \beta))M_2 + (\tilde{F}_0 + \tilde{\mathbf{F}}(\nu, \beta))M_{12}) + M'_{12}\tilde{\mathbf{G}}(\eta)M_2 \right\} \\ &\quad + M'_3\tilde{R}M_3 + M'_{12}\tilde{\mathbf{F}}(\eta)M_{12}, \\ \tilde{\Pi}_3(\nu) &= M'_2(\tilde{X}_0 + \tilde{\mathbf{X}}(\nu))M_2, \end{aligned} \tag{24}$$

sendo

$$M_1 = [I \ 0 \ 0], \quad M_2 = [0 \ I \ 0], \quad M_3 = [0 \ 0 \ I], \quad M_{12} = M_1 - M_2, \tag{25}$$

então o sistema LPV amostrado em malha fechada (6)-(8), com a matriz de ganhos

$$K(\sigma(t_k)) = K_0 + \mathbf{K}(\sigma(t_k) \otimes I),$$

em que $K_j = \tilde{K}_j\tilde{Y}^{-1}$, $j = 0, 1, \dots, N$, é assintoticamente estável para qualquer intervalo de amostragem satisfazendo $0 < \mathcal{T}_1 \leq T_k \leq \mathcal{T}_2$.

Demonstração: A prova deste teorema baseia-se nos resultados apresentados no Lema 1. O objetivo é provar que as condições (13)-(15) são válidas para o sistema LPV (12) e, conseqüentemente, que as declarações (i) e (ii) no Lema 1 são verdadeiras, i.e., $\Delta V(k) < -\mu_3 \|x_k(0)\|^2$ e, conseqüentemente, $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$, se a derivada temporal de $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ satisfizer (15) ao longo das trajetórias do sistema (12) para todo σ que satisfaz (7).

Para isso, considere a PDQF $V(x_k, \sigma_k)$ e o PDLF $\mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ definidos em (17) e (19), respectivamente, que satisfazem as condições (13) e (14) do Lema 1. Define-se o funcional $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = V(x_k, \sigma_k) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ e derivando $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ em relação a τ resulta em³

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} &= 2\dot{x}'_k(\tau)P(\sigma_k(\tau))x_k(\tau) + x'_k(\tau)\dot{P}(\sigma_k(\tau))x_k(\tau) + (T_k - 2\tau)x'_k(0)X(\sigma_k(0))x_k(0) \\ &\quad - [x_k(\tau) - x_k(0)]'F(\sigma_k(\tau))[x_k(\tau) - x_k(0)] - [x_k(\tau) - x_k(0)]'2G(\sigma_k(\tau))x_k(0) \\ &\quad + (T_k - \tau) \left\{ 2\dot{x}'_k(\tau)F(\sigma_k(\tau))[x_k(\tau) - x_k(0)] + [x_k(\tau) - x_k(0)]'\dot{F}(\sigma_k(\tau))[x_k(\tau) \right. \\ &\quad \left. - x_k(0)] + 2\dot{x}'_k(\tau)G(\sigma_k(\tau))x_k(0) + 2[x_k(\tau) - x_k(0)]'\dot{G}(\sigma_k(\tau))x_k(0) \right\} \\ &\quad + (T_k - \tau)\dot{x}'_k(\tau)R\dot{x}_k(\tau) - \int_0^\tau \dot{x}'_k(\theta)R\dot{x}_k(\theta)d\theta. \end{aligned} \tag{26}$$

Observe que

$$\dot{P}(\sigma_k(\tau)) = \mathbf{P}(\dot{\delta}_k(\tau) \otimes I), \quad \dot{F}(\sigma_k(\tau)) = \mathbf{F}(\dot{\delta}_k(\tau) \otimes I), \quad \dot{G}(\sigma_k(\tau)) = \mathbf{G}(\dot{\delta}_k(\tau) \otimes I).$$

²Observe a definição da estrutura das matrizes dependentes nos vértices em (20).

³Por simplicidade considere $\dot{\mathcal{W}} = \dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$.

Considere uma matriz $Q(\sigma_k(\tau)) = Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0) \otimes I) + \mathbf{Q}(\delta_k(\tau) \otimes I)$ com $Q_j \in \mathbb{R}^{3n \times n}$, para $j = 0, 1, \dots, N$. Definindo

$$\chi(\tau) = [x'_k(\tau) \quad x'_k(0) \quad \dot{x}'_k(\tau)]',$$

como $R > 0$, segue então que

$$(\dot{x}_k(\theta) - R^{-1}Q'(\sigma_k(\tau))\chi(\tau))'R(\dot{x}_k(\theta) - R^{-1}Q'(\sigma_k(\tau))\chi(\tau)) > 0.$$

Integrando em relação a θ no intervalo $[0, \tau]$, tem-se a seguinte desigualdade (BRIAT, 2011):

$$\int_0^\tau \dot{x}'_k(\theta)R\dot{x}_k(\theta)d\theta \geq 2\chi'(\tau)Q(\sigma_k(\tau)) [x_k(\tau) - x_k(0)] - \tau\chi'(\tau)Q(\sigma_k(\tau))R^{-1}Q'(\sigma_k(\tau))\chi(\tau), \quad (27)$$

que pode ser vista como uma aplicação da desigualdade de Jensen (SEURET; GOMES DA SILVA Jr., 2012).

Considerando as matrizes auxiliares definidas em (25), a partir de (26) e (27), resulta que

$$\dot{W} \leq \chi'(\tau)[\hat{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + (T_k - \tau)\Pi_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + (T_k - 2\tau)\Pi_3(\sigma_k(0)) + \tau(Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))R^{-1}(Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))]\chi(\tau), \quad (28)$$

com

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) &= M'_1\mathbf{P}(\dot{\delta}_k(\tau))M_1 + \text{He}\{M'_3(P_0 + \mathbf{P}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_1 \\ &\quad - M'_{12}(G_0 + \mathbf{G}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_2 - (Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_{12}\} \\ &\quad - M'_{12}(F_0 + \mathbf{F}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_{12}, \\ \Pi_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) &= M'_3RM_3 + \text{He}\{M'_3[(F_0 + \mathbf{F}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_{12} \\ &\quad + (G_0 + \mathbf{G}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_2] + M'_{12}(G_0 + \mathbf{G}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_2\} \\ &\quad + M'_{12}(F_0 + \mathbf{F}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_{12}, \\ \Pi_3(\sigma_k(0)) &= M'_2(X_0 + \mathbf{X}(\sigma_k(0)))M_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Por outro lado, de (12) tem-se que

$$(Y_1x_k(\tau) + Y_2\dot{x}_k(\tau))' [(A_0 + \mathbf{A}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))x_k(\tau) - \dot{x}_k(\tau) + (B_0 + \mathbf{B}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))(K_0 + \mathbf{K}(\sigma_k(0)))x_k(0)] = 0,$$

para quaisquer matrizes Y_1 e $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Define-se então

$$\Pi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) = \hat{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + \text{He}\{\Theta(\sigma_k(0), \delta_k(\tau))\},$$

com

$$\begin{aligned} \Theta(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)) &= (Y_1M_1 + Y_2M_3)'((A_0 + \mathbf{A}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_1 - M_3 \\ &\quad + (B_0 + \mathbf{B}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))(K_0 + \mathbf{K}(\sigma_k(0)))M_2). \end{aligned}$$

Esta manipulação também pode ser interpretada como o uso da abordagem por sistema descritor ou *descriptor system* proposta em (FRIDMAN; SHAKED, 2002) ou uma aplicação do Lema de Finsler (DE OLIVEIRA; BERNUSSOU; GEROMEL, 1999; EBIHARA; PEAUCELLE; ARZELIER, 2015).

Supondo que Y_2 é não singular, define-se $\tilde{Y} = Y_2^{-1}$ e $Y_1 = \epsilon Y_2$. Então, considerando a transformação de similaridade $\tilde{\chi}(\tau) = \Xi^{-1}\chi(\tau)$, com $\Xi = \text{diag}\{\tilde{Y}, \tilde{Y}, \tilde{Y}\}$, é possível reescrever (28) como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} \leq & \tilde{\chi}'(\tau)\Xi' \left[\Pi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + (T_k - \tau)\Pi_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) \right. \\ & \left. + (T_k - 2\tau)\Pi_3(\sigma_k(0)) + \tau(Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))R^{-1}(Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))' \right] \Xi\tilde{\chi}(\tau) \\ & = \tilde{\chi}'(\tau)\tilde{\Psi}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k)\tilde{\chi}(\tau). \quad (30) \end{aligned}$$

A partir do lado direito da inequação (30), se

$$\tilde{\Psi}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k) < 0, \quad (31)$$

e se Ξ é não-singular, existe um escalar positivo μ_Ψ tal que

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}'(\tau)\tilde{\Psi}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k)\tilde{\chi}(\tau) & < -\mu_\Psi\|\tilde{\chi}(\tau)\|^2 \\ & < -\mu_\Psi\|\Xi^{-1}\|^2\|\chi(\tau)\|^2 < -\mu_3\left\|\begin{array}{c} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{array}\right\|^2, \end{aligned}$$

$\forall \sigma_k(0) \in \mathcal{B}_\sigma$, $\delta_k(\tau) \in \mathcal{B}_{\delta_k}$, $\dot{\delta}_k(\tau) \in \mathcal{B}_{\dot{\delta}_k}$, $\tau \in [0, T_k]$ e $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, o que implica que a condição (15) é satisfeita. Assim, aplicando o complemento de Schur, tem-se que (31) é equivalente a

$$\begin{aligned} \Psi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k) = \\ \left[\begin{array}{cc} \Pi(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k) & \tau\Xi'(Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))\tilde{Y}' \\ * & -\tau\tilde{Y}'R\tilde{Y} \end{array} \right] < 0, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k) = \Xi'(\Pi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + (T_k - 2\tau)\Pi_3(\sigma_k(0)))\Xi \\ + (T_k - \tau)\Pi_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)). \end{aligned}$$

Assim, uma condição suficiente para verificar (15) é dada por:

$$\Psi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k) < 0, \quad (32)$$

para todo $\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$, $\forall \delta_k(\tau) \in \mathcal{B}_{\delta_k}$, $\forall \dot{\delta}_k(\tau) \in \mathcal{B}_{\dot{\delta}_k}$, $\forall \tau \in [0, T_k]$ e $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$.

Observe que (32) é afim em $\sigma_k(0)$, $\delta_k(\tau)$ e $\dot{\delta}_k(\tau)$. Logo, para satisfazer (32) é necessário e suficiente verificar a mesma nos vértices dos politopos \mathcal{B}_σ , \mathcal{B}_{δ_k} , $\mathcal{B}_{\dot{\delta}_k}$. Ou seja, deve-se verificar

$$\left[\begin{array}{cc} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) + (T_k - \tau)\tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) + (T_k - 2\tau)\tilde{\Pi}_3(\nu) & \tau(\tilde{Q}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}(\nu, \beta)) \\ * & -\tau\tilde{R} \end{array} \right] < 0, \quad (33)$$

$\forall (\nu, \beta, \eta) \in \text{Ver}(\mathcal{B}_\sigma) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_{\dot{\delta}_k})$, em que $\tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta)$, $\tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta)$ e $\tilde{\Pi}_3(\nu)$ são definidos em (24) e com as mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_j &= \tilde{Y}'P_j\tilde{Y} & \tilde{F}_j &= \tilde{Y}'F_j\tilde{Y} & \tilde{G}_j &= \tilde{Y}'G_j\tilde{Y} \\ \tilde{Q}_j &= \Xi'Q_j\tilde{Y} & \tilde{X}_j &= \tilde{Y}'X_j\tilde{Y} & \tilde{K}_j &= K_j\tilde{Y}. \end{aligned} \quad (34)$$

Levando em conta que $\tau \in [0, T_k]$, por argumentos de convexidade, uma condição suficiente para verificar (15) é assegurar (33) para $\tau = 0$ e $\tau = T_k$, ou seja,

$$\tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) + T_k \tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) + T_k \tilde{\Pi}_3(\nu) < 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) - T_k \tilde{\Pi}_3(\nu) & T_k(\tilde{Q}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}(\nu, \beta)) \\ * & -T_k \tilde{R} \end{bmatrix} < 0. \quad (36)$$

$\forall(\nu, \beta, \eta) \in \text{Ver}(\mathcal{B}_\sigma) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_{\delta_j})$. Como $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, também por argumentos de convexidade, segue que as condições (21) e (22) são equivalentes a (35) e (36) e, conseqüentemente, asseguram que a desigualdade (15) no Lema 1 é satisfeita.

Por outro lado, (21) assegura implicitamente que \tilde{Y} é uma matriz não-singular. Nota-se que o termo bloco-diagonal na posição (3,3) em (21), i.e., obtido por

$$M_3(\tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) + T_k \tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) + T_k \tilde{\Pi}_3(\nu))M_3^T,$$

é dado por $-\tilde{Y} - \tilde{Y}' + \tilde{R}T_k$. Como este termo é definido negativo, se (21) é verificado e como assume-se que $\tilde{R} > 0$, segue que $-\tilde{Y} - \tilde{Y}' < 0$. Este fato implica que \tilde{Y} é não-singular. Assim, Ξ é uma matriz não-singular e, portanto, (21) e (22) de fato asseguram (15), o que conclui a prova. \square

3.2.5 Casos Particulares

3.2.5.1 Funcional Independente de Parâmetros

No Teorema 1, considerando valores dados de \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 e ϵ , existem $2^{3N+1} + 2^{3N+1} + 2^{2N} + 1$ desigualdades matriciais que devem ser verificadas, com $n!(3N+4) + n^2(4N+5) + mn(N+1)$ variáveis. A complexidade numérica pode ser reduzida por exemplo, considerando uma função V e um funcional \mathcal{V}_0 independente de parâmetros, ao custo de aumentar o conservadorismo

Assim, nas condições do Teorema 1, considera-se uma função quadrática clássica, i.e.

$$V(x_k(\tau)) = x_k(\tau)' P x_k(\tau),$$

com a matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{S}^n$, e um funcional $\mathcal{V}_0(\tau, x_k)$ independente dos parâmetros. Neste caso, é suficiente considerar:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) = \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta) = \text{He} \left\{ M_1' \tilde{P} M_3 - M_{12}' \tilde{G} M_2 - \tilde{Q} M_{12} + (\epsilon M_1' + M_3')(-\tilde{Y} M_3 \right. \\ \left. + (A_0 + \mathbf{A}(\nu, \beta)) \tilde{Y} M_1 + (B_0 + \mathbf{B}(\nu, \beta))(\tilde{K}_0 + \tilde{\mathbf{K}}(\nu)) M_2) \right\} - M_{12}' \tilde{F} M_{12}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) = \tilde{\Pi}_2 = \text{He} \left\{ M_3'(\tilde{F} M_{12} + \tilde{G} M_2) \right\} + M_3' \tilde{R} M_3,$$

$$\tilde{\Pi}_3(\nu) = \tilde{\Pi}_3 = M_2' \tilde{X} M_2,$$

$\forall(\nu, \beta, \eta) \in \text{Ver}(\mathcal{B}_\sigma) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_{\delta_j})$, nas inequações (21) e (22), para estabilização do sistema LPV (12). Isto reduz a quantidade de variáveis sob o custo de se ter soluções mais conservadoras.

3.2.5.2 Estabilização Robusta

Para estabilização robusta do sistema LPV (12), i.e., sem acesso à medição dos parâmetros, considera-se $\tilde{\mathbf{K}} = 0$ nas condições do Teorema 1. Assim, $K = \tilde{K}_0 \tilde{Y}^{-1}$ é o ganho robusto estabilizante para o sistema LPV (6)-(8) para todo $\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$, $\forall \delta \in \mathcal{B}_{\delta_j}$ e $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$.

3.2.5.3 Amostragem Periódica

No caso do sistema (12) ser amostrado periodicamente, as condições desenvolvidas também são válidas, bastando considerar $\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

3.2.5.4 Análise de Estabilidade

Observe que as condições no Teorema 1 podem ser utilizadas na análise de estabilidade do sistema LPV (6)-(8). Para isso, como as matrizes K_j são conhecidas, é suficiente considerar as variáveis \tilde{K}_j como $K_j\tilde{Y}$ nas condições. Contudo, note que no caso das matrizes K_j serem conhecidas para $j = 0, 1, \dots, N$, a transformação de similaridade utilizada no Teorema 1 para obtenção de condições quasi-LMI não é necessária. Portanto, o seguinte corolário é proposto com condições LMI para análise de estabilidade do sistema LPV (12) baseado no desenvolvimento do Teorema 1.

Corolário 1. *Se existem matrizes $P_j, X_j, F_j \in \mathbb{S}^n, G_j, Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q_j \in \mathbb{R}^{(3n) \times n}$, para $j = 0, 1, \dots, N$, e uma matriz simétrica e definida positiva $R \in \mathbb{S}^n$ satisfazendo*

$$\Pi_1(\nu, \beta, \eta) + \mathcal{T}_r \Pi_2(\nu, \beta, \eta) + \mathcal{T}_r \Pi_3(\nu) < 0, \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_1(\nu, \beta, \eta) - \mathcal{T}_r \Pi_3(\nu) & \mathcal{T}_r(Q_0 + \mathbf{Q}(\nu, \beta)) \\ * & -\mathcal{T}_r R \end{bmatrix} < 0, \quad (38)$$

$$(P_0 + \mathbf{P}(\nu, \beta)) > 0, \quad (39)$$

$\forall (\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_\delta) \times Ver(\mathcal{B}_\delta)$ e $\forall r = 1, 2$, com

$$\begin{aligned} \Pi_1(\nu, \beta, \eta) = & \text{He}\{M'_1(P_0 + \mathbf{P}(\nu, \beta))M_3 - M'_{12}(G_0 + \mathbf{G}(\nu, \beta))M_2 - (Q_0 + \mathbf{Q}(\nu, \beta))M_{12} \\ & + (M'_1 Y'_1 + M'_3 Y'_2)((A_0 + \mathbf{A}(\nu, \beta))M_1 + (B_0 + \mathbf{B}(\nu, \beta))(K_0 + \mathbf{K}(\nu))M_2 \\ & - M_3)\} - M'_{12}(F_0 + \mathbf{F}(\nu, \beta))M_{12} + M'_1 \mathbf{P}(\eta)M_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2(\nu, \beta, \eta) = & \text{He}\{M'_3((G_0 + \mathbf{G}(\nu, \beta))M_2 + (F_0 + \mathbf{F}(\nu, \beta))M_{12}) + M'_{12} \mathbf{G}(\eta)M_2 \\ & + M'_3 R M_3 + M'_{12} \mathbf{F}(\eta)M_{12}, \end{aligned}$$

$$\Pi_3(\nu) = M'_2(X_0 + \mathbf{X}(\nu))M_2,$$

com as matrizes auxiliares definidas em (25), então o sistema LPV amostrado em malha fechada (6)-(8) é assintoticamente estável para qualquer intervalo de amostragem satisfazendo $0 < \mathcal{T}_1 \leq T_k \leq \mathcal{T}_2$.

3.2.6 Problema de Otimização

Nota-se que as condições (21) a (22) são LMIs fixando-se o escalar ϵ e dados os limites \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 do intervalo de amostragem. Consequentemente, a partir do Problema 1, dados os limites \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 do intervalo de amostragem, uma realimentação de estados LPV estabilizante pode ser projetada considerando-se problemas de factibilidade das LMIs para um *grid* em ϵ .

Por outro lado, dado \mathcal{T}_1 , outro problema de interesse consiste em projetar $K_j, j = 0, 1, \dots, N$ de forma a maximizar o valor de \mathcal{T}_2 , para o qual a estabilidade do sistema em malha fechada é garantida. Isto pode ser obtido através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \max \quad \mathcal{T}_2 \\ & \text{sujeito a} \\ & (21) - (23) \\ & \forall (\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_\delta) \text{ e } \forall r = 1, 2. \end{aligned} \quad (40)$$

Assim, considerando \mathcal{T}_1 dado, o problema de otimização (40) pode ser resolvido de forma iterativa fixando valores de ϵ e incrementando \mathcal{T}_2 e testando a factibilidade de (21)-(23).

3.2.7 Exemplo Numérico

Nesta seção, é apresentado um exemplo numérico para validar as condições estabelecidas para estabilização de sistemas LPV e apresentar algumas características do método proposto.

Considere o seguinte sistema LPV:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & 0,4 + 0,6\sigma(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (41)$$

com $|\sigma(t)| \leq 1$ e $|\dot{\sigma}(t)| \leq 0,2$.

Assume-se que $T_k \in [1; 400]$ ms e, a partir das condições no Teorema 1, com $\epsilon = 0,1$, obtêm-se os seguintes ganhos de realimentação:

$$K_0 = [-0,9698 \quad -1,3226], \quad K_1 = [0,1379 \quad -0,4830].$$

Na Figura 3, são apresentados os sinais obtidos na simulação do sistema LPV (41) para os ganhos projetados, com dados amostrados aperiodicamente com $T_k \in [1; 400]$ ms e para a condição inicial $x(0) = [2 \ 0]'$. O parâmetro variante no tempo e sua derivada estão ilustradas na Figura 3(c). Os instantes de amostragem são gerados aleatoriamente de forma a respeitar $T_k \in [1; 400]$ ms, para cada instante de amostragem $t = t_k$, os correspondentes instantes de amostragem $T_k = t_{k+1} - t_k$ estão ilustrados na Figura 3(d). Como esperado, os estados da planta (Figura 3(a)) convergem para a origem, mesmo na presença do parâmetro variante no tempo e dos efeitos da amostragem aperiódica. Note que o sinal de controle (Figura 3(b)) é mantido constante entre os instantes de amostragem.

Com o objetivo de maximizar \mathcal{T}_2 , considera-se $\mathcal{T}_1 = 1$ ms e aplica-se o problema de otimização (40). As Tabelas 1 e 2 apresentam os valores máximos factíveis de \mathcal{T}_2 com controle LPV e com controle robusto (K independente de $\sigma(t_k)$), respectivamente, para diferentes limites de $\dot{\sigma}(t)$ e diferentes casos de dependência paramétrica para o funcional. É visto que o controle LPV permite obter valores factíveis de \mathcal{T}_2 maiores que o controlador robusto para todas as formas do funcional, como esperado. Note que o uso do funcional dependente de parâmetro no método proposto permite obter um limite do intervalo de amostragem maior para todos os limites de $\dot{\sigma}(t)$ considerados. Além disso, nota-se que o máximo \mathcal{T}_2 factível tende a ser menor quanto maior for a variação de $\sigma(t)$ considerada.

Tabela 1: Limite máximo factível \mathcal{T}_2 (em [s]) do intervalo de amostragem para $u(t_k) = K(\sigma(t_k))x(t_k)$.

	$ \dot{\sigma}(t) \leq 0,2$	$ \dot{\sigma}(t) \leq 0,4$	$ \dot{\sigma}(t) \leq 1,0$
$P(\sigma(t)), Q(\sigma(t)), F(\sigma(t)), G(\sigma(t))$	1,708	1,699	1,685
$P, Q(\sigma(t)), F(\sigma(t)), G(\sigma(t))$	1,704	1,698	1,683
$P(\sigma(t)), Q, F, G$	1,622	1,622	1,622
P, Q, F, G	1,595	1,595	1,595

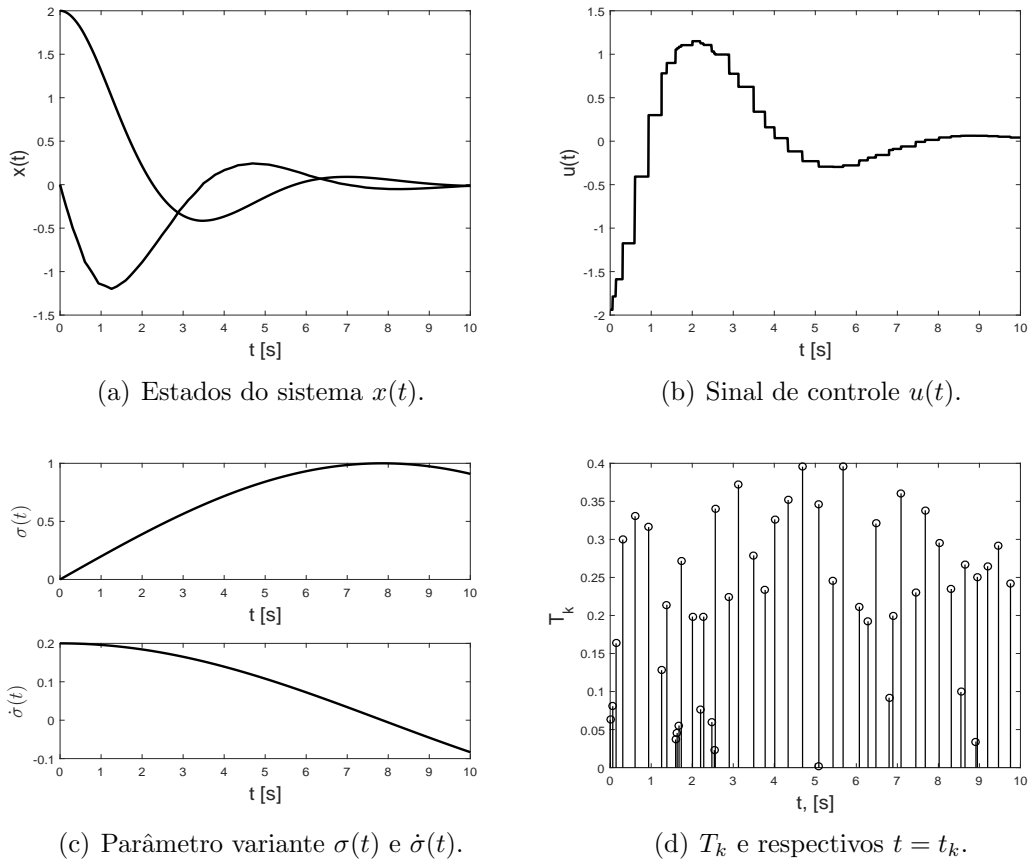


Figura 3: Sinais para $x(0) = [2 \ 0]'$, com $|\dot{\sigma}(t)| \leq 0,2$ e $T_k \in [1; 400]$ ms.

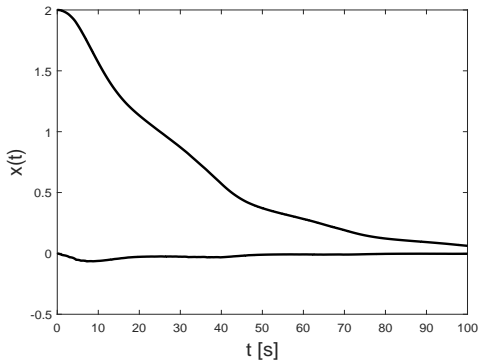
Considerando $|\dot{\sigma}(t)| \leq 0,2$, para demonstrar a influência da variação de T_k , uma segunda simulação é realizada para o máximo valor do limite superior de T_k obtido, i.e., $\mathcal{T}_2 = 1,708$ s, a partir das condições no Teorema 1, com $\epsilon = 0,1$, obtêm-se os seguintes ganhos de realimentação:

$$K_0 = [-0,1038 \quad -0,5796], \quad K_1 = [0,0003 \quad -0,5537]. \quad (42)$$

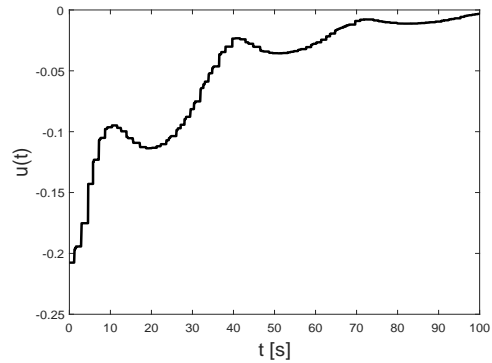
Para $x(0) = [2 \ 0]'$ e $T_k \in [1; 1708]$ ms, os sinais do estado do sistema e do controle estão ilustrados nas Figuras 4(a) e 4(b), respectivamente. O parâmetro variante no tempo e sua derivada estão ilustrados na Figura 4(c). Os instantes de amostragem $t = t_k$ determinados de forma randômica e os respectivos intervalos de amostragem $T_k = t_{k+1} - t_k$ estão ilustrados na Figura 4(d). A estabilidade continua garantida para o limite máximo do intervalo de amostragem e com o parâmetro variante no tempo, apesar de não ter sido considerado um critério de performance, nota-se a degradação da performance com o aumento de \mathcal{T}_2 quando comparado à simulação ilustrada na Figura 3.

Tabela 2: Limite máximo factível \mathcal{T}_2 (em [s]) do intervalo de amostragem para $u(t_k) = Kx(t_k)$.

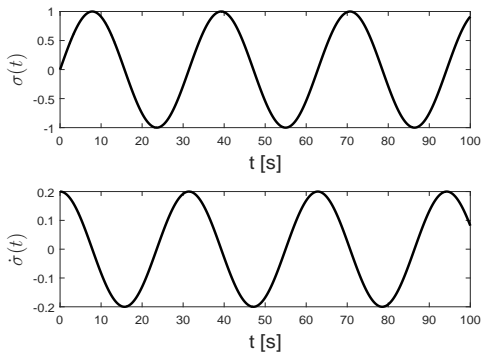
	$ \dot{\sigma}(t) \leq 0,2$	$ \dot{\sigma}(t) \leq 0,4$	$ \dot{\sigma}(t) \leq 1,0$
$P(\sigma(t)), Q(\sigma(t)), F(\sigma(t)), G(\sigma(t))$	1,381	1,288	1,164
$P, Q(\sigma(t)), F(\sigma(t)), G(\sigma(t))$	1,170	1,170	1,131
$P(\sigma(t)), Q, F, G$	1,110	1,107	1,099
P, Q, F, G	1,080	1,080	1,080



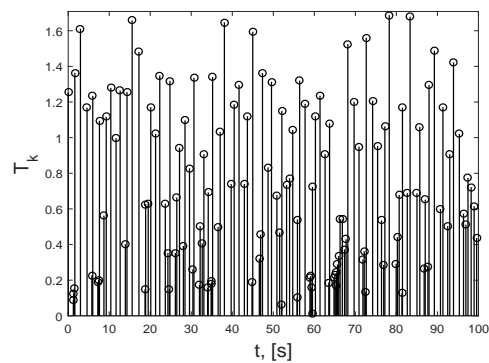
(a) Estado do sistema $x(t)$.



(b) Sinal de controle $u(t)$.



(c) Parâmetro variante $\sigma(t)$ e $\dot{\sigma}(t)$.



(d) T_k e respectivos $t = t_k$.

Figura 4: Sinais para $x(0) = [2 \ 0]'$, com $|\dot{\sigma}(t)| \leq 0,2$ e $T_k \in [1; 1708]$ ms.

3.3 Atenuação de Perturbações \mathcal{L}_2

Com base nos resultados apresentados na Seção 3.2, nesta seção, aborda-se o problema de rejeição a perturbações \mathcal{L}_2 para o sistema LPV com lei de controle amostrada. Diferentemente de trabalhos na literatura (DE CAIGNY et al., 2010; TAN; GRIGORIADIS, 2000; ROBERT; SENAME; SIMON, 2010), assume-se que a perturbação age continuamente sobre a planta, ou seja, nenhuma hipótese relativa à amostragem da perturbação ou que a mesma é constante entre dois instantes de amostragem é considerada.

3.3.1 Formulação do Problema

A partir do modelo (6) definido na Seção 3.2.2, considera-se o seguinte sistema LPV:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))u(t) + B_w w(t), \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z u(t),\end{aligned}\tag{43}$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$ representando o vetor de estado e de entrada, respectivamente. A saída controlada é denotada por $z(t)$ e $w(t)$ é o vetor de perturbação exógena com energia finita, i.e., $w(t) \in \mathcal{L}_2$.

As matrizes $A(\sigma(t))$, $B(\sigma(t))$, B_w , C_z e D_z são conhecidas e de dimensões apropriadas que descrevem o sistema, com $A(\sigma(t))$ e $B(\sigma(t))$ sendo afim nos parâmetros e descritas como em (10). O vetor de N parâmetros variantes no tempo é representado por $\sigma(t)$, sendo limitados em amplitude e em taxa de variação conforme (7).

Assim como descrito na Seção 3.2.1, considera-se que o sistema evolui continuamente no tempo, enquanto que o sinal de controle é mantido constante entre os instantes de amostragem. Assume-se a abordagem de controle com dados amostrados, em que os estados e os parâmetros podem ser medidos em cada instante de amostragem t_k , com amostragem aperiódica e limitada em $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$. A lei de controle é uma realimentação de estados dependente dos parâmetros com dados amostrados, definida como:

$$u(t) = K(\sigma(t_k))x(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N},\tag{44}$$

com $K(\sigma(t_k))$ definido como (10).

A partir desta formulação, o seguinte problema de interesse é considerado.

Problema 2. *Projetar as matrizes de realimentação de estados K_j para $j = 0, \dots, N$, tal que, para o sistema LPV (43) com a lei de controle amostrada (44), assegure-se um limite superior γ para o ganho \mathcal{L}_2 entre a perturbação e a saída, i.e.,*

$$\sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0, x(0)=0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \leq \gamma,$$

com $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$. Além disso, para $w(t) = 0$, garante-se $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

3.3.2 Abordagem por *Looped*-funcional com Ganho \mathcal{L}_2

Conforme a abordagem politópica e o modelo definidos na Seção 3.2.1, para $\tau \in [0, T_k]$, nesta seção definem-se também $w_k(\tau) = w(t_k + \tau)$ e $z_k(\tau) = z(t_k + \tau)$. Assim, para $\tau \in [0, T_k]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, a partir de (11), a dinâmica do sistema em malha fechada (43) com a lei de controle (44) é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_k(\tau) &= A(\sigma_k(\tau))x_k(\tau) + B(\sigma_k(\tau))K(\sigma_k(0))x_k(0) + B_w w_k(\tau), \\ z_k(\tau) &= C_z x_k(\tau) + D_z K(\sigma_k(0))x_k(0),\end{aligned}\tag{45}$$

Para obter condições para análise de estabilidade e para rejeição de perturbações \mathcal{L}_2 para sistemas LPV com controle amostrado, estendem-se os resultados apresentados em (SEURET, 2012) e no Lema 1.

Assim, o seguinte lema é base para a abordagem por *looped*-funcional utilizado na solução do Problema 2.

Lema 2. *Seja uma PDF $V : \mathbb{R}^n \times \mathcal{B}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaz*

$$\mu_1 \|x\|^2 \leq V(x_k, \sigma_k) \leq \mu_2 \|x\|^2, \quad (46)$$

com escalares $0 < \mu_1 \leq \mu_2$, e um PDLF $\mathcal{V}_0 : [0, \mathcal{T}_2] \times \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n \times \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^N \times [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz para todo $x_k \in \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n$, $\sigma_k \in \mathcal{B}_\sigma$ e $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$

$$\mathcal{V}_0(T_k, x_k(T_k), \sigma_k(T_k), T_k) = \mathcal{V}_0(0, x_k(0), \sigma_k(0), T_k). \quad (47)$$

Defina o funcional $\mathcal{W}(\tau, x_k(\tau), \sigma_k(\tau), T_k) = V(x_k(\tau), \sigma_k(\tau)) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k(\tau), \sigma_k(\tau), T_k)$, e seja $\dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k(\tau), \sigma_k(\tau), T_k)$ a derivada de $\mathcal{W}(\tau, x_k(\tau), \sigma_k(\tau), T_k)$ em relação a τ , ao longo das trajetórias do sistema (45).

Para $\gamma > 0$, se existe um escalar $\mu_3 > 0$, tal que a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k(\tau), \sigma_k(\tau), T_k) + z_k(\tau)' z_k(\tau) - \gamma^2 w_k(\tau)' w_k(\tau) < -\mu_3 \left\| \begin{array}{c} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{array} \right\|^2, \\ \text{para } \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \neq 0, \end{aligned} \quad (48)$$

então:

(i) γ é um limitante superior para o ganho \mathcal{L}_2 do sistema em malha fechada (43)-(44), i.e.

$$\sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0, x(0)=0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \leq \gamma;$$

(ii) se $w(t) \equiv 0$, então:

a) o incremento da função V satisfaz:

$$\Delta V(k) = V(x_{k+1}(0), \sigma_{k+1}(0)) - V(x_k(0), \sigma_k(0)) < -\mathcal{T}_1 \mu_3 \|x_k(0)\|^2,$$

para $x_k(0) \neq 0$;

b) as trajetórias $x(t)$ do sistema em malha fechada (43)-(44) convergem para a origem com $t \rightarrow \infty$.

