

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Análise de Comparação e Convergência da
Solução da Equação do Transporte de
Partículas Unidimensional pelo Método
 LTS_N**

por

Jardel Moreira Dylewski

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio Cesar Lombaldo Fernandes
Orientador

Prof^a. Dr^a. Cynthia Feijó Segatto
Coorientadora

Porto Alegre, 28 de Março de 2019.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Moreira Dylewski, Jardel

Análise de Comparação e Convergência da Solução da Equação do Transporte de Partículas Unidimensional pelo Método LTS_N / Jardel Moreira Dylewski.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2019.

57 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2019.

Orientador: Lombaldo Fernandes, Julio Cesar; Coorientadora: Feijó Segatto, Cynthia

Dissertação: Fenômenos de Transporte
Difusão de Nêutrons, Método LTS_N Recursivo, Método LTS_N
Não-Espectral, Resíduos

Análise de Comparação e Convergência da Solução da Equação do Transporte de Partículas Unidimensional pelo Método

LTS_N

por

Jardel Moreira Dylewski

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Lombaldo Fernandes

Coorientadora: Prof^a. Dr^a. Cynthia Feijó Segatto

Banca examinadora:

Prof. Dr. Esequia Sauter
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró Vargas
Departamento Engenharia/PUCRS

Prof. Dr. Cláudio Zen Petersen
PPGMMat/UFPel

Dissertação apresentada
28/03/2019.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

Sumário

LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELAS	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
AGRADECIMENTOS	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 MÉTODO LTS_N CLÁSSICO	5
2.1 Método LTS_N Clássico Aplicado em Meios Homogêneos	5
3 MÉTODO LTS_N RECURSIVO	14
3.1 Método LTS_N Recursivo para Meios Homogêneos	14
4 MÉTODO LTS_N NÃO-ESPECTRAL	17
4.1 Método LTS_N Não-Espectral Aplicado em Meios Homogêneos	17
5 RESÍDUOS	20
5.1 Aplicação dos Resíduos em uma Equação Diferencial	20

5.2	Cálculo de Resíduos dos Métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral	22
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	25
6.1	Comparação dos Métodos em Meios Homogêneos	25
6.2	Resultados dos Resíduos para os Métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral	39
7	CONCLUSÕES	49
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	52

Lista de Figuras

Figura 6.1	Diferença entre os métodos Recursivo e Não-Espectral em $x = 0$ considerando anisotropia $L = 8$	36
Figura 6.2	Diferença entre os métodos Recursivo e Não-Espectral em $x = 0,5$ considerando anisotropia $L = 8$	37
Figura 6.3	Diferença entre os métodos Recursivo e Não-Espectral em $x = 1$ considerando anisotropia $L = 8$	38

Lista de Tabelas

Tabela 6.1	Fluxos escalares pelos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral considerando anisotropia $L = 8$	28
Tabela 6.2	Fluxos escalares pelos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral considerando anisotropia $L = 82$	29
Tabela 6.3	Fluxos escalares pelos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral considerando anisotropia $L = 299$	30
Tabela 6.4	Condicionamento da matriz de autovalores D pelo método LTS_N Recursivo considerando $L = 8$	31
Tabela 6.5	Fluxos escalares pelos métodos LTS_N Clássico, Recursivo e Não-Espectral considerando $L = 8$	33
Tabela 6.6	Fluxos escalares pelos métodos LTS_N Clássico, Recursivo e Não-Espectral considerando $L = 82$	34
Tabela 6.7	Fluxos escalares pelos métodos LTS_N Clássico, Recursivo e Não-Espectral considerando $L = 299$	34
Tabela 6.8	Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 8$ em $x = 0$ cm.	40
Tabela 6.9	Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 82$ em $x = 0$ cm.	41
Tabela 6.10	Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 299$ em $x = 0$ cm.	42

Tabela 6.11 Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 8$ em $x = 0,5$ cm.	43
Tabela 6.12 Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando $L = 82$ em $x = 0,5$ cm.	44
Tabela 6.13 Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 299$ em $x = 0,5$ cm.	45
Tabela 6.14 Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 8$ em $x = 1$ cm.	46
Tabela 6.15 Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 82$ em $x = 1$ cm.	47
Tabela 6.16 Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 299$ em $x = 1$ cm.	48

LISTA DE SÍMBOLOS

S_N	Sistema de ordenadas discretas
N	Ordem de quadratura de Gauss
LTS_N	Transformada de Laplace de S_N
μ	Direção angular
ψ	Fluxo angular
x	Espessura
x_0	Espessura máxima
σ_s	Seção de choque macroscópica de espalhamento
σ_t	Seção de choque macroscópica total
$p(\cos\Theta)$	Função de espalhamento
$F(x, \mu)$	Fonte externa
f	Fluxo incidente em $x = 0$
g	Fluxo incidente em $x = x_0$
L	Grau de anisotropia
β_l	Coefficientes da expansão em Polinômios de Legendre
$P_l(\mu)$	Polinômio de Legendre
$P_l^m(\mu)$	Funções associadas de Legendre
γ	Ângulo azimutal
γ'	Ângulo de referência
μ_j	Raízes do polinômio de Legendre
ω_j	Pesos da quadratura de Gauss-Legendre
μ_n	Direção discreta
ψ_n	Fluxo angular na direção discreta μ_n
Ψ	Vetor do fluxo angular
A	Matriz LTS_N associada
$F(x)$	Vetor fonte

a_{ij}	Elementos da matriz A
δ	Delta de Kroenecker
Ψ_1	Vetor do fluxo nas direções positivas
Ψ_2	Vetor do fluxo nas direções negativas
$\bar{\Psi}$	Transformada de Laplace do vetor fluxo angular
\bar{F}	Transformada de Laplace do vetor fonte
\mathcal{L}	Operador da transformada de Laplace
s	Parâmetro complexo proveniente da Transformada de Laplace
I	Matriz identidade
B	Matriz da transformada inversa de Laplace de $(sI - A)^{-1}$
G	Vetor convolução da matriz B com o vetor F
X	Matriz de autovetores de A
X^{-1}	Matriz inversa de autovetores de A
D	Matriz de autovalores de A
\mathcal{L}^{-1}	Operador da transformada inversa de Laplace
d_i	Autovalores da matriz A
D_1	Matriz de autovalores negativos de A
D_2	Matriz de autovalores positivos de A
C	Matriz de multiplicação entre X e e^{Dx}
ξ	Vetor auxiliar
A_I	Matriz LTS_N isotrópica
A_C	Matriz LTS_N anisotrópica
Ψ^k	Fluxo recursivo
η	Vetor auxiliar para mudança de base
\mathcal{B}	Matriz complementar com os termos da matriz A
\mathcal{D}	Matriz diagonal com os termos da matriz A
\mathcal{B}_{ij}	Elementos da matriz \mathcal{B}

d_{ij}	Elementos da matriz diagonal \mathcal{D}
V	Vetor auxiliar para o cálculo das recursões
\mathcal{R}	Resíduo
$\ \cdot\ _\infty$	Norma infinito ou norma do máximo
$\Psi'(x_n)$	Derivada de Ψ no ponto $x = x_n$
h	Passo ou tamanho da placa discretizada em $n + 1$ pontos
$R(h)$	Matriz do resíduo
ϕ	Fluxo escalar de partículas
ϕ_R	Fluxo escalar de partículas obtido pelo método LTS_N Recursivo
ϕ_N	Fluxo escalar de partículas obtido pelo método LTS_N Não-Espectral
$\varepsilon_{R,N}$	Diferença entre os métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral
ϕ_C	Fluxo escalar de partículas obtido pelo método LTS_N Clássico
$\varepsilon_{R,C}$	Diferença entre os métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Clássico
$\varepsilon_{N,C}$	Diferença entre os métodos LTS_N Não-Espectral e LTS_N Clássico
λ_{min}	Autovalor mínimo da matriz A
λ_{max}	Autovalor máximo da matriz A
$cond(D)$	Condicionamento da matriz de autovalores D
$\mathcal{R}_{(R)}$	Resíduo obtido pelo método LTS_N Recursivo
$\mathcal{R}_{(N)}$	Resíduo obtido pelo método LTS_N Não-Espectral

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma análise de comparação e convergência dos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral. Analisamos a convergência pontual de ambos os métodos através do uso de resíduos, um critério utilizado para testar a qualidade da solução de equações diferenciais. Comparamos os resultados para o fluxo escalar de partículas da equação do transporte unidimensional através dos métodos Recursivo e Não-Espectral, observando a diferença entre eles. No método Recursivo, decompomos a matriz LTS_N anisotrópica como a soma de duas matrizes, uma contendo a parte isotrópica e outra contendo a parte anisotrópica do problema. Para resolver o sistema de equações, utilizamos a mesma ideia de resolução do método LTS_N Clássico, que utiliza o cálculo de autovalores e autovetores da matriz associada. No método Não-Espectral, resolvemos o sistema de equações S_N sem o cálculo de autovalores e autovetores da matriz associada ao problema. Nesse trabalho, apresentamos os resultados numéricos obtidos pelos métodos Recursivo, Não-Espectral e Clássico, aplicados a problemas anisotrópicos em regiões homogêneas. Além disso, provamos a convergência pontual dos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral através da análise dos resíduos em ambos os métodos. Os resultados para os resíduos também são apresentados nesse trabalho.

ABSTRACT

In this work, we present a comparison and convergence analysis of the methods LTS_N Recursive and LTS_N non-Spectral. We analyze the pointwise convergence of both methods through the use of residues, a criterion used to test the quality of the solution of differential equations. We compare the results for the particles scalar flux of the unidimensional neutrons transport equation through the Recursive and non-Spectral methods, noting the difference between them. In the Recursive method, we factored the LTS_N array anisotropic as the sum of two arrays, one containing the isotropic part and another containing the anisotropic part of the problem. To solve the system of equations, we use the same idea of the LTS_N Classical method, which uses the calculation of eigenvalues and eigenvectors of the associated matrix. In the non-Spectral method, we solve the system of equations S_N without the calculation of eigenvalues and eigenvectors of the matrix associated with the problem. In this work, we present the numerical results obtained by the Recursive, non-spectral and Classical methods, applied to anisotropic problems in homogeneous regions. In addition, we prove the pointwise convergence of the LTS_N Recursive and LTS_N non-Spectral methods through analysis of the residues in both methods. The results for the residues are also presented in this work.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me abençoar e iluminar meus caminhos em momentos de dificuldade. Sem Ele não seria possível a realização deste trabalho.

Dedico este trabalho aos meus pais, Paulo e Antônia, e irmãos, Vanusa e Itamar, agradecendo por todo apoio, amor e incentivo, que me ajudaram a superar os desafios encontrados durante esta etapa de formação.

Aos professores Dr. Júlio Cesar Lombaldo Fernandes e Dra. Cynthia Feijó Segatto, pelos ensinamentos e palavras de incentivo durante a realização deste trabalho.

Aos meus colegas e amigos que sempre estiveram ao meu lado e torceram por mim. Em especial as colegas Luana Alves, Makele Heidt e Mélangy Santos, pelo carinho e amizade de sempre.

Aos demais amigos e colegas do PPGMAp, especialmente a Daiane Frighetto, Luana Lazzari, Silvia Barcelos e Taline Foletto, que me auxiliaram na execução deste trabalho.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro.

Por fim, agradeço a todos professores que me acompanharam em cada etapa da minha formação. Obrigado por todos os ensinamentos.

1 INTRODUÇÃO

A equação do transporte de partículas neutras é uma versão linearizada da equação originalmente desenvolvida por Boltzmann no estudo da teoria cinética dos gases. Em sua forma íntegro-diferencial, esta equação descreve a distribuição de partículas em um meio material por meio de sete variáveis: três espaciais, duas angulares, uma energética e uma temporal. Essa equação pode ser aplicada na resolução de muitos problemas referentes ao transporte de nêutrons, fótons, elétrons, etc. (Veja Duderstadt e Martin) [1].

A importância de pesquisas sobre a equação do transporte está relacionada ao vasto número de aplicações que podemos encontrar em diversas áreas como: aplicações em nanotecnologia, relacionada a micro-fluidos [2] e micro-máquinas [3, 4]; estudos de fenômenos de transpiração térmica [5], existentes em escoamentos internos produzidos por um gradiente de pressão ou temperatura, que são aplicados em sistemas micro-elétricos-mecânicos [6, 7]; física de reatores nucleares [8]; medicina nuclear e proteção radiológica [9], entre outros.