Demonstração: Integrando (48) em um intervalo de amostragem, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{T_k} \dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) d\tau + \int_0^{T_k} (z_k'(\tau) z_k(\tau) - \gamma^2 w_k'(\tau) w_k(\tau)) d\tau = \\ \mathcal{W}(T_k, x_k, \sigma_k, T_k) - \mathcal{W}_k(0, x_k, \sigma_k, T_k) + \int_0^{T_k} (z_k'(\tau) z_k(\tau) - \gamma^2 w_k'(\tau) w_k(\tau)) d\tau \\ < -\mu_3 \int_0^{T_k} \left\| \begin{array}{c} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{array} \right\|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (49)$$

Lembrando que $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = V(x_k(\tau), \sigma_k(\tau)) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ com \mathcal{V}_0 sendo um PDLF como na Definição 1. A partir de (47), segue que $\mathcal{V}_0(T_k, x_k, \sigma_k, T_k) = \mathcal{V}_0(0, x_k, \sigma_k, T_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que por continuidade $x_k(T_k) = x_{k+1}(0)$ e $\sigma_k(T_k) = \sigma_{k+1}(0)$. Ademais, por definição, $z_k(\tau) = z(t_k + \tau)$ e $w_k(\tau) = w(t_k + \tau)$. Então (49) é equivalente a:

$$\begin{aligned} V(x_{k+1}(0), \sigma_{k+1}(0)) - V(x_k(0), \sigma_k(0)) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (z'(\tau)z(\tau) - \gamma^2 w'(\tau)w(\tau)) d\tau \\ < -\mu_3 \int_0^{T_k} \left\| \begin{matrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{matrix} \right\|^2 d\tau < 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Então, a partir de (50), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^M \left[V(x_{k+1}(0), \sigma_{k+1}(0)) - V(x_k(0), \sigma_k(0)) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (z'(\tau)z(\tau) - \gamma^2 w'(\tau)w(\tau)) d\tau \right] \\ = V(x_{M+1}(0), \sigma_{M+1}(0)) - V(x_0(0), \sigma_0(0)) + \int_{t_0}^{t_{M+1}} (z'(\tau)z(\tau) - \gamma^2 w'(\tau)w(\tau)) d\tau < 0 \end{aligned}$$

Como $V(x, \sigma)$ é uma função definida positiva, considerando condições iniciais nulas, i.e., $x(0) = x_0(0) = 0$, e $M \rightarrow \infty$, (50) implica que

$$\int_0^\infty (z'(\tau)z(\tau) - \gamma^2 w'(\tau)w(\tau)) d\tau < 0,$$

que assegura que

$$\sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0, x(0)=0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \leq \gamma,$$

i.e., o item (i) é válido.

Por outro lado, se $w = 0$ e (48) é verificada, segue que

$$\dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k(\tau), \sigma_k(\tau), T_k) + z_k(\tau)' z_k(\tau) < -\mu_3 \left\| \begin{matrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{matrix} \right\|^2,$$

e portanto,

$$\dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k(\tau), \sigma_k(\tau), T_k) < -\mu_3 \left\| \begin{matrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{matrix} \right\|^2.$$

A partir dos resultados do Lema 1, segue então que o item (ii) é verdadeiro, isto é, conclui-se que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(0) = 0$ e $x_k(\tau) = x(t_k + \tau) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$, ou seja, $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.

□

3.3.3 Condições de Estabilização

A partir dos resultados teóricos do Lema 2 e da representação (45), o seguinte Teorema apresenta condições estabilizantes na forma quasi-LMI para solução do Problema 2. Estas condições são obtidas pela abordagem por *looped*-funcional, para isso considera-se a PDQF $V(\tau, x_k)$ e o PDLF $\mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ definidos em (17) e (19), respectivamente.

Teorema 2. *Se existem matrizes \tilde{P}_j, \tilde{X}_j e $\tilde{F}_j \in \mathbb{S}^n, \tilde{G}_j, \tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tilde{Q}_j \in \mathbb{R}^{3n \times n}, \tilde{K}_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, uma matriz definida positiva $\tilde{R} \in \mathbb{S}^n, j = 0, 1, \dots, N$ e escalares positivos γ e ϵ satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) + \mathcal{T}_r \tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) + \mathcal{T}_r \tilde{\Pi}_3(\nu) & \tilde{\Psi}_2 & \tilde{Z}'(\nu) \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) - \mathcal{T}_r \tilde{\Pi}_3(\nu) & \mathcal{T}_r(\tilde{Q}_0 + \tilde{Q}(\nu, \beta)) & \tilde{\Psi}_2 & \tilde{Z}'(\nu) \\ * & -\mathcal{T}_r \tilde{R} & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (52)$$

$$(\tilde{P}_0 + \tilde{P}(\nu, \beta)) > 0, \quad (53)$$

$\forall(\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta})$ e $\forall r = 1, 2$ com

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) = & \text{He} \left\{ M'_1(\tilde{P}_0 + \tilde{P}(\nu, \beta))M_3 - M'_{12}(\tilde{G}_0 + \tilde{G}(\nu, \beta))M_2 - (\tilde{Q}_0 + \tilde{Q}(\nu, \beta))M_{12} \right. \\ & + (\epsilon M'_1 + M'_3)((A_0 + \mathbf{A}(\nu, \beta))\tilde{Y}M_1 + (B_0 + \mathbf{B}(\nu, \beta))(\tilde{K}_0 + \tilde{K}(\nu))M_2 \\ & \left. - \tilde{Y}M_3) \right\} - M'_{12}(\tilde{F}_0 + \tilde{F}(\nu, \beta))M_{12} + M'_1 \tilde{P}(\eta)M_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) = & M'_3 \tilde{R}M_3 + M'_{12} \tilde{F}(\eta)M_{12} + \text{He} \left\{ M'_3((\tilde{F}_0 + \tilde{F}(\nu, \beta))M_{12} \right. \\ & \left. + (\tilde{G}_0 + \tilde{G}(\nu, \beta))M_2) + M'_{12} \tilde{G}(\eta)M_2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\Psi}_2 = (\epsilon M'_1 + M'_3)B_w,$$

$$\tilde{Z}(\nu) = C_z \tilde{Y}M_1 + D_z(\tilde{K}_0 + \tilde{K}(\nu))M_2,$$

$$\tilde{\Pi}_3(\nu) = M'_2(\tilde{X}_0 + \tilde{X}(\nu))M_2,$$

(54)

com as matrizes auxiliares de dimensões apropriadas definidas em (25) e com a estrutura de matriz definida em (20), então o sinal de controle com a matriz de ganhos

$$K(\sigma(t_k)) = K_0 + \mathbf{K}(\sigma(t_k) \otimes I),$$

com $K_j = \tilde{K}_j \tilde{Y}^{-1}, j = 0, 1, \dots, N$, assegura que:

$$(i) \text{ para } w(t) \neq 0, \quad \sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0, x(0)=0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \leq \gamma;$$

(ii) para $w(t) = 0$, o sistema LPV amostrado em malha fechada (43)-(44) é assintoticamente estável, para qualquer intervalo de amostragem que satisfaz $0 < \mathcal{T}_1 \leq T_k \leq \mathcal{T}_2$.

Demonstração: A demonstração deste teorema consiste em assegurar que as condições propostas no Lema 2 são satisfeitas para a PDQF $V(x_k, \sigma_k)$ e o candidato a PDLF $\mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ definidos em (17) e (19), respectivamente, sendo um processo semelhante à demonstração do Teorema 1. Assim, considerando as escolhas de V e \mathcal{V}_0 que satisfazem (46) e (47), respectivamente, e diferenciando $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = V(x_k, \sigma_k) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ em relação a τ , tem-se (26).

Seja o seguinte vetor $\chi(\tau) = [x'_k(\tau) \ x'_k(0) \ \dot{x}'_k(\tau)]'$ e considerando as matrizes auxiliares definidas em (25), a partir de (26) e (27), segue que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} + z'_k(\tau)z_k(\tau) - \gamma^2 w'_k(\tau)w_k(\tau) &\leq \chi'(\tau)[\hat{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + (T_k - 2\tau)\Pi_3(\sigma_k(0)) \\ &\quad + (T_k - \tau)\Pi_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) \\ &\quad + \tau(Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))R^{-1}(Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))]\chi(\tau) \\ &\quad + \chi'(\tau)Z'(\sigma_k(0))Z(\sigma_k(0))\chi(\tau) - \gamma^2 w'_k(\tau)w_k(\tau), \end{aligned} \quad (55)$$

com $\hat{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau))$, $\Pi_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau))$ e $\Pi_3(\sigma_k(0))$ definidos em (29) e

$$Z(\sigma_k(0)) = C_z M_1 + D_z K(\sigma_k(0)) M_2.$$

Considerando a abordagem por sistema descritor (FRIDMAN; SHAKED, 2002), a partir do sistema amostrado (45), tem-se que

$$\text{He}\{\chi'(\tau)\Theta(\sigma_k(0), \delta_k(\tau))\chi(\tau) + \chi'(\tau)(Y_1 M_1 + Y_2 M_3)' B_w w_k(\tau)\} = 0. \quad (56)$$

para quaisquer matrizes Y_1 e $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com

$$\begin{aligned} \Theta(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)) &= (Y_1 M_1 + Y_2 M_3)' [(A_0 + \mathbf{A}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau))) M_1 \\ &\quad + (B_0 + \mathbf{B}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))(K_0 + \mathbf{K}(\sigma_k(0))) M_2 - M_3]. \end{aligned}$$

Por ser um termo nulo, (56) pode ser adicionada à inequação (55) sem alterá-la. Para isso, considere

$$\Pi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) = \hat{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + \text{He}\{\Theta(\sigma_k(0), \delta_k(\tau))\}. \quad (57)$$

Supondo que Y_2 é não singular, define-se $\tilde{Y} = Y_2^{-1}$ e $Y_1 = \epsilon Y_2$. Assim, considerando $\tilde{\chi}(\tau) = \Xi^{-1}\chi(\tau)$, com $\Xi = \text{diag}\{\tilde{Y}, \tilde{Y}, \tilde{Y}\}$, é possível reescrever (55) como⁴:

$$\dot{\mathcal{W}} + z'_k(\tau)z_k(\tau) - \gamma^2 w'_k(\tau)w_k(\tau) \leq \begin{bmatrix} \Xi^{-1}\chi(\tau) \\ w_k(\tau) \end{bmatrix}' \Gamma(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) \begin{bmatrix} \Xi^{-1}\chi(\tau) \\ w_k(\tau) \end{bmatrix}, \quad (58)$$

com

$$\begin{aligned} \Gamma(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) &= \\ &\begin{bmatrix} \Psi_1(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) + \tau\Psi_3(\sigma_k(0), \delta_k(0)) + \Xi'Z'(\sigma_k(0))Z(\sigma_k(0))\Xi & \Psi_2 \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \Psi_1(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) &= \Xi'(\Pi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + (T_k - \tau)\Pi_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) \\ &\quad + (T_k - 2\tau)\Pi_3(\sigma_k(0)))\Xi, \\ \Psi_2 &= \Xi'(Y_1 M_1 + Y_2 M_3)' B_w, \\ \Psi_3(\sigma_k(0), \delta_k(0)) &= \Xi'(Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))R^{-1}(Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))'\Xi. \end{aligned}$$

⁴Por simplicidade considere $\Gamma(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) = \Gamma(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k)$ e $\Psi_1(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) = \Psi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k)$.

Assim, se $\Gamma(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) < 0$, segue que existe um escalar positivo μ_3 , tal que, (48) é verdadeira, desde que Ξ seja uma matriz não-singular. Portanto, aplicando o complemento de Schur, se a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) & \tau \Xi' Q(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)) \tilde{Y} & \Psi_2 & \Xi' Z'(\sigma_k) \\ * & -\tau \tilde{Y}' R \tilde{Y} & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (59)$$

para todo $\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$, $\delta_k(\tau) \in \mathcal{B}_{\delta_k}$, $\dot{\delta}_k(\tau) \in \mathcal{B}_{\dot{\delta}_k}$, $\tau \in [0, T_k]$ e $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, segue que (48) é verdadeira.

Note que (59) é afim em $\sigma_k(0)$, $\delta_k(\tau)$ e $\dot{\delta}_k(\tau)$. Logo para satisfazer (59) e, conseqüentemente (48), é necessário e suficiente verificar a mesma nos vértices dos politopos \mathcal{B}_σ , \mathcal{B}_{δ_k} e $\mathcal{B}_{\dot{\delta}_k}$. Ou seja, a seguinte inequação deve ser satisfeita:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(\nu, \beta, \eta, \tau, T_k) & \tau \tilde{Q}(\nu, \beta) & \tilde{\Psi}_2 & \tilde{Z}'(\nu) \\ * & -\tau \tilde{R} & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (60)$$

$\forall (\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_{\dot{\delta}_k})$, $\tau \in [0, T_k]$ e $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, com

$$\Psi_1(\nu, \beta, \eta, \tau, T_k) = \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) + (T_k - \tau) \tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) + (T_k - 2\tau) \tilde{\Pi}_3(\nu),$$

em que $\tilde{\Psi}_2$, $\tilde{Z}'(\nu)$, $\tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta)$, $\tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta)$ e $\tilde{\Pi}_3(\nu)$ estão definidos em (54) e com as mudanças de variáveis definidas em (34).

Por argumentos de convexidade, (60) é satisfeita $\forall \tau \in [0, T_k]$ se e somente se

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) + T_k \tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) + T_k \tilde{\Pi}_3(\nu) & \tilde{\Psi}_2 & \tilde{Z}'(\nu) \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (61)$$

e

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) - T_k \tilde{\Pi}_3(\nu) & T_k \tilde{Q}(\nu, \beta) & \tilde{\Psi}_2 & \tilde{Z}'(\nu) \\ * & -T_k \tilde{R} & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (62)$$

Como $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, por argumentos de convexidade segue que se (51) e (52) são verificados para $r = 1, 2$ asseguram-se as desigualdades (61) e (62). Assim, a partir de (61) e (62), tem-se que $\Gamma(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) < 0$, $\forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma$, $\forall \delta_k(\tau) \in \mathcal{B}_{\delta_k}$, $\forall \dot{\delta}_k(\tau) \in \mathcal{B}_{\dot{\delta}_k}$, $\forall \tau \in [0, T_k]$ e $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$. De forma semelhante ao descrito na demonstração do Teorema 1, a quasi-LMI (51) implica que \tilde{Y} é não-singular e, portanto, Ξ admite inversa. Logo, de (51) e (52), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{W} + z_k(\tau)' z_k(\tau) - \gamma^2 w_k(\tau)' w_k(\tau) &\leq \begin{bmatrix} \Xi^{-1} \chi(\tau) \\ w_k(\tau) \end{bmatrix}' \Gamma(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) \begin{bmatrix} \Xi^{-1} \chi(\tau) \\ w_k(\tau) \end{bmatrix} \\ &< -\mu_3 \left\| \begin{bmatrix} \chi(\tau) \\ w_k(\tau) \end{bmatrix} \right\|^2 < -\mu_3 \left\| \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \right\|^2. \end{aligned}$$

A partir do Lema 2, segue a estabilidade do sistema em malha fechada (45) para $w = 0$, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,$$

enquanto que γ é um limitante superior para o ganho \mathcal{L}_2 .

□

Observação 1. *O Teorema 2 apresenta condições estabilizantes para o sistema (43) com a lei de controle (44) e garantia de um limitante superior para o ganho \mathcal{L}_2 . Observe que as matrizes B_w , C_z e D_z do sistema (43) são consideradas constantes. Contudo, os resultados apresentados no Teorema 2 também podem ser estendidos para o caso do sistema (43) com matrizes $B_w(\sigma(t))$, $C_z(\sigma(t))$ e $D_z(\sigma(t))$ dependentes de modo afim nos parâmetros. Para isso, deve-se considerar as matrizes $B_{w_0} + B_w(\nu, \beta)$, $C_{z_0} + C_z(\nu, \beta)$ e $D_{z_0} + D_z(\nu, \beta)$ nas condições do Teorema 2.*

3.3.4 Análise de Estabilidade com Atenuação de Perturbação

Os resultados apresentados no Teorema 2 também podem ser utilizados no problema de análise de estabilidade do sistema LPV com ganho \mathcal{L}_2 . Para isto, basta assumir que as matrizes K_j são conhecidas e determinar nas condições do teorema que $\tilde{K}_j = K_j \tilde{Y}$, $j = 0, 1, \dots, N$. Por outro lado, note que como as matrizes K_j não são variáveis, não há necessidade da transformação de similaridade ou mudança de variáveis e, assim, condições LMIs podem ser obtidas a partir dos resultados e do desenvolvimento apresentado no Teorema 2. Com isso, o seguinte corolário apresenta condições para análise de estabilidade do sistema (43)-(44) enquanto que se assegura que existe um γ tal que

$$\sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0, x(0)=0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \leq \gamma.$$

Corolário 2. *Se existem matrizes P_j , X_j e $F_j \in \mathbb{S}^n$, G_j , Y_1 , $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_j \in \mathbb{R}^{3n \times n}$, $j = 0, 1, \dots, N$, uma matriz simétrica e definida positiva $R \in \mathbb{S}^n$ e um escalar positivo γ satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} \Pi_1(\nu, \beta, \eta) + \mathcal{T}_r \Pi_2(\nu, \beta, \eta) + \mathcal{T}_r \Pi_3(\nu) & \Psi_2 & Z'(\nu) \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (63)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_1(\nu, \beta, \eta) - \mathcal{T}_r \Pi_3(\nu) & \mathcal{T}_r(Q_0 + \mathbf{Q}(\nu, \beta)) & \Psi_2 & Z'(\nu) \\ * & -\mathcal{T}_r R & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (64)$$

$$(P_0 + \mathbf{P}(\nu, \beta)) > 0, \quad (65)$$

$\forall(\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_\delta) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k})$ e $\forall r = 1, 2$ em que ⁵

$$\begin{aligned} \Pi_1(\nu, \beta, \eta) &= \text{He}\{M'_1(P_0 + \mathbf{P}(\nu, \beta))M_3 - M'_{12}(G_0 + \mathbf{G}(\nu, \beta))M_2 - (Q_0 + \mathbf{Q}(\nu, \beta))M_{12} \\ &\quad + (Y'_1M'_1 + Y'_2M'_3)((A_0 + \mathbf{A}(\nu, \beta))M_1 + (B_0 + \mathbf{B}(\nu, \beta))(K_0 + \mathbf{K}(\nu))M_2 \\ &\quad - M_3)\} - M'_{12}(F_0 + \mathbf{F}(\nu, \beta))M_{12} + M'_1\mathbf{P}(\eta)M_1, \\ \Pi_2(\nu, \beta, \eta) &= M'_3RM_3 + M'_{12}\mathbf{F}(\eta)M_{12} + \text{He}\{M'_3((F_0 + \mathbf{F}(\nu, \beta))M_{12} \\ &\quad + (G_0 + \mathbf{G}(\nu, \beta))M_2) + M'_{12}\mathbf{G}(\eta)M_2\}, \\ \Psi_2 &= (Y'_1M'_1 + Y'_2M'_3)B_w, \\ Z(\nu) &= C_zM_1 + D_z(K_0 + \mathbf{K}(\nu))M_2, \\ \Pi_3(\nu) &= M'_2(X_0 + \mathbf{X}(\nu))M_2, \end{aligned}$$

considerando as matrizes auxiliares de dimensões apropriadas definidas em (25), então o sinal de controle com a matriz de ganhos $K(\sigma(t_k)) = K_0 + \mathbf{K}(\sigma(t_k)) \otimes I$, assegura que:

$$(i) \text{ para } w(t) \neq 0, \quad \sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0, x(0)=0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \leq \gamma;$$

(ii) para $w(t) = 0$, o sistema LPV amostrado em malha fechada (43)-(44) é assintoticamente estável, para qualquer intervalo de amostragem que satisfaz $0 < \mathcal{T}_1 \leq T_k \leq \mathcal{T}_2$.

3.3.5 Problemas de Otimização

Baseado nas condições do Teorema 2, nesta seção, são propostos dois problemas de otimização para projeto da lei de controle (44).

Dados os limites do intervalo de amostragem, \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 , o primeiro problema consiste em minimizar o limite superior do ganho \mathcal{L}_2 , o qual pode ser formulado como segue:

$$\begin{aligned} &\min \gamma \\ &\text{sujeito a} \\ &\quad (51) - (53) \\ &\quad \forall(\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_\delta) \text{ e } \forall r = 1, 2. \end{aligned} \tag{66}$$

Note que para um valor fixado de ϵ , as condições (51) e (52) são LMIs nas variáveis $\tilde{P}_j, \tilde{R}, \tilde{X}_j, \tilde{F}_j, \tilde{G}_j, \tilde{Y}, \tilde{Q}_j, \tilde{K}_j$ e γ . Assim, a solução de (66) pode ser obtida solucionando problemas convexos para um grid em ϵ .

Por outro lado, dados \mathcal{T}_1 e γ , outro problema de interesse é projetar K_j , $j = 0, 1, \dots, N$ que maximize \mathcal{T}_2 , tal que, seja assegurada a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada e que o ganho \mathcal{L}_2 seja menor que γ . A solução deste problema pode ser obtida pelo seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\max \mathcal{T}_2 \\ &\text{sujeito a} \\ &\quad (51) - (53) \\ &\quad \forall(\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_\delta) \text{ e } \forall r = 1, 2. \end{aligned} \tag{67}$$

Este problema de otimização pode ser resolvido testando a factibilidade de (67) para um grid em ϵ e \mathcal{T}_2 , i.e., para um dado ϵ , se as LMIs forem factíveis, incrementar iterativamente \mathcal{T}_2 .

⁵Veja a estrutura de matriz definida em (20).

3.3.6 Exemplos Numéricos

3.3.6.1 Exemplo 1

Considere o seguinte sistema LPV:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & 0,4 + 0,6\sigma(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix} w(t), \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\end{aligned}$$

com $|\sigma(t)| \leq 1$, $|\dot{\sigma}(t)| \leq 0,2$, $\mathcal{T}_1 = 1\text{ms}$ e a perturbação \mathcal{L}_2 definida como

$$w(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1\text{s}, \\ e^{-t}\text{sen}(t) & t \geq 1\text{s}. \end{cases}$$

Para o intervalo de amostragem aperiódico com os limites $T_k \in [1; 400]\text{ms}$, a partir de (66), tem-se que o mínimo γ encontrado é 0,3080, com $\epsilon = 2,3$ e as matrizes:

$$K_0 = [-1,2866 \quad -2,5169], \quad K_1 = [0,1149 \quad -0,4978].$$

Considerando γ dado igual a 15, a partir do problema de otimização (67), i.e., maximizar \mathcal{T}_2 , o máximo limite superior do intervalo de amostragem encontrado é $\mathcal{T}_2 = 1349\text{ms}$.

Com o valor máximo de \mathcal{T}_2 encontrado, um segundo problema de otimização é considerado. Resolve-se o problema de otimização (66), i.e., minimiza-se γ . Para $T_k \in [1; 1349]\text{ms}$, o mínimo γ obtido é 6,3007, para $\epsilon = 0,3$, e as matrizes de ganhos são:

$$K_0 = [-0,1508 \quad -0,7422], \quad K_1 = [0,0033 \quad -0,5522].$$

Note a relação entre os valores dos limites do intervalo de amostragem (\mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2) e o valor de γ obtidos a partir dos problemas de otimização da Seção 3.3.5. Para um valor fixo de \mathcal{T}_1 , ao incrementar \mathcal{T}_2 , um limite maior do ganho \mathcal{L}_2 (γ) é obtido, i.e., o tamanho de T_k afeta a performance do sistema, como esperado.

Para ilustrar esta característica, os resultados da simulação para a condição inicial $x(0) = [1 \ 0]'$ e intervalos aperiódicos com $T_k \in [1; 400]\text{ms}$ estão apresentados na Figura 5 em linhas sólidas e com $T_k \in [1; 1349]\text{ms}$ em linhas tracejadas. Nas Figuras 5(a), 5(b), 5(c), 5(d), 5(e) e 5(f), são apresentados os sinais do estado da planta $x(t)$, da entrada de controle $u(t)$, das saídas $z(t)$, do sinal de perturbação $w(t)$, do parâmetro variante $\sigma(t)$ e sua derivada $\dot{\sigma}(t)$ e os instantes de amostragem ($t = t_k$) com seus correspondentes valores de $T_k = t_{k+1} - t_k$, respectivamente. A mesma sequência de valores de parâmetros σ é usada nas duas simulações. Pode-se observar que mesmo com a ação da perturbação na planta e a variação do parâmetro e do intervalo de amostragem, as trajetórias do sistema convergem para a origem como esperado.

Para fins de comparação, sejam as condições em (51)-(52) definidas com um *looped*-funcional independente nos parâmetros. Para $T_k \in [1; 400]\text{ms}$, a solução de (66) leva a $\gamma = 0,3295$, para $\epsilon = 2,27$, e os ganhos de realimentação:

$$K_0 = [-1,2885 \quad -2,5596], \quad K_1 = [0,0353 \quad -0,4462].$$

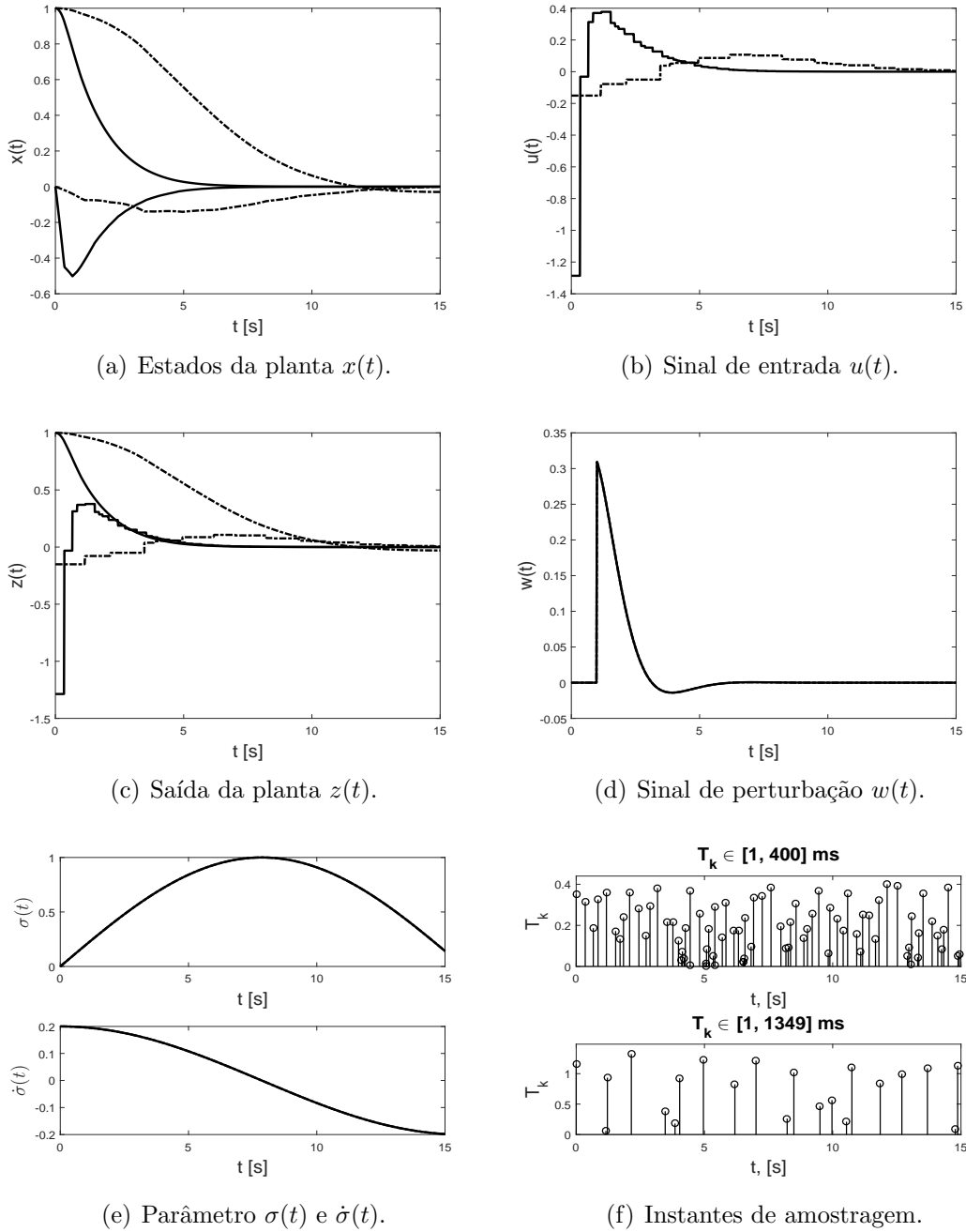


Figura 5: Sinais para $T_k \in [1; 400]$ ms em linha sólida e para $T_k \in [1; 1349]$ ms em linha tracejada, com $x(0) = [1 \ 0]'$.

Assim como anteriormente, a partir do problema de otimização (67), dado γ igual a 15, o máximo limite superior do intervalo de amostragem encontrado é $\mathcal{T}_2 = 1344$ ms. Considerando este valor de \mathcal{T}_2 , a partir de (66), para $\epsilon = 0,3$, tem-se o mínimo $\gamma = 10,0997$ e os ganhos de realimentação:

$$K_0 = [-0,1474 \quad -0,7744], \quad K_1 = [0,0122 \quad -0,4743].$$

Como esperado, observa-se assim que o uso de um *looped*-funcional dependente dos parâmetros permite obter valores maiores de \mathcal{T}_2 e menores de γ . A utilização da dependência de parâmetros apresenta maior impacto nos casos em que T_k é maior, demonstrado pelo valor de γ obtido.

3.3.6.2 Exemplo 2

Considere o exemplo numérico de (DE SOUZA; TROFINO; OLIVEIRA, 2000), no qual o sistema LPV é descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -4,1 - 3\sigma(t) & 1 \\ -2\sigma(t) & 2 - 3,2\sigma(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -0,03 \\ -0,47 \end{bmatrix} w(t), \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \end{aligned}$$

com $|\sigma(t)| \leq 4$, $|\dot{\sigma}(t)| \leq 5$ e $\mathcal{T}_1 = 1\text{ms}$.

Para o intervalo de amostragem $T_k \in [1, 30]\text{ms}$, a partir de (66), tem-se $\gamma = 0,5443$, com $\epsilon = 30$ e as matrizes de ganhos:

$$K_0 = [0,1779 \quad -9,5602], \quad K_1 = [0,7897 \quad 2,1035].$$

Considerando o problema de otimização (67) dado $\gamma = 15$, o máximo limite superior do intervalo de amostragem encontrado é $\mathcal{T}_2 = 63\text{ms}$. Considerando agora este valor de \mathcal{T}_2 , a partir de (66), com $\epsilon = 5$, o mínimo γ obtido é 5,1448 e as matrizes de realimentação são:

$$K_0 = [-0,1648 \quad -5,0828], \quad K_1 = [0,8780 \quad 0,6909]. \quad (68)$$

Tabela 3: Para $T_k \in [1, 60]\text{ms}$, valores mínimos de γ para diferentes casos do *looped*-funcional.

	$ \dot{\sigma}(t) \leq 4$	$ \dot{\sigma}(t) \leq 5$	$ \dot{\sigma}(t) \leq 6$
$P(\sigma), Q(\sigma), F(\sigma), G(\sigma), X(\sigma)$	3,5034	3,5330	3,5630
$P(\sigma), Q, F, G, X$	8,8088	9,0744	9,2330

Para $T_k \in [1, 60]\text{ms}$, resolvendo o problema de otimização (66), a Tabela 3 apresenta os valores mínimos de γ obtidos considerando três diferentes limites de $\dot{\sigma}(t)$ e dois *looped*-funcionais: um *looped*-funcional dependente no parâmetro, como descrito no Teorema 2 e um funcional com apenas a matriz $P(\sigma)$ dependendo do parâmetro como em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2015). Por outro lado, considerando um *looped*-funcional independente do σ , i.e., P, Q, F e G são matrizes independentes de σ , resolvendo o problema de otimização (66), para $\mathcal{T}_2 = 60\text{ms}$, o mínimo γ obtido é 11,117, não dependendo dos valores dos limites de $\dot{\sigma}$. Assim, se os limitantes de σ são conhecidos, nota-se que o uso do *looped*-funcional dependente de parâmetro permite obter valores menores de γ do que nos outros casos, como também observado no Exemplo 1.

Para fins de comparação, utilizam-se os resultados apresentados em (SHI; SU, 2014). A partir de um funcional de Lyapunov-Krasovskii independente de parâmetros, em (SHI; SU, 2014), são propostas condições para projeto de uma lei de controle por realimentação de estados amostrados para sistemas LPV sujeitos à saturação no sinal de entrada. Assim, para $\mathcal{T}_1 = 1\text{ms}$, consideram-se as condições propostas em (SHI; SU, 2014), desconsiderando-se a os efeitos da saturação no sinal de controle. Com isso, o máximo valor de \mathcal{T}_2 obtido é 43ms, com $K_0 = [1,2817 \quad -10,4467]$ e $K_1 = [1,0853 \quad -1,8888]$. A partir da abordagem por PDLF proposto neste trabalho,

com $\epsilon = 3,6$ e γ livre, o máximo \mathcal{T}_2 obtido é 66ms, com $K_0 = [-0,7692 \quad -5,4694]$ e $K_1 = [0,6726 \quad 0,4949]$. A abordagem proposta permite obter um incremento de 53.48% no máximo valor obtido de \mathcal{T}_2 neste exemplo, quando comparada com a proposta em (SHI; SU, 2014).

A partir das matrizes K_0 e K_1 descritas em (68), para $\mathcal{T}_1 = 1\text{ms}$, considere o problema de análise de estabilidade e minimização de γ com as condições definidas no Corolário 2. Na Figura 6, os valores obtidos de γ^{-1} para diferentes valores de \mathcal{T}_2 são mostrados, a partir de condições dependentes de parâmetros (DP) e independente de parâmetros (IP) em linha contínua e tracejada-pontilhada, respectivamente. É possível observar a relação existente entre os valores obtidos de γ e os valores factíveis de \mathcal{T}_2 . Note que quanto maior o valor de \mathcal{T}_2 , o valor obtido de γ é incrementado, isto é, com o aumento do intervalo de amostragem admissível tende a ocorrer maior degradação da rejeição a perturbação. Ademais, a partir das condições de análise de estabilidade DP, obtêm-se melhores resultados em relação a condições IP, isto é, menores valores de γ . Além disso, as condições continuam factíveis para valores maiores de \mathcal{T}_2 no caso DP. Contudo, observe que para valores menores de \mathcal{T}_2 , a melhoria com a utilização do *looped*-funcional DP não é significativa.

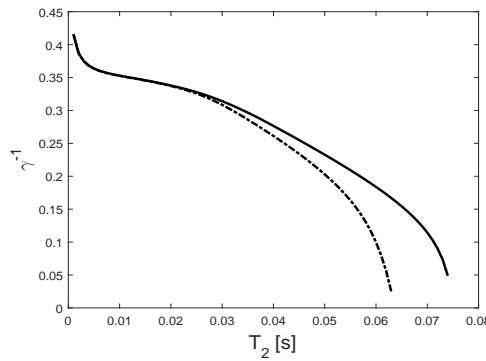


Figura 6: Valores obtidos de γ^{-1} para diferentes valores de \mathcal{T}_2 , com $\mathcal{T}_1 = 1\text{ms}$ e as matrizes de ganhos de realimentação definidas em (68), com o objetivo de minimizar γ , a partir de um funcional DP (linha contínua) e IP (linha tracejada-pontilhada).

3.4 Considerações Finais

Neste capítulo, foram propostas condições para análise de estabilidade e estabilização de sistemas LPV com dados amostrados. Assim, foi proposta uma modelagem politópica que considera os limites de magnitude e de variação do parâmetro. Esta abordagem permite relacionar o valor do parâmetro em tempo contínuo $\sigma(t)$ e amostrado $\sigma(t_k)$ e assim obter resultados menos conservadores do que aqueles que consideram $\sigma(t)$ e $\sigma(t_k)$ variando de forma independente (como em (SHI; SU, 2014) por exemplo). Para considerar os efeitos da amostragem aperiódica, foi proposta uma versão dependente de parâmetros da abordagem por *looped*-funcional, a qual permitiu considerar que o sistema LPV e os parâmetros evoluem continuamente no tempo, enquanto que no controlador, os valores dos estados e dos parâmetros amostrados são mantidos constantes entre dois intervalos de amostragem consecutivos.

Assim, a partir do *looped*-funcional dependente de parâmetro, do conhecimento dos limites de amplitude e de variação do parâmetro, o Lema 1 e o Teorema 1 for-

mulados são a base para o desenvolvimento deste trabalho. Através de um exemplo numérico, puderam ser observadas algumas características da abordagem proposta. Nota-se que quanto maior o limite de taxa de variação do parâmetro, menor é o limite superior factível do intervalo de amostragem, ou seja, quanto mais rápido o parâmetro varia, menores são os valores de \mathcal{T}_2 factíveis. Observa-se também que um funcional com mais matrizes afins no parâmetro permite obter resultados menos conservadores, i.e., maiores \mathcal{T}_2 . Parte dos resultados obtidos e apresentados na Seção 3.2.1 estão publicados em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2015). Neste artigo, o funcional apresenta apenas a matriz $P(\sigma(t))$ afim no parâmetro.

Com base nos resultados do Teorema 1 e do Lema 2, o Teorema 2 proposto apresenta condições para projeto de ganhos de realimentação de estados estabilizantes de sistemas LPV enquanto assegura-se um limite superior γ para o ganho \mathcal{L}_2 entre a perturbação e o sinal de saída. Diferentemente das abordagens que consideram um modelo discreto para o sistema LPV (TAN; GRIGORIADIS, 2000), considera-se que a perturbação é um sinal em tempo contínuo. A partir das condições estabilizantes, foram propostos dois problemas de otimização: minimizar γ dados \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 ; ou maximizar \mathcal{T}_2 , dados \mathcal{T}_1 e γ . Assim, através dos exemplos numéricos, validam-se e observam-se algumas características da abordagem proposta. Notou-se que quanto maior o limite de taxa de variação do parâmetro ou maior o \mathcal{T}_2 , maior é o γ obtido, i.e., maior o limite superior do ganho \mathcal{L}_2 . Além disso, a abordagem utilizando um *looped*-funcional com mais matrizes afins no parâmetro permitiu obter valores menores de γ . Os resultados apresentados na Seção 3.3 estão publicados em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2018)

4 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LPV AMOSTRADOS COM SATURAÇÃO

4.1 Introdução

Diferentemente do modelo (6), neste capítulo considera-se que o sinal de controle está sujeito à saturação. A saturação é uma não-linearidade do tipo dura e, portanto, não pode ser linearizada. A função de saturação considerada é definida como

$$sat_{(i)}(u_{(i)}) = sign(u_{(i)})min\{|u_{(i)}|, \bar{u}_{(i)}\}, \quad (69)$$

para $i = 1, \dots, m$, em que $u \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{u}_{(i)}$ é o limite simétrico do i -ésimo sinal de entrada. Esta função representa as limitações existentes nos elementos do sistema, mais comum nos sensores e nos atuadores, que por questões físicas (construtivas) ou de segurança, não fornecem sinais de amplitude ilimitadas. A saturação, além de degradar o desempenho, é fonte de múltiplos pontos de equilíbrio, ciclo-limites ou de instabilidade (KHALIL, 2002; TARBOURIECH et al., 2011).

Há três abordagens principais para considerar os efeitos da saturação do sinal de controle. A primeira é projetar o controlador considerando explicitamente os limites existentes do sinal de controle (TARBOURIECH et al., 2011; HU; LIN, 2001). A segunda abordagem consiste em utilizar compensadores *anti-windup* (ZACCARIAN; TEEL, 2011), assim, projetam-se controladores para a planta e para tratar do efeito da saturação, são introduzidas realimentações adicionais, de tal forma que se minimize a degradação de desempenho. Estas duas primeiras abordagens são exploradas detalhadamente em (TARBOURIECH et al., 2011). A terceira consiste na estratégia por controle preditivo baseado em modelo ou *model (based) predictive control* (MPC ou MBPC) (veja (CAMACHO; ALBA, 2013; MACIEJOWSKI, 2002) e referências inclusas). Neste caso, consideram-se as restrições do sistema (como a saturação) e critérios de desempenho no projeto da lei de controle. Neste capítulo, a primeira e a terceira abordagem são consideradas.

Para considerar os efeitos da saturação, utiliza-se uma versão dependente de parâmetros da condição de setor generalizada. Como nos resultados apresentados no Capítulo 3, a abordagem proposta é baseada em um modelo politópico que descreve o sistema LPV e em um *looped*-funcional dependente dos parâmetros. Assim, condições *quasi*-LMI são propostas para projeto dos ganhos de realimentação de estados estabilizantes locais e globais. A partir das condições estabilizantes, problemas de otimização são propostos para maximizar uma estimativa da região de atração da origem dados os limites do intervalo de amostragem ou maximizar o limite superior do intervalo de amostragem para um dado conjunto de condições iniciais admissíveis. Assim como no Capítulo 3, é definido que o controlador LPV é atualizado

apenas nos instantes de amostragem e é mantido constante entre duas amostragens consecutivas, enquanto o parâmetro da planta evolui continuamente.

Com base nos resultados obtidos para controle LPV amostrado sujeito a saturação, estendem-se as condições estabilizantes de forma que uma função custo quadrática seja minimizada. A partir disso, um algoritmo que considera a estratégia MPC é proposto com base em (KOTHARE; BALAKRISHNAN; MORARI, 1996). Isto é, a partir de um modelo de predição e das medições do estado e dos parâmetros, uma lei de controle LPV estabilizante é projetada a cada instante de amostragem tal que minimiza-se uma função custo quadrática.

4.2 Estabilização de Sistemas LPV com Saturação de Sinal de Controle e Dados Amostrados

4.2.1 Formulação do Problema

A partir do modelo (6) definido na Seção 3.2.2, considere o seguinte sistema LPV com controle saturante:

$$\dot{x}(t) = A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))\text{sat}(u(t)), \quad (70)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$ representam os vetores de estado e de entrada, respectivamente. A função de saturação é representada por $\text{sat}(u)$, definida em (69), com limite simétrico $\bar{u}_{(i)}$ para o i -ésimo sinal de entrada. O vetor de N parâmetros variantes no tempo $\sigma(t)$ é limitado em magnitude e em taxa de variação como definido em (7). $A(\sigma(t))$ e $B(\sigma(t))$ são matrizes conhecidas e de dimensão apropriada que descrevem o sistema, afim nos parâmetros, definidas como (10).

Da mesma forma que no Capítulo 3, consideram-se uma abordagem por controle com dados amostrados, em que o intervalo de amostragem é dado por $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ e a lei de controle é uma realimentação LPV dos estados amostrados descrita como:

$$u(t) = K(\sigma(t_k))x(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (71)$$

com a matriz de ganhos de realimentação afim no parâmetro amostrado.

Note que o sistema (70) em malha fechada é não-linear. Assim, assumindo que o ponto de equilíbrio do sistema formado por (70)-(71) seja a origem, o conjunto de todas as condições iniciais $x(0) \in \mathbb{R}^n$ tais que as respectivas trajetórias convergem assintoticamente para a origem corresponde à região de atração (\mathcal{R}_a) da mesma (KHALIL, 2002). Se o sistema em malha aberta for assintoticamente estável, é possível a síntese de uma lei de controle saturante, tal que a estabilidade assintótica global da origem seja garantida, i.e., \mathcal{R}_a compreende todo o espaço de estado \mathbb{R}^n . Contudo, se o sistema em malha aberta não for assintoticamente estável, a estabilidade assintótica da origem não pode ser assegurada para todas as condições inicial $x(0)$ pertencentes ao espaço de estados devido à saturação do sinal de controle. Dada a dificuldade de determinar de forma analítica \mathcal{R}_a , um problema de interesse é estabelecer uma estimativa \mathcal{D} desta região tal que $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}_a \subseteq \mathbb{R}^n$, considerando-se o parâmetro variante e amostragem aperiódica.

Assim, considerando um conjunto de condições iniciais admissíveis:

$$\mathcal{E}(X_0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n; x'X_0x \leq 1\}, \quad (72)$$

os seguintes problemas de interesse são enunciados.

Problema 3. Dado um conjunto de condições iniciais admissíveis $\mathcal{E}(X_{0,1})$ e \mathcal{T}_1 , projetar os ganhos de realimentação K_j , $j = 0, 1, \dots, N$ que maximize \mathcal{T}_2 e que garanta que $\forall x(0) \in \mathcal{E}(X_{0,1})$, as trajetórias correspondentes do sistema LPV em malha fechada (70)-(71) convirjam assintoticamente para a origem, $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$.

Problema 4. Dados \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 , projetar os ganhos de realimentação K_j , $j = 0, 1, \dots, N$ que maximizem uma estimativa da região de atração da origem do sistema LPV em malha fechada (70)-(71).

Os Problemas 3 e 4 consideram o contexto de estabilidade regional. Quando possível será considerada a estabilização assintótica global da origem do sistema (70). Neste caso, considerando \mathcal{T}_1 dado, a \mathcal{R}_a é todo o conjunto \mathbb{R}^n e o problema de interesse consiste em calcular o controlador de forma a maximizar \mathcal{T}_2 para o qual a estabilidade global da origem é garantida.

4.2.2 Resultados Preliminares

Nesta seção, são apresentadas algumas ferramentas matemáticas que servem como base para os resultados a serem apresentados neste capítulo. Reescrevendo a função saturação como uma função zona-morta, uma versão dependente de parâmetros da condição de setor generalizada é apresentada. Esta ferramenta permite obter condições menos conservadoras (em relação à condição de setor clássica) e em forma de LMIs (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2005). A partir dos resultados apresentados em (JUNGERS; CASTELAN, 2011) e da PDQP V , alguns resultados são apresentados para considerar os conjuntos de nível associados a esta função levando em consideração os parâmetros variantes.

4.2.2.1 Tratamento da Saturação

A partir da função de saturação, pode-se definir a seguinte função zona-morta:

$$\psi(u) = \psi_k = \text{sat}(K(\sigma(t_k))x(t_k)) - K(\sigma(t_k))x(t_k). \quad (73)$$

Com relação a esta função, o seguinte lema é enunciado. O mesmo pode ser visto como uma versão dependente de parâmetros da condição de setor generalizada (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2005) apresentada no Lema 1.6 de (TARBOURIECH et al., 2011).

Lema 3. *Seja o conjunto*

$$\mathcal{S}(\bar{u}) = \{x \in \mathbb{R}^n; |(K(\sigma(t_k)) - S(\sigma(t_k)))_{(i)}x| \leq \bar{u}_{(i)}, \text{ para } i = 1, \dots, m\}, \quad (74)$$

com a matriz $S(\sigma(t_k)) = S_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}(t_k)S_j$, em que $S_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j = 0, 1, \dots, N$. Se $x(t_k) \in \mathcal{S}(\bar{u})$, então a seguinte desigualdade é satisfeita $\forall U(\sigma(t_k)) \in \mathbb{S}^m$ diagonal e definida positiva

$$\psi_k' U(\sigma(t_k))(\psi_k + S(\sigma(t_k))x(t_k)) \leq 0. \quad (75)$$

4.2.2.2 Função Quadrática Dependente de Parâmetros

Considere uma PDQF $V : \mathbb{R}^n \times \mathcal{B}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ descrita como

$$V(x, \sigma) = x' P(\sigma) x, \quad (76)$$

com a matriz definida positiva $P(\sigma) \in \mathbb{S}^n$, $\forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma$, descrita em (18), isto é,

$$\begin{aligned} P(\sigma) &= P_0 + \mathbf{P}(\sigma \otimes I) = P_0 + \mathbf{P} \left(\sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f \nu_f \otimes I \right) \\ &= \sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f (P_0 + \mathbf{P}(\nu_f \otimes I)) = \sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f (P_0 + \mathbf{P}(\nu_f)) \end{aligned} \quad (77)$$

Para $c > 0$, o conjunto de nível da PDQF (76) é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(c) &= \{x \in \mathbb{R}^n; V(x, \sigma) \leq c, \forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma\} \\ &= \bigcap_{\sigma \in \mathcal{B}_\sigma} \mathcal{E}(P(\sigma), c). \end{aligned} \quad (78)$$

Com base nos resultados em (JUNGERS; CASTELAN, 2011), podem ser enunciados os seguintes lemas.

Lema 4. $x \in \mathcal{L}_V(c)$ se e somente se $x \in \bigcap_{f \in \{1, \dots, 2^N\}} \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_f)), c)$.

Demonstração: A partir da definição de $\mathcal{L}_V(c)$ em (78), segue diretamente que $\bigcap_{\sigma \in \mathcal{B}_\sigma} \mathcal{E}(P(\sigma), c) \subset \bigcap_{f \in \{1, \dots, 2^N\}} \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_f)), c)$.

Por outro lado, se $x \in \bigcap_{f \in \{1, \dots, 2^N\}} \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_f)), c)$, então $x'(P_0 + \mathbf{P}(\nu_f))x \leq c$, $\forall f = 1, \dots, 2^N$ e, como $\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$, segue que

$$\begin{aligned} x' \left[\sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f (P_0 + \mathbf{P}(\nu_f)) \right] x &= x' \left[P_0 + \mathbf{P} \left(\sum_{f=1}^{2^N} \lambda_f \nu_f \otimes I \right) \right] x = x' \left[P_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)} P_j \right] x \\ &= x' P(\sigma) x \leq c, \end{aligned}$$

logo, $x \in \mathcal{L}_V(c)$. □

Lema 5. Seja $\Delta V(k) = x'(t_{k+1})P(\sigma(t_{k+1}))x(t_{k+1}) - x'(t_k)P(\sigma(t_k))x(t_k)$, se

$$\Delta V(k) < -\mu \mathcal{T}_1 \|x_k(0)\|^2, \quad \forall x(t_k) \in \mathcal{D} - \{0\}, \quad (79)$$

ao longo da trajetória do sistema (70)-(71), então para toda condição inicial $x(t_0) \in \mathcal{L}_V(c) \subset \mathcal{D}$, tem-se

(i) $x(t_k) \in \mathcal{L}_V(c)$, $\forall k \geq 0$, i.e., $\mathcal{L}_V(c)$ é um conjunto invariante e contrativo com relação à trajetória discreta (nos instantes de amostragem) do sistema (70)-(71).

(ii) $x(t_k) \rightarrow 0$, para $k \rightarrow \infty$.

Demonstração: Suponha que a condição inicial $x(t_0)$ pertence à fronteira do conjunto $\mathcal{L}_V(c_0)$, i.e., $x'(t_0)P(\sigma(t_0))x(t_0) = c_0$, com $c_0 \leq c$, assim $x(t_0) \in \partial \mathcal{L}_V(c_0) \subseteq \mathcal{L}_V(c)$. A partir de (79), tem-se que

$$x(t_1) \in \partial \mathcal{L}_V(c_1) \subset \mathcal{L}_V(c_0), \quad \text{com } c_1 < c_0.$$

Generalizando, para $k = 1, 2, \dots, \infty$, conclui-se o item (i). Como $\mathcal{L}_V(c)$ é um conjunto compacto, conclui-se o item (ii). □

4.2.3 Abordagem por *Looped-Funcional*

Para obter condições para estabilização do sistema (70) com a lei de controle (71), foca-se no comportamento do sistema entre os instantes de amostragem $[t_k, t_{k+1})$. A partir de (70), (71), (73) e as definições feitas em (11), a dinâmica do sistema durante o intervalo de amostragem, i.e., para $\tau \in [0, T_k]$, é descrita por:

$$\dot{x}_k(\tau) = A(\sigma_k(\tau))x_k(\tau) + B(\sigma_k(\tau))K(\sigma_k(0))x_k(0) + B(\sigma_k(\tau))\psi_k, \quad (80)$$

A partir dos resultados em (SEURET; GOMES DA SILVA Jr., 2012) e do Lema 1 apresentado no Capítulo 3, o Lema a seguir é base para a abordagem por *looped-funcional*, utilizada para assegurar a estabilidade assintótica para sistemas LPV com saturação do sinal de controle amostrado.

Lema 6. *Seja uma PDF $V : \mathbb{R}^n \times \mathcal{B}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaz*

$$\mu_1 \|x\|^2 \leq V(x_k, \sigma_k) \leq \mu_2 \|x\|^2, \quad (81)$$

com $0 < \mu_1 \leq \mu_2$, e um PDLF $\mathcal{V}_0 : [0, \mathcal{T}_2] \times \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n \times \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^N \times [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $\forall x_k \in \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n, \forall \sigma_k \in \mathcal{B}_\sigma$ e $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$

$$\mathcal{V}_0(T_k, x_k(T_k), \sigma_k(T_k), T_k) = \mathcal{V}_0(0, x_k(0), \sigma_k(0), T_k), \quad (82)$$

e uma matriz $S(\sigma_k(0)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$|(K(\sigma_k(0)) - S(\sigma_k(0)))_{(i)}x_k(0)|^2 \leq \bar{u}_{(i)}^2 V(x_k(0), \sigma_k(0)), \quad i = 1, \dots, m. \quad (83)$$

Defina $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = V(x_k(\tau), \sigma_k(\tau)) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$, com $\dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ sendo a derivada de $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ em relação a τ ao longo das trajetórias do sistema em malha fechada (80). Se existe um escalar positivo μ tal que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) - 2\psi_k' U(\sigma_k(0))(\psi_k + S(\sigma_k(0))x_k(0)) \\ < -\mu \left\| \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \right\|^2, \quad \text{para } \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \neq 0 \end{aligned} \quad (84)$$

$\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2], \forall \tau \in [0, T_k], \forall \sigma_k(\tau) \in \mathcal{B}_\sigma$ e $\forall \dot{\sigma}_k(\tau) \in \mathcal{B}_\delta$, então para qualquer condição inicial pertencente ao conjunto:

$$\mathcal{L}_V(1) = \bigcap_{f \in \{1, \dots, 2^N\}} \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_f)), 1), \quad (85)$$

as seguintes declarações são verdadeiras:

(i) o incremento da PDF V nos instantes de amostragem satisfaz:

$$\Delta V(k) < -\mu \mathcal{T}_1 \|x_k(0)\|^2, \quad \forall k \geq 0, \quad \text{para } x_k(0) \neq 0,$$

ao longo das trajetórias do sistema (70)-(71), com

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(x_{k+1}(0), \sigma_{k+1}(0)) - V(x_k(0), \sigma_k(0)) \\ &= V(x(t_{k+1}), \sigma(t_{k+1})) - V(x(t_k), \sigma(t_k)); \end{aligned}$$

(ii) as trajetórias do sistema (70)-(71) com σ satisfazendo (7) convergem para a origem, i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Demonstração: Considere que $x_0(0) \in \mathcal{L}_V(1)$. De (83), segue que

$$|(K(\sigma_0(0)) - S(\sigma_0(0)))_{(i)}x_0(0)| \leq \bar{u}_{(i)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

o que significa que $x_0(0) \in \mathcal{S}(\bar{u})$. Assim, a partir do Lema 3, segue que

$$\psi'_0 U(\sigma_0(0))(\psi_0 + S(\sigma_0(0))x_0(0)) < 0,$$

para qualquer matriz definida positiva e diagonal $U(\sigma_0(0))$.

Como (84) é verdadeira e \mathcal{V}_0 satisfaz (82), integrando (84) no intervalo $[0, T_k]$, tem-se

$$V(x_0(T_k), \sigma_0(T_k)) - V(x_0(0), \sigma_0(0)) < -\mu \mathcal{T}_1 \|x_0(0)\|^2.$$

Como $x(t)$ e $\sigma(t)$ são funções contínuas, segue que $x_0(T_k) = x_1(0)$ e $\sigma_0(T_k) = \sigma_1(0)$, então tem-se $\Delta V(0) < -\mu \mathcal{T}_1 \|x_0(0)\|^2$ e, a partir de (83) e do Lema 3, (75) é verdadeira para $k = 1$.

Repetindo para $k \geq 1$, tem-se que para qualquer $x_0(0) \in \mathcal{L}_V(1)$, segue que $\Delta V(k) < -\mu \mathcal{T}_1 \|x_k(0)\|^2, \forall k \geq 0$, i.e., o item (i) é verdadeiro. Portanto, a partir do Lema 5, $x_k(0) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty, \forall x_0(0) \in \mathcal{L}_V(1)$.

Agora, prova-se que $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Considere uma função contínua $\sigma(t)$ admissível, i.e., $\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$ e $\dot{\sigma} \in \mathcal{B}_\delta \forall t \geq 0$. Como o sistema (70) é variante no tempo, o mesmo admite uma matriz de transição $\phi_\sigma(t, t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Defina $\phi_{\sigma, k}(\tau, 0) = \phi_\sigma(t_k + \tau, t_k)$, com $\tau \in [0, T_k]$, como um limite de $\phi_\sigma(t, t_0)$ no intervalo $[t_k, t_k + \mathcal{T}_2]$. assim, tem-se:

$$x_k(\tau) = \phi_{\sigma, k}(\tau, 0)x_k(0) + \int_0^\tau \phi_{\sigma, k}(\tau, s)B(\sigma_k(s))sat(K(\sigma_k(0))x_k(0))ds.$$

Como $\sigma(t)$ é limitado e contínuo, considerando todas as possíveis funções $\sigma(t) \in \mathcal{B}_\sigma$ com $\dot{\sigma}(t) \in \mathcal{B}_\delta$, existe um escalar positivo μ_m tal que

$$\|\phi_{\sigma, k}(\tau, 0)\| + \left\| \int_0^\tau \phi_{\sigma, k}(\tau, s)B(\sigma_k(\tau))ds \right\| \|K(\sigma_k(0))\| \leq \mu_m, \forall k > 0.$$

Consequentemente, da mesma forma que no Lema 1, conclui-se que $\|x_k(\tau)\| \leq \mu_m \|x_k(0)\|$. Então, como $x_k(0) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$, segue que $x_k(\tau) = x(t_k + \tau) \rightarrow 0$ com $k \rightarrow \infty$, logo, $x(t) \rightarrow 0$, com $t \rightarrow \infty$ e o item (ii) é verdadeiro. □

4.2.4 Condições de Estabilização

A partir dos Problemas 3 e 4 e do Lema 6, o seguinte teorema apresenta condições *quasi*-LMIs para o projeto de ganhos estabilizantes para o sistema em malha fechada (70)-(71). Para isso, considere a PDQF $V(x_k, \sigma_k)$ definida em (76) e o candidato a *looped*-funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = & (T_k - \tau) \left\{ \int_0^\tau \dot{x}'_k(\theta) R \dot{x}_k(\theta) d\theta + (x_k(\tau) - x_k(0))' [2G(\sigma_k(\tau))x_k(0) \right. \\ & \left. + F(\sigma_k(\tau))(x_k(\tau) - x_k(0))] + \tau \begin{bmatrix} x_k(0) \\ \psi_k \end{bmatrix}' X(\sigma_k(0)) \begin{bmatrix} x_k(0) \\ \psi_k \end{bmatrix} \right\}, \quad (86) \end{aligned}$$

em que $F(\sigma_k(\tau))$ e $R \in \mathbb{S}^n$, $X(\sigma_k(0)) \in \mathbb{S}^{(n+m)}$, $G(\sigma_k(\tau)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $R = R' > 0$. Note que V e \mathcal{V}_0 satisfazem as condições (81) e (82) no Lema 6, respectivamente.

Teorema 3. *Se existem matrizes simétricas $\tilde{P}_j, \tilde{F}_j \in \mathbb{S}^n$, $\tilde{X}_j \in \mathbb{S}^{(n+m)}$, uma matriz simétrica e positiva definida $\tilde{R} \in \mathbb{S}^n$, matrizes diagonais $\tilde{U}_j \in \mathbb{S}^m$, matrizes \tilde{G}_j , $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{Q}_j \in \mathbb{R}^{(3n+m) \times n}$, $\tilde{S}_j, \tilde{K}_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j = 0, 1, \dots, N$, e um escalar positivo ϵ satisfazendo*

$$\tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) + \mathcal{T}_r \tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) + \mathcal{T}_r \tilde{\Pi}_3(\nu) < 0, \quad (87)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) - \mathcal{T}_r \tilde{\Pi}_3(\nu) & \mathcal{T}_r(\tilde{Q}_0 + \tilde{Q}(\nu, \beta)) \\ * & -\mathcal{T}_r \tilde{R} \end{bmatrix} < 0, \quad (88)$$

$$(\tilde{P}_0 + \tilde{P}(\nu, \beta)) > 0, \quad (89)$$

$$(\tilde{U}_0 + \tilde{U}(\nu)) > 0, \quad (90)$$

$$\begin{bmatrix} (\tilde{P}_0 + \tilde{P}(\nu)) & ((\tilde{K}_0 + \tilde{K}(\nu)) - (\tilde{S}_0 + \tilde{S}(\nu)))'_{(i)} \\ * & \tilde{u}_{(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad (91)$$

$\forall (\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta}), \forall i = 1, \dots, m$ e $\forall r = 1, 2$, com¹

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) &= \text{He}\{M'_1(\tilde{P}_0 + \tilde{P}(\nu, \beta))M_3 - M'_{12}(\tilde{G}_0 + \tilde{G}(\nu, \beta))M_2 + (\tilde{Q}_0 + \tilde{Q}(\nu, \beta))M_{12} \\ &\quad + (\epsilon M'_1 + M'_3)((A_0 + \mathbf{A}(\nu, \beta))\tilde{Y}M_1 + (B_0 + \mathbf{B}(\nu, \beta))(\tilde{K}_0 + \tilde{K}(\nu))M_2 \\ &\quad - \tilde{Y}M_3 + (B_0 + \mathbf{B}(\nu, \beta))(\tilde{U}_0 + \tilde{U}(\nu))M_4) - M'_4(\tilde{S}_0 + \tilde{S}(\nu))M_2\} \\ &\quad - M'_{12}(\tilde{F}_0 + \tilde{F}(\nu, \beta))M_{12} + M'_1\tilde{P}(\eta)M_1 - 2M'_4(\tilde{U}_0 + \tilde{U}(\nu))M_4, \\ \tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) &= \text{He}\{M'_3((\tilde{G}_0 + \tilde{G}(\nu, \beta))M_2 + (\tilde{F}_0 + \tilde{F}(\nu, \beta))M_{12}) + M'_{12}\tilde{G}(\eta)M_2\} \\ &\quad + M'_3\tilde{R}M_3 + M'_{12}\tilde{F}(\eta)M_{12}, \\ \tilde{\Pi}_3(\nu) &= M'_{24}(\tilde{X}_0 + \tilde{X}(\nu))M_{24}, \end{aligned} \quad (92)$$

com as matrizes auxiliares

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \\ M_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad M_{12} = M_1 - M_2, \quad M_{24} = [M'_2 \quad M'_4]', \end{aligned} \quad (93)$$

então o sinal de controle amostrado (71) sujeito a saturação com a matriz de ganhos

$$K(\sigma(t_k)) = K_0 + \mathbf{K}(\sigma(t_k) \otimes I),$$

em que $K_j = \tilde{K}_j \tilde{Y}^{-1}$, assegura que $\forall x(0) \in \mathcal{L}_V(1)$ com $P_j = \tilde{Y}^{-1} \tilde{P}_j \tilde{Y}^{-1}$, $j = 0, 1, \dots, N$, as correspondentes trajetórias do sistema LPV amostrado em malha fechada (70)-(71) com σ satisfazendo (7) convergem assintoticamente para a origem, para qualquer intervalo de amostragem satisfazendo $0 < \mathcal{T}_1 \leq T_k \leq \mathcal{T}_2$.

Demonstração: Considere a PDQF $V(x_k, \sigma_k)$ e $\mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ definidos em (76) e (86) que satisfazem as condições (81) e (82) no Lema 6, respectivamente. Derivando

$$\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = V(x_k(\tau), \sigma_k(\tau)) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$$

¹Observe a definição da estrutura das matrizes em (20).

em relação a τ tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} = & 2\dot{x}'_k(\tau)P(\sigma_k(\tau))x_k(\tau) + x'_k(\tau)\dot{P}(\sigma_k(\tau))x_k(\tau) - (x_k(\tau) - x_k(0))'[2G(\sigma_k(\tau))x_k(0) \\ & + F(\sigma_k(\tau))(x_k(\tau) - x_k(0))] + (T_k - \tau)[2\dot{x}'_k(\tau)F(\sigma_k(\tau))(x_k(\tau) - x_k(0)) + (x_k(\tau) \\ & - x_k(0))'\dot{F}(\sigma_k(\tau))(x_k(\tau) - x_k(0)) + 2\dot{x}'_k(\tau)G(\sigma_k(\tau))x_k(0) + 2x_k(0)'\dot{G}(\sigma_k(\tau)) \\ & (x_k(\tau) - x_k(0))] + (T_k - 2\tau) \begin{bmatrix} x_k(0) \\ \psi_k \end{bmatrix}' X(\sigma_k(0)) \begin{bmatrix} x_k(0) \\ \psi_k \end{bmatrix} \\ & + (T_k - \tau)\dot{x}'_k(\tau)R\dot{x}_k(\tau) - \int_0^\tau \dot{x}'_k(\theta)R\dot{x}_k(\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (94)$$

Considere uma matriz $Q(\sigma_k(\tau)) \in \mathbb{R}^{(3n+m) \times n}$, em que

$$Q(\sigma_k(\tau)) = Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)) = Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0) \otimes I + \delta_k(\tau) \otimes I),$$

com $Q_j \in \mathbb{R}^{(3n+m) \times n}$, para $j = 0, 1, \dots, N$, definindo

$$\chi(\tau) = [x'_k(\tau) \quad x'_k(0) \quad \dot{x}'_k(\tau) \quad \psi'_k]'$$

e usando as matrizes auxiliares (93), a partir de (94), (84) e da inequação (27), resulta que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} - 2\psi'_k U(\sigma_k(0))(\psi_k + S(\sigma_k(0))x_k(0)) \leq & \chi'(\tau)[\hat{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) \\ & + (T_k - \tau)\Pi_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + (T_k - 2\tau)\Pi_3(\sigma_k(0)) \\ & + \tau(Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))R^{-1}(Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))']\chi(\tau) \end{aligned} \quad (95)$$

com

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) = & \text{He}\{M'_3(P_0 + \mathbf{P}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_1 - M'_4U(\sigma_k(0)) \\ & (S_0 + \mathbf{S}(\sigma_k(0)))M_2 - (Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_{12} \\ & - M'_{12}(G_0 + \mathbf{G}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_2\} - 2M'_4U(\sigma_k(0))M_4 \\ & + M'_1\mathbf{P}(\dot{\delta}_k(\tau))M_1 - M'_{12}(F_0 + \mathbf{F}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_{12}, \quad (96) \\ \Pi_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) = & \text{He}\{M'_3(F_0 + \mathbf{F}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_{12} + M'_{12}\mathbf{G}(\dot{\delta}_k(\tau))M_2 \\ & + M'_3(G_0 + \mathbf{G}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))M_2\} + M'_{12}\mathbf{F}(\dot{\delta}_k(\tau))M_{12} \\ & + M'_3RM_3, \\ \Pi_3(\sigma_k(0)) = & M'_{24}X(\sigma_k(0))M_{24}. \end{aligned}$$

Por outro lado, de (80), resulta que

$$\begin{aligned} (Y_1x_k(\tau) + Y_2\dot{x}_k(\tau))'[(A_0 + \mathbf{A}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))x_k(\tau) + (B_0 + \mathbf{B}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))\psi_k \\ + (B_0 + \mathbf{B}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))(K_0 + \mathbf{K}(\sigma_k(0)))x_k(0) - \dot{x}_k(\tau)] = 0, \end{aligned}$$

para quaisquer matrizes Y_1 e $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Defina:

$$\Pi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) = \hat{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + \text{He}\{\Theta(\sigma_k(0), \delta_k(\tau))\}, \quad (97)$$

$\forall(\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_j})$, em que $\tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta)$, $\tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta)$ e $\tilde{\Pi}_3(\nu)$ são definidos em (92) e com as mudanças de variáveis definidas em (34) e

$$\begin{aligned} \tilde{S}_j &= S_j \tilde{Y}, \\ \tilde{X}(\sigma_k(0)) &= \tilde{X}_0 + \tilde{\mathbf{X}}(\sigma_k(0)) = \tilde{X}_0 + \tilde{\mathbf{X}}(\sigma_k(0) \otimes I) \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{Y} & 0 \\ 0 & \tilde{U}(\sigma_k(0)) \end{bmatrix}' X(\sigma_k(0)) \begin{bmatrix} \tilde{Y} & 0 \\ 0 & \tilde{U}(\sigma_k(0)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (101)$$

para $j = 0, 1, \dots, N$. Levando em conta $\tau \in [0, T_k]$ e $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, por argumentos de convexidade, segue que (87) e (88) asseguram que (99) é satisfeita. Assim como descrito na prova do Teorema 1, de (88) e de (90), segue que \tilde{Y} e $\tilde{U}(\sigma(t_k))$ são matrizes não-singulares e, conseqüentemente, Ξ admite inversa. Portanto, a condição (84) do Lema 6 é de fato satisfeita.

Pré e pós-multiplicando a condição (91) por $diag\{\tilde{Y}^{-1}, I\}$, considerando argumentos de convexidade e aplicando o complemento de Schur, tem-se que (83) é satisfeita, o que implica que $x_k(0) \in \mathcal{S}(\bar{u})$ se $x_k(0) \in \mathcal{L}_V(1)$. Ademais, (88) assegura que $P(\sigma(t)) > 0 \forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma$. Assim, segue que as quasi-LMIs (87)-(91) implicam que as condições (83) e (84) no Lema 6 são satisfeitas, i.e., para qualquer $x_0(0) \in \mathcal{L}_V(1)$, segue que $\Delta V(k) < -\mu \mathcal{T}_1 \|x_k(0)\|^2$ e $x_k(0) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, $x_k(\tau) \rightarrow 0$ com $k \rightarrow \infty$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. □

4.2.5 Extensões

4.2.5.1 Caso Global

Considere a matriz de transição de estados $\phi_\sigma(t, t_0)$ como descrita na prova do Lema 6, em que $x(t) = \phi_\sigma(t, t_0)x(t_0)$, se existem constantes positivas b e c tais que²

$$\|\phi_\sigma(t, t_0)\| \leq b e^{-c(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

então, o sistema em malha aberta é globalmente assintoticamente estável e condições similares para garantir a estabilidade global da origem podem ser escritas. Neste caso, a condição de setor deve ser satisfeita globalmente, i.e., para qualquer matriz diagonal e definida positiva $U(\sigma(t_k)) \in \mathbb{S}^m$ a seguinte desigualdade é satisfeita $\forall x(t_k) \in \mathbb{R}^n$ (TARBOURIECH et al., 2011):

$$\psi_k' U(\sigma(t_k)) (\psi_k + K(\sigma(t_k))x(t_k)) \leq 0.$$

Assim, o seguinte Corolário apresenta condições para estabilização assintótica global da origem do sistema (70)-(71).

Corolário 3. *Se existem matrizes $\tilde{P}_j, \tilde{F}_j \in \mathbb{S}^n$, $\tilde{X}_j \in \mathbb{S}^{n+m}$, $\tilde{G}_j, \tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{Q}_j \in \mathbb{R}^{(3n+m) \times n}$, $\tilde{K}_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, uma matriz simétrica e definida positiva $\tilde{R} \in \mathbb{S}^n$, matrizes diagonais definidas positivas $\tilde{U}_j \in \mathbb{S}^m$, com $j = 0, 1, \dots, N$ e um escalar positivo ϵ satisfazendo as inequações (87)-(90), para todo $(\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_j})$ e $r = 1, 2$, com $\tilde{S}(\nu) = \tilde{K}(\nu)$, então a origem do sistema (70) com a lei de controle (71) com $K(\sigma(t_k)) = K_0 + \mathbf{K}(\sigma(t_k) \otimes I)$, no qual $K_j = \tilde{K}_j \tilde{Y}^{-1}$, $j = 0, 1, \dots, N$, é globalmente assintoticamente estável.*

²Para mais detalhes veja Teorema 4.11 em (KHALIL, 2002).

4.2.5.2 Análise de Estabilidade

As condições propostas no Teorema 3 e no Corolário 3 também podem ser utilizadas para analisar a estabilidade assintótica local ou global da origem do sistema (70)-(71), respectivamente. Neste caso, basta considerar que as matrizes K_j são conhecidas e, portanto, que as matrizes variáveis \tilde{K}_j nas condições quasi-LMI são na forma $K_j\tilde{Y}$.

4.2.6 Problemas de Otimização

Note que o conjunto $\mathcal{L}_V(1)$ obtido pela satisfação das condições do Teorema 3 é por definição incluso em \mathcal{R}_a e pode ser usado como uma estimativa da região de atração da origem. Assim, a partir das desigualdades no Teorema 3, nesta seção são propostos problemas de otimização baseados em LMIs para resolver os Problemas 3 e 4. Para tanto, de forma similar ao apresentado em (SEURET; GOMES DA SILVA Jr., 2012), considera-se o seguinte Lema.

Lema 7. *Sejam $P(\sigma)$ e X_0 matrizes definidas positivas $\forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma$ e $\tilde{P}(\sigma) = \tilde{Y}'P(\sigma)\tilde{Y}$, com \tilde{Y} sendo uma matriz não-singular. Então se*

$$\begin{bmatrix} X_0 & I \\ I & \tilde{Y} + \tilde{Y}' - \tilde{P}(\sigma) \end{bmatrix} > 0, \quad (102)$$

é satisfeita $\forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma$, segue que $P(\sigma) < X_0$.

Demonstração: Se $P(\sigma) > 0$ para todo $\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$, segue que

$$(P(\sigma)^{-1} - \tilde{Y})'P(\sigma)(P(\sigma)^{-1} - \tilde{Y}) > 0.$$

Logo, $P(\sigma) < (\tilde{Y} + \tilde{Y}' - \tilde{Y}'P(\sigma)\tilde{Y})^{-1}$. Assim, a partir de (102), assegura-se que $P(\sigma) < (\tilde{Y} + \tilde{Y}' - \tilde{Y}'P(\sigma)\tilde{Y})^{-1} < X_0$ e, portanto, $P(\sigma) < X_0$. □

4.2.6.1 Maximização do Intervalo de Amostragem

A partir do Problema 3, dado \mathcal{T}_1 , deseja-se projetar os ganhos de realimentação K_j , $j = 0, 1, \dots, N$, com objetivo de maximizar \mathcal{T}_2 , para o qual as respectivas trajetórias do sistema LPV (70)-(71) convirjam assintoticamente para a origem, para qualquer condição inicial pertencente a $\mathcal{E}(X_0, 1)$. Isto pode ser obtido através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \max \quad \mathcal{T}_2 \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} X_0 & I \\ I & \tilde{Y}' + \tilde{Y} - (\tilde{P}_0 + \tilde{\mathbf{P}}(\nu)) \end{bmatrix} > 0, \\ & (87) - (91), \\ & \forall (\nu, \beta, \eta) \in \text{Ver}(\mathcal{B}_\sigma) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_{\delta_j}), \forall i = 1, \dots, m \text{ e } \forall r = 1, 2. \end{aligned} \quad (103)$$

A partir do Lema 7, a primeira inequação do problema (103) assegura que $X_0 > (P_0 + \mathbf{P}(\nu_f))$, $\forall f = 1, \dots, 2^N$, i.e.,

$$\mathcal{E}(X_0, 1) \subset \bigcap_{f=1, \dots, 2^N} \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_f)), 1) = \mathcal{L}_V(1).$$

Por outro lado, pode-se considerar o problema (103) em um contexto global, i.e., dado \mathcal{T}_1 , projetar (71) tal que \mathcal{T}_2 seja maximizado de forma que para todas as condições iniciais pertencentes ao espaço de estados, as correspondentes trajetórias do sistema em malha fechada (70)-(71) convirjam assintoticamente para a origem. Isto pode ser obtido pelo seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \max \quad \mathcal{T}_2 \\ & \text{sujeito a} \\ & \quad (87) - (90), \\ & \quad \forall(\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta}), \forall i = 1, \dots, m \text{ e } \forall r = 1, 2, \end{aligned} \quad (104)$$

com $\tilde{S}_j = \tilde{K}_j$ para $j = 0, 1, \dots, N$.