Nas últimas décadas, devido a dificuldade de se obter uma solução, uma vez que consideramos como solução exata os resultados obtidos pelo método de Case [10], muitas aproximações para a equação unidimensional de transporte foram desenvolvidas. Entre estas, destacamos o método das ordenadas discretas (S_N) proposto na década de 60, no estudo da transferência radiativa em atmosferas estelares, por Chandrasekhar [11]. A ideia central dessa aproximação, consiste na discretização da variável angular. Para isso, aproximamos o termo integral da equação do transporte de partículas pela quadratura de Gauss-Legendre de ordem N e, em seguida, aplicamos o método de colocação no conjunto de direções discretas, considerando como função teste a função delta de Dirac e como pontos de colocação as direções já utilizadas na integração numérica. Após este procedimento, obtemos um sistema

de N equações diferenciais para o fluxo nas N direções discretas. Este sistema é geralmente conhecido como equações S_N ou equações em Ordenadas Discretas.

Atualmente, existem vários métodos de resolução analítica para a aproximação em ordenadas discretas da equação do transporte. Entre eles, podemos citar o método LTS_N desenvolvido na década de 90 por Vilhena *et al.* [12, 13, 14, 15, 16, 17]. Este método consiste na aplicação da técnica da Transformada de Laplace no conjunto de equações S_N , resultando em um sistema algébrico no espaço transformado. Esse sistema é então resolvido para o fluxo transformado e, após, aplicam a técnica da Transformada Inversa de Laplace, obtendo assim, uma expressão analítica para o fluxo angular de partículas na variável espacial e nas N direções discretas.

O método LTS_N tem resolvido muitos problemas, entre os quais citamos: problemas unidimensionais em meios homogêneos e heterogêneos [13, 18, 19]; problemas multi-grupos de energia [14, 20] e meios compostos por dois materiais em sistema de mistura aleatória [21]; problemas de transferência radiativa sem e com polarização [22, 23]; problemas sem simetria azimutal [22]; problemas considerando altos graus de anisotropia e fontes arbitrárias [17, 24]; determinação de parâmetros radiantes [19]; problemas de criticalidade e problemas de cinética de reatores [25, 26, 27, 28, 29, 30]; problemas com dependência temporal [30, 31, 32, 33]. Para resolver esse último, Tomaschewski [30] e Segatto *et al.* [33] aplicam a técnica da Transformada de Laplace na variável temporal obtendo um sistema de equações que são resolvidas pelo método LTS_N .

Citamos também, que a formulação LTS_N já foi utilizada para a solução do problema inverso em ótica hidrológica [34]. Devemos lembrar, que a convergência por esse método já foi provada utilizando os C_0 semigrupos [35, 36], que à medida que N cresce, a solução LTS_N se aproxima da solução exata de Case [10].

O método LTS_N foi utilizado também, para resolver problemas com geometria cartesiana multidimensional (2D e 3D) [23, 37, 39]. A ideia do método LTS_N foi ainda adaptada para a resolução de problemas de transporte unidimensionais em geometria cilíndrica, onde foi utilizada a Transformada de Hankel no lugar da Transformada de Laplace. Por esse motivo, o método foi chamado de HTS_N . O HTS_N resolve problemas isotrópicos e linearmente anisotrópicos de um cilindro [38, 40].

Em 2017, Fernandes *et al.* [41] resolvem o problema de transporte anisotrópico de forma recursiva. A equação do problema em sua forma integral é resolvida a partir de um conjunto de equações integrais isotrópicas onde a anisotropia é inserida em forma de fonte, mostrando-se uma técnica promissora para problemas de transporte.

Em suas dissertações, Foletto [42] e Rigolli [43], desenvolvem métodos que utilizam a ideia proposta por Fernandes *et al.* [41], para resolver a equação do transporte de partículas com espalhamento anisotrópico, através de um sistema recursivo de equações. Foletto [42] desenvolve um método chamado LTS_N Recursivo, que reconstrói a solução LTS_N de problemas anisotrópicos a partir de um sistema recursivo de soluções LTS_N de problemas isotrópicos. O método desenvolvido por Rigolli [43], chamado de LTS_N Não-Espectral, foi proposto a partir do método LTS_N Recursivo, cuja solução foi feita de forma a evitar o cálculo de autovalores e autovetores associados a matriz do sistema.

Nesse trabalho apresentamos os métodos: LTS_N Clássico, LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral aplicados a problemas em meios homogêneos. O objetivo central é comparar os métodos Recursivo e Não-Espectral, analisando a diferença entre os fluxos escalares obtidos para problemas contendo os mesmos parâmetros de transporte. Além disso, provamos a convergência pontual dos métodos Recursivo e

Não-Espectral através do uso de resíduos. Apresentamos ainda, uma comparação dos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral com o método LTS_N Clássico.

Desta forma, este trabalho está dividido em sete capítulos: No capítulo **2**, descrevemos a formulação clássica do método LTS_N , aplicado a meios homogêneos, que resolve a equação de transporte unidimensional em sua forma íntegro-diferencial. No capítulo **3**, apresentamos a construção da solução LTS_N anisotrópica a partir de um sistema recursivo de soluções LTS_N isotrópicas, que chamamos de método LTS_N Recursivo. No capítulo **4**, apresentamos o método LTS_N Não-Espectral que utiliza a mesma ideia de solução do método Recursivo mas que, no entanto, não necessita da utilização da diagonalização da matriz associada ao problema, evitando assim, o cálculo de autovalores e autovetores. No capítulo **5**, descrevemos a utilização dos resíduos aplicados em uma equação diferencial e posterior aplicação aos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral. No capítulo **6**, apresentamos, em formas de tabelas e gráficos, os resultados para os fluxos escalares de partículas obtidos em um código computacional implementado em *Fortran95* e os valores encontrados para a diferença entre os métodos, bem como, os resultados para os resíduos dos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral. Por fim, no capítulo **7**, apresentamos nossas conclusões e propostas para trabalhos futuros.

2 MÉTODO LTS_N CLÁSSICO

Neste capítulo vamos apresentar o método LTS_N em sua formulação clássica aplicado a problemas em meios homogêneos. Esse método, proposto para a resolução da aproximação em ordenadas discretas da equação do transporte de partículas, consiste na aplicação da técnica da transformada de Laplace nas equações S_N , seguida da inversão da matriz simbólica, feita de forma analítica e, por fim, a solução do sistema linear resultante. A seguir apresentamos o método LTS_N Clássico aplicado em meios homogêneos.

2.1 Método LTS_N Clássico Aplicado em Meios Homogêneos

Nesta seção, apresentamos o método LTS_N em sua formulação Clássica, aplicado em meios homogêneos. Para isso, vamos considerar uma placa homogênea de espessura x_0 , composta por uma região contendo seus parâmetros de transporte.

Consideramos a equação do transporte linear unidimensional em sua forma íntegro-diferencial, estacionária, com simetria azimutal, espalhamento anisotrópico e fonte externa, dada por:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 p(\cos \Theta) \psi(x, \mu') d\mu' + F(x, \mu). \quad (2.1)$$

As condições de contorno são os fluxos incidentes na fronteira do domínio, conhecidos como:

$$\psi(0, \mu) = f(\mu) \quad se \quad \mu > 0, \quad (2.2)$$

$$\psi(x_0, \mu) = g(\mu) \quad se \quad \mu < 0. \quad (2.3)$$

Na equação (2.1) consideramos:

- x a variável espacial pertencente ao intervalo $[0, x_0]$;
- $\mu = \cos(\theta)$ onde θ é o ângulo polar, ou seja, $\mu \in [-1, 1]$;
- $\psi(x, \mu)$ é o fluxo angular de partículas em x na direção de μ . Notação: $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2}\right)$;
- $p(\cos \Theta)$ é a função de espalhamento, onde Θ é formado pela direção de movimento da partícula antes da iteração e o ângulo resultante após a iteração;
- $F(x, \mu)$ é uma fonte externa;
- σ_s é a seção de choque macroscópica de espalhamento isotrópico;
- σ_t é a seção de choque macroscópica total.

A função de espalhamento pode ser aproximada por uma expansão finita em polinômios de Legendre, isto é:

$$p(\cos \Theta) = \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\cos \Theta) \quad \text{com} \quad \beta_0 = 1. \quad (2.4)$$

Utilizando o Teorema da Adição de Polinômios de Legendre [15], podemos reescrever a equação dada em (2.4), como:

$$p(\cos \Theta) = \sum_{m=0}^M \sum_{l=0}^L \beta_l^m P_l^m(\mu') P_l^m(\mu) \cos(m(\gamma - \gamma')), \quad (2.5)$$

onde γ é o ângulo azimutal formado com um ângulo de referência γ' e $P_l^m(\mu)$ são as funções associadas de Legendre com:

$$\beta_l^m = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \beta_l.$$

Por considerarmos que o fluxo angular de partículas possui simetria azimutal, basta tomarmos $M = 0$ na equação (2.5) e reescrevemos a equação (2.1)

como:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu') P_l(\mu) \psi(x, \mu') d\mu' + F(x, \mu). \quad (2.6)$$

Para obtermos a aproximação em ordenadas discretas da equação (2.6), aproximamos o seu termo integral por quadratura de Gauss-Legendre de ordem N , com N par, dada por:

$$\int_{-1}^1 p(\cos \Theta) \psi(x, \mu') d\mu' \approx \sum_{l=0}^L \beta_l \sum_{j=1}^N \omega_j P_l(\mu) P_l(\mu_j) \psi(x, \mu_j), \quad (2.7)$$

onde μ_j são as raízes do polinômio de Legendre, ordenadas em forma decrescente, ou seja:

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \mu_{\frac{N}{2}} < \dots < 1,$$

com N par, e ω_j são os pesos da quadratura gaussiana, dados por:

$$\omega_j = \int_{-1}^1 \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{(\mu - \mu_j)}{(\mu_i - \mu_j)} d\mu. \quad (2.8)$$

Utilizando a aproximação (2.7), podemos reescrever a equação (2.6) da seguinte forma:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \sum_{j=1}^N \omega_j P_l(\mu) P_l(\mu_j) \psi(x, \mu_j) + F(x, \mu). \quad (2.9)$$

Para discretizarmos a variável angular, aplicamos o método da colocação na equação (2.9), usando a função Delta de Dirac $\delta(\mu - \mu_j)$ como função teste e, como pontos de colocação, as raízes do polinômio de Legendre de grau N . Assim obtemos:

$$\mu_n \frac{d}{dx} \psi(x, \mu_n) + \sigma_t \psi(x, \mu_n) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \sum_{j=1}^N \omega_j P_l(\mu_n) P_l(\mu_j) \psi(x, \mu_j) + F_n(x). \quad (2.10)$$

Para facilitar a notação, denotamos o fluxo angular x na direção N , $\psi(x, \mu_n)$, por $\psi_n(x)$. Deste modo, o sistema de equações S_N associados à equação

do transporte de partículas unidimensional (2.1), é dado por:

$$\frac{d}{dx}\psi_n(x) + \frac{\sigma_t}{\mu_n}\psi_n(x) = \frac{\sigma_s}{2\mu_n} \sum_{l=0}^L \beta_l \sum_{j=1}^N \omega_j P_l(\mu_n) P_l(\mu_j) \psi_j(x) + \frac{1}{\mu_n} F_n(x), \quad (2.11)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\psi_n(0) = f_n \quad \text{se} \quad \mu > 0, \quad (2.12)$$

$$\psi_n(x_0) = g_n \quad \text{se} \quad \mu < 0. \quad (2.13)$$

Em forma matricial, escrevemos (2.11) como:

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) - A\Psi(x) = F(x), \quad (2.14)$$

onde A é a matriz LTS_N anisotrópica cujas componentes são dadas por:

$$a_{ij} = -\delta_{i,j} \frac{\sigma_t}{\mu_i} + \frac{\sigma_s \omega_j}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j), \quad (2.15)$$

e $\delta_{i,j}$ é a delta de Kroenecker. O vetor $F(x)$ é o vetor de fonte, onde:

$$F(x) = \left[\frac{F_1(x)}{\mu_1}, \frac{F_2(x)}{\mu_2}, \dots, \frac{F_N(x)}{\mu_N} \right]^T, \quad (2.16)$$

e $\Psi(x)$ representa o vetor dos fluxos angulares nas N direções discretas, dados por:

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \vdots \\ \Psi_{\frac{N}{2}}(x) \\ \Psi_{\frac{N}{2}+1}(x) \\ \vdots \\ \Psi_N(x) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

onde $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ são sub-vetores de tamanho $\frac{N}{2}$ cada um, representando, respectivamente, os fluxos angulares nas direções positivas e negativas de μ . Utilizando

esta mesma notação, reescrevemos as condições de contorno da seguinte maneira:

$$\Psi_1(0) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi_2(x_0) = \begin{bmatrix} g_{\frac{N}{2}+1} \\ g_{\frac{N}{2}+2} \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Para resolvermos a equação (2.11) através do método LTS_N , aplicamos a técnica da transformada de Laplace na variável espacial x do sistema de equações dados em (2.14). Este procedimento resulta num sistema de equações lineares no espaço transformado, dado por:

$$(sI - A)\bar{\Psi}(s) = \bar{\Psi}(0) + \bar{F}(s), \quad (2.19)$$

onde $\bar{\Psi}(s) = \mathcal{L}[\Psi(x)]$ e $\bar{F}(s) = \mathcal{L}[F(x)]$ são as transformadas de Laplace, s é uma variável independente e I representa a matriz identidade de ordem N .