4.2.6.2 Maximização da Estimativa da Região de Atração da Origem

A partir do Problema 4, dados \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 , o objetivo é projetar ganhos de realimentação tais que uma estimativa da \mathcal{R}_a seja maximizada considerando algum critério de tamanho ou forma. Como o conjunto $\mathcal{L}_V(1)$ obtido pela satisfação das condições no Teorema 3 é uma estimativa da \mathcal{R}_a , pode-se por exemplo considerar o objetivo de maximização do menor eixo de $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu)), 1) \forall \nu \in Ver(\mathcal{B}_\sigma)$, o que equivale a minimizar o máximo autovalor de $(P_0 + \mathbf{P}(\nu))$. Isto pode ser obtido através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min \quad \alpha \\ & \text{sujeito a} \\ & \quad \begin{bmatrix} \alpha I & I \\ I & \tilde{Y}' + \tilde{Y} - (\tilde{P}_0 + \tilde{\mathbf{P}}(\nu)) \end{bmatrix} > 0, \\ & \quad (87) - (91), \\ & \quad \forall(\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta}), \forall i = 1, \dots, m \text{ e } \forall r = 1, 2. \end{aligned} \quad (105)$$

A partir do Lema 7, note que a primeira inequação de (105) garante que

$$(P_0 + \mathbf{P}(\nu)) < \alpha I,$$

assim (105) equivale à incluir o maior conjunto $\mathcal{E}(\alpha I, 1)$ factível em $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu)), 1) \forall \nu \in Ver(\mathcal{B}_\sigma)$.

Observação 2. Note que as condições quasi-LMIs propostas (87)-(91) são LMIs para um escalar fixo ϵ e dados os limites \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 do intervalo de amostragem. Assim, os problemas de otimização desta seção podem ser resolvidos em um grid em ϵ e \mathcal{T}_2 , i.e., para um dado ϵ , se as LMIs forem factíveis, incrementar iterativamente \mathcal{T}_2 .

4.2.7 Exemplo Numérico

Considere o sistema LPV utilizado como exemplo na Seção 3.2.7 sujeito à saturação do sinal de controle:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & 0,4 + 0,6\sigma(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} sat(u(t)),$$

com $|\sigma(t)| \leq 1$, $|\dot{\sigma}(t)| \leq 0,2$, $\bar{u} = 1$ e $\mathcal{T}_1 = 1\text{ms}$.

A partir do problema (103) com $X_0 = 1,5I$, quatro casos são considerados a fim de analisar a influência das variáveis matriciais dependentes de parâmetro, ou

seja, considera-se o funcional \mathcal{W} com matrizes dependentes de parâmetros (DP) e independentes de parâmetros (IP). Além disso, consideram-se o controle robusto e LPV, i.e., as matrizes de realimentação de estado são IP e DP, respectivamente. Na Tabela 4, apresentam-se os máximos valores factíveis de \mathcal{T}_2 obtidos para os quatro casos. Note que, quanto mais matrizes com dependência no parâmetro nas condições, os resultados obtidos são melhores, i.e., obtém-se um valor factível de \mathcal{T}_2 maior, ao custo de se aumentar o número de variáveis no problema.

Tabela 4: Máximo \mathcal{T}_2 obtido considerando $\mathcal{E}(X_0,1) = 1,5I$ e $\mathcal{T}_1 = 1$ ms.

\mathcal{W}	K	\mathcal{T}_2 [ms]
DP	DP	988
IP	DP	968
DP	IP	953
IP	IP	928

Considerando o funcional dependente de parâmetro, os seguintes casos são apresentados: caso (a) com $T_k \in [1; 20]$ ms e o caso (b) com $T_k \in [1; 988]$ ms. Os valores das matrizes K_j e P_j para $j = 0,1$ para cada caso estão descritos na Tabela 5.

Tabela 5: Matrizes K e P para os casos (a) e (b).

Caso (a)		Caso (b)	
$T_k \in [1, 20]$ ms		$T_k \in [1, 988]$ ms	
$K_0 =$	$\begin{bmatrix} -0,2370 & -1,7929 \\ 0,0228 & -0,3466 \end{bmatrix}$	$K_0 =$	$\begin{bmatrix} -0,1299 & -0,9125 \\ 0,0166 & -0,2799 \end{bmatrix}$
$K_1 =$	$\begin{bmatrix} 0,0197 & 0,1086 \\ 0,1086 & 1,2018 \end{bmatrix}$	$K_1 =$	$\begin{bmatrix} 0,0232 & 0,1235 \\ 0,1235 & 1,4305 \end{bmatrix}$
$P_0 =$	$\begin{bmatrix} -0,0017 & -0,0016 \\ -0,0016 & 0,0042 \end{bmatrix}$	$P_0 =$	$\begin{bmatrix} 0,0010 & 0,0007 \\ 0,0007 & -0,0002 \end{bmatrix}$
$P_1 =$	$\begin{bmatrix} -0,0017 & -0,0016 \\ -0,0016 & 0,0042 \end{bmatrix}$	$P_1 =$	$\begin{bmatrix} 0,0010 & 0,0007 \\ 0,0007 & -0,0002 \end{bmatrix}$

A partir dos dados na Tabela 5, na Figura 7, apresentam-se os conjuntos $\mathcal{E}(X_0,1)$ (em linha sólida), $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_1)),1)$ (em linha pontilhada) e $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_2)),1)$ (em linha tracejada) para os casos com $T_k \in [1; 20]$ ms e $T_k \in [1; 988]$ ms. Para os casos (a) e (b), verifica-se que $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_1)),1) \subset \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_2)),1)$, então $\mathcal{L}_V(1) = \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_1)),1) = \mathcal{E}(P_0 + \bar{\sigma}P_1,1)$. Observe que para o caso (b) ($T_k \in [1; 988]$ ms), as fronteiras do conjunto quase se sobrepõem e se obtém um conjunto $\mathcal{L}_V(1)$ menor em relação ao obtido para $T_k \in [1; 20]$ ms. Para $T_k \in [1; 988]$ ms, na Figura 8, apresentam-se os conjuntos $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_1)),1)$ (em linha pontilhada) e $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_2)),1)$ (em linha tracejada). Além disso, são mostradas que as trajetórias do sistema em malha fechada para condições iniciais na fronteira do conjunto $\mathcal{L}_V(1)$ convergem para a origem (em linha preta), como esperado. Por outro lado, para condições iniciais não muito distantes da fronteira do conjunto $\mathcal{L}_V(1)$, trajetórias divergentes (em linha vermelha) são obtidas.

Na Figura 9, para a condição inicial $x(0) = [8,55 \quad -0,63]'$ pertencente a $\mathcal{L}_V(1)$, apresentam-se as evoluções do estado $x(t)$, do sinal de controle $u(t)$ e do parâmetro $\sigma(t)$, para $T_k \in [1; 20]$ ms e $T_k \in [1; 988]$ ms em linhas contínuas e pontilhadas,

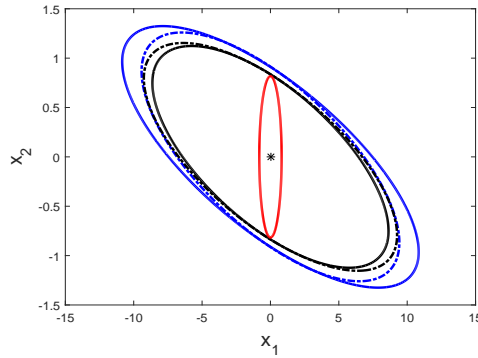


Figura 7: Conjuntos $\mathcal{E}(X_0,1)$ (linha s3lida vermelha), $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_1)),1)$ (linha pontilhada) e $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_2)),1)$ (linha tracejada) para os casos (a) (em azul) e (b) (em preto).

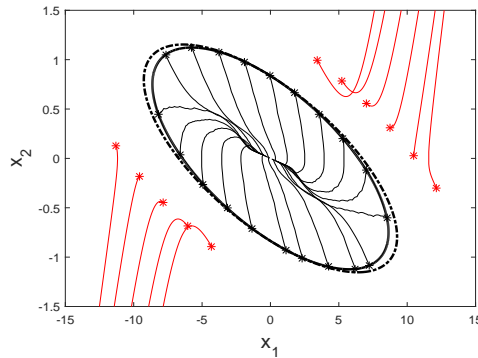


Figura 8: Conjuntos $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_1)),1)$ (linha pontilhada) e $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_2)),1)$ (linha tracejada) e algumas trajet3rias para $T_k \in [1; 988]$ ms.

respectivamente. A mesma seq3ncia do parâmetro variante $\sigma(t)$ é usada em todas as simula33es. Os instantes de amostragem $t = t_k$ obtidos de forma rand3mica e seus respectivos intervalos de amostragem $T_k = t_{k+1} - t_k$ est3o apresentados na Figura 9(d), para $t \in [0, 1]$ s. Observe que valores maiores de \mathcal{T}_2 influenciam na dinâmica do sistema, contudo a estabilidade assint3tica da origem continua assegurada para $x(0) \in \mathcal{L}_V$. Note que para as condi33es propostas, o sinal de controle efetivamente satura, como visto na Figura 9(b) para o caso (a), ou seja, para $T_k \in [1; 20]$ ms.

Agora, considere as matrizes $K_0 = [-0,1299 \quad -0,9125]$ e $K_1 = [0,0166 \quad -0,2799]$ (descritas na Tabela 5), $\mathcal{T}_1 = 1$ ms, e as condi33es para an3lise de estabilidade no problema de otimiza33o (105). Ou seja, o objetivo é maximizar o eixo de $\mathcal{E}(\alpha I,1)$ tal que $\mathcal{E}(\alpha I,1) \subseteq \mathcal{E}(P(\sigma),1)$ para todo $\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$. Assim, na Figura 10, os valores obtidos de α^{-1} para diferentes valores de \mathcal{T}_2 s3o mostrados. É poss3vel observar a rela33o existente entre os valores obtidos de α e os valores fact3veis de \mathcal{T}_2 . Note que quanto maior o valor de \mathcal{T}_2 , maior é o valor de α e, conseq3entemente, menor é o eixo de $\mathcal{E}(\alpha I,1)$.

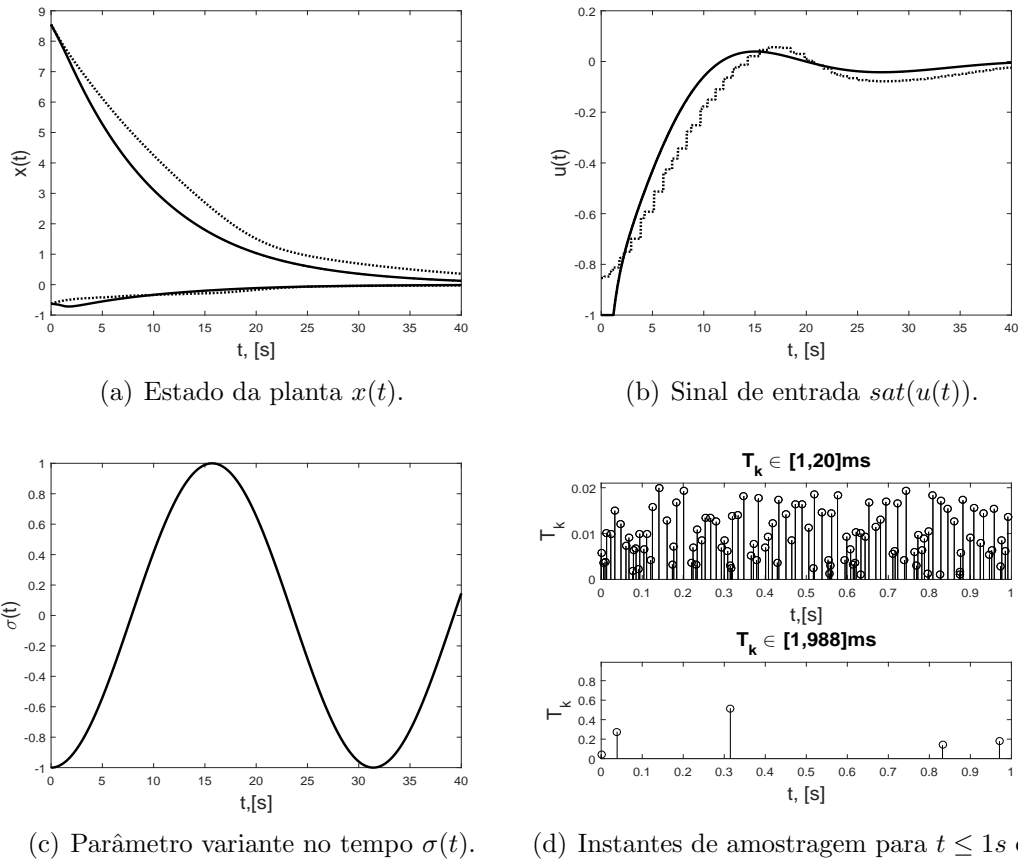


Figura 9: Para $x(0) = [8,55 \quad -0,63]'$, evolução de $x(t)$, $u(t)$, $\sigma(t)$ e valores de T_k , para os casos (a) $T_k \in [1, 20]ms$ (em linha sólida) e (b) $T_k \in [1, 988]ms$ (em linha pontilhada).

4.3 Estratégia LPV-MPC com Dados Amostrados

Por tratar restrições no sistema, como o sinal de entrada estar sujeito a saturação, e por considerar critérios de desempenho, a estratégia MPC tem recebido bastante atenção da comunidade de controle nos últimos anos, tanto no desenvolvimento teórico como em aplicações práticas. Esta abordagem consiste basicamente em resolver *on-line* um problema de otimização em um horizonte de predição finito ou infinito a cada instante de amostragem e em aplicar o primeiro elemento da sequência de controle ótima até o próximo instante de amostragem. O procedimento é então novamente realizado com base nas novas medições e no modelo de predição do sistema. Esse tipo de estratégia de controle tem-se mostrado eficiente para tratar de questões de performance e limitações do sinal de controle ou estado (veja por exemplo (GARCIA; PRETT; MORARI, 1989; CAMACHO; ALBA, 2013; MACIEJOWSKI, 2002; QIN; BADGWELL, 2003)).

Para tratar de incertezas paramétricas, parâmetros variantes no tempo e alguns elementos não-lineares, sistemas LPV ou quasi-LPV podem ser utilizados como modelo na estratégia MPC (LU; ARKUN, 2000; CISNEROS; SRIDHARAN; WERNER, 2018; BRIAT, 2014). Nesse caso, uma das abordagens é a proposta em (KOTHARE; BALAKRISHNAN; MORARI, 1996). A mesma consiste basicamente em resolver um problema LMI de controle com custo garantido em um horizonte in-

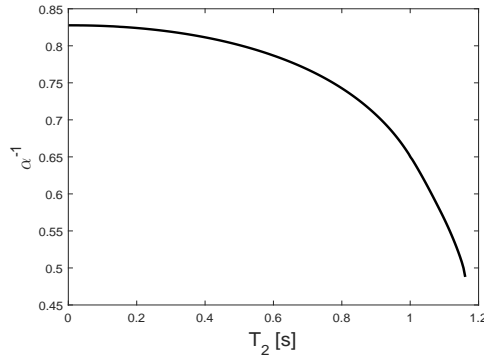


Figura 10: Para $\mathcal{T}_1 = 1\text{ms}$, com $K_0 = [-0,1299 \quad -0,9125]$ e $K_1 = [0,0166 \quad -0,2799]$ e o problema de otimização (105), valores obtidos de α^{-1} para diferentes valores de \mathcal{T}_2 .

finito e em aplicar a lei de controle calculada até o próximo instante de amostragem. O processo é então repetido no próximo instante de amostragem, utilizando novas medidas da planta. É demonstrado que o procedimento assegura a factibilidade, respeito as limitações do sinal de controle e a estabilidade assintótica, desde que o problema de otimização seja factível no instante inicial, i.e., desde que exista uma lei de controle estabilizante robusta que assegure que a condição inicial pertence à região de atração da origem do sistema em malha fechada considerando as limitações do sinal de controle (e.g., saturação) e o critério de performance. Esta abordagem foi aplicada e desenvolvida em (CASAVOLA; FAMULARO; FRANZE, 2003; WADA; SAITO; SAEKI, 2004; CASAVOLA et al., 2006; JUNGERS; OLIVEIRA; PERES, 2011).

Deve-se ressaltar que todas as referências do parágrafo anterior consideram modelos em tempo discreto. Assim como descrito no Capítulo 2, uma primeira questão neste caso diz respeito à determinação de um modelo em tempo discreto para um sistema LPV em tempo contínuo real. Esta não é uma tarefa fácil, uma vez que as técnicas de discretização exatas (como a dos sistemas lineares) podem não ser válidas. A segunda é que, ao considerar modelos em tempo discreto, o parâmetro da planta é implicitamente considerado constante entre dois instantes de amostragem ou aproximado (TAN; GRIGORIADIS, 2000). Na verdade, a planta é um sistema em tempo contínuo e os parâmetros variantes no tempo evoluem continuamente entre dois instantes de amostragem. Por outro lado, motivado pelo desenvolvimento de sistemas de controle em rede e embarcados, atenção especial foi dada ao caso de amostragem aperiódica (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001; HETEL et al., 2017). Neste contexto, o problema do controle de MPC para sistemas de LPV com dados amostrados é abordado em (SHI; SU, 2014).

Motivado pelas questões acima, nesta seção, foca-se no problema de controle preditivo baseado em modelo para sistemas LPV com dados amostrados. Assim, como no Capítulo 2 e na Seção 4.2, assume-se explicitamente que os parâmetros e os estados da planta evoluem continuamente no tempo, enquanto que apenas as medidas dos parâmetros e do estado nos instantes de amostragem são usados para atualizar a lei de controle. Adota-se a estratégia MPC proposta por (KOTHARE; BALAKRISHNAN; MORARI, 1996), em que um problema LMI de controle com custo garantido é resolvido a cada instante de amostragem. Com esse objetivo,

primeiramente obtêm-se condições LMI para o projeto de uma lei de controle LPV estabilizante com dados amostrados e com custo garantido para um horizonte infinito considerando saturação de entrada. Assim, uma estratégia que consiste em resolver problemas convexos em um horizonte deslizante é proposto. Mostra-se que o esquema conduz à factibilidade em cada passo e garante a estabilidade assintótica da origem. Deve-se ressaltar que, diferentemente de (SHI; SU, 2014), ao invés de um funcional de Lyapunov-Krasovskii, considera-se um *looped*-funcional dependente de parâmetros para considerar os efeitos da amostragem aperiódica. Estes fatos juntamente com a abordagem politópica proposta permitem uma redução do conservadorismo, quando comparado com a abordagem em (SHI; SU, 2014). Além disso, a possibilidade efetiva de saturação de controle é levada em conta através da utilização de uma versão dependente de parâmetro da condição generalizada de setor proposta em (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2005). Assim, permite-se garantir a factibilidade para um conjunto maior de condições iniciais quando comparadas aos trabalhos que consideram modelos em tempo discreto (CASAVOLA; FAMULARO; FRANZE, 2003; WADA; SAITO; SAEKI, 2004; CASAVOLA et al., 2006; LI; XI; ZHENG, 2009; JUNGERS; OLIVEIRA; PERES, 2011), nos quais a efetiva saturação é evitada, ou seja, apenas soluções em que a saturação não está ativa são consideradas.

4.3.1 Problema LPV-MPC Amostrado

Neste trabalho, considera-se a abordagem MPC proposta em (KOTHARE; BALAKRISHNAN; MORARI, 1996), que também é considerada em (JUNGERS; OLIVEIRA; PERES, 2011; SHI; SU, 2014) para sistemas LPV, em que a cada instante de amostragem t_k , com base no valor do estado amostrado, uma lei de controle por realimentação de estados é projetada de forma que seja minimizado um critério quadrático com horizonte-infinito.

Assim, considere que o objetivo é a minimização do limite superior γ da seguinte função custo

$$J(t_k, \infty) = \int_{t_k}^{\infty} (\|x(\theta)\|_Z^2 + \|u(\theta)\|_H^2) d\theta = \int_{t_k}^{\infty} (x'(\theta)Zx(\theta) + u'(\theta)Hu(\theta)) d\theta, \quad (106)$$

em que $Z > 0$ e $H > 0$ são matrizes de ponderação simétricas e de dimensões apropriadas.

Baseado nesta formulação, o seguinte problema de otimização é considerado.

Problema 5 (Controle com Custo Garantido). *Projetar K_j , para $j = 0, \dots, N$ tal que o limite superior γ da função custo $J(t_k, \infty)$ definida em (106) é minimizado e as trajetórias do sistema em malha fechada (70)-(71) convergem assintoticamente para a origem dada uma condição inicial $x(t_k)$ pertencente à região de atração da origem do sistema em malha fechada (70)-(71).*

Assim, a partir do sistema LPV (80), assume-se o seguinte modelo de predição:

$$\dot{x}(t) = A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))\text{sat}(u(t_{k+s}/t_k)), \quad t \in [t_{k+s}, t_{k+s+1}), s \geq 0. \quad (107)$$

em que $u(t_{k+s}/t_k)$ denota a lei de controle aplicada no intervalo $t \in [t_{k+s}, t_{k+s+1})$ e calculada no instante t_k . Neste caso, considera-se uma realimentação de estado LPV, i.e.

$$u(t_{k+s}/t_k) = K_k(\sigma(t_{k+s}/t_k))x(t_{k+s}/t_k) \quad t \in [t_{k+s}, t_{k+s+1}), s \geq 0, \quad (108)$$

em que $x(t_{k+s}/t_k)$ e $\sigma(t_{k+s}/t_k)$ denotam os vetores de estado $x(t_{k+s})$ e de parâmetros $\sigma(t_{k+s})$ preditos em t_k , respectivamente, para $s = 0, 1, \dots, \infty$. A matriz $K_k(\sigma(t_{k+s}/t_k))$ é a solução obtida para a matriz $K(\sigma(t_k))$ a partir do Problema 5 no instante t_k com o objetivo de minimizar o limite superior da função objetivo quadrática $J(t_k, \infty)$ dado em (106) considerando o modelo de predição (107).

Considerando a condição inicial $x(t_k)$, a lei de controle projetada (108) deve assegurar a convergência assintótica da trajetória para a origem de (70) para qualquer função $\sigma(t)$ satisfazendo (7), para $t \geq t_k$. Consequentemente, a sequência de controle ótima obtida no instante t_k é a solução do Problema 5 considerando $x(t_k)$ como condição inicial, i.e., o sinal de controle obtido é $u(t_{k+s}) = K_k(\sigma(t_{k+s}))x(t_{k+s})$, para $s = 0, 1, \dots, \infty$.

Assim, o primeiro elemento da sequência de controle $u(t_k/t_k)$ é aplicado à planta. Seguindo a estratégia do horizonte deslizante, no próximo instante de amostragem t_{k+1} , novas medidas de $x(t_{k+1})$ e $\sigma(t_{k+1})$ são obtidas e uma nova matriz de realimentação dependente do parâmetro $K_{k+1}(\sigma(t_{k+1}))$ é projetada para minimizar o limite superior de $J(t_{k+1}, \infty)$. Então o sistema em malha fechada pode ser descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))\text{sat}(K_{k+s}(\sigma(t_{k+s}))x(t_{k+s})), \\ t &\in [t_{k+s}, t_{k+s+1}), \quad s = 0, 1, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (109)$$

A estratégia de controle LPV-MPC amostrada pode então ser resumida no seguinte algoritmo.

Algoritmo 1.

- (1) *Inicialize $k = 0$.*
- (2) *Obtenha as medidas do estado e do parâmetro no instante t_k .*
- (3) *Projete $K_{k,j}$, $j = 0, \dots, N$, tal que o Problema 5 seja resolvido.*
- (4) *Para $t \in [t_k, t_{k+1})$, aplique o sinal de controle $u(t) = K_k(\sigma(t_k))x(t_k)$ no sistema, com*

$$K_k(\sigma(t_k)) = K_{k,0} + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}(t_k)K_{k,j}.$$

- (5) *Faça $k \leftarrow k + 1$ e espere até o próximo instante de amostragem, então vá para o passo (2).*

4.3.2 Controle LPV Amostrado com Custo Garantido

Nesta seção, são propostas condições para a solução do Problema 5, as quais são utilizadas na etapa (3) do Algoritmo 1. Com este objetivo, considere as ferramentas teóricas apresentadas na Seção 4.2.2.

Considere que a dinâmica do sistema em malha fechada (70)-(71) é dada por (80) para $\tau \in [0, T_k]$, $\forall k \in \mathbb{N}$. O seguinte lema é proposto para análise de estabilidade do sistema (80) com controle amostrado e saturante, enquanto assegura-se que $J(t_k, \infty) \leq \gamma$. Assim, o seguinte lema pode ser visto como uma extensão do Lema 6.

Lema 8. Considere a PDF $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaz

$$\mu_1 \|x\|^2 \leq V(x_k, \sigma_k) \leq \mu_2 \|x\|^2, \quad (110)$$

com $0 < \mu_1 \leq \mu_2$ e uma PDLF $\mathcal{V}_0 : [0, \mathcal{T}_2] \times \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n \times \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^N \times [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\mathcal{V}_0(0, x_k, \sigma_k, T_k) = \mathcal{V}_0(T_k, x_k, \sigma_k, T_k). \quad (111)$$

Defina o funcional $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = V(x_k(\tau), \sigma_k(\tau)) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ e considere $\dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ a derivada de $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ em relação a τ ao longo das trajetórias do sistema (80). Se as seguintes desigualdades são satisfeitas

$$\left| (K(\sigma_k(0)) - S(\sigma_k(0)))_{(i)} x_k(0) \right|^2 \leq \bar{u}_{(i)}^2 \frac{V(x_k(0), \sigma_k(0))}{\gamma}, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} + \|x_k(\tau)\|_Z^2 + \|u(\tau)\|_H^2 - 2\psi_k' U(\sigma_k(0))(\psi_k + S(\sigma_k(0))x_k(0)) \\ < -\mu \left\| \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \right\|^2, \quad \text{para } \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \neq 0, \end{aligned} \quad (113)$$

$\forall \tau \in [0, T_k], \forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ e $\forall \sigma_k(\tau) \in \mathcal{B}_\sigma, \forall \dot{\sigma}_k(\tau) \in \mathcal{B}_\delta$, em que μ e γ são escalares positivos, com $S(\sigma_k(0)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $U(\sigma_k(0)) \in \mathbb{S}^m$ sendo uma matriz diagonal e definida positiva, então se

$$x(t_k) = x_k(0) \in \mathcal{L}_V(\gamma) = \bigcap_{f \in \{1, \dots, 2^N\}} \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_f)), \gamma),$$

tem-se que:

(i) as trajetórias do sistema (70)-(71) com σ satisfazendo (7) convergem para a origem, i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$;

(ii) $J(t_k, \infty) < \gamma$.

Demonstração: A prova deste lema é semelhante a prova do Lema 6. Se $x(t_k) = x_k(0) \in \mathcal{L}_V(\gamma)$, então $V(x_k(0), \sigma_k(0)) \leq \gamma$, assim, se (112) é satisfeita, segue que

$$\left| (K(\sigma_k(0))_{(i)} - S(\sigma_k(0))_{(i)}) x_k(0) \right| \leq \bar{u}_{(i)},$$

para $i = 1, \dots, m$. A partir do Lema 3, tem-se então que

$$\psi_k' U(\sigma_k(0))(\psi_k + S(\sigma_k(0))x_k(0)) \leq 0. \quad (114)$$

Considerando (114) e integrando (113) sobre qualquer intervalo de amostragem, segue que

$$\int_0^{T_k} \left\{ \dot{\mathcal{W}} + \|x_k(\tau)\|_Z^2 + \|u_k(\tau)\|_H^2 \right\} d\tau < -\mu \int_0^{T_k} \left\| \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \right\|^2 d\tau. \quad (115)$$

A partir de (111) e (115), segue que

$$\begin{aligned} V(x_k(T_k), \sigma_k(T_k)) - V(x_k(0), \sigma_k(0)) + \int_0^{T_k} (\|x_k(\tau)\|_Z^2 + \|u_k(\tau)\|_H^2) d\tau < \\ - \int_0^{T_k} \mu \left\| \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \right\|^2 d\tau \leq - \int_0^{T_k} \mu \|x_k(0)\|^2 d\tau \leq -T_k \mu \|x_k(0)\|^2. \end{aligned} \quad (116)$$

Como $x_k(T_k) = x_{k+1}(0)$ e $\sigma_k(T_k) = \sigma_{k+1}(0)$, a partir de (116), tem-se

$$\Delta V(k) < -T_k \mu \|x_k(0)\|^2 \leq -\mathcal{T}_1 \mu \|x_k(0)\|^2. \quad (117)$$

Como consequência de (117), a partir do Lema 6, conclui-se que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(0) = 0$ e que $x_k(\tau) = x(t_k + \tau) \rightarrow 0$ com $k \rightarrow \infty$, e o item (i) é válido.

Agora para provar o item (ii), note que

$$\int_0^{T_k} (\|x(\tau)\|_Z^2 + \|u(\tau)\|_H^2) d\tau = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\|x(t)\|_Z^2 + \|u(t)\|_H^2) dt.$$

Logo, a partir de (116), tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{a=k}^{k+s} \int_0^{T_a} \left\{ \dot{W} + \|x_a(\tau)\|_Z^2 + \|u_a(\tau)\|_H^2 \right\} d\tau \\ = V(x_{k+s+1}(0), \sigma_{k+s+1}(0)) - V(x_k(0), \sigma_k(0)) + J(t_k, t_{k+s+1}) < 0, \end{aligned}$$

que implica em:

$$J(t_k, t_{k+s+1}) < -V(x_{k+s+1}(0), \sigma_{k+s+1}(0)) + V(x_k(0), \sigma_k(0)). \quad (118)$$

Considerando agora $s \rightarrow \infty$ em (118) e que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(0) = 0$, segue que

$$J(t_k, \infty) < V(x_k(0), \sigma_k(0)) \leq \gamma. \quad (119)$$

□

A partir do PDLF \mathcal{V}_0 dado em (86) e da PDQF V definida em (76), condições na forma quasi-LMI são propostas para verificar as condições (111)-(113) do Lema 8, com o objetivo de projetar os ganhos de realimentação tais que o Problema 5 seja resolvido.

Teorema 4. *Se existem matrizes $\tilde{P}_j, \tilde{F}_j \in \mathbb{S}^n, \tilde{X}_j \in \mathbb{S}^{n+m}, \tilde{G}_j, \tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tilde{Q}_j \in \mathbb{R}^{(3n+m) \times n}, \tilde{K}_j, \tilde{S}_j \in \mathbb{R}^{m \times n},$ matrizes diagonais $\tilde{U}_j \in \mathbb{S}^m, j = 0, 1, \dots, N,$ uma matriz definida positiva $\tilde{R} \in \mathbb{S}^n$ e escalares positivos ϵ e γ satisfazendo as seguintes desigualdades:*

$$\Psi_1(\nu, \beta, \eta, \mathcal{T}_r) < 0, \quad (120)$$

$$\Psi_2(\nu, \beta, \eta, \mathcal{T}_r) < 0, \quad (121)$$

$$\begin{bmatrix} (\tilde{P}_0 + \tilde{\mathbf{P}}(\nu)) & (\tilde{K}_0 + \tilde{\mathbf{K}}(\nu))'_{(i)} - (\tilde{S}_0 + \tilde{\mathbf{S}}(\nu))'_{(i)} \\ * & \tilde{u}_{(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad (122)$$

$$(\tilde{U}_0 + \tilde{\mathbf{U}}(\nu)) > 0, \quad (123)$$

$$(\tilde{P}_0 + \tilde{\mathbf{P}}(\nu, \beta)) > 0, \quad (124)$$

$\forall (\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}), \forall i = 1, \dots, m$ e $r = 1, 2,$ em que

$$\Psi_1(\nu, \beta, \eta, \mathcal{T}_r) = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) + \mathcal{T}_r(\tilde{\Pi}_2(\nu, \beta, \eta) + \tilde{\Pi}_3(\nu)) & M_1' \tilde{Y}' & \tilde{\Pi}_4(\nu) \\ * & -\gamma Z^{-1} & 0 \\ * & * & -\gamma H^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_2(\nu, \beta, \eta, \mathcal{T}_r) = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1(\nu, \beta, \eta) - \mathcal{T}_r \tilde{\Pi}_3(\nu) & \mathcal{T}_r(\tilde{Q}_0 + \tilde{Q}(\nu, \beta)) & M'_1 \tilde{Y}' & \tilde{\Pi}_4(\nu) \\ * & -\mathcal{T}_r \tilde{R} & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma Z^{-1} & 0 \\ * & * & * & -\gamma H^{-1} \end{bmatrix},$$

com $\tilde{\Pi}_4(\nu) = M'_2(\tilde{K}_0 + \tilde{K}(\nu))' + M'_4(\tilde{U}_0 + \tilde{U}(\nu))$ e as matrizes definidas em (92) e (93), então o sinal de controle amostrado (71) em que as matrizes de ganhos

$$K(\sigma(t_k)) = K_0 + \mathbf{K}(\sigma(t_k) \otimes I),$$

sendo $K_j = \tilde{K}_j \tilde{Y}^{-1}$, $j = 0, 1, \dots, N$, garante que $\forall x(t_k) \in \mathcal{L}_V(\gamma)$, com $\mathcal{L}_V(\gamma)$ definido em (78) em que $P(\sigma(t))$ é definido pelas matrizes $P_j = \gamma(\tilde{Y}')^{-1} \tilde{P}_j \tilde{Y}^{-1}$, $j = 0, 1, \dots, N$, tem-se que:

(i) $J(t_k, \infty) \leq \gamma$, $\forall k \geq 0$ com $J(t_k, \infty)$ definida em (106);

(ii) as correspondentes trajetórias do sistema em malha fechada (70)-(71) com σ satisfazendo (7) convergem assintoticamente para a origem, para qualquer intervalo de amostragem $0 < \mathcal{T}_1 \leq T_k \leq \mathcal{T}_2$.

Demonstração: Esta prova baseia-se nos resultados apresentados no Lema 8 e no Teorema 3. O objetivo é propor condições na forma LMI (ou quasi-LMI) tais que (111)-(113) no Lema 8 sejam satisfeitas. Assim, consideram-se a PDQF $V(x_k, \sigma_k)$ e o PDLF $\mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ definidos em (76) e (86) que satisfazem (110) e (111), respectivamente. Para satisfazer (113), primeiramente, deriva-se $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = V(x_k, \sigma_k) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ em relação a τ e tem-se (94). A partir de (113), (94) e (27), para $\tau \in [0, T_k]$ segue que

$$\begin{aligned} & \dot{\mathcal{W}} - 2\psi'_k U(\sigma_k(0)) [\psi_k + S(\sigma_k(0))x_k(0)] + x'_k(\tau) Z x_k(\tau) + u'_k(\tau) H u_k(\tau) \leq \\ & \chi'(\tau) \left[\Pi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + (T_k - \tau) \Pi_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + (T_k - 2\tau) \Pi_3(\sigma_k(0)) \right. \\ & \quad \left. + \tau(Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau))) R^{-1} (Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))' \right] \chi(\tau) \\ & \quad + x'_k(\tau) Z x_k(\tau) + u'_k(\tau) H u_k(\tau), \quad (125) \end{aligned}$$

com $\Pi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau))$ definida em (97), $\Pi_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau))$ e $\Pi_3(\sigma_k(0))$ definidas em (96) e $\chi(\tau) = [x_k(\tau) \ x_k(0) \ \dot{x}_k(\tau) \ \psi_k]$.