Resolvendo o sistema (2.19) para o fluxo angular transformado, obtemos:

$$\bar{\Psi}(s) = (sI - A)^{-1}\Psi(0) + (sI - A)^{-1}\bar{F}(s). \quad (2.20)$$

Posteriormente, aplicando a técnica da transformada inversa de Laplace na equação(2.20), temos o fluxo angular $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = B(x)\Psi(0) + G(x), \quad (2.21)$$

com:

$$B(x) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}], \quad (2.22)$$

e o vetor $G(x)$, definido por:

$$G(x) = B(x) * F(x) = \int_0^x B(x - \xi)F(\xi)d\xi, \quad (2.23)$$

onde o sinal $*$ representa a convolução entre funções vetoriais.

Para determinarmos a matriz $B(x)$ da equação (2.21), observamos que os autovalores da matriz LTS_N são todos simétricos não-nulos e distintos. Isso ocorre quando a seção de choque de espalhamento é diferente da seção de choque total ($\sigma_s \neq \sigma_t$) e, desta forma, a matriz A é diagonalizável. Assim, A pode ser decomposta como:

$$A = XDX^{-1}, \quad (2.24)$$

onde D é a matriz diagonal formada pelos autovalores de A e X é a matriz dos autovetores associados. Logo, podemos reescrever $B(x)$ como:

$$B(x) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[(sXX^{-1} - XDX^{-1})^{-1}]. \quad (2.25)$$

Colocando em evidência a matriz dos autovetores X à esquerda e X^{-1} à direita, obtemos:

$$B(x) = X\mathcal{L}^{-1}[(sI - D)^{-1}]X^{-1}. \quad (2.26)$$

Como a matriz $(sI - D)$ é uma matriz diagonal, sua inversa também é, e pode ser escrita como:

$$(sI - D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s-d_N} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

onde d_i são os autovalores da matriz A , $i = 1, 2, \dots, N$.

A transformada inversa de Laplace do sistema (2.27) é dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI - D)^{-1}] = \begin{bmatrix} e^{d_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2 x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_N x} \end{bmatrix} = e^{Dx}. \quad (2.28)$$

Assim, reescrevemos a matriz $B(x)$ como:

$$B(x) = X e^{Dx} X^{-1}. \quad (2.29)$$

Portanto, a solução do sistema de equações LTS_N descrita em (2.14), é conhecida como:

$$\Psi(x) = B(x)\Psi(0) + G(x) = X e^{Dx} X^{-1}\Psi(0) + G(x). \quad (2.30)$$

Agora, podemos escrever a solução $\Psi(x)$ na forma particionada, uma vez que, conhecemos somente uma parte do vetor $\Psi(0)$, de (2.30), que contém os valores para o fluxo angular nas direções positivas. Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1(0) \\ \Psi_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Posteriormente, aplicamos $x = x_0$ nas $\frac{N}{2}$ últimas linhas da equação (2.31) e obtemos:

$$\Psi_2(x_0) = B_{21}(x_0)\Psi_1(0) + B_{22}(x_0)\Psi_2(0) + G_2(x_0). \quad (2.32)$$

Como os vetores $\Psi_2(x_0)$, $\Psi_1(0)$ e $G(x_0)$ são conhecidos, podemos isolar o vetor $\Psi_2(0)$ como:

$$\Psi_2(0) = [B_{22}(x_0)]^{-1}[\Psi_2(x_0) - B_{21}(x_0)\Psi_1(0) - G_2(x_0)]. \quad (2.33)$$

Assim, a solução dada em (2.30) do problema (2.14) está completamente determinada. Entretanto, cabe ressaltar que o comportamento exponencial da solução (2.30), junto ao fato de que os autovalores da matriz A ficam mais numerosos conforme o aumento da quadratura N , mostram que a solução apresentada não é apropriada a problemas de alto grau de anisotropia ou problemas em placas

com grandes espessuras [16, 22]. Nesses casos, o uso de operações aritméticas finitas gera uma falha computacional, ocasionando imprecisão nos resultados ou problemas de *overflow*.

Para eliminar estes tipos de problemas, Gonçalves *et. al.* [17] utilizaram a propriedade de invariância de direções discretas, que permitiu usar um tratamento equivalente aos fluxos nas direções μ e $-\mu$ [44]. Assim, o par $(-x, -\mu)$, através do deslocamento do ponto de reflexão de 0 para $\frac{x_0}{2}$ pode ser recolocado por $(x_0 - x, -\mu)$. Utilizando isto, Gonçalves *et. al.* [22] eliminaram o *overflow* originado pelos termos de exponencial positiva para N grande, separando as soluções homogênea e particular em componentes contendo as direções positivas ($\mu > 0$) e, outra contendo as direções negativas ($\mu < 0$). Portanto, a matriz e^{Dx} de (2.29) foi decomposta como:

$$e^{Dx} = \begin{bmatrix} e^{D_1x} & 0 \\ 0 & e^{D_2(x-x_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{D_2x_0} \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

onde D_1 e D_2 representam as submatrizes diagonais de ordem $\frac{N}{2}$ formadas, respectivamente, por autovalores negativos e positivos da matriz A .

Para facilitar a resolução do sistema linear, reescrevemos (2.31) como:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} e^{D_1x} & 0 \\ 0 & e^{D_2(x-x_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{D_2x_0} \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_1(0) \\ \Psi_2(x_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

e considerando:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{D_2x_0} \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_1(0) \\ \Psi_2(x_0) \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

temos:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} e^{D_1x} & 0 \\ 0 & e^{D_2(x-x_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

onde:

$$G(x) = B(x) * F(x) = \int_0^x B(x - \xi)F(\xi)d\xi. \quad (2.38)$$

Para eliminar o problema de *overflow* no termo de convolução gerado pela fonte, tomamos o intervalo de integração $[0, x]$ se o autovalor for negativo e, $[x_0, x]$ se for positivo. Por fim, consideramos:

$$C(x) = X \begin{bmatrix} e^{D_1 x} & 0 \\ 0 & e^{D_2(x-x_0)} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

e assim, reescrevemos (2.37) como:

$$\Psi(x) = C(x) \xi + G(x), \quad (2.40)$$

sujeito às condições de contorno:

$$\Psi_1(0) = f, \quad (2.41)$$

$$\Psi_2(x_0) = g, \quad (2.42)$$

que nos fornece a solução LTS_N do problema proposto na equação (2.1).

3 MÉTODO LTS_N RECURSIVO

Neste capítulo vamos apresentar o método LTS_N Recursivo aplicado a problemas em meios homogêneos. Este método reconstrói a solução LTS_N de problemas anisotrópicos a partir de um sistema recursivo de soluções LTS_N de problemas isotrópicos [42]. A ideia central do método, é a decomposição da matriz LTS_N anisotrópica, como soma de duas matrizes, uma contendo a parte isotrópica e a outra contendo uma correção da anisotropia através do termo fonte. A solução por meio desse método é feita através de um sistema recursivo, onde o termo fonte é considerado as soluções anteriores desse sistema, considerando que o primeiro sistema possui a fonte do problema original. A seguir, apresentamos o método LTS_N Recursivo para meios homogêneos.

3.1 Método LTS_N Recursivo para Meios Homogêneos

Nesta seção, apresentamos o método LTS_N Recursivo aplicado em meios homogêneos. Consideremos as equações S_N anisotrópicas em sua forma matricial, dada por:

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) - A\Psi(x) = F(x), \quad (3.1)$$

onde $\Psi(x)$ representa o vetor dos fluxos angulares nas N direções discretas, A é a matriz anisotrópica e $F(x)$ é o vetor fonte.

Separamos a matriz A como $A = A_I + A_C$, onde A_I é a matriz LTS_N isotrópica e A_C é a matriz que contém a parte anisotrópica do espalhamento da matriz A . Desta forma, reescrevemos (3.1) como:

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) - A_I\Psi(x) = A_C\Psi(x) + F(x). \quad (3.2)$$

Para resolver o problema de forma recursiva, consideramos que o fluxo angular de partículas seja decomposto da seguinte maneira:

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k(x), \quad (3.3)$$

onde a primeira parcela do fluxo angular é solução do sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \Psi^0(x) - A_I \Psi^0(x) = F(x), \\ \psi_i(0) = f(x), \quad i = 1, \dots, \frac{N}{2}, \\ \psi_i(x_0) = g(x), \quad i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N, \end{cases}$$

cuja solução é dada por:

$$\Psi^k(x) = X e^{Dx} X^{-1} \Psi(0) + G(x), \quad (3.4)$$

sendo que X , X^{-1} e e^{Dx} representam as matrizes, respectivamente, dos autovetores, a inversa dos autovetores e a diagonal formada pelos autovalores da matriz A . Nesta equação, representamos o termo fonte por:

$$G(x) = X \int_0^{x_0} e^{D(x-\eta)} X^{-1} F(\eta) d\eta. \quad (3.5)$$

As demais parcelas dos fluxos angulares são soluções do sistema:

$$\frac{d}{dx} \Psi^k(x) - A_I \Psi^k(x) = A_C \Psi^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

com condições de contorno homogêneas. As soluções desses problemas são dadas por:

$$\Psi^k(x) = X e^{Dx} X^{-1} \Psi(0) + G(x), \quad (3.7)$$

onde:

$$G(x) = X \int_0^{x_0} e^{D(x-\eta)} X^{-1} A_C \Psi^{k-1}(\eta) d\eta. \quad (3.8)$$

Assim como a solução pelo método LTS_N clássico, desconhecemos metade do vetor $\Psi(0)$, porém calculamos conforme (2.32) e (2.33). Para resolvermos o sistema linear, escrevemos:

$$\xi = X^{-1}\Psi(0). \quad (3.9)$$

Deste modo, as soluções (3.4) e (3.7) podem ser escritas como:

$$\Psi^k(x) = C(x)\xi + G(x), \quad (3.10)$$

onde o termo fonte é calculado por:

$$G(x) = X \int_0^{x_0} e^{D(x-\eta)} X^{-1} F(\eta) d\eta, \quad k = 0, \quad (3.11)$$

$$G(x) = X \int_0^{x_0} e^{D(x-\eta)} X^{-1} A_C \Psi^{k-1}(\eta) d\eta, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

portanto, construímos a solução do problema LTS_N anisotrópico, utilizando um sistema recursivo de soluções LTS_N isotrópicas.

4 MÉTODO LTS_N NÃO-ESPECTRAL

Neste capítulo vamos apresentar o método LTS_N Não-Espectral aplicado a problemas em meios homogêneos. Utilizando a mesma ideia do método LTS_N Recursivo, dividimos a matriz LTS_N como a soma de duas matrizes, uma contendo a sua diagonal principal e a outra contendo o seu complemento [43]. A ideia central do método é evitar o cálculo de autovalores e autovetores associados à matriz LTS_N . Nesse método, o termo fonte também é construído a partir das soluções anteriores do sistema recursivo, considerando que o primeiro sistema possui a fonte original do problema. A seguir, apresentamos o método LTS_N Não-Espectral para meios homogêneos.

4.1 Método LTS_N Não-Espectral Aplicado em Meios Homogêneos

Nesta seção apresentamos o método LTS_N Não-Espectral em meios homogêneos. Consideramos a equação S_N anisotrópica em sua forma matricial:

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) - A\Psi(x) = F(x). \quad (4.1)$$

Decompomos a matriz A como a soma de uma matriz diagonal principal e o seu complemento, da seguinte maneira:

$$A = (A - \mathcal{D}) + \mathcal{D} = \mathcal{B} + \mathcal{D},$$

onde os elementos de \mathcal{B} e \mathcal{D} são dados, respectivamente, por:

$$\mathcal{B}_{ij} = \begin{cases} \frac{\sigma_s w_i}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j), & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ -\frac{\sigma_i}{\mu_i} + \frac{\sigma_s w_i}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j), & i = j. \end{cases}$$

Utilizamos essa notação e reformulamos a equação (4.1) como:

$$\frac{d}{dx} \Psi(x) - \mathcal{D} \Psi(x) = \mathcal{B} \Psi(x) + F(x). \quad (4.2)$$

Para resolver o problema (4.2) recursivamente, consideramos que o fluxo angular de partículas, assim como no método anterior, seja decomposto por:

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k(x), \quad (4.3)$$

onde, a primeira parcela do fluxo angular é solução do sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \Psi^0(x) - \mathcal{D} \Psi^0(x) = F(x), \\ \Psi(0) = f, & \mu > 0, \\ \Psi(x_0) = g, & \mu < 0, \end{cases},$$

cuja solução é conhecida. As demais parcelas para o fluxo angular são soluções do problema:

$$\frac{d}{dx} \Psi^K(x) - \mathcal{D} \Psi^K(x) = \mathcal{B} \Psi^{K-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

com condições de contorno homogêneas.