Seguindo o mesmo procedimento realizado na demonstração do Teorema 3, considere $Y_1 = \epsilon Y_2$ e suponha que Y_2 é não-singular, defina $\bar{Y} = Y_2^{-1}$ e $\bar{U}(\sigma_k(0)) = U(\sigma_k(0))^{-1} = \bar{U}_0 + \bar{\mathbf{U}}(\sigma_k(0) \otimes I)$. Então, considerando a transformação de similaridade $\bar{\chi}(\tau) = \Xi^{-1} \chi(\tau)$, com $\Xi = \text{diag}\{\bar{Y}, \bar{Y}, \bar{Y}, \bar{U}(\sigma_k(0))\}$, é possível reescrever (125) como:

$$\begin{aligned} & \dot{\mathcal{W}} + \|x_k(\tau)\|_Z^2 + \|u(t)\|_H^2 - 2\psi'_k U(\sigma_k(0))(\psi_k + S(\sigma_k(0))x_k(0)) \leq \\ & \bar{\chi}'(\tau) [\Xi' \Pi_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) \Xi + (T_k - \tau) \Xi' \Pi_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) \Xi \\ & \quad + (T_k - 2\tau) \Xi' \Pi_3(\sigma_k(0)) \Xi + \tau \Xi' (Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau))) R^{-1} (Q_0 + \mathbf{Q}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau)))' \Xi \\ & \quad + \Xi' M'_1 Z M_1 \Xi + \Xi' (M'_2(K_0 + \mathbf{K}(\sigma_k(0)))' + M'_4) H ((K_0 + \mathbf{K}(\sigma_k(0))) M_2 + M_4) \Xi] \bar{\chi}(\tau) \\ & \quad = \bar{\chi}'(\tau) [\Psi(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k)] \bar{\chi}(\tau). \quad (126) \end{aligned}$$

A partir de (126), considerando que

$$\Psi(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k) < 0,$$

$\forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma$, $\delta_k(\tau) \in \mathcal{B}_{\delta_k}$, $\dot{\delta}_k(\tau) \in \mathcal{B}_{\dot{\delta}_k}$, $\tau \in [0, T_k]$ e $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, se Ξ é não-singular, segue então que existe um escalar positivo μ_Ψ , tal que

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}'(\tau) \Psi(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k) \tilde{\chi}(\tau) &< -\mu_\Psi \|\tilde{\chi}(\tau)\|^2 \leq -\mu_\Psi \|\Xi^{-1}\|^2 \|\chi(\tau)\|^2 \\ &\leq -\mu \left\| \begin{matrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{matrix} \right\|^2, \end{aligned}$$

e portanto, tem-se (113). Aplicando o complemento de Schur e multiplicando-se por γ , tem-se³

$$\Psi(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) = \begin{bmatrix} \Pi(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) & \tau(\tilde{Q}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}(\sigma_k(0), \delta_k(\tau))) & \tilde{Y}'M'_1 & \Pi_4(\sigma_k(0))' \\ * & -\tau\tilde{R} & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma Z^{-1} & 0 \\ * & * & * & -\gamma H^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (127)$$

com

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) &= \tilde{\Pi}_1(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) + (T_k - \tau)\tilde{\Pi}_2(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau)) \\ &\quad + (T_k - 2\tau)\tilde{\Pi}_3(\sigma_k(0)), \\ \Pi_4(\sigma_k(0)) &= (\tilde{K}_0 + \tilde{\mathbf{K}}(\sigma_k(0)))M_2 + (\tilde{U}_0 + \tilde{\mathbf{U}}(\sigma_k(0)))M_4, \end{aligned}$$

com as matrizes definidas em (96) e as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \gamma Y_2^{-1}, & \tilde{P}_j &= \gamma^{-1} \tilde{Y}' P_j \tilde{Y}, & \tilde{F}_j &= \gamma^{-1} \tilde{Y}' F_j \tilde{Y}, & \tilde{G}_j &= \gamma^{-1} \tilde{Y}' G_j \tilde{Y}, \\ \tilde{Q}_j &= \gamma^{-1} \tilde{\Xi}' Q_j \tilde{Y}, & \tilde{S}_j &= S_j \tilde{Y}, & \tilde{R} &= \gamma^{-1} \tilde{Y}' R \tilde{Y}, & \tilde{K}_j &= K_j \tilde{Y}, \\ & & \tilde{U}(\sigma_k(0)) &= \gamma U(\sigma_k(0))^{-1}, \\ \tilde{X}(\sigma_k(0)) &= \tilde{X}_0 + \tilde{\mathbf{X}}(\sigma_k(0) \otimes I) = \gamma^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{Y} & 0 \\ 0 & \tilde{U}(\sigma_k(0)) \end{bmatrix}' X(\sigma_k(0)) \begin{bmatrix} \tilde{Y} & 0 \\ 0 & \tilde{U}(\sigma_k(0)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (128)$$

para $j = 0, 1, \dots, N$.

Então uma condição suficiente para verificar (113) no Lema 8 é dada pela desigualdade (127) $\forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma$, $\forall \delta_k(\tau) \in \mathcal{B}_{\delta_k}$, $\forall \dot{\delta}_k(\tau) \in \mathcal{B}_{\dot{\delta}_k}$, $\forall \tau \in [0, T_k]$ e $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$.

Além disso, uma condição necessária e suficiente para assegurar a inequação (127) consiste em satisfazer a inequação nos vértices dos politopos \mathcal{B}_σ , \mathcal{B}_{δ_k} e $\mathcal{B}_{\dot{\delta}_k}$, ou seja, deve-se verificar que

$$\Psi(\nu, \beta, \eta, \tau, T_k) = \begin{bmatrix} \Pi(\nu, \beta, \eta, \tau, T_k) & (\tilde{Q}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}(\nu, \beta)) & \tilde{Y}'M'_1 & \tilde{\Pi}_4(\nu)' \\ * & -\tau\tilde{R} & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma Z^{-1} & 0 \\ * & * & * & -\gamma H^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (129)$$

com as matrizes definidas em (92) e $\tilde{\Pi}_4(\nu) = (\tilde{K}_0 + \tilde{\mathbf{K}}(\nu))M_2 + (\tilde{U}_0 + \tilde{\mathbf{U}}(\nu))M_4$, $\forall (\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_{\dot{\delta}_k})$. Note que $\tau \in [0, T_k]$ e $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, assim, a partir de argumentos de convexidade, para $r = 1, 2$, tem-se (120) e (121). Note que de (123) e de (120), tem-se que $\tilde{U}(\sigma_k(0))$ e \tilde{Y} são matrizes não-singulares, o

³Por simplicidade consideram-se $\Psi(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) = \Psi(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k)$ e $\Pi(\sigma_k, \delta_k, \dot{\delta}_k, \tau, T_k) = \Pi(\sigma_k(0), \delta_k(\tau), \dot{\delta}_k(\tau), \tau, T_k)$.

que garante efetivamente que Ξ é invertível. Portanto, se as condições (120) e (121) no Teorema 4 são verificadas, existe um escalar positivo μ tal que

$$\dot{\mathcal{W}} + \|x_k(\tau)\|_Z^2 + \|u_k(\tau)\|_H^2 - 2\psi'_k U(\sigma_k(0))(\psi_k + S(\sigma_k(0))x_k(0)) < -\mu \left\| \begin{array}{c} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{array} \right\|^2,$$

i.e., (113) no Lema 8 é satisfeita.

Por outro lado, multiplicando-se pela direita e pela esquerda (122) por $\text{diag}\{\tilde{Y}^{-1}, I\}$, segue que

$$\begin{bmatrix} \frac{(P_0 + \mathbf{P}(\nu))}{\gamma} & (K_0 + \mathbf{K}(\nu))'_{(i)} - (S_0 + \mathbf{S}(\nu))'_{(i)} \\ * & \bar{u}_{(i)}^2 \end{bmatrix} > 0.$$

Aplicando então o complemento de Schur nesta desigualdade, implica que a condição (112) do Lema 8 é verificada.

Note que (124) garante que $P(\sigma(t)) > 0$ para todo $\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$.

Portanto, se as condições (120)-(124) do Teorema 4 são verificadas, assegura-se que as condições no Lema 8 são satisfeitas para toda condição inicial $x(t_k) \in \mathcal{L}_V(\gamma)$ e para todo $\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$ e $\dot{\sigma} \in \mathcal{B}_{\dot{\sigma}}$. Consequentemente, as afirmações (i) e (ii) são verdadeiras, isto é, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ e $J(t_k, \infty) \leq \gamma$.

□

4.3.3 Lei de Controle com Estratégia LPV-MPC

Considerando a estratégia MPC descrita no Algoritmo 1, a cada instante de amostragem t_k , o controlador é projetado para minimizar o limite superior da função custo (106) e aplicado na planta somente no intervalo $[t_k, t_{k+1})$, considerando o seguinte modelo de predição:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))K_k(\sigma(t_{k+s}/t_k))x(t_{k+s}/t_k) + B(\sigma(t))\psi_k, \\ t &\in [t_{k+s}/t_k, t_{k+s+1}/t_k], s \geq 0, k \geq 0. \end{aligned} \quad (130)$$

Então no instante t_{k+1} , novos valores de $\sigma(t_{k+1})$ e $x(t_{k+1})$ são medidos e uma nova matriz $K_{k+1}(\sigma(t_{k+1}))$ é determinada.

Assim o limite superior de $J(t_k, \infty)$ definida em (106) é variante no tempo, como segue

$$J(t_k, \infty) < V(x(t_k), \sigma(t_k)) \leq \gamma(t_k). \quad (131)$$

Por simplicidade, considera-se $\gamma_k = \gamma(t_k)$.

Com o objetivo de minimizar γ_k , considera-se a estratégia LPV-MPC descrita no Algoritmo 1. A partir dos resultados apresentados no Teorema 4, na etapa (3) do Algoritmo 1 considera-se o seguinte problema de otimização para projetar $K_k(\sigma(t_k))$

no instante t_k , para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
& \min \gamma_k \\
& \text{sujeito a} \\
& \left[\begin{array}{cc} 1 & x_k(0)' \\ x_k(0) & \tilde{Y}_k + \tilde{Y}'_k - (\tilde{P}_{k,0} + \tilde{\mathbf{P}}_k(\nu)) \end{array} \right] \geq 0, \\
& \Psi_{k,1}(\nu, \beta, \eta, \mathcal{T}_r) < 0, \\
& \Psi_{k,2}(\nu, \beta, \eta, \mathcal{T}_r) < 0, \\
& \left[\begin{array}{cc} (\tilde{P}_{k,0} + \tilde{\mathbf{P}}_k(\nu)) & (\tilde{K}_{k,0} + \tilde{\mathbf{K}}_k(\nu))'_{(i)} - (\tilde{S}_{k,0} + \tilde{\mathbf{S}}_k(\nu))'_{(i)} \\ * & \tilde{u}_{(i)}^2 \end{array} \right] > 0, \\
& \tilde{P}_{k,0} + \tilde{\mathbf{P}}_k(\nu, \beta) > 0, \\
& (\tilde{U}_{k,0} + \tilde{\mathbf{U}}_k(\nu)) > 0, \\
& \forall (\nu, \beta, \eta) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times Ver(\mathcal{B}_{\delta_j}), \forall i = 1, \dots, m \text{ e } \forall r = 1, 2.
\end{aligned} \tag{132}$$

sendo as variáveis de decisão $\tilde{P}_{k,j}, \tilde{F}_{k,j}, \tilde{G}_{k,j}, \tilde{K}_{k,j}, \tilde{S}_{k,j}, \tilde{Q}_{k,j}, \tilde{U}_{k,j}, \tilde{X}_{k,j}, \tilde{Y}_k, \epsilon, \gamma_k$ e \tilde{R}_k .

Relembrando que o subscrito “ k ” nas variáveis matriciais corresponde às variáveis projetadas nos instantes t_k . A partir do Lema 1 em (SEURET; GOMES DA SILVA Jr., 2012) ou do Lema 7, a primeira inequação em (132) assegura que

$$x_k(0)'(P_{k,0} + \mathbf{P}_k(\nu))x_k(0) \leq \gamma_k, \tag{133}$$

para $k \geq 0$ e $\forall \nu \in Ver(\mathcal{B}_\sigma)$, i.e., $x_k(0) = x(t_k) \in \mathcal{L}_V(\gamma_k)$.

Então, a cada instante de amostragem $t = t_k$, ganhos de realimentação de estado $K_{k,j}$, com $j = 0, \dots, N$, são projetados para minimizar $\gamma_k = \gamma(t_k)$ e para assegurar que as trajetórias do sistema em malha fechada convirjam para a origem para uma condição inicial $x(t_k)$. Neste caso, levantam-se duas questões:

- 1) A etapa 3 do Algoritmo 1 deve ser factível a cada instante de amostragem;
- 2) A aplicação da estratégia LPV-MPC descrita no Algoritmo 1 deve assegurar que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Os Teoremas 5 e 6 a seguir consideram estas duas questões.

Teorema 5. *Se o problema de otimização (132) é factível no instante $k = 0$, então é factível para todo $k > 0$.*

Demonstração: Como mencionado nas provas do Lema 8 e do Teorema 4, a primeira inequação de (132) assegura que $x_k(0) \in \mathcal{L}_V(\gamma_k)$ e, conseqüentemente, $\Delta V(k) = x'(t_{k+1})P_k(\sigma(t_{k+1}))x(t_{k+1}) - x'(t_k)P_k(\sigma(t_k))x(t_k) < -\mathcal{T}_1\mu \|x_k(0)\|^2$. Então conclui-se que

$$x'(t_{k+1}/t_k)P_k(\sigma(t_k))x(t_{k+1}/t_k) < x'(t_k/t_k)P_k(\sigma(t_k))x(t_k/t_k) \leq \gamma_k, \tag{134}$$

o que assegura que a solução ótima de (132) para $t = t_k$ é uma solução factível para $t = t_{k+1}$. Repetindo este procedimento, esta solução é factível para os instante de amostragem t_{k+s+1} , $\forall s \geq 0$.

□

Teorema 6. *A lei de controle LPV-MPC descrita no Algoritmo 1, com a etapa 3 dada pela solução do problema de otimização (132), assegura que as trajetórias do sistema em malha fechada convergem assintoticamente para a origem desde que (132) seja factível para $k = 0$.*

Demonstração: Como $P_k(\sigma_k(0))$ e γ_k são soluções ótimas de (132) em $t = t_k$ e, a partir do Teorema 5, são soluções factíveis em $t = t_{k+1}$, tem-se que

$$x'(t_{k+1}/t_k)P_k(\sigma(t_{k+1}))x(t_{k+1}/t_k) = \tilde{\gamma}_{k+1} < \gamma_k, \quad (135)$$

em que $\tilde{\gamma}_{k+1}$ provavelmente não é uma solução ótima do problema de otimização (132). Considerando que P_{k+1} e γ_{k+1} são soluções ótimas de (132) em $t = t_{k+1}$, a partir de (135), segue que

$$x'(t_{k+1}/t_{k+1})P_{k+1}(\sigma(t_{k+1}))x(t_{k+1}/t_{k+1}) = \gamma_{k+1} \leq \tilde{\gamma}_{k+1} < \gamma_k. \quad (136)$$

Considerando-se $x(t_{k+1}/t_k) = x(t_{k+1}/t_{k+1})$, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{k+1} = x'(t_{k+1}/t_{k+1})P_k(\sigma(t_{k+1}))x(t_{k+1}/t_{k+1}) &< x'(t_k/t_k)P_k(\sigma(t_k))x(t_k/t_k) \\ &\leq \gamma_k. \end{aligned} \quad (137)$$

A partir de (136) e (137), como $\gamma_{k+1} \leq \tilde{\gamma}_{k+1} < \gamma_k$, existe um escalar positivo μ_k com $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= x'(t_{k+1}/t_{k+1})P_{k+1}(\sigma(t_{k+1}))x(t_{k+1}/t_{k+1}) - x'(t_k/t_k)P_k(\sigma(t_k))x(t_k/t_k) \\ &< -\mathcal{T}_1\mu_k \|x(t_k)\|^2, \end{aligned}$$

$\forall k \geq 0$ e segue que $x(t_k/t_k) \rightarrow 0$ com $k \rightarrow \infty$. De (136) e (137), segue também que $J(t_{k+1}, \infty) < J(t_k, \infty)$. Então, conclui-se que $\lim_{k \rightarrow \infty} J(t_k, \infty) = 0$, o que garante que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

□

4.3.4 Casos Particulares

4.3.4.1 Condições Independente de Parâmetro

No Algoritmo 1, com o problema de otimização (132), pode-se considerar o caso particular com o funcional independente de parâmetro, considerando $P(\sigma_k(\tau)) = P_0$, $F(\sigma_k(\tau)) = F_0$, $G(\sigma_k(\tau)) = G_0$, $S(\sigma_k(\tau)) = S_0$, $Q(\sigma_k(\tau)) = Q_0$, $U(\sigma_k(\tau)) = U_0$ e $X(\sigma_k(\tau)) = X_0 \forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma$. Neste caso, obtêm-se condições com uma menor quantidade de variáveis de decisão e portanto de menor complexidade numérica.

4.3.4.2 Maximização da Estimativa de \mathcal{R}_a

Dados os limites de T_k e o valor de γ , um problema de interesse é maximizar uma estimativa de \mathcal{R}_a com base em algum critério, i.e., determinar um conjunto tal que para qualquer $x(t_k)$ pertencente a este, as correspondentes trajetórias do sistema em malha fechada convergem assintoticamente para a origem, enquanto que assegura-se $J(t_k, \infty) \leq \gamma$. Note que o conjunto $\mathcal{L}_V(\gamma)$ obtido como solução das condições do Teorema 4 é por definição contido em \mathcal{R}_a e pode ser usado como uma estimativa deste conjunto. Considere a matriz αI , com um escalar positivo α , então pode-se

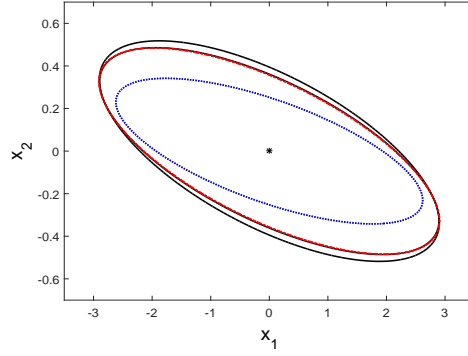


Figura 11: $\mathcal{L}_V(40)$ obtidos a partir da descrição na Seção 4.3.4.2 com condições DP (em preto) e IP (em vermelho) e a partir do Algoritmo em (SHI; SU, 2014) (em azul).

maximizar o eixo de $\mathcal{E}(\alpha I, 1)$ tal que $\mathcal{E}(\alpha I, 1) \subseteq \mathcal{L}_V(\gamma)$, por exemplo. Isto pode ser obtido como a solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
 & \min \alpha \\
 & \text{sujeito a} \\
 & (120) - (124), \\
 & \begin{bmatrix} \alpha I & I \\ I & \tilde{Y}' + \tilde{Y} - (\tilde{P}_0 + \tilde{\mathbf{P}}(\nu)) \end{bmatrix} > 0, \\
 & \forall (\nu, \beta, \eta) \in \text{Ver}(\mathcal{B}_\sigma) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_{\delta_k}) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_{\delta_j}), \forall i = 1, \dots, m \text{ e } \forall r = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{138}$$

Segue assim que, $\forall x(t_k) \in \mathcal{L}_V(\gamma)$, o problema de otimização (132) é factível e $\mathcal{L}_V(\gamma)$ é uma região de estabilidade garantida, ou seja, está contida em \mathcal{R}_a sob a estratégia de controle MPC dada pelo Algoritmo 1.

4.3.5 Exemplo Numérico

Considere o seguinte exemplo modificado de (SHI; SU, 2014), em que o sistema LPV é descrito como:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & 1 - 1,2\sigma(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u(t)),$$

com $\bar{u} = 1$ e $\sigma(t) = a \sin(b\pi t)$ e, assim, os limites de σ e de $\dot{\sigma}$ são $|\sigma| \leq a$ e $|\dot{\sigma}| \leq ab\pi$. Considera-se $\mathcal{T}_1 = 10\text{ms}$ e a função custo $J(t_k, \infty)$ descrita em (106), com as matrizes de ponderação $H = 0,01$ e $Z = I$.

Considere $a = 1$, $b = 0,1$, $\gamma = 40$ e o problema de otimização de maximização da estimativa de \mathcal{R}_a descrito na Seção 4.3.4.2. Na Figura 11, apresentam-se os conjuntos $\mathcal{L}_V(40)$ obtidos a partir das condições propostas dependentes de parâmetros-DP (em preto) e independente de parâmetros-IP (em vermelho) e do Algoritmo em (SHI; SU, 2014) (em azul)⁴. Observe que as condições propostas permitem obter um conjunto de condições iniciais admissíveis maior, i.e., que asseguram a factibilidade do algoritmo MPC. Por exemplo, note que a condição inicial $x(0) = [-1,5 \ 0,47]'$ pertence a estimativa obtida pelo método proposto, enquanto que, as condições apresentadas em (SHI; SU, 2014) são infactíveis para este valor de $x(0)$.

⁴Em (SHI; SU, 2014), as condições são propostas a partir de um funcional de L-K independente de parâmetros.

Assim, a partir do Algoritmo 1 para as condições DP, considerando $x(0) = [-1,5 \ 0,47]'$ e $T_k \in [10, 200]$ ms, em $k = 0$, são obtidas as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} K_{0,0} &= \begin{bmatrix} -0,3613 & -2,1973 \\ 21,5086 & 67,8037 \end{bmatrix}, & K_{0,1} &= \begin{bmatrix} -0,1172 & 0,7000 \\ -6,9931 & -22,1164 \end{bmatrix}, \\ P_{0,0} &= \begin{bmatrix} 67,8037 & 238,5570 \end{bmatrix}, & P_{0,1} &= \begin{bmatrix} -22,1164 & -69,9446 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e o limite superior de $J(t_0, \infty)$ obtido é de $\gamma_0 = 5,4683$. Para fins de comparação, considera-se também o caso em que $K_k(\sigma(t_k)) = K_0(\sigma(t_k))$ para todo $k > 0$, i.e., apenas a primeira lei de controle obtida a partir de (132) é aplicada ao sistema. Para estes dois casos, os sinais simulados estão ilustrados na Figura 12. A evolução de $u(t)$ e $x(t)$ ao longo do tempo e os valores de γ_k e T_k para $t = t_k$ estão ilustrados nas Figuras 12(a), 12(b), 12(c) e 12(d), respectivamente, em que em linha contínua e tracejada-pontilhada representam-se os resultados obtidos pelo Algoritmo 1 e pela solução de (132). Note que o método proposto permite que o sinal de controle sature. A mesma sequência aleatória de T_k (Figura 12(d)) é utilizada em todas as simulações desta seção. Como esperado, as trajetórias do sistema em malha fechada convergem para a origem e os valores de γ são decrescentes nos instantes de amostragem. Observe que a estabilidade assintótica é assegurada em ambos os casos, e que, a partir do Algoritmo 1, é possível obter melhores resultados, i.e., as trajetórias convergem mais rapidamente para a origem, do que com a lei de controle projetada em $k = 0$ e aplicada em um horizonte infinito.

Considere a condição inicial $x(0) = [2 \ 0]'$ pertencente ao $\mathcal{L}_V(40)$ obtido a partir de (SHI; SU, 2014), como pode ser visto na Figura 11. Na Tabela 4.3.5, para $T_k \in [10, 200]$ ms, $a = 1$ e $b = 0,1$, são apresentados os ganhos e as matrizes obtidos em $t = t_0$ pelo Algoritmo 1 com matrizes DP e IP e pelo Algoritmo em (SHI; SU, 2014).

A evolução de $u(t)$ e $x(t)$ ao longo do tempo e os valores de γ_k estão ilustrados na Figura 13, em que em linha contínua, tracejada-pontilhada e pontilhada são representados os resultados obtidos pelo Algoritmo 1 com condições DP e IP e pelo Algoritmo em (SHI; SU, 2014), respectivamente. Note que os valores de γ_k obtidos pelo método proposto são consideravelmente menores que os obtidos a partir de (SHI; SU, 2014), o que indica uma melhoria significativa da performance. De fato, observam-se na Figura 13(b) que as trajetórias obtidas a partir do algoritmo proposto (linhas contínuas e tracejadas-pontilhadas) convergem para a origem mais rapidamente do que aquelas obtidas com o Algoritmo de (SHI; SU, 2014) (linha pontilhada).

Considerando a condição inicial $x(0) = [2 \ 0]'$, na Tabela 7, são apresentados os valores de γ_0 obtidos a partir do Algoritmo 1 com condições DP e IP e do Teorema 2 em (SHI; SU, 2014), para diferentes limites dos intervalos de amostragem ($T_k \in [10, 200]$ ms e $T_k \in [10, 400]$ ms), além de diferentes valores para a e b , i.e., diferentes limites de σ e de $\dot{\sigma}$.

Note que os resultados obtidos a partir de (SHI; SU, 2014) não dependem dos limites de $\dot{\sigma}(t)$ (dados indiretamente por b) e as condições em (SHI; SU, 2014) não são factíveis para $|\sigma| \geq 1,5$ e $T_k \in [10, 400]$ ms. Além disso, os valores de γ_0 obtidos a partir do Teorema 4 são inferiores aos obtidos a partir de (SHI; SU, 2014). Portanto, a abordagem proposta é menos conservadora que a de (SHI; SU, 2014). Além disso, com as condições DP, obtêm-se menores valores de γ do que a partir das condições apresentadas na Seção 4.3.4.1, especialmente quando os limites de $\dot{\sigma}(t)$

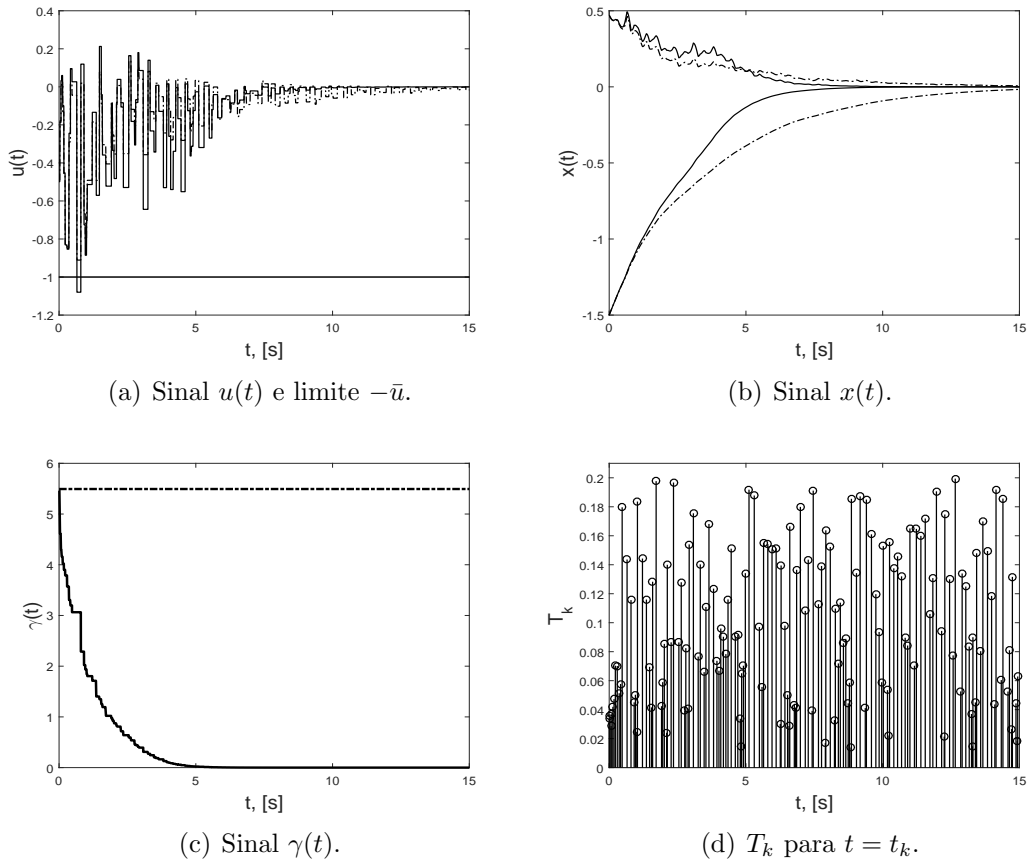


Figura 12: Sinais para $x(0) = [-1,5 \ 0,47]'$ e $T_k \in [10, 200]$ ms obtidos a partir do Algoritmo 1 com condições DP (linha contínua) e a partir da solução de (132) (tracejada-pontilhada).

Tabela 6: Matrizes K e P obtidas no instante de amostragem $t_k = 0$, para $T_k \in [10, 200]$ ms e $x(0) = [2 \ 0]'$.

	(SHI; SU, 2014)	IP Algoritmo 1	DP Algoritmo 1
$K_{0,0}$	$\begin{bmatrix} -0,2350 & -2,6965 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,2550 & -2,3980 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,2570 & -2,4029 \end{bmatrix}$
$K_{0,1}$	$\begin{bmatrix} -0,0399 & 0,6587 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,1172 & -0,0006 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,1202 & -0,0208 \end{bmatrix}$
$P_{0,0}$	$\begin{bmatrix} 9,2286 & 32,6053 \\ 32,6053 & 423,5449 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6,8633 & 18,1410 \\ 18,1410 & 170,3473 \end{bmatrix}$	$P_{0,0} = \begin{bmatrix} 6,8131 & 18,1528 \\ 18,1528 & 172,0269 \end{bmatrix}$
			$P_{0,1} = \begin{bmatrix} 0,0016 & 0,2919 \\ 0,2919 & 5,5154 \end{bmatrix}$
γ_0	36,9144	27,4686	27,2617

são aumentados. Como esperado, em todos os métodos aplicados, maiores limites de $\sigma(t)$, $\dot{\sigma}(t)$ e T_k implicam em maiores valores obtidos para γ_0 .

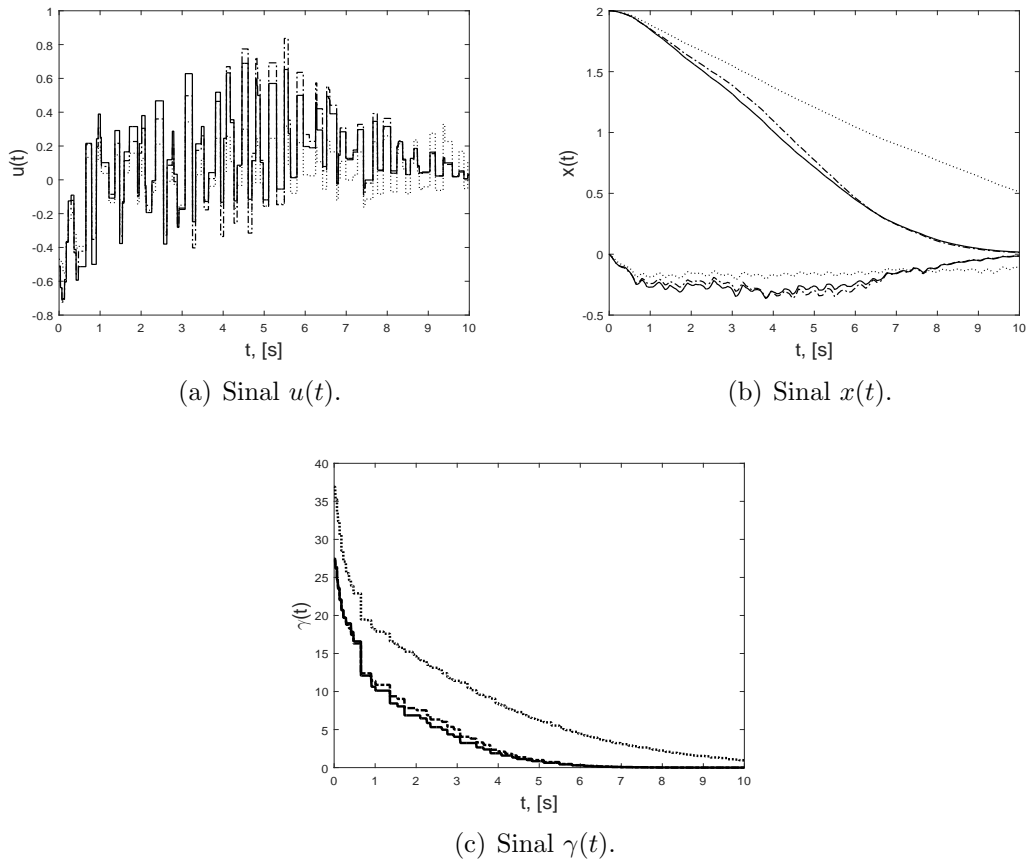


Figura 13: Resultado de simulação para $x(0) = [2 \ 0]'$ e $T_k \in [10, 200]$ ms obtidos a partir do Algoritmo 1 com condições DP (linha contínua) e IP (tracejada-pontilhada) e do Algoritmo em (SHI; SU, 2014) (pontilhada).

4.4 Considerações Finais

Neste Capítulo, foram apresentadas condições na forma quasi-LMI (i.e., são LMI desde que uma variável escalar seja fixada) para projeto de ganhos LPV de realimentação de estados amostrados estabilizantes para sistemas LPV sujeitos a saturação no sinal de controle. Estas condições foram obtidas com o uso de um *looped*-funcional dependente de parâmetros e de uma versão dependente de parâmetros da condição de setor generalizada para tratar dos efeitos da saturação. Foram consideradas formalmente a possibilidade de amostragem aperiódica e o fato de que apesar dos parâmetros da planta variarem continuamente, os ganhos do controlador são atualizados apenas com as informações destes parâmetros nos instantes de amostragem. A partir das condições do Teorema 3, problemas de otimização foram propostos para: *a)* dado um conjunto de condições iniciais admissíveis, maximizar o limite superior do intervalo de amostragem; ou *b)* maximizar a estimativa da região de atração da origem, dados \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 .

Através do exemplo numérico, foram validadas as condições propostas e observadas algumas características do método. Notou-se uma relação entre \mathcal{T}_2 e a estimativa da região de atração da origem: quanto maior o \mathcal{T}_2 permitido, menor é esta região obtida. É visto também que um *looped*-funcional com mais matrizes afins no parâmetro permite obter resultados melhores, i.e., maiores valores factíveis de \mathcal{T}_2 são

Tabela 7: Valores obtidos para γ_0 , considerando $x(0) = [2 \ 0]'$, $T_k \in [10, 200]$ ms e $T_k \in [10, 400]$ ms, a partir das condições apresentadas em (SHI; SU, 2014) e das condições DP e IP do Teorema 4¹.

a	b	$T_k \in [10, 200]$ ms			$T_k \in [10, 400]$ ms ²	
		(SHI; SU, 2014)	DP	IP	DP	IP
0,5	0,1	24,1676	20,4491	20,4533	21,6264	21,6820
0,5	0,5	24,1676	21,5502	21,5759	24,6196	24,6682
0,5	0,9	24,1676	22,8358	22,8458	28,4931	28,5767
1	0,1	36,9144	27,4623	27,4701	30,0191	30,0831
1	0,5	36,9144	31,4123	31,4276	45,1376	45,2975
1	0,9	36,9144	36,6138	36,6703	73,6624	74,2491
1,5	0,1	NF	35,1043	35,1143	40,7476	40,8702
1,5	0,5	NF	44,8530	44,9352	109,4646	111,1978
1,5	0,9	NF	61,5685	61,7333	237,9407	239,7790
2	0,1	NF	43,3200	43,3433	60,9007	61,5877
2	0,5	NF	65,6819	65,8774	378,1015	NF
2	0,9	NF	109,7108	110,1618	NF	NF

¹ NF (não factível) indica que não encontrou-se uma solução factível.

² Para $T_k \in [10, 400]$ ms, as condições apresentadas em (SHI; SU, 2014) não são factíveis.

atingidos.

Além disso, foi considerada a estabilização com custo garantido, i.e., projeta-se uma lei de controle que assegure tanto a estabilidade assintótica local da origem para um dado conjunto de condições iniciais quanto um limite superior γ para a função custo quadrática $J(t_k, \infty)$. A partir destes resultados, um algoritmo para controle preditivo com dados amostrados foi proposto. Nesta estratégia, a cada instante de amostragem uma nova realimentação de estados dependente de parâmetros é calculada de forma a otimizar o critério de desempenho. O algoritmo proposto mostrou melhores resultados quando comparado ao proposto em (SHI; SU, 2014), como ilustrado no exemplo numérico.

Parte dos resultados apresentados neste capítulo está publicada em (PALMEIRA; GOMES DA SILVA Jr.; FLORES, 2016) e (PALMEIRA; GOMES DA SILVA JR.; FLORES, 2018a).

5 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

5.1 Introdução

Diferentemente dos sistemas lineares, em que as condições de análise de estabilidade e estabilização são propostas de modo genérico, no caso de sistemas não-lineares estas condições são propostas e válidas para classes específicas. Em particular, alguns sistemas não-lineares podem ser descritos por modelos quasi-LPV, que baseiam-se na possibilidade de reescrever o modelo dinâmico da planta de forma que os elementos não-lineares são representados por parâmetros variantes no tempo que dependem do estado do sistema (RUGH; SHAMMA, 2000). Assim, técnicas de controle LPV (veja (HOFFMANN; WERNER, 2015; BRIAT, 2014)) podem ser aplicadas para análise de estabilidade e estabilização do sistema não-linear em malha fechada. Nesta abordagem, uma outra vantagem é que as condições podem ser obtidas na forma de LMIs.

Uma outra abordagem existente na literatura consiste em representar o sistema não-linear com um modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno que pode ser visto como uma forma particular de modelagem quasi-LPV. Neste caso, o sistema é representado por uma soma ponderada de modelos lineares. Em (WU et al., 2014), a partir de um funcional L-K, condições LMI são propostas para projeto de um controlador *fuzzy* T-S que garanta estabilidade exponencial do sistema em malha fechada. Em (LI et al., 2014), condições LMI são obtidas para projeto de controladores *fuzzy* T-S por realimentação de estado ou de saída e rejeição a perturbação em sistemas de suspensão de veículos. Nestes trabalhos, não é considerado o fato de que muitos sistemas não-lineares são representados apenas localmente por modelos *fuzzy* T-S. Assim, se a região de validade do modelo é ignorada, as condições estabilizantes obtidas para o modelo podem não ser válidas para a dinâmica real do sistema não-linear.

Neste capítulo, foca-se no problema da estabilização com dados amostrados de uma classe de sistemas não-lineares, localmente representada por um modelo quasi-LPV. Além disso, a partir de um modelo local *fuzzy* T-S para o sistema não-linear, propõe-se um controlador *fuzzy* T-S amostrado estabilizante. A partir da abordagem por *looped*-funcional, condições estabilizantes na forma quasi-LMI são obtidas. Assim, problemas de otimização convexos são propostos para maximizar a estimativa da região de atração da origem \mathcal{R}_a ou, dado um conjunto de condições iniciais admissíveis, maximizar o limite superior \mathcal{T}_2 do intervalo de amostragem, enquanto a estabilidade assintótica regional (local) é assegurada.