Pela construção da matriz \mathcal{D} , observamos que os primeiros $\frac{N}{2}$ elementos d_{ii} são negativos e os demais, positivos. Desta forma, denotamos o sistema (4.4) como as suas N equações desacopladas, ou seja:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \psi_i^0(x) - d_{ii} \psi_i^0(x) = F_i(x), & i = 1, \dots, N, \\ \psi_i^0(0) = f_n, & i = 1, \dots, \frac{N}{2}, \\ \psi_i(x_0) = g_n, & i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N, \end{cases}$$

cujas soluções são dadas por:

$$\psi_i^0(x) = e^{d_{ii}x}\psi_i^0(0) + \int_0^x e^{d_{ii}(x-\eta)}F_i(\eta)d\eta, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.5)$$

e o termo integral representa a convolução entre $e^{d_{ii}x}$ e $F_i(x)$.

Como desconhecemos metade do vetor $\psi_i^0(x)$ para $i = 1, 2, \dots, N$, aplicamos as condições de contorno originais do problema nas equações (4.5) quando $x = x_0$. Assim, obtemos a solução para $k = 0$ do problema (4.1):

$$\begin{cases} \psi_i^0(x) = e^{d_{ii}x}\psi_i^0(0) + \int_0^x e^{d_{ii}(x-\eta)}F_i(\eta)d\eta, & i = 1, \dots, \frac{N}{2}, \\ \psi_i^0(x) = e^{d_{ii}(x-x_0)}\psi_i^0(x_0) + \int_{x_0}^x e^{d_{ii}(x-\eta)}F_i(\eta)d\eta, & i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N. \end{cases}$$

Os demais termos da recursão para o fluxo angular de partículas $\Psi(x)$ são as soluções das equações:

$$\frac{d}{dx}\psi_i^K(x) - d_{ii}\psi_i^K(x) = V_i^{K-1}(x), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

onde:

$$V_i^{K-1}(x) = \mathcal{B}\Psi^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

com condições de contorno homogêneas.

Parte da condição de contorno também é desconhecida, assim, utilizamos a mesma ideia apresentada para a primeira recursão e obtemos a solução para cada $k = 1, 2, \dots$, dada por:

$$\begin{cases} \psi_i^k(x) = \int_0^x e^{d_{ii}(x-\eta)}V_i^{k-1}(\eta)d\eta, & i = 1, \dots, \frac{N}{2}, \\ \psi_i^k(x) = \int_{x_0}^x e^{d_{ii}(x-\eta)}V_i^{k-1}(\eta)d\eta, & i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N, \\ V_i^{K-1}(\eta) = \mathcal{B}\Psi^{k-1}(\eta), \end{cases}$$

desta forma, a solução para o problema (4.1) é completamente determinada.

5 RESÍDUOS

Neste capítulo, vamos apresentar um critério bastante utilizado para testar a convergência da solução de uma equação diferencial: a análise de resíduos. Vamos analisar a eficiência dos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral para o sistema de equações S_N descrito em (2.14). A seguir, exemplificamos a utilização dos resíduos em uma equação diferencial ordinária e, posteriormente, apresentamos o cálculo de resíduos dos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral.

5.1 Aplicação dos Resíduos em uma Equação Diferencial

Nesta seção apresentamos os resíduos aplicados em uma equação diferencial ordinária. O uso deste critério é bastante útil para testar a convergência da solução da equação. Para exemplificar o uso deste critério, consideremos uma equação diferencial ordinária linear qualquer, unidimensional, dada por:

$$\Delta f(x) + af(x) = 0. \quad (5.1)$$

A primeira etapa do método de decomposição faz uso de uma expansão da função $f(x)$ a ser determinada:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad (5.2)$$

substituindo (5.2) em (5.1), obtemos:

$$\Delta \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] + a \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] = 0. \quad (5.3)$$

Assim, o sistema de equações a ser resolvido é descrito por:

$$\Delta f_0(x) + af_0(x) = 0,$$

$$\Delta f_1(x) + af_1(x) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\Delta f_N(x) + af_N(x) = 0,$$

onde a primeira equação do sistema é o início da recursão e contém as condições de contorno do problema, não mostradas neste exemplo. As demais equações definem o sistema recursivo.

Suponhamos que uma solução aproximada após as N etapas de recursão tenha sido determinada:

$$f^{(N)}(x) = \sum_{k=0}^N f_k(x). \quad (5.4)$$

Podemos então, inserir esta solução aproximada na equação original, onde para qualquer valor de x , os seguintes casos são possíveis:

- $\Delta f^{(N)}(x) + af^{(N)}(x) > 0$,
- $\Delta f^{(N)}(x) + af^{(N)}(x) = 0$,
- $\Delta f^{(N)}(x) + af^{(N)}(x) < 0$.

Note que, eventualmente, pontos particulares podem coincidir com a verdadeira solução. No entanto, a qualidade da solução pode ser analisada considerando o pior caso possível, ou seja, o maior desvio entre a solução aproximada e a solução verdadeira. Assim, fazemos uso da norma do máximo da equação original, e definimos o resíduo como:

$$\mathcal{R}_{(N)} = \|\Delta f^{(N)}(x) + af^{(N)}(x)\|_{\infty} \quad (5.5)$$

$$= \max_{x \in X} |\Delta f^{(N)}(x) + af^{(N)}(x)|, \quad (5.6)$$

onde X é o domínio de interesse.

Para verificar se a solução é candidata a uma solução aproximada, devemos analisar o residual para uma seleção de etapas de recursão:

$$\mathcal{R}_{(0)}, \mathcal{R}_{(1)}, \dots, \mathcal{R}_{(N)}.$$

Caso o residual seja uma sequência que tende a zero, a solução é candidata a uma solução aproximada para a equação diferencial.

5.2 Cálculo de Resíduos dos Métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral

Nesta seção, analisamos o cálculo residual dos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral, testando a qualidade da solução para a equação do transporte de partículas unidimensional.

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias, dado por:

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) - A\Psi(x) = F(x). \quad (5.7)$$

Encrevemos o vetor $\Psi(x)$ em forma particionada:

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

onde $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ são subvetores de tamanho $\frac{N}{2}$ e, assim, podemos escrever (5.7) da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

com A_{11} , A_{12} , A_{21} e A_{22} representando submatrizes de ordem $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$.

Reescrevendo as equações de (5.9) de forma separada, temos:

$$\Psi_1'(x) - A_{11}\Psi_1(x) - A_{12}\Psi_2(x) = F_1(x), \quad (5.10)$$

$$\Psi'_2(x) - A_{21}\Psi_1(x) - A_{22}\Psi_2(x) = F_2(x). \quad (5.11)$$

Existem vários métodos de aproximação para a derivada de Ψ no ponto x . Entre eles, podemos destacar o método das diferenças finitas, que é um método baseado na expansão da série de Taylor e em aplicações diretas da definição de derivada. No nosso trabalho, utilizamos as seguintes aproximações para a derivada de Ψ no ponto $x = x_n$:

$$\Psi'(x_n) = \frac{\Psi(x_{n+1}) - \Psi(x_n)}{h}, \quad (5.12)$$

$$\Psi'(x_n) = \frac{\Psi(x_n) - \Psi(x_{n-1})}{h}, \quad (5.13)$$

$$\Psi'(x_n) = \frac{\Psi(x_{n+1}) - \Psi(x_{n-1})}{2h}. \quad (5.14)$$

As aproximações dadas em (5.12), (5.13) e (5.14), são chamadas, respectivamente, diferenças ascendentes, diferenças descendentes e diferenças centrais. Nessas equações, o termo h representa a diferença entre os pontos x_n e x_{n+1} para todo valor de n no domínio discretizado. O termo h é chamado de tamanho ou passo.

Em nossos resultados, vamos utilizar esses três tipos de aproximações para Ψ'_1 e Ψ'_2 , de (5.10) e (5.11), no ponto $x = x_n$. Para exemplificar, tomamos a aproximação em diferenças descendentes para as derivadas de $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ no ponto $x = x_n$. Assim, reescrevemos (5.10) e (5.11) como:

$$\frac{\Psi_1(x_n) - \Psi_1(x_{n-1})}{h} - A_{11}\Psi_1(x_n) - A_{12}\Psi_2(x_n) = F_1(x_n), \quad (5.15)$$

$$\frac{\Psi_2(x_n) - \Psi_2(x_{n-1})}{h} - A_{21}\Psi_1(x_n) - A_{22}\Psi_2(x_n) = F_2(x_n). \quad (5.16)$$

Escrevendo (5.15) e (5.16) na forma matricial, temos:

$$R(h)\Psi(x_n) = F(x_n) + \frac{1}{h}\Psi(x_{n-1}), \quad (5.17)$$

onde:

$$R(h) = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \frac{1}{h} - A_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$$\Psi(x_n) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x_n) \\ \Psi_2(x_n) \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$\Psi(x_{n-1}) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x_{n-1}) \\ \Psi_2(x_{n-1}) \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

$$F(x_n) = \begin{bmatrix} F_1(x_n) \\ F_2(x_n) \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

e assim, podemos obter o resíduo de (5.7) através da seguinte fórmula:

$$\mathcal{R} = \|R(h)\Psi(x_n) - F(x_n) - \frac{1}{h}\Psi(x_{n-1})\|_{\infty}. \quad (5.22)$$

O cálculo dos resíduos através dos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral é realizado pela equação (5.22), levando em consideração os valores encontrados para o fluxo de partículas por ambos os métodos e a discretização dos pontos da placa, onde vamos considerar diferentes valores para os passos utilizados na aplicação do método das diferenças finitas. Os resultados serão apresentados na seção (6.2) do próximo capítulo.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de comparar os métodos LTS_N Recursivo e Não-Espectral, vamos resolver numericamente alguns problemas com o auxílio da linguagem de programação *Fortran95*, analisando algumas situações e comparando os resultados com o método LTS_N Clássico. Nos códigos implementados no programa, para o caso do método LTS_N Recursivo, foram utilizadas as subrotinas do Lapack: DGEEV para o cálculo de autovalores e autovetores da matriz A , DGETRF para a fatoração LU e DGETRS para a resolução do sistema linear. Resolvemos problemas em meios homogêneos e, em seguida, apresentamos os resultados para os resíduos dos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral, mostrando que ambos geram uma solução aproximada para a equação do transporte de partículas aplicada a problemas em meios homogêneos.

6.1 Comparação dos Métodos em Meios Homogêneos

Nesta seção analisamos os resultados obtidos pelos métodos LTS_N Clássico, LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral referentes ao fluxo escalar de partículas da equação do transporte monoenergética, estacionária, de espalhamento anisotrópico e sem fonte externa, dada por:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 p(\cos \Theta) \psi(x, \mu') d\mu', \quad (6.1)$$

com condições de contorno:

$$\psi(0, \mu) = 1 \quad \text{se} \quad \mu > 0,$$

$$\psi(x_0, \mu) = 0 \quad \text{se} \quad \mu < 0.$$

Para a análise dos resultados, consideramos os seguintes parâmetros:

- Placa homogênea de tamanho $x_0 = 1$ cm,
- $\sigma_t = 1$ cm⁻¹,
- $\sigma_s = 0,95$ cm⁻¹.

Calculamos os resultados para a equação (6.1) pelos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral, considerando diferentes graus de anisotropia: $L = 8, 82$ e 299 , e ordens de quadraturas variadas: $N = 40, 100, 200, 300, 400, 500, 600$. Os coeficientes da expansão em Polinômios de Legendre (β_l) utilizados nas simulações foram obtidos de [45]. Para avaliarmos os termos de convolução das integrais presentes nos problemas, em ambos os casos, utilizamos quadratura de Gauss-Legendre contendo 50 pontos. A interpolação polinomial dos termos $\mathcal{B}\Psi^{k-1}$ pelo método Não-Espectral e $X^{-1}A_C\Psi^{k-1}$ pelo método Recursivo foi feita através da utilização de Splines Cúbicos, com condições de contorno restritas. Na implementação, utilizamos a subrotina proposta por [46] na página 109. Neste trabalho, os Splines Cúbicos foram compostos por 100 pontos.

Os resultados que apresentamos abaixo, mostram os fluxos escalares de partículas, definidos por:

$$\phi(x) = \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu'. \quad (6.2)$$

Quando calculamos os fluxos escalares dados em (6.2) pelos métodos Recursivo e Não-Espectral, utilizamos como critério de parada a convergência de $\phi(x)$ impondo uma tolerância de 10^{-15} .

A comparação entre os métodos foi realizada considerando o erro de aproximação entre os métodos, dados pela fórmula do erro absoluto:

$$\varepsilon_{R,N} = |\phi_R - \phi_N|, \quad (6.3)$$

onde $\varepsilon_{R,N}$ é a diferença entre os fluxos escalares obtidos pelos métodos LTS_N Recursivo e Não-Espectral dados, respectivamente, por: ϕ_R e ϕ_N . Os erros entre os métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Clássico e, LTS_N Não-Espectral e LTS_N Clássico são descritos por $\varepsilon_{R,C}$ e $\varepsilon_{N,C}$ respectivamente. Ainda, representamos o fluxo escalar de partículas pelo método LTS_N Clássico por ϕ_C .