5.2 Formulação do Problema

Considere uma classe de sistemas não-lineares em tempo contínuo com controle amostrado descrita como:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t), u(t)), \quad (139)$$

$$u(t) = l(x(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (140)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$ são os vetores de estado e de entrada, respectivamente, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções não-lineares e (localmente) Lipschitz, com $f(0) = g(0,0) = l(0) = 0$. Assim como nos capítulos anteriores, considera-se a abordagem com dados amostrados, com $l(x(t_k))$ representando uma lei de controle por realimentação de estado não-linear com dados amostrados, isto é, o estado $x(t)$ é medido nos instantes de amostragem t_k e mantido constante durante o intervalo de amostragem $[t_k, t_{k+1})$ para todo $k \geq 0$ e assume-se $T_k = t_{k+1} - t_k$, em que $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ e $\mathcal{T}_1 > 0$.

Assim como no Capítulo 4, considera-se que o ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada seja a origem e que \mathcal{R}_a seja a região de atração da origem. Assume-se que é possível a síntese de uma lei de controle, tal que a estabilidade assintótica local da origem é garantida, isto é, a estabilidade assintótica da origem não pode ser assegurada para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$. Dada a dificuldade de determinar de forma analítica \mathcal{R}_a , um problema de interesse é estabelecer uma estimativa \mathcal{D} desta região tal que $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}_a \subseteq \mathbb{R}^n$, considerando-se os elementos não-lineares (representados pelos parâmetros variantes) e que o intervalo de amostragem possa ser variável. Assim, considerando um conjunto de condições iniciais admissíveis $\mathcal{E}(X_0, 1)$ definido em (72), os seguintes problemas de interesse são enunciados.

Problema 6. *Dado os limites \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 dos intervalos de amostragem, determinar uma lei de controle (140) e uma estimativa $\mathcal{E}(X_0, 1)$ do conjunto \mathcal{R}_a do sistema em malha fechada (139)-(140).*

Problema 7. *Dado \mathcal{T}_1 e o conjunto de condições iniciais admissíveis $\mathcal{E}(X_0, 1)$, determinar uma lei de controle (140) e o máximo \mathcal{T}_2 factível tal que $\forall x(0) \in \mathcal{E}(X_0, 1)$, as correspondentes trajetórias do sistema (139)-(140) convirjam assintoticamente para a origem, $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$.*

Para propor condições que solucionem os Problemas 6 e 7, duas abordagens para modelar o sistema e para o projeto da lei de controle são utilizadas: modelos quasi-LPV e modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno.

5.3 Sistemas Quasi-LPV com Dados Amostrados

Assume-se que o sistema não-linear (139)-(140) pode ser representado pelo seguinte sistema quasi-LPV

$$\dot{x}(t) = A(\sigma(x(t)))x(t) + B(\sigma(x(t)))u(t), \quad (141)$$

$$u(t) = K(\sigma(x(t_k)))x(t_k), \quad (142)$$

para $t \in [t_k, t_{k+1})$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, em que $\sigma(x(t))$ é um vetor de parâmetros em \mathbb{R}^N e $\sigma_{(j)}(x(t))$ são funções Lipschitz do estado, para $j = 1, \dots, N$. Assim, note que

enquanto a dinâmica do sistema (141) depende do estado em tempo contínuo, a lei de controle (142) depende somente do valor do estado amostrado.

Considera-se a seguinte suposição.

Suposição 1. $A(\sigma)$, $B(\sigma)$ e $K(\sigma)$ dependem de maneira afim em σ .

Por simplicidade, denota-se $\sigma(x(t))$ como $\sigma(t)$. Considerando a Suposição 1 e a abordagem com dados amostrados, o sistema não-linear (141)-(142) pode ser representado por

$$\dot{x}(t) = A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))K(\sigma(t_k))x(t_k), \text{ para } t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (143)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e com as matrizes

$$\begin{aligned} A(\sigma(t)) &= A_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}(t)A_j = A_0 + \mathbf{A}(\sigma(t) \otimes I), \\ B(\sigma(t)) &= B_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}(t)B_j = B_0 + \mathbf{B}(\sigma(t) \otimes I), \\ K(\sigma(t_k)) &= K_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_{(j)}(t_k)K_j = K_0 + \mathbf{K}(\sigma(t_k) \otimes I), \end{aligned} \quad (144)$$

em que $\mathbf{A} = [A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_N]$, $\mathbf{B} = [B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_N]$ e $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ \cdots \ K_N]$.

5.3.1 Modelagem Politópica Local

A abordagem quasi-LPV para plantas não-lineares permite estender as técnicas de estabilidade existentes para sistemas lineares e aplicá-las para sistemas não-lineares (HUANG, 1999). Assim, considerando um modelo quasi-LPV da planta não-linear, obtêm-se condições de análise de estabilidade e estabilização, a partir dos resultados desenvolvidos para sistemas LPV. Contudo, para estas condições serem válidas para o sistema não-linear, deve-se considerar uma região de operação ou uma região de validade (\mathcal{R}_H) do modelo quasi-LPV. Isto é, as possíveis trajetórias do sistema devem ser limitadas considerando as restrições do modelo. Para o conjunto $\mathcal{R}_H \in \mathbb{R}^n$, considera-se a seguinte suposição sobre o parâmetro $\sigma(x(t))$ no sistema (143).

Suposição 2. Para $x(t) \in \mathcal{R}_H$, segue que $\sigma(t) \in \mathcal{B}_\sigma$, com

$$\mathcal{B}_\sigma = \{\sigma \in \mathbb{R}^N; \underline{\sigma}_{(j)} \leq \sigma_{(j)} \leq \bar{\sigma}_{(j)}, j = 1, \dots, N\}. \quad (145)$$

Em particular, considera-se que \mathcal{R}_H é um conjunto poliedral descrito como:

$$\mathcal{R}_H = \{x \in \mathbb{R}^n; |H_{(v)}x| \leq \eta_{(v)}, v = 1, \dots, v_c\}, \quad (146)$$

com $\eta_{(v)} > 0$, $H_{(v)} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

A partir dos limites de $\sigma(t)$ definidos em (145), segue que \mathcal{B}_σ é um politopo convexo em \mathbb{R}^N com 2^N vértices, i.e.:

$$\mathcal{B}_\sigma = Co\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2^N}\}.$$

Assim, desde que $x(t) \in \mathcal{R}_H$, $\sigma(t)$ pode ser obtido a partir de uma combinação convexa dos vértices do politopo \mathcal{B}_σ , i.e.,

$$\sigma(t) = \sum_{f=1}^{2^N} \gamma_f(t) \nu_f,$$

com $\gamma_f(t) \geq 0$ e $\sum_{f=1}^{2^N} \gamma_f(t) = 1$.

Para $x(t) \in \mathcal{R}_H$, $\forall t \geq 0$, o comportamento do sistema não-linear em malha fechada (139)-(140) pode assim ser localmente representado pela seguinte inclusão diferencial politópica (*polytopic differential inclusion* - PDI):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(\sum_{f=1}^{2^N} \gamma_f(t) (A_0 + \mathbf{A}(\nu_f)) \right) x(t) + \left(\sum_{f=1}^{2^N} \gamma_f(t) (B_0 + \mathbf{B}(\nu_f)) \right) u(t) \\ u(t) &= \left(\sum_{g=1}^{2^N} \gamma_g(t_k) (K_0 + \mathbf{K}(\nu_g)) \right) x(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \end{aligned} \quad (147)$$

com $\mathbf{A}(\nu_f) = \mathbf{A}(\nu_f \otimes I)$, $\mathbf{B}(\nu_f) = \mathbf{B}(\nu_f \otimes I)$ e $\mathbf{K}(\nu_g) = \mathbf{K}(\nu_g \otimes I)$. Neste caso tem-se que a PDI (147) representa o sistema não-linear (139)-(142) somente na região \mathcal{R}_H , i.e., este conjunto é uma região de validade do modelo quasi-LPV (SILVA et al., 2014).

5.3.2 Abordagem por *Looped*-funcional

Considerando as definições em (11) para $\tau \in [0, T_k]$, desde que $x_k(\tau) \in \mathcal{R}_H$, o sistema em malha fechada (147) pode ser representado pelo seguinte sistema quasi-LPV

$$\dot{x}_k(\tau) = A(\sigma_k(\tau))x_k(\tau) + B(\sigma_k(\tau))K(\sigma_k(0))x_k(0). \quad (148)$$

Para tratar os Problemas 6 e 7 considerando (148), é utilizada uma abordagem por *looped*-funcional semelhante à apresentada nos Capítulos 3 e 4. Contudo, neste capítulo, as condições devem ser modificadas para considerar os efeitos dos elementos não-lineares do sistema e as limitações do modelo. Isso significa que as trajetórias do sistemas em malha fechada não podem sair de \mathcal{R}_H , visto que o modelo politópico (147) é válido apenas na região \mathcal{R}_H . Assim, semelhante ao proposto em (PALMEIRA et al., 2016), o seguinte lema apresenta condições base para análise de estabilidade de uma classe de sistema não-linear com dados amostrados representada por (148).

Lema 9. *Considere uma PDF $V : \mathbb{R}^n \times \mathcal{B}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfazendo*

$$\mu_1 \|x\|^2 \leq V(x_k, \sigma_k) \leq \mu_2 \|x\|^2, \quad (149)$$

com $0 < \mu_1 \leq \mu_2$, e uma PDLF $\mathcal{V}_0 : [0, \mathcal{T}_2] \times \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n \times \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^N \times [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0(T_k, x_k, \sigma_k, T_k) &= \mathcal{V}_0(0, x_k, \sigma_k, T_k) = 0, \quad \forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2], \\ \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) &> 0, \quad \forall \tau \in (0, T_k). \end{aligned} \quad (150)$$

Defina $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = V(x_k(\tau), \sigma_k(0)) + \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ e considere $\dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ como a derivada de $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ em relação a τ . Se existe um escalar $\mu > 0$ tal que as desigualdades

$$\dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) < -\mu \left\| \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \right\|^2, \text{ para } \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (151)$$

$$x'_k(\tau) H'_{(r)} H_{(r)} x_k(\tau) \leq \eta_{(r)}^2 V(x_k(\tau), \sigma_k(0)), \quad (152)$$

são verdadeiras, com relação as trajetórias do sistema (148), $\forall x_k \in \mathbb{K}_{[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]}^n$, $\forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma$, $\forall \tau \in [0, T_k]$, $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ e $\forall k \geq 0$, então para qualquer condição inicial $x(0) = x_0(0)$ pertencente ao conjunto $\mathcal{L}_V(1) = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{B}_\sigma} V(x_k, \sigma_k) \leq 1$, segue que:

(i) $\Delta V(k) = V(x_{k+1}(0), \sigma_{k+1}(0)) - V(x_k(0), \sigma_k(0)) < -\mu \mathcal{T}_1 \|x_k(0)\|^2$, para $x_k(0) \neq 0$, $\forall k \geq 0$;

(ii) as correspondentes trajetórias do sistema em malha fechada (139)-(140), com intervalos de amostragem $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, não deixam o conjunto $\mathcal{L}_V(1)$ e convergem assintoticamente para a origem.

Demonstração: Suponha que $x(0) = x_0(0) \in \mathcal{L}_V(1)$. Assim, se (152) é satisfeita, tem-se que $x(0) \in \mathcal{R}_H$. Por definição, tem-se $\mathcal{V}_0(0, x_0, \sigma_0, T_0) = \mathcal{V}_0(T_0, x_0, \sigma_0, T_0) = 0$. Logo, se (151) é satisfeita, segue que

$$\begin{aligned} V(x_1(0), \sigma_1(0)) &= \mathcal{W}(0, x_1, \sigma_1, T_1) < \mathcal{W}(\tau, x_0, \sigma_0, T_0) < \mathcal{W}(0, x_0, \sigma_0, T_0) \\ &= V(x_0(0), \sigma_0(0)) \leq 1, \quad \forall \tau \in (0, T_k). \end{aligned}$$

Então, conclui-se que $V(x_1(0), \sigma_1(0)) < V(x_0(0), \sigma_0(0)) \leq 1$. Como $\mathcal{V}_0(\tau, x_0, \sigma_0, T_0) > 0$ para $\tau \in (0, T_k)$, segue que $V(x_0(\tau), \sigma_0(0)) < \mathcal{W}(\tau, x_0, \sigma_0, T_0)$ e portanto conclui-se que

$$V(x_0(\tau), \sigma_0(0)) < V(x_0(0), \sigma_0(0)).$$

Generalizando para $k \geq 1$, desde que \mathcal{V}_0 satisfaça (150), segue que para todo $x(0) = x_0(0) \in \mathcal{L}_V(1)$, tem-se

$$V(x_k(\tau), \sigma_k(0)) < \mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) < \mathcal{W}(0, x_k, \sigma_k, T_k) = V(x_k(0), \sigma_k(0)) \leq 1,$$

para $\tau \in (0, T_k)$, ou seja, a trajetória fica confinada em $\mathcal{L}_V(1)$. Seguindo o mesmo procedimento dos Lemas 1 e 6, conclui-se também que $\Delta V(k) < -\mu \mathcal{T}_1 \|x_k(0)\|^2$, $\forall k \geq 0$, logo o item (i) é válido. Como o funcional \mathcal{V}_0 é semi-definido positivo, segue que o funcional \mathcal{W} é definido positivo. Então (151) garante que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = 0$, o que implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} V(x_k, \sigma_k) = 0$ e $x_k(\tau) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, o que conclui a prova do item (ii) e que $\mathcal{L}_V(1)$ é um conjunto invariante. \square

5.3.3 Condições Estabilizantes

Nesta seção, a partir dos resultados apresentados no Lema 9, condições quasi-LMI são propostas para estabilização do sistema (139)-(140) representado pelo modelo quasi-LPV (143). Para isso, considera-se uma PDQF $V : \mathbb{R}^n \times \mathcal{B}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ descrita como

$$V(x_k, \sigma_k) = x_k(\tau)' P(\sigma_k(0)) x_k(\tau), \quad (153)$$

com $0 < P(\sigma) \in \mathbb{S}^n \forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma$ e afim no parâmetro, que satisfaz (149), e a seguinte PDLF:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) = (T_k - \tau) \left\{ (x_k(\tau) - x_k(0))' [F(\sigma_k(0))(x_k(\tau) - x_k(0)) \right. \\ \left. + 2G(\sigma_k(0))x_k(0)] + \tau x_k'(0)X(\sigma_k(0))x_k(0) + \int_0^\tau \dot{x}'_k(\theta)R\dot{x}_k(\theta)d\theta \right\}, \end{aligned} \quad (154)$$

em que $0 < R \in \mathbb{S}^n$ e as matrizes dependentes dos parâmetros $F(\sigma) \in \mathbb{S}^n$, $X(\sigma) \in \mathbb{S}^n$ e $G(\sigma) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 0, \dots, N$, tais que,

$$X(\sigma) > 0, \quad (155)$$

$$\begin{bmatrix} F(\sigma) & G(\sigma)' - F(\sigma) \\ * & F(\sigma) - \text{He}\{G(\sigma)\} \end{bmatrix} > 0, \quad (156)$$

$\forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma$.

A partir de (155)-(156) e por definição, note que

$$\mathcal{V}_0(T_k, x_k, \sigma_k, T_k) = \mathcal{V}_0(0, x_k, \sigma_k, T_k) = 0$$

e $\mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) > 0$ para $\tau \in (0, T_k)$, i.e., \mathcal{V}_0 satisfaz (150).

Por simplicidade, como nos capítulos precedentes, para toda matriz \mathbf{L} com $\mathbf{L} = [L_1 \ L_2 \ \dots \ L_N]$, em que a matriz L_j é uma matriz dimensão apropriada para $j = 0, \dots, N$ e um vetor $\nu \in \mathbb{R}^N$, define-se:

$$\mathbf{L}(\nu) = \mathbf{L}(\nu \otimes I). \quad (157)$$

Assim, a partir do Lema 9 e das definições de V e \mathcal{V}_0 em (153) e (154), respectivamente, o seguinte teorema é proposto.

Teorema 7. *Se existem matrizes $\tilde{P}_j, \tilde{F}_j \in \mathbb{S}^n$ e $\tilde{X}_j \in \mathbb{S}^n$, $\tilde{G}_j, \tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{Q}_j \in \mathbb{R}^{3n \times n}$, $\tilde{K}_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j = 0, 1, \dots, N$, uma matriz definida positiva $\tilde{R} \in \mathbb{S}^n$ e um escalar positivo ϵ satisfazendo*

$$\tilde{\Pi}_1(\nu_f, \nu_g) + T_k \tilde{\Pi}_2(\nu_g) + T_k \tilde{\Pi}_3(\nu_g) < 0, \quad (158)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1(\nu_f, \nu_g) - T_k \tilde{\Pi}_3(\nu_g) & T_k(\tilde{Q}_0 + \tilde{Q}(\nu_g)) \\ * & -T_k \tilde{R} \end{bmatrix} < 0, \quad (159)$$

$$\begin{bmatrix} (\tilde{P}_0 + \tilde{P}(\nu_g)) & \tilde{Y}H_{(v)} \\ * & \eta_{(v)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad v = 1, \dots, v_c, \quad (160)$$

$$\begin{bmatrix} (\tilde{F}_0 + \tilde{F}(\nu_g)) & (\tilde{G}_0 + \tilde{G}(\nu_g))' - (\tilde{F}_0 + \tilde{F}(\nu_g)) \\ * & (\tilde{F}_0 + \tilde{F}(\nu_g)) - \text{He}\{(\tilde{G}_0 + \tilde{G}(\nu_g))\} \end{bmatrix} > 0, \quad (161)$$

$$(\tilde{X}_0 + \tilde{X}(\nu_g)) > 0, \quad (162)$$

$\forall(\nu_f, \nu_g) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_\sigma)$, $T_k \in \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}$, com^1

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_1(\nu_f, \nu_g) &= \text{He} \left\{ M'_1(\tilde{P}_0 + \tilde{\mathbf{P}}(\nu_g))M_3 - M'_{12}(\tilde{G}_0 + \tilde{\mathbf{G}}(\nu_g))M_2 - (\tilde{Q}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}(\nu_g))M_{12} \right. \\ &\quad + (\epsilon M'_1 + M'_3)((A_0 + \mathbf{A}(\nu_f))\tilde{Y}M_1 + (B_0 + \mathbf{B}(\nu_f))(\tilde{K}_0 + \tilde{\mathbf{K}}(\nu_g))M_2 \\ &\quad \left. - \tilde{Y}M_3) \right\} - M'_{12}(\tilde{F}_0 + \tilde{\mathbf{F}}(\nu_g))M_{12}, \\ \tilde{\Pi}_2(\nu_g) &= M'_3\tilde{R}M_3 + \text{He} \left\{ M'_3((\tilde{F}_0 + \tilde{\mathbf{F}}(\nu_g))M_{12} + (\tilde{G}_0 + \tilde{\mathbf{G}}(\nu_g))M_2) \right\}, \\ \tilde{\Pi}_3(\nu_g) &= M'_{24}(\tilde{X}_0 + \tilde{\mathbf{X}}(\nu_g))M_{24},\end{aligned}\tag{163}$$

e com as matrizes auxiliares definidas em (25), então a lei de controle (142), com as matrizes $K_j = \tilde{K}_j\tilde{Y}^{-1}$, $j = 0, 1, \dots, N$, assegura que para toda a condição inicial $x(0) \in \mathcal{L}_V(1) = \bigcap_{f \in \{1, \dots, 2^N\}} \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_f)), 1)$ com $P_j = \tilde{Y}^{-1}\tilde{P}_j\tilde{Y}^{-1}$, as trajetórias correspondentes do sistema não-linear com dados amostrados (139)-(140), representado pelo sistema quasi-LPV (143), sob as Suposições 1 e 2, convergem assintoticamente para a origem, $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$.

Demonstração: A prova deste teorema baseia-se nos resultados apresentados no Lema 9, para isso considere a PDQF V e a PDLF \mathcal{V}_0 definidos em (153) e (154), respectivamente. Diferenciando $\mathcal{W}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ com relação a τ resulta em

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{W}} &= 2\dot{x}'_k(\tau)P(\sigma_k(0))x_k(\tau) - (x_k(\tau) - x_k(0))' [F(\sigma_k(0))(x_k(\tau) - x_k(0)) \\ &\quad + 2G(\sigma_k(0))x_k(0)] + (T_k - \tau) [\dot{x}'_k(\tau)2G(\sigma_k(0))x_k(0) \\ &\quad + 2\dot{x}'_k(\tau)F(\sigma_k(0))(x_k(\tau) - x_k(0)) + \dot{x}'_k(\tau)R\dot{x}_k(\tau)] \\ &\quad + (T_k - 2\tau)x_k(0)'X(\sigma_k(0))x_k(0) - \int_0^\tau \dot{x}'_k(\theta)R\dot{x}_k(\theta)d\theta.\end{aligned}\tag{164}$$

Definindo

$$\chi(\tau) = [x'_k(\tau) \quad x'_k(0) \quad \dot{x}'_k(\tau)]',$$

com as matrizes auxiliares M_1 , M_2 , M_3 e M_{12} definidas em (25), considerando a abordagem por sistema descritor, a partir de (148), para qualquer matriz Y_1 e Y_2 de dimensões apropriadas, tem-se

$$\Theta = \chi'(\tau)(Y_1M_1 + Y_2M_3)'[A(\sigma_k(\tau))M_1 + B(\sigma_k(\tau))K(\sigma_k(0))M_2 - M_3]\chi(\tau) = 0.\tag{165}$$

Definindo uma matriz $Q(\sigma_k(0)) \in \mathbb{R}^{3n \times n}$, a partir de (164), (165) e da inequação (27), segue que

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{W}} &\leq \chi'(\tau)[\Pi_1(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau)) + (T_k - \tau)\Pi_2(\sigma_k(0)) \\ &\quad + (T_k - 2\tau)\Pi_3(\sigma_k(0)) + \tau Q(\sigma_k(0))R^{-1}Q'(\sigma_k(0))]\chi(\tau),\end{aligned}\tag{166}$$

com

$$\begin{aligned}\Pi_1(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau)) &= \text{He} \{ M'_3P(\sigma_k(0))M_1 - Q(\sigma_k(0))M_{12} - M'_{12}G(\sigma_k(0))M_2 \\ &\quad + (Y_1M_1 + Y_2M_3)'[A(\sigma_k(\tau))M_1 + B(\sigma_k(\tau))K(\sigma_k(0))M_2 - M_3] \\ &\quad - M'_{12}F(\sigma_k(0))M_{12}, \\ \Pi_2(\sigma_k(0)) &= \text{He} \{ M'_3F(\sigma_k(0))M_{12} + M'_3G(\sigma_k(0))M_2 \} + M'_3RM_3, \\ \Pi_3(\sigma_k(0)) &= M'_{24}X(\sigma_k(0))M_{24},\end{aligned}$$

¹Veja definição em (157).

Supondo que Y_2 é uma matriz não-singular, definem-se $Y_1 = \epsilon Y_2$ e $\tilde{Y} = Y_2^{-1}$. Então, considerando a transformação de similaridade $\tilde{\chi}(\tau) = \Xi^{-1}\chi(\tau)$, com $\Xi = \text{diag}\{\tilde{Y}, \tilde{Y}, \tilde{Y}\}$, pode-se reescrever (166) como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} &\leq \tilde{\chi}'(\tau)\Xi'[\Pi_1(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau)) + (T_k - \tau)\Pi_2(\sigma_k(0)) + (T_k - 2\tau)\Pi_3(\sigma_k(0)) \\ &\quad + \tau Q(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau))\tilde{R}^{-1}Q'(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau))]\Xi\tilde{\chi}(\tau) \\ &= \chi'(\tau)\Xi^{-1}'[\tilde{\Psi}(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau), \tau, T_k)]\Xi^{-1}\chi(\tau). \end{aligned}$$

A partir do lado direito desta inequação, nota-se que se $\tilde{\Psi}(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau), \tau, T_k) < 0$ para todo $\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$ e $\forall \tau \in [0, T_k]$ e $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, segue que existe um escalar positivo μ tal que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) &\leq \chi'(\tau)\Xi^{-1}'\tilde{\Psi}(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau), \tau, T_k)\Xi^{-1}\chi(\tau) \\ &< -\mu\|\chi(\tau)\|^2 \leq -\mu\|x_k(0)\|^2. \end{aligned}$$

Assim, considerando $\tilde{\Psi}(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau), \tau, T_k) < 0$ e aplicando o complemento de Schur, se Ξ é uma matriz não-singular, segue que uma condição suficiente para verificar

$$\dot{\mathcal{W}}(\tau, x_k, \sigma_k, T_k) < -\mu \left\| \begin{bmatrix} x_k(\tau) \\ x_k(0) \end{bmatrix} \right\|^2$$

é dada por

$$\Psi(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau), \tau, T_k) = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau), \tau, T_k) & \tau\Xi'Q(\sigma_k(0))\tilde{Y} \\ * & -\tau\tilde{Y}'R\tilde{Y} \end{bmatrix} < 0, \quad (167)$$

$\forall(\sigma_k(\tau), \sigma_k(0)) \in \text{Ver}(\mathcal{B}_\sigma) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_\sigma)$, $\forall \tau \in [0, T_k]$ e $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, com as matrizes $\tilde{\Pi}(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau), \tau, T_k) = \Xi'\Pi_1(\sigma_k(0), \sigma_k(\tau))\Xi + (T_k - \tau)\Xi'\Pi_2(\sigma_k(0))\Xi + (T_k - 2\tau)\Xi'\Pi_3(\sigma_k(0))\Xi$.

Considerando a Suposição 2, como $x_k(\tau) \in \mathcal{R}_H$, tem-se que $\sigma_k(\tau)$ e $\sigma_k(0) \in \mathcal{B}_\sigma$ para todo $\tau \in [0, T_k]$. Neste caso, por argumentos de convexidade, uma condição necessária e suficiente para satisfazer (167) consiste em verificá-la em todas as combinações dos vértices de \mathcal{B}_σ , i.e., deve-se verificar a seguinte inequação

$$\Psi(\nu_g, \nu_f, \tau, T_k) < 0, \quad \forall(\nu_f, \nu_g) \in \text{Ver}(\mathcal{B}_\sigma) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_\sigma). \quad (168)$$

Note que, como (168) é afim também em relação a variável $\tau \in [0, T_k]$, a partir de argumentos de convexidade, é suficiente garantir que esta inequação é verificada para $\tau = 0$ e $\tau = T_k$. Portanto, (168) é satisfeita para todo $\tau \in [0, T_k]$ se e somente se

$$\tilde{\Pi}_1(\nu_f, \nu_g) + T_k\tilde{\Pi}_2(\nu_g) + T_k\tilde{\Pi}_3(\nu_g) < 0, \quad (169)$$

e

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1(\nu_f, \nu_g) - T_k\tilde{\Pi}_3(\nu_g) & T_k(\tilde{Q}_0 + \tilde{Q}(\nu_g)) \\ * & -T_k\tilde{R} \end{bmatrix} < 0, \quad (170)$$

com $\tilde{\Pi}_1(\nu_f, \nu_g)$, $\tilde{\Pi}_2(\nu_g)$ e $\tilde{\Pi}_3(\nu_g)$ definidos em (163), $\forall f, g = 1, \dots, 2^N$, e com as mudanças de variáveis definida em (34).

Além disso, como $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, aplicando o mesmo argumento de convexidade tem-se que (158) e (159) devem ser verificadas para $T_k = \mathcal{T}_1$ e $T_k = \mathcal{T}_2$. Por outro lado, note que (158) assegura implicitamente que \tilde{Y} é uma matriz não-singular e,

portanto, é possível obter Ξ^{-1} , ou seja, se as inequações (158) e (159) são verificadas, segue que (169) e (170) são válidas e conseqüentemente, tem-se que (151) do Lema 9 é satisfeita.

Além disso, se (161)-(162) são verificadas $\forall \nu \in \mathcal{B}_\sigma$, segue que $\mathcal{V}_0(\tau, x_k, \sigma_k, T_k)$ satisfaz (150) do Lema 9.

Por outro lado, é visto que (160) assegura que (152) é satisfeita e $\mathcal{L}_V(1) \subset \mathcal{R}_H$ e, assegura-se que $P(\sigma) > 0, \forall \sigma \in \mathcal{B}_\sigma$.

Então, como as condições (150)-(152) do Lema 9 são satisfeitas, tem-se que a estabilidade assintótica da origem do sistema (141)-(142) é assegurada para todo $x(0) = x_0(0) \in \mathcal{L}_V(1)$. Conseqüentemente, como (141)-(142) representam o sistema não-linear (139) com (142), segue que $\mathcal{L}_V(1)$ está contida na região de atração da origem.

□

Considerando o sistema não-linear original (139)-(140), observe que como σ é uma função do estado, segue que a lei de controle $u(t) = K(\sigma(x(t_k)))x(t_k)$ é uma realimentação não-linear dos estados.

5.3.4 Análise de Estabilidade

As condições apresentadas no Teorema 7 também podem ser utilizados na análise de estabilidade do sistema (141)-(142). Para isso, considera-se a variável \tilde{K}_j como $K_j \tilde{Y}$ para $j = 0, 1, \dots, N$. Neste caso, não é necessária a transformação de similaridade considerado no Teorema 7 e, conseqüentemente, a introdução da variável ϵ , o que leva a obtenção de condições verdadeiramente LMIs, como apresentadas no seguinte corolário.

Corolário 4. *Se existem matrizes $P_j, F_j \in \mathbb{S}^n$ e $X_j \in \mathbb{S}^n$, G_j, Y_1 e $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_j \in \mathbb{R}^{3n \times n}$, $j = 0, 1, \dots, N$, uma matriz definida positiva $R \in \mathbb{S}^n$, satisfazendo as LMIs*

$$\Pi_1(\nu_f, \nu_g) + T_k \Pi_2(\nu_g) + T_k \Pi_3(\nu_g) < 0, \quad (171)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_1(\nu_f, \nu_g) - T_k \Pi_3(\nu_g) & T_k(Q_0 + \mathbf{Q}(\nu_g)) \\ * & -T_k R \end{bmatrix} < 0, \quad (172)$$

$$\begin{bmatrix} (P_0 + \mathbf{P}(\nu_g)) & H_{(v)} \\ * & \eta_{(v)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad v = 1, \dots, v_c, \quad (173)$$

$$\begin{bmatrix} (F_0 + \mathbf{F}(\nu_g)) & (G_0 + \mathbf{G}(\nu_g))' - (F_0 + \mathbf{F}(\nu_g)) \\ * & (F_0 + \mathbf{F}(\nu_g)) - \text{He}\{(G_0 + \mathbf{G}(\nu_g))\} \end{bmatrix} > 0, \quad (174)$$

$$(X_0 + \mathbf{X}(\nu_g)) > 0, \quad (175)$$

$\forall (\nu_f, \nu_g) \in \text{Ver}(\mathcal{B}_\sigma) \times \text{Ver}(\mathcal{B}_\sigma)$, $T_k \in \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}$, em que

$$\begin{aligned} \Pi_1(\nu_f, \nu_g) = & \text{He}\{M'_1(P_0 + \mathbf{P}(\nu_g))M_3 - M'_{12}(G_0 + \mathbf{G}(\nu_g))M_2 - (Q_0 + \mathbf{Q}(\nu_g))M_{12} \\ & + (M'_1 Y'_1 + M'_3 Y'_2)((A_0 + \mathbf{A}(\nu_f))M_1 + (B_0 + \mathbf{B}(\nu_f))(K_0 + \mathbf{K}(\nu_g))M_2 \\ & - M_3)\} - M'_{12}(F_0 + \mathbf{F}(\nu_g))M_{12}, \end{aligned}$$

$$\Pi_2(\nu_g) = M'_3 R M_3 + \text{He}\{M'_3((F_0 + \mathbf{F}(\nu_g))M_{12} + (G_0 + \mathbf{G}(\nu_g))M_2)\},$$

$$\Pi_3(\nu_g) = M'_{24}(X_0 + \mathbf{X}(\nu_g))M_{24},$$

e com as matrizes auxiliares definidas em (25), então a lei de controle (142) assegura que para toda a condição inicial $x(0) \in \mathcal{L}_V(1)$, as trajetórias correspondentes do sistema não-linear com dados amostrados (139)-(140), representado pelo sistema quasi-LPV (143), sob as Suposições 1 e 2, convergem assintoticamente para a origem, $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$.

5.3.5 Problemas de Otimização

A partir das condições apresentadas no Teorema 7, nesta seção, são propostos problemas de otimização para resolver os Problemas 6 e 7 definidos na Seção 5.2.

5.3.5.1 Maximização da Estimativa da Região de Atração

Note que o conjunto $\mathcal{L}_V(1) \subset \mathcal{R}_H$ é, por definição, incluso em \mathcal{R}_a e pode ser visto como uma estimativa desta. Então, a partir do Problema 6 (dados os limites do intervalo de amostragem \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2), o objetivo é maximizar o conjunto $\mathcal{L}_V(1)$. Isto pode ser feito, por exemplo, por meio da minimização de um escalar positivo γ , tal que $\mathcal{E}(\gamma I, 1) \subseteq \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_g)), 1)$, $\forall g = 1, \dots, 2^N$, isto é, maximiza-se o menor eixo dos elipsoides $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_g)), 1)$ associados a cada um dos vértices de \mathcal{B}_σ , que corresponde ao seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min \quad \gamma \\ & \text{sujeito a} \\ & (158)-(162), \\ & \begin{bmatrix} \gamma I & I \\ I & \tilde{Y}' + \tilde{Y} - (\tilde{P}_0 + \tilde{\mathbf{P}}(\nu_g)) \end{bmatrix} > 0, \\ & \forall (\nu_f, \nu_g) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_\sigma), \text{ para } T_k \in \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}, v = 1, \dots, v_c. \end{aligned} \tag{176}$$

A partir do Lema 7, note que a última inequação garante que $(P_0 + \mathbf{P}(\nu_g)) < \gamma I$, então $\mathcal{E}(\gamma I, 1) \subset \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_g)), 1)$, $\forall \nu_g \in Ver(\mathcal{B}_\sigma)$. Assim, minimizando γ maximiza-se o menor eixo dos elipsoides $\mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_g)), 1) \forall \nu_g \in Ver(\mathcal{B}_\sigma)$.

5.3.5.2 Maximização do Limite Superior do Intervalo de Amostragem

A partir do Problema 7, dado um conjunto de condições iniciais admissíveis $\mathcal{E}(X_0, 1)$ para o sistema (139)-(140) descrito em (72), o objetivo é calcular a lei de controle no sentido de maximizar o valor de \mathcal{T}_2 para o qual a estabilidade do sistema em malha fechada é assegurada para $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$. Isto pode ser obtido a partir da solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \max \quad \mathcal{T}_2 \\ & \text{sujeito a} \\ & (158)-(162), \\ & \begin{bmatrix} X_0 & I \\ I & \tilde{Y}' + \tilde{Y} - (\tilde{P}_0 + \tilde{\mathbf{P}}(\nu_g)) \end{bmatrix} > 0 \\ & \forall (\nu_f, \nu_g) \in Ver(\mathcal{B}_\sigma) \times Ver(\mathcal{B}_\sigma), \text{ para } T_k \in \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}, v = 1, \dots, v_c. \end{aligned} \tag{177}$$

Note que a última inequação garante que $(P_0 + \mathbf{P}(\nu_g)) < X_0$, o que equivale a $\mathcal{E}(X_0, 1) \subset \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_g)), 1)$, $\forall \nu_g \in Ver(\mathcal{B}_\sigma)$.

5.3.6 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema não-linear (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr, 2010):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (1 + x_1^2(t))x_1(t) + (2 + 8x_2^2(t))x_2(t) + u(t).\end{aligned}$$

Considerando $x_1 \in [-1, 1]$, $x_2 \in [-1, 1]$, $\sigma(x(t)) = [x_1^2(t) \ x_2^2(t)]'$ e $\mathcal{T}_1 = 10\text{ms}$, o sistema não-linear pode ser representado pelo modelo quasi-LPV (143) com as matrizes

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = 0.$$

Primeiramente, considere o problema de otimização (177), com $X_0 = 100 \times I$, o máximo T_k factível obtido é 71ms com as seguintes matrizes de realimentação de estados

$$\begin{aligned}K_0 &= [-16,6403 \quad -15,6226], \quad K_1 = 10^{-6} [0,2061 \quad -0,2470], \\ K_2 &= 10^{-6} [0,1704 \quad -0,2042].\end{aligned}\tag{178}$$

A partir dos ganhos projetados (178), para $T_k \in [10, 71]\text{ms}$, considera-se agora o problema de análise de estabilidade e de maximização da estimativa de \mathcal{R}_a , i.e., a partir de (176), obtém-se $\gamma = 24,7455$ e a estimativa $\mathcal{L}_V(1) = \bigcap_{g=1}^{2^N} \mathcal{E}((P_0 + \mathbf{P}(\nu_g)), 1)$, definida pelas seguintes matrizes:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 24,2481 & 2,3041 \\ 2,3041 & 1,5805 \end{bmatrix}, \quad P_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,3766 & 0,0099 \\ 0,0099 & -0,0230 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0,0044 & 0,0006 \\ 0,0006 & 0,0001 \end{bmatrix}.$$

Para estes resultados obtidos, na Figura 14, o conjunto $\mathcal{L}_V(1)$ está representado em linha contínua. Além disso, em linha contínua, trajetórias do sistema em malha fechada também são apresentadas para condições iniciais $x(0)$ na borda do conjunto $\mathcal{L}_V(1)$. Como esperado, as trajetórias iniciadas na fronteira do conjunto $\mathcal{L}_V(1)$ convergem para a origem. Em linha pontilhada, trajetórias para condições iniciais $x(0) \notin \mathcal{L}_V(1)$ também são apresentadas. Observe que obtêm-se trajetórias divergentes para condições iniciais não muito distantes da fronteira de $\mathcal{L}_V(1)$. O conjunto \mathcal{R}_H está ilustrado em linha tracejada, note que $\mathcal{L}_V(1) \subset \mathcal{R}_H$.