Apresentamos os resultados para o fluxo escalar de partículas em diferentes pontos da placa (0 cm, 0,5 cm e 1 cm), considerando diferentes graus de anisotropia (L) e ordens de quadratura (N) variadas. As tabelas abaixo mostram os resultados para os fluxos escalares calculados a partir dos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral utilizando graus de anisotropia: $L = 8, 82$ e 299 , com ordens de quadratura: $N = 40, 100, 200, 300, 400, 500$ e 600 . Para a aproximação polinomial, em ambos métodos, utilizamos Splines Cúbicos com condições de contorno restritas. Nessas tabelas constam ainda os valores para a diferença entre esses métodos, que é dada por (6.3).

Posição	N	ϕ_R	ϕ_N	$\varepsilon_{R,N}$
$x = 0$	40	1,291527352150	1,291527284200	6,7950E-08
	100	1,291607014378	1,291606971580	4,2798E-08
	200	1,291618067323	1,291618274740	2,0742E-07
	300	1,291619911585	1,291620372480	4,6089E-07
	400	1,291620366684	1,291620939210	5,7253E-07
	500	1,291620412009	1,291620933990	5,2198E-07
	600	1,291620298858	1,291620639860	3,4100E-07
$x = 0,5$	40	0,923291595673	0,923291512308	8,3365E-08
	100	0,923270279591	0,923270354973	7,5382E-08
	200	0,923267500376	0,923268468971	9,6859E-08
	300	0,923267000992	0,923269202780	2,2018E-06
	400	0,923266835115	0,923270262839	3,4277E-06
	500	0,923266763921	0,923271276485	4,5126E-06
	600	0,923266728785	0,923272164574	5,4358E-06
$x = 1$	40	0,605927918043	0,605927904529	1,3514E-08
	100	0,605833708338	0,605834444446	7,3611E-07
	200	0,605821540496	0,605825886126	4,3456E-06
	300	0,605820681005	0,605830219714	9,5387E-06
	400	0,605821481615	0,605836412553	1,4931E-05
	500	0,605822620476	0,605842525887	1,9905E-05
	600	0,605823769180	0,605848078064	2,4301E-05

Tabela 6.1: Fluxos escalares pelos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral considerando anisotropia $L = 8$.

Posição	N	ϕ_R	ϕ_N	$\varepsilon_{R,N}$
$x = 0$	100	1,228748830049	1,228748887610	5,7561E-08
	200	1,228767405782	1,228767756470	3,5007E-07
	300	1,228770150217	1,228770804550	6,5433E-07
	400	1,228770455603	1,228771296510	8,4091E-07
	500	1,228770020225	1,228770902680	8,8245E-07
	600	1,228769298848	1,228770057060	7,5821E-07
$x = 0,5$	100	0,920236043980	0,920236225464	1,8148E-08
	200	0,920232555893	0,920233589824	1,0339E-06
	300	0,920231968522	0,920234171961	2,2034E-06
	400	0,920231798732	0,920235193337	3,3946E-06
	500	0,920231742502	0,920236217735	4,4752E-06
	600	0,920231726013	0,920237081142	5,3513E-06
$x = 1$	100	0,661465738452	0,661466391689	6,5324E-07
	200	0,661449953704	0,661453763367	3,8097E-06
	300	0,661451929981	0,661460406877	8,4769E-06
	400	0,661456550360	0,661469960394	1,3410E-05
	500	0,661461450487	0,661479468089	1,8018E-05
	600	0,661466024102	0,661488115125	2,2091E-05

Tabela 6.2: Fluxos escalares pelos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral considerando anisotropia $L = 82$.

Posição	N	ϕ_R	ϕ_N	$\varepsilon_{R,N}$
$x = 0$	300	1,193328993117	1,193329815440	8,2232E-07
	400	1,193331685728	1,193332890690	1,2050E-06
	500	1,193330733442	1,193332174950	1,4415E-06
	600	1,193328374943	1,193329909670	1,5347E-06
$x = 0,5$	300	0,917597815316	0,917599527285	1,7120E-06
	400	0,917597467878	0,917600345715	2,8778E-06
	500	0,917597255012	0,917601242170	3,9871E-06
	600	0,917597101405	0,917602080192	4,9788E-06
$x = 1$	300	0,689719585219	0,689721844485	2,2593E-06
	400	0,689742762588	0,689747314144	4,5516E-06
	500	0,689768430680	0,689775514122	7,0834E-06
	600	0,689793192572	0,689802858258	9,6657E-06

Tabela 6.3: Fluxos escalares pelos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral considerando anisotropia $L = 299$.

Analisamos os resultados para os fluxos escalares no início, no meio e no fim da placa. Verificamos que o erro de aproximação entre os métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral variam com uma ordem de grandeza de 10^{-5} a 10^{-8} . Percebemos que, conforme a ordem de quadratura (N) e o grau de anisotropia (L) aumentam, os erros de aproximação entre os métodos crescem. Por exemplo, na Tabela 6.1, em $x = 0,5$ e $N = 100$, a diferença entre os métodos Recursivo e Não-Espectral é da ordem de 10^{-8} , enquanto que para $N = 600$, esta diferença aumenta para a ordem de 10^{-6} .

O aumento do erro está associado ao condicionamento da matriz do sistema (2.14). Note que, para os dois casos fizemos uma decomposição diferente na matriz. No método LTS_N Recursivo, decompomos A como: $A = A_I + A_C$ e, nesse caso, precisamos calcular os autovalores e autovetores da matriz para resolver o sistema. Para o caso Não-Espectral, a matriz é decomposta por: $A = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ e, portanto, não precisamos fazer o cálculo dos autovalores e autovetores da matriz

pois, podemos operar com o desacoplamento das N equações diferenciais ordinárias do sistema a ser resolvido. Neste caso, não analisamos o condicionamento da matriz do sistema pois, podemos operar com as equações em forma separada.

Através da implementação do método Recursivo, percebemos que os autovalores da matriz A são próximos, entre si, quando a ordem de quadratura é baixa. Porém, à medida que aumentamos N , alguns autovalores se tornam maiores e se distanciam dos demais, gerando assim, problemas referentes ao condicionamento de matrizes. Observamos que A é uma matriz não-singular e, portanto, podemos calcular o número de condicionamento da matriz considerando qualquer ordem de quadratura. Na tabela abaixo, mostramos os resultados para o número de condicionamento da matriz de autovalores do problema Recursivo, considerando grau de anisotropia $L = 8$ e diferentes ordens de quadratura:

N	λ_{min}	λ_{max}	$cond(D)$
8	3,79485E-01	4,50628E+00	1,1875E+01
40	3,79485E-01	2,48417E+01	6,5462E+01
300	3,79485E-01	1,90355E+02	5,0161E+02
600	3,79485E-01	3,81341E+02	1,0049E+03
1000	3,79485E-01	6,35988E+02	1,6759E+03
1500	3,79485E-01	9,54298E+02	2,5147E+03
2000	3,79485E-01	1,27261E+03	3,3536E+03

Tabela 6.4: Condicionamento da matriz de autovalores D pelo método LTS_N Recursivo considerando $L = 8$.

Na Tabela 6.4, λ_{min} , λ_{max} e $cond(D)$ representam, respectivamente, o autovalor mínimo, o autovalor máximo e o número de condicionamento da matriz D , obtida pelo método LTS_N Recursivo. Nessa tabela, verificamos que o número de condicionamento da matriz aumenta conforme o crescimento da ordem de quadratura. Isso decorre ao fato de que, a diferença entre o maior e o menor autovalor está aumentando. Os resultados para $L = 82$ e $L = 299$ são semelhantes, indicando

que isso também ocorre para os demais graus de anisotropia, e assim, a matriz do problema é mal-condicionada. Devido a isso, os erros se propagam de forma mais relevante, pois quanto maior for o número de condicionamento pior será valor encontrado para o erro e , nesse caso, maior será a diferença entre os métodos.

Visando evitar os problemas associados ao condicionamento de matrizes, gerados pelo método Recursivo, foi proposto o método LTS_N Não-Espectral. Neste método, a decomposição da matriz A possibilita a resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias de forma separada, e isso elimina o problema de condicionamento de matrizes pois, nesse caso, não precisamos resolver o sistema através do método da diagonalização, que gera um custo computacional elevado, que, neste caso, é feito pelo método Recursivo.

Pelos resultados das tabelas 6.1, 6.2 e 6.3, verificamos, que o grau de anisotropia influencia apenas no número de recursões necessárias para a convergência do fluxo escalar de partículas. Observamos que o número de recursões necessárias para a convergência pelo método LTS_N Recursivo, considerando o grau de anisotropia $L = 8$, foi de 26 recursões. No entanto, pelo método LTS_N Não-Espectral o número de iterações variou entre 57 e 59. Considerando $L = 82$, pelo método Recursivo, o número de recursões variou entre 32 e 33 recursões enquanto que, pelo método Não-Espectral a convergência se deu entre 61 e 67 recursões. Por fim, considerando $L = 299$, o número de recursões necessárias para a convergência do fluxo escalar de partículas pelo método Recursivo ocorreu entre 43 e 45 recursões e, pelo método Não-Espectral entre 59 e 74 iterações.

Os resultados obtidos através da implementação dos dois métodos foram satisfeitos, considerando a tolerância de 10^{-15} imposta como critério de parada. Para analisar o erro de aproximação entre os métodos, consideramos os resultados obtidos pelos programas através do número de recursões de cada método, comparando iteração por iteração.

A seguir, apresentamos os resultados para os fluxos escalares de partículas, em comparação com o método LTS_N Clássico. Analisamos também, os erros de aproximação dados em (6.3) entre os métodos: Clássico e Recursivo e, Clássico e Não-Espectral que representamos, respectivamente, por: $\varepsilon_{R,C}$ e $\varepsilon_{N,C}$.

Posição	N	ϕ_C	ϕ_R	ϕ_N	$\varepsilon_{R,C}$	$\varepsilon_{N,C}$
$x = 0$	40	1,291527E+00	1,291527E+00	1,291527E+00	7,8500E-09	7,5800E-08
	100	1,291607E+00	1,291607E+00	1,291607E+00	3,5622E-08	7,8420E-08
	300	1,291620E+00	1,291619E+00	1,291620E+00	3,7842E-07	8,2480E-08
$x = 0,5$	40	9,232916E-01	9,232916E-01	9,232915E-01	6,7300E-10	8,2692E-08
	100	9,232703E-01	9,232703E-01	9,232703E-01	2,5910E-09	7,7973E-08
	300	9,232670E-01	9,232670E-01	9,232692E-01	2,5992E-08	2,2279E-06
$x = 1$	40	6,059279E-01	6,059279E-01	6,059279E-01	1,6043E-08	2,5290E-09
	100	6,058334E-01	6,058337E-01	6,058344E-01	2,4934E-07	9,8545E-07
	300	6,058178E-01	6,058207E-01	6,058302E-01	2,9190E-06	1,2458E-05

Tabela 6.5: Fluxos escalares pelos métodos LTS_N Clássico, Recursivo e Não-Espectral considerando $L = 8$.

Posição	N	ϕ_C	ϕ_R	ϕ_N	$\varepsilon_{R,C}$	$\varepsilon_{N,C}$
$x = 0$	100	1,228749E+00	1,228749E+00	1,228749E+00	9,9951E-08	4,2390E-08
	200	1,228768E+00	1,228767E+00	1,228768E+00	5,1422E-07	1,6353E-07
	300	1,228771E+00	1,228770E+00	1,228771E+00	1,2198E-06	5,6545E-07
$x = 0,5$	100	9,202360E-01	9,202360E-01	9,202362E-01	1,0980E-08	1,8246E-07
	200	9,202325E-01	9,202326E-01	9,202336E-01	5,1893E-08	1,0858E-07
	300	9,202319E-01	9,202320E-01	9,202342E-01	1,0652E-07	2,3099E-06
$x = 1$	100	6,614650E-01	6,614657E-01	6,614664E-01	7,7445E-07	1,4277E-06
	200	6,614454E-01	6,614499E-01	6,614538E-01	4,4657E-06	8,2754E-06
	300	6,614419E-01	6,614519E-01	6,614604E-01	9,9870E-06	1,8464E-05

Tabela 6.6: Fluxos escalares pelos métodos LTS_N Clássico, Recursivo e Não-Espectral considerando $L = 82$.

Posição	N	ϕ_C	ϕ_R	ϕ_N	$\varepsilon_{R,C}$	$\varepsilon_{N,C}$
$x = 0$	300	1,193329E+00	1,193328E+00	1,193330E+00	2,9688E-07	5,2544E-07
	400	1,193338E+00	1,193332E+00	1,193333E+00	6,3543E-06	5,1496E-06
$x = 0,5$	300	9,175979E-01	9,175978E-01	9,175995E-01	1,3368E-07	1,5783E-06
	400	9,175977E-01	9,175975E-01	9,176003E-01	2,3881E-07	2,6397E-06
$x = 1$	300	6,896856E-01	6,897196E-01	6,897218E-01	3,3981E-05	3,6240E-05
	400	6,896816E-01	6,897428E-01	6,897473E-01	6,1202E-05	6,5753E-05

Tabela 6.7: Fluxos escalares pelos métodos LTS_N Clássico, Recursivo e Não-Espectral considerando $L = 299$.

Analisando os resultados para o fluxo escalar de partículas, observamos que o erro de aproximação entre os métodos LTS_N Clássico e LTS_N Recursivo variam de 10^{-5} a 10^{-9} . De forma semelhante, a aproximação entre os métodos LTS_N Clássico e LTS_N Não-Espectral variam de 10^{-5} a 10^{-10} . Em comparação com os resultados anteriores, é possível ver que o erro aumenta conforme o crescimento da ordem de quadratura e do grau da anisotropia. Isso também está associado a problemas de condicionamento de matrizes. Neste caso, verificamos que a matriz A do

sistema (2.14) também é mal-condicionada quando resolvemos pelo método LTS_N Clássico.

Observando os resultados das tabelas 6.5, 6.6 e 6.7, percebemos que, quando comparamos os métodos Recursivo e Não-Espectral com os métodos Clássico e Recursivo e, Clássico e Não-Espectral, a diferença entre os métodos variou de forma semelhante, mostrando que os métodos Recursivo e Não-Espectral convergem para a mesma solução encontrada pelo método LTS_N Clássico. A convergência dos métodos Recursivo e Não-Espectral será mostrada na próxima seção, onde apresentamos os resultados para os resíduos pontuais de ambos os métodos.

Como os métodos convergem para a mesma solução, precisamos averiguar o comportamento da diferença entre os resultados, considerando ordens de quadraturas maiores do que as apresentadas nas tabelas 6.1, 6.2 e 6.3. Sendo assim, simulamos os resultados para os fluxos escalares do problema (6.1), considerando ordens de quadraturas superiores a 600 pontos. Foram verificados os casos em que a ordem de quadratura varia entre 600 e 2000 pontos. Os resultados para a diferença entre os métodos estão dispostos nos gráficos abaixo. Apresentamos os valores para a diferença entre os fluxos escalares, dos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral, nos pontos: $x = 0$ cm, $x = 0,5$ cm e $x = 1$ cm, considerando grau de anisotropia $L = 8$.

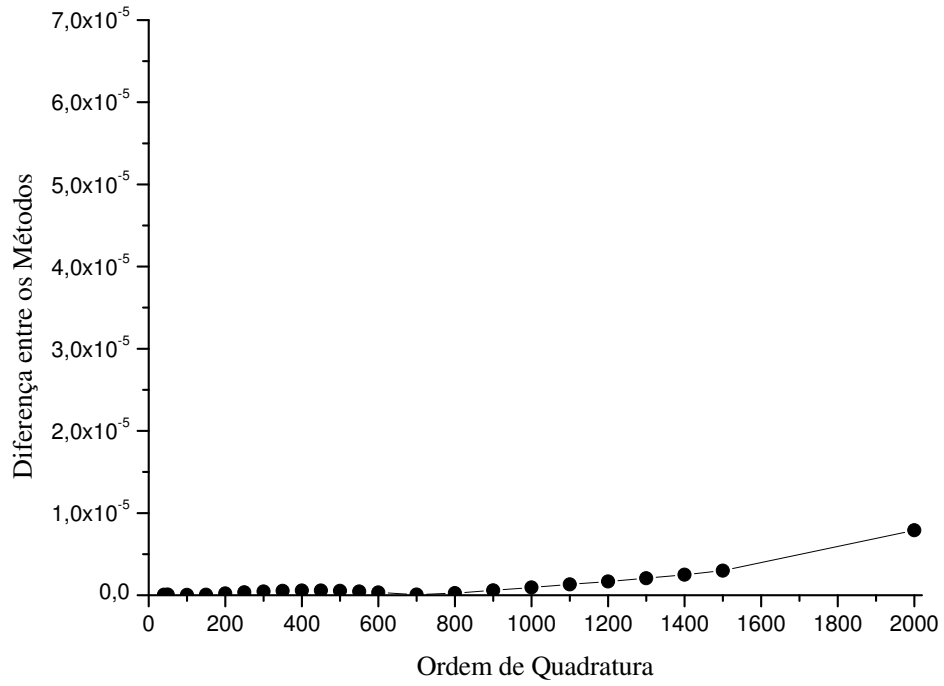


Figura 6.1: Diferença entre os métodos Recursivo e Não-Espectral em $x = 0$ considerando anisotropia $L = 8$.

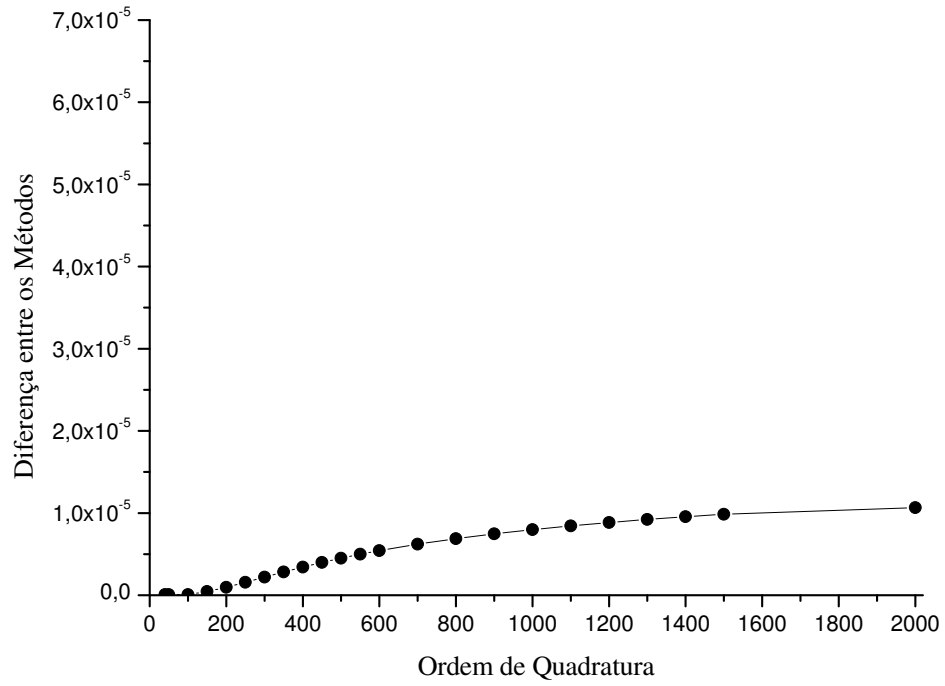


Figura 6.2: Diferença entre os métodos Recursivo e Não-Espectral em $x = 0,5$ considerando anisotropia $L = 8$.

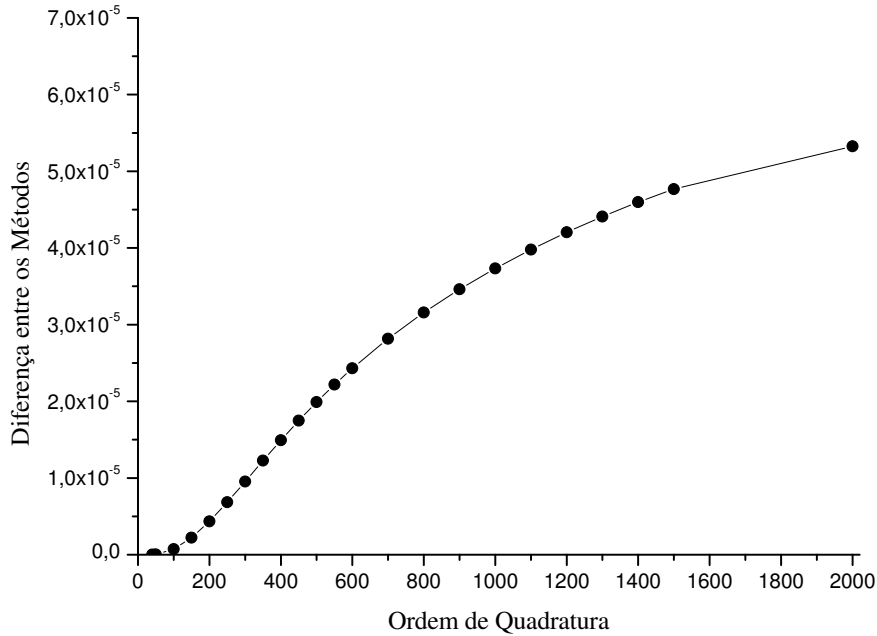


Figura 6.3: Diferença entre os métodos Recursivo e Não-Espectral em $x = 1$ considerando anisotropia $L = 8$.

Analisando os gráficos das figuras 6.1, 6.2 e 6.3, percebemos que o erro entre os métodos Recursivo e Não-Espectral cresce conforme o aumento da ordem de quadratura. Também foi possível ver isso, nos resultados apresentados na Tabela 6.1. Observamos também, que para $N \geq 700$ o erro entre os métodos continua aumentando, porém, com uma taxa menor, mostrando que essa diferença se estabiliza quando consideramos ordens de quadraturas mais elevadas. O comportamento para a diferença entre os métodos, considerando os graus de anisotropia $L = 82$ e $L = 299$, são semelhantes.

Em suma, é possível concluir que ambos os métodos são eficientes, pois encontram soluções numéricas muito próximas quando consideramos o mesmo problema com os mesmos parâmetros de transporte. A diferença entre os resultados

obtidos em cada método é gerada a partir de problemas associados ao condicionamento de matrizes e controlada pelo aumento da ordem de quadratura.

6.2 Resultados dos Resíduos para os Métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral

Nesta seção, apresentamos os resultados dos resíduos encontrados para o problema homogêneo (6.1) pelos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral. Consideramos os mesmos parâmetros de transporte descritos na seção anterior. Os resultados foram gerados a partir de uma mudança na rotina principal de ambos programas e são apresentados abaixo em formas de tabelas.

Apresentamos os resultados dos resíduos do métodos Recursivo e Não-Espectral no início, meio e fim da placa de tamanho $x_0 = 1$ cm, considerando graus de anisotropia: $L = 8, 82$ e 299 , e ordens de quadraturas: $N = 8, 50, 100, 150, 200, 300, 400$ e 600 . Os resultados que apresentamos abaixo, foram gerados pela última recursão, ou seja, cumprindo a tolerância de 10^{-15} imposta como critério de parada. Para avaliarmos os termos da derivada de Ψ nos pontos da placa, utilizamos o método das diferenças finitas. Em $x = 0$, usamos uma aproximação em diferenças ascendentes; em $x = 0,5$ aproximamos por diferenças centrais e, no ponto $x = 1$, utilizamos uma aproximação em diferenças descendentes. Calculamos os resultados para diferentes valores do passo (h), utilizado na discretização dos pontos da placa. Como notação, representamos os resíduos pontuais do método Recursivo como: $\mathcal{R}_{(R)}$, e do método Não-Espectral como: $\mathcal{R}_{(N)}$.

A seguir, apresentamos os resultados para o resíduos em $x = 0$ cm:

N	h	$\mathcal{R}_{(R)}$	$\mathcal{R}_{(N)}$
8	0,1	1,192842725459E-15	1,260517144188E-15
	0,01	1,176970245452E-15	1,384560825074E-15
	0,001	9,146516349045E-16	1,769317553629E-15
	0,0001	9,146516349045E-16	1,769317553630E-15
50	0,1	5,515250710626E-15	1,408442588277E-14
	0,01	3,524329194000E-14	7,096414617589E-15
	0,001	6,459628958252E-15	1,637606772440E-14
	0,0001	6,459628958252E-15	1,637606772440E-14
100	0,1	1,200549774323E-14	1,592583895922E-14
	0,01	7,142062098128E-15	1,518855708608E-14
	0,001	1,313468603416E-14	1,917973228761E-14
	0,0001	1,313468603416E-14	1,917973228761E-14
150	0,1	1,863640890554E-14	2,999371843845E-14
	0,01	1,162886710392E-14	2,892982703248E-14
	0,001	1,981299456281E-14	3,673581886412E-14
	0,0001	1,981299456281E-14	3,673581886412E-14
200	0,1	2,529289607286E-14	4,632859568073E-14
	0,01	1,670076340757E-14	4,404211301947E-14
	0,001	2,649214266067E-14	5,610725055846E-14
	0,0001	2,649214266067E-14	5,610725055846E-14
300	0,1	3,862963462498E-14	8,672106531624E-14
	0,01	2,801392474606E-14	7,677907139432E-14
	0,001	3,985139239729E-14	9,818015589580E-14
	0,0001	3,985139239729E-14	9,818015589580E-14

Tabela 6.8: Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 8$ em $x = 0$ cm.