Para $T_k \in [10, 71]\text{ms}$, a partir da condição inicial $x(0) = [0,1062 \ -0,8500]'$ $\in \mathcal{L}_V$, na Figura 15, o sinal de controle $u(t)$ (Figura 15(b)) e a trajetória dos estados $x(t)$ (Figura 15(a)) são apresentados. Os intervalos de amostragem T_k são gerados aleatoriamente de forma que $T_k \in [10, 71]\text{ms}$ e estão ilustrados na Figura 15(c). Observe que as trajetórias convergem para a origem como esperado.

Para demonstrar a importância da região de validade do modelo quasi-LPV, considere o mesmo problema anterior com as matrizes definidas em (178), contudo desprezando a região de validade do modelo, i.e., não é levado em consideração a restrição $\mathcal{L}_V(1) \subset \mathcal{R}_H$. Com isso, obtém-se um conjunto de condições iniciais

$$\bar{\mathcal{L}}_V(1) = \bigcap_{g=1}^{2^N} \mathcal{E}(\bar{P}_0 + \bar{\mathbf{P}}(\nu_g), 1)$$

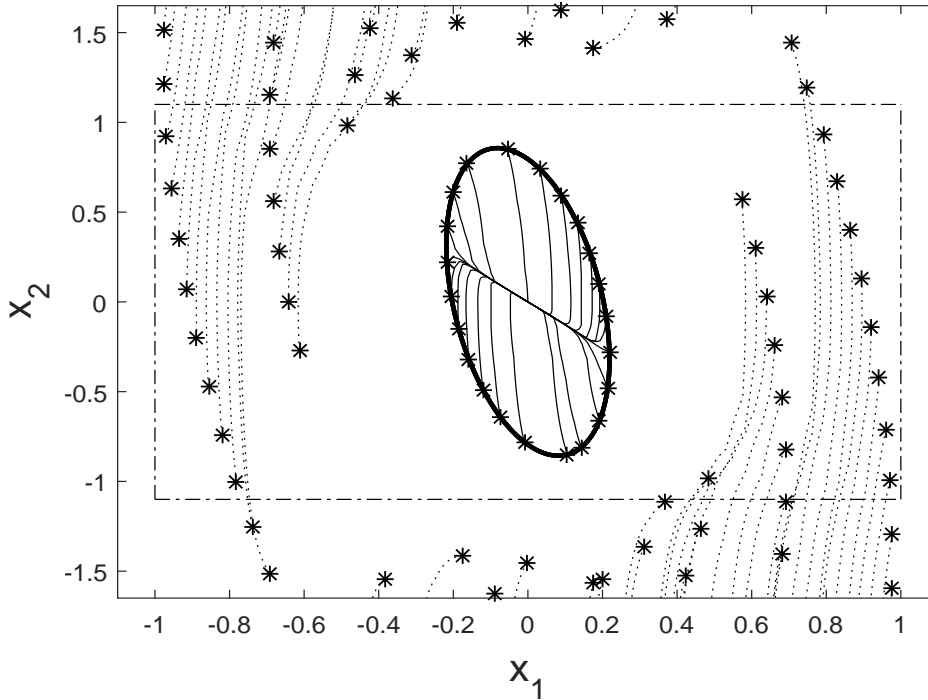


Figura 14: Os conjuntos $\mathcal{L}_V(1)$ e \mathcal{R}_H são descritos em linhas sólidas e tracejadas, respectivamente. Para os ganhos definidos em (178) e $T_k \in [10, 71]$ ms, algumas trajetórias são descritas para condições iniciais $x(0) \in \mathcal{L}_V(1) \subset \mathcal{R}_H$ (em linha sólida) e para $x(0) \notin \mathcal{L}_V(1)$ (em pontilhado).

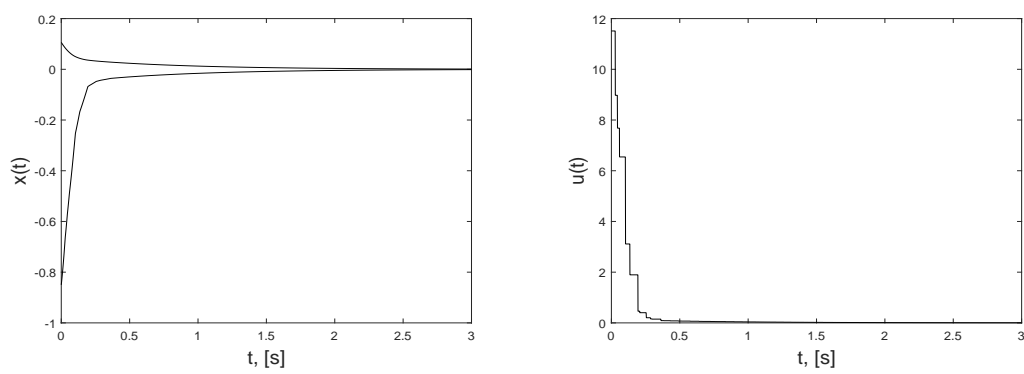
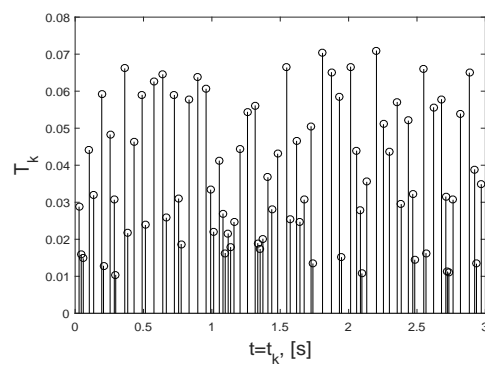
definido pelas matrizes

$$\bar{P}_0 = \begin{bmatrix} 9,8075 & 0,9320 \\ 0,9320 & 0,6391 \end{bmatrix}, \quad \bar{P}_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0,1729 & -0,0357 \\ -0,0357 & -0,0016 \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}_2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,2127 & 0,0370 \\ 0,0370 & 0,0006 \end{bmatrix}.$$

Assim, os conjuntos $\bar{\mathcal{L}}_V(1)$ e \mathcal{R}_H são descritos em linhas sólidas e tracejadas na Figura 16, como também estão ilustradas as trajetórias iniciadas na fronteira do conjunto $\bar{\mathcal{L}}_V(1)$. Note que $\bar{\mathcal{L}}_V(1)$ não está contido em \mathcal{R}_H e, como o modelo quasi-LPV não representa a dinâmica do sistema não-linear para $x \notin \mathcal{R}_H$, logo, as condições de análise de estabilidade não são válidas para $x(0) \notin \mathcal{R}_H$. Assim, algumas trajetórias obtidas são divergentes.

A partir dos ganhos de realimentação definidos em (178) e $\mathcal{T}_1 = 10$ ms, considere-se a análise de estabilidade no problema de otimização (176). Ou seja, o objetivo é maximizar o eixo de $\mathcal{E}(\gamma I, 1)$ tal que $\mathcal{E}(\gamma I, 1) \subseteq \mathcal{E}(P(\sigma), 1)$ para todo $\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$. Assim, na Figura 17, os valores obtidos de γ para diferentes valores de \mathcal{T}_2 são mostrados. É possível observar a relação existente entre os valores obtidos de γ e os valores factíveis de \mathcal{T}_2 . Note que quanto maior o valor de \mathcal{T}_2 , maior é o valor de γ e, conseqüentemente, menor é o eixo de $\mathcal{E}(\gamma I, 1)$.

(a) Estado do sistema $x(t)$.(b) Sinal de controle $u(t)$.(c) T_k e respectivos $t = t_k$.Figura 15: Sinais para $x(0) = [0,1062 \quad -0,8500]'$ e $T_k \in [10, 71]$ ms.

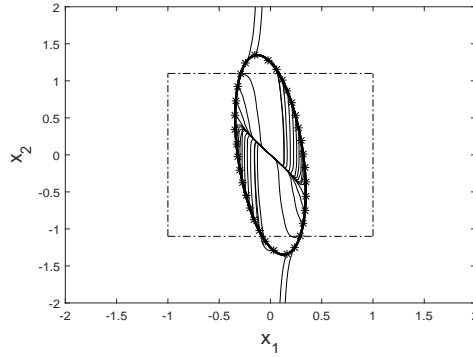


Figura 16: Os conjuntos $\bar{\mathcal{L}}_V(1)$ e \mathcal{R}_H são descritos em linhas sólidas e tracejadas, respectivamente. Para $T_k \in [10, 71]$ ms, algumas trajetórias são descritas para condições iniciais $x(0) \in \bar{\mathcal{L}}_V(1)$ (em linha sólida).

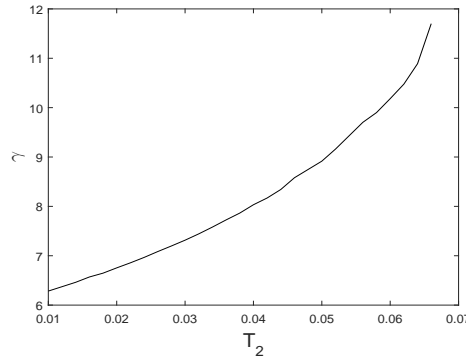


Figura 17: Valores obtidos de γ para diferentes valores de \mathcal{T}_2 através da solução do problema de otimização (176), para $\mathcal{T}_1 = 10$ ms e com os ganho descritos em (178).

5.4 Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno com Dados Amostrados

5.4.1 Modelo Fuzzy T-S

Modelos *fuzzy* T-S podem ser utilizados para representar o sistema não-linear (139). Assim, considere $r \in \mathbb{N}^+$ o número finito de regras *fuzzy* que descrevem localmente o sistema não-linear (139), sendo $f = 1, \dots, r$ e a f -ésima regra definida como:

$$\begin{aligned} \text{Se} \quad & \alpha_1(x(t)) \text{ é } \mathcal{M}_{f,1} \text{ e } \dots \text{ e } \alpha_p(x(t)) \text{ é } \mathcal{M}_{f,p} \\ \text{Então} \quad & \dot{x}(t) = \hat{A}_f x(t) + \hat{B}_f u(t), \end{aligned} \quad (179)$$

em que $\alpha_a(x(t))$, $a = 1, \dots, p$ são as variáveis escalares de premissa, as quais dependem dos estados. Por simplicidade, considera-se $\alpha(t)$ como $[\alpha_1(x(t)) \dots \alpha_p(x(t))]'$. $\mathcal{M}_{f,a}$ com $f = 1, \dots, r$ são os conjuntos fuzzy. $\hat{A}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\hat{B}_f \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes conhecidas dos subsistemas lineares que representam localmente o comportamento do sistema não-linear (139) (MEI; MAN; NGUYEN, 2001).

A cada instante de tempo, a dinâmica do sistema descrito pelo modelo *fuzzy* (179) pode então ser representada pela seguinte equação:

$$\dot{x}(t) = \sum_{f=1}^r \lambda_f(\alpha(t)) \left\{ \hat{A}_f x(t) + \hat{B}_f u(t) \right\}, \quad (180)$$

em que $\lambda_f(\alpha(t))$ é a função de pertinência normalizada, tal que $\lambda_f \in [0,1]$, $\sum_{f=1}^r \lambda_f = 1$ e $\lambda_f(\alpha(t)) = w_f(\alpha(t))/(\sum_{f=1}^r w_f(\alpha(t)))$, em que a função de pertinência do conjunto *fuzzy* $\mathcal{M}_{f,a}$ é $w_f(\alpha(t)) = \prod_{a=1}^p \mu_{f,a}(\alpha_a(t))$, com $w_f(\alpha(t)) \geq 0$, $\forall f = 1, \dots, r$, $\sum_{f=1}^r w_f(\alpha(t)) > 0$ e $\mu_{f,a}(\alpha_a(t))$ é o grau de pertinência ao conjunto $\mathcal{M}_{f,a}$.

A partir de uma escolha adequada das regras e dos subsistemas, um modelo *fuzzy* T-S (179) pode representar a dinâmica do sistema não-linear (139) dentro de uma região limitada \mathcal{R}_H , i.e., uma região de validade (SILVA et al., 2014) e que \mathcal{R}_H é um conjunto poliédrico como descrito em (146).

5.4.1.1 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema de Lorenz² apresentado em (WU et al., 2014)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -ax_1(t) + ax_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= cx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - bx_3(t),\end{aligned}\tag{181}$$

com $a = 10$, $b = 8/3$, $c = 28$, $d = 25$ e assumamos que $x_1(t) \in [-d, d]$. Considere agora como variável premissa $\alpha_1(x(t)) = x_1(t)$, duas regras podem então ser definidas, i.e., $r = 2$, como

$$\begin{array}{l} \text{Se} \quad \alpha_1(x(t)) \text{ é } \mathcal{M}_{f,1} \\ \text{Então} \quad \dot{x}(t) = \hat{A}_f x(t) + \hat{B}_f u(t), \quad f = 1, 2, \end{array}$$

sendo as matrizes:

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & -d \\ 0 & d & -b \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & d \\ 0 & -d & -b \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\tag{182}$$

Neste caso $M_{f,1} = \{d\}$ e $M_{f,1} = \{-d\}$ e as seguintes funções de pertinência foram consideradas

$$\begin{aligned}\mu_{1,1}(x_1(t)) &= \frac{x_1 - \min\{x_1\}}{\max\{x_1\} - \min\{x_1\}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_1}{d}\right), \\ \mu_{2,1}(x_1(t)) &= \frac{\max\{x_1\} - x_1}{\max\{x_1\} - \min\{x_1\}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_1}{d}\right).\end{aligned}$$

Note que se $x_1 \in [-d, d]$, tem-se que $\sum_{f=1}^r \mu_{f,1}(x_1(t)) = 1$ e $\mu_{f,1}(x_1(t)) \geq 0$ para $f = 1, 2$. Assim, temos que as funções de pertinência normalizadas são

$$\begin{aligned}\lambda_1(x_1(t)) &= \mu_{1,1}(x_1(t)) = 0,5 \left(1 + x_1(t)/d\right) \\ \lambda_2(x_1(t)) &= \mu_{2,1}(x_1(t)) = 1 - \lambda_1(x_1(t)).\end{aligned}\tag{183}$$

Portanto, para $x_1 \in [-d, d]$, i.e., $x \in \mathcal{R}_H$, tem-se que o sistema não-linear (181) pode ser representado por (180), com as matrizes definidas em (182) e as funções de pertinência descritas em (183).

²Para mais detalhes sobre modelagem *fuzzy* e exemplos, pode-se consultar (TAKAGI; SUGENO, 1985; SILVA et al., 2014).

5.4.1.2 Controlador Fuzzy Amostrado

Considera-se uma abordagem com dados amostrados e assume-se uma lei de controle por realimentação de estados *fuzzy* T-S amostrada. Assim, a f -ésima regra é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Se} \quad & \alpha_1(x(t_k)) \text{ é } \mathcal{M}_{f,1} \text{ e } \dots \text{ e } \alpha_p(x(t_k)) \text{ é } \mathcal{M}_{f,p} \quad t_k \leq t < t_{k+1} \\ \text{Então} \quad & u(t) = \hat{K}_f x(t_k), \end{aligned} \quad (184)$$

em que $\hat{K}_f \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de realimentação de estados da f -ésima regra a ser projetada, com $f = 1, \dots, r$. A partir de (184), a saída inferida do controlador *fuzzy* é dada por:

$$u(t) = \sum_{f=1}^r \lambda_f(\alpha(t_k)) \hat{K}_f x(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (185)$$

Como a lei de controle (185) é projetada a partir do modelo *fuzzy* do sistema (139), o qual é válido apenas em \mathcal{R}_H , para que a estimativa de \mathcal{R}_a seja válida, o conjunto de condições iniciais $\mathcal{E}(X_0, 1)$ admissíveis deve estar contido em \mathcal{R}_H . Além disso, $\mathcal{E}(X_0, 1)$ deve ser um conjunto invariante.

5.4.2 Condições Estabilizantes

Considerando o sistema em malha fechada formado por (180) e (185), tem-se que o modelo *fuzzy* (SILVA et al., 2014) para $\tau \in [0, T_k]$ é dado por:

$$\dot{x}_k(\tau) = \hat{A}(\lambda_k(\tau))x_k(\tau) + \hat{B}(\lambda_k(\tau))\hat{K}(\lambda_k(0))x_k(0), \quad (186)$$

com $x_k(\tau) = x(t_k + \tau)$, $\lambda_k(\tau) = \lambda(\alpha(x_k(\tau)))$ e as matrizes

$$\begin{aligned} \hat{A}(\lambda_k(\tau)) &= \sum_{f=1}^r \lambda_f(\alpha(x_k(\tau))) \hat{A}_f, \\ \hat{B}(\lambda_k(\tau)) &= \sum_{f=1}^r \lambda_f(\alpha(x_k(\tau))) \hat{B}_f, \\ \hat{K}(\lambda_k(0)) &= \sum_{g=1}^r \lambda_g(\alpha(x_k(0))) \hat{K}_g. \end{aligned} \quad (187)$$

Observe que o modelo T-S (186) com as matrizes (187) pode assim ser visto como um sistema quasi-LPV descrito em (148), com a relação entre as matrizes:

$$\begin{aligned} \hat{A}_f &= (A_0 + \mathbf{A}(\nu_f)), \\ \hat{B}_f &= (B_0 + \mathbf{B}(\nu_f)), \\ \hat{K}_g &= (K_0 + \mathbf{K}(\nu_g)), \end{aligned} \quad (188)$$

$\forall \nu_f, \nu_g \in \mathcal{B}_\sigma$.

A partir dos resultados teóricos do Lema 9, condições na forma de quasi-LMIs são propostas para a solução do Problema 6. Para isso, considere a PDQF V e o

PDLF \mathcal{V}_0 definidos a partir de (153) e de (154), na forma:

$$\begin{aligned} V(x_k, \lambda_k) &= x_k(\tau) \hat{P}(\lambda_k(0)) x_k(\tau), \\ \mathcal{V}_0(\tau, x_k, \lambda_k, T_k) &= (T_k - \tau) \left\{ (x_k(\tau) - x_k(0))' \left[\hat{F}(\lambda_k(0)) (x_k(\tau) - x_k(0)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\hat{G}(\lambda_k(0)) x_k(0) \right] + \tau x_k'(0) \hat{X}(\lambda_k(0)) x_k(0) + \int_0^\tau \dot{x}_k'(\theta) R \dot{x}_k(\theta) d\theta \right\}, \end{aligned} \quad (189)$$

Observe que existe uma relação entre as matrizes na PDQF V e no PDLF \mathcal{V}_0 definidos em (153) e (154) e as matrizes em (189) que é dada por:

$$\hat{P}_g = (P_0 + \mathbf{P}(\nu_g)), \quad \hat{F}_g = (F_0 + \mathbf{F}(\nu_g)), \quad \hat{X}_g = (X_0 + \mathbf{X}(\nu_g)), \quad \hat{G}_g = (G_0 + \mathbf{G}(\nu_g)). \quad (190)$$

Por simplicidade, considerando uma matriz genérica L_f , define-se

$$\begin{aligned} \hat{L}(\lambda_k(\tau)) &= \sum_{f=1}^r \lambda_f(\alpha(x_k(\tau))) \hat{L}_f = \sum_{f=1}^r \lambda_{k_f}(\tau) \hat{L}_f, \\ \hat{L}(\lambda_k(0)) &= \sum_{f=1}^r \lambda_f(\alpha(x_k(0))) \hat{L}_f = \sum_{f=1}^r \lambda_{k_f}(0) \hat{L}_f, \end{aligned}$$

em que a matriz \hat{L}_f é dimensão apropriada para $f = 1, \dots, r$.

Corolário 5. *Se existem matrizes definidas positivas $\tilde{P}_g, \tilde{R}, \tilde{F}_g$ e $\tilde{X}_g \in \mathbb{S}^n$, matrizes $\tilde{G}_g, \tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{Q}_g \in \mathbb{R}^{3n \times n}$, $\tilde{K}_g \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $g = 1, \dots, r$ e um escalar positivo ϵ satisfazendo*

$$\tilde{\Pi}_1(f, g) + \mathcal{T}_j \tilde{\Pi}_2(g) + \mathcal{T}_j \tilde{\Pi}_3(g) < 0, \quad (191)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1(f, g) - \mathcal{T}_j \tilde{\Pi}_3(g) & \mathcal{T}_j \tilde{Q}_g \\ * & -\mathcal{T}_j \tilde{R} \end{bmatrix} < 0, \quad (192)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_g & \tilde{Y} H'_{(v)} \\ * & \eta_{(v)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad (193)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_g & \tilde{G}'_g - \tilde{F}_g \\ * & \tilde{F}_g - \text{He}\{\tilde{G}_g\} \end{bmatrix} > 0, \quad (194)$$

$\forall j = 1, 2, \forall f, g = 1, \dots, r, v = 1, \dots, v_c$, em que

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1(f, g) &= \text{He} \left\{ M'_1 \tilde{P}_g M_3 - M'_{12} \tilde{G}_g M_2 - \tilde{Q}_g M_{12} \right\} - M'_{12} \tilde{F}_g M_{12} \\ &\quad + \text{He} \left\{ (\epsilon M'_1 + M'_3) \left(\hat{A}_f \tilde{Y} M_1 - \tilde{Y} M_3 + \hat{B}_f \tilde{K}_g M_2 \right) \right\}, \\ \tilde{\Pi}_2(g) &= M'_3 \tilde{R} M_3 + \text{He} \left\{ M'_3 (\tilde{F}_g M_{12} + \tilde{G}_g M_2) \right\}, \\ \tilde{\Pi}_3(g) &= M'_2 \tilde{X}_g M_2, \end{aligned} \quad (195)$$

com as matrizes auxiliares definidas em (25), então a lei de controle (185) com as matrizes de ganho $\hat{K}_g = \tilde{K}_g \tilde{Y}^{-1}$, $g = 1, \dots, r$, assegura que para toda a condição inicial

$$x(0) \in \mathcal{L}_V(1) = \bigcap_{g=1, \dots, r} \mathcal{E}(P_g, 1) \subseteq \mathcal{R}_H$$

com $\hat{P}_g = \tilde{Y}'^{-1}\tilde{P}_g\tilde{Y}^{-1}$, as trajetórias correspondentes do sistema não-linear com dados amostrados (139)-(140) representado pelo sistema fuzzy (180) convergem assintoticamente para a origem $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$.

Demonstração: A demonstração deste corolário é semelhante à do Teorema 7. Para isso, considere a relação entre as matrizes definidas em (188) e em (190), $\hat{Q}_g = (Q_0 + \mathbf{Q}(\nu_g))$, $\hat{Y} = Y$ e as seguintes mudanças de variáveis

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \hat{Y}^{-1}, & \tilde{P}_g &= \tilde{Y}'\hat{P}_g\tilde{Y}, & \tilde{F}_g &= \tilde{Y}'\hat{F}_g\tilde{Y}, & \tilde{G}_g &= \tilde{Y}'\hat{G}_g\tilde{Y}, \\ \tilde{Q}_g &= \text{diag}\{\tilde{Y}, \tilde{Y}, \tilde{Y}\}'\hat{Q}_g\tilde{Y}, & \tilde{X}_g &= \tilde{Y}'\hat{X}_g\tilde{Y}, & \tilde{K}_g &= \hat{K}_g\tilde{Y}. \end{aligned}$$

□

5.4.3 Análise de Estabilidade

As condições apresentadas no Corolário 5 também podem ser utilizados na análise de estabilidade do sistema (141)-(142), assim como descrito na Seção 5.3.4. Para isso, considera-se a variável \tilde{K}_g como $\hat{K}_g\tilde{Y}$ para $g = 1, \dots, r$. Neste caso, como no Corolário 4, condições na forma LMI podem ser diretamente obtidas, como apresentadas no seguinte corolário.

Corolário 6. *Se existem matrizes simétricas e definidas positivas $P_g, R, F_g \in \mathbb{S}^n$ e $X_g \in \mathbb{S}^n$, matrizes G_g, Y_1 e $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_g \in \mathbb{R}^{3n \times n}$, $g = 1, \dots, r$, satisfazendo*

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1(f, g) + T_k\hat{\Pi}_2(g) + T_k\hat{\Pi}_3(g) &< 0, \\ \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_1(f, g) - T_k\hat{\Pi}_3(g) & T_k\hat{Q}_g \\ * & -T_k\hat{R} \end{bmatrix} &< 0, \\ \begin{bmatrix} \hat{P}_g & H(v) \\ * & \eta_{(v)}^2 \end{bmatrix} &\geq 0, \\ \begin{bmatrix} \hat{F}_g & \hat{G}'_g - \hat{F}_g \\ * & \hat{F}_g - \text{He}\{\hat{G}_g\} \end{bmatrix} &> 0, \end{aligned}$$

para todo $f = 1, \dots, r$, $v = 1, \dots, v_c$ e $T_k \in \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}$, em que

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1(f, g) &= \text{He}\{M'_1\hat{P}_gM_3 - M'_{12}\hat{G}_gM_2 - \hat{Q}_gM_{12} + (M'_1Y'_1 + M'_3Y'_2)(\hat{A}_fM_1 + \hat{B}_f\hat{K}_gM_2 \\ &\quad - M_3)\} - M'_{12}\hat{F}_gM_{12}, \\ \hat{\Pi}_2(g) &= M'_3\hat{R}M_3 + \text{He}\left\{M'_3(\hat{F}_gM_{12} + \hat{G}_gM_2)\right\}, \\ \hat{\Pi}_3(g) &= M'_{24}\hat{X}_gM_{24}, \end{aligned}$$

com as matrizes auxiliares definidas em (25), então a lei de controle (185) assegura que para toda a condição inicial $x(0) \in \mathcal{L}_V(1) = \bigcap_{g=1, \dots, r} \mathcal{E}(\hat{P}_g, 1) \subseteq \mathcal{R}_H$, as trajetórias correspondentes do sistema não-linear com dados amostrados (139)-(140) representado pelo sistema fuzzy (180) convergem assintoticamente para a origem $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$.

5.4.4 Problemas de Otimização

Por definição, o conjunto $\mathcal{L}_V(1)$ obtido a partir das condições no Corolário 5 está incluído na \mathcal{R}_a e pode ser utilizado como uma estimativa desta. Assim, como na Seção 5.3.5, para o projeto do controlador, são propostos os seguintes problemas de otimização.

5.4.4.1 Maximização da Estimativa da Região de Atração da Origem

A partir do Problema 6, assim como na Seção 5.3.5.1, dados \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 , um problema de interesse é projetar os ganhos de realimentação que maximizem o menor eixo de

$$\mathcal{E}(\hat{P}_g, 1) = \mathcal{E}(\tilde{Y}^{-1'} \tilde{P}_g \tilde{Y}^{-1}, 1)$$

para $g = 1, \dots, r$ da \mathcal{R}_a . Assim, o seguinte problema de otimização é proposto:

$$\begin{aligned} & \min \quad \gamma \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} \gamma I & I \\ I & \tilde{Y}' + \tilde{Y} - \tilde{P}_g \end{bmatrix} > 0, \\ & (191) - (194), \\ & \forall f, g = 1, \dots, r, T_k \in \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}, \forall v = 1, \dots, v_c. \end{aligned} \tag{196}$$

5.4.4.2 Maximização do Intervalo de Amostragem

A partir do Problema 6 e das condições apresentadas na Seção 5.3.5.2, dados \mathcal{T}_1 e um conjunto $\mathcal{E}(X_0, 1)$, projetam-se os ganhos de realimentação, com objetivo de maximizar \mathcal{T}_2 tal que $\forall x(0) \in \mathcal{E}(X_0, 1)$ as respectivas trajetórias do sistema em malha fechada convirjam assintoticamente para a origem. Isto pode ser obtido através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \max \quad \mathcal{T}_2 \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} X_0 & I \\ I & \tilde{Y}' + \tilde{Y} - \tilde{P}_g \end{bmatrix} > 0, \\ & (191) - (194), \\ & \forall f, g = 1, \dots, r, T_k \in \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}, \forall v = 1, \dots, v_c. \end{aligned} \tag{197}$$

5.4.5 Exemplo Numérico

Considere o sistema de Lorenz apresentado na Seção 5.4.1.1. Para comparar o método proposto com os existentes na literatura, primeiramente, considera-se a abordagem com amostragem periódica, i.e., $T_k = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2, \forall k \in \mathbb{N}$. Assim, a partir do problema de otimização (197) para $X_0 = I$, o máximo T_k factível obtido foi 0,0358s, com os ganhos de realimentação:

$$K_1 = K_2 = [-28,4541958 \quad -42,1665656 \quad 0,0000023], \tag{198}$$

assim, assegura-se a estabilidade assintótica da origem $\forall x(0) \in \mathcal{L}_v$, definido pelas matrizes:

$$P_1 = P_2 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 0,2002 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0094 & 0,2565 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,2378 \end{bmatrix}.$$

A partir do Teorema 1 em (LAM; LEUNG, 2007) e do Corolário 2 em (WU et al., 2014) sem restrição de taxa de decaimento exponencial, o máximo período de amostragem obtido foi $T_k = 0,0158$ s e $T_k = 0,0347$ s, respectivamente. Observe que, pelas condições propostas, obtém-se um valor factível de T_k maior quando comparado aos obtidos em (LAM; LEUNG, 2007) e (WU et al., 2014).

Considera-se a seguir o problema da amostragem aperiódica e da análise de estabilidade, para isso, assume-se $T_k \in [0,02, 0,032]$ s e os ganhos definidos em (198). A partir do problema de otimização (196), i.e., o objetivo é maximizar a estimativa de \mathcal{R}_a para a lei de controle definida pelas matrizes em (198). Neste caso, assegura-se a estabilidade assintótica da origem $\forall x(0) \in \mathcal{L}_V$, definido pelas matrizes (com traço $0,0065^3$):

$$P_1 = P_2 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 0,1915 & 0,0071 & 0,0000 \\ 0,0071 & 0,2470 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,2200 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 18, são apresentadas algumas trajetórias do sistema para $x(0)$ pertencente à borda de \mathcal{L}_V e também um corte de \mathcal{L}_V , no plano definido pelos estados x_1 e x_2 , com $x_3(0) = 0$ (Figura 18(a)) e no plano definido pelos estados (Figura 18(b)), para diferentes valores de x_3 . Observe que essas trajetórias convergem para a origem como esperado.

Para $x(0) = [10 \quad -10 \quad 5]'$ tal que $x(0) \in \mathcal{L}_V$, na Figura 19, o sinal de controle $u(t)$ (Figura 19(b)) e a trajetória dos estados $x(t)$ (Figura 19(a)) são apresentados (em linha contínua), com $T_k \in [0,02, 0,032]$ s. Os intervalos de amostragem $T_k \in [0,02, 0,032]$ s são gerados aleatoriamente e ilustrados na Figura 19(c).

Para $T_k \in [0,02, 0,032]$ s, a partir dos resultados apresentados em (WU et al., 2014), para as mesmas condições (sem decaimento exponencial e saturação), obtêm-se os ganhos

$$\begin{aligned} K_1 &= [-10,9721 \quad -11,2913 \quad -1,6762] \\ K_2 &= [-12,3223 \quad -11,3633 \quad -1,5819] \end{aligned}$$

e a estimativa $\mathcal{E}(P,1)$, definido pela matriz (com traço $7,877$):

$$P = \begin{bmatrix} 7,5339 & -0,1284 & -0,0748 \\ -0,1284 & 0,1734 & -0,0525 \\ -0,0748 & -0,0525 & 0,1697 \end{bmatrix}.$$

Os sinais $x(t)$ e $u(t)$ estão apresentados em linhas tracejadas-pontilhadas na Figura 19, com $T_k \in [0,02, 0,032]$ s. A mesma sequencia de intervalos de amostragem da simulação anterior (Figura 19(c)) é utilizada.

Observe que em ambas abordagens, como esperado, $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Além disso, as condições propostas permitem obter um limite do intervalo de amostragem maior que os outros métodos existentes e uma estimativa de \mathcal{R}_a maior do que a obtida a partir de (WU et al., 2014) quando comparados os traços das matrizes P . Ademais, diferentemente de (WU et al., 2014), o método proposto considera as restrições do modelo *fuzzy* T-S, representada pelo conjunto \mathcal{R}_H , como ilustrado na Figura 18(a) (linha tracejada em preto).

³Um menor traço da matriz P está relacionado a um maior conjunto $\mathcal{E}(P,1)$.

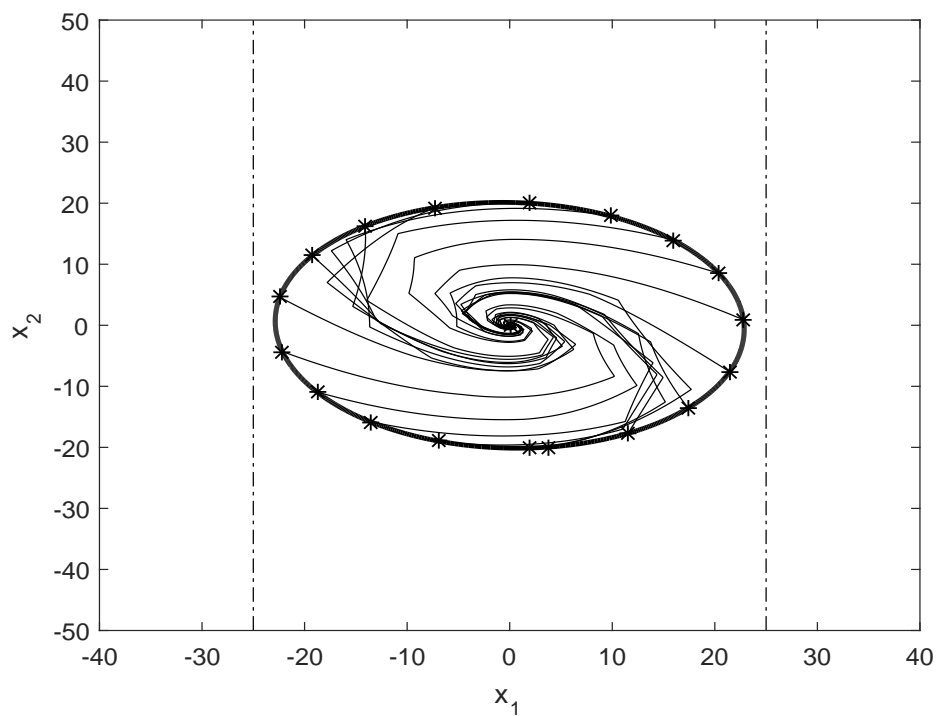
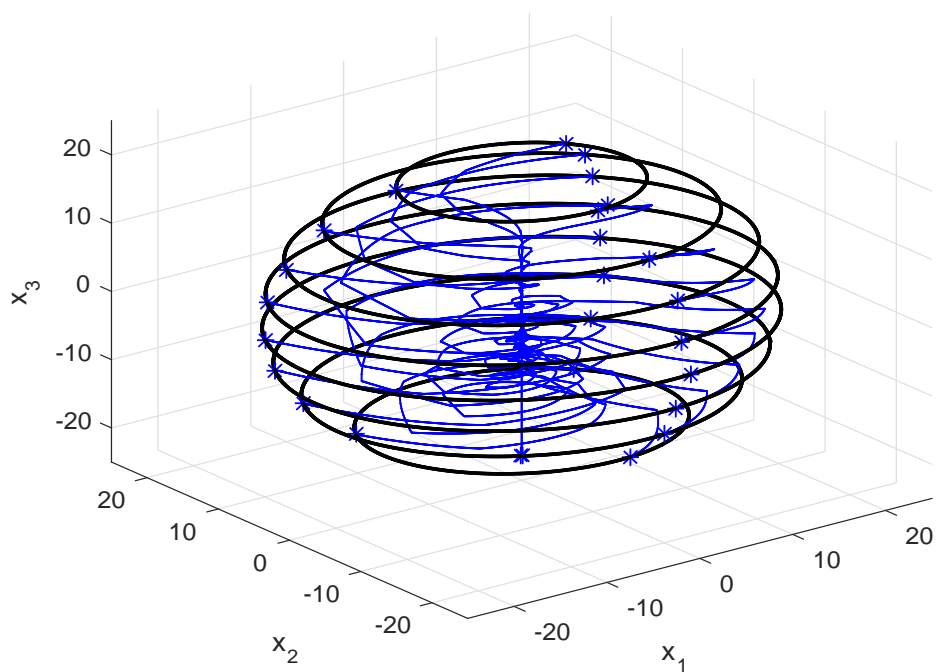
(a) Sinais de $x(t)$, com $x_3(0) = 0$.(b) Sinais de $x(t)$.

Figura 18: Para $T_k \in [0,02, 0,032]$ s, sinais para $x(0)$ na fronteira de \mathcal{L}_V e cortes de \mathcal{L}_V (em preto) no plano definido pelas variáveis de estado x_1 e x_2 para x_3 constante.