N	h	$\mathcal{R}_{(R)}$	$\mathcal{R}_{(N)}$
100	0,1	5,112468616840E-14	1,930902557516E-14
	0,01	4,745328803071E-14	1,779621333873E-14
	0,001	5,634005138442E-14	2,564144982509E-14
	0,0001	5,634005138443E-14	2,564144982509E-14
150	0,1	7,361632224880E-14	4,562413830511E-14
	0,01	6,938348683728E-14	4,070712052378E-14
	0,001	8,182620019947E-14	5,970662797370E-14
	0,0001	8,182620019947E-14	5,970662797370E-14
200	0,1	9,579479167543E-14	4,985214490933E-14
	0,01	9,123081118239E-14	4,092131830147E-14
	0,001	1,098000160682E-13	6,061736886708E-14
	0,0001	1,098000160682E-13	6,061736886708E-14
300	0,1	1,442551410610E-13	1,033506825209E-13
	0,01	1,347586182249E-13	7,831381015994E-14
	0,001	1,657212134655E-13	1,172872761153E-13
	0,0001	1,657212134655E-13	1,172872761153E-13

Tabela 6.9: Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 82$ em $x = 0$ cm.

N	h	$\mathcal{R}_{(R)}$	$\mathcal{R}_{(N)}$
300	0,1	2,576648881953E-13	7,819083135113E-14
	0,01	2,377453750984E-13	6,168217472946E-14
	0,001	2,733787257117E-13	9,162007891147E-14
	0,0001	2,733787257117E-13	9,162007891147E-14
400	0,1	1,672577561707E-13	1,269844613847E-13
	0,01	1,562249659468E-13	9,275258631742E-14
	0,001	1,756382300098E-13	1,424329728389E-13
	0,0001	1,756382300099E-13	1,424329728389E-13
600	0,1	2,403782732278E-13	2,359955159305E-13
	0,01	2,253871495307E-13	1,594880433565E-13
	0,001	2,622372471153E-13	2,541141166245E-13
	0,0001	2,622372471153E-13	2,541141166245E-13

Tabela 6.10: Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 299$ em $x = 0$ cm.

Pelas tabelas 6.8, 6.9 e 6.10, percebemos que os resultados para os resíduos em $x = 0$ cm, tanto pelo método Recursivo, quanto para o método Não-espectral, são bons. Esses resultados variam com uma ordem de grandeza de 10^{-13} a 10^{-16} o que mostra que o residual encontrado é próximo de zero, como esperado. Portanto, os métodos convergem nesse ponto, considerando diferentes ordens de quadraturas e graus de anisotropia.

As tabelas abaixo, mostram os resultados para os resíduos do métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral em $x = 0,5$ cm:

N	h	$\mathcal{R}_{(R)}$	$\mathcal{R}_{(N)}$
8	0,1	2,915326673046E-15	3,373832765545E-15
	0,01	2,916766651152E-15	3,355142792096E-15
	0,001	1,430920335411E-14	1,498986233409E-14
	0,0001	1,424551910522E-13	1,506584980188E-13
50	0,1	2,802687033948E-15	2,022041963117E-14
	0,01	2,804080236501E-15	2,021584587999E-14
	0,001	1,380000631250E-14	2,809841990030E-14
	0,0001	1,374830263452E-13	2,773568506167E-13
100	0,1	2,801401108398E-15	2,316877326915E-14
	0,01	2,802794455071E-15	2,316748046858E-14
	0,001	1,379463085260E-14	2,402692051274E-14
	0,0001	1,374315407502E-13	1,609353308293E-13
150	0,1	2,801175493398E-15	4,416205667432E-14
	0,01	2,802568889279E-15	4,416096016245E-14
	0,001	1,379370509300E-14	4,496211917853E-14
	0,0001	1,374227030200E-13	2,047893878929E-13
200	0,1	2,801102827011E-15	6,731798116360E-14
	0,01	2,802495957316E-15	6,731703968827E-14
	0,001	1,379341666683E-14	6,806496177097E-14
	0,0001	1,374199618658E-13	2,342648651422E-13
300	0,1	2,801067495107E-15	1,176039748582E-13
	0,01	2,802460612694E-15	1,176032419226E-13
	0,001	1,379328312615E-14	1,182776108226E-13
	0,0001	1,374187190651E-13	2,728433390807E-13

Tabela 6.11: Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 8$ em $x = 0,5$ cm.

N	h	$\mathcal{R}_{(R)}$	$\mathcal{R}_{(N)}$
100	0,1	8,716588158750E-14	3,024739575015E-14
	0,01	8,716666677831E-14	3,024490938949E-14
	0,001	9,545250774349E-14	3,207353623455E-14
	0,0001	5,547287095921E-13	2,357383720091E-13
150	0,1	1,293506189801E-13	6,946188254555E-14
	0,01	1,293532591143E-13	6,945933558322E-14
	0,001	1,363112397728E-13	7,148418140489E-14
	0,0001	5,567649568530E-13	3,619318844736E-13
200	0,1	1,715909743160E-13	7,008776758633E-14
	0,01	1,715945357469E-13	7,008631861906E-14
	0,001	1,778843767342E-13	7,132078867093E-14
	0,0001	5,570226088780E-13	2,740673938720E-13
300	0,1	2,561230170365E-13	1,348453711256E-13
	0,01	2,561274990833E-13	1,348441270973E-13
	0,001	2,617465754061E-13	1,360423884073E-13
	0,0001	5,572666468281E-13	3,515626146033E-13

Tabela 6.12: Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando $L = 82$ em $x = 0,5$ cm.

N	h	$\mathcal{R}_{(R)}$	$\mathcal{R}_{(N)}$
300	0,1	4,731426866108E-13	1,165102968053E-13
	0,01	4,731266395083E-13	1,165065651648E-13
	0,001	4,807885763201E-13	1,181599861870E-13
	0,0001	1,084909938849E-12	3,322223376459E-13
400	0,1	3,212008782254E-13	1,777869437401E-13
	0,01	3,211947172468E-13	1,777837057376E-13
	0,001	3,243021353723E-13	1,793222837102E-13
	0,0001	5,527558000834E-13	3,787608078165E-13
600	0,1	4,816944909129E-13	3,112036907795E-13
	0,01	4,816902995642E-13	3,112011336797E-13
	0,001	4,840019054173E-13	3,125789868441E-13
	0,0001	5,529397362844E-13	4,401717446151E-13

Tabela 6.13: Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 299$ em $x = 0,5$ cm.

Assim como em $x = 0$, os resultados apresentados nas tabelas 6.11, 6.12 e 6.13, mostram que os valores encontrados para os resíduos, de ambos os métodos, variam com uma ordem de grandeza de 10^{-12} a 10^{-15} , significando que os métodos também convergem para a solução do problema no ponto $x = 0,5$ cm.

Por fim, as tabelas abaixo apresentam os resultados dos resíduos dos métodos LTS_N Recursivo e LTS_N Não-Espectral no ponto final da placa:

N	h	$\mathcal{R}_{(R)}$	$\mathcal{R}_{(N)}$
8	0,1	1,192781344574E-15	1,260027779053E-15
	0,01	1,176238067504E-15	1,391138006444E-15
	0,001	7,452538443286E-15	2,563594319665E-14
	0,0001	7,313276256161E-14	2,680839950987E-13
50	0,1	5,515250534992E-15	1,407318610426E-14
	0,01	3,450126161877E-15	1,310258728235E-14
	0,001	2,363589942202E-14	2,430641693635E-13
	0,0001	2,944961552610E-13	2,578033112257E-12
100	0,1	1,200560107022E-14	1,590781425855E-14
	0,01	7,138400230103E-15	1,514665948759E-14
	0,001	4,682953245863E-14	2,413755747039E-13
	0,0001	5,865088593459E-13	2,586385442974E-12
150	0,1	1,863666581598E-14	2,996114410742E-14
	0,01	1,162382752179E-14	2,886736039449E-14
	0,001	6,208147316673E-14	3,973746789862E-13
	0,0001	7,991344800520E-13	4,304400084559E-12
200	0,1	2,529339156344E-14	4,633502125833E-14
	0,01	1,669436823843E-14	4,399416724771E-14
	0,001	7,149063870892E-14	5,260282320123E-13
	0,0001	9,533407081824E-13	5,765307907031E-12
300	0,1	3,863089845238E-14	8,673783702677E-14
	0,01	2,800559922027E-14	7,694143517433E-14
	0,001	7,861871829082E-14	7,061581579549E-13
	0,0001	1,144861893402E-12	7,945357956919E-12

Tabela 6.14: Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 8$ em $x = 1$ cm.

N	h	$\mathcal{R}_{(R)}$	$\mathcal{R}_{(N)}$
100	0,1	5,329002010297E-14	1,927335394978E-14
	0,01	5,042223286337E-14	1,771147653278E-14
	0,001	5,967125964032E-13	3,057420163252E-13
	0,0001	6,294450233463E-12	3,288224058703E-12
150	0,1	7,799685708748E-14	4,563579526640E-14
	0,01	7,479426611259E-14	4,056244677384E-14
	0,001	7,877611939084E-13	6,103082978135E-13
	0,0001	8,375210819943E-12	6,640552030320E-12
200	0,1	1,025707283576E-13	4,986870963366E-14
	0,01	9,925459571954E-14	4,086511737923E-14
	0,001	9,230903736476E-13	5,363180674979E-13
	0,0001	9,898572978899E-12	5,908890438988E-12
300	0,1	1,518492260244E-13	1,034024740758E-13
	0,01	1,486228535055E-13	7,872037543385E-14
	0,001	1,082345140865E-12	7,946926285760E-13
	0,0001	1,183111235523E-11	9,002986804947E-12

Tabela 6.15: Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 82$ em $x = 1$ cm.

N	h	$\mathcal{R}_{(R)}$	$\mathcal{R}_{(N)}$
300	0,1	2,986188668478E-13	7,848252537118E-14
	0,01	2,993160194813E-13	6,250690129101E-14
	0,001	1,967130445356E-12	6,706953703693E-13
	0,0001	2,190365056776E-11	7,534164718840E-12
400	0,1	2,070268318418E-13	1,278449728779E-13
	0,01	2,108440343769E-13	9,790538886469E-14
	0,001	1,104358302806E-12	8,186495439468E-13
	0,0001	1,261289815174E-11	9,476153846894E-12
600	0,1	3,370351587323E-13	2,389532018657E-13
	0,01	3,495830434769E-13	3,218805055919E-13
	0,001	1,150498044179E-12	9,607747426431E-13
	0,0001	1,395369163497E-11	1,192143816631E-11

Tabela 6.16: Resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral considerando anisotropia $L = 299$ em $x = 1$ cm.

Pelos resultados apresentados nas tabelas 6.14, 6.15 e 6.16, percebemos que os resíduos dos métodos Recursivo e Não-Espectral, também se aproximam de zero. Os valores encontrados, variam com uma ordem de 10^{-11} a 10^{-15} e mostram que os métodos, mais uma vez, convergem para a solução no ponto $x = 1$ cm.

Analisando todas as tabelas desta seção, podemos concluir que a solução encontrada para o fluxo escalar de partículas do problema (6.1) pelos métodos Recursivo e Não-Espectral, se aproxima muito bem da solução exata. Essa análise foi feita através do uso de resíduos, onde podemos ver que ambos os métodos são convergentes pois, o residual encontrado em cada método, considerando os mesmos parâmetros e ordens de quadraturas variadas, formam uma sequência de valores próximos a zero. Além disso, esses resultados podem ser utilizados para comprovar que as diferenças entre os métodos, apresentadas nas figuras 6.1, 6.2 e 6.3, estabilizam conforme aumentamos a ordem de quadratura.

7 CONCLUSÕES

Nesse trabalho, comparamos dois métodos de resolução para a aproximação em ordenadas discretas da equação do transporte de partículas unidimensional em geometria cartesiana. Descrevemos, inicialmente, o método LTS_N Recursivo, que reconstrói de forma ordenada a solução LTS_N de problemas anisotrópicos a partir de um sistema recursivo de soluções isotrópicas. Em seguida, apresentamos o método LTS_N Não-Espectral, que tem a mesma proposta do método Recursivo para a resolução do sistema de equações S_N , mas que não utiliza o cálculo de autovalores e autovetores associados a matriz LTS_N do sistema de equações diferenciais ordinárias.

Em cada método decomparamos a matriz associada ao sistema de forma diferente. No método Recursivo, decomparamos a matriz LTS_N anisotrópica como a soma de uma matriz contendo a parte isotrópica e outra contendo a parte anisotrópica. No método Não-Espectral, dividimos a matriz como a soma de duas matrizes, uma delas, contendo a diagonal principal e a outra, contendo os demais elementos do complemento da matriz LTS_N anisotrópica. As soluções encontradas pelos métodos são obtidas através de um sistema recursivo, onde o termo fonte é obtido pelas soluções anteriores desse sistema, considerando no primeiro sistema fonte nula e as condições iniciais do problema original. Observamos que, pela forma como decomparamos a matriz do método LTS_N Não-Espectral, conseguimos operar com as equações diferenciais ordinárias desacopladas, em cada etapa da solução do sistema recursivo. Isso elimina o problema de *overflow* que surge na solução pelo método LTS_N Clássico e que permanece na solução pelo método LTS_N Recursivo.

Apresentamos e comparamos os resultados numéricos para problemas de transporte anisotrópicos em meios homogêneos, onde consideramos uma placa de uma região. Analisando os resultados, percebemos que a diferença entre os mé-

todos cresce conforme o aumento da ordem de quadratura. O motivo pelo qual essa diferença aumenta, está associado ao condicionamento de matrizes pois, pelo método Recursivo, a matriz associada ao sistema é mal-condicionada. Observamos que a diferença entre o maior e o menor autovalor da matriz LTS_N varia muito, gerando problemas de condicionamento de matrizes. Foi também proposto o método Não-Espectral, que tem como principal diferença, a forma de resolver o sistema de equações diferenciais sem fazer o uso do método da diagonalização. Embora existam problemas relacionados ao mal-condicionamento de matrizes, a diferença entre os métodos não configura uma não-convergência para a solução exata do problema.

Utilizamos a técnica dos resíduos nos métodos Recursivo e Não-Espectral para verificar que ambos convergem pontualmente para a mesma solução da equação do transporte. Observamos através dos resultados que isso ocorre pois, quando aplicados a problemas contendo os mesmos parâmetros, o residual encontrado foi uma sequência próxima de zero. Na tentativa de verificar se a diferença entre os métodos se torna estável para ordens de quadraturas mais elevadas constatamos, através das simulações numéricas, que o erro continua crescendo. Porém, a medida que aumentamos a ordem de quadratura, esse erro varia com uma taxa menor quando comparamos com as diferenças obtidas com ordens de quadraturas mais baixas, mostrando que a diferença entre os métodos é muito pequena e estabiliza conforme aumentamos a ordem de quadratura. Além disso, a estabilidade pode ser verificada através do uso da técnica dos resíduos pois, os resultados encontrados pelos métodos variam com ordem próxima de zero. A análise da diferença entre os métodos foi exposta em forma de gráficos, onde geramos resultados para ordens de quadraturas até $N = 2000$ pontos.

Os métodos que comparamos neste trabalho produzem boas aproximações para a equação de transporte de partículas neutras. Porém, cabe ressaltar que o método LTS_N Não-Espectral ainda precisa de ajustes para o cálculo das inte-

grais de convolução, pois o número de pontos que utilizamos em nossas simulações fazem com que a aproximação, por meio deste método, não seja tão boa quanto o esperado. Para isso, precisamos elevar o número de pontos de Spline utilizados em nossas rotinas, em uma placa pequena, o que demanda um custo computacional muito alto.

Ressaltamos que o objetivo deste trabalho foi concluído, pois apresentamos uma análise de comparação entre dois métodos de solução da equação do transporte unidimensional aplicada a problemas em meios homogêneos. Além disso, a análise dos resíduos nos permite concluir que os métodos que comparamos se aproximam da mesma solução e a diferença entre eles se torna estável quando consideramos ordens de quadraturas mais elevadas.

Como perspectivas futuras do nosso trabalho, vamos investigar novas formas de obter uma aproximação polinomial para o termo da integral de convolução para o método LTS_N Não-Espectral como, por exemplo, a utilização dos aproximantes de Padé [47], que são técnicas utilizadas para aproximar funções por meio de funções racionais. Além disso, para o método LTS_N Recursivo, buscaremos novas técnicas de resolução para o sistema linear, que neste trabalho foram obtidas através do método de fatoração LU, visando uma melhor aproximação para os resultados. Vamos verificar também, a análise da estabilidade da diferença entre os métodos através do uso dos resíduos considerando ordens de quadraturas maiores do que as apresentadas neste trabalho. Por fim, vamos analisar os resíduos de problemas em meios heterogêneos, para mostrar que os métodos Recursivo e Não-Espectral também convergem para a solução exata.

Referências Bibliográficas

- [1] J.J. Duderstadt, W.R. Martin. Transport Theory, *Willey*, New York, 1979.
- [2] M. Vasudevaiah, K. Balamurugan. Heat transfer of rarefied gases in a corrugated microchannel. *International Journal of Thermal Sciences*, 40: 454-468, 2001.
- [3] G. Karniadakis, A. Beskok, N. Aluru. *Microflows and Nanoflows*, New York, 2005.
- [4] M. Gad-El-Hak. *The MEMS Handbook*, CRC Press, Boca Raton 2006.
- [5] T. Ohwada, Y. Sone. Analysis of thermal stress slip flow and negative thermophoresis using the Boltzmann equation for hard-sphere molecules. *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, 11: 389-414, 1992.
- [6] F. Sharipov. Non-isothermal gas flow through rectangular microchannels. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 9: 394-401, 1999.
- [7] J.F.P. Filho. A equação de Boltzmann e a modelagem de fluídos em micro e macroescalas. Dissertação de mestrado pelo programa de pós-graduação em matemática aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.
- [8] J.J. Duderstadt, L.J. Hamilton. Nuclear Reator Analysis, *John Willey*, New York, 1976.
- [9] J. Wood. *Computational Methods in Reactor Shielding*. Pergamon Press, Oxford, England, 1982.

- [10] K.M. Case. Elementary solution of transport equation and their applications. *Annals of Physics*, 9:1-23, 1960.
- [11] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Dover books on advanced mathematics. Dover Publications, 1960.
- [12] Barichello, L.B.; Vilhena, M.T.: The LTSn method: a new analytical approach to solve the neutron transport equation. *Kerntechnik*, 56, 1991.
- [13] M.T. Vilhena and L.B. Barichello. A general approach to the one-group one dimensional transport equation. *Kerntechnik*, 33(58): 182-184, 1993.
- [14] M. Vilhena and L. Barichello. An analytical solution for the multigroup slab geometry discrete ordinates problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 24: 1337-1352, 1995.
- [15] C. Segatto. Extensão da Formulação LTSN para Problemas de Transporte sem Simetria Azimutal e Problemas Dependentes do Tempo. Tese de doutorado pelo programa de pós-graduação em engenharia mecânica (promec), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1995.
- [16] C.F. Segatto, M.T. Vilhena, and M.G. Gomes. The one-dimensional LTSN solution in a slab with high degree of quadrature. *Annals of Nuclear Energy*, 26:925-934, 1999.
- [17] G.A. Gonçalves, C. F. Segatto, and M. T. Vilhena. The LTSN particular solution in a slab for an arbitrary source and large order of quadrature. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 66: 271-276, 2000.
- [18] L. Tavares. Cálculo dos parâmetros superficiais de radiação pelo método LTSN . Dissertação de mestrado pelo programa de pós-graduação em

engenharia mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

- [19] C. F. Segatto, M. T. Vilhena, and L. S. Tavares. The determination of radiant parameters by the LTSN method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 70: 227-236, 2001.
- [20] F.K. Tomaschewski, C.F. Segatto, and M.T. Vilhena. *Integral Methods in Science and Engineering: Progress in Numerical and Analytic Techniques*, chapter A Genuine Analytical Solution for the SNMulti-Group Neutron Equation in Planar Geometry, pages 329-339. Springer New York, 2013.
- [21] R. Vasques. A review of particle transport theory in a binary stochastic medium. Dissertação de mestrado pelo programa de pós-graduação em 60 engenharia mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.
- [22] J.D. Brancher, M.T. Vilhena, C. F. Segatto : The LTSn Solution for Radiative Transfer Problem Without Azimuthal Symmetry with Severe Anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 62: 743-753, 1999.
- [23] M.R.R. Simch, C.F. Segatto, M.T. Vilhena. An analytical solution for the SN radiative transfer equation with polarization in a slab by the LTSN method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 97: 424-435, 2006.
- [24] C.F. Segatto, M.T. Vilhena, J.D. Brancher: The One-Dimensional LTSn Formulation for High Degree of Anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 61: 39-43, 1999.

- [25] C.F. Segatto, F.K. Tomaschewski, R.C. Barros, M.T. Vilhena. On the solution of the S N multigroup kinetics equations in multilayer slabs. *Annals of Nuclear Energy*, 104: 229-236, 2017.
- [26] C. Batistela and M. Vilhena. Cálculo de criticalidade pelo método LTSN . XI ENFIR - *Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-hidráulica*, 1: 226-231, 1997.
- [27] C. Batistela and M. Vilhena. Criticality by the LTSN method. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 34: 603-606, 1997.
- [28] C. Batistela, M. Vilhena, and V. Borges. Determination of the effective multiplication factors in a slab by the LTSN method. *Annals of Nuclear Science*, 26: 761-766, 1999.
- [29] G. Orengo, M.T. Vilhena, C.O. Graça, A.D. Caldeira, and G.A. Gonçalves. Recent advances in the LTSN method for criticality calculations in slab geometry. *Annals of Nuclear Energy*, 31:2195-2202, 2004.
- [30] F. Tomaschewski. Solução da equação SNmultigrupo de transporte dependente do tempo em meio heterogêneo. Dissertação de mestrado pelo programa de pós-graduação em matemática aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.
- [31] S.P. Renz. Solução da equação de transferência radiativa dependente do tempo pelos métodos espectral e LTS_N . Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1999.
- [32] J. Oliveira, A. Cardona, M. Vilhena. Solution of the One-Dimension Time-Dependent Discrete Ordinates Problem in a Slab by the Spectral and LTS_N Methods, *Annals of Nuclear Energy*, 29: 13-20, 2002a.

- [33] C.F. Segatto, M.T. Vilhena, T.T. Gonçalez. An Analytical Integral Formulation for the Time-Dependent S_N Transport Equation in a Slab by The Double Laplace Transform Technique, *Kerntechnik*, 73: 176-178, 2008.
- [34] H.F.C. Velho, M.T. Vilhena, M.R. Retamoso, R.P. Pazos, : An Application of the LTSn Method on an Inverse Problem in Hydrological Optics. *Progress in Nuclear Energy*, 42: 457-468, 2003.
- [35] M.T. Vilhena, R.P. Pazos, : Convergence of the LTSn method: approach of C_0 semigroups. *Progress in Nuclear Energy*, 34: 77-86, 1999.
- [36] M.T. Vilhena, R.P. Pazos, : Convergence in transport theory. *Applied Numerical Mathematics*, 30: 79-92, 1999.
- [37] C.F. Segatto, M.T. Vilhena, and S. Leite. The LTSN angular multigrid approach in a slab. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 95:415-442, 2005.
- [38] M.T Vilhena, H.F.C. Velho, C.F. Segatto, G.A. Gonçalves: A Transport Equation Solution in Cylindrical Geometry with Anisotropic Scattering Using Decomposition and Hankel Transform Techniques. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005.
- [39] J. Zabadal, M.T. Vilhena, and L.B. Barichello. Solution of the threedimensional one group discrete ordinates problem by the LTSN method. *Annals of Nuclear Energy*, 22:131-134, 1995.
- [40] G.A Gonçalves, S. Bogado, M.T. Vilhena: Solution of the Neutron Transport Problem with Anisotropic Scattering in Cylindrical Geometry by the Decomposition Method. *Annals of Nuclear Energy*, 36: 98-102, 2009.

- [41] J.C.L. Fernandes, B.E.J. Bodmann, M.T. Vilhena: On multi-group neutron transport in planar one dimensional geometry:A solution for a localized pulsed source. *Annals of Nuclear Energy*, 101: 552-558, 2017.
- [42] T. Foletto. Construção da solução LTSN anisotrópica a partir de um sistema recursivo de solução LTSN isotrópicas. Dissertação de mestrado pelo programa de pós-graduação em matemática aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.
- [43] B. Rigolli. Método LTSN Não Espectral. Dissertação de mestrado pelo programa de pós-graduação em matemática aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.
- [44] J. J. Duderstadt, W. R. Martin. Transport Theory, *John Wiley and Sons*. 1975.
- [45] R.D.M Garcia and C.E. Siewert. "Benchmark Results in Radiative Transfer", *Transport Theory and Statistical Physics*, 14: 437-483, 1985.
- [46] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical Recipes in FORTRAN 77: Volume 1, Volume 1 of Fortran Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Number 2. Cambridge University Press, 1992.
- [47] M. C. K. Aguilera-Navarro, V. C. Aguilera-Navarro, R. C. Ferreira, N. Teramon. Os aproximantes de Padé. *Revista Matemática Universitária*, Brasil, v. 26/27, p. 49-66, 1999.