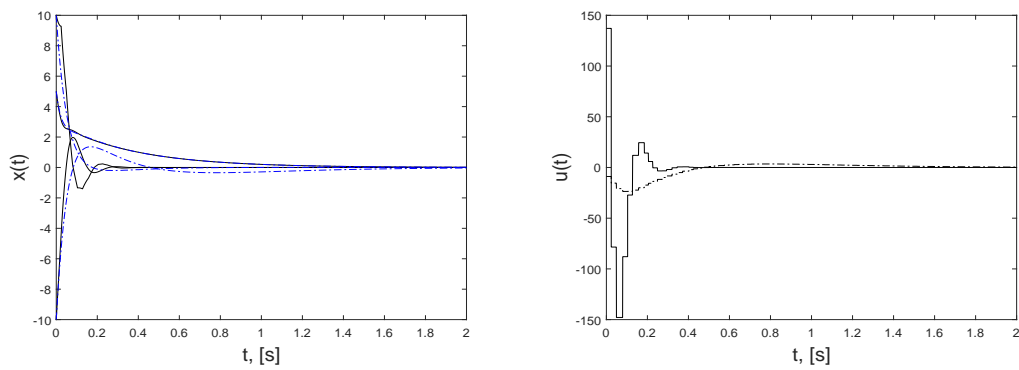
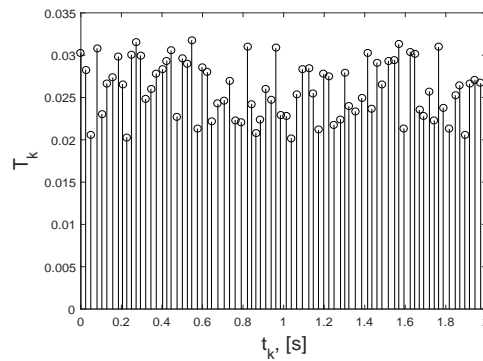
(a) Estado do sistema $x(t)$.(b) Sinal de controle $u(t)$.(c) T_k e respectivos $t = t_k$.

Figura 19: Sinais para $x(0) = [10 \ -10 \ 5]'$ e $T_k \in [0,02, 0,032]$, com o método proposto (linha contínua) e com (WU et al., 2014) (linha tracejada).

5.5 Considerações Finais

Neste capítulo, condições na forma de quasi-LMIs foram propostas para a estabilização local de uma classe de sistemas não-lineares com dados amostrados. Condições similares na forma de LMIs foram obtidas para a análise de estabilidade local.

Como os parâmetros dependem do estado, uma versão não-linear do *looped*-funcional foi utilizada para considerar os efeitos da amostragem aperiódica. Para representar o sistema duas abordagens foram consideradas: modelos quasi-LPV e *fuzzy* Takagi-Sugeno. Estes modelos geralmente representam o sistema não-linear apenas localmente. Assim, considerou-se uma região de validade do modelo nas condições propostas. Este fato geralmente é desprezado, como em (WU et al., 2014), contudo pelo exemplo numérico apresentado na Seção 5.3.6, expõe-se a importância de definir a região de validade do modelo nas condições de análise de estabilidade e estabilização local da origem, visto que desprezá-la pode inclusive levar à instabilidade.

A partir dos resultados obtidos, dois problemas de otimização convexos foram estabelecidos: maximizar uma estimativa da região de atração, dados \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 , e maximizar \mathcal{T}_2 dado um conjunto de condições iniciais admissíveis. Foi exemplificado que, ao incrementar o valor factível de \mathcal{T}_2 , obtém-se uma estimativa de $\mathcal{L}_V(1)$ menor (em relação ao menor eixo do conjunto $\mathcal{E}(P_g, c)$). Considerando a modelagem *fuzzy* T-S, a partir da abordagem proposta, foram obtidos valores factíveis de \mathcal{T}_2 maiores aos obtidos em (LAM; LEUNG, 2007) e (WU et al., 2014), no caso periódico. Além disso, no caso da amostragem aperiódica, foi obtido uma estimativa da \mathcal{R}_a maior (considerando o traço da matriz P_g) quando comparado a obtida pelas condições propostas em (WU et al., 2014).

Partes dos resultados preliminares obtidos estão publicados em (PALMEIRA; GOMES DA SILVA JR.; FLORES, 2018b), (PALMEIRA; GOMES DA SILVA JR.; FLORES, 2017a) e (PALMEIRA; GOMES DA SILVA JR.; FLORES, 2017b).

6 CONCLUSÃO

O principal objetivo deste trabalho foi o projeto de controladores LPV por realimentação de estados para sistemas contínuos LPV com dados amostrados aperiódicamente. Foi assumido que os valores dos estados e dos parâmetros estão disponíveis para medição apenas nos instantes de amostragem, enquanto que evoluem de modo contínuo na planta. Em relação aos parâmetros, foi assumido que os limites de magnitude e de derivada temporal dos parâmetros são conhecidos e, a partir destes dados, a modelagem politópica proposta considera que os valores de $\sigma(t)$ e de $\sigma(t_k)$ são relacionados durante o intervalo de amostragem por meio da derivada de σ . Este fato torna a abordagem proposta menos conservadora do que os modelos politópicos que consideram uma evolução independente de $\sigma(t)$ e de $\sigma(t_k)$.

A utilização do *looped*-funcional dependente de parâmetros permitiu considerar os efeitos da amostragem aperiódica nas condições de estabilidade propostas, como também a variação em tempo contínuo do estado e dos parâmetros na planta, enquanto que no controlador, os valores do estado e dos parâmetros são amostrados e mantidos constantes durante o intervalo de amostragem. Como ilustrado nos exemplos, a utilização de um *looped*-funcional dependente de parâmetros permitiu obter melhores resultados (e.g., maior \mathcal{T}_2 factível) quando comparado a um funcional sem dependência paramétrica.

Com estas ferramentas teóricas, condições estabilizantes para sistemas LPV com dados amostrados foram propostas. A seguir, tem-se um sumário dos resultados apresentados neste trabalho.

- Estabilização de sistemas LPV com dados amostrados:

No Capítulo 3, a partir do *looped*-funcional definido em (SEURET, 2012), foi enunciado o Lema 1 que relaciona uma função $V(x, \sigma) = x'P(\sigma)x$ e um funcional dependentes dos parâmetros, como condições básicas para determinar a estabilidade assintótica da origem do sistema LPV amostrado. Assim, se a derivada temporal do funcional ao longo das trajetórias do sistema LPV for definida negativa, tem-se que a função V é estritamente decrescente nos instantes de amostragem, o que segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = 0$ e, conclui-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Esta abordagem não requer métodos de discretização da planta e, portanto, considerou-se que os parâmetros evoluem continuamente no tempo.

A partir destas condições básicas propostas, os seguintes resultados foram obtidos:

- O modelo politópico proposto relaciona os valores de $\sigma(t_k)$ e $\sigma(t)$ através da taxa de variação do parâmetro, o que permitiu obter condições me-

nos conservadoras quando comparado aos métodos que consideram que $\sigma(t_k)$ e $\sigma(t)$ variam independentemente (SHI; SU, 2014). Além disso, é uma abordagem mais adequada do que os trabalhos que consideram que o parâmetro não varia durante o intervalo de amostragem (TAN; GRIGORIADIS, 2000).

- Um problema de otimização foi proposto para maximizar o limite superior \mathcal{T}_2 do intervalo de amostragem para o qual a estabilidade assintótica do sistema é assegurada.
- A utilização do *looped*-funcional dependente de parâmetros permitiu obter melhores resultados do que com um *looped*-funcional independente de parâmetros, i.e., as condições são factíveis para um valor maior de \mathcal{T}_2 .
- Controle amostrado LPV por realimentação de estados para sistema LPV com rejeição a perturbações limitadas na norma \mathcal{L}_2 :

Na Seção 3.3, considerou-se o problema de rejeição a distúrbios. A partir da abordagem por *looped*-funcional, apesar do sinal de controle ser amostrado, como não ocorre discretização da planta, o sinal de perturbação é considerado em tempo contínuo, diferentemente de (TAN; GRIGORIADIS, 2000), no qual o evolução do sinal de perturbação é em tempo discreto.

- Dois problemas de otimização foram propostos para projeto dos controladores:
 - * minimizar o limite superior γ do ganho \mathcal{L}_2 , i.e.

$$\sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0, x(0)=0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \leq \gamma,$$

com $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ e assegurar a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada para $w(t) = 0$.

- * maximizar o limite superior \mathcal{T}_2 do intervalo de amostragem tal que assegurem-se um limite para o ganho \mathcal{L}_2 , com $T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ e a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada, para $w(t) = 0$.
- Controle amostrado sujeito a saturação para sistemas LPV:

No Capítulo 4, foi abordado o problema da estabilização local da origem do sistema LPV com saturação. Os efeitos da saturação são considerados por meio de uma versão dependente de parâmetros da condição de setor generalizada de (TARBOURIECH et al., 2011), permitindo que o sinal de controle sature.

- Dois problemas de otimização convexos foram propostos para o projeto do controlador:
 - * Dado um conjunto de condições iniciais admissíveis $\mathcal{E}(X_0, 1)$ e \mathcal{T}_1 , maximizar \mathcal{T}_2 tais que $\forall x(0) \in \mathcal{E}(X_0, 1)$, as trajetórias correspondentes do sistema LPV em malha fechada convergem assintoticamente para a origem, $\forall T_k \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$.
 - * Dados \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 , maximizar a estimativa da \mathcal{R}_a do sistema LPV em malha fechada.

- Na Seção 4.3, baseado nos resultados de estabilização com controle saturante, apresentou-se um algoritmo que utiliza a estratégia de controle preditivo baseado em modelo (MPC) para sistemas LPV com saturação. Assim, os seguintes resultados foram apresentados.
 - * Foram propostas condições estabilizantes locais da origem do sistema LPV com saturação tais que garante-se um limite superior γ para uma função custo quadrática.
 - * Com os resultados obtidos para controle com custo garantido, um algoritmo MPC para lidar com os efeitos da saturação foi proposto. Pelo exemplo numérico, foi demonstrada uma redução significativa do conservadorismo em relação à técnica existente na literatura (SHI; SU, 2014), i.e., as condições propostas na Seção 4.3 são factíveis para valores de \mathcal{T}_2 maiores e para um conjunto de condições iniciais maiores (verificado pelo traço da matriz P), além de se obter um valor de γ menor em relação aos resultados obtidos a partir de (SHI; SU, 2014).
- Estabilização local de uma classe sistemas não-lineares por realimentação de estados amostrados:

Para obter condições estabilizantes, dois modelos foram considerados para representar o sistema não-linear:

- Sistemas quasi-LPV: neste caso os elementos não-lineares são representados por meio de parâmetros que dependem dos estados.
- Sistemas fuzzy T-S: o sistema não-linear é representado por uma soma ponderada de sistemas lineares, que dependem do valor do estado a cada instante.

Geralmente, o modelo quasi-LPV ou fuzzy representa o sistema não-linear apenas em uma região de operação. Este fato é negligenciado na grande maioria dos trabalhos que consideram estes tipos de modelo, como em (WU et al., 2014). No presente trabalho, este fato é levado em conta e é garantido que a região de estabilidade é inclusa na região de validade do modelo.

- Assim como no Capítulo 4, dois problemas de otimização convexos foram propostos para o projeto do controlador: maximizar \mathcal{T}_2 para um dado conjunto de condições iniciais admissíveis ou maximizar uma estimativa de \mathcal{R}_a , dados \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 .

As desigualdades matriciais desenvolvidas neste trabalho são na forma de quasi-LMIs ou diretamente LMIs nos casos de análise de estabilidade, i.e., quando a lei de controle é dada. As condições quasi-LMI podem ser testadas como LMIs em um *grid* em duas variáveis escalares, \mathcal{T}_2 e ϵ , verificando-se a factibilidade por meio de algoritmos baseados em otimização convexa para resolver os problemas propostos.

As condições de análise de estabilidade ou estabilização também podem ser utilizadas no caso da amostragem ser periódica, para isso, deve-se considerar $T_k = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \forall k \in \mathbb{N}$.

A partir dos resultados obtidos nos exemplos numéricos nos Capítulos 2 a 4, foi possível concluir que o uso do *looped*-funcional dependente de parâmetros introduz mais variáveis nas condições quasi-LMIs, contudo apresenta resultados menos

conservadores, por exemplo, em relação ao máximo \mathcal{T}_2 admissível. Casos particulares menos complexos podem ser obtidos considerando funcionais independentes de parâmetros ao custo de um aumento do conservadorismo.

6.1 Perspectivas de Trabalhos Futuros

A seguir são enumerados alguns trabalhos que estão em andamento para extensão dos resultados.

- A maioria das condições propostas são na forma de quasi-LMIs, i.e., são LMIs se uma variável escalar ϵ tem seu valor fixado. Com isso, testa-se a factibilidade das LMIs em um grid em ϵ . Uma alternativa que será estudada é propor algoritmo para determinar valor de ϵ presente nas condições estabilizantes quasi-LMI para sistemas amostrados, baseado no proposto em (BARREAU; GOUAISBAUT; SEURET, 2018) para sistemas com atraso.
- Nesta tese, utilizou-se a inequação de Jensen para majorar um termo presente no *looped*-funcional (veja (27)). Contudo há outros métodos presentes na literatura, que são menos conservadores em troca de um aumento da complexidade numérica. Assim, serão utilizadas inequações de Bessel-Legendre ao invés da inequação de Jensen e será estudada a influência da escolha do tipo de inequação no desenvolvimento de condições de análise de estabilidade e estabilização de sistemas em tempo contínuo com dados amostrados.

A partir de alguns resultados preliminares obtidos para estabilização de sistemas LTI amostrados sujeitos à saturação do sinal de entrada, pode-se observar que o uso de inequações de Wirtinger (SEURET et al., 2016) e Bessel-Legendre permite obter maiores estimativas da \mathcal{R}_a em relação às condições baseadas em Jensen (SEURET; GOMES DA SILVA Jr., 2012), contudo a melhoria pode ser relativamente pequena em relação à complexidade numérica das condições.

- Sistemas de controle em rede:

Quando um controlador é implementado em uma rede de comunicação, o sistema em malha fechada pode estar sujeito tanto a amostragem aperiódica como a atrasos nos dados transferidos (GHIGGI et al., 2015). Assim, a ideia consiste no uso de um *looped*-funcional para tratar dos efeitos da amostragem enquanto que um funcional de Lyapunov-Krasovskii considera os atrasos variantes no tempo. Nesta abordagem, os efeitos da amostragem aperiódica e dos atrasos são observados e tratados separadamente, como apresentado em (JIANG; SEURET, 2010).

Com base na pesquisa desenvolvida, a seguinte linha de pesquisa é proposta para trabalhos futuros.

- Realimentação de saída amostrada:

Em muitos casos as informações obtidas da planta são limitadas, por exemplo, o estado pode não estar disponível à medição. Uma alternativa é projetar um controlador por realimentação de saída, como em (SOUZA, 2015) que considera a amostragem periódica. Assumindo a amostragem aperiódica, em (GOMES DA SILVA Jr et al., 2016), são propostas condições de análise de

estabilidade local de um sistema LTI em tempo contínuo sujeito à saturação do sinal de controle com controlador discreto, descrito como

$$\begin{aligned}x_c(t_{k+1}) &= A_c x_c(t_k) + B_c y(t_k) + E_c \psi_k, \\u(t_k) &= C_c + D_c y(t_k),\end{aligned}$$

em que x_c é o vetor de estado do controlador. Em (ROBERT; SENAME; SIMON, 2010), a partir da abordagem por modelos discretos com incertezas, propõem-se condições para síntese de controladores discretos com dinâmica para um sistema LTI. Contudo, ocorrem aproximações na determinação do modelo do sistema. Em (BRAGA et al., 2015), considerando um sistema LPV, propõe-se estabilização por *event trigger* e, assim como em (ROBERT; SENAME; SIMON, 2010), discretiza-se a planta e, portanto, o modelo discreto aproxima o comportamento do sistema LPV em tempo contínuo.

Portanto, há poucos trabalhos na literatura que consideram formalmente a estabilização por realimentação da saída amostrada e a utilização de controladores discretos, assim, a linha de pesquisa para trabalhos futuros é propor condições estabilizantes por realimentação de saída para sistemas LPV com dados amostrados aperiodicamente.

6.2 Publicações

Este trabalho permitiu que os seguintes artigos fossem elaborados, descrevendo os resultados preliminares obtidos:

- GOMES DA SILVA Jr., J. M.; MORAES, V. M.; FLORES, J. V.; PALMEIRA, A. H. K. Sampled-data LPV control: a looped-functional approach. In: IFAC WORKSHOP ON LINEAR PARAMETER VARYING SYSTEMS, 1., 2015, Grenoble. **Proceedings...** Elsevier, 2015. v.48, n.26, p.19-24.
- PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; FLORES, J. V. Controle saturante amostrado de sistemas LPV. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA XXI, 2016, Vitória. **Anais...** SBA, 2016.
- PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH, S.; GHIGGI, I. M. F. Sampled-data control under magnitude and rate saturating actuators. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Chichester, 2016.
- PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; FLORES, J. V. Controle amostrado de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy T-S. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 2017. **Anais...** SBA, 2017. v.1, p.1062-1068.
- PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; FLORES, J. V. Regional stability of nonlinear sampled-data controlled systems under actuator saturation: a quasi-LPV approach. In: DECOD (*Delays and Constraints in Distributed Parameter Systems*), 2017, França. **Proceedings...** IFAC, 2017. (Será publicado como um capítulo do livro *Incorporating constraints on the Analysis of Delay and Distributed Parameter Systems* para a série ADD@S (*Advances on Delays and Dynamics at Springer*));

- GOMES DA SILVA JR, J.M. ; PALMEIRA, A.H.K. ; MORAES, V.M. ; FLORES, J.V. \mathcal{L}_2 -disturbance attenuation for LPV systems under sampled-data control. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Chichester, 2018.
- PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; FLORES, J. V. Aperiodic sampled-data control for LPV systems under input saturation. In: IFAC WORKSHOP ON LINEAR PARAMETER VARYING SYSTEMS, 2., 2018, Florianópolis. **Proceedings...** IFAC, 2018.
- PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; FLORES, J. V. Regional stability analysis of nonlinear sampled-data control systems: a quasi-LPV approach. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2018. **Proceedings...** International Federation of Automatic Control, 2018. v.1.

REFERÊNCIAS

- AGULHARI, C. M. **Estabilidade e controle de sistemas lineares e variantes no tempo com parâmetros incertos**. 2013. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Unicamp, Campinas, SP, 2013.
- APKARIAN, P. On the discretization of LMI-synthesized linear parameter-varying controllers. **Automatica**, Oxford, v.33, n.4, p.655–661, 1997.
- APKARIAN, P.; GAHINET, P. A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.40, n.5, p.853–864, 1995.
- APKARIAN, P.; TUAN, H. D. Parameterized LMIs in control theory. **SIAM Journal on Control and Optimization**, Philadelphia, v.38, n.4, p.1241–1264, 2000.
- BARREAU, M.; GOUAISBAUT, F.; SEURET, A. Static state and output feedback synthesis for time-delay systems. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 16., 2018, Chipre. **Proceedings... IEEE**, 2018. p.1195–1200.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.13, n.1, p.65–72, 1989.
- BLIMAN, P.-A.; OLIVEIRA, R.; MONTAGNER, V.; PERES, P. L. D. Existence of homogeneous polynomial solutions for parameter-dependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 45., 2006, San Diego. **Proceedings... IEEE**, 2006. p.1486–1491.
- BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C.; PERES, P. L. D. Discretization and event triggered digital output feedback control of LPV systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.86, p.54–65, 2015.
- BRIAT, C. Convergence and equivalence results for the Jensen’s inequality: application to time-delay and sampled-data systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.56, n.7, p.1660–1665, 2011.
- BRIAT, C. Linear parameter-varying and time-delay systems. **Analysis, Observation, Filtering & Control**, Heidelberg, v.3, 2014.
- BRIAT, C. Theoretical and numerical comparisons of looped functionals and clock-dependent Lyapunov functions—The case of periodic and pseudo-periodic systems

with impulses. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Chichester, v.26, n.10, p.2232–2255, 2016.

BRIAT, C.; SEURET, A. A looped-functional approach for robust stability analysis of linear impulsive systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.61, n.10, p.980–988, 2012.

CAMACHO, E. F.; ALBA, C. B. **Model predictive control**. Great Britain: Springer Science & Business Media, 2013.

CASAVOLA, A.; FAMULARO, D.; FRANZE, G. Predictive control of constrained nonlinear systems via LPV linear embeddings. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Chichester, v.13, n.3-4, p.281–294, 2003.

CASAVOLA, A.; FAMULARO, D.; FRANZE, G.; GARONE, E. An improved predictive control strategy for polytopic LPV linear systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 45., 2006. **Proceedings...** Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2006. p.5820–5825.

CISNEROS, P. S.; SRIDHARAN, A.; WERNER, H. Constrained predictive control of a robotic manipulator using quasi-LPV representations. **IFAC-PapersOnLine**, [S.l.], v.51, n.26, p.118–123, 2018.

CLOOSTERMAN, M. B.; WOUW, N. Van de; HEEMELS, W.; NIJMEIJER, H. Stability of networked control systems with uncertain time-varying delays. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.54, n.7, p.1575–1580, 2009.

CLOOSTERMAN, M.; HETEL, L.; WOUW, N. V. D.; HEEMELS, W.; DAAFOUZ, J.; NIJMEIJER, H. Controller synthesis for networked control systems. **Automatica**, Oxford, v.46, n.10, p.1584–1594, 2010.

CORSO, J.; CASTELAN, E. B.; MORENO, U. F.; DE PIERI, E. R. Controle dependente de parâmetros para uma classe de sistemas não-lineares incertos com atuadores saturantes. **SBA: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, Campinas, v.20, n.2, p.119–132, 2009.

COUTINHO, D. F.; GOMES DA SILVA Jr, J. M. Computing estimates of the region of attraction for rational control systems with saturating actuators. **IET Control Theory & Applications**, Stevenage, v.4, n.3, p.315–325, 2010.

DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.43, n.5, p.355–359, 2001.

DE CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; OLIVEIRA, R. C.; PERES, P. L. D.; SWEVERS, J. Gain-scheduled H_2 and H_∞ control of discrete-time polytopic time-varying systems. **IET Control Theory & Applications**, Stevenage, v.4, n.3, p.362–380, 2010.

DE OLIVEIRA, M. C.; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C. A new discrete-time robust stability condition. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.37, n.4, p.261–265, 1999.

- DE SOUZA, C. E.; TROFINO, A.; OLIVEIRA, J. de. Robust \mathcal{H}_∞ control of uncertain linear systems via parameter-dependent Lyapunov functions. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 39., 2000, Sydney. **Proceedings...** IEEE, 2000. v.4, p.3194–3199.
- DU, H.; ZHANG, N.; SAMALI, B.; NAGHDY, F. Robust sampled-data control of structures subject to parameter uncertainties and actuator saturation. **Engineering Structures**, London, v.36, p.39–48, 2012.
- EBIHARA, Y.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. **S-variable approach to LMI-based robust control**. New York: Springer, 2015.
- EL GHAOU, L.; SCORLETTI, G. Control of rational systems using linear-fractional representations and linear matrix inequalities. **Automatica**, Oxford, v.32, n.9, p.1273–1284, 1996.
- FERON, E.; APKARIAN, P.; GAHINET, P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.41, n.7, p.1041–1046, 1996.
- FRIDMAN, E. A refined input delay approach to sampled-data control. **Automatica**, Oxford, v.46, n.2, p.421–427, 2010.
- FRIDMAN, E.; SEURET, A.; RICHARD, J.-P. Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. **Automatica**, Oxford, v.40, n.8, p.1441–1446, 2004.
- FRIDMAN, E.; SHAKED, U. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.47, n.2, p.253–270, 2002.
- FUJIOKA, H. Stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices. **Automatica**, Oxford, v.45, n.3, p.771–775, 2009.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P.; CHILALI, M. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.41, n.3, p.436–442, 1996.
- GARCIA, C. E.; PRETT, D. M.; MORARI, M. Model predictive control: theory and practice—a survey. **Automatica**, Oxford, v.25, n.3, p.335–348, 1989.
- GAROFALO, F.; CELENTANO, G.; GLIELMO, L. Stability robustness of interval matrices via Lyapunov quadratic forms. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.38, n.2, p.281–284, 1993.
- GHIGGI, I.; GOMES DA SILVA Jr, J. M.; COUTINHO, D.; SOUZA, C. E. de. Stability analysis of nonlinear rational sampled-data control systems over communication networks. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 15., 2015. **Proceedings...** International Federation of Automatic Control, 2015. p.422–427.
- GOMES DA SILVA Jr., J. M.; MORAES, V. M.; FLORES, J. V.; PALMEIRA, A. H. K. Sampled-data LPV Control: a looped functional approach. In: IFAC WORKSHOP ON LINEAR PARAMETER VARYING SYSTEMS, 1., 2015, Grenoble. **Proceedings...** Elsevier, 2015. v.48, n.26, p.19–24.

GOMES DA SILVA Jr., J. M.; PALMEIRA, A.; MORAES, V.; FLORES, J. L_2 -disturbance attenuation for LPV systems under sampled-data control. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Chichester, 2018.

GOMES DA SILVA Jr, J. M.; QUEINNEC, I.; SEURET, A.; TARBOURIECH, S. Regional stability analysis of discrete-time dynamic output feedback under aperiodic sampling and input saturation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.61, n.12, p.4176–4182, 2016.

GOMES DA SILVA Jr, J. M.; TARBOURIECH, S. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.50, n.1, p.106–111, 2005.

HADDAD, W.; BERNSTEIN, D. Parameter-dependent Lyapunov functions, constant real parameter uncertainty, and the Popov criterion in robust analysis and synthesis. 1. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 30., 1991. **Proceedings...** IEEE, 1991. p.2274–2279.

HADDAD, W. M.; BERNSTEIN, D. S. Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle, and popov theorems and their application to robust stability. Part I: continuous-time theory. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Chichester, v.3, n.4, p.313–339, 1993.

HESPANHA, J. P.; NAGHSHTABRIZI, P.; XU, Y. A survey of recent results in networked control systems. **Proceedings-IEEE**, New York, v.95, n.1, p.138, 2007.

HETEL, L.; FITER, C.; OMRAN, H.; SEURET, A.; FRIDMAN, E.; RICHARD, J.-P.; NICULESCU, S. I. Recent developments on the stability of systems with aperiodic sampling: an overview. **Automatica**, Oxford, v.76, p.309–335, 2017.

HOFFMANN, C.; WERNER, H. A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, Piscataway, v.23, n.2, p.416–433, 2015.

HU, T.; LIN, Z. **Control systems with actuator saturation: analysis and design**. New York: Springer Science & Business Media, 2001.

HUANG, Y. **Nonlinear optimal control: an enhanced quasi-LPV approach**. 1999.

HUANG, Y.; JADBABAIE, A. Nonlinear \mathcal{H}_∞ control: an enhanced quasi-LPV approach. In: IFAC WORLD CONGRESS, 14., 1999, Beijing. **Proceedings...** IFAC, 1999. p.85–90.

JIANG, W.; SEURET, A. Improved stability analysis of networked control systems under asynchronous sampling and input delay. In: IFAC WORKSHOP ON DISTRIBUTED ESTIMATION AND CONTROL IN NETWORKED SYSTEMS, 2., 2010, Annecy. **Proceedings...** IFAC, 2010. p.073.

JUNGERS, M.; CASTELAN, E. B. Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.60, n.3, p.169–173, 2011.

JUNGERS, M.; OLIVEIRA, R. C.; PERES, P. L. D. MPC for LPV systems with bounded parameter variations. **International Journal of Control**, London, v.84, n.1, p.24–36, 2011.

KAO, C.-Y.; FUJIOKA, H. On stability of systems with aperiodic sampling devices. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.58, n.8, p.2085–2090, 2013.

KAPILA, V.; HADDAD, W. M.; ERWIN, R. S.; BERNSTEIN, D. S. Robust controller synthesis via shifted parameter-dependent quadratic cost bounds. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.43, n.7, p.1003–1007, 1998.

KATAYAMA, H.; ICHIKAWA, A. H_∞ control for sampled-data nonlinear systems described by Takagi–Sugeno fuzzy systems. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v.148, n.3, p.431–452, 2004.

KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. 3.ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.

KIM, D. W.; LEE, H. J.; TOMIZUKA, M. Fuzzy stabilization of nonlinear systems under sampled-data feedback: an exact discrete-time model approach. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v.18, n.2, p.251–260, 2010.

KIM, H. S.; PARK, J. B.; JOO, Y.-H. A fuzzy Lyapunov-Krasovskii functional approach to sampled-data output-feedback stabilization of polynomial fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, 2016.

KOTHARE, M. V.; BALAKRISHNAN, V.; MORARI, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. **Automatica**, Oxford, v.32, n.10, p.1361–1379, 1996.

LAM, H. Stability analysis of sampled-data fuzzy controller for nonlinear systems based on switching T-S fuzzy model. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, Amsterdam, v.3, n.4, p.418–432, 2009.

LAM, H. K.; LEUNG, F. H. F. Stabilization of chaotic systems using linear sampled-data controller. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Singapore, v.17, n.06, p.2021–2031, 2007.

LAM, H.; LING, W. Sampled-data fuzzy controller for continuous nonlinear systems. **IET Control Theory & Applications**, Stevenage, v.2, n.1, p.32–39, 2008.

LAM, H.; SENEVIRATNE, L. Tracking control of sampled-data fuzzy-model-based control systems. **IET Control Theory & Applications**, Stevenage, v.3, n.1, p.56–67, 2009.

LI, D.; XI, Y.; ZHENG, P. Constrained robust feedback model predictive control for uncertain systems with polytopic description. **International Journal of Control**, London, v.82, n.7, p.1267–1274, 2009.

LI, H.; JING, X.; LAM, H.-K.; SHI, P. Fuzzy sampled-data control for uncertain vehicle suspension systems. **IEEE Transactions on Cybernetics**, New York, v.44, n.7, p.1111–1126, 2014.

LU, Y.; ARKUN, Y. Quasi-min-max MPC algorithms for LPV systems. **Automatica**, Oxford, v.36, n.4, p.527–540, 2000.

MACIEJOWSKI, J. M. **Predictive control**: with constraints. New York: Princeton Hall, 2002.

MEI, F.; MAN, Z.; NGUYEN, T. Fuzzy modelling and tracking control of nonlinear systems. **Mathematical and Computer Modelling**, Oxford, v.33, n.6-7, p.759–770, 2001.

MIRKIN, L. Some remarks on the use of time-varying delay to model sample-and-hold circuits. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.52, n.6, p.1109, 2007.

NAGHSHTABRIZI, P.; HESPANHA, J. P.; TEEL, A. R. Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.57, n.5, p.378–385, 2008.

NEŠIĆ, D.; TEEL, A. R.; KOKOTOVIĆ, P. V. Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.38, n.4-5, p.259–270, 1999.

NGUANG, S. K.; SHI, P. Fuzzy H_∞ output feedback control of nonlinear systems under sampled measurements. **Automatica**, Oxford, v.39, n.12, p.2169–2174, 2003.

OLIVEIRA, J. **Controle robusto de sistemas lineares a parâmetros variantes no tempo**: técnicas de análise e síntese. 2000. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — UFSC, Florianópolis, 2000.

OLIVEIRA, J.; TROFINO, A.; DE SOUZA, C. E. Análise e síntese H_∞ para sistemas LPV. **SBA: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática**, Campinas, v.13, n.1, p.6–12, 2002.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.55, n.1, p.52–61, 2006.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.52, n.7, p.1334–1340, 2007.

PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; FLORES, J. V. Controle saturante amostrado de sistemas LPV. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 21., 2016, Vitória. **Anais...** Sociedade Brasileira de Automática, 2016.

PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; FLORES, J. V. Controle amostrado de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy T-S. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 13., 2017. **Anais...** Sociedade Brasileira de Automática, 2017. v.1, p.1062–1068.

PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; FLORES, J. V. Regional stability of nonlinear sampled-data controlled systems under actuator saturation: a quasi-lpv approach. In: DELAYS AND CONSTRAINTS IN DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS, 1., 2017, Paris. **Proceedings...** International Federation of Automatic Control, 2017. v.1.

PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; FLORES, J. V. Aperiodic sampled-data control for LPV systems under input saturation. In: IFAC WORKSHOP ON LINEAR PARAMETER VARYING SYSTEMS, 2., 2018, Florianópolis. **Proceedings...** International Federation of Automatic Control, 2018. v.1.

PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; FLORES, J. V. Regional stability analysis of nonlinear sampled-data control systems: a quasi-LPV approach. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 16., 2018. **Proceedings...** International Federation of Automatic Control, 2018. v.1.

PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA Jr, J. M.; TARBOURIECH, S.; GHIGGI, I. M. F. Sampled-data control under magnitude and rate saturating actuators. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Chichester, 2016.

PELLANDA, P.; SIMOES, A.; APKARIAN, P.; ALAZARD, D. Synthesis of missile gain-scheduled autopilots using an H_∞ -LPV technique with piecewise continuously differentiable parameter-dependent Lyapunov functions. **Journal of Nonlinear Studies, Special Issue on Control in Defense Systems**, Daytona Beach, v.11, n.2, p.243–276, 2004.

QIN, S. J.; BADGWELL, T. A. A survey of industrial model predictive control technology. **Control engineering practice**, New York, v.11, n.7, p.733–764, 2003.

RAMEZANIFAR, A.; MOHAMMADPOUR, J.; GRIGORIADIS, K. M. Sampled-data control of linear parameter varying time-delay systems using state feedback. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 32., 2013, Washington. **Proceedings...** IEEE, 2013. p.6847–6852.

ROBERT, D.; SENAME, O.; SIMON, D. An LPV design for sampling varying controllers: experimentation with a t-inverted pendulum. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, Piscataway, v.18, n.3, p.741–749, 2010.

RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. **Automatica**, Oxford, v.36, n.10, p.1401–1425, 2000.

SEURET, A. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings. **Automatica**, Oxford, v.48, n.1, p.177–182, 2012.

SEURET, A.; GOMES DA SILVA Jr., J. Taking into account period variations and actuator saturation in sampled-data systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.61, p.1286–1293, 2012.

SEURET, A.; GOUAISBAUT, F.; TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA Jr, J. M. Improved stability criteria for sampled-data systems with input saturation. In: **Recent Results on Nonlinear Delay Control Systems**. [S.l.]: Springer, 2016. p.311–325.

SHAMMA, J. S.; ATHANS, M. Gain scheduling: potential hazards and possible remedies. **IEEE Control Systems Magazine**, New York, v.12, n.3, p.101–107, 1992.

SHAMMA, J.; XIONG, D. Control of rate constrained linear parameter varying systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 34., 1995. **Proceedings...** IEEE, 1995. v.3, p.2515–2520.

SHI, T.; SU, H. Sampled-data MPC for LPV systems with input saturation. **IET Control Theory & Applications**, Stevenage, v.8, n.17, p.1781–1788, 2014.

SILVA, L. F. P.; LEITE, V. J. S.; CASTELAN, E. B.; KLUG, M. Local stabilization of time-delay nonlinear discrete-time systems using T-S models and convex optimization. **Mathematical Problems in Engineering**, [S.l.], 2014.

SOUZA, M. **Contribuição à teoria de sistemas amostrados: análise, controle e estimação**. [S.l.]: Campinas, SP, 2015.

SUZUKI, H.; SUGIE, T. MPC for LPV systems with bounded parameter variation using ellipsoidal set prediction. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 25., 2006. **Proceedings...** IEEE, 2006. p.5251–5256.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, New York, n.1, p.116–132, 1985.

TAN, K.; GRIGORIADIS, K. M. State-feedback control of LPV sampled-data systems. **Mathematical Problems in Engineering**, [S.l.], v.6, n.2-3, p.145–170, 2000.

TAN, K.; GRIGORIADIS, K.; WU, F. Output-feedback control of LPV sampled-data systems. **International Journal of Control**, London, v.75, n.4, p.252–264, 2002.

TAN, W.; PACKARD, A. K.; BALAS, G. J. Quasi-LPV modeling and LPV control of a generic missile. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 19., 2000, Illinois. **Proceedings...** IEEE, 2000. v.5, p.3692–3696.

TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; QUEINNEC, I. **Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators**. New York: Springer Science & Business Media, 2011.

TROFINO, A.; DE SOUZA, C. E. Bi-quadratic stability of uncertain linear systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 38., 1999, Arizona. **Proceedings...** IEEE, 1999. v.5, p.5016–5021.

WADA, N.; SAITO, K.; SAEKI, M. Model predictive control for linear parameter varying systems using parameter dependent Lyapunov function. In: SYMPOSIUM ON CIRCUITS AND SYSTEMS, 47., 2004, Hiroshima. **Proceedings...** IEEE, 2004. v.3, p.111–133.

WANG, F.; BALAKRISHNAN, V. Improved stability analysis and gain-scheduled controller synthesis for parameter-dependent systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.47, n.5, p.720–734, 2002.

WU, Z.-G.; SHI, P.; SU, H.; CHU, J. Sampled-data fuzzy control of chaotic systems based on a T-S fuzzy model. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v.22, n.1, p.153–163, 2014.

YAESH, I.; SHAKED, U. Robust reduced-order output-feedback H_∞ control. **IFAC Proceedings Volumes**, [S.l.], v.42, n.6, p.155–160, 2009.

ZACCARIAN, L.; TEEL, A. R. **Modern anti-windup synthesis**: control augmentation for actuator saturation. New York: Princeton University Press, 2011. v.36.

ZHANG, W.; BRANICKY, M. S.; PHILLIPS, S. M. Stability of networked control systems. **IEEE Control Systems Magazine**, New York, v.21, n.1, p.84–99, 2001